

Φυσική Νετρίνων

Δημήτρης Κατσινής
ΑΜ: 200300098

Τομέας Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων
Τμήμα Φυσικής του Εθνικού & Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών

Επιβλέπων Καθηγητής: Α. Λαχανάς

Αθήνα, 2009

Η εργασία εκπονήθηκε στον τομέα Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων του τμήματος Φυσικής του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών κατά το ακαδημαϊκό έτος 2008-2009. Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της εργασίας Καθηγητή κ Α. Λαχανά για την ανάθεση ενός τόσο ενδιαφέροντος θέματος και για τους ορίζοντες που μου άνοιξε μέσα από τις συζητήσεις μας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ Carlo Guinti για τα σχόλια του όσον αφορά κάποια τεχνικά ζητήματα στα διαγράμματα αποκλεισμένων περιοχών. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους με βοήθησαν να αποκτήσω τις γνώσεις που έχω.

Δημήτρης Κατσινής

Περιεχόμενα

Περίληψη	vii
1 Εισαγωγή	1
2 Η Μίξη στο Καθιερωμένο Πρότυπο	7
2.1 Στοιχεία του Καθιερωμένου Προτύπου	7
2.2 Ο Μηχανισμός Higgs	8
2.3 Εισαγωγή στην Μίξη	12
2.3.1 Λεπτόνια	12
2.3.2 Quarks	15
2.4 Πίνακας Μίξης	18
2.4.1 Διαγωνοποίηση	19
2.4.2 Φυσικές Παράμετροι	20
2.4.3 Παραμετροποίηση	21
2.5 Παραβίαση της συμμετρίας CP	27
3 Ταλαντώσεις Νετρίνων	31
3.1 Εισαγωγή	31
3.2 Ταλαντώσεις στο Κενό	32
3.3 Σχόλια - Συμπεράσματα	35
3.4 Ταλαντώσεις και Συμμετρίες	38
3.4.1 CPT	38
3.4.2 CP	39
3.4.3 T	39
3.5 Ταλαντώσεις για 2 Νετρίνα	40
3.6 Ένας πιο αυστηρός Υπολογισμός	41
3.7 Χρειάζονται τα Κυματοπακέτα;	46
3.8 Ταλαντώσεις στην Ύλη	49
4 Η Πειραματική Πλευρά	53
4.1 Είδη Πειραμάτων	53
4.1.1 Short BaseLine (SBL)	53
4.1.2 Long BaseLine (LBL)	55
4.1.3 Very Long BaseLine (VLBL)	56
4.2 Διαγράμματα Αποκλισμένων Περιοχών	56

4.3	Ηλιακά Νετρίνα	65
4.3.1	Ορυχείο Homestake	68
4.3.2	Πειράματα Γαλλίου ^{71}Ga	68
4.3.3	Ανιχνευτές Cherenkov υγρού	70
4.4	Ατμοσφαιρικά Νετρίνα	74
4.5	Επίγεια Πειράματα	78
4.5.1	Πειράματα Αντιδραστήρων	79
4.5.2	Πειράματα Επιταχυντών	81
4.6	Συνολική Ανάλυση	82
4.6.1	Δύο Είδη Ταλαντώσεων	83
4.6.2	Μίξη δυο μεγάλων Γωνιών	84
4.6.3	Όρια στο $ U_{e3} $	87
4.6.4	Ανάλυση μέσω Μίξης δυο μεγάλων Γωνιών	88
4.6.5	Συνολικά αποτελέσματα	89
4.7	Η Ιεραρχία των Νετρίνων	91
4.8	LSND και MiniBooNe	92
5	Μάζα και Μίξη των Νετρίνων	95
5.1	Όροι Μάζας Dirac και Μίξη	95
5.2	Όροι Μάζας Majorana	98
5.2.1	Μίξη Majorana Νετρίνων	99
5.3	Όροι Μάζας Dirac και Majorana για 1 Γενιά	101
5.3.1	Μίξη	102
5.3.2	Ασθενείς Αλληλεπιδράσεις	104
5.3.3	Μέγιστη Μίξη	104
5.3.4	Όριο Dirac	105
5.3.5	Ο Μηχανισμός See-Saw	106
5.4	Όροι Μάζας Dirac και Majorana για 3 Γενίες	108
5.4.1	Ασθενείς Αλληλεπιδράσεις	110
5.4.2	Ο Μηχανισμός See-Saw	111
5.4.3	Διαγωνοποίηση	112
5.5	Η Σχέση με Μεγαλοενοποιημένες Θεωρίες	113
6	Άμεση μέτρησης της μάζας των νετρίνων	115
6.1	β - Διάσπαση	115
6.2	Διπλή β - Διάσπαση	119
6.2.1	Φυσιολογικό Φάσμα	122
6.2.2	Ανεστραμμένο Φάσμα	123

6.3 Άλλα Όρια	123
-------------------------	-----

Παράρτημα	127
------------------	------------

1 Σχετικιστική Κβαντομηχανική	127
1.1 Οι Ομάδες Lorentz και Poincare	127
1.1.1 Αναπαραστάσεις	129
1.1.2 Μετασχηματισμοί Πεδίων	132
1.1.3 Τελεστές Casimir	133
1.2 Η εξίσωση Dirac	135
1.2.1 Σχετικιστική Συναλλοιότητα	137
1.2.2 Χειραλικότητα	138
1.2.3 Ελικότητα	141
1.2.4 Λύσεις	142
1.3 Σωματίδια Majorana	148
1.3.1 Συμμετρίες	151
1.3.2 Φορμαλισμός δυο Συνιστωσών	152

Βιβλιογραφία	155
---------------------	------------

Περίληψη

Στο πρώτο κεφάλαιο υπάρχει μια εισαγωγή στην φυσική νετρίνων μέσω ιστορικής αναδρομής καθώς επίσης και μια αναφορά στα μεγάλα ερωτήματα που ενδεχομένως να απαντηθούν από τη φυσική νετρίνων αλλά και τα ερωτήματα που δημιουργούνται.

Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετάται η έννοια της μίξης στα πλαίσια του Καθιερωμένου Προτύπου. Η μελέτη αυτή αφενός θα μας εξοικειώσει με το φαινόμενο της μίξης, αφετέρου θα μας οδηγήσει στις ταλαντώσεις νετρίνων ως εφαρμογή της μίξης στα νετρίνα. Αρχικά παρουσιάζεται ο μηχανισμός Higgs. Με αφετηρία την μίξη των quarks αναλύεται η διαγωνοποίηση του πίνακα μάζας και οι φυσικές παράμετροι ενός πίνακα μίξης. Τέλος αναφέρονται οι οριακές μορφές του και οι πειραματικές τιμές.

Το τρίτο κεφάλαιο πραγματεύεται τις ταλαντώσεις νετρίνων. Αρχικά υπάρχει ένας ενδεικτικός υπολογισμός της πιθανότητας των ταλαντώσεων νετρίνων στην γενική περίπτωση και εν συνεχεία στην περίπτωση των δυο νετρίνων. Ακολουθεί μια πληρέστερη απόδειξη η οποία εμπεριέχει την συμβολή της μάζας των νετρίνων στην παραγωγή τους από μια διαδικασία. Τέλος περιγράφονται εν συντομία οι ταλαντώσεις μέσα στην ύλη.

Το τέταρτο κεφάλαιο αφορά τις πειραματικές τεχνικές της φυσικής νετρίνων και τους διάφορους τύπους πειραμάτων. Αρχικά παρουσιάζονται οι πειραματικές τεχνικές. Εν συνεχεία αναλύεται το πρόβλημα των ηλιακών νετρίνων και τα σχετικά πειράματα που έχουν γίνει. Ακολούθως παρουσιάζεται η παραγωγή νετρίνων στην ατμόσφαιρα από την κοσμική ακτινοβολία και τα αντίστοιχα πειράματα. Αναπτύσσονται τα πειράματα με επιταχυντές και πυρηνικούς αντιδραστήρες. Τέλος γίνεται μια συνολική εκτίμηση των αποτελεσμάτων και γίνεται μια αναφορά στο σήμα του LSND και του MiniBooNe.

Στο πέμπτο κεφάλαιο μελετάται η μάζα των νετρίνων και αναλύεται η μίξη σε κάθε περίπτωση. Αναλύονται οι όροι μάζας για την περίπτωση Dirac και Majorana νετρίνων. Παρουσιάζεται ο μηχανισμός See-Saw. Τέλος αναφέρονται στοιχεία μεγαλοενοποιημένων θεωριών που σχετίζονται με την φυσική νετρίνων.

Στο έκτο κεφάλαιο αναφέρονται οι δυνατοί τρόποι που υπάρχουν για απευθείας μέτρηση της μάζας των νετρίνων. Παρουσιάζονται η διάσπαση β , η διπλή διάσπαση β χωρίς εκπομπή νετρίνων. Ακόμα αναφέρονται όρια για την μάζα των νετρίνων που προκύπτουν από διασπάσεις πιονίων και τ , από νετρίνα υπερκαινοφανών και την κοσμολογία.

Στο παράρτημα εισάγεται η θεωρία που αποτελεί τη «γλώσσα» της θεωρητικής φυσικής στοιχειωδών σωματιδίων και επιχειρείται η ανάδειξη της διαφοράς ανάμεσα στα σωματίδια με και χωρίς μάζα. Γίνεται μια σύντομη μελέτη των μετασχηματισμών Lorentz και της ομάδα που σχηματίζουν. Εξετάζεται η εξίσωση Dirac, η αναλλοιωτότητά της στους μετασχηματισμούς Lorentz και οι λύσεις της. Ακόμα αναλύεται η έννοια της χειραλικότητας και της ελικότητας και η συμπεριφορά τους σε μετασχηματισμούς Lorentz. Τέλος μελετάται η εξίσωση Majorana και οι σπίνορές της.

Ακολουθεί βιβλιογραφία

1 Εισαγωγή

Τα νετρίνα θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ως τα πιο μυστηριώδη και λιγότερο γνωστά σωματίδια. Ο Pauli πρότεινε την ύπαρξή τους σε μια προσπάθεια να εξηγήσει το συνεχές φάσμα της β - διάσπασης που παρατηρήθηκε στα πειράματα εκείνης της εποχής (1930). Ο Pauli θεωρούσε την πράξη του αυτή «τρομερή», αφού μίλησε για ένα σωματίδιο που δεν μπορούσε να ανιχνευτεί, μη μπορώντας να αντιληφθεί εκείνη την περίοδο τους νέους ορίζοντες που άνοιξε με αυτή του την πρόταση. Η ιδέα άργησε να γίνει ευρέως αποδεκτή καθώς ακόμα και ο ίδιος ο Pauli είχε αμφιβολίες για την πρότασή του.

Το 1933 ο Enrico Fermi, σε μελέτες του, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι τα νετρίνα μπορεί να είναι άμαζα και την επόμενη χρονιά με μια εργασία σταθμό για την φυσική στοιχειωδών σωματιδίων κατασκεύασε μια θεωρία για την β - διάσπαση. Ουσιαστικά ο Fermi στηρίχθηκε στην κβαντική ηλεκτροδυναμική και θεμελίωσε την θεωρία του ως σημειακή αλληλεπίδραση τεσσάρων φερμιονίων. Αργότερα (1936) οι Gamow και Teller προκειμένου να ερμηνεύσουν την αλλαγή του spin κατά μια μονάδα που παρατηρείται ανάμεσα στον μητρικό και τον θυγατρικό πυρήνα σε ορισμένες β - διασπάσεις εισήγαγαν στην θεωρία ψευδοανυσματικά ρεύματα, με τέτοιο τρόπο όμως ώστε η ομοτιμία να διατηρείται. Με αφορμή την χρήση ψευδοανυσματικών ρευμάτων άνοιξε ο δρόμος για την διερεύνηση της χρήσης βαθμωτών, ψευδοβαθμωτών ή ακόμα και τανυστικών ρευμάτων. Αυτή η γενίκευση σε συνδυασμό με ορισμένα λανθασμένα πειραματικά αποτελέσματα είχε ως αποτέλεσμα να ακολουθήσει μια περίοδος σύγχυσης, η οποία διήρκησε σχεδόν δύο δεκαετίες, σχετικά με την δομή που πρέπει να έχει το ρεύμα της ασθενούς αλληλεπίδρασης.

Το 1937 ανακαλύφθηκε το μόνιο και 10 χρόνια αργότερα ο Bruno Pontecorvo πρότεινε την καθολικότητα της αλληλεπίδρασης Fermi, ώστε να μην αφορά μόνο τα ηλεκτρόνια, αλλά και τα μόνια. Η ιδέα αυτή αναπτύχθηκε από αρκετούς επιστήμονες (J.A. Wheeler, T.D. Lee, C.N. Yang, O. Klein και άλλους) και οδήγησε στην έννοια της «γενιάς» των σωματιδίων.

Παρόλο που η θεωρία έμοιαζε αρκετά επιτυχημένη, εξακολουθούσε να υπάρχει ένα πρόβλημα. Κανείς δεν είχε παρατηρήσει το νετρίνο! Ο Hans Bethe έχοντας υπολογίσει την εξαιρετικά μικρή ισχύ της ασθενούς αλληλεπίδρασης, ήδη από το 1934 πίστευε ότι τελικά μπορεί να μην παρατηρηθεί ποτέ το νετρίνο. Ωστόσο πάλι ο Pontecorvo με πιέσεις του ώθησε τους F. Reines και C.L. Cowan να ψάξουν για το νετρίνο χρησιμοποιώντας την αντίστροφη β - διάσπαση με την οποία τα αντινετρίνα θα παρήγαγαν ποζιτρόνια. Μετά από αρκετά πειράματα διαφόρων τύπων τον Ιούνιο του 1956, χρησιμοποιώντας αντινετρίνα

από έναν πυρηνικό αντιδραστήρα και έναν σπινθηριστή 1.400 λίτρων υγρού, το νεutrino παρατηρήθηκε και ο Reines βραβεύτηκε με το βραβείο Nobel 40 χρόνια αργότερα (Ο Cowan είχε απεβιώσει).

Στο ενδιαμέσο ωστόσο είχαν προκύψει και άλλα προβλήματα. Η συμπεριφορά κάποιων μεσονίων ήταν ιδιαίτερα περίεργη. Το σωματίδιο θ διασπóταν σε δυο πiónια, ενώ το τ διασπóταν σε 3 πiónια, ωστόσο και το θ και το τ είχαν την ίδια μάζα, το ίδιο σπιν, το ίδιο φορτίο. Ήταν το ίδιο σωματίδιο, αυτό που πλέον ονομάζεται καόνιο. Η διάσπαση του καονίου και με τους δυο τρόπους παραβίαζε την διατήρηση της ομοτιμίας. Η ιδέα αναπτύχθηκε περαιτέρω από τους Yang και Lee, οι οποίοι ανήγαγαν την παραβίαση της διατήρησης της ομοτιμίας σε κανόνα για κάθε είδους ασθενή αλληλεπίδραση. Μετά την δημοσίευση της εργασίας των Yang και Lee, η οποία τιμήθηκε με βραβείο Nobel, η Wu παρατήρησε την παραβίαση της ομοτιμίας στην β - διάσπαση του ^{60}Co . Αργότερα παρατηρήθηκε παραβίαση της διατήρησης της ομοτιμίας και στις διασπάσεις $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ και $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$.

Και πάλι η κατάσταση ήταν εξαιρετικά μπερδεμένη. Πλέον η Lagrangian μπορούσε όχι μόνο να έχει διαφόρων ειδών ρεύματα, αλλά και να περιέχει όρους που είτε διατηρούν είτε παραβιάζουν την διατήρηση της ομοτιμίας. Η λύση δόθηκε το 1958 με την οριστική επιλογή της $V - A$ μορφής του ρεύματος της ασθενούς αλληλεπίδρασης, έτσι ώστε η διατήρηση της ομοτιμίας να παραβιάζεται πάντα. Η θεωρία αυτή αναπτύχθηκε κυρίως από τους R.P. Feynmann, M. Gell-Mann και J.J. Sakurai. Η θεωρία $V - A$ στηρήχθηκε στην θεωρία του άμαζου νεutrino δυο συνιστωσών η οποία είχε προταθεί ένα χρόνο νωρίτερα από τους Lev Landau, T.D. Lee, C.N. Yang και Abdus Salam. Για να είμαστε απόλυτα ακριβείς ήδη από το 1929 ο H. Weyl είχε αναπτύξει αυτή την ιδέα αλλά ο Pauli την είχε απορρίψει, αφού παραβιάζει την διατήρηση της ομοτιμίας. Σύμφωνα με την θεωρία του άμαζου νεutrino δυο συνιστωσών τα νεutrína είναι αριστερόστροφα, τα αντινεutrína δεξιόστροφα και η δομή $V - A$ του ρεύματος προκύπτει αυτόματα. Το 1958 πράγματι η ελικότητα του νεutrino βρέθηκε αρνητική.

Η απουσία ορισμένων διασπάσεων οδήγησε στην εισαγωγή του λεπτονικού αριθμού L . Έτσι τα λεπτόνια έχουν $L = 1$, ενώ τα αντιλεπτόνια $L = -1$. Στο Καθιερωμένο Πρότυπο ο λεπτονικός αριθμός διατηρείται. Το πείραμα των Reines και Cowan είναι συμβατό με την διατήρηση του L , ενώ ο R. Davis δεν μπόρεσε να παρατηρήσει την σκέδαση $\bar{\nu}_e + ^{37}\text{Cl} \rightarrow ^{37}\text{Ar} + e^-$. Η απουσία της διάσπασης $\mu \rightarrow e + \gamma$ οδήγησε στην εισαγωγή ξεχωριστού λεπτονικού αριθμού για κάθε γενιά. Η διατήρηση του λεπτονικού αριθμού του μιονίου (L_μ) απαγορεύει την διαδικασία $\nu_\mu + n \rightarrow p + e^-$, οπότε ο Pontecorvo εξέφρασε τον ακόλουθο συλλογισμό: αν τα νεutrína που παράγονται από την διάσπαση του

πιονίου $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ δεν μπορούν να παράγουν e^- τότε το νεutrίνο ν_e της β -διάσπασης και το νεutrίνο ν_μ που της διάσπαση του πιονίου είναι διαφορετικά σωματίδια. Οι L.M. Lederman, M. Schwartz και J. Steinberger κατάφεραν το 1962 να ανιχνεύσουν το ν_μ και να κερδίσουν το βραβείο Nobel.

Η ηλεκτρασθενής ενοποίηση (1967) των Glashow, Weinberg και Salam ήταν ένας σταθμός για την θεωρία της ασθενούς αλληλεπίδρασης και φυσικά βραβεύτηκε με το βραβείο Nobel. Το μοντέλο βασιζόταν στην βαθμίδα $SU(2)_L \times U(1)_Y$ και πρότεινε την ύπαρξη ουδέτερων ρευμάτων, τα οποία διαδίδονται μέσω του μποζονίου Z . Επίσης το μοντέλο ενσωματώνει τον μηχανισμό Higgs, μέσω του οποίου τα άμαζα μποζόνια που παράγονται από την αυθόρμητη ρήξη της τοπικής συμμετρίας αποκτούν μάζα ενώ η θεωρία παραμένει επανακανονικοποιήσιμη. Οι αλληλεπιδράσεις ουδέτερου ρεύματος ανιχνεύθηκαν το 1973 στο CERN.

Την επόμενη χρονιά ανιχνεύθηκε το c quark, το οποίο είχε προβλεφθεί από τους Glashow, Iliopoulos και Maiani με τον μηχανισμό GIM. Το 1975 ο M. Perl παρατήρησε το τ λεπτόνιο, γεγονός που συνηγορούσε στην ύπαρξη τρίτης γενιάς σωματιδίων. Δύο χρόνια αργότερα παρατηρήθηκε το b quark και πολύ αργότερα (1995) το t quark. Το νεutrίνο ν_τ είναι το τελευταίο σωματίδιο που παρατηρήθηκε, μόλις το 2000. Το 1989 με μετρήσεις ακριβείας της διάσπασης του Z οι γενιές πιστοποιήθηκαν στις 3^1 . Το Καθιερωμένο Πρότυπο έχει σχεδόν συμπληρωθεί. Πλέον απομένει μόνο η παρατήρηση του μποζονίου Higgs. Στο ενδιάμεσο (1964) τα καόνια δημιουργούσαν και πάλι ένα νέο πρόβλημα: η διάσπαση του K^0 παραβιάζει την συμμετρία CP . Η παραβίαση της συμμετρίας CP ενσωματώθηκε στο Καθιερωμένο Πρότυπο μέσω της μίξης των 3 γενιών των quarks που προτάθηκε από τους M. Kobayashi και T. Maskawa το 1973, γενικεύοντας την μίξη 2 γενιών που είχε προτείνει ο N. Cabibbo. Οι Kobayashi και Maskawa βραβεύτηκαν με Nobel, όχι όμως και ο Cabibbo.

Μέχρι στιγμής, πέρα από τα διάφορα φαινόμενα που δεν έχουν ακόμα ερμηνευθεί, η μοναδική πειραματική απόκλιση από το Καθιερωμένο Πρότυπο είναι οι ταλαντώσεις νετρίνων. Βέβαια, για να είμαστε απόλυτα ακριβείς το Καθιερωμένο Πρότυπο χτίστηκε έτσι ώστε τα νετρίνα να είναι άμαζα και να μην συμμετέχουν δεξιόστροφα σωματίδια στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις, οπότε η φυσική νετρίνων δεν είναι τόσο σημαντική ως μια απρόσμενη απόκλιση από το Καθιερωμένο Πρότυπο, αλλά ως ένα βήμα για μια ακόμα πιο πλήρη θεωρία περιγραφής της φύσης.

Οι ταλαντώσεις νετρίνων προτάθηκαν το 1957 από τον Pontecorvo κατά

¹Για την ακρίβεια οι γενιές με νεutrίνο ελαφρύτερο από $m_Z/2$.

αναλογία των ταλαντώσεων $K^0 - \bar{K}^0$. Εκείνη την περίοδο οι ταλαντώσεις δεν είχαν την σημερινή τους έννοια, αλλά εισήχθησαν είτε ως ταλαντώσεις $\nu - \bar{\nu}$, είτε ως ταλαντώσεις $\nu - \nu_s$. Η πρώτη περίπτωση προέκυψε από την λανθασμένη όπως αποδείχθηκε φήμη ότι ο Davis είχε καταφέρει να παρατηρήσει την σκέδαση $\bar{\nu}_e + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow {}^{37}\text{Ar} + e^-$. Μετά την παρατήρηση του ν_μ οι Z. Maki, M. Nakagawa και S. Sakata, το 1967, πρότειναν ένα μοντέλο μίξης των ν_e και ν_μ το οποίο αναπτύχθηκε εν συνεχεία από τον Pontecorvo και έδωσε ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο ταλαντώσεων, πολύ κοντά στις ταλαντώσεις όπως τις γνωρίζουμε σήμερα.

Μπορούμε να προσδιορίσουμε την αφετηρία των πειραμάτων ταλαντώσεων νετρίνων στο πείραμα του ορυχείου Homestake. Ο Davies μετρούσε την ροή των νετρίνων μέσω της αντίδρασης $\nu_e + {}^{37}_{17}\text{Cl} \rightarrow e^- + {}^{37}_{18}\text{Ar}$ και την βρήκε περίπου το ένα τρίτο από την προβλεπόμενη ροή βάση της ηλιακής θεωρίας. Αυτό αποτέλεσε το λεγόμενο πρόβλημα των ηλιακών νετρίνων. Το πρόβλημα επιβεβαιώθηκε από τον M. Koshiba στο Kamiokande. Οι Davies και Koshiba βραβεύτηκαν με το βραβείο Nobel για την δουλειά τους. Τα πειράματα με ατμοσφαιρικά νετρίνα γεννήθηκαν ως ανεπιθύμητο υπόβαθρο των πειραμάτων που προσπαθούσαν να ανιχνεύσουν την διάσπαση του πρωτονίου. Το πρόβλημα των ηλιακών νετρίνων λύθηκε το 2002. Η επίλυση του προβλήματος βασίστηκε στις ταλαντώσεις νετρίνων και στο φαινόμενο MSW (Mikheev - Smirnov - Wolfenstein).

Ο συνδυασμός όλων των πειραματικών αποτελεσμάτων μας δίνει ένα πλαίσιο για τις εμπλεκόμενες παραμέτρους. Γνωρίζουμε την διαφορά τετραγώνων των μαζών ΔM_{21}^2 , την απόλυτη τιμή $|\Delta M_{31}^2| \approx |\Delta M_{32}^2|$ και τις δύο γωνίες μίξης θ_{12} και θ_{23} . Η τιμή της τρίτης γωνίας μίξης θ_{13} , η τιμή της φάσης CP για την περίπτωση των Dirac νετρίνων ή των 3 φάσεων για την περίπτωση των Majorana και το πρόσημο του ΔM_{31}^2 είναι ακόμα άγνωστα. Υπάρχουν μόνο άνω όρια για την γωνία μίξης θ_{13} . Επίσης άγνωστη παραμένει η ακριβής μάζα των νετρίνων. Μόνο άνω όρια υπάρχουν από πειράματα β - διάσπασης του τρίτιου και από κοσμολογικές παρατηρήσεις. Ένα μεγάλο ερώτημα είναι αν τα νετρίνα είναι σωματίδια Dirac ή σωματίδια Majorana και ο πιο εύκολος τρόπος να απαντήσουμε αυτό το ερώτημα είναι η διπλή διάσπαση β χωρίς εκπομπή νετρίνων. Μέχρι στιγμής υπάρχει μόνο το όριο της τάξης του 1 eV για την ενεργή Majorana μάζα του νετρίνο. Μάλιστα εξαιτίας των δυσκολιών στον υπολογισμό των πλατών των πυρηνικών μεταβάσεων υπεισέρχεται ένας πολλαπλασιαστικός παράγοντας αβεβαιότητας της τάξης του 3.

Τα νετρίνα είναι πολύ σημαντικά και όσον αφορά την κοσμολογία. Ο αριθμός των νετρίνων επηρεάζει την νουκλεοσύνθεση. Νετρίνα με μάζα μπορούν

να σχετιστούν με την δημιουργία δομής ως θερμή σκοτεινή ύλη. Τα νετρίνα όντας θερμή σκοτεινή ύλη, μπορούν να αποτελέσουν ένα τμήμα της άγνωστης σκοτεινής ύλης. Μέσω αυτού του περιορισμού μπορούμε να οριοθετήσουμε το άθροισμα των μαζών των νετρίνων σε λιγότερο από 1 eV . Ακόμα τα αρχέγονα νετρίνα (ηλικίας 1 s) μπορούν να μας δώσουν πληροφορίες για την εξέλιξη του σύμπαντος καθώς έχουν αποσυζευχθεί πολύ πριν από τα φωτόνια. Είναι δε το σωματίδιο - αμέσως μετά το φωτόνιο - με την δεύτερη μεγαλύτερη αφθονία στο σύμπαν.

Τέλος, τα νετρίνα σχετίζονται με την φυσική Πέραν του Καθιερωμένου Προτύπου. Μεγαλοενοποιημένες θεωρίες εμπεριέχουν δεξιόστροφα νετρίνα, ή προτιμούν Majorana νετρίνα. Η μικρή μάζα των νετρίνων μπορεί να ερμηνευθεί μέσω της ύπαρξης πολύ βαρέων νετρίνων (τα οποία σχετίζονται με την λεπτογέννεση) ή μέσω της ύπαρξης παραπάνω διαστάσεων. Αν τα νετρίνα είναι σωματίδια Majorana τότε η παραβίαση της διατήρησης του λεπτονικού αριθμού σπάει την L συμμετρία, η οποία εμφανίζεται στις μεγαλοενοποιημένες και υπερσυμμετρικές θεωρίες. Αυτή την στιγμή η φυσική νετρίνων δείχνει να είναι το πιο σίγουρο βήμα για το μέλλον και σίγουρα είναι σε θέση να ξεκαθαρίσει κάπως το τοπίο της φυσικής Πέραν του Καθιερωμένου Προτύπου.

2 Η Μίξη στο Καθιερωμένο Πρότυπο

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε το φαινόμενο της μίξης στα πλαίσια του Καθιερωμένου Προτύπου. Αρχικά θα αναφέρουμε κάποια στοιχεία του Καθιερωμένου προτύπου και θα παρουσιάσουμε τον μηχανισμό Higgs. Στην συνέχεια θα μελετήσουμε πως αποκτούν μάζα τα φερμιονία μέσω του μηχανισμού Higgs και πως διαμορφώνονται τα φερμιονικά ρεύματα των αλληλεπιδράσεων. Η μελέτη αυτή θα μας οδηγήσει στο φαινόμενο της μίξης των quarks. Το φαινόμενο αυτό θα μελετηθεί εν συντομία και στη συνέχεια θα μελετηθούν οι γενικές ιδιότητες του φαινομένου της μίξης. Τέλος αναλύεται η συσχέτιση της συμμετρίας CP με τον πίνακα μίξης.

2.1 Στοιχεία του Καθιερωμένου Προτύπου

Η ηλεκτρασθενής αλληλεπίδραση του Καθιερωμένου Προτύπου είναι μια θεωρία βαθμίδας που βασίζεται στην τοπική συμμετρία βαθμίδας $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Σύμφωνα με το Καθιερωμένο Πρότυπο τα αριστερόστροφα σωματίδια κατατάσσονται σε διπλέτες του isospin, ενώ τα δεξιόστροφα σωματίδια είναι *singlets*.

$$Q'_{\alpha L} \equiv \begin{pmatrix} u'_{\alpha L} \\ d'_{\alpha L} \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

$$u'_{\alpha R}, \quad \alpha = u, c, t \quad (2.2)$$

$$d'_{\alpha R}, \quad \alpha = d, s, b \quad (2.3)$$

$$L'_{\alpha L} \equiv \begin{pmatrix} \nu'_{\alpha L} \\ \ell'_{\alpha L} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \ell'_{\alpha R} \quad \alpha = e, \mu, \tau \quad (2.4)$$

Οι τόνοι συμβολίζουν ότι τα πεδία δεν έχουν καθορισμένη μάζα, αλλά είναι επαλληλία πεδίων με καθορισμένη μάζα. Οι χβαντικοί αριθμοί των πεδίων δίνονται από τον πίνακα 1. Η σχέση Gell-Mann –Nishijima είναι

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}. \quad (2.5)$$

Πίνακας 1: Οι χβαντικοί αριθμοί των φερμιονίων.

	I	I_3	Y	Q
$u'_{\alpha L}$	1/2	+1/2	+1/3	+2/3
$d'_{\alpha L}$	1/2	-1/2	+1/3	-1/3
$u'_{\alpha R}$	0	0	+4/3	+2/3
$d'_{\alpha R}$	0	0	-2/3	-1/3
$\nu'_{\beta L}$	1/2	+1/2	-1	0
$\ell'_{\beta L}$	1/2	-1/2	-1	-1
$\ell'_{\beta R}$	0	0	-2	-1

Η Lagrangian της ηλεκτρασθενούς αλληλεπίδρασης του Καθιερωμένου Προτύπου είναι

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{EW} = & \imath \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{L}'_{\alpha L} \not{D} L'_{\alpha L} + \imath \sum_{\alpha=1,2,3} \bar{Q}'_{\alpha L} \not{D} Q'_{\alpha L} \\
& + \imath \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\ell}'_{\alpha R} \not{D} \ell'_{\alpha R} + \imath \sum_{\alpha=d,s,b} \bar{q}'^D_{\alpha R} \not{D} q'^D_{\alpha R} + \imath \sum_{\alpha=u,c,t} \bar{q}'^U_{\alpha R} \not{D} q'^U_{\alpha R} \\
& - \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \\
& + (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \\
& - \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} \left(Y'_{\alpha\beta} \bar{L}'_{\alpha L} \Phi \ell'_{\beta R} + (Y'_{\alpha\beta})^* \bar{\ell}'_{\beta R} \Phi^\dagger L'_{\alpha L} \right) \\
& - \sum_{\alpha=1,2,3} \sum_{\beta=d,s,b} \left(Y'^D_{\alpha\beta} \bar{Q}'_{\alpha L} \Phi q'^D_{\beta R} + (Y'^D_{\alpha\beta})^* \bar{q}'^D_{\beta R} \Phi^\dagger Q'_{\alpha L} \right) \\
& - \sum_{\alpha=1,2,3} \sum_{\beta=u,c,t} \left(Y'^U_{\alpha\beta} \bar{Q}'_{\alpha L} \tilde{\Phi} q'^U_{\beta R} + (Y'^U_{\alpha\beta})^* \bar{q}'^U_{\beta R} \tilde{\Phi}^\dagger Q'_{\alpha L} \right).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

2.2 Ο Μηχανισμός Higgs

Στο Καθιερωμένο Πρότυπο οι μάζες των φερμιονίων και των μποζονίων W και Z δημιουργούνται μέσω του μηχανισμού Higgs, ο οποίος δρα μέσω της διπλέτας

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

όπου $\phi^+(x)$ είναι ένα φορτισμένο μιγαδικό βαθμωτό πεδίο και $\phi^0(x)$ ένα ουδέτερο μιγαδικό βαθμωτό πεδίο. Οι χβαντικοί αριθμοί της διπλέτας Higgs δίνονται στον πίνακα 2. Ο όρος Higgs της Lagrangian του Καθιερωμένου Προτύπου

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad (2.8)$$

είναι αναλλοίωτος σε μετασχηματισμούς $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Προκειμένου το δυναμικό

$$V(\phi) = \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (2.9)$$

να είναι κάτω φραγμένο πρέπει $\lambda > 0$. Αποδεικνύεται ότι για να μπορεί να πραγματοποιηθεί η αυθόρμητη ρήξη της συμμετρίας

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_Q \quad (2.10)$$

πρέπει $\mu^2 < 0$. Ορίζουμε

$$v \equiv \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}, \quad (2.11)$$

τότε το δυναμικό Higgs μπορεί να γραφεί

$$V(\phi) = \lambda \left(\Phi^\dagger \Phi - \frac{v^2}{2} \right)^2. \quad (2.12)$$

Είναι προφανές ότι το δυναμικό παρουσιάζει ελάχιστο για

$$\Phi^\dagger \Phi = \frac{v^2}{2}. \quad (2.13)$$

Όπως γνωρίζουμε το ελάχιστο του δυναμικού αντιστοιχεί στο κενό. Φερμιόνια και διανυσματικά μποζόνια δεν μπορούν να υπάρχουν στο κενό, αφού το κενό οφείλει να είναι αναλλοίωτο σε στροφές. Αντίστοιχα φορτισμένα σωματίδια δεν μπορούν να έχουν μη μηδενικές τιμές στο κενό, αφού το κενό οφείλει να είναι ηλεκτρικά ουδέτερο. Μόνο ουδέτερα βαθμωτά πεδία μπορούν να έχουν τιμή στο κενό, η οποία ονομάζεται αναμενόμενη τιμή κενού (VEV). Από την σχέση (2.13) η αναμενόμενη τιμή κενού του πεδίου Higgs πρέπει να πραγματοποιείται μέσω της συνιστώσας ϕ^0 , οπότε στο κενό

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Η αναμενόμενη τιμή κενού $\langle \Phi \rangle$ σπάει αυθόρμητα την συμμετρία $SU(2)_L \times$

Πίνακας 2: Οι κβαντικοί αριθμοί της διπλέτας Higgs.

	I	I_3	Y	Q
$\phi^+(x)$	1/2	1/2	+1	1
$\phi^0(x)$	1/2	-1/2	+1	0

$U(1)_Y$, αφού

$$I_1 \langle \Phi \rangle = \frac{\sigma_1}{2} \langle \Phi \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \neq 0 \quad (2.15)$$

$$I_2 \langle \Phi \rangle = \frac{\sigma_2}{2} \langle \Phi \rangle = -\frac{i}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \neq 0 \quad (2.16)$$

$$I_3 \langle \Phi \rangle = \frac{\sigma_3}{2} \langle \Phi \rangle = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \langle \Phi \rangle \neq 0 \quad (2.17)$$

$$Y \langle \Phi \rangle = \langle \Phi \rangle \neq 0 \quad (2.18)$$

αλλά

$$Q \langle \Phi \rangle = \left(I_3 + \frac{Y}{2} \right) \langle \Phi \rangle = 0 \quad (2.19)$$

Οι διεγερμένες καταστάσεις μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(\frac{i}{2v} \xi \cdot \sigma\right) \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

όπου τα $\xi(x) = (\xi_1(x), \xi_2(x), \xi_3(x))$ και $H(x)$ είναι 4 πραγματικά βαθμωτά πεδία. Το πεδίο $H(x)$ περιγράφει το σωματίδιο Higgs. Με έναν μετασχηματισμό βαθμίδας μπορούμε να απαλείψουμε τα πεδία $\xi(x)$, αφού δεν έχουν φυσικό περιεχόμενο, τότε η διπλέτα Higgs γίνεται

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Η δράση της συναλλοίωτης παραγώγου στην διπλέτα Higgs είναι

$$\begin{aligned} D_\mu \Phi(x) &= \left[\partial_\mu + \frac{i}{2} g A_\mu(x) \cdot \sigma + \frac{i}{2} g' B_\mu(x) \right] \Phi(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu(x) [v + H(x)] \\ \partial_\mu H(x) - \frac{i}{2} \frac{g}{\cos \theta_W} Z_\mu(x) [v + H(x)] \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

οπότε ο όρος Higgs της Lagrangian του Καθιερωμένου Προτύπου γίνεται

$$\mathcal{L}_H = \frac{1}{2}(\partial H)^2 + \frac{g^2}{4}(v+H)^2 W_\mu^\dagger W^\mu + \frac{g^2}{8\cos^2\theta_W}(v+H)^2 Z_\mu Z^\mu - \frac{\lambda}{4}(H^2 + 2vH)^2. \quad (2.23)$$

Αναπτύσσοντας την ανωτέρω έκφραση καταλήγουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H = & \frac{1}{2}(\partial H)^2 - \lambda v^2 H^2 - \lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4} H^4 + \frac{g^2 v^2}{4} W_\mu^\dagger W^\mu + \frac{g^2 v^2}{8\cos\theta_W} Z_\mu Z^\mu \\ & + \frac{g^2 v}{2} W_\mu^\dagger W^\mu H + \frac{g^2 v}{4\cos\theta_W} Z_\mu Z^\mu H \\ & + \frac{g^2}{4} W_\mu^\dagger W^\mu H^2 + \frac{g^2}{8\cos\theta_W} Z_\mu Z^\mu H^2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ο πρώτος όρος είναι ο κινητικός όρος του σωματιδίου Higgs. Ο δεύτερος όρος είναι ο όρος μάζας του σωματιδίου Higgs, από τον οποίο βλέπουμε ότι

$$m_H = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}. \quad (2.25)$$

Αφού η παράμετρος μ έχει εισαχθεί στο Καθιερωμένο Πρότυπο αυθαίρετα η τιμή της δεν μπορεί να σχετιστεί με κάποια άλλη ποσότητα που να έχει ήδη μετρηθεί, οπότε το Καθιερωμένο Πρότυπο δεν μπορεί να μας δώσει κάποια πρόβλεψη για την μάζα του σωματιδίου Higgs. Ο τρίτος και τέταρτος όρος αντιστοιχούν σε αυτοζεύξεις του πεδίου Higgs. Ο πέμπτος και έκτος όρος είναι ιδιαίτερα σημαντικοί, καθώς είναι οι όροι μάζας των μποζονίων W και Z , οι μάζες των οποίων είναι

$$m_W = \frac{gv}{2} \quad m_Z = \frac{gv}{2\cos\theta_W}. \quad (2.26)$$

Η παράμετρος ρ ορίζεται ως

$$\rho = \frac{m_W^2}{m_Z^2 \cos^2\theta_W} \quad (2.27)$$

και σε επίπεδο tree level διαγραμμάτων έχει την τιμή $\rho = 1$, ενώ σε διαγράμματα ανώτερης τάξης η τιμή της παραμέτρου εξαρτάται από τον τρόπο επανακανονικοποίησης.

Στο Καθιερωμένο Πρότυπο μπορούν να εισαχθούν επιπλέον πεδία Higgs, τα οποία όμως θα συμβάλλουν στην μάζα των W και Z . Για έναν αυθαίρετο

αριθμό πεδίων Higgs, συμπεριλαμβανομένης της διπλέτας του Καθιερωμένου Προτύπου

$$\rho = \frac{\sum_k \left[I^k(I^k + 1) - (I_3^k)^2 \right] v_k^2}{\sum_k (I_3^k)^2 v_k^2}, \quad (2.28)$$

όπου I^k είναι το isospin του πεδίου Higgs και I_3^k είναι η τρίτη συνιστώσα του isospin της συνιστώσας του πεδίου Higgs, η οποία έχει μη μηδενική αναμενόμενη τιμή κενού. Συνέπεια αυτής της σχέσης είναι ότι αν περιοριστούμε σε διπλές Higgs, τότε υποχρεωτικά $\rho = 1$. Πειραματικά έχει βρεθεί

$$\rho = 0.9998_{-0.0005}^{+0.0008}, \quad (2.29)$$

οπότε υπάρχει περιθώριο μόνο για ύπαρξη περαιτέρω διπλέτων Higgs².

Οι τέσσερις τελευταίοι όροι αντιστοιχούν σε ζεύξεις του πεδίου Higgs με τα μποζόνια W και Z .

2.3 Εισαγωγή στην Μίξη

Στην υποενότητα αυτή θα μελετήσουμε πως, μέσω του μηχανισμού Higgs, αποκτούν μάζα τα φερμιόνια και πως αυτή η διαδικασία οδηγεί στο φαινόμενο της μίξης. Θα ξεκινήσουμε από τα λεπτόνια και στην συνέχεια θα περάσουμε στα quarks.

2.3.1 Λεπτόνια

Η μάζα των φερμιονίων είναι αποτέλεσμα του μηχανισμού Higgs μέσω της ζεύξης Yukawa των φερμιονίων με το πεδίο Higgs, αφού όροι μάζας της μορφής

$$\bar{f}f = \bar{f}_L f_R + \bar{f}_R f_L \quad (2.30)$$

απαγορεύονται επειδή δεν είναι αναλλοίωτοι στη συμμετρία βαθμίδας. Αν εξετάσουμε έναν λεπτονικό όρο μάζας, αυτός αναμένεται να περιέχει το γινόμενο $\bar{L}_{\alpha L}^{\ell} \ell'_{\beta R}$. Ο όρος αυτός είναι διπλέτα του isospin με συνολικό υπερφορτίο $Y = -1$, οπότε αν συνδυαστεί με την διπλέτα Higgs, η οποία έχει $Y = 1$ αποκτούμε έναν όρο ο οποίος είναι αναλλοίωτος στους μετασχηματισμούς βαθμίδας. Αυτόν τον όρο τον χρησιμοποιούμε στην Lagrangian της ζεύξης των

²Αν εξαιρέσουμε περιπτώσεις υπερβολικά μικρών αναμενόμενων τιμών κενού, οι οποίες δεν θα προέκυπταν με φυσικό τρόπο

λεπτονίων με το πεδίο Higgs, έτσι

$$\mathcal{L}_{H,L} = - \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} Y_{\alpha\beta}^{\ell} \bar{L}'_{\alpha L} \Phi'_{\beta R} + HC. \quad (2.31)$$

Ο πίνακας $Y_{\alpha\beta}^{\ell}$ περιέχει τις ζεύξεις Yukawa και είναι ένας σταθερός μιγαδικός πίνακας 3×3 . Αντικαθιστώντας το πεδίο Higgs από την σχέση (2.21) έχουμε

$$\mathcal{L}_{H,L} = - \frac{v+H}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} Y_{\alpha\beta}^{\ell} \bar{\ell}'_{\alpha L} \ell'_{\beta R} + HC. \quad (2.32)$$

Ο όρος που είναι ανάλογος της αναμενόμενης τιμής κενού v δημιουργεί έναν όρο μάζας για το λεπτόνιο ενώ ο όρος που είναι ανάλογος του πεδίου H είναι η ζεύξη του λεπτονίου με το πεδίο Higgs. Ο πίνακας Y^{ℓ} εν γένει δεν είναι διαγώνιος, οπότε τα πεδία ℓ' δεν έχουν καθορισμένη μάζα. Μέσω ενός μετασχηματισμού

$$(V_L^{\ell})^{\dagger} Y^{\ell} V_R^{\ell} = Y^{\ell}, \quad Y_{\alpha\beta}^{\ell} = y_{\alpha}^{\ell} \delta_{\alpha\beta} \quad y_{\alpha}^{\ell} > 0, \quad (2.33)$$

όπου οι πίνακες V_L^{ℓ} και V_R^{ℓ} είναι unitary, ο πίνακας διαγωνοποιείται, οπότε η Lagrangian αποκτά την μορφή

$$\mathcal{L}_{H,L} = - \frac{v+H}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} y_{\alpha}^{\ell} \bar{\ell}_{\alpha L} \ell_{\alpha R} + HC. \quad (2.34)$$

Τα άτονα πεδία πλέον έχουν καθορισμένη μάζα.

$$\ell_L = (V_L^{\ell})^{\dagger} \ell'_L = \begin{pmatrix} e_L \\ \mu_L \\ \tau_L \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Μια άλλη μορφή της Lagrangian είναι

$$\mathcal{L}_{H,L} = - \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \frac{y_{\alpha}^{\ell} v}{\sqrt{2}} \bar{\ell}_{\alpha} \ell_{\alpha} - \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \frac{y_{\alpha}^{\ell}}{\sqrt{2}} \bar{\ell}_{\alpha} \ell_{\alpha} H, \quad (2.36)$$

όπου φαίνεται ξεκάθαρα ότι οι μάζες των λεπτονίων δίνονται από την σχέση

$$m_{\alpha} = \frac{y_{\alpha}^{\ell} v}{\sqrt{2}}. \quad (2.37)$$

Αφού στο Καθιερωμένο Πρότυπο οι συντελεστές y_α^ℓ είναι άγνωστες παράμετροι, η μάζα των λεπτονίων δεν μπορεί να προβλεφθεί, οπότε προσδιορίζεται μόνο πειραματικά.

Το λεπτονικό ρεύμα της ασθενούς αλληλεπίδρασης φορτισμένου ρεύματος γίνεται

$$j_{W,L}^k = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\nu}'_L \gamma^k \ell'_L = 2 \bar{\nu}'_L \gamma^k V_L^\ell \ell_L. \quad (2.38)$$

Εκμεταλλευόμενοι την ισοδυναμία των πινάκων γ σε μετασχηματισμούς ομοιότητας και ορίζοντας τα νετρίνα ως

$$\nu_L = (V_L^\ell)^\dagger \nu'_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

καταλήγουμε ότι

$$j_{W,L}^k = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_L \gamma^k \ell_L. \quad (2.40)$$

Τα νετρίνα της σχέσης (2.39) είναι νετρίνα καθορισμένης γεύσης αφού ορίζονται μέσω της ζεύξης τους με τα αντίστοιχα φορτισμένα λεπτόνια. Στο Καθιερωμένο Πρότυπο τα νετρίνα καθορισμένης γεύσης, έχουν και καθορισμένη μάζα αφού οι καταστάσεις καθορισμένης γεύσης είναι γραμμικός συνδυασμός άμαζων πεδίων.

Η ζεύξη μέσω του μποζονίου W διατηρεί τους λεπτονικούς αριθμούς κάθε γεύσης L_α , οπότε κατά επέκταση διατηρείται και ο λεπτονικός αριθμός

$$L = L_e + L_\mu + L_\tau. \quad (2.41)$$

Η διατήρηση των λεπτονικών αριθμών κάθε γεύσης σχετίζονται με την αναλλοιώτητα της Lagrangian σε μετασχηματισμούς

$$\nu_{\alpha L} \rightarrow e^{i\phi_\alpha} \nu_{\alpha L}, \quad \ell_{\alpha L} \rightarrow e^{i\phi_\alpha} \ell_{\alpha L}, \quad \ell_{\alpha R} \rightarrow e^{i\phi_\alpha} \ell_{\alpha R}, \quad (2.42)$$

ενώ η διατήρηση του λεπτονικού αριθμού σχετίζεται με τους μετασχηματισμούς

$$\nu_{\alpha L} \rightarrow e^{i\phi} \nu_{\alpha L}, \quad \ell_{\alpha L} \rightarrow e^{i\phi} \ell_{\alpha L}, \quad \ell_{\alpha R} \rightarrow e^{i\phi} \ell_{\alpha R}. \quad (2.43)$$

Τα αντίστοιχα διατηρούμενα ρεύματα είναι

$$j_\alpha^k = \bar{\nu}_{\alpha L} \gamma^k \nu_{\alpha L} + \bar{\ell}_{\alpha L} \gamma^k \ell_{\alpha L}, \quad (2.44)$$

με διατηρούμενα φορτία

$$L_\alpha = \int d^3x j_\alpha^0(x). \quad (2.45)$$

Το λεπτονικό ρεύμα της ασθενούς αλληλεπίδρασης ουδετέρου ρεύματος μετασχηματίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} j_{Z,L}^k &= 2g_L^\nu \bar{\nu}'_L \gamma^k \nu'_L + 2g_L^\ell \bar{\ell}'_L \gamma^k \ell'_L + 2g_R^\ell \bar{\ell}'_R \gamma^k \ell'_R \\ &= 2g_L^\nu \bar{\nu}_L (V_L^\ell)^\dagger \gamma^k V_L^\ell \nu_L + 2g_L^\ell \bar{\ell}_L (V_L^\ell)^\dagger \gamma^k V_L^\ell \ell_L + 2g_R^\ell \bar{\ell}_R (V_R^\ell)^\dagger \gamma^k V_R^\ell \ell'_R \\ &= 2g_L^\nu \bar{\nu}_L \gamma^k \nu_L + 2g_L^\ell \bar{\ell}_L \gamma^k \ell_L + 2g_R^\ell \bar{\ell}_R \gamma^k \ell_R \end{aligned} \quad (2.46)$$

Το λεπτονικό ρεύμα της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης διατηρεί την μορφή του

$$j_{\gamma,L}^k = -\bar{\ell}' \gamma^k \ell' = -\bar{\ell} \gamma^k \ell. \quad (2.47)$$

2.3.2 Quarks

Με τον ίδιο τρόπο θα κατασκευάσουμε τους όρους μάζας των quarks. Στα quarks έχουμε δύο γινόμενα αριστερόστροφης διπλέτας του isospin με δεξιόστροφο singlet

$$\bar{Q}'_{\alpha L} q'_{\beta R}{}^D, \quad \alpha = 1, 2, 3, \beta = d, s, b \quad (2.48)$$

και

$$\bar{Q}'_{\alpha L} q'_{\beta R}{}^D, \quad \alpha = 1, 2, 3, \beta = d, s, b \quad (2.49)$$

Το γινόμενο (2.48) έχει υπερφορτίο $Y = -1$, οπότε η ζεύξη του με την διπλέτα Higgs που έχει υπερφορτίο $Y = 1$ δημιουργεί έναν αναλλοίωτο όρο, ακριβώς όπως στην περίπτωση των λεπτονίων,

$$- \sum_{\alpha=1,2,3} \sum_{\beta=d,s,b} Y_{\alpha\beta}{}^{1D} \bar{Q}'_{\alpha L} \Phi q'_{\beta R}{}^D. \quad (2.50)$$

Ο πίνακας Y^{1D} είναι ένας σταθερός μιγαδικός πίνακας 3×3 ο οποίος περιέχει τις ζεύξεις Yukawa. Αυτός ο όρος δημιουργεί τις μάζες των quarks d , s και b . Αντικαθιστώντας το πεδίο Higgs έχουμε

$$-\frac{v+H}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha,\beta=d,s,b} Y_{\alpha\beta}{}^{1D} \bar{q}'_{\alpha L} q'_{\beta R}{}^D, \quad (2.51)$$

όπου η αντιστοιχία των δεικτών του πίνακα Y^{iD} είναι $1 = d, 2 = s, 3 = b$.

Το γινόμενο (2.49) έχει υπερφορτίο $Y = 1$, οπότε μόνο η ζεύξη με μια διπλέτα Higgs η οποία έχει υπερφορτίο $Y = -1$ μπορεί να μας δώσει αναλλοίωτο όρο. Με τον μετασχηματισμό

$$\tilde{\Phi} = i\sigma_2 \Phi^* \quad (2.52)$$

μπορούμε να κατασκευάσουμε αυτή την διπλέτα. Με κατάλληλο μετασχηματισμό βαθμίδας αυτή η διπλέτα Higgs μπορεί να έρθει στην μορφή

$$\tilde{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + H(x) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Ο αναλλοίωτος όρος είναι

$$- \sum_{\alpha=1,2,3} \sum_{\beta=u,c,t} Y_{\alpha\beta}^{iU} \bar{Q}'_{\alpha L} \tilde{\Phi} q_{\beta R}^{iU}, \quad (2.54)$$

οπότε αντικαθιστώντας την διπλέτα Higgs έχουμε

$$- \frac{v + H}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha,\beta=u,c,t} Y_{\alpha\beta}^{iU} \bar{q}'_{\alpha L} q_{\beta R}^{iU}, \quad (2.55)$$

όπου η αντιστοιχία των δεικτών του πίνακα Y^{iU} είναι $1 = u, 2 = c, 3 = t$.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.51) και (2.55) η Lagrangian της ζεύξης των quarks με το πεδίο Higgs γίνεται

$$\mathcal{L}_{H,Q} = - \frac{v + H}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha,\beta=d,s,b} Y_{\alpha\beta}^{iD} \bar{q}'_{\alpha L} q_{\beta R}^{iD} - \frac{v + H}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha,\beta=u,c,t} Y_{\alpha\beta}^{iU} \bar{q}'_{\alpha L} q_{\beta R}^{iU} + HC. \quad (2.56)$$

Οι πίνακες Y^{iD} και Y^{iU} εν γένει δεν είναι διαγώνιοι, οπότε τα τονούμενα πεδία δεν έχουν καθορισμένη μάζα. Μεσω των μετασχηματισμών

$$(V_L^D)^\dagger Y^{iD} V_R^D = Y^\ell, \quad Y_{\alpha\beta}^D = y_\alpha^D \delta_{\alpha\beta}, \quad y_\alpha^D > 0, \quad (2.57)$$

$$(V_L^U)^\dagger Y^{iU} V_R^U = Y^\ell, \quad Y_{\alpha\beta}^U = y_\alpha^U \delta_{\alpha\beta}, \quad y_\alpha^U > 0, \quad (2.58)$$

όπου V_L^D, V_R^D, V_L^U και V_R^U είναι κατάλληλοι unitary πίνακες οι πίνακες Y διαγωνοποιούνται. Ορίζοντας τα πεδία

$$q_L^D = (V_L^D)^\dagger q_L^{\prime D} = \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix}, \quad q_R^D = (V_R^D)^\dagger q_R^{\prime D} = \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ b_R \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

$$q_L^U = (V_L^U)^\dagger q_L'^U = \begin{pmatrix} u_L \\ c_L \\ t_L \end{pmatrix}, \quad q_R^U = (V_R^U)^\dagger q_R'^U = \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \\ t_R \end{pmatrix}, \quad (2.60)$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{H,Q} = & - \sum_{\alpha=d,s,b} \frac{y_\alpha^D v}{\sqrt{2}} \bar{q}_\alpha^D q_\alpha^D - \sum_{\alpha=u,c,t} \frac{y_\alpha^U v}{\sqrt{2}} \bar{q}_\alpha^U q_\alpha^U \\ & - \sum_{\alpha=d,s,b} \frac{y_\alpha^D}{\sqrt{2}} \bar{q}_\alpha^D q_\alpha^D H - \sum_{\alpha=u,c,t} \frac{y_\alpha^U}{\sqrt{2}} \bar{q}_\alpha^U q_\alpha^U H. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Οι μάζες των quarks από την σχέση αυτή είναι

$$m_\alpha = \frac{y_\alpha^D v}{\sqrt{2}}, \quad \alpha = d, s, b \quad m_\alpha = \frac{y_\alpha^U v}{\sqrt{2}}, \quad \alpha = u, c, t. \quad (2.62)$$

Αφού στο Καθιερωμένο Πρότυπο οι συντελεστές y_α^D και y_α^U είναι άγνωστες παράμετροι, η μάζα των quarks δεν μπορεί να προβλεφθεί, οπότε προσδιορίζεται μόνο πειραματικά.

Το ρεύμα της ασθενούς αλληλεπίδρασης φορτισμένου ρεύματος για τα quarks είναι

$$j_{W,Q}^k = 2\bar{q}_L^U \gamma^k q_L^D, \quad (2.63)$$

οπότε αν αντικαταστήσουμε τα τονούμενα πεδία με τα άτομα έχουμε

$$j_{W,Q}^k = 2\bar{q}_L^U (V_L^U)^\dagger \gamma^k V_L^D q_L^D = 2\bar{q}_L^U \gamma^k (V_L^U)^\dagger V_L^D q_L^D. \quad (2.64)$$

Βλέπουμε ότι το ρεύμα εξαρτάται από τις ιδιοκαταστάσεις μάζας μέσω του πίνακα

$$j_{W,Q}^k = 2\bar{q}_L^U \gamma^k V_{CKM} q_L^D \quad V_{CKM} = (V_L^U)^\dagger V_L^D. \quad (2.65)$$

Ο πίνακας V_{CKM} είναι ο πίνακας μίξης των quarks και έχει επικρατήσει να ονομάζεται πίνακας Cabbibo - Kobayashi - Maskawa. Βλέπουμε ότι λόγω της μίξης δεν υπάρχει νόμος διατήρησης των γεύσεων για τα quarks. Το μόνο που διατηρείται είναι ο βαρυονικός αριθμός, ο οποίος είναι $1/3$ για τα quarks και $-1/3$ για τα antiquarks.

Το ρεύμα της ασθενούς αλληλεπίδρασης ουδετέρου ρεύματος για τα quarks είναι

$$j_{Z,Q}^k = 2g_L^D \bar{q}_L^D \gamma^k q_L^D + 2g_R^D \bar{q}_R^D \gamma^k q_R^D + 2g_L^U \bar{q}_L^U \gamma^k q_L^U + 2g_R^U \bar{q}_R^U \gamma^k q_R^U, \quad (2.66)$$

οπότε αν αντικαταστήσουμε τα τονούμενα πεδία με τα άτονα έχουμε

$$\begin{aligned} j_{Z,Q}^k &= 2g_L^D \bar{q}_L^D (V_L^D)^\dagger \gamma^k V_L^D q_L^D + 2g_R^D \bar{q}_R^D (V_R^D)^\dagger \gamma^k V_R^D q_R^D \\ &\quad + 2g_L^U \bar{q}_L^U (V_L^U)^\dagger \gamma^k V_L^U q_L^U + 2g_R^U \bar{q}_R^U (V_R^U)^\dagger \gamma^k V_R^U q_R^U \\ &= 2g_L^D \bar{q}_L^D \gamma^k q_L^D + 2g_R^D \bar{q}_R^D \gamma^k q_R^D + 2g_L^U \bar{q}_L^U \gamma^k q_L^U + 2g_R^U \bar{q}_R^U \gamma^k q_R^U \end{aligned} \quad (2.67)$$

Το ρεύμα της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης για τα quarks διατηρεί την μορφή του

$$j_{\gamma,Q}^k = \frac{2}{3} \bar{q}^U \gamma^k q^U - \frac{1}{3} \bar{q}^D \gamma^k q^D. \quad (2.68)$$

Βλέπουμε ότι μόνο στην περίπτωση της ασθενούς αλληλεπίδρασης φορτισμένου ρεύματος των quarks μπορούμε να έχουμε αλλαγή γεύσης.

Ο πίνακας μίξης V_{CKM} αναλυτικά έχει τις συνιστώσες

$$V = (V_L^U)^\dagger V_L^D = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

Οι πειραματικές τιμές για τα μέτρα των συνιστωσών του σε επίπεδο εμπιστοσύνης 90% είναι

$$|V| = \begin{pmatrix} 0.9739 - 0.9751 & 0.221 - 0.227 & 0.0029 - 0.0045 \\ 0.221 - 0.227 & 0.9730 - 0.9744 & 0.039 - 0.044 \\ 0.0048 - 0.014 & 0.037 - 0.043 & 0.9990 - 0.9992 \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

Αντίστοιχα μπορεί να κατασκευαστεί ο πίνακας μίξης των λεπτονίων

$$U = (V_L^\ell)^\dagger V_L^\ell = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

Για ιστορικούς λόγους έχει επικρατήσει ο πίνακας μίξης των quarks να συνδέει quarks που έχουν $I_3 = 1/2$ στα αριστερά με quarks που έχουν $I_3 = -1/2$ στα δεξιά, ενώ ο πίνακας μίξης των λεπτονίων συνδέει φορτισμένα λεπτόνια που έχουν $I_3 = -1/2$ στα αριστερά με νετρίνα που έχουν $I_3 = 1/2$ στα δεξιά.

2.4 Πίνακας Μίξης

Στην υποενότητα αυτή θα μελετήσουμε την γενική συμπεριφορά των πινάκων μίξης. Θα ξεκινήσουμε από την διαγωνοποίηση ενός πίνακα μάζας και στην συνέχεια θα μελετήσουμε της φυσικές παραμέτρους ενός πίνακα μίξης. Ακολούθως μελετώνται κάποιες οριακές περιπτώσεις ενός πίνακα μίξης

2.4.1 Διαγωνοποίηση

Ένας γενικός $N \times N$ μιγαδικός πίνακας M' μπορεί να διαγωνοποιηθεί μέσω ενός μετασχηματισμού biunitary

$$V_L^\dagger M' V_R = M, \quad M_{\alpha\beta} = m_\alpha \delta_{\alpha\beta}, \quad m_\alpha > 0, \quad (2.72)$$

όπου V_L και V_R είναι δυο κατάλληλοι unitary $N \times N$ πίνακες.

Το γινόμενο $M' (M')^\dagger$ δύο $N \times N$ πινάκων είναι ένας hermitian $N \times N$ πίνακας, ο οποίος μπορεί να μετασχηματιστεί με έναν unitary μετασχηματισμό

$$V_L^\dagger M' (M')^\dagger V_L = M^2, \quad M_{\alpha\beta}^2 = m_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.73)$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα $M' (M')^\dagger$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί

$$\begin{aligned} m_\alpha^2 &= \sum_\beta \left(V_L^\dagger M' \right)_{\alpha\beta} \left((M')^\dagger V_L \right)_{\beta\alpha} = \sum_\beta \left(V_L^\dagger M' \right)_{\alpha\beta} \left(V_L^\dagger M' \right)_{\beta\alpha}^\dagger \\ &= \sum_\beta \left(V_L^\dagger M' \right)_{\alpha\beta} \left(V_L^\dagger M' \right)_{\alpha\beta}^* = \sum_\beta \left| \left(V_L^\dagger M' \right)_{\alpha\beta} \right|^2 \end{aligned} \quad (2.74)$$

Ο πίνακας M' μπορεί να γραφεί

$$M' = V_L M V_R^\dagger, \quad M_{\alpha\beta} = m_\alpha \delta_{\alpha\beta}, \quad m_\alpha > 0, \quad (2.75)$$

όπου V_R είναι ένας κατάλληλος πίνακας. Από την σχέση αυτή ο πίνακας είναι

$$V_R = (M')^{-1} V_L M. \quad (2.76)$$

Αφού ο πίνακας M είναι unitary έχουμε

$$\begin{aligned} V_R^\dagger V_R &= M V_L^\dagger \left((M')^{-1} \right)^\dagger (M')^{-1} V_L M \\ &= M V_L^\dagger \left(M' (M')^\dagger \right)^{-1} V_L M = M M^{-2} M = 1 \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$V_R V_R^\dagger = (M')^{-1} V_L M^2 V_L^\dagger \left((M')^\dagger \right)^{-1} = (M')^{-1} M' (M')^\dagger \left((M')^\dagger \right)^{-1} \quad (2.78)$$

Αφού όπως αποδείξαμε ο πίνακας V_R είναι unitary, μπορούμε να πάμε από την σχέση (2.76) στην σχέση (2.72).

2.4.2 Φυσικές Παράμετροι

Ένας $N \times N$ unitary πίνακας έχει N^2 ανεξάρτητες πραγματικές παραμέτρους. Αυτές χωρίζονται σε

$$\frac{N(N-1)}{2}, \quad \text{γωνίες μίξης}, \quad (2.79)$$

$$\frac{N(N+1)}{2}, \quad \text{φάσεις}. \quad (2.80)$$

Ωστόσο δεν έχουν όλες οι φάσεις φυσική σημασία. Η μίξη εμφανίζεται μόνο μέσω της ασθενούς αλληλεπίδρασης φορτισμένου ρεύματος, οπότε μέσω μετασχηματισμών των πεδίων μπορούμε να απορροφήσουμε κάποιες φάσεις. Οι θεωρήσεις που ακολουθεί αφορά μόνο σωματίδια Dirac, καθώς στην περίπτωση των σωματιδίων Majorana οι φάσεις που μπορούν να απορροφηθούν είναι λιγότερες. Για την περίπτωση των quarks, όπως είδαμε το ρεύμα είναι

$$j_{W,Q}^k = 2\bar{q}_L^U \gamma^k V q_L^D. \quad (2.81)$$

Εκτός από την ζεύξη με τα μποζόνια W , η Lagrangian της ηλεκτρασθενούς αλληλεπίδρασης είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς

$$q_\alpha^U \rightarrow e^{i\psi_\alpha^U}, \quad q_k^D \rightarrow e^{i\psi_k^D}. \quad (2.82)$$

Η επίδραση αυτών των μετασχηματισμών στο ρεύμα της ασθενούς αλληλεπίδρασης φορτισμένου ρεύματος είναι

$$\begin{aligned} j_{W,Q}^k &= 2 \sum_{\alpha=u,c,t} \sum_{k=d,s,b} \bar{q}_{\alpha L}^U e^{-i\psi_\alpha^U} \gamma^k V_{\alpha k} e^{i\psi_k^D} q_{kL}^D \\ &= 2e^{-i(\psi_c^U - \psi_s^D)} \sum_{\alpha=u,c,t} \sum_{k=d,s,b} \bar{q}_{\alpha L}^U e^{-i(\psi_\alpha^U - \psi_c^U)} \gamma^k V_{\alpha k} e^{i(\psi_k^D - \psi_s^D)} q_{kL}^D \end{aligned} \quad (2.83)$$

Στην γενική περίπτωση, αν είχαμε N γενιές οι φάσεις που θα απορροφώνται είναι

$$\begin{aligned} e^{-i(\psi_c^U - \psi_s^D)} &\rightarrow 1 \\ e^{-i(\psi_\alpha^U - \psi_c^U)} &\rightarrow N-1 \\ e^{i(\psi_k^D - \psi_s^D)} &\rightarrow N-1, \end{aligned} \quad (2.84)$$

οπότε συνολικά απορροφώνται $2N - 1$ φάσεις. Έτσι οι φάσεις του πίνακα μίξης με φυσική σημασία είναι

$$\frac{N(N+1)}{2} - (2N-1) = \frac{(N-1)(N-2)}{2} \quad (2.85)$$

Στην περίπτωση των quarks η φάση που επιβιώνει σχετίζεται με την διατήρηση του βαρυονικού αριθμού. Οι φυσικές παράμετροι του πίνακα μίξης είναι

$$\frac{N(N-1)}{2} + \frac{(N-1)(N-2)}{2} = (N-1)^2 \quad (2.86)$$

Στην περίπτωση $N = 3$ έχουμε 3 γωνίες μίξης και 1 φάση, ενώ στην περίπτωση $N = 2$ έχουμε μόνο μια γωνία μίξης. Στην περίπτωση που μελετάμε μόνο τις δύο γενιές των quarks η γωνία μίξης λέγεται γωνία Cabibbo.

2.4.3 Παραμετροποίηση

Στην περίπτωση της μίξης δυο γενιών ένας γενικός unitary πίνακας 2×2 είναι

$$V = \begin{pmatrix} \cos \theta e^{i\omega_1} & \sin \theta e^{i(\omega_1+n)} \\ -\sin \theta e^{i(\omega_2-n)} & \cos \theta e^{i\omega_2} \end{pmatrix}. \quad (2.87)$$

Ισοδύναμα μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$V = \begin{pmatrix} e^{i\omega_1} & 0 \\ 0 & e^{i\omega_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{in} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-in} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.88)$$

από την οποία βλέπουμε ότι με κατάλληλο μετασχηματισμό των πεδίων μπορούμε να απαλείψουμε τις φάσεις. Για δύο γενιές το ρεύμα της ασθενούς αλληλεπίδρασης φορτισμένου ρεύματος είναι

$$j_{W,Q}^\mu = 2\bar{q}_L^U V q_L^D, \quad q_L^U = \begin{pmatrix} u_L \\ c_L \end{pmatrix}, \quad q_L^D = \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \end{pmatrix}. \quad (2.89)$$

Αν μετασχηματίσουμε τα quarks ως

$$u_L \rightarrow e^{i(\omega_1+n)} u_L, \quad c_L \rightarrow e^{i\omega_2} c_L, \quad d_L \rightarrow e^{in} d_L, \quad (2.90)$$

ο πίνακας μίξης γίνεται

$$V = \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \end{pmatrix}. \quad (2.91)$$

Πειραματικά έχει βρεθεί ότι

$$\sin \theta_C \simeq 0.02243 \pm 0.0016. \quad (2.92)$$

Η μορφή του πίνακα δεν είναι μοναδική καθώς ο πίνακας θα μπορούσε να γραφεί και στην μορφή

$$V = \begin{pmatrix} \cos \theta'_C & -\sin \theta'_C \\ \sin \theta'_C & \cos \theta'_C \end{pmatrix}, \quad (2.93)$$

ή στην μορφή

$$V = \begin{pmatrix} \sin \theta''_C & \cos'' \theta_C \\ -\cos \theta''_C & \sin \theta''_C \end{pmatrix}. \quad (2.94)$$

Όλες οι μορφές είναι ισοδύναμες και εκφράζουν το ίδιο φυσικό περιεχόμενο, αφού ορίζοντας διαφορετικά τα quarks μπορούμε να εκφράσουμε τον πίνακα σε οποιαδήποτε από τις ισοδύναμες μορφές.

Είναι ευνόητο ότι στην περίπτωση των N γενιών η κατάσταση είναι πολύ πιο σύνθετη, αφού υπάρχει μεγάλη αυθαιρεσία στην επιλογή των φάσεων στις οποίες αντιστοιχεί συγκεκριμένος αριθμός φάσεων με φυσική σημασία. Θα περιγράψουμε έναν βολικό τρόπο παραμετροποίησης. Θεωρούμε unitary πίνακες που αντιστοιχούν σε μιγαδικές στροφές στο επίπεδο $\alpha - \beta$, οι οποίοι έχουν την μορφή

$$\begin{aligned} [W^{\alpha\beta}(\theta_{\alpha\beta}, n_{\alpha\beta})]_{rs} &= \delta_{rs} + (\cos \theta_{ab} - 1)(\delta_{r\alpha}\delta_{s\alpha} + \delta_{r\beta}\delta_{s\beta}) \\ &+ \sin \theta_{\alpha\beta} (e^{in_{\alpha\beta}}\delta_{r\alpha}\delta_{s\beta} - e^{-in_{\alpha\beta}}\delta_{r\beta}\delta_{s\alpha}). \end{aligned} \quad (2.95)$$

Στην περίπτωση όπου $n_{\alpha\beta} = 0$ οι πίνακες αυτοί γίνονται στροφές στο πραγματικό επίπεδο. Για παράδειγμα στην περίπτωση $N = 3$ έχουμε

$$W^{12}(\theta_{12}, n_{12}) = \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} & \sin \theta_{12}e^{in_{12}} & 0 \\ -\sin \theta_{12}e^{-in_{12}} & \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.96)$$

Επίσης ορίζουμε τους διαγώνιους unitary πίνακες

$$D(\omega) = \text{diag}(e^{i\omega_1}, \dots, e^{i\omega_N}) \quad (2.97)$$

Παραμετροποιούμε τον $N \times N$ unitary πίνακα μίξης εξής

$$V = D(\omega) \prod_{\alpha < \beta} W^{\alpha\beta}(\theta_{\alpha\beta}, n_{\alpha\beta}) \quad (2.98)$$

οι γωνίες μίξης παίρνουν τιμές

$$0 \leq \theta_{\alpha\beta} \leq \pi, \quad (2.99)$$

ενώ οι φάσεις παίρνουν τιμές

$$0 \leq \omega_k < 2\pi \quad 0 \leq n_{\alpha\beta} < 2\pi. \quad (2.100)$$

Με αυτή την παραμετροποίηση έχουμε $N(N-1)/2$ γωνίες μίξης, $N(N-1)/2$ φάσεις $n_{\alpha\beta}$ και N φάσεις ω_k . Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$D(\phi)W^{\alpha\beta}(\theta_{\alpha\beta}, n_{\alpha\beta})D^\dagger(\phi) = W^{\alpha\beta}(\theta_{\alpha\beta}, n_{\alpha\beta} + \phi_\alpha - \phi_\beta) \quad (2.101)$$

Γράφοντας την σχέση (2.98) ως

$$V = D(\omega - \phi) \left[\prod_{\alpha < \beta} D(\phi)W^{\alpha\beta}(\theta_{\alpha\beta}, n_{\alpha\beta})D^\dagger(\phi) \right] D(\phi) \quad (2.102)$$

και χρησιμοποιώντας την σχέση (2.101) έχουμε

$$V = D(\omega - \phi) \left[\prod_{\alpha < \beta} W^{\alpha\beta}(\theta_{\alpha\beta}, n_{\alpha\beta} + \phi_\alpha - \phi_\beta) \right] D(\phi). \quad (2.103)$$

Ορίζοντας κατάλληλα τις φάσεις ϕ μπορούμε να απαλείψουμε $N-1$ (όσες είναι οι ανεξάρτητες διαφορές $\phi_\alpha - \phi_\beta$) από τις $N(N-1)/2$ φάσεις. Ας δούμε πως στην περίπτωση $N=3$ μπορούμε να απαλείψουμε τις φάσεις n_{12} και n_{23} . Για να το καταφέρουμε πρέπει να ορίσουμε τις φάσεις ϕ με τέτοιο τρόπο ώστε

$$\phi_1 - \phi_2 = -n_{12} \quad \phi_2 - \phi_3 = -n_{23}. \quad (2.104)$$

Με την επιλογή

$$\phi = (\phi_2 - n_{12}, \phi_2, \phi_2 + n_{23}) \quad (2.105)$$

έχουμε

$$V = D(\omega - \phi)R^{23}W^{13}R^{12}D(\phi) \quad (2.106)$$

Οι διαγώνιοι πίνακες μπορούν να απορροφηθούν με διαφορετικό ορισμό των πεδίων των quarks, οπότε η φυσική σημασία του πίνακα μίξης μπορεί να συνοψιστεί στην μορφή

$$V = R^{23}W^{13}R^{12}. \quad (2.107)$$

Θέτοντας $\delta = -n_{13}$ ο πίνακας μίξης αναλυτικά γράφεται

$$V = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (2.108)$$

όπου $s_{\alpha\beta} = \sin \theta_{\alpha\beta}$ και $c_{\alpha\beta} = \cos \theta_{\alpha\beta}$. Πειραματικά έχει βρεθεί ότι

$$s_{12} = 0.2243 \pm 0.0016, \quad s_{23} = 0.0413 \pm 0.0015, \quad s_{13} = 0.0037 \pm 0.0005. \quad (2.109)$$

Η γωνία θ_{12} ταυτίζεται με την γωνία θ_C , οπότε η προσέγγιση 2 γεύσεων, όταν δεν συμμετέχουν quarks b και t είναι εξαιρετική. Η πειραματική τιμή της φάσης είναι

$$\delta = 1.05 \pm 0.24 = 60^\circ \pm 14^\circ \quad (2.110)$$

Μια χρήσιμη προσεγγιστική παραμετροποίηση έχει προταθεί από τον Wolfenstein. Θέτουμε

$$s_{12} = \lambda, \quad s_{23} = A\lambda^2, \quad s_{13}e^{-i\delta} = A\lambda^3(\rho - im) \quad (2.111)$$

και αναπτύσσουμε τον πίνακα μίξης σε δυνάμεις του λ

$$V = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - im) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - im) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4) \quad (2.112)$$

Μέχρι στιγμής έχουμε μελετήσει έναν γενικό πίνακα μίξης. Υπάρχουν, όμως μερικές αρκετά χρήσιμες περιπτώσεις. Αρχικά θα ασχοληθούμε με την περίπτωση του πίνακα μίξης όταν υπάρχει εκφυλισμός στις μάζες δυο down quarks, έστω των d και s . Η φυσική σημασία αυτού του εκφυλισμού είναι ότι τα δύο αυτά quarks είναι απόλυτα ισοδύναμα, έτσι οι στροφές στο επίπεδο $d-s$ αφήνουν ίδια την φυσική

$$q^D \rightarrow U^{12}q^D, \quad (2.113)$$

όπου

$$U^{12} = \begin{pmatrix} U_{11}^{12} & U_{12}^{12} & 0 \\ U_{21}^{12} & U_{22}^{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.114)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (2.103) με την επιλογή

$$\phi_1 - \phi_3 = -n_{13}, \quad \phi_2 - \phi_3 = -n_{23} \quad (2.115)$$

ο πίνακας μίξης γίνεται

$$V = D^L R^{23} R^{13} W^{12} D^R, \quad (2.116)$$

όπου

$$D^L = \text{diag}(e^{i(\omega_1+n_{13})}, e^{i(\omega_2+n_{23})}, e^{i\omega_3}), \quad (2.117)$$

$$D^R = \text{diag}(e^{i(\omega_1+n_{13})}, e^{i(\omega_2+n_{23})}, 1). \quad (2.118)$$

Όπως και στην γενική περίπτωση οι διαγώνιοι πίνακες απορροφώνται και επιπλέον επιλέγοντας $U^{12} = (W^{12})^\dagger$ απαλείφεται και ο πίνακας W^{12} , οπότε το φυσικό περιεχόμενο του πίνακα μίξης εκφράζεται από την σχέση

$$V = R^{23} R^{13} \quad (2.119)$$

Ο πίνακας μίξης εκφράζει στροφές στα επίπεδα $s - b$ και $d - b$. Ωστόσο δεν εξαλείφθηκε μόνο η γωνία θ_{12} , αλλά και η φάση, επομένως ο πίνακας μίξης που απομένει είναι πραγματικός, συνεπώς δεν μπορεί να προκαλέσει παραβίαση της συμμετρίας CP . Με την ίδια διαδικασία αν οποιαδήποτε δυο up ή down quarks έχουν την ίδια μάζα, αφενός ο πίνακας μίξης μπορεί να παραμετροποιηθεί μέσω μόνο δυο γωνιών μίξης, αφετέρου δεν μπορεί να υπάρχει παραβίαση της συμμετρίας CP . Ένα άλλο συμπέρασμα που μπορούμε να εξάγουμε είναι ότι σε πειράματα που δεν είναι σε θέση να διαχωρίζουν την μάζα των quarks δεν μπορεί να παρατηρηθεί η μίξη.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι η περίπτωση στην οποία μηδενίζεται κάποιο στοιχείο του πίνακα μίξης. Στην περίπτωση αυτή εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι μέσω των σχέσεων unitarity $V^\dagger V = 1$ και $VV^\dagger = 1$ μπορούμε να πάρουμε άλλες αναπαραστάσεις του πίνακα μίξης μεταθέτοντας στήλες και γραμμές. Για παράδειγμα από την αναπαράσταση της σχέσης (2.108) μπορούμε να πάμε στην αναπαράσταση

$$V = \begin{pmatrix} -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} \\ c_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} & s_{12}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (2.120)$$

εναλλάσσοντας τις δύο πρώτες γραμμές και τις δυο τελευταίες στήλες. Μετά την εναλλαγή αναπαράστασης οι γωνίες $\theta_{\alpha\beta}$ παύουν να αντιπροσωπεύουν στροφές στο επίπεδο $\alpha - \beta$. Αν ο πίνακας μίξης έχει $V_{22} = 0$, τότε στην νέα

αναπαράσταση έχουμε $s_{13} = 0$, οπότε ο πίνακας γίνεται πραγματικός

$$V = \begin{pmatrix} -s_{12}c_{23} & s_{23} & c_{12}c_{23} \\ c_{12} & 0 & s_{12} \\ s_{12}s_{23} & c_{23}c_{13} & -c_{12}s_{23} \end{pmatrix}. \quad (2.121)$$

Στην περίπτωση που κάποια γωνία μίξης μηδενίζεται, τότε η φάση μπορεί να απαληφθεί απευθείας από την σχέση (2.108). Οι μηδενισμοί των στοιχείων είναι: αν $\theta_{13} = 0$ τότε $V_{13} = 0$ και ο πίνακας γίνεται κατευθείαν πραγματικός, ενώ αν $\theta_{12} = 0$ τότε $V_{12} = 0$ και αν $\theta_{23} = 0$ τότε $V_{23} = 0$. Ο πίνακας μίξης για κάθε περίπτωση έχει ως εξής

$$\begin{aligned} V_{\theta_{12}=0} &= \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23} & s_{23}c_{13} \\ -c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -s_{23} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\delta} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ -s_{23}s_{13} & c_{23} & s_{23}c_{13} \\ -c_{23}s_{13} & -s_{23} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\delta} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.122)$$

$$V_{\theta_{13}=0} = \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12}c_{23} & c_{12}c_{23} & s_{23} \\ s_{12}s_{23} & -c_{12}s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \quad (2.123)$$

$$\begin{aligned} V_{\theta_{23}=0} &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ -c_{12}s_{13}e^{i\delta} & -s_{12}s_{13}e^{i\delta} & c_{13} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13} \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ -c_{12}s_{13} & -s_{12}s_{13} & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\delta} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.124)$$

Στην περίπτωση που μια γωνία μίξης έχει την μέγιστη τιμή $\pi/2$, πάλι η φάση απαλείφεται και μηδενίζονται κάποια στοιχεία του πίνακα μίξης

$$V_{\theta_{12}=\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -c_{23} & -s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{23} & -c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (2.125)$$

$$V_{\theta_{13}=\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}e^{i\delta} & 0 \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}e^{i\delta} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.126)$$

$$V_{\theta_{23}=\pi/2} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -c_{12}s_{13}e^{i\delta} & -s_{12}s_{13}e^{i\delta} & c_{13} \\ s_{12} & -c_{12} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.127)$$

Όπως είδαμε οι φάσεις μπορούν να απαληφθούν, οπότε δεν μπορεί να υπάρξει παραβίαση της συμμετρίας CP .

2.5 Παραβίαση της συμμετρίας CP

Υπό την επίδραση ενός μετασχηματισμού CP τα πεδία των quarks μετασχηματίζονται ως

$$\bar{q}_L^U \rightarrow - (q_L^U)^T C^{-1} \gamma^0 D^\dagger(\vec{\xi}_U) \quad (2.128)$$

$$q_L^D \rightarrow D(\vec{\xi}_D) \gamma^0 C (\bar{q}_L^D)^T, \quad (2.129)$$

όπου $\vec{\xi}_D$ και $\vec{\xi}_U$ είναι οι φάσεις CP των down και up quarks αντίστοιχα, επομένως οι πίνακες D είναι διαγώνιοι και unitary. Έτσι το ρεύμα της ασθενούς αλληλεπίδρασης φορτισμένου ρεύματος γίνεται

$$\begin{aligned} j_{W,Q}^\mu &\rightarrow -2 (q_L^U)^T C^{-1} \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 C D^\dagger(\vec{\xi}_U) V D(\vec{\xi}_D) (\bar{q}_L^U)^T \\ &= 2 (q_L^U)^T (\gamma^\mu)^* D^\dagger(\vec{\xi}_U) V D(\vec{\xi}_D) (\bar{q}_L^D)^T \\ &= -2 \bar{q}_L^D (\gamma^\mu)^\dagger D(\vec{\xi}_D) V^T D^\dagger(\vec{\xi}_U) q_L^U \\ &= -2 \bar{q}_L^D \gamma_\mu D(\vec{\xi}_D) V^T D^\dagger(\vec{\xi}_U) q_L^U \end{aligned} \quad (2.130)$$

Το μποζόνιο W μετασχηματίζεται ως

$$W_\mu \rightarrow e^{i\xi_w} W^{\mu\dagger}, \quad (2.131)$$

όπου ξ_w είναι η φάση CP του μποζονίου και ο δείκτης Lorentz ανέβηκε λόγω της αναστροφής του χώρου.

Συνδυάζοντας τα ανωτέρω έχουμε

$$j_{W,Q}^\mu W_\mu \rightarrow -2e^{i\xi_w} \bar{q}_L^D \gamma_\mu D(\vec{\xi}_D) V^T D^\dagger(\vec{\xi}_U) q_L^U W^{\mu\dagger}. \quad (2.132)$$

Ο όρος $j_{W,Q}^\mu W_\mu$ μοιάζει με τον όρο $(j_{W,Q}^\mu W_\mu)^\dagger$, οποίος είναι μέρος της Lagrangian της ασθενούς αλληλεπίδρασης φορτισμένου ρεύματος. Για να παραμείνει αναλλοίωτη η Lagrangian πρέπει

$$j_{W,Q}^\mu W_\mu \rightarrow (j_{W,Q}^\mu W_\mu)^\dagger, \quad (2.133)$$

δηλαδή

$$-e^{i\xi_W} D(\vec{\xi}_D) V^T D^\dagger(\vec{\xi}_U) = V^\dagger \quad (2.134)$$

Θέτουμε $\xi_W = \pi$ και αναστρέφουμε εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι οι πίνακες D είναι unitary

$$D^{-1}(\vec{\xi}_U) V D(\vec{\xi}_D) = V^* \quad (2.135)$$

Σε μορφή συνιστωσών η σχέση αυτή γράφεται

$$e^{-i\xi_\alpha} V_{\alpha k} e^{i\xi_k} = V_{\alpha k}^*. \quad (2.136)$$

Αυτή η συνθήκη ικανοποιείται όταν ο πίνακας μίξης μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$V_{\alpha k} = e^{i\xi_\alpha/2} \mathcal{O}_{\alpha k} e^{-i\xi_k/2}, \quad (2.137)$$

όπου \mathcal{O} ορθογώνιος πίνακας. Αφού όπως είδαμε δεν μπορούν να απαληφθούν όλες οι φάσεις ενός πίνακα μίξης η παραπάνω σχέση συνεπάγεται ότι ο πίνακας μίξης πρέπει να είναι πραγματικός.

$$V = V^* \iff CP \text{ Symmetry} \quad (2.138)$$

Στην ίδια σχέση μπορούμε να καταλήξουμε με αφετηρία του όρους μάζας των quarks. Από την σκοπιά αυτή καταλήγουμε επιπλέον ότι η συμμετρία CP διατηρείται στην περίπτωση που $M^D = 0$ ή $M^U = 0$. Για τα quarks δεν ισχύει αυτή η περίπτωση, ισχύει όμως για τα νετρίνα του Καθιερωμένου Προτύπου. Αφού τα νετρίνα είναι άμαζα δεν μπορεί να υπάρχει παραβίαση της συμμετρίας CP όσον αφορά τα λεπτόνια.

Η παραβίαση της συμμετρίας CP μπορεί να ποσοτικοποιηθεί με ένα τρόπο ο οποίος είναι αναλλοίωτος σε *rephasing*. Ορίζουμε το αναλλοίωτο Jaroskog:

$$J = \Im [V_{us} V_{cb} V_{ub} V_{cs}], \quad (2.139)$$

το οποίο είναι αναλλοίωτο σε μετασχηματισμούς

$$V_{\alpha k} \rightarrow e^{-i\psi_\alpha^U} V_{\alpha k} e^{i\psi_k^D}. \quad (2.140)$$

Πειραματικά η τιμή του αναλλοίωτου Jarlskog έχει βρεθεί

$$J = (2.88 \pm 0.33) \times 10^{-5}. \quad (2.141)$$

Γενικά, στην παραμετροποίηση της σχέσης (2.108) το αναλλοίωτο Jarlskog δίνεται από την σχέση

$$J = c_{12}s_{12}c_{23}s_{23}c_{13}^2s_{13} \sin \delta = \frac{1}{8} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13} \cos \theta_{13} \sin \delta \quad (2.142)$$

Η μέγιστη παραβίαση της συμμετρίας CP επιτυγχάνεται όταν το αναλλοίωτο Jarlskog λάβει την μέγιστη δυνατή τιμή του

$$|J_{max}| = \frac{1}{6\sqrt{3}}, \quad (2.143)$$

τιμή η οποία επιτυγχάνεται για $\theta_{12} = \theta_{23} = \pi/4$, $s_{13} = 1/\sqrt{3}$ και $\sin \delta = \pm 1$. Στην περίπτωση αυτή το μέτρο κάθε στοιχείου του πίνακα μίξης είναι $1/\sqrt{3}$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \mp \frac{i}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2} \mp \frac{i}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \mp \frac{i}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} \mp \frac{i}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \mp \frac{i}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mp i \\ -e^{\pm i\pi/6} & e^{\mp i\pi/6} & 1 \\ e^{\mp i\pi/6} & e^{\pm i\pi/6} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.144)$$

Οι γωνίες μίξης και η φάση της παραμετροποίησης της σχέσης (2.108) μπορούν να εκφραστούν μέσω απολύτων τιμών στοιχείων του πίνακα μίξης και του αναλλοίωτου Jarlskog ως εξής

$$\tan \theta_{12} = \frac{|V_{us}|}{|V_{ud}|}, \quad (2.145)$$

$$\tan \theta_{23} = \frac{|V_{cb}|}{|V_{tb}|}, \quad (2.146)$$

$$\sin \theta_{13} = |V_{ub}|, \quad (2.147)$$

$$\sin \delta = \frac{8J}{\sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13} \cos \theta_{13}}. \quad (2.148)$$

Οι σχέσεις αυτές καθορίζουν μοναδικά της γωνίες μίξης, ωστόσο επειδή $\sin \delta = \sin(\pi - \delta)$ η φάση δεν μπορεί να καθοριστεί πλήρως. Αν εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι ο πίνακας μίξης είναι unitary επομένως ισχύουν οι σχέσεις

$$|V_{ud}| = \sqrt{1 - |V_{us}|^2 - |V_{ub}|^2}, \quad (2.149)$$

$$|V_{tb}| = \sqrt{1 - |V_{cb}|^2 - |V_{ub}|^2}, \quad (2.150)$$

βλέπουμε ότι η παραμετροποίηση μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει τριών παραμέτρων του πίνακα μίξης και του αναλλοίωτου του Jarlskog

$$|V_{us}|, \quad |V_{ub}|, \quad |V_{cb}|, \quad J. \quad (2.151)$$

Για να καθοριστεί μοναδικά η φάση πρέπει να μετρηθεί κάποιο μέγεθος που εξαρτάται από το $\cos \delta$.

Αν συνοψίσουμε τις συνθήκες που επιτρέπουν την παραβίαση της συμμετρίας CP θα δούμε ότι έχουμε τρεις κατηγορίες συνθηκών:

- Δεν υπάρχει εκφυλισμός ανάμεσα στις μάζες δύο up ή δύο down quarks. (6 συνθήκες)
- Οι γωνίες μίξης δεν έχουν τιμές 0 ή $\pi/2$. (6 συνθήκες)
- Η φάση δεν έχει τιμή 0 ή π . (2 συνθήκες)

Οι 14 συνθήκες μπορούν να συνοψιστούν στην συνθήκη

$$\det C \neq 0, \quad (2.152)$$

όπου

$$C = i \left[(M^U)^2, V (M^D)^2 V^\dagger \right] \quad (2.153)$$

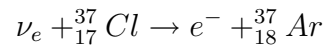
Οι συνθήκες γίνονται

$$\det C = 2J(m_c^2 - m_u^2)(m_t^2 - m_u^2)(m_t^2 - m_c^2)(m_s^2 - m_d^2)(m_b^2 - m_d^2)(m_b^2 - m_s^2). \quad (2.154)$$

Οι πρώτες 6 συνθήκες ισοδυναμούν με τον μη μηδενισμό καθεμίας από τις παρενθέσεις, ενώ οι υπόλοιπες 8 ισοδυναμούν με τον μη μηδενισμό του αναλλοίωτου Jarlskog.

3 Ταλαντώσεις Νετρίνων

Η θεωρία των ταλαντώσεων νετρίνων δεν προέκυψε ως προσπάθεια ερμηνείας κάποιου πειράματος, αλλά καθαρά σαν θεωρητική διερεύνηση. Οι ταλαντώσεις νετρίνων προτάθηκαν για πρώτη φορά στα τέλη της δεκαετίας του 50 από τον Pontecorvo κατά αναλογία με τις ταλαντώσεις $K^0 - \bar{K}^0$. Οι ταλαντώσεις είναι καθαρά κβαντομηχανικό φαινόμενο και οφείλονται στο γεγονός ότι οι ιδιοκαταστάσεις γεύσης (που αφορούν την ασθενή αλληλεπίδραση) των νετρίνων διαφέρουν από τις ιδιοκαταστάσεις μάζας τους. Αυτή η μη ταύτιση ιδιοκαταστάσεων μάζας - γεύσης ονομάζεται μίξη. Την εποχή που ο Pontecorvo εισήγαγε τις ταλαντώσεις νετρίνων ήταν γνωστό μόνο το νεutrino του ηλεκτρονίου, επομένως υπέθεσε την ύπαρξη ενός μη ενεργού νετρίνο (sterile neutrino), που δεν αλληλεπιδρά με την ασθενή δύναμη. Μετά την ανακάλυψη του νετρίνο του μιονίου οι ταλαντώσεις μπορούσαν να υπάρχουν μεταξύ ενεργών γεύσεων αν τα νετρίνα έχουν μάζα και αναμιγνύονται. Η μελέτη της μίξης των νετρίνων έγινε από τους Maki, Nakagawa και Sakata στις αρχές της δεκαετίας του 60. Λίγο αργότερα ο Pontecorvo προέβλεψε το επονομαζόμενο πρόβλημα των ηλιακών νετρίνων (Solar Neutrino Problem) ως συνέπεια των ταλαντώσεων των νετρίνων. Η πειραματική επιβεβαίωση του προβλήματος των ηλιακών νετρίνων ήρθε από τον R. Davies και τους συνεργάτες του με το πείραμα του ορυχείου Homestake. Ο Davies μετρούσε την ροή των νετρίνων μέσω της αντίδρασης



και την βρήκε περίπου το ένα τρίτο από την προβλεπόμενη ροή βάσει της ηλιακής θεωρίας.

3.1 Εισαγωγή

Αν θεωρήσουμε ότι τα νετρίνα αναμειγνύονται, όπως συμβαίνει με τα quarks τότε μπορούμε να εκφράσουμε τις ιδιοκαταστάσεις γεύσης ως γραμμικό συνδυασμό των ιδιοκαταστάσεων μάζας. Η ύπαρξη ιδιοκαταστάσεων μάζας σημαίνει ότι υπάρχουν καταστάσεις ν_i με μάζα m_i . Οι μέχρι στιγμής γνώσεις μας από τα διάφορα πειράματα υποδεικνύουν ότι υπάρχουν 3 ιδιοκαταστάσεις μάζας, ενώ υπάρχουν κάποιες ανωμαλίες που δεν μπορούν να αποδοθούν σε ταλαντώσεις με 3 ιδιοκαταστάσεις μάζας. Οι ανωμαλίες μελετώνται από πειράματα που βρίσκονται σε εξέλιξη. Συνέπεια της μίξης είναι ότι η διάσπαση ενός W μποζονίου

ως

$$W^+ \rightarrow \nu_\alpha + \bar{\ell}_\alpha$$

στην πραγματικότητα είναι η διάσπαση

$$W^+ \rightarrow \nu_i + \bar{\ell}_\alpha,$$

όπου $\alpha = e, \mu, \tau$ και ℓ_α είναι το φορτισμένο λεπτόνιο γεύσης α . Το φυσικό νόημα της μίξης είναι ότι στην διάσπαση του μποζονίου W^+ , που συνοδεύεται από την εκπομπή του συγκεκριμένου λεπτόνιου ℓ_α , το νεutrino που εκπέμπεται δεν είναι πάντα το ίδιο ν_i , αλλά μπορεί να είναι οποιαδήποτε ιδιοκατάσταση μάζας. Πρέπει να επισημάνουμε ότι το νεutrino δημιουργείται όντας γραμμικός συνδυασμός ιδιοκαταστάσεων μάζας η οποία αντιστοιχεί σε συγκεκριμένη γεύση, την γεύση του φορτισμένου λεπτόνιου που παράγεται. Ωστόσο αυτό δεν καθορίζει την διάδοση του νεutrino. Τα σωματίδια καθορίζονται από την μάζα τους (Wigner's classification), έτσι η διάδοση του νεutrino καθορίζεται από την ιδιοκατάσταση μάζας. Το πλάτος της διάσπασης W^+ στον συγκεκριμένο συνδυασμό $\nu_i + \bar{\ell}_\alpha$ συμβολίζεται με $U_{\alpha i}^*$. Τότε το νεutrino που εκπέμπεται στην συγκεκριμένη διάσπαση είναι στην κατάσταση

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle. \quad (3.1)$$

Αυτή η επαλληλία ιδιοκαταστάσεων μάζας ονομάζεται νεutrino γεύσης α . Το σύνολο των στοιχείων $U_{\alpha i}^*$ σχηματίζει τον πίνακα μίξης. Ο πίνακας αυτός συνήθως συμβολίζεται U_{PNMS} , από τα αρχικά των Pontecorvo, Maki, Nakagawa και Sakata. Σε ακόλουθη ενότητα θα μελετήσουμε περισσότερο τον πίνακα μίξης. Εδώ θα αρκестούμε να αναφέρουμε ότι σύμφωνα με το Καθιερωμένο Πρότυπο είναι unitary, οπότε η σχέση (3.1) μπορεί να αντιστραφεί και να δώσει:

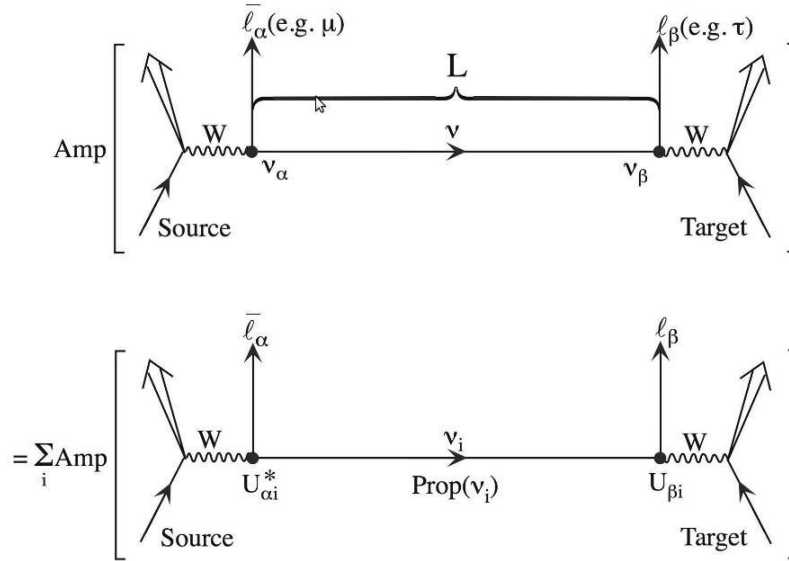
$$|\nu_i\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha i} |\nu_\alpha\rangle. \quad (3.2)$$

Προφανώς η πιθανότητα να αλληλεπιδράσει το νεutrino ν_i με ανιχνευτή και να δώσει φορτισμένο λεπτόνιο γεύσης α είναι $|U_{\alpha i}|^2$.

3.2 Ταλαντώσεις στο Κενό

Στο σημείο αυτό θα υπολογίσουμε με έναν εντελώς απλοϊκό τρόπο την πιθανότητα ταλάντωσης $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta)$ συναρτήσει της απόστασης. Αν και η

προσέγγισή μας είναι η πλέον απλοϊκή είναι αρκετή ώστε να δούμε κάποια πολύ σημαντικά συμπεράσματα. Αρχικά πρέπει να ξεκαθαρίσουμε ποια διαδικασία εννοούμε με τον όρο ταλάντωση. Στην πηγή παράγεται ένα νεutrίνο και ένα φορτισμένο αντιλεπτόνιο $\bar{\ell}_\alpha$ γεύσης α , επομένως αρχικά έχουμε ένα νεutrίνο ν_α γεύσης α . Στην πορεία, αφού διανύσει απόσταση L , φτάνει στον ανιχνευτή και παράγει ένα φορτισμένο λεπτόνιο ℓ_β γεύσης β . Για να παραχθεί αυτό το φορτισμένο λεπτόνιο το νεutrίνο πρέπει να έχει μετατραπεί σε ν_β . Ο μετασχηματισμός από ν_α σε ν_β ονομάζεται ταλάντωση. Στο σχήμα 1 φαίνεται αυτή η διαδικασία.



Σχήμα 1: Σχηματική αναπαράσταση των ταλαντώσεων νεutrίνων και της συμβολής κάθε ιδιοκατάστασης μάζας.

Το πλάτος πιθανότητας για να συμβεί η διαδικασία είναι το γινόμενο του πλάτους των δύο κορυφών και του πλάτους της διάδοσης του νεutrίνο από την πηγή στον ανιχνευτή. Τα πλάτη είναι

$$Amp(W \rightarrow \bar{\ell}_\alpha \nu_i) = U_{\alpha i}^* \quad \text{και} \quad Amp(\nu_i \rightarrow \ell_\beta W) = U_{\beta i}, \quad (3.3)$$

επομένως το συνολικό πλάτος της διαδικασίας όπως φαίνεται και στο σχήμα 1 είναι:

$$Amp(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \sum_i U_{\alpha i}^* Prop(\nu_i) U_{\beta i}. \quad (3.4)$$

Για να υπολογίσουμε τον διαδότη $Prop(\nu_i)$ θα πάμε στο ιδιοσύστημα του νετρίνο. Εκεί ισχύει:

$$i\frac{\partial}{\partial\tau_i}|\nu_i(\tau_i)\rangle = m_i|\nu_i(\tau_i)\rangle, \quad (3.5)$$

προφανώς η λύση είναι:

$$|\nu_i(\tau_i)\rangle = e^{-im_i\tau_i}|\nu_i(0)\rangle. \quad (3.6)$$

Το γινόμενο $m_i\tau_i$ είναι αναλλοίωτο Lorentz, οπότε στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου έχουμε:

$$m_i\tau_i = E_it - p_iL. \quad (3.7)$$

Πρέπει να επισημάνουμε ότι στις ταλαντώσεις έχουμε συνεκτική συμβολή μόνο από νετρίνα της ίδιας ενέργειας. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι κατά την διάδοση, το νετρίνο έχει αποκτήσει φάση e^{-iE_it} . Θεωρώντας την συμβολή δύο νετρίνων η δέσμη έχει αποκτήσει φάση $e^{-i(E_1-E_2)t}$, οπότε η μέση τιμή της φάσης μηδενίζεται αν $E_1 \neq E_2$. Για την κοινή ενέργεια E , χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $m_i^2 \ll E^2$ προκύπτει:

$$p_i = \sqrt{E^2 - m_i^2} \approx E - \frac{m_i^2}{2E}. \quad (3.8)$$

Με αυτή την προσέγγιση η σχέση (3.7) γίνεται:

$$m_i\tau_i \approx E(t - L) + \frac{m_i^2}{2E}L. \quad (3.9)$$

Η φάση $E(t - L)$ δεν μας ενδιαφέρει αφού είναι κοινή και θα αναιρεθεί όταν μεταβούμε από το πλάτος πιθανότητας στην πιθανότητα, οπότε:

$$Prop(\nu_i) = e^{-im_i^2 \frac{L}{2E}} \quad (3.10)$$

Τελικά από την σχέση (3.4) προκύπτει ότι:

$$Amp(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \sum_i U_{\alpha i}^* e^{-im_i^2 \frac{L}{2E}} U_{\beta i} \quad (3.11)$$

Ξέρουμε ότι $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = |Amp(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta)|^2$, άρα

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \sum_{i,j} U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-i\Delta m_{ij}^2 \frac{L}{2E}\right). \quad (3.12)$$

Κάνοντας χρήση της σχέσης $\sum_i U_{ij}^* U_{ik} = \delta_{jk}$ που ισχύει για unitary πίνακες μπορούμε να γράψουμε την πιθανότητα στην μορφή

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i>j} \Re(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin^2 \left(\Delta m_{ij}^2 \frac{L}{4E} \right) + 2 \sum_{i>j} \Im(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin \left(\Delta m_{ij}^2 \frac{L}{2E} \right), \quad (3.13)$$

όπου $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η διαδικασία $\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta$ είναι η CPT εικόνα της διαδικασίας $\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha$. Από την σχέση (3.11) βλέπουμε ότι:

$$P(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha, U) = P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta, U^*) \quad (3.14)$$

άρα από την εξίσωση (3.13) έχουμε

$$P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i>j} \Re(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin^2 \left(\Delta m_{ij}^2 \frac{L}{4E} \right) - 2 \sum_{i>j} \Im(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin \left(\Delta m_{ij}^2 \frac{L}{2E} \right), \quad (3.15)$$

Αφού στην γενική περίπτωση $\Im(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \neq 0$ έχουμε

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) \neq P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta), \quad (3.16)$$

επομένως υπάρχει ενδεχόμενη παραβίαση της συμμετρίας CP .

Οι πιθανότητες ταλάντωσης για $\alpha \neq \beta$ λέγονται πιθανότητες μετατροπής, ενώ οι πιθανότητες για ταλαντώσεις με $\alpha = \beta$ λέγονται πιθανότητες επιβίωσης.

3.3 Σχόλια - Συμπεράσματα

- Αν τα νετρίνα είναι άμαζα ή έχουν την ίδια μάζα βλέπουμε απευθείας ότι $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$. Ουσιαστικά η παρατήρηση ότι τα νετρίνα αλλάζουν γεύσεις σημαίνει ότι τα νετρίνα έχουν μάζα και μάλιστα οι μάζες τους είναι διαφορετικές.
- Θα μπορούσε κανείς να επισημάνει ότι στην προσέγγιση που κάναμε τα νετρίνα βρίσκονται στο κενό, ενώ στην πραγματικότητα τα νετρίνα έρχονται σε επαφή με ύλη, οπότε ενδεχομένως να είναι άστοχη η προσέγγιση

μας. Πράγματι, όπως μπορεί να δει κανείς αν ανατρέξει στην βιβλιογραφία, η διάδοση νετρίνων μέσα από την ύλη έχει τα δικά της χαρακτηριστικά. Στην προκειμένη περίπτωση όμως το Καθιερωμένο Πρότυπο έχει πολύ καλά ορισμένες αλληλεπιδράσεις των νετρίνων με την ύλη και αυτές δεν αφήνουν πιθανότητα σε αλλαγή γεύσης. Επιπλέον αν το πείραμα δεν είναι ειδικά σχεδιασμένο ώστε να μετρά τις ταλαντώσεις στην ύλη το φαινόμενο μπορεί να αγνοηθεί.

- Αυτό που δείχνει να έχει πιο βαθιά φυσική σημασία είναι ότι η εξάρτηση από την ενέργεια και από το μήκος υπάρχει στον συνδυασμό L/E , ο οποίος είναι ανάλογος του ιδιόχρονου στο σύστημα αναφοράς του νετρίνου. Φαίνεται δηλαδή ότι πρόκειται για μια εξέλιξη του ίδιου του νετρίνου παρά για αποτέλεσμα αλληλεπίδρασης με την ύλη.
- Αν θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχει μίξη, τότε στην διάσπαση $W^+ \rightarrow \nu_i + \bar{\ell}_\alpha$, με το πλάτος $U_{\alpha i}^*$, το φορτισμένο αντιλεπτόνιο $\bar{\ell}_\alpha$, συνοδεύεται πάντα από το συγκεκριμένο νετρίνο ν_i . Αυτό σημαίνει ότι στον πίνακα μίξης μόνο το στοιχείο $U_{\alpha i}^* \neq 0$, οπότε $U_{\alpha j}^* = 0$, για $i \neq j$. Από την σχέση (3.13) βλέπουμε ότι $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$, οπότε η παρατήρηση της ταλάντωσης των νετρίνων προϋποθέτει την μίξη τους.
- Πρέπει να σταθούμε στο γεγονός ότι όπως προκύπτει από την σχέση (3.13) η πιθανότητα εξαρτάται από την διαφορά του τετραγώνου των μαζών των διαφόρων ιδιοκαταστάσεων μάζας και όχι από το τετράγωνο της μάζας. Αυτό σημαίνει ότι μέσω των ταλαντώσεων νετρίνων μπορούμε να αποκτήσουμε πληροφορίες για την διαφορά του τετραγώνου των μαζών και για την διάταξη τους, αλλά όχι για την τιμή τους.
- Η πιθανότητα εξαρτάται από τον πίνακα μίξης μέσω του όρου $U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*$. Ο όρος αυτός είναι αναλλοίωτος σε μετασχηματισμούς της μορφής

$$U_{\alpha i} \rightarrow e^{i\psi_\alpha} U_{\alpha i} e^{i\phi_i}, \quad (3.17)$$

οπότε οι ταλαντώσεις δεν εξαρτώνται από την φύση των νετρίνων (Dirac ή Majorana). Η παραβίαση της συμμετρίας CP εξαρτάται μόνο από την φάση Dirac του πίνακα μίξης.

- Η συνολική ροή της δέσμης δεν αλλάζει εξαιτίας των ταλαντώσεων.

$$\sum_{\beta} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = 1 \quad (3.18)$$

Η πιθανότητα να αλλάξει γεύση το νεutrino και η πιθανότητα να μην αλλάξει γεύση έχουν ως άθροισμα την μονάδα. Αν ωστόσο έχουμε κάποια μετάβαση σε ανενεργό νεutrino, τότε θα παρατηρηθεί μείωση στην ροή της δέσμης, δεδομένου ότι μπορούμε να μετρήσουμε μόνο τα ενεργά νεutrina.

- Για να κατανοήσουμε την κλίμακας στην οποία μπορούμε να παρατηρήσουμε ταλαντώσεις, αντικαθιστούμε τις τιμές των σταθερών που έχουμε παραλήψει, οπότε το όρισμα γίνεται:

$$\Delta m_{ij}^2 \frac{L}{4E} = 1.27 \Delta m_{ij}^2 (eV^2) \frac{L[km]}{E[GeV]}. \quad (3.19)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι το $\sin^2(1.27 \Delta m_{ij}^2 L/E)$, είναι σημαντικό, όταν το όρισμα γίνει τάξης μεγέθους μονάδας. Επομένως για δεδομένη απόσταση και ενέργεια, ένα πείραμα μπορεί να μας δώσει αποτελέσματα για διαφορά μαζών της τάξης μεγέθους:

$$\Delta m_{ij}^2 \sim \left(\frac{L[km]}{E[GeV]} \right)^{-1}. \quad (3.20)$$

Για παράδειγμα έχοντας ως απόσταση $L \approx 10^4 km$, την διάμετρο της γης, και ενέργεια $E \sim 1 GeV$, έχουμε ευαισθησία σε διαφορά μαζών $\Delta m_{ij}^2 \sim 10^{-4} eV$. Βλέπουμε, δηλαδή, ότι μπορούμε να έχουμε ευαισθησία σε εξαιρετικά μικρές διαφορές μαζών, αρκεί να στήσουμε κατάλληλα το πείραμα. Ακόμα και ένα ελάχιστο Δm_{ij}^2 , είναι πειραματικά προσβάσιμο για αρκετά μεγάλο L/E .

- Ορίζουμε το μήκος ταλάντωσης ως το μήκος όπου η φάση γίνεται 2π

$$L^{osc} = 2.47 \frac{E [GeV]}{\Delta m^2 [eV^2]} km \quad (3.21)$$

Για $L \ll L^{osc}$ οι πιθανότητες μετατροπής είναι πολύ μικρές, ενώ για $L \gg L^{osc}$ η πιθανότητα της σχέσης (3.12) ταλαντώνεται πολύ γρήγορα, οπότε έχει νόημα μόνο η μέση τιμή της, η οποία είναι ο όρος για $i = j$, έτσι

$$\langle P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} \rangle = \sum_i |U_{\alpha i}|^2 |U_{\beta i}|^2. \quad (3.22)$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και στην περίπτωση της μη συνεκτικής συμβολής των νεutrinών

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}^{incoherent} = \sum_i |\langle \nu_\alpha | \nu_i \rangle e^{-iE_i t} \langle \nu_i | \nu_\beta \rangle|^2 = \sum_i |U_{\alpha i}|^2 |U_{\beta i}|^2 \quad (3.23)$$

Στον υπολογισμό της σχέσης που δίνει την πιθανότητα των ταλαντώσεων νετρίνων σιωπηλά κάναμε 2 υποθέσεις:

1. Τα νετρίνα περιγράφονται από την σχέση 3.1, ωστόσο αυτό αποτελεί μια απλούστευση. Τα νετρίνα μπορούν να περιγραφούν σωστά μόνο στα πλαίσια της κβαντικής θεωρίας πεδίου. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να ληφθεί υπόψη η επίδραση της διαφορετικής μάζας κάθε ιδιοκατάστασης μάζας στην δημιουργία της επαλληλίας του νετρίνο.
2. Έχουμε χρησιμοποιήσει το σχετικιστικό όριο $t = L$, ενώ παράλληλα υποθέσαμε ότι ο χρόνος είναι κοινός για όλα τα σωματίδια. Αυτό είναι αυθαίρετο, αλλά δεν μας δημιουργεί πρόβλημα. Μόνο με χρήση κυματοπακέτων μπορούμε να περιγράψουμε εντοπισμένες διαδικασίες, παρόλα αυτά η ταχύτητα ομάδας των κυματοπακέτων πράγματι είναι κοντά στην ταχύτητα του φωτός όποτε δικαιολογείται η προσέγγιση.

3.4 Ταλαντώσεις και Συμμετρίες

Τα νετρίνα και τα αντινετρίνα συνδέονται μέσω μετασχηματισμού CP . Πράγματι ένας μετασχηματισμός CP μετατρέπει το νετρίνο σε αντινετρίνο και του αλλάζει την ελικότητα. Στην περίπτωση Majorana νετρίνων ο μετασχηματισμός C είναι ταυτοτικός όποτε απλά εναλλάσσεται η ελικότητα. Στην περίπτωση αυτή κατά σύμβαση αποκαλούμε τις καταστάσεις αρνητικής ελικότητας νετρίνα και τις καταστάσεις θετικής ελικότητας αντινετρίνα. Έτσι έχουμε

$$\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta \xleftrightarrow{CP} \bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta. \quad (3.24)$$

Ένας μετασχηματισμός T εναλλάσσει την αρχική και τελική κατάσταση

$$\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta \xleftrightarrow{T} \nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha, \quad (3.25)$$

ενώ ένας μετασχηματισμός CPT συνδυάζει και τους δυο προηγούμενους μετασχηματισμούς

$$\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta \xleftrightarrow{CPT} \bar{\nu}_\beta \rightarrow \bar{\nu}_\alpha. \quad (3.26)$$

3.4.1 CPT

Κάθε τοπική κβαντική θεωρία πεδίου πρέπει να είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς CPT , ωστόσο κάποιος δεν μπορεί να αποκλείσει ότι η περιγραφή

της φύσης μέσω τοπικής κβαντικής θεωρίας πεδίου δεν είναι ακριβής και ότι υπάρχει μια μικρή παραβίαση της συμμετρίας CPT . Τότε οι ταλαντώσεις νετρίνων θα μπορούσαν να αναδείξουν την παραβίαση αυτή μέσω του μη μηδενικού παράγοντα ασυμμετρίας CPT

$$A_{\alpha\beta}^{CPT} = P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} - P_{\bar{\nu}_\beta \rightarrow \bar{\nu}_\alpha} \quad (3.27)$$

3.4.2 CP

Όπως αναφέραμε ένας μιγαδικός πίνακας μίξης μπορεί να προκαλεί παραβίαση της συμμετρίας CP . Αυτή η παραβίαση μπορεί να αναδειχθεί μέσω της μέτρησης του παράγοντα ασυμμετρίας CP

$$A_{\alpha\beta}^{CP} = P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} - P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta} \quad (3.28)$$

Η συμμετρία CPT έχει ως αποτέλεσμα της αντισυμμετρία του παράγοντα CP

$$A_{\alpha\beta}^{CP} = -A_{\beta\alpha}^{CP} \quad (3.29)$$

Προφανώς η ασυμμετρία CP μπορεί να μετρηθεί μόνο για μετατροπές μεταξύ διαφορετικών γεύσεων. Από τις σχέσεις (3.13) και (3.15) έχουμε

$$A_{\alpha\beta}^{CP} = 4 \sum_{i>j} \Im(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin\left(\Delta m_{ij}^2 \frac{L}{2E}\right) \quad (3.30)$$

Για να μπορέσουμε να μετρήσουμε την ασυμμετρία πρέπει το όρισμα του ημίτονου $\Delta m_{ij}^2 L/2E$ να είναι της τάξης του 1. Αν το όρισμα είναι πολύ μικρό τότε οι πιθανότητες είναι πολύ μικρές με αποτέλεσμα να μην μπορούν να μετρηθούν, ενώ αν είναι πολύ μεγάλο τότε το ημίτονο συμβάλει μόνο κατά μέση τιμή, η οποία όμως είναι μηδενική, οπότε ο ενεργός παράγοντας ασυμμετρίας CP ταυτοτικά μηδενίζεται.

3.4.3 T

Αν ισχύει η συμμετρία CPT τότε παραβίαση της συμμετρίας CP , συνεπάγεται την παραβίαση της συμμετρίας T . Στις ταλαντώσεις νετρίνων μπορούν να υπάρχουν δύο ειδών ασυμμετρίες

$$A_{\alpha\beta}^T = P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} - P_{\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha} \quad (3.31)$$

$$\bar{A}_{\alpha\beta}^T = P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta} - P_{\bar{\nu}_\beta \rightarrow \bar{\nu}_\alpha} \quad (3.32)$$

Η συμμετρία CPT συνεπάγεται την σχέση

$$A_{\alpha\beta}^T = -\bar{A}_{\alpha\beta}^T = A_{\alpha\beta}^{CP} \quad (3.33)$$

Πάλι ισχύουν οι περιορισμοί που αναφέραμε και στην περίπτωση της συμμετρίας CP .

3.5 Ταλαντώσεις για 2 Νετρίνα

Η περίπτωση της μίξης δύο νετρίνων είναι μια προσέγγιση στην οποία λαμβάνουμε υπόψιν μας μόνο δυο νετρίνα. Αυτή η προσέγγιση αν και μοιάζει αυθαίρετη είναι αρκετά χρήσιμη για δύο λόγους:

1. Οι διάφοροι τύποι είναι πολύ πιο απλοί και εξαρτώνται από λιγότερες παραμέτρους.
2. Πολλά πειράματα δεν είναι ευαίσθητα στην ύπαρξη του τρίτου νετρίνο, οπότε τα δεδομένα μπορούν να αναλυθούν με το μοντέλο δύο νετρίνων.³

Μπορούμε να θεωρήσουμε την μίξη νετρίνων «καθαρή» γεύσης ($\alpha = e, \beta = \mu$) ή γραμμικό συνδυασμό γεύσεων ($\alpha = e, \beta = c_\mu\mu + c_\tau\tau, |c_\mu|^2 + |c_\tau|^2 = 1$). Για παράδειγμα σε ένα πείραμα που μετράμε την εξασθένηση μιας δέσμης ν_e και δεν ενδιαφερόμαστε να ξεχωρίσουμε τα νετρίνα ν_μ και ν_τ η ανάλυση μπορεί να γίνει για δυο νετρίνα.

Τα δύο νετρίνα μπορούν να εκφραστούν ως γραμμικός συνδυασμός των ιδιοκαταστάσεων μάζας ν_1 και ν_2 , χρησιμοποιώντας των πίνακα μίξης

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

όπου θ είναι η γωνία μίξης με τιμές $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Υπάρχει μόνο μια διαφορά τετραγώνων των μαζών

$$\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2 \quad (3.35)$$

Κατά σύμβαση το νετρίνο ν_1 ορίζεται ως το ελαφρύτερο ώστε η διαφορά τετραγώνων των μαζών Δm^2 να είναι θετική. Από την σχέση (3.13) στην περίπτωση της μετατροπής έχουμε

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2 L}{4E} \right), \quad (\alpha \neq \beta), \quad (3.36)$$

³ Στην πειραματική ενότητα θα εξεταστεί η σχέση των ταλαντώσεων δυο νετρίνων και των ταλαντώσεων τριών νετρίνων.

ενώ στην περίπτωση της επιβίωσης έχουμε

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}(L, E) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2 L}{4E} \right). \quad (3.37)$$

Η μέση πιθανότητα μετατροπής είναι

$$\langle P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) \rangle = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta. \quad (3.38)$$

Η σχέση (3.36) είναι συμμετρική στην αλλαγή

$$\theta \iff \frac{\pi}{2} - \theta. \quad (3.39)$$

Αυτός ο εκφυλισμός δεν πρέπει να μας προβληματίζει καθώς στην περίπτωση που $\theta < \pi/4$ το νεutrino αποτελείται περισσότερο από ν_1 και λιγότερο από ν_2 , ενώ αν $\theta > \pi/4$ τότε αποτελείται περισσότερο από ν_2 και λιγότερο από ν_1 . Στις ταλαντώσεις στην ύλη όπως θα δούμε αίρεται ο εκφυλισμός.

Το γεγονός ότι ο πίνακας μίξης είναι πραγματικός μας εξασφαλίζει ότι διατηρούνται οι συμμετρίες CP και T .

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = P(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha) = P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta) = P(\bar{\nu}_\beta \rightarrow \bar{\nu}_\alpha) \quad (3.40)$$

3.6 Ένας πιο αυστηρός Υπολογισμός

Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα ταλάντωσης των νετρίνων λαμβάνοντας υπόψιν την επίδραση της διαφορετικής μάζας κάθε ιδιοκατάστασης μάζας. Στην κβαντική θεωρία πεδίου μια τελική κατάσταση προκύπτει από μια αρχική μέσω της δράσης του τελεστή \hat{S} :

$$|f\rangle = \hat{S} |i\rangle. \quad (3.41)$$

Αν θεωρήσουμε την τελική κατάσταση άθροισμα ορθοκανονικών καταστάσεων $|f_i\rangle$, τότε έχουμε

$$|f\rangle = \sum_i \mathcal{A}_i |f_i\rangle, \quad (3.42)$$

όπου ο συντελεστής δίνεται από την σχέση

$$\mathcal{A}_i = \langle f_i | f \rangle = \langle f_i | \hat{S} | i \rangle \quad (3.43)$$

Στις παραπάνω σχέσεις οι μονοσωματιδιακές καταστάσεις έχουν καθορισμένη ορμή και ενέργεια.

Το νεutrίνο ν_α είναι το νεutrίνο που είτε παράγεται σε μια αλληλεπίδραση φορτισμένου ρεύματος μαζί με ένα φορτισμένο λεπτόνιο ℓ_α^+ , είτε παράγεται από ένα φορτισμένο λεπτόνιο ℓ_α^- , είτε παράγει ένα φορτισμένο λεπτόνιο ℓ_α^- . Η γεύση του νεutrίνο μπορεί να ανιχνευτεί μόνο από το φορτισμένο λεπτόνιο με το οποίο σχετίζεται. Μια γενική διαδικασία δημιουργίας νεutrίνο είναι

$$P_I \rightarrow P_F + \ell_\alpha^+ + \nu_\alpha. \quad (3.44)$$

Η διάσπαση του αρχικού σωματιδίου P_I είναι

$$|f\rangle = \hat{S} |P_I\rangle. \quad (3.45)$$

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί

$$|f\rangle = \sum_i \mathcal{A}_{\alpha i}^P |\nu_i, \ell_\alpha^+, P_F\rangle + \dots, \quad (3.46)$$

όπου έχουμε απομονώσει το κανάλι διάσπασης που μας ενδιαφέρει και έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι το νεutrίνο είναι επαλληλία ιδιοκατάστασεων μάζας. Αφού οι καταστάσεις είναι ορθοκανονικές και τα άλλα κανάλια διάσπασης είναι κάθετα σε αυτή, ο συντελεστής $\mathcal{A}_{\alpha i}^P$ είναι απλά το αναλλοίωτο πλάτος της διάσπασης

$$\mathcal{A}_{\alpha i}^P = \langle \nu_i, \ell_\alpha^+, P_F | S |P_I\rangle. \quad (3.47)$$

Προβάλλοντας στις καταστάσεις $|\ell_\alpha^+, P_F\rangle$ και κανονικοποιώντας έχουμε

$$|\nu_\alpha^P\rangle = \left(\sum_j |\mathcal{A}_{\alpha j}^P|^2 \right)^{-1/2} \sum_i \mathcal{A}_{\alpha i}^P |\nu_i\rangle. \quad (3.48)$$

Αντίστοιχα για την γενική διαδικασία ανίχνευσης

$$\nu_\alpha + D_I \rightarrow D_F + \ell_\alpha^-, \quad (3.49)$$

έχουμε

$$|f\rangle = \hat{S} |\nu_\alpha, D_I\rangle, \quad (3.50)$$

όπου

$$|f\rangle = |D_F, \ell_\alpha^-\rangle + \dots. \quad (3.51)$$

Απομονώνοντας την τελική κατάσταση που μας ενδιαφέρει έχουμε

$$|\nu_\alpha, D_I\rangle = \hat{S}^\dagger |D_F, \ell_\alpha^-\rangle, \quad (3.52)$$

οπότε αν γράψουμε την αρχική κατάσταση ως

$$|\nu_\alpha, D_I\rangle = \sum_i \mathcal{A}_{\alpha i}^D |\nu_i, D_I\rangle, \quad (3.53)$$

ο συντελεστής $\mathcal{A}_{\alpha i}^D$ δίνεται από την σχέση

$$\mathcal{A}_{\alpha i}^D = \langle \nu_i, D_I | \hat{S}^\dagger | D_F, \ell_\alpha^- \rangle \quad (3.54)$$

Αν στην σχέση (3.53) προβάλλουμε στις καταστάσεις $|D_I\rangle$ και κανονικοποιήσουμε, καταλήγουμε:

$$|\nu_\alpha^D\rangle = \left(\sum_j |\mathcal{A}_{\alpha j}^D|^2 \right)^{-1/2} \sum_i \mathcal{A}_{\alpha i}^D |\nu_i\rangle. \quad (3.55)$$

Οι σχέσεις 3.48 και 3.55 έχουν ακριβώς την ίδια μορφή, αλλά το φυσικό τους νόημα είναι τελείως διαφορετικό. Η σχέση (3.48) περιγράφει την δημιουργία ενός νετρίνο το οποίο φεύγει από μια πηγή, ενώ η σχέση 3.55 περιγράφει ένα νετρίνο το οποίο φτάνοντας στον στόχο παράγει ένα λεπτόνιο κάποιας γεύσης. Στην πρώτη περίπτωση το εξερχόμενο νετρίνο παράγεται έχοντας συγκεκριμένη γεύση, ενώ στην δεύτερη περίπτωση το νετρίνο μπορεί να μην έχει κάποια συγκεκριμένη γεύση, αφού είναι υπέρθεση ιδιοκαταστάσεων μάζας. Για τον λόγο αυτό θα ήταν ορθότερο να γράφαμε την σχέση (3.50) ως

$$|f\rangle = \hat{S} |\nu, D_I\rangle \quad (3.56)$$

και στην συνέχεια να απομονώναμε το κανάλι $|\nu_\alpha, D_I\rangle$ που μας ενδιαφέρει. Μέχρι στιγμής μάλλον δεν έχουμε καταφέρει πολλά αφού οι εκφράσεις (3.48) και (3.55) δεν φαίνεται να μπορούν να μας οδηγήσουν σε κάποιο συμπέρασμα στην συγκεκριμένη μορφή. Για τον λόγο αυτό θα της μετασχηματίσουμε σε πιο χρήσιμες εκφράσεις.

Σε πρώτη τάξη μπορούμε να εκφράσουμε τον τελεστή \hat{S} ως:

$$\hat{S} = \mathbf{1} - i \int d^4x \mathcal{H}_{cc}(x), \quad (3.57)$$

όπου $\mathcal{H}_{cc}(x)$ είναι η ενεργός Hamiltonian χαμηλής ενέργειας της ασθενούς αλληλεπίδρασης φορτισμένου ρεύματος

$$\mathcal{H}_{cc}(x) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} j_\lambda^\dagger(x) j^\lambda(x). \quad (3.58)$$

Το ρεύμα της ασθενούς αλληλεπίδρασης φορτισμένου ρεύματος είναι

$$j^\lambda(x) = \sum_{\alpha} \bar{\nu}_{\alpha}(x) \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) \ell_{\alpha}(x) + h^\lambda(x), \quad (3.59)$$

όπου $h^\lambda(x)$ είναι το αδρονικό ρεύμα. Εκφράζοντας τα νετρίνα ως υπέρθεση ιδιοκαταστάσεων μάζας έχουμε

$$j^\lambda(x) = \sum_{\alpha} \sum_i U_{\alpha i}^* \bar{\nu}_i(x) \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) \ell_{\alpha}(x) + h^\lambda(x), \quad (3.60)$$

Ορίζουμε τα στοιχεία μήτρας της αλληλεπίδρασης

$$\mathcal{M}_{\alpha i}^P = -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \int d^4x \langle \nu_i, \ell_{\alpha}^+ | \bar{\nu}_i(x) \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) \ell_{\alpha}(x) | 0 \rangle J_{\lambda}^{P_I \rightarrow P_F}(x), \quad (3.61)$$

$$\mathcal{M}_{\alpha i}^D = i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \int d^4x \langle \nu_i | \bar{\nu}_i(x) \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) \ell_{\alpha}(x) | \ell_{\alpha}^- \rangle J_{\lambda}^{D_I \rightarrow D_{F^*}}(x), \quad (3.62)$$

όπου $J_{\lambda}^{P_I \rightarrow P_F}(x)$ και $J_{\lambda}^{D_I \rightarrow D_{F^*}}(x)$ είναι τα στοιχεία μήτρας των μετατροπών $P_I \rightarrow P_F$ και $D_I \rightarrow D_{F^*}$ αντίστοιχα. Τώρα μπορούμε να γράψουμε τα πλάτη δημιουργίας και ανίχνευσης ως

$$\mathcal{A}_{\alpha i}^P = U_{\alpha i}^* \mathcal{M}_{\alpha i}^P, \quad (3.63)$$

$$\mathcal{A}_{\alpha i}^D = U_{\alpha i}^* \mathcal{M}_{\alpha i}^D, \quad (3.64)$$

έτσι οι σχέσεις (3.48) και (3.55) γίνονται:

$$|\nu_{\alpha}^P\rangle = \sum_i \frac{\mathcal{M}_{\alpha i}^P}{\sqrt{\sum_j |U_{\alpha j}^P|^2 |\mathcal{M}_{\alpha j}^P|^2}} U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle, \quad (3.65)$$

$$|\nu_{\alpha}^D\rangle = \sum_i \frac{\mathcal{M}_{\alpha i}^D}{\sqrt{\sum_j |U_{\alpha j}^D|^2 |\mathcal{M}_{\alpha j}^D|^2}} U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle. \quad (3.66)$$

Η μορφή των σχέσεων (3.65) και (3.66) μοιάζει στην μορφή της σχέσης (3.1). Ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας οφείλεται στην εξάρτηση της διαδικασίας δημιουργίας και ανίχνευσης από την μάζα. Αν το πείραμα δεν είναι ευαίσθητο στην εξάρτηση των $\mathcal{M}_{\alpha i}^P$ και $\mathcal{M}_{\alpha i}^D$ από τις διαφορετικές μάζες τότε μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση

$$\mathcal{M}_{\alpha i}^P \approx \mathcal{M}_{\alpha}^P \quad \mathcal{M}_{\alpha i}^D \approx \mathcal{M}_{\alpha}^D, \quad (3.67)$$

οπότε ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας απλοποιείται.

Θα υπολογίσουμε τώρα την πιθανότητα ταλαντώσεων σε ένα πείραμα στο οποίο δημιουργούνται νετρίνα με την διαδικασία (3.44) και ανιχνεύονται με την διαδικασία (3.49). Τα δυο αυτά γεγονότα χωρίζονται από την χωροχρονικό διάστημα (T, \vec{L}) . Το νετρίνο καθώς διαδίδεται από την δημιουργία στην ανίχνευσή του βρίσκεται στην κατάσταση

$$|\nu(\vec{L}, T)\rangle = e^{-iP^0T + i\vec{P}\cdot\vec{L}} |\nu_\alpha^P\rangle. \quad (3.68)$$

Το πλάτος για να ανιχνεύσουμε την μετατροπή $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ είναι

$$\text{Amp}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(\vec{L}, T) = \langle \nu_\beta^D | \nu(\vec{L}, T) \rangle = \langle \nu_\beta^D | e^{-iP^0T + i\vec{P}\cdot\vec{L}} |\nu_\alpha^P\rangle. \quad (3.69)$$

Στην προσέγγιση επίπεδων κυμάτων τα νετρίνα είναι ιδιοκαταστάσεις της τετραορμής

$$P^\mu |\nu_i\rangle = p_i^\mu |\nu_i\rangle. \quad (3.70)$$

Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις (3.48), (3.55) και την σχέση καθετότητας $\langle \nu_i | \nu_k \rangle = \delta_{ik}$ προκύπτει

$$\text{Amp}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(\vec{L}, T) = \left(\sum_j |\mathcal{A}_{\alpha j}^P|^2 \right)^{-1/2} \left(\sum_j |\mathcal{A}_{\alpha j}^D|^2 \right)^{-1/2} \sum_i \mathcal{A}_{\alpha i}^P \mathcal{A}_{\beta i}^{D*} e^{-iE_i T + i\vec{P}_i \cdot \vec{L}}. \quad (3.71)$$

Μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση ότι οι ορμές \vec{P} και το διάστημα \vec{L} είναι συγγραμμικά. Η προσέγγιση είναι λογική, αφού τα νετρίνα παράγονται με τις ίδιες μικροσκοπικές διαδικασίες και το διάστημα \vec{L} είναι μακροσκοπικό, επομένως η αποκλίσεις αναμένεται να είναι ελάχιστες. Με την προσέγγιση αυτή έχουμε

$$\text{Amp}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(\vec{L}, T) = \left(\sum_j |\mathcal{A}_{\alpha j}^P|^2 \right)^{-1/2} \left(\sum_j |\mathcal{A}_{\alpha j}^D|^2 \right)^{-1/2} \sum_i \mathcal{A}_{\alpha i}^P \mathcal{A}_{\beta i}^{D*} e^{-iE_i T + iP_i L}. \quad (3.72)$$

Θέτοντας $T = L$ έχουμε

$$-E_i T + P_i L = -(E_i - P_i)L = -\frac{E_i^2 - P_i^2}{E_i + P_i} L = -\frac{m_i^2}{E_i + P_i} L \approx -\frac{m_i^2}{2E} L, \quad (3.73)$$

Στο τελευταίο βήμα έχουμε αγνοήσει την συνεισφορά της μάζας και έχουμε υποθέσει ότι τα νετρίνα έχουν κοινή ενέργεια. Η πιθανότητα ταλάντωσης είναι

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L) = \left(\sum_j |\mathcal{A}_{\alpha j}^P|^2 \right)^{-1} \left(\sum_j |\mathcal{A}_{\alpha j}^D|^2 \right)^{-1} \times \sum_{ij} \mathcal{A}_{\alpha i}^P \mathcal{A}_{\beta i}^{D*} \mathcal{A}_{\alpha j}^{P*} \mathcal{A}_{\beta j}^D \exp\left(-i \frac{\Delta m_{ij}^2 L}{2E}\right). \quad (3.74)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.63) και (3.64) καταλήγουμε

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \sum_{ij} \left(\frac{\mathcal{M}_{\alpha i}^P \mathcal{M}_{\alpha j}^{P*}}{\sum_j |U_{\alpha j}^P|^2 |\mathcal{M}_{\alpha j}^P|^2} \right) \left(\frac{\mathcal{M}_{\beta i}^{D*} \mathcal{M}_{\beta j}^D}{\sum_j |U_{\beta j}^D|^2 |\mathcal{M}_{\beta j}^D|^2} \right) \times U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{ij}^2 L}{2E}\right). \quad (3.75)$$

Βλέπουμε ότι η σχέση αυτή είναι η 3.12 με κάποιους επιπλέον πολλαπλασιαστικούς παράγοντες που σχετίζονται με την επίδραση της μάζας στην διαδικασία δημιουργίας και ανίχνευσης των νετρίνων. Αυτό που είναι σημαντικό είναι ότι η φάση

$$-i \frac{\Delta m_{ij}^2 L}{2E} \quad (3.76)$$

είναι ακριβώς η ίδια και στις δυο περιπτώσεις. Από την στιγμή που τα νετρίνα είναι σχετικιστικά και τα πειράματα δεν είναι ευαίσθητα στην επίδραση της μάζας η επίδραση αυτή μπορεί να αγνοηθεί, οπότε χρησιμοποιώντας την προσέγγιση (3.67) οι δύο σχέσεις συμπίπτουν.

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι η πιθανότητα είναι αναλλοίωτο Lorentz. Από την σχέση (3.71) βλέπουμε ότι η πιθανότητα εξαρτάται από εσωτερικά γινόμενα τετρανισμάτων και αναλλοίωτα πλάτη, οπότε πράγματι είναι αναλλοίωτη.

3.7 Χρειάζονται τα Κυματοπακέτα;

Μια σωστή περιγραφή στα πλαίσια της κβαντικής θεωρίας πεδίου θα απαιτούσε την χρήση κυματοπακέτων, ωστόσο, όπως θα δούμε, αν προσθέσει κανείς τις κβαντικές αβεβαιότητες στις κλασσικές καταλήγει μπορεί να αποφύγει τα κυματοπακέτα. Στα πλαίσια της κβαντικής θεωρίας πεδίου τα σωματίδια

είναι εντοπισμένα, οπότε η ορμή τους έχει αβεβαιότητα σύμφωνα με την αρχή α-προσδιοριστίας του Heisenberg. Όσον αφορά τον χρόνο μεταξύ δημιουργίας και ανίχνευσης του νετρίνο, πλέον δεν μπαίνει με το χέρι, αλλά λαμβάνεται υπόψιν η συμβολή κάθε χρονικής στιγμής, αφού η πιθανότητα προκύπτει ως άθροισμα της συνεισφοράς κάθε χρονικής στιγμής.

Η σχέση που καταλήγει κανείς αν χρησιμοποιήσει κυματοπακέτα είναι

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(\vec{L}) = \sum_{k,j} U_{\alpha k}^* U_{\alpha j} U_{\beta k} U_{\beta j}^* \exp \left[-2\pi i \frac{L}{L_{kj}^{osc}} - \left(\frac{L}{L_{kj}^{coh}} \right)^2 - 2\pi^2 \left(1 - \frac{\vec{L} \cdot \vec{\xi}}{L} \right)^2 \left(\frac{\sigma_x}{L_{kj}^{osc}} \right)^2 \right], \quad (3.77)$$

όπου $\vec{\xi}$ είναι το διάνυσμα που δίνει σε πρώτη τάξη ως προς m_k^2 την απόκλιση της μέσης ορμής του σωματιδίου \vec{p}_k από την κοινή ορμή \vec{p} μέσω της σχέσης

$$\vec{p}_k \simeq \vec{p} - \vec{\xi} \frac{m_k^2}{2E}. \quad (3.78)$$

Η αβεβαιότητα σ_x προκύπτει ως άθροισμα της αβεβαιότητας στην διαδικασία δημιουργίας και ανίχνευσης

$$\sigma_x^2 \sim (\sigma_x^P)^2 + (\sigma_x^D)^2 \quad (3.79)$$

και το μήκος συνεκτικής συμβολής L_{kj}^{osc} δίνεται από την σχέση

$$L_{kj}^{osc} = \frac{4\sqrt{2}E^2}{|\Delta m_{kj}^2|} \sigma_x. \quad (3.80)$$

Ο εκθέτης έχει τρεις όρους. Ο πρώτος όρος είναι ο όρος που δημιουργεί τις ταλαντώσεις, ο δεύτερος όρος είναι ο όρος συνεκτικότητας

$$- \left(\frac{L}{L_{kj}^{coh}} \right)^2 \quad (3.81)$$

και ο τρίτος όρος είναι ο όρος εντοπισμού

$$-2\pi^2 \left(1 - \frac{\vec{L} \cdot \vec{\xi}}{L} \right)^2 \left(\frac{\sigma_x}{L_{kj}^{osc}} \right)^2. \quad (3.82)$$

Η φυσική σημασία του όρου εντοπισμού είναι μεγάλη, καθώς αντανάκλα την απώλεια συνεκτικότητας συμπιέζοντας τις ταλαντώσεις που οφείλονται στην διαφορά μαζών Δm_{kj}^2 αν $\sigma_x \gg L_{kj}^{osc}$, αυτό έχει ως αποτέλεσμα τον διαχωρισμό των πειραμάτων ταλαντώσεων νετρίνων με τα πειράματα μέτρησης της μάζας των νετρίνων. Στα πειράματα μέτρησης της μάζας των νετρίνων χρησιμοποιείται η διατήρησης ενέργειας για να μετρηθεί η μάζα, αυτό έχει ως αποτέλεσμα της συμπίεση των ταλαντώσεων. Η ακρίβεια στην μέτρηση της μάζας είναι

$$\delta m_k^2 = \sqrt{\left(2\tilde{E}_k \delta \tilde{E}_k\right)^2 + \left(2|\vec{p}_k| \delta |\vec{p}_k|\right)^2} \simeq 2\sqrt{2}E\sigma_p, \quad (3.83)$$

όπου η τελευταία προσέγγιση ισχύει για σχετικιστικά νετρίνα. Αν $\delta m_k^2 < \Delta m_{kj}^2$ η μάζα μετριέται με μεγαλύτερη ακρίβεια από την διαφορά μαζών Δm_{kj}^2 . Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει αρκετή ενέργεια για την παραγωγή του νετρίνο ν_j , οπότε δεν μπορούν να δημιουργηθούν ταλαντώσεις. Ο όρος εντοπισμού συμπιέζει τις ταλαντώσεις αφού

$$-2\pi^2 \left(\frac{\sigma_x}{L_{kj}^{osc}}\right)^2 \simeq -\frac{1}{4} \left(\frac{\Delta m_{kj}^2}{\delta m_k^2}\right)^2. \quad (3.84)$$

Σε ένα τυπικό πείραμα φυσικής νετρίνων ισχύει $\sigma_x \ll L^{osc}$, οπότε ο όρος εντοπισμού μπορεί να παραληφθεί. Έτσι έχουμε

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(\vec{L}) = \sum_{k,j} U_{\alpha k}^* U_{\alpha j} U_{\beta k} U_{\beta j}^* \exp \left[-2\pi i \frac{L}{L_{kj}^{osc}} - \left(\frac{L}{L_{kj}^{coh}}\right)^2 \right] \quad (3.85)$$

Η μορφή αυτή μοιάζει με την μορφή της σχέσης (4.30) αν αυτή γραφεί

$$\langle P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) \rangle = \sum_{ij} U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp \left[-i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2} \left\langle \frac{L}{E} \right\rangle - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta m_{ij}^2}{2} \sigma_{L/E} \right)^2 \right], \quad (3.86)$$

και η αβεβαιότητα ενέργειας - απόστασης $\sigma_{L/E}$ είναι ανάλογη της μέσης τιμής $\langle L/E \rangle$. Βλέπουμε δηλαδή ότι μπορούμε χωρίς πρόβλημα να χρησιμοποιούμε την σχέση που έχει προκύψει χωρίς κυματοπακέτα αρκεί να συμπεριλάβουμε της χβαντικές αβεβαιότητες στην αβεβαιότητα ενέργειας απόστασης.

3.8 Ταλαντώσεις στην Ύλη

Μέχρι αυτό το σημείο έχουμε θεωρήσει ταλαντώσεις στο κενό, ας δούμε τι επίδραση έχει η ύπαρξη ύλης στις ταλαντώσεις των νετρίνων. Βασική προϋπόθεση στα όσα ακολουθούν είναι ότι τα νετρίνα αλληλεπιδρούν με τις αλληλεπιδράσεις που περιγράφει το Καθιερωμένο Πρότυπο, δηλαδή αλληλεπιδράσεις που δεν αλλάζουν την γεύση των νετρίνων. Τα νετρίνα αλληλεπιδρούν με την ύλη με δύο τρόπους, όλα τα νετρίνα αλληλεπιδρούν με τα πρωτόνια, νετρόνια και ηλεκτρόνια ανταλλάσσοντας μποζόνια Z , ενώ αν πρόκειται για νετρίνα ν_e αλληλεπιδρούν με τα ηλεκτρόνια μέσω ανταλλαγής μποζονίων W . Στην οριακή περίπτωση της μηδενικής μεταφοράς ορμής η ζεύξη του Z με τα πρωτόνια και τα ηλεκτρόνια είναι ίση και αντίθετη, οπότε αφού η ύλη είναι ουδέτερη η συνεισφορά των πρωτονίων και των ηλεκτρονίων αναιρείται, οπότε τα νετρίνα υπόκεινται στο δυναμικό

$$V_Z = -\frac{\sqrt{2}}{2} G_F N_n, \quad (3.87)$$

όπου N_n είναι το πλήθος των νετρονίων ανά μονάδα όγκου. Αν αλλάξουμε τα νετρίνα με αντινετρίνα το δυναμικό αλλάζει πρόσημο. Στην δεύτερη περίπτωση το δυναμικό είναι

$$V_W = +\sqrt{2} G_F N_e, \quad (3.88)$$

και πάλι το δυναμικό αλλάζει πρόσημο αν αλλάξουμε τα νετρίνα με αντινετρίνα.

Η εξέλιξη των νετρίνων δίνεται από την εξίσωση Schödinger στο σύστημα του εργαστηρίου

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\nu(t)\rangle = \mathcal{H} |\nu(t)\rangle \quad (3.89)$$

Στην απλή περίπτωση μπορούμε να θεωρήσουμε μόνο δύο νετρίνα, οπότε

$$|\nu(t)\rangle = \begin{pmatrix} f_e(t) \\ f_\mu(t) \end{pmatrix} \quad (3.90)$$

και η Hamiltonian είναι πίνακας 2×2 .

$$\langle \nu_\alpha | \mathcal{H}_{vac} | \nu_\beta \rangle = \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* \sqrt{p^2 + m_i^2}. \quad (3.91)$$

Υποθέτουμε ότι τα νετρίνα έχουν κοινή ορμή. Παρόλο που η υπόθεση αυτή δεν ισχύει, μας οδηγεί στο σωστό αποτέλεσμα. Επειδή μας ενδιαφέρουν μόνο οι σχετικές φάσεις που θα αποκτήσουν τα νετρίνα μπορούμε να αφαιρέσουμε

από την Hamiltonian οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του ταυτοτικού πίνακα. Έτσι η ενέργεια των νετρίνων είναι $\sqrt{p^2 + m_i^2} \approx p + \frac{m_i^2}{2p}$ οπότε αφαιρώντας τον κοινό όρο η Hamiltonian γίνεται

$$\mathcal{H}_{vac} = \frac{\Delta m^2}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}. \quad (3.92)$$

Χρησιμοποιήσαμε την προσέγγιση $p \simeq E$ που ισχύει για σχετικιστικά νετρίνα. Υπό την παρουσία ύλης η Hamiltonian γίνεται

$$\mathcal{H}_M = \frac{\Delta m^2}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} + V_W \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + V_Z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

Αφαιρώντας τους όρους που είναι πολλαπλάσιοι του ταυτοτικού πίνακα έχουμε

$$\mathcal{H}_M = \frac{\Delta m^2}{4E} \begin{pmatrix} -(\cos 2\theta - x) & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & (\cos 2\theta - x) \end{pmatrix}, \quad (3.94)$$

όπου

$$x = \frac{V_W/2}{\Delta m^2/4E} = \frac{2\sqrt{2}G_F N_e E}{\Delta m^2}. \quad (3.95)$$

Η παράμετρος x εκφράζει την σημασία της επίδρασης της ύλης σε σχέση με την διαφορά μαζών Δm^2 .

Αν ορίσουμε

$$\Delta m_M^2 = \Delta m^2 \sqrt{\sin^2 2\theta + (\cos 2\theta - x)^2} \quad \sin^2 2\theta_M = \frac{\sin^2 2\theta}{\sin^2 2\theta + (\cos 2\theta - x)^2} \quad (3.96)$$

η Hamiltonian γίνεται

$$\mathcal{H}_M = \frac{\Delta m_M^2}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta_M & \sin 2\theta_M \\ \sin 2\theta_M & \cos 2\theta_M \end{pmatrix}. \quad (3.97)$$

Η παρουσία ύλης απλά αλλάζει τις παραμέτρους της ταλάντωσης σε σχέση με τις ταλαντώσεις στο κενό. Είναι προφανές ότι οι ιδιοκαταστάσεις της Hamiltonian είναι διαφορετικές σε σχέση με τις ιδιοκαταστάσεις της Hamiltonian του κενού. Οι νέες ιδιοκαταστάσεις χωρίζονται από την διαφορά μαζών Δm_M^2 και έχουν γωνία μίξης θ_M . Για σταθερή πυκνότητα ηλεκτρονίων η Hamiltonian παράγει ταλαντώσεις

$$P_M(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = \sin^2 2\theta_M \sin^2 \left(\Delta m_M^2 \frac{L}{4E} \right) \quad (3.98)$$

Πίνακας 3: Το πρόσημο της παραμέτρου x για τις διάφορες περιπτώσεις.

	ν	$\bar{\nu}$
$m_{\nu_2} > m_{\nu_1}$	+	-
$m_{\nu_2} < m_{\nu_1}$	-	+

Για να αποκτήσουμε μια αίσθηση το πόσο ισχυρή είναι η επίδραση της παρουσίας ύλης στις ταλαντώσεις για διαφορά μαζών $\Delta m^2 \approx 2.4 \times 10^{-3} eV^2$ έχουμε

$$|x| \simeq \frac{E}{12 GeV}. \quad (3.99)$$

Για δέσμη ενέργεια $1 GeV$ η επίδραση είναι ανεπαίσθητη, αλλά για μια δέσμη $20 GeV$ η επίδραση είναι πολύ ισχυρή. Υπάρχει μια πολύ σημαντική παρατήρηση το πρόσημο της παραμέτρου x αλλάζει αν η δέσμη αλλάξει από νετρίνα σε αντινετρίνα και εξαρτάται από το πρόσημο της διαφοράς μαζών Δm^2 , δηλαδή από το αν η ιδιοκατάσταση μάζας $|\nu_1\rangle$ είναι βαρύτερη ή ελαφρύτερη από την ιδιοκατάσταση μάζας $|\nu_2\rangle$. Το πρόσημο της παραμέτρου x για τις διάφορες περιπτώσεις βρίσκεται στον πίνακα 3. Η ασυμμετρία ανάμεσα στην περίπτωση των νετρίνων και σε αυτές των αντινετρίνων δεν έχει καμία σχέση με την αυθεντική παραβίαση της συμμετρίας CP . Αν εκμεταλλευτούμε αυτή την ασυμμετρία μπορούμε να προσδιορίζουμε την ιεραρχία των μαζών.

Αν εκμεταλλευτούμε πιθανούς συντονισμούς μπορούμε να έχουμε μια μεγάλη ενεργό γωνία μίξης ακόμα και αν η γωνία μίξης είναι πολύ μικρή. Από την σχέση (3.95) ακόμα και για $\sin^2 2\theta = 10^{-3}$ αν $x \simeq \cos 2\theta$ η γωνία μίξης μπορεί μέχρι και να μεγιστοποιηθεί. Στην περίπτωση συντονισμού, όταν η πυκνότητα ηλεκτρονίων μεταβάλλεται μονότονα και ομαλά, ώστε η διάδοση των νετρίνων να μπορεί να θεωρηθεί αδιαβατική, έχουμε το φαινόμενο MSW . Με το φαινόμενο MSW μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα των ηλιακών νετρίνων.

Στον πυρήνα του ήλιου έχουμε

$$\mathcal{H}_M = \frac{\Delta m^2}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} + \sqrt{2}G_F N_e \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.100)$$

με τον συντελεστή $\sqrt{2}G_F N_e$ να έχει τιμή

$$\sqrt{2}G_F N_e \approx 0.75 \times 10^{-5} eV^2/MeV. \quad (3.101)$$

Για νετρίνα που παράγονται μαζί με το 8B και έχουν ενέργεια της τάξης των

8 MeV για $\Delta m = 8 \times \sqrt{2}G_F N_e$ έχουμε

$$\frac{\Delta m^2}{4E} \approx 0.25 \times 10^{-5} eV^2/MeV, \quad (3.102)$$

οπότε συγκριτικά αναμένουμε στον πυρήνα του ήλιου η επίδραση της ύλης να είναι πολύ μεγάλη. Αν θεωρήσουμε την Hamiltonian συνάρτηση της απόστασης από το κέντρο του ήλιου, για $r = 0$ έχουμε μόνο τον όρο της επίδρασης της ύλης, η Hamiltonian είναι διαγώνια, οπότε το νεutrino ν_e γεννάται ως ιδιοκατάσταση της Hamiltonian, επομένως είναι ιδιοκατάσταση ενέργειας και μάλιστα στην ιδιοκατάσταση με την μέγιστη ενέργεια, αφού η άλλη ιδιοκατάσταση έχει μηδενική ενέργεια. Για μονότονα και ομαλά μεταβαλλόμενο δυναμικό η διάδοση του νεutrino είναι αδιαβατική. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση διάδοσης για κάθε ακτίνα r και στην συνέχεια να ενώσουμε τις λύσεις. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις το νεutrino βρίσκεται πάντα σε ιδιοκατάσταση της Hamiltonian η οποία αλλάζει αμυδρά με την απόσταση, επομένως το νεutrino διαδίδεται ως η ιδιοκατάσταση με την μεγαλύτερη ενέργεια και εξέρχεται από τον ήλιο. Αφού όμως το νεutrino εξέρχεται από την επιφάνεια του ηλίου, πλέον επιδρά πάνω του η Hamiltonian του κενού, οπότε το νεutrino αναδύεται ως η βαρύτερη ιδιοκατάσταση μάζας. Πρέπει να επισημάνουμε ότι η μετατροπή

$$\nu_e \rightarrow \nu_2, \quad (3.103)$$

θεωρώντας $\nu_2 > \nu_1$ γίνεται χωρίς κάποια ημιτονοειδή μεταβολή. Το νεutrino ν_e στο εσωτερικό του ήλιου μετατρέπεται σταδιακά σε ν_2 και στην συνέχεια διαδίδεται παραμένοντας στην ιδιοκατάσταση μεγαλύτερης ενέργειας, όταν ανιχνευτεί η πιθανότητα να ανιχνευτεί ως ν_e είναι απλά το στοιχείο του πίνακα μίξης $|U_{e2}|^2 = \sin^2 \theta$. Οι μετρήσεις που ανέδειξαν το πρόβλημα των ηλιακών νεutrinών υποδεικνύουν ότι η μετρούμενη ροή νεutrinών ν_e ήταν το 1/3 της αναμενόμενης. Σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση, αυτό απλά σημαίνει ότι $\sin^2 \theta = 1/3$, οπότε $\theta \approx 34^\circ$.

4 Η Πειραματική Πλευρά

4.1 Είδη Πειραμάτων

Τα πειράματα φυσικής νετρίνων χωρίζονται ανάλογα με τον τρόπο που ανιχνεύουν τις ταλαντώσεις σε πειράματα εμφάνισης και πειράματα εξαφάνισης. Στα πειράματα εμφάνισης προσπαθούμε να ανιχνεύσουμε μετατροπή σε νετρίνα διαφορετικής γεύσης από την γεύση των νετρίνων της αρχικής δέσμης. Μετράμε δηλαδή, είναι την πιθανότητα μετατροπής. Μάλιστα, αν η αρχική δέσμη δεν περιέχει νετρίνα της γεύσης που προσπαθούμε να ανιχνεύσουμε, το υπόβαθρο μπορεί να είναι πολύ μικρό. Το μικρό υπόβαθρο μας δίνει πρόσβαση ακόμα και σε πολύ μικρές γωνίες μίξης. Στα πειράματα εξαφάνισης μετράμε την ροή των νετρίνων της γεύσης που μας ενδιαφέρει και την συγκρίνουμε με την θεωρητικά αναμενόμενη, μετράμε, δηλαδή, την πιθανότητα επιβίωσης. Βέβαια ο υπολογισμός της θεωρητικά αναμενόμενης ροής δεν μπορεί να είναι απολύτως ακριβής, στην παραγωγή των νετρίνων μπορεί να υπεισέρχονται διακυμάνσεις, οπότε είναι δύσκολο να μετρηθούν μικρές γωνίες μίξης εξαιτίας της έλλειψης ακρίβειας.

Όπως είδαμε στις ταλαντώσεις 2 νετρίνων όταν

$$\frac{\Delta m^2 L}{2E} \ll 1 \quad (4.1)$$

δεν μπορούν να υπάρχουν μετατροπές των νετρίνων σε νετρίνα άλλης γεύσης, ενώ όταν

$$\frac{\Delta m^2 L}{2E} \gg 1 \quad (4.2)$$

μπορούμε να μετρήσουμε μόνο μέσες τιμές της πιθανότητας μετατροπής, επομένως να αποκομίσουμε πληροφορίες μόνο για την γωνία μίξης. Αφού η τιμή του Δm^2 είναι καθορισμένη από την φύση για να έχουμε την απαιτούμενη ευαισθησία στην τιμή του Δm^2 πρέπει να καθορίσουμε κατάλληλα τον λόγο L/E . Η ευαισθησία στην τιμή του Δm^2 ορίζεται μέσω της σχέσης

$$\frac{\Delta m^2 L}{2E} \sim 1. \quad (4.3)$$

Τα διάφορα πειράματα παραδοσιακά κατατάσσονται ανάλογα με το είδος της πηγής των νετρίνων και ανάλογα με την ευαισθησία τους.

4.1.1 Short BaseLine (SBL)

Τα πειράματα SBL χωρίζονται σε

SBL Αντιδραστήρων Στα πειράματα αυτά έχουμε δέσμες αντινετρίνων του ηλεκτρονίου, οι οποίες παράγονται από β^- - διασπάσεις ραδιενεργών πυρήνων ^{235}U , ^{238}U , ^{239}Pu , ^{251}Pu . Η ενέργεια των νετρίνων είναι της τάξης του MeV και η απόσταση $\sim 10\text{ m}$ οπότε τέτοια πειράματα έχουν ευαισθησία σε $\Delta m^2 \geq 0.1\text{ eV}^2$. Επειδή τα νετρίνα έχουν χαμηλή ενέργεια δεν μπορούν να παράγουν μόνια και τ , οπότε μπορούμε να μετρήσουμε μόνο την πιθανότητα επιβίωσης. Η πιθανότητα επιβίωσης μετράται μέσω της αντίστροφης β - διάσπασης

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+, \quad (4.4)$$

η οποία έχει ενεργειακό κατώφλι $E_{th} = 1.8\text{ MeV}$.

SBL Επιταχυντών Σε αυτό το είδος πειραμάτων οι δέσμες νετρίνων προκύπτουν από τις διασπάσεις πιονίων, καονίων και μιονίων τα οποία παράγονται όταν τα πρωτόνια της δέσμης του επιταχυντή χτυπήσουν κάποιο στόχο. Με την σειρά τους αυτά τα πειράματα χωρίζονται σε

Διασπάσεις Πιονίων εν Κινήσει Στα πειράματα αυτά τα πρωτόνια της δέσμης του επιταχυντή συγκρούονται με τον στόχο παράγοντας πόνια και καόνια. Αυτά με την σειρά τους διασπώνται μέσα σε ένα κατάλληλο τούνελ και δίνουν μια δέσμη νετρίνων η οποία αποτελείται κυρίως από νετρίνα του μιονίου. Τα νετρίνα έχουν ενέργεια μερικών GeV , αλλά μπορούν να έχουν και πολύ μεγαλύτερη ενέργεια αφού η ενέργειά τους εξαρτάται από την ενέργεια των πρωτονίων. Η απόσταση είναι της τάξης του $\sim 1\text{ km}$, οπότε τέτοιου τύπου πειράματα έχουν ευαισθησία σε $\Delta m^2 \geq 1\text{ eV}^2$.

Διασπάσεις Μιονίων σε Ηρεμία Στα πειράματα αυτά η δέσμη αποτελείται από αντινετρίνα του μιονίου τα οποία προέρχονται από την διάσπαση

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \quad (4.5)$$

των μιονίων που παράγονται από την διάσπαση πιονίων

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad (4.6)$$

Τα αντινετρίνα έχουν ενέργεια μερικών δεκάδων MeV και δεδομένου ότι υπάρχουν πολύ λίγα αντινετρίνα του ηλεκτρονίου στην αρχική δέσμη μπορούν να μετρηθούν με μεγάλη ακρίβεια μετατροπές $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$. Η απόσταση είναι $\sim 10\text{ m}$ οπότε υπάρχει ευαισθησία σε $\Delta m^2 \geq 1\text{ eV}^2$.

Καταστροφής της Δέσμης Σε αυτά τα πειράματα η δέσμη νετρίνων παράγεται από την καταστροφή της δέσμης του επιταχυντή, η οποία επιτυγχάνεται οδηγώντας την σε ένα πολύ παχύ στόχο. Εκεί παράγονται διάφορα αδρόνια τα οποία εν συνεχεία διασπώνται και δίνουν σχεδόν σε ίδια αναλογία ηλεκτρόνια και μίονια συνοδευόμενα από τα αντίστοιχα νετρίνα - αντινετρίνα, τα οποία έχουν ενέργεια της τάξης των $\sim 100 \text{ GeV}$. Η μέτρηση απόκλισης του λόγου των ροών από την μονάδα σημαίνει την ανίχνευση ταλαντώσεων. Η απόσταση είναι της τάξης του $\sim 1 \text{ km}$, οπότε το πείραμα είναι ευαίσθητο σε $\Delta m^2 \geq 100 \text{ eV}^2$.

Νέες τεχνικές είναι οι β-δέσμες και τα εργοστάσια νετρίνων. Οι β-δέσμες είναι πολύ καθαρές δέσμες ν_e οι οποίες παράγονται από επιταχυνόμενα β-ραδιενεργά στοιχεία τα οποία έχουν πολύ μικρό χρόνο ζωής. Τα εργοστάσια νετρίνων αποτελούνται από δακτύλιους επιταχυντών οι οποίοι επιταχύνουν δέσμες μιονίων μεγάλης έντασης με αποτέλεσμα όταν αυτά διασπώνται να δίνουν τεράστιες ροές $\bar{\nu}_e + \nu_\mu \bar{\nu}_\mu + \nu_e$.

4.1.2 Long BaseLine (LBL)

Αυτά τα πειράματα έχουν παρόμοιες πηγές νετρίνων με τα SBL, αλλά έχουν απόσταση πηγής - ανιχνευτή κατά 2 με 3 τάξης μεγέθους μεγαλύτερη.

LBL Αντιδραστήρων Σε αυτά τα πειράματα αντιδραστήρων η απόσταση είναι της τάξης του $\sim 1 \text{ km}$, οπότε η ευαισθησία είναι $\Delta m^2 \geq 10^{-3} \text{ eV}^2$.

LBL Επιταχυντών Αυτά είναι πειράματα επιταχυντών διάσπασης πιονίων εν κινήσει με απόσταση $10^2 - 10^3 \text{ km}$ τα οποία είναι ευαίσθητα σε $\Delta m^2 \geq 10^{-3} \text{ eV}^2$.

Ατμοσφαιρικά Στα πειράματα αυτά τα νετρίνα παράγονται στην ατμόσφαιρα από την κοσμική ακτινοβολία. Πρωτογενώς παραγόμενα πιόνια και καόνια διασπώνται σε μίονια, αρκετά από τα οποία διασπώνται σε ηλεκτρόνια, οπότε τα πειράματα ατμοσφαιρικών νετρίνων ανιχνεύουν τα νετρίνα που παράγονται σε αυτές τις διαδικασίες. Τα νετρίνα έχουν ενέργειες από 500 MeV ως πάνω από 100 GeV . Η απόσταση κυμαίνεται από 20 km για νετρίνα που έρχονται από πάνω ως $1.3 \times 10^4 \text{ km}$ για νετρίνα που έρχονται από κάτω, οπότε υπάρχει ευαισθησία σε $\Delta m^2 \geq 10^{-4} \text{ eV}^2$.

Πίνακας 4: Τυπικές τιμές παραμέτρων για τα διάφορα είδη πειραμάτων και ευαισθησία

Είδος	L	E	Ευαισθησία σε Δm^2
Αντιδραστήρων SBL	$\sim 10 \text{ m}$	$\sim 1 \text{ MeV}$	$\sim 0.1 \text{ eV}^2$
Επ. SBL Πιονίων	$\sim 1 \text{ km}$	$\geq 1 \text{ GeV}$	$\sim 1 \text{ eV}^2$
Επ. SBL Μιονίων	$\sim 10 \text{ m}$	$\sim 10 \text{ MeV}$	$\sim 1 \text{ eV}^2$
Επ. SBL Καταστροφής Δέσμης	$\sim 10 \text{ km}$	$\sim 10^2 \text{ GeV}$	$\sim 10^2 \text{ eV}^2$
Αντιδραστήρων LBL	$\sim 10 \text{ km}$	$\sim 1 \text{ MeV}$	$\sim 10^{-3} \text{ eV}^2$
Επιταχυντών LBL	$\sim 10^3 \text{ km}$	$\geq 1 \text{ GeV}$	$\geq 10^{-3} \text{ eV}^2$
Ατμοσφαιρικά	$20 - 10^4 \text{ km}$	$0.5 - 10^2 \text{ GeV}$	$\sim 10^{-4} \text{ eV}^2$
VLBL Αντιδραστήρων	$\sim 10^2 \text{ km}$	$\sim 10^2 \text{ MeV}$	$\sim 10^{-5} \text{ eV}^2$
VLBL Επιταχυντών	$\sim 10^4 \text{ km}$	$\geq 10^2 \text{ GeV}$	$\geq 10^{-4} \text{ eV}^2$
Ηλιακά	$\sim 10^{11} \text{ km}$	$0.2 - 15 \text{ MeV}$	$\sim 10^{-12} \text{ eV}^2$

4.1.3 Very Long BaseLine (VLBL)

Αυτά τα πειράματα έχουν απόσταση κατά 1 με 2 τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από τα LBL.

VLBL Αντιδραστήρων Αυτά τα πειράματα μετρούν την ροή νετρίνων από πολλούς αντιδραστήρες σε αποστάσεις εκατοντάδων km , οπότε έχουν ευαισθησία σε $\Delta m^2 \geq 10^{-5} \text{ eV}^2$.

VLBL Επιταχυντών Αυτά τα πειράματα έχουν απόσταση αρκετών εκατοντάδων km , οπότε έχουν ευαισθησία σε $\Delta m^2 \geq 10^{-5} \text{ eV}^2$.

Ηλιακά Σε αυτά τα πειράματα μετράται η ροή των ηλιακών νετρίνων, τα οποία παράγονται στις θερμοπυρηνικές αντιδράσεις που λαμβάνουν χώρα στο εσωτερικό του ηλίου. Η απόσταση Ήλιου - Γης είναι $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ και οι ενέργειες των νετρίνων κυμαίνονται από 0.2 MeV ως 15 MeV . Τα πειράματα ηλιακών νετρίνων έχουν ευαισθησία σε $\Delta m^2 \geq 10^{-12} \text{ eV}^2$.

Συγκεντρωτικά η ευαισθησία των διαφόρων τύπων πειραμάτων βρίσκονται στον πίνακα 4.

4.2 Διαγράμματα Αποκλισμένων Περιοχών

Μέχρι στιγμής έχουμε θεωρήσει την ιδανική κατάσταση όπου η ενέργεια E και η απόσταση L είναι απολύτως γνωστά. Κάτι τέτοιο φυσικά δεν ισχύει. Η

πηγή έχει κάποιο ενεργειακό φάσμα, ο ανιχνευτής δεν είναι σημειακός και έχει πεπερασμένη διακριτική ικανότητα. Θα δούμε που οδηγούν αυτές οι ατέλειες. Για ευκολία θα περιοριστούμε στην περίπτωση της ταλάντωσης 2 νετρίνων. Είναι λογικό να προσπαθήσουμε να εισάγουμε την επίδραση των ανωτέρω παραμέτρων χρησιμοποιώντας μια μέση τιμή της φάσης η οποία προκύπτει από την κατανομή του λόγου L/E , έτσι η σχέση (3.36) γίνεται

$$\langle P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) \rangle = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \left[1 - \left\langle \cos \left(\frac{\Delta m^2 L}{2E} \right) \right\rangle \right] \quad (\alpha \neq \beta), \quad (4.7)$$

όπου

$$\left\langle \cos \left(\frac{\Delta m^2 L}{2E} \right) \right\rangle = \int \cos \left(\frac{\Delta m^2 L}{2E} \right) \phi \left(\frac{L}{E} \right) d\frac{L}{E} \quad (4.8)$$

Θεωρούμε την απλή περίπτωση όπου η κατανομή $\phi(L/E)$ είναι γκαουσιανή με μέση τιμή $\langle L/E \rangle$ και τυπική απόκλιση $\sigma_{L/E}$:

$$\phi \left(\frac{L}{E} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{L/E}}} \exp \left(-\frac{L/E - \langle L/E \rangle}{2\sigma_{L/E}^2} \right), \quad (4.9)$$

τότε η μέση τιμή (4.8) μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά

$$\left\langle \cos \left(\frac{\Delta m^2 L}{2E} \right) \right\rangle = \cos \left(\frac{\Delta m^2}{2} \left\langle \frac{L}{E} \right\rangle \right) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta m^2}{2} \sigma_{L/E} \right)^2 \right]. \quad (4.10)$$

Από την θεωρία σφαλμάτων γνωρίζουμε ότι

$$\left(\frac{\sigma_{L/E}}{\langle L/E \rangle} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_L}{\langle L \rangle} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_E}{\langle E \rangle} \right)^2 \quad (4.11)$$

οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε

$$\sigma_{L/E} \sim \left\langle \frac{L}{E} \right\rangle \quad (4.12)$$

Αυτή η ανάλυση μας παρέχει ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο τα διαγράμματα αποκλεισμένων περιοχών. Θα δούμε ότι ακόμα και στην περίπτωση που ένα πείραμα δεν μπορέσει να καταφέρει να μετρήσει ταλαντώσεις, μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα. Έστω, λοιπόν ότι εκτελούμε ένα πείραμα και δεν παρατηρήσουμε ταλαντώσεις. Τότε τα δεδομένα μας δίνουν ένα άνω όριο στην μέση πιθανότητα μετατροπής

$$\langle P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) \rangle \leq P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}^{max}. \quad (4.13)$$

Στο πείραμα έχουμε την δυνατότητα να καθορίσουμε την απόσταση και την ενέργεια, οπότε οι ελεύθερες παράμετροι είναι η γωνία μίξης και η διαφορά το Δm^2 . Οι δυο αυτές παράμετροι μπορούν να απεικονιστούν σε ένα διάγραμμα, στο οποίο μπορούμε να ξεχωρίσουμε περιοχές όπου οι παράμετροι έχουν επιτρεπτές τιμές, συμβατές με τα αποτελέσματα του πειράματος αλλά και απαγορευμένες τιμές που δεν είναι συμβατές με τα πειραματικά αποτελέσματα. Οι παράμετροι δεν μπορούν να πάρουν τιμές στις περιοχές αυτές, για τον λόγο αυτό οι περιοχές αυτές ονομάζονται αποκλεισμένες. Για να μπορέσουμε να προχωρήσουμε σε αυτή την ανάλυση πρέπει να μετατρέψουμε το όριο (4.13) σε μια σχέση ανάμεσα στην γωνία μίξης και το Δm^2

$$\sin^2 2\theta \leq \frac{2P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}^{max}}{1 - \langle \cos \left(\frac{\Delta m^2 L}{2E} \right) \rangle}. \quad (4.14)$$

Στην περίπτωση της γκαουσιανής κατανομής, με $\sigma_{L/E} = k \langle L/E \rangle$ έχουμε

$$\sin^2 2\theta \leq \frac{2P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}^{max}}{1 - \cos \left(\frac{\Delta m^2}{2} \langle \frac{L}{E} \rangle \right) \exp \left[-\frac{k^2}{2} \left(\frac{\Delta m^2}{2} \langle \frac{L}{E} \rangle \right)^2 \right]} \quad (4.15)$$

Η καμπύλη που αντιστοιχεί στην ισότητα ονομάζεται καμπύλη αποκλεισμού και οριοθετεί τις αποκλεισμένες περιοχές, οι οποίες πάντα βρίσκονται στα δεξιά της καμπύλης.

Στην περίπτωση όπου

$$\Delta m^2 \left\langle \frac{L}{E} \right\rangle \gg 1 \quad (4.16)$$

τότε

$$\sin^2 2\theta \rightarrow 2P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}^{max} \quad (4.17)$$

Αντίστοιχα στην περίπτωση που

$$\Delta m^2 \left\langle \frac{L}{E} \right\rangle \ll 1 \quad (4.18)$$

τότε

$$\cos \left(\frac{\Delta m^2}{2} \left\langle \frac{L}{E} \right\rangle \right) \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta m^2}{2} \left\langle \frac{L}{E} \right\rangle \right)^2, \quad (4.19)$$

οπότε

$$\sin^2 2\theta \leq \frac{2P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}^{max}}{\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta m^2}{2} \right)^2 \left\langle \left(\frac{L}{E} \right)^2 \right\rangle} \quad (4.20)$$

Θεωρώντας $\left\langle \left(\frac{L}{E}\right)^2 \right\rangle \approx \left\langle \frac{L}{E} \right\rangle^2$ καταλήγουμε

$$\sin^2 2\theta \leq \frac{16P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}^{max}}{(\Delta m^2)^2 \left\langle \frac{L}{E} \right\rangle^2} \quad (4.21)$$

Για να αντικαταστήσουμε τις σταθερές χρησιμοποιούμε την αντιστοιχία

$$\Delta m^2 \left\langle \frac{L}{E} \right\rangle \rightarrow 5.08 \times \Delta m^2 [eV^2] \left\langle \frac{L}{E} \right\rangle \frac{[km]}{[GeV]}, \quad (4.22)$$

έτσι έχουμε

$$\sin^2 2\theta \leq \frac{0.62P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}^{max}}{\left(\Delta m^2 [eV^2] \left\langle \frac{L}{E} \right\rangle \frac{[km]}{[GeV]}\right)^2}. \quad (4.23)$$

Η καμπύλη αποκλεισμού τέμνεται με τον άξονα για $\sin^2 2\theta = 1$, τότε

$$\Delta m^2 [eV^2] \left\langle \frac{L}{E} \right\rangle \frac{[km]}{[GeV]} = 0.79 \sqrt{P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}^{max}}. \quad (4.24)$$

Ας υποθέσουμε ότι από ένα πείραμα έχουμε καταλήξει ότι $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}^{max} = 0.1$ και εκτιμούμε ότι $k = 0.2$. Από τις σχέσεις (4.17) και (4.24) υπολογίζουμε ότι η καμπύλη αποκλεισμού τέμνεται με τον άξονα $\sin^2 2\theta$ στο 0.2 και με τον άξονα $\Delta m^2 \langle L/E \rangle$ στο 0.25. Στο σχήμα 2 φαίνεται η καμπύλη αποκλεισμού, καθώς και η καμπύλη στην οποία δεν έχει ληφθεί υπόψιν η ανωτέρω μελέτη και αντιστοιχεί στην ιδανική περίπτωση $k = 0$. Γενικά, για $\Delta m^2 [eV^2] \left\langle \frac{L}{E} \right\rangle \frac{[km]}{[GeV]} \gg 2\pi$, στο παράδειγμά βλέπουμε ότι πρακτικά ακόμα και για $\Delta m^2 [eV^2] \left\langle \frac{L}{E} \right\rangle \frac{[km]}{[GeV]} > 2\pi$, δεν μπορούμε να αποκομίσουμε πληροφορίες για τις ταλαντώσεις αφού το $\sin^2 2\theta$ είναι ανεξάρτητο από τις παραμέτρους, όπως φαίνεται και από την σχέση (4.17). Στις ρεαλιστικές περιπτώσεις έχουμε στην διάθεση μας τον λόγο $\langle L/E \rangle$ και την τυπική απόκλιση $\sigma_{L/E}$ οπότε τα διαγράμματα έχουν άξονες $\Delta m^2 - \sin^2 2\theta$.

Σαν δεύτερη εφαρμογή μπορούμε να δούμε ένα πείραμα εξαφάνισης με δυο ανιχνευτές το οποίο μετρά τον λόγο

$$\frac{\langle P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}(L, E) \rangle_{far}}{\langle P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}(L, E) \rangle_{near}} \geq R, \quad 0 \leq R < 1 \quad (4.25)$$

Από την σχέση (3.37) η πιθανότητα επιβίωσης είναι

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}(L, E) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \left[1 - \cos^2 \left(\frac{\Delta m^2 L}{2E} \right) \right], \quad (4.26)$$

οπότε η ανισότητα της σχέσης (4.25) γίνεται

$$2(1 - R) \leq \sin^2 2\theta \left[1 - R - \left\langle \cos \frac{\Delta m^2 L}{2E} \right\rangle_{far} + R \left\langle \cos \frac{\Delta m^2 L}{2E} \right\rangle_{near} \right] \quad (4.27)$$

Αν η παράσταση στην αγκύλη είναι αρνητική τότε

$$\sin^2 2\theta \geq \frac{2(1 - R)}{1 - R - \left\langle \cos \frac{\Delta m^2 L}{2E} \right\rangle_{far} + R \left\langle \cos \frac{\Delta m^2 L}{2E} \right\rangle_{near}}, \quad (4.28)$$

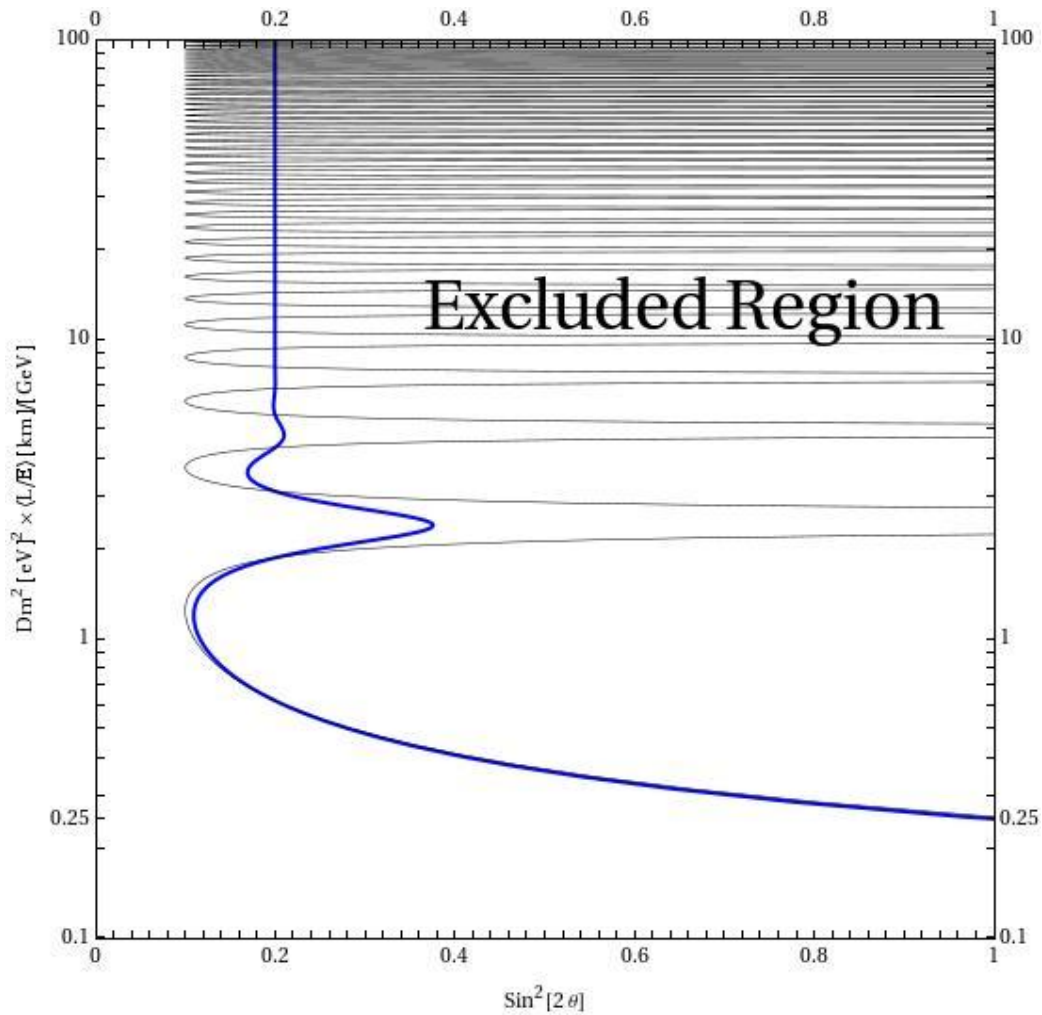
οπότε δεν υπάρχει φράγμα για το $\sin^2 2\theta$ αφού πάντα είναι μεγαλύτερο από μια αρνητική ποσότητα. Αν η παράσταση στην αγκύλη είναι θετική, τότε

$$\sin^2 2\theta \leq \frac{2(1 - R)}{1 - R - \left\langle \cos \frac{\Delta m^2 L}{2E} \right\rangle_{far} + R \left\langle \cos \frac{\Delta m^2 L}{2E} \right\rangle_{near}}, \quad (4.29)$$

όπου η μέση τιμή υπολογίζεται από την σχέση (4.10). Στο σχήμα (3) είναι το διάγραμμα αποκλεισμένων περιοχών για $R = 0.9$ και γκαουσιανές κατανομές $\phi(L/E)$ με $\langle L/E \rangle_{near} = 0.01 \text{ km/GeV}$ και $\sigma_{L/E}^{near} = 0.002 \text{ km/GeV}$ για τον κοντινό ανιχνευτή και $\langle L/E \rangle_{far} = 1 \text{ km/GeV}$ και $\sigma_{L/E}^{far} = 0.2 \text{ km/GeV}$ για τον μακρινό.

Στην περίπτωση που ένα πείραμα καταφέρει να ανιχνεύσει ταλαντώσεις τότε η πιθανότητα μετατροπής περιορίζεται σε ένα συγκεκριμένο εύρος το οποίο αντιστοιχεί σε μια περιοχή στο διάγραμμα $\Delta m^2 - \sin^2 2\theta$. Για παράδειγμα αν περιορίσουμε την πιθανότητα σε ένα εύρος $0.05 \geq P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} \leq 0.15$ και θεωρήσουμε γκαουσιανή κατανομή $\phi(L/E)$ με $\langle L/E \rangle = 1 \text{ km/GeV}$ και $\sigma_{L/E} = 0.15 \text{ km/GeV}$ προκύπτει το σχήμα 4. Στο διάγραμμα αυτό η γωνία μίξης θ και η διαφορά τετραγώνων των μαζών Δm^2 μπορούν να πάρουν τιμές μόνο ανάμεσα στις δύο καμπύλες.

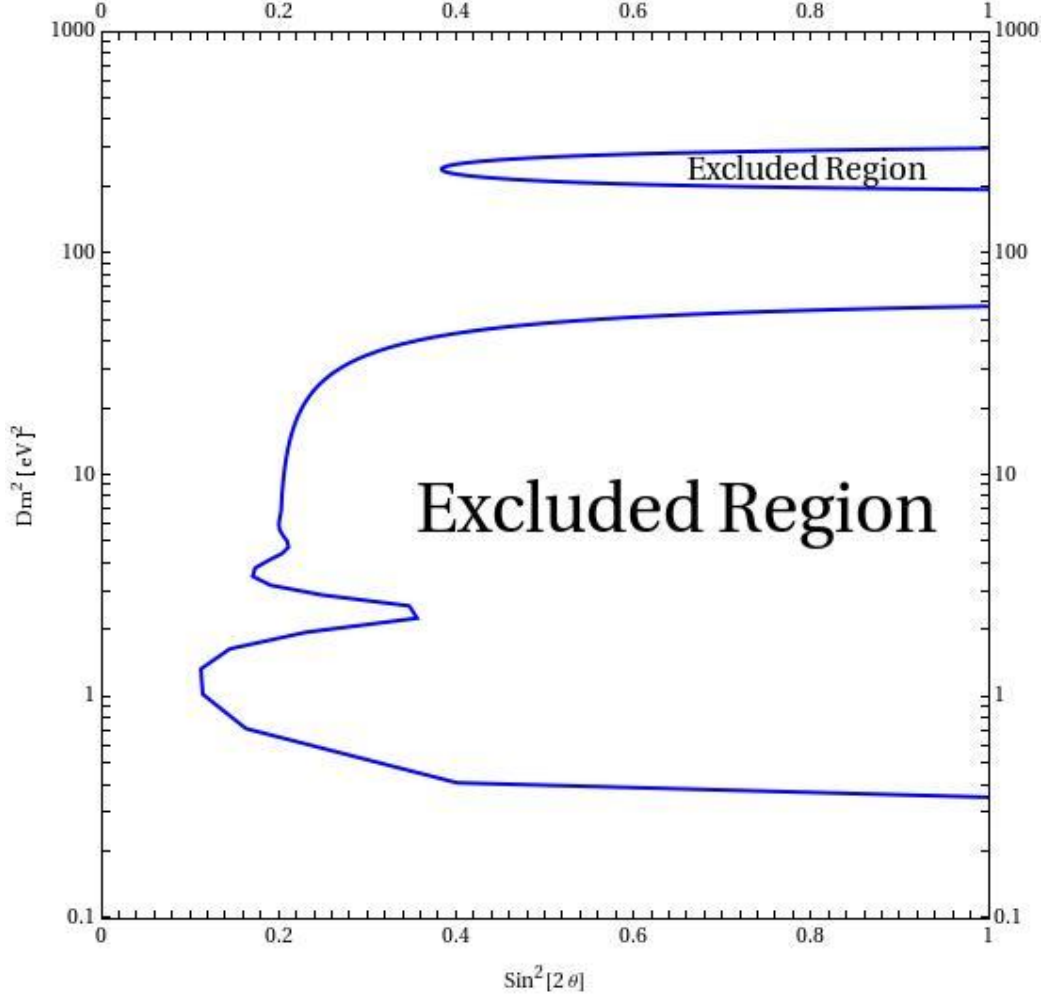
Στα περισσότερα πειράματα, βέβαια, επειδή υπάρχει μεγάλη διασπορά, είτε όσον αφορά την ενέργεια, είτε όσον αφορά την απόσταση, τα δεδομένα ομαδοποιούνται και η κάθε ομάδα έχει την δική της κατανομή $\phi(L/E)$. Αν μετράμε την ροή από νετρίνα δύο διαφορετικών αντιδραστήρων και θεωρήσουμε δυο ομάδες δεδομένων με $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}^1 = 0.11$ και $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}^2 = 0.09$, $\langle L/E \rangle_1^1 = 2 \text{ km/GeV}$ και $\langle L/E \rangle_2^2 = 0.4 \text{ km/GeV}$, $\sigma_{L/E}^1 = 0.25 \text{ km/GeV}$ και $\sigma_{L/E}^2 = 0.05 \text{ km/GeV}$ βλέπουμε ότι στο σχήμα 5 υπάρχουν αρκετά σημεία τομής των καμπύλων αποκλεισμού. Αυτά τα σημεία είναι συμβατά και με τις δυο ομάδες, οπότε αν λάβουμε υπόψιν μας το σφάλμα των πιθανοτήτων τα σημεία εξαπλώνονται σε



Σχήμα 2: Η έντονη γραμμή είναι η καμπύλη αποκλεισμού για $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}^{max} = 0.1$ και αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου έχουν ληφθεί μέση τιμή σύμφωνα με την γκαουσιανή κατανομή $\phi(L/E)$ με $k = 0.2$, ενώ η μαύρη γραμμή αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου $k = 0$, οπότε δεν έχει ληφθεί μέση τιμή.

περιοχές επικάλυψης. Προσθέτοντας κι άλλες ομάδες δεδομένων μπορούμε να περιορίσουμε τις περιοχές επικάλυψης και τελικά να καταλήξουμε σε μια μικρή περιοχή.

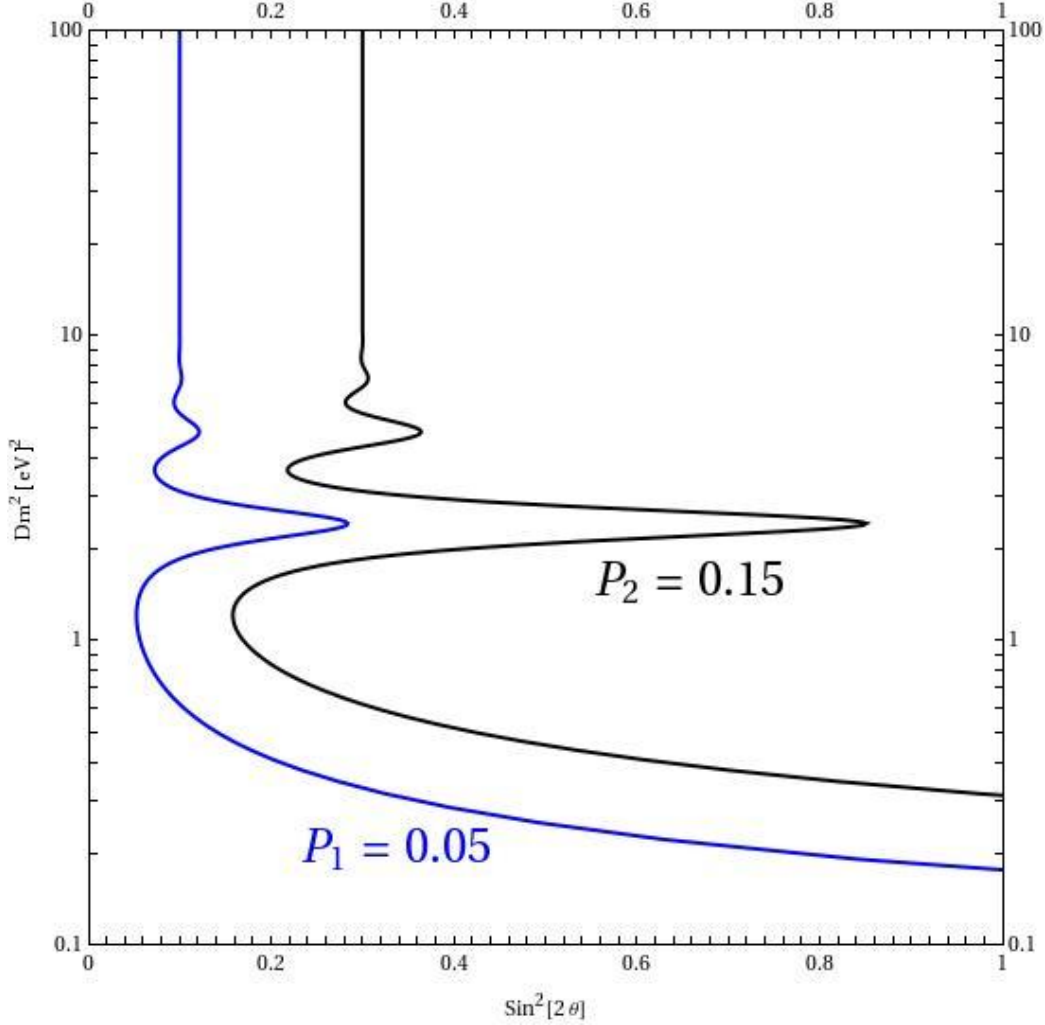
Αν ξεφύγουμε από την περιορισμένη ανάλυση της ταλάντωσης 2 νετρίων



Σχήμα 3: Η καμπύλη αποκλεισμού για ένα πείραμα εξαφάνισης με δύο ανιχνευτές με $R = 0.9$ και γκαουσιανή κατανομή $\phi(L/E)$. Για τον κοντινό ανιχνευτή έχουμε $\langle L/E \rangle_{near} = 0.01 \text{ km/GeV}$ και $\sigma_{L/E}^{near} = 0.002 \text{ km/GeV}$, ενώ για τον μακρινό έχουμε $\langle L/E \rangle_{far} = 1 \text{ km/GeV}$ και $\sigma_{L/E}^{far} = 0.2 \text{ km/GeV}$.

πρέπει να πάρουμε την μέση τιμή της σχέσης (3.13).

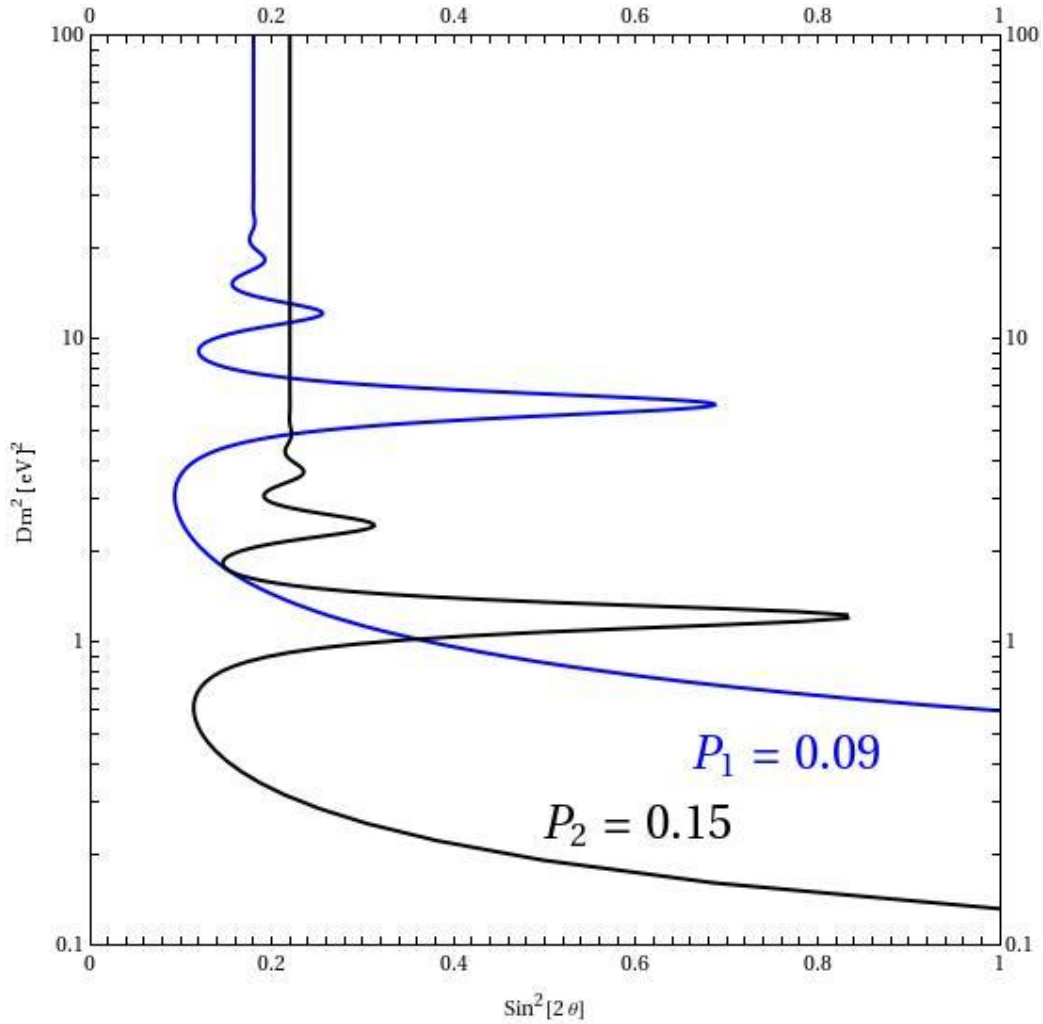
$$\begin{aligned}
 \langle P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) \rangle &= \delta_{\alpha\beta} - 2 \sum_{i>j} \Re(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \left(1 - \left\langle \cos \left(\Delta m_{ij}^2 \frac{L}{2E} \right) \right\rangle \right) \\
 &\quad + 2 \sum_{i>j} \Im(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \left\langle \sin \left(\Delta m_{ij}^2 \frac{L}{2E} \right) \right\rangle,
 \end{aligned} \tag{4.30}$$



Σχήμα 4: Η επιτρεπόμενη περιοχή, που βρίσκεται ανάμεσα στις δύο καμπύλες, για πιθανότητα με εύρος $0.05 \geq P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} \leq 0.15$ θεωρώντας γκαουσιανή κατανομή $\phi(L/E)$ με $\langle L/E \rangle = 1 \text{ km/GeV}$ και $\sigma_{L/E} = 0.15 \text{ km/GeV}$.

όπου στην περίπτωση της γκαουσιανής κατανομής $\phi(L/E)$ η μέση τιμή του συνημίτονου δίνεται από την σχέση 4.10 και η μέση τιμή του ημιτόνου από την σχέση

$$\left\langle \sin \left(\frac{\Delta m^2 L}{2E} \right) \right\rangle = \sin \left(\frac{\Delta m^2}{2} \left\langle \frac{L}{E} \right\rangle \right) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta m^2}{2} \sigma_{L/E} \right)^2 \right]. \quad (4.31)$$

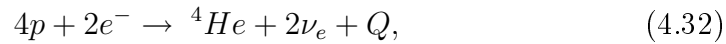


Σχήμα 5: Δύο καμπύλες αποκλιισμού με γκαουσιανή κατανομή $\phi(L/E)$. Οι ομάδες δεδομένων αντιστοιχούν σε $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}^1 = 0.11$ και $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}^2 = 0.09$, $\langle L/E \rangle^1 = 2 \text{ km/GeV}$ και $\langle L/E \rangle^2 = 0.4 \text{ km/GeV}$, $\sigma_{L/E}^1 = 0.25 \text{ km/GeV}$ και $\sigma_{L/E}^2 = 0.05 \text{ km/GeV}$.

Προφανώς η ανάλυση μέσω της σχέσης (4.30) είναι πολύ πιο σύνθετη αφού εξαρτάται από τις 3 γωνίες μίξης, τις 3 διαφορές τετραγώνων των μαζών και την φάση Dirac.

4.3 Ηλιακά Νετρίνα

Κάθε δευτερόλεπτο 6×10^{10} ηλιακά νετρίνα διέρχονται από κάθε τετραγωνικό εκατοστό του σώματός μας. Ο ήλιος είναι μια απίστευτα ισχυρή πηγή νετρίνων, τα οποία παράγονται στις θερμοπυρηνικές αντιδράσεις που λαμβάνουν χώρα στο εσωτερικό του. Ο ήλιος παράγει ενέργεια με δυο διαδικασίες, την αλυσίδα πρωτονίου - πρωτονίου (σχήμα 6) και τον κύκλο *CNO* (σχήμα 7). Και στις δύο περιπτώσεις μετατρέπονται 4 πρωτόνια και δύο ηλεκτρόνια σε έναν πυρήνα ηλίου και δυο νετρίνα:



όπου $Q = 25.731 \text{ MeV}$ είναι η ενέργεια που απελευθερώνεται από αυτή την διαδικασία. Σε ένα άστρο η παραγωγή ενέργειας αντισταθμίζει την βαρυτική κατάρρευση που υφίσταται. Μέχρι να αρχίσουν θερμοπυρηνικές αντιδράσεις στο εσωτερικό του άστρου η βαρυτική κατάρρευση αυξάνει την θερμοκρασία του. Με την αύξηση της θερμοκρασίας τα πρωτόνια αποκτούν θερμική ενέργεια οπότε αυξάνεται η πιθανότητα μέσω κβαντικού tunneling να υπερνικήσουν την άπωση Coulomb και να ξεκινήσουν οι θερμοπυρηνικές αντιδράσεις.

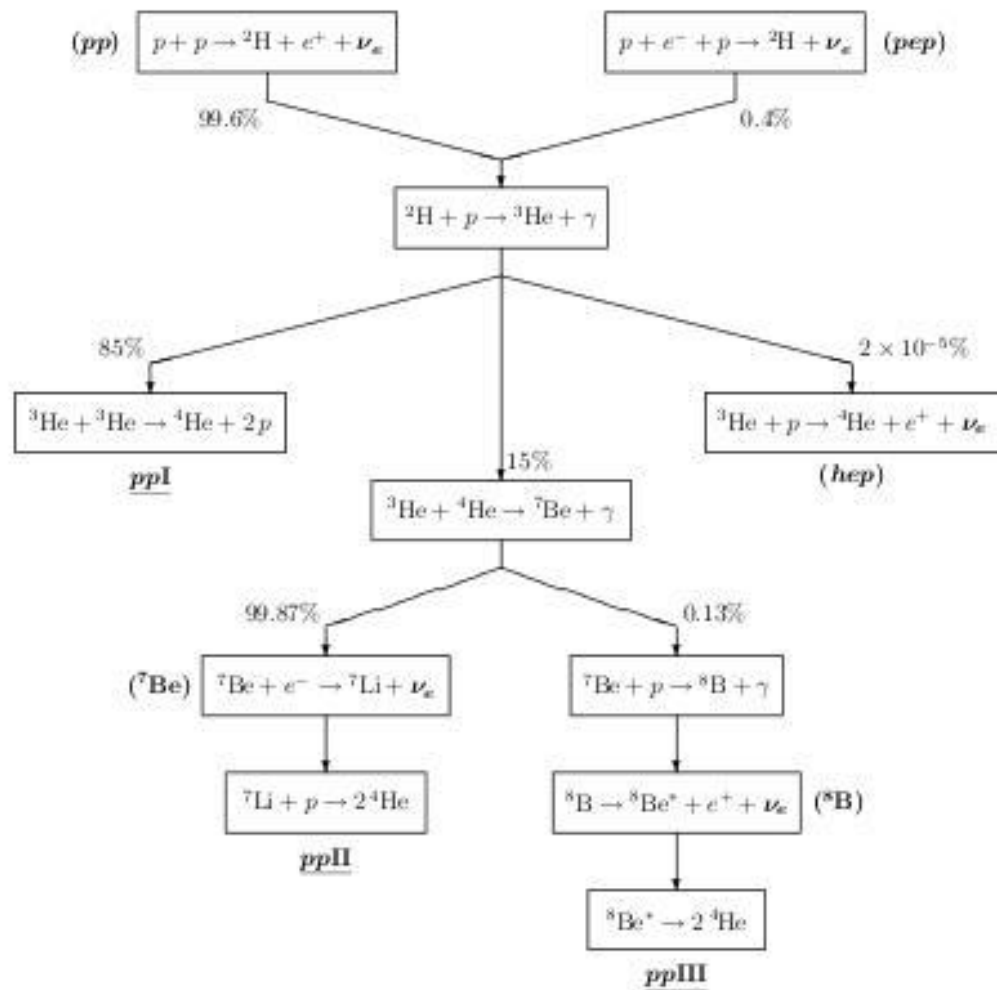
Για να μπορέσει να πραγματοποιηθεί μια πυρηνική αντίδραση πρέπει οι πυρήνες να πλησιάσουν αρκετά, ώστε να μπορεί να δράσει η ισχυρή αλληλεπίδραση. Αυτό θεωρούμε ότι συμβαίνει όταν οι πυρήνες έρθουν σε επαφή, δηλαδή σε απόσταση $R_N = R_0(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})$. Για μεγαλύτερες αποστάσεις επικρατεί η άπωση Coulomb. Κλασικά ένα σωματίδιο ενέργειας E μπορεί να φτάσει σε απόσταση

$$R_C = \frac{Z_1 Z_2 \alpha}{E}. \quad (4.33)$$

Η δυναμική ενέργεια λόγω της άπωσης Coulomb όταν οι πυρήνες έρθουν σε επαφή λέγεται φράγμα Coulomb

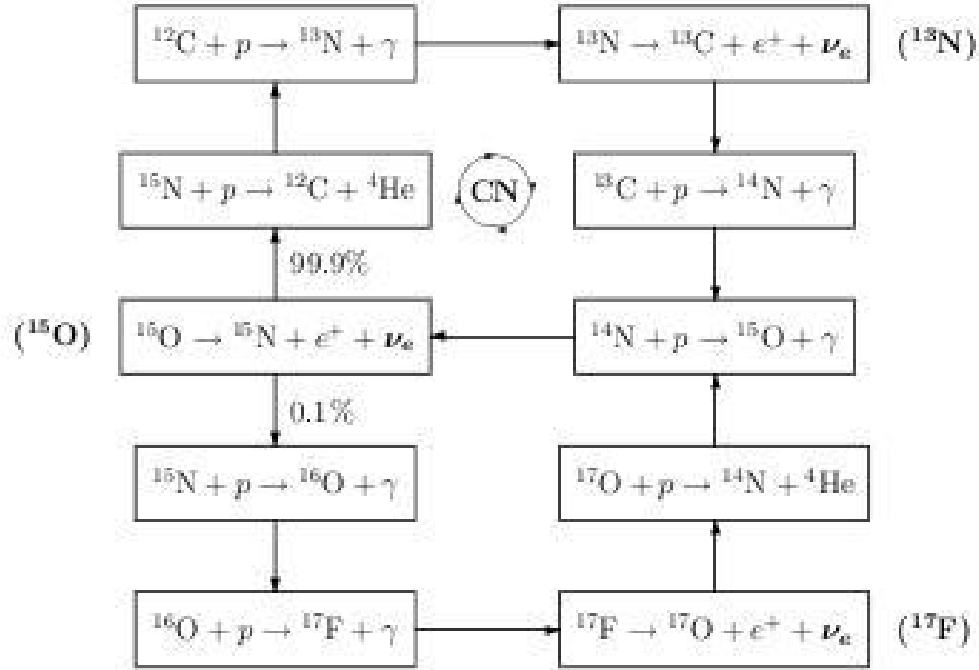
$$E_C = \frac{Z_1 Z_2 \alpha}{R_N} \quad (4.34)$$

Για δυο πρωτόνια η ενέργεια αυτή είναι $E_C \simeq 550 \text{ keV}$, σύμφωνα λοιπόν με την κλασική φυσική στο εσωτερικό του ηλίου όπου επικρατεί θερμοκρασία $T \simeq 1.5 \times 10^7 \text{ K}$ δεν θα έπρεπε να συμβαίνουν θερμοπυρηνικές αντιδράσεις αφού στην θερμοκρασία αυτή τα πρωτόνια έχουν ενέργεια μόλις $kT \simeq 1.3 \text{ keV}$. Κβαντομηχανικά μέσω του φαινομένου της σήραγγας οι πυρήνες έχουν πιθανότητα να διαπεράσουν το δυναμικό Coulomb ακόμα και αν έχουν ενέργεια $E < E_C$.



Σχήμα 6: Η αλυσίδα πρωτονίου - πρωτονίου. Έχουν σημειωθεί οι διάφοροι κλάδοι δημιουργείας νετρίνων.

Στις δύο διαδικασίες θερμοπυρηνικών αντιδράσεων που παράγουν ενέργεια στον ήλιο μπορούμε να διαχωρίσουμε τους διάφορους κλάδους των διαδικασιών, έτσι ώστε σε κάθε κλάδο να παράγεται ένα νεutrino. Στην συνέχεια μπορούμε να συσχετίσουμε την θερμική ενέργεια α_r που παράγεται από αυτό το τμήμα με την ροή των νετρίνων Φ_r που παράγονται με το συγκεκριμένο κλάδο. Συνολικά



Σχήμα 7: Ο κύκλος CNO. Έχουν σημειωθεί οι αντιδράσεις παραγωγής νετρίνων

για τις δυο διαδικασίες έχουμε

$$\sum_r \alpha_r \Phi_r = K_o, \quad r = pp, pep, hep, {}^7\text{Be}, {}^8\text{B}, {}^{13}\text{N}, {}^{15}\text{O}, {}^{17}\text{F} \quad (4.35)$$

όπου K_o η ηλιακή σταθερά. Θεωρώντας αμελητέα την ενέργεια των νετρίνων μπορούμε να προσεγγίσουμε την συνολική ροή των ηλιακών νετρίνων ως

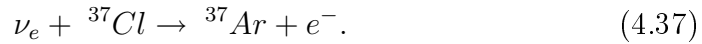
$$\Phi \simeq \frac{2K_o}{Q}. \quad (4.36)$$

Στην πραγματικότητα η ροή πρέπει να είναι λίγο μεγαλύτερη. Σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα μας δίνει ότι τα νετρίνα αποκτούν περίπου 2% της ενέργειας που παράγεται. Αν το πείραμα ανιχνεύει την παραγωγή νετρίνων μέσω αντιδράσεων, τότε ανάλογα με τον στόχο μπορούμε να υπολογίσουμε την συμβολή κάθε κλάδου στον θεωρητικά αναμενόμενο ρυθμό ροής. Στον πίνακα

δίνονται οι συμβολές των κλάδων στην συνολική ροή καθώς και η συνολική ροή για το πείραμα του ορυχείου Homestake, που χρησιμοποίησε χλώριο, και για πειράματα Γαλλίου.

4.3.1 Ορυχείο Homestake

Τα πειράματα ηλιακών νετρίνων είχαν ως αφετηρία το πείραμα του ορυχείου Homestake. Στο πείραμα αυτό η ανίχνευση πραγματοποιήθηκε με ραδιοχημικές μεθόδους. Τα νετρίνα ανιχνεύονταν μέσω της αντίστροφης β - διάσπασης



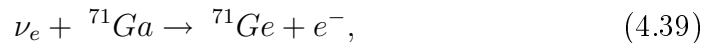
Τοποθετήθηκε σε βάθος⁴ 1478 m, ώστε να μειωθεί στο ελάχιστο το υπόβαθρο, μεγάλη ποσότητα χλωρίου υπό την μορφή C_2Cl_4 . Η ποσότητα αντιστοιχούσε σε 2.16×10^{30} άτομα ${}^{37}\text{Cl}$. Το μεγάλο πρόβλημα ήταν η ανίχνευση των ατόμων ${}^{37}\text{Ar}$ που παράγονταν καθώς ο ρυθμός παραγωγής τους ήταν περίπου ένα άτομο ανά δύο μέρες. Εξαιτίας της ενέργειας κατωφλίου $E_{th} = 0.814 \text{ MeV}$ της παραπάνω αντίδρασης το πείραμα ήταν σε θέση να ανιχνεύσει μόνο νετρίνα υψηλής ενέργειας τα οποία προέρχονταν από την ροή των νετρίνων που παράγονταν κατά την παραγωγή του ${}^8\text{B}$. Η ροή έχει επικρατήσει να μετράται σε SNU , όπου $1 \text{ SNU} = 10^{-36}$ γεγονότα ανά άτομο ανά δευτερόλεπτο. Στα 25 χρόνια λειτουργίας του το πείραμα του ορυχείου Homestake μέτρησε μέσο ρυθμό ροής των ηλιακών νετρίνων

$$R_{37\text{Cl}}^{\text{Homestake}} = 2.56 \pm 0.23 \text{ SNU}, \quad (4.38)$$

που αντιστοιχεί περίπου στο ένα τρίτο του προβλεπόμενου ρυθμού ροής σύμφωνα με το καθιερωμένο ηλιακό πρότυπο. Η ισότητα με τον θεωρητικά αναμενόμενο ρυθμό ροής αποκλείεται σε εύρος μεγαλύτερο από 3σ .

4.3.2 Πειράματα Γαλλίου ${}^{71}\text{Ga}$

Μια κατηγορία πειραμάτων ηλιακών νετρίνων είναι τα πειράματα Γαλλίου. Τα πειράματα αυτού του τύπου χρησιμοποιούν την αντίδραση



⁴Η θωράκιση μετριέται σε ισοδύναμα μέτρα νερού, τα οποία αντιστοιχούν στο στρώμα νερού που παρέχει την ίδια θωράκιση, έτσι αυτό το βάθος αντιστοιχεί σε 4000 ισοδύναμα μέτρα νερού.

Πίνακας 5: Οι θεωρητικά ανιχνευόμενοι ρυθμοί ροής ηλιακών νετρίνων των διαφόρων κλάδων καθώς και οι συνολικοί ρυθμοί ροής σύμφωνα με το Καθιερωμένο Ηλιακό Πρότυπο BP00 SSM.

Κλάδος	$R_{37Cl}^{(r)}$ [SNU]	$R_{71Ga}^{(r)}$ [SNU]
pp	—	69.7
pep	0.22	2.8
hep	0.04	0.1
7Be	1.15	34.2
8B	5.76	12.1
${}^{13}N$	0.09	3.4
${}^{15}O$	0.33	5.5
${}^{17}F$	0.0	0.1
Σύνολο	$7.6_{-1.1}^{+1.3}$	128_{-7}^{+9}

η οποία έχει εξαιρετικά χαμηλή ενέργεια κατωφλίου $E_{th} = 0.233 \text{ MeV}$ καθιστώντας δυνατή την ανίχνευση νετρίνων από όλους του κλάδους. Επίσης λόγω του χαμηλού ενεργειακού κατωφλίου ο θεωρητικός συνολικός ρυθμός ροής είναι πολύ υψηλός με αποτέλεσμα να αναμένουμε περισσότερα πειραματικά γεγονότα. Οι συνεισφορές των κλάδων στον συνολικό ρυθμό ροής φαίνονται στον πίνακα 5.

Το πείραμα GALLium EXperiment έλαβε χώρα στο εργαστήριο του Gran Sasso έχοντας θωράχιση 3.300 ισοδύναμα μέτρα νερού. Το GALLEX λειτούργησε από τον Μάιο του 1991 ως τον Ιανουάριο του 1997 και διαδέχθηκε από το πείραμα GNO από τον Μάιο του 1998 ως τον Απρίλη του 2003. Το πείραμα Gallium Neutrino Observatory χρησιμοποίησε την ίδια διάταξη με βελτιωμένο εξοπλισμό ραδιοχημικής καταγραφής. Συνολικά και τα δύο πειράματα μαζί κατέγραψαν ρυθμό ροής

$$R_{71Ga}^{GALLEX/GNO} = 69.3 \pm 5.5 \text{ SNU}, \quad (4.40)$$

που αντιστοιχεί στον μισό από το θεωρητικά αναμενόμενο. Η ισότητα με τον θεωρητικά αναμενόμενο ρυθμό ροής αποκλείεται σε εύρος 5σ .

Το πείραμα Soviet - American Gallium Experiment έλαβε χώρα στο παρατηρητήριο νετρίνων του Baksan, με θωράχιση 4.700 ισοδύναμων μέτρων νερού. Το πείραμα έλαβε δεδομένα από τον Ιανουάριο του 1990 ως τον Δεκέμβρη του 2001 και μέτρησε ρυθμό ροής

$$R_{71Ga}^{SAGE} = 70.8_{-6.1}^{+6.5} \text{ SNU}. \quad (4.41)$$

Αυτός ο ρυθμός ροής συμφωνεί με τον ρυθμό του πειράματος GALLEX/GNO και απέχει από τον θεωρητικό ρυθμό ροής σε εύρος 5σ .

4.3.3 Ανιχνευτές Cherenkov υγρού

Οι ανιχνευτές Cherenkov ανιχνεύουν νετρίνα σε πραγματικό χρόνο μέσω των λεπτονίων που παράγονται. Τα λεπτόνια ακτινοβολούν φως Cherenkov το οποίο συλλέγεται από φωτοπολλαπλασιαστές.

Το πείραμα *Kamiokande* έλαβε χώρα στο ορυχείο Kamioka με θωράχιση 2.600 ισοδύναμων μέτρων νερού. Τα νετρίνα μετρώνται μέσω της ελαστικής σκέδασης

$$\nu_\alpha + e^- \rightarrow \nu_\alpha + e^- \quad (4.42)$$

στην οποία κατά κύριο λόγο συνεισφέρουν νετρίνο των ηλεκτρονίων, αφού η διατομή για την σκέδαση τους είναι 6 φορές μεγαλύτερη από την διατομή των νετρίνων του μιονίου και των νετρίνων του τ . Από τον Ιανουάριο του 1987 ως τον Φεβρουάριο του 1995 μετρήθηκε η μέση ροή των νετρίνων που παράγονται από τον κλάδο 8B

$$\Phi_{sB}^{Kam} = (2.80 \pm 0.38) \times 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}. \quad (4.43)$$

Αν υποθέσουμε ότι τα νετρίνα δεν ταλαντώνονται, οπότε η ροή αυτή οφείλεται αποκλειστικά σε νετρίνα του ηλεκτρονίου τότε η ροή είναι η μισή από αυτή που προβλέπει το καθιερωμένο ηλιακό πρότυπο και απέχει από την μονάδα σε εύρος μεγαλύτερο από 2σ .

Στην συνέχεια το πείραμα εξελίχθηκε στο Super - Kamiokande. Η πρώτη φάση του πειράματος διήρκεσε από τον Απρίλιο του 1996 ως το Ιούλιο του 2001, ενώ η δεύτερη φάση διήρκεσε από τον Ιανουάριο του 2003 ως τον Φεβρουάριο του 2004. Συνολικά η μέση ροή που μετρήθηκε ήταν

$$\Phi_{sB}^{SK} = (2.35 \pm 0.38) \times 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}, \quad (4.44)$$

η οποία αν υποθέσουμε απουσία ταλαντώσεων αντιστοιχεί στο μισό της θεωρητικής ροής και απέχει από την μονάδα σε εύρος μεγαλύτερο από 2σ . Η σύγκριση της ροής κατά την διάρκεια της μέρας με την ροή κατά την διάρκεια της νύχτας μπορεί να δώσει πληροφορίες για την επίδραση της ύλης στις ταλαντώσεις. Οι ροές που μετρήθηκαν ήταν

$$\Phi_{sB}^{SK,day} = (2.32 \pm 0.03_{-0.07}^{+0.08}) \times 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}, \quad (4.45)$$

$$\Phi_{sB}^{SK,night} = (2.37 \pm 0.03_{-0.08}^{+0.08}) \times 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1} \quad (4.46)$$

Με αυτές τις ροές η ασυμμετρία που προκύπτει είναι

$$A_{day-night}^{SK} \equiv \frac{\Phi_{sB}^{SK,day} - \Phi_{sB}^{SK,night}}{\frac{1}{2}(\Phi_{sB}^{SK,day} + \Phi_{sB}^{SK,night})} = -0.021 \pm 0.020_{-0.012}^{+0.013}, \quad (4.47)$$

τιμή που είναι συμβατή με την απουσία ασυμμετρίας. Η εποχική μεταβολή της ροής βρέθηκε σε συμφωνία με την εποχική μεταβολή λόγω της εκκεντρότητας της τροχιάς της Γης. Η αναζήτηση νετρίνων του κλάδου *hep* μέσω της υψηλής μέγιστης ενέργειας που έχουν δεν απέδωσε καρπούς, οπότε τέθηκε μόνο ένα φράγμα

$$\Phi_{hep}^{SK} < 73 \times 10^3 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1} \quad (90\% \text{ CL}). \quad (4.48)$$

Το πείραμα Sudbury Neutrino Observatory έλαβε χώρα στο ορυχείο Creighton με θωράκιση 6010 ισοδύναμων μέτρων νερού. Το πείραμα χρησιμοποιεί 3 διαδικασίες

$$CC : \quad \nu_e + d \rightarrow p + p + e^- \quad (4.49)$$

$$NC : \quad \nu_\alpha + d \rightarrow p + n + \nu_\alpha \quad (4.50)$$

$$ES : \quad \nu_\alpha + E^- \rightarrow \nu_\alpha + e^- \quad (4.51)$$

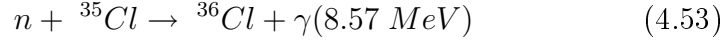
Και στις τρεις ανωτέρω διαδικασίες μπορούν να συμμετάσχουν μόνο νετρίνα του κλάδου 8B . Η αλληλεπίδραση φορτισμένου ρεύματος είναι ευαίσθητη μόνο στα νετρίνα του ηλεκτρονίου. Η αλληλεπίδραση ουδετέρου ρεύματος είναι εξίσου ευαίσθητη και στις τρεις γεύσεις νετρίνων, ενώ για την ελαστική σκέδαση ισχύει ότι αναφέρθηκε για την αντίστοιχη ελαστική σκέδαση του πειράματος Kamiokande. Η λειτουργία του SNO μπορεί να χωριστεί σε τρεις φάσεις:

D₂O Στην φάση αυτή η ανίχνευση της αλληλεπίδραση ουδετέρου ρεύματος (4.50) γινόταν μέσω της αντίδρασης

$$n + d \rightarrow {}^3H + \gamma(6.25 \text{ MeV}) \quad (4.52)$$

Η φάση αυτή διήρκησε από τις 2 Νοεμβρίου 1999 ως τις 18 Μαΐου 2001.

NaCl Στην φάση αυτή το βαρύ ύδωρ εμπλουτίστηκε με αλάτι ώστε η αλληλεπίδραση ουδετέρου ρεύματος να ανιχνεύεται μέσω της αντίδρασης



Το πλεονέκτημα ήταν τριπλό. Η πιθανότητα σύλληψης του νετρονίου αυξήθηκε, η μεγαλύτερη ενέργεια της ακτινοβολίας γ επιτρέπει καλύτερες μετρήσεις αφού είναι ακόμα υψηλότερα από το υπόβαθρο και είναι πιο εύκολος ο διαχωρισμός των αλληλεπιδράσεων φορτισμένου ρεύματος από τις αλληλεπιδράσεις ουδετέρου ρεύματος. Η φάση αυτή διήρκησε από 26 Ιουλίου 2001 ως 28 Αυγούστου 2003

Τρίτη Φάση Στην τρίτη φάση η οποία ξεκίνησε τον Ιανουάριο του 2005 και βρίσκεται ακόμα σε εξέλιξη τοποθετήθηκαν φιάλες ${}^3\text{H}$ ώστε να βελτιωθεί ακόμα περισσότερο η σύλληψη του νετρονίου.

Η πρώτη φάση του πειράματος επιβεβαίωσε το πρόβλημα των ηλιακών νετρίνων. Μέσω της μετρήσεις των αλληλεπιδράσεων ουδετέρου ρεύματος επιβεβαιώθηκε ότι η ροή των νετρίνων του ηλεκτρονίου είναι το ένα τρίτο της συνολικής ροής των νετρίνων. Στην δεύτερη φάση μετρήθηκαν οι ακόλουθες ροές:

$$\Phi_{CC}^{SNO} = 1.68 \pm 0.06_{-0.09}^{+0.08} \times 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}, \quad (4.54)$$

$$\Phi_{NC}^{SNO} = 4.94 \pm 0.21_{-0.34}^{+0.38} \times 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}, \quad (4.55)$$

$$\Phi_{ES}^{SNO} = 2.35 \pm 0.22 \pm 0.15 \times 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}, \quad (4.56)$$

Εκ πρώτης όψεως είναι προφανές ότι οι τρεις ροές διαφέρουν άρα να νετρίνα που ανιχνεύονται από τον ήλιο δεν μπορεί να έχουν την ίδια γεύση. Ο λόγος

$$\frac{\Phi_{CC}^{SNO}}{\Phi_{NC}^{SNO}} = 0.340 \pm 0.023_{-0.031}^{+0.029} \quad (4.57)$$

απέχει από την μονάδα περισσότερο από 17σ . Θεωρώντας ότι

$$\Phi_{CC}^{SNO} = \Phi_{\nu_e}^{SNO} \quad (4.58)$$

έχουμε

$$\Phi_{NC}^{SNO} = \Phi_{\nu_e}^{SNO} + \Phi_{\nu_\mu, \nu_\tau}^{SNO} \quad (4.59)$$

και

$$\Phi_{ES}^{SNO} = \Phi_{\nu_e}^{SNO} + 0.1553\Phi_{\nu_\mu, \nu_\tau}^{SNO} \quad (4.60)$$

επομένως η ροή των νετρίνων του μιονίου και του τ είναι

$$\Phi_{\nu_\mu, \nu_\tau}^{SNO-NC} = (3.26 \pm 0.25_{-0.35}^{+0.40}) \times 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (4.61)$$

και

$$\Phi_{\nu_\mu, \nu_\tau}^{SNO-ES} = (4.36 \pm 1.52_{-0.87}^{+0.90}) \times 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}, \quad (4.62)$$

τιμές που βρίσκονται σε συμφωνία μεταξύ τους.

Στην απλή περίπτωση της ανάλυσης μέσω ταλαντώσεων δύο νετρίνων η πιθανότητα επιβίωσης δίνεται από την σχέση

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}(L(t), E) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2 L(t)}{4E} \right), \quad (4.63)$$

όπου η απόσταση γης ηλίου δίνεται από την σχέση

$$L(t) = L_o \left[1 - \epsilon \cos \left(2\pi \frac{t}{T} \right) \right]. \quad (4.64)$$

Από την στιγμή που δεν υπάρχει σημαντική εποχική απόκλιση στις μετρήσεις η λύση του προβλήματος των ηλιακών νετρίνων ως ταλαντώσεις στο κενό αποκλείεται.

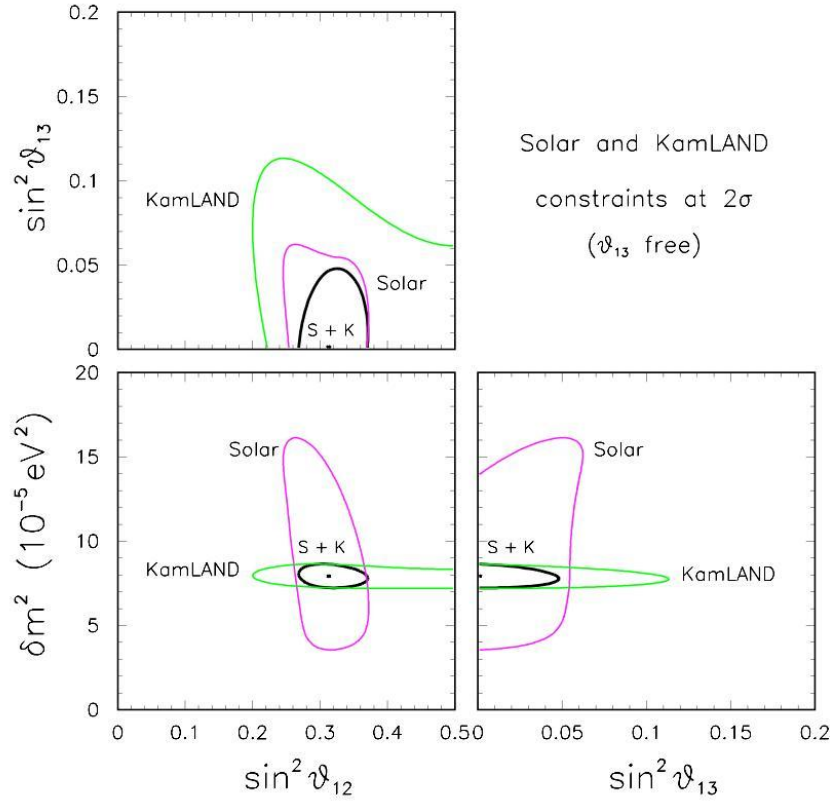
Συνδυάζοντας όλα τα προαναφερθέντα πειραματικά αποτελέσματα καταλήγουμε

$$\Delta m^2 = 6.5_{-2.3}^{+4.4} \times 10^{-5} \text{ eV}^2, \quad \tan^2 \theta = 0.45_{-0.08}^{+0.09}, \quad (4.65)$$

με αβεβαιότητα 1σ . Αν λάβουμε υπόψιν και τα αποτελέσματα του πειράματος KamLAND οι τιμές αυτές γίνονται

$$\Delta m^2 = 8.0_{-0.4}^{+0.6} \times 10^{-5} \text{ eV}^2, \quad \tan^2 \theta = 0.45_{-0.07}^{+0.09}, \quad (4.66)$$

έχουμε επομένως πολύ μεγαλύτερη ακρίβεια. Στο σχήμα 8 φαίνονται τα αποτελέσματα των ηλιακών πειραμάτων σε συνδυασμός με τα αποτελέσματα του KamLAND.



Σχήμα 8: Ο συνδυασμός των ηλιακών πειραμάτων με το KamLAND

4.4 Ατμοσφαιρικά Νετρίνα

Τα νετρίνα που παράγονται στην ατμόσφαιρα οφείλονται στην κοσμική ακτινοβολία. Η πρωτογενής κοσμική ακτινοβολία, η οποία αποτελείται κυρίως από πρωτόνια, αλληλεπιδρά με τους πυρήνες που βρίσκονται στην ατμόσφαιρα και παράγει αδρόνια. Ως επί το πλείστον παράγονται πιόνια, τα οποία διασπώνται κυρίως σε

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad \pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu. \quad (4.67)$$

Αν η πρωτογενής κοσμική ακτινοβολία έχει υψηλή ενέργεια συμβάλλουν και καόνια στην παραγωγή μιονίων και πιονίων. Αρκετά από τα μιόνια διασπώνται πριν φτάσουν στο έδαφος

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \quad \mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad (4.68)$$

Τα νετρίνα με ενέργειες από 100 MeV μέχρι 100 GeV μπορούν να ανιχνευτούν μέσω των σχεδιάσεων τους με πυρήνες. Φυσικά οι ανιχνευτές πρέπει να βρίσκονται σε μεγάλο βάθος προκειμένου να υπάρχει καλή θωράκιση από την κοσμική ακτινοβολία. Από τις παραπάνω διασπάσεις μπορούμε να εκτιμήσουμε τους ακόλουθους λόγους ροών

$$\frac{\phi_{\nu_\mu} + \phi_{\bar{\nu}_\mu}}{\phi_{\nu_e} + \phi_{\bar{\nu}_e}} \simeq 2, \quad \frac{\phi_{\nu_\mu}}{\phi_{\bar{\nu}_\mu}} \simeq 1, \quad \frac{\phi_{\nu_e}}{\phi_{\bar{\nu}_e}} \simeq \frac{\phi_{\mu^+}}{\phi_{\mu^-}} \quad (4.69)$$

για ενέργειες μεγαλύτερες από 1 GeV αναμένεται να φτάνουν στο έδαφος περισσότερο μίονια χωρίς να προλάβουν να διασπαστούν οπότε ο λόγος ροών $\frac{\phi_{\nu_\mu} + \phi_{\bar{\nu}_\mu}}{\phi_{\nu_e} + \phi_{\bar{\nu}_e}}$ να αυξάνεται.

Η ροή των κοσμικών νετρίνων μπορεί να προσομοιωθεί μέσω προσομοιώσεων Monte Carlo για μονοδιάστατα και τρισδιάστατα μοντέλα. Στα μονοδιάστατα μοντέλα κάθε δευτερογενές σωματίδιο έχει την ίδια διεύθυνση με το πρωτογενές που το παρήγαγε. Μέσω των προσομοιώσεων μπορούμε να κατασκευάσουμε τον λόγο

$$R_{\mu/e} = \frac{\left(\frac{N_\mu}{N_e}\right)_{data}}{\left(\frac{N_\mu}{N_e}\right)_{MC}}, \quad (4.70)$$

όπου N_μ και N_e είναι τα γεγονότα που σχετίζονται με ηλεκτρόνια με τα γεγονότα που σχετίζονται με μίονια.

Η παραγωγή νετρίνων στην ατμόσφαιρα είναι ομογενής, οπότε χωρίς ταλαντώσεις νετρίνων αναμένουμε η ροή των νετρίνων που κατεβαίνουν (και έχουν παραχθεί στην ατμόσφαιρα πάνω από τον ανιχνευτή) και η ροή των ανερχόμενων νετρίνων, (τα οποία έχουν παραχθεί στην ατμόσφαιρα και εν συνεχεία διέσχισαν όλη την γη για να φτάσουν τον ανιχνευτή) να είναι ίδια. Για να ποσοτικοποιήσουμε την απόκλιση από το αναμενόμενο ορίζουμε την ασυμμετρία

$$A_\alpha^{up-down} = \left(\frac{U - D}{U + D}\right)_\alpha \quad (4.71)$$

και τον λόγο

$$R_\alpha^{up-down} = \left(\frac{U}{D}\right)_\alpha. \quad (4.72)$$

Τα πειράματα ατμοσφαιρικών νετρίνων ανιχνεύουν νετρίνα μέσω των σχεδιάσεων

$$\nu_\alpha + N \rightarrow \ell^- + X, \quad \bar{\nu}_\alpha + N \rightarrow \ell^+ + X. \quad (4.73)$$

Στα πειράματα που έχουν διεξαχθεί οι δύο αυτές αντιδράσεις είναι ισοδύναμες καθώς δεν εφαρμόζεται μαγνητικό πεδίο προκειμένου να μετρηθεί το φορτίο των σωματιδίων. Επίσης πρέπει να επισημανθεί ότι η ανίχνευση των νετρίνων του τ είναι ιδιαίτερα δύσκολη καθώς το τ διασπάται σχεδόν αμέσως και η ανίχνευσή του από τα προϊόντα της διάσπασης του είναι ιδιαίτερα δύσκολη.

Τα γεγονότα που καταγράφονται χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες. Υπάρχουν τα συμπεριλαμβανόμενα γεγονότα, στα οποία το νεutrino αλληλεπιδρά στο εσωτερικό του ανιχνευτή και οι τροχιές όλων των σωματιδίων καταγράφονται από τον ανιχνευτή. Υπάρχουν τα γεγονότα πέδησης μιονίων, όπου τα μίονια εισέρχονται στον ανιχνευτή και σταματούν εκεί. Η τελευταία κατηγορία γεγονότων είναι τα διερχόμενα μίονια. Αυτά είναι γεγονότα όπου τα μίονια απλά διέρχονται από τον ανιχνευτή χωρίς να σταματήσουν.

Ειδικά για τα πειράματα Kamiokande και Super-Kamiokande, επειδή υπάρχουν δυο ανιχνευτές, ένας εσωτερικός και ένας εξωτερικός, ορίζονται τα πλήρως συμπεριλαμβανόμενα γεγονότα και τα μερικώς συμπεριλαμβανόμενα γεγονότα. Στην πρώτη περίπτωση τα γεγονότα καταγράφονται εξ ολοκλήρου από τον εσωτερικό ανιχνευτή, ενώ στην δεύτερη περίπτωση το νεutrino αλληλεπιδρά στον εσωτερικό ανιχνευτή, αλλά κάποια από τα παραγόμενα σωματίδια καταγράφονται στον εξωτερικό ανιχνευτή.

Πάλι για τα πειράματα Kamiokande και Super-Kamiokande, ιστορικά, έχει επικρατήσει να διαχωρίζονται τα γεγονότα σε *Sub-GeV* με συνολική απελευθερωθείσα ενέργεια $E < 1.33 \text{ GeV}$ και *Multi-GeV* με συνολική απελευθερωθείσα ενέργεια $E > 1.33 \text{ GeV}$.

Το πείραμα Kamiokande κατάφερε να ανιχνεύσει του ακόλουθους λόγους ασυμμετρίας

$$R_{\mu/e}^{\text{sub-GeV}} = 0.60_{-0.06}^{+0.07} \pm 0.05, \quad (4.74)$$

$$R_{\mu/e}^{\text{multi-GeV}} = 0.57_{-0.07}^{+0.08} \pm 0.07. \quad (4.75)$$

Οι αποκλίσεις αυτές εξηγούνται στα πλαίσια της εξαφάνισης νετρίνων του μιονίου λόγω ταλαντώσεων. Ωστόσο το πείραμα δεν ήταν σε θέση να ξεχωρίσει τις ταλαντώσεις ανάμεσα σε $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ και $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$. Αργότερα το πείραμα CHOOZ κατάφερε να αποκλείσει τις ταλαντώσεις $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$.

Το πείραμα IMB έλαβε χώρα στο ορυχείο άλατος Morton Thiokol από το 1982 ως το 1991 με θωράχιση 1570 ισοδύναμων μέτρων νερού. Το πείραμα ανίχνευσε απόκλιση μόνο στα γεγονότα με ενέργεια μικρότερη από 1.5 GeV . Στα ανερχόμενο μίονια και στα μερικώς συμπεριλαμβανόμενα γεγονότα με ενέργειες μεγαλύτερη από 0.95 GeV δεν παρατηρήθηκε απόκλιση. Η απόκλιση

Πίνακας 6: Οι λόγοι ασυμμετρίας των ανερχόμενων και κατερχόμενων νετρίνων για τις διάφορες ενεργειακές περιοχές. (Με p συμβολίζεται η ορμή των φορτισμένων λεπτονίων που παράγονται και με $P.C.$ τα μερικώς συμπεριλαμβανόμενα γεγονότα.)

Γεύση	$sub - GeV$ ($p < 400 MeV$)	$sub - GeV$ ($p > 400 MeV$)	multi-GeV + P.C.
e	$1.133^{+0.062}_{-0.059} \pm 0.009$	$1.082^{+0.063}_{-0.060} \pm 0.024$	$0.961^{+0.086}_{-0.079} \pm 0.016$
μ	$0.964^{+0.062}_{-0.058} \pm 0.008$	$0.670^{+0.035}_{-0.034} \pm 0.012$	$0.551^{+0.035}_{-0.033} \pm 0.004$

που βρέθηκε ήταν

$$R_{\mu/e}^{sub-GeV} = 0.54 \pm 0.05 \pm 0.11, \quad (4.76)$$

σε συμφωνία με το αποτέλεσμα του Kamiokande.

Το πείραμα Super - Kamiokande στο τέλος της πρώτης φάσης του μέτρησε τους λόγους ασυμμετρίας της σχέσης (4.72) για νετρίνα του μιονίου και νετρίνα του ηλεκτρονίου σε διάφορες ενεργειακές περιοχές. Τα αποτελέσματα βρίσκονται στον πίνακα 6. Οι λόγοι της σχέσης (4.70) που μετρήθηκαν για τις δύο ενεργειακές περιοχές εξίσου απέχουν από την μονάδα

$$R_{\mu/e}^{sub-GeV} = 0.658 \pm 0.016 \pm 0.035, \quad (4.77)$$

$$R_{\mu/e}^{multi-GeV+P.C} = 0.702^{+0.032}_{-0.030} \pm 0.101. \quad (4.78)$$

Οι τιμές αυτές είναι σε συμφωνία με τα αποτελέσματα των πειραμάτων Kamiokande και IMB. Επίσης μετρήθηκε ο λόγος (V/H) των κατακόρυφων και οριζόντιων διερχόμενων μιονίων, όπου κατακόρυφα θεωρούνται τα γεγονότα με $0.5 < \cos \theta_z < 1$ και οριζόντια τα γεγονότα με $0 < \cos \theta_z < 0.5$:

$$\left(\frac{V}{H}\right)_{data} = 0.497 \pm 0.022 \pm 0.003 \quad \left(\frac{V}{H}\right)_{MC} = 0.586 \pm 0.018 \quad (4.79)$$

Το αποτέλεσμα διαφέρει από την θεωρητική πρόβλεψη σε ευρός 3σ . Ακόμα μετρήθηκε ο λόγος σταματημένων και διερχόμενων μιονίων

$$R_{stop/through}^{data} = 0.229 \pm 0.015 \pm 0.003 \quad R_{stop/through}^{MC} = 0.430 \pm 0.065 \quad (4.80)$$

Το αποτέλεσμα διαφέρει από την θεωρητική πρόβλεψη σε ευρός μεγαλύτερο από 3σ .

Συνολικά το Super - Kamiokande μέτρησε 1.5×10^4 ατμοσφαιρικά νετρίνα και είναι η κύρια πηγή των γνώσεων που έχουμε σχετικά με τις ταλαντώσεις των ατμοσφαιρικών νετρίνων. Η καλύτερη προσαρμογή στις ταλαντώσεις $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ επιτυγχάνεται για

$$\sin^2 2\theta = 1.00 \quad \Delta m^2 = 2.1 \times 10^{-3} \text{ eV}^2 \quad (4.81)$$

ενώ σε επίπεδο εμπιστοσύνης 90% :

$$\sin^2 2\theta > 0.92 \quad 1.5 \times 10^{-3} < \Delta m^2 < 3.4 \times 10^{-3} \text{ eV}^2 \quad (4.82)$$

Το πείραμα Sudan 2 έλαβε χώρα στο ορυχείο Sudan 2 από το 1989 ως το 2001 με θωράκιση 2070 ισοδύναμων μέτρων νερού και μέτρησε τον λόγο

$$R_{\mu/e}^{sub-GeV} = 0.69 \pm 0.010 \pm 0.06, \quad (4.83)$$

ο οποίος βρίσκεται σε συμφωνία με τα πειράματα Kamiokande, IMB και Super - Kamiokande. Επειδή οι επιτρεπόμενες περιοχές του πειράματος Sudan 2 εμπεριέχουν τις επιτρεπόμενες περιοχές του Super - Kamiokande (λόγο πολύ χαμηλότερης στατιστικής) το πείραμα Sudan 2 θεωρείται απλά μια επιβεβαίωση του Super - Kamiokande

Το πείραμα MACRO έλαβε χώρα στο Gran Sasso από το 1989 ως το 1995 με τμήμα του εξοπλισμού του και από το 1995 ως το 2000 με πλήρη εξοπλισμό. Εκτός των άλλων μέτρησε τον λόγο

$$\left(\frac{N_{low}}{N_{high}} \right)_{data} = 0.85 \pm 0.16 \quad \left(\frac{N_{low}}{N_{high}} \right)_{MC} = 1.50 \pm 0.25, \quad (4.84)$$

όπου N_{low} και N_{high} είναι τα γεγονότα με ενέργεια μικρότερη από 30 GeV και μεγαλύτερη από 130 GeV αντίστοιχα.

Τα αποτελέσματα των πειραμάτων ατμοσφαιρικών νετρίνων σε συνδυασμό με τα LBL πειράματα έδωσαν ένα πλήρες πλαίσιο για τις ταλαντώσεις ατμοσφαιρικών νετρίνων. Όπως θα δούμε τα πειράματα LBL αν και δεν ανίχνευσαν ταλαντώσεις κατάφεραν να θέσουν όρια τα οποία απέκλιναν την ερμηνεία των ταλαντώσεων των ατμοσφαιρικών νετρίνων ως ταλαντώσεις μεταξύ ν_e και ν_μ .

4.5 Επίγεια Πειράματα

Τα επίγεια πειράματα χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, τα πειράματα αντιδραστήρων και τα πειράματα επιταχυντών.

4.5.1 Πειράματα Αντιδραστήρων

Στα πειράματα αντιδραστήρων τα νετρίνα παράγονται από τις β -διασπάσεις των πυρηνικών καυσίμων. Για κάθε GW θερμικής ισχύος του αντιδραστήρα παράγονται περίπου 2×10^{20} αντινετρίνα. Ωστόσο επειδή τα νετρίνα διαδίδονται ισότροπα η ροή τους ανά μονάδα επιφανείας μειώνεται αντιστρόφως ανάλογα του τετραγώνου της απόστασης. Έτσι υπάρχουν περιορισμοί στην μέγιστη απόσταση αντιδραστήρα - ανιχνευτή προκειμένου να έχουμε καλή στατιστική, αλλά και να έχουμε τον επιθυμητό λόγο L/E . Τα αντινετρίνα έχουν ενέργεια της τάξης του MeV οπότε μπορούμε να ανιχνεύσουμε μόνο την εξαφάνιση των $\bar{\nu}_e$, αφού η δημιουργία μ και τ δεν επιτρέπεται ενεργειακά. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην μπορούν να μετρηθούν με ακρίβεια μικρές γωνίες μίξης.

Η ανίχνευση των αντινετρίνων $\bar{\nu}_e$ γίνεται μέσω της αντίστροφης β -διάσπασης του νετρονίου

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+ \quad E_{th} = 1.806 \text{ MeV}. \quad (4.85)$$

Μόνο το 25% των αντινετρίνων που φτάνουν στον ανιχνευτή έχει ενέργεια μεγαλύτερη από την ενέργεια κατωφλίου, οπότε μπορεί να ανιχνευτεί.

Έχουν γίνει αρκετά πειράματα *SBL* με απόστασή $10 - 100 \text{ m}$ εκ των οποίων κανένα δεν κατάφερε να ανιχνεύσει ταλαντώσεις. Μπόρεσαν όμως να σχεδιαστούν καμπύλες αποκλεισμένων περιοχών.

Μόνο δύο πειράματα *LBL* έχουν γίνει με απόσταση $\sim 1 \text{ km}$. Το Palo Verde και CHOOZ. Το CHOOZ δεχόταν την ροή αντινετρίνων δύο αντιδραστήρων συνολικής θερμικής ισχύος 8.5 GW με αποστάσεις 1115 m και 998 m . Με μετρήσεις από τον Απρίλιο του 1997 ως τον Ιούλιο του 1998 ο λόγος των ανιχνευόμενων προς τα αναμενόμενα αντινετρίνων ήταν

$$R = 1.01 \pm 0.028 \pm 0.027 \quad (4.86)$$

Η τιμή υποδεικνύει ότι δεν παρατηρούνται ταλαντώσεις, οπότε οδηγηθήκαμε στο όριο

$$\sin^2 2\theta \leq 0.1 \quad \Delta m^2 \geq 2 \times 10^{-3} \text{ eV} \quad (4.87)$$

$$\Delta m^2 \leq 7 \times 10^{-4} \text{ eV} \quad \sin^2 2\theta = 1 \quad (4.88)$$

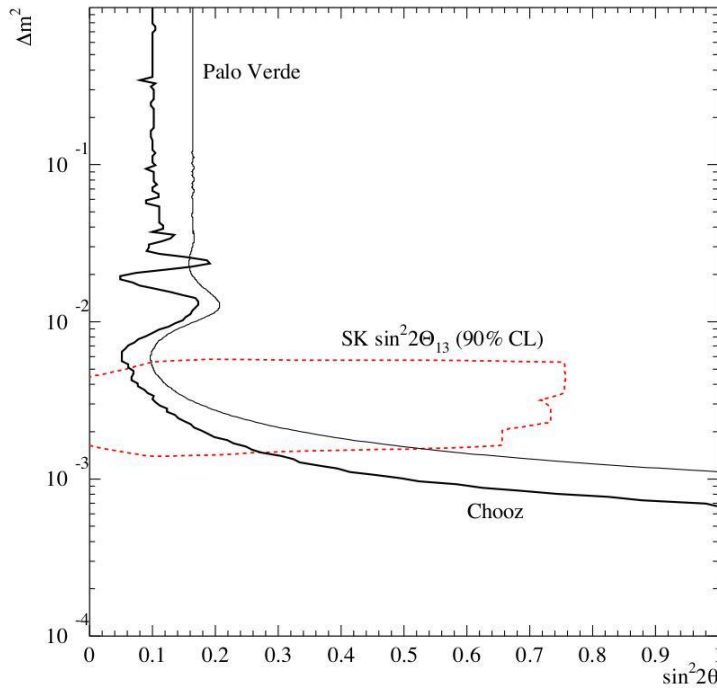
Επίσης αποκλείστηκε η ερμηνεία των ατμοσφαιρικών ταλαντώσεων ως ταλαντώσεις $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$.

Το πείραμα Palo Verde δεχόταν την ροή τριών αντιδραστήρων συνολικής θερμικής ισχύος 11.6 GW με απόσταση 890 m από τους δύο πρώτους και

750 m από τον τρίτο. Το πείραμα λάμβανε δεδομένα από τον Οκτώβριο του 1998 ως τον Ιούλιο του 2000 και μέτρησε τον λόγο

$$R = 1.01 \pm 0.024 \pm 0.054 \quad (4.89)$$

οπότε επιβεβαίωσε το πείραμα CHOOZ. Στο σχήμα 9 φαίνονται οι αποκλισμένες περιοχές των πειραμάτων Palo Verde και CHOOZ.



Σχήμα 9: Οι αποκλισμένες περιοχές των πειραμάτων Palo Verde και CHOOZ και οι περιοχή ταλαντώσεων του SuperKamiokande

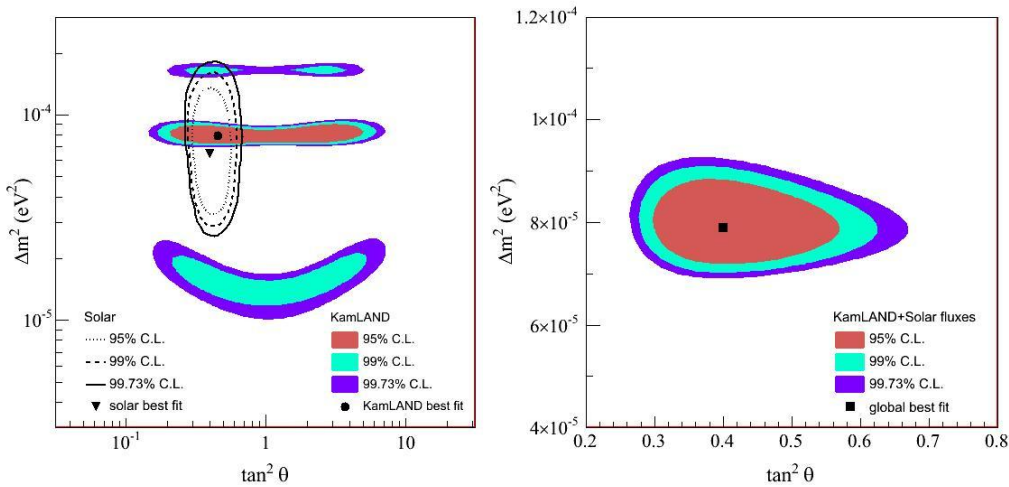
Το μοναδικό πείραμα *VLBL* που έχει λάβει χώρα είναι το KamLAND. Το KamLAND δέχεται αντινετρίνα από 53 αντιδραστήρες με το 80% της ροής να προέρχεται από αντιδραστήρες που βρίσκονται σε απόσταση από 140 ως 215 km με μέση απόσταση 180 km . Το κατώφλι του πειράματος λόγω της ύπαρξης υποβάθρου είναι 2.6 MeV . Η μεγάλη απόσταση επιτρέπει την παρατήρηση ταλαντώσεων εξαιτίας του Δm_{21}^2 . Το πείραμα έλαβε μετρήσεις από τον Μάρτιο του 2002 ως τον Ιανουάριο του 2004 και μέτρησε τον λόγο

$$R = 0.658 \pm 0.044 \pm 0.047 \quad (4.90)$$

ο οποίος απέχει από την μονάδα περισσότερο από 5σ . Η απόκλιση ερμηνεύεται ως ταλάντωση δύο νετρίνων η οποία σε συνδυασμό με τα ηλιακά πειράματα δίνει

$$\Delta m^2 = 7.9_{-0.5}^{+0.6} \times 10^{-5} \text{ eV}^2 \quad \tan^2 \theta = 0.40_{-0.07}^{+0.10} \quad (4.91)$$

Στο σχήμα 10 υπάρχει το διάγραμμα $\Delta m^2 \tan^2 \theta$



Σχήμα 10: Τα αποτελέσματα του πειράματος KamLAND και ο συνδυασμός τους με τα αποτελέσματα των ηλιακών πειραμάτων.

4.5.2 Πειράματα Επιταχυντών

Εκτός από την διάκριση των πειραμάτων ανάλογα με τον τρόπο παραγωγής της δέσμης τα πειράματα στα οποία τα νετρίνα προέρχονται από διασπάσεις πιονίων χωρίζονται και στις ακόλουθες κατηγορίες

Δέσμες Μεγάλου Εύρους Αυτές οι δέσμες έχουν πολύ μεγάλη ένταση, αλλά η ενέργεια τους έχει μεγάλο εύρος το οποίο μπορεί να διαφέρει και δύο τάξεις μεγέθους. Τέτοιου είδους δέσμες χρησιμοποιούνται για την ανίχνευση νέων ταλαντώσεων καθώς μπορούν να δώσουν ταλαντώσεις για μεγάλο εύρος Δm^2 .

Δέσμες Μικρού Εύρους Οι δέσμες έχουν πολύ μικρό ενεργειακό εύρος επειδή επιλέγονται πιόνια και καόνια συγκεκριμένης ορμής για να παρασκευαστούν. Για την ίδια αρχική δέσμη πρωτονίων η ένταση αυτών των δεσμών είναι μικρότερη από την ένταση των δεσμών μεγάλου εύρους, ωστόσο οι μετρήσεις με αυτές τις δέσμες έχουν πολύ μεγάλη ακρίβεια.

Δέσμες Εκτός Άξονα Οι δέσμες αυτές παράγονται από δέσμες μεγάλου εύρους αν τοποθετήσουμε τον ανιχνευτή εκτός του άξονα. Η ενέργεια των νετρίνων είναι σχεδόν μονοχρωματική.

Έχουν γίνει αρκετά πειράματα *SBL* τα οποία δεν ανίχνευσαν ταλαντώσεις, με εξαίρεση τον ισχυρισμό του *LSND* και μια ανωμαλία που έχει παρατηρηθεί στις μετρήσεις του *MiniBooNe*. Το μοναδικό *LBL* πείραμα που έχει λάβει χώρα είναι το *K2K*. Στο *K2K* χρησιμοποιείται δέσμη μεγάλου εύρους με μέση ενέργεια 1.3 MeV , ενώ η απόσταση είναι 250 km . Συνολικά ανιχνεύθηκαν 107 γεγονότα από τα 151_{-10}^{+12} αναμενόμενα. Η ανάλυση έδωσε

$$\sin^2 2\theta = 1.0 \quad \Delta m^2 = 2.8 \times 10^{-3} \text{ eV} \quad (4.92)$$

Το αποτέλεσμα είναι σε συμφωνία με τα ατμοσφαιρικά πειράματα, οπότε το *K2K* θεωρείται επιβεβαίωσή τους. Το πείραμα επίσης αναζήτησε μετατροπές $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ χωρίς επιτυχία και κατέληξε ότι

$$\sin^2 2\theta_{\mu e} < 0.13 \text{ (90\%C.L.)} \quad \Delta m^2 = 2.8 \times 10^{-3} \text{ eV} \quad (4.93)$$

4.6 Συνολική Ανάλυση

Μέχρι στιγμής η ανάλυση των πειραματικών αποτελεσμάτων έχει γίνει με βάση ταλαντώσεις δύο νετρίνων. Η ανάλυση αυτή έχει οδηγήσει στην ύπαρξη δυο διαφορών μαζών Δm^2 . Οι δύο αυτές κλίμακες που έχουν προκύψει δεν επηρεάζονται αν η ανάλυση γίνει για 3 νετρίνα. Παρόλο που υπάρχουν τρεις διαφορές μαζών, μόνο οι δύο είναι γραμμικά ανεξάρτητες αφού

$$\Delta m_{32} + \Delta m_{21} - \Delta m_{31} = 0 \quad (4.94)$$

Η παρατηρούμενη ιεραρχία μαζών είναι

$$\Delta m_{SOL}^2 \ll \Delta m_{ATM}^2, \quad (4.95)$$

όπου $\Delta m_{SOL}^2 = \Delta m_{21}^2$ και $\Delta m_{ATM}^2 = |\Delta m_{31}^2| \simeq |\Delta m_{32}^2|$. Από τη άλλη οι πληροφορίες για την μίξη δυνητικά θα μπορούσαν αλλάζουν δραματικά αλλά

αυτό ευτυχώς δεν συμβαίνει. Τα πειράματα ηλιακών νετρίνων παρατηρούν την εξαφάνιση νετρίνων ν_e οπότε η πιθανότητα εξαρτάται μόνο από τα στοιχεία U_{ei} της πρώτης γραμμής του πίνακα μίξης. Στην περίπτωση των ατμοσφαιρικών νετρίνων η πιθανότητα εξαρτάται μόνο από της γωνίες μίξης θ_{23} και θ_{13} , οι οποίες καθορίζονται μονοσήμαντα από τα στοιχεία της τρίτης στήλης του πίνακα μίξης ως εξής

$$\sin \theta_{23} = \frac{|U_{\mu 3}|}{\sqrt{1 - |U_{e3}|^2}} \quad \sin \theta_{13} = |U_{e3}| \quad (4.96)$$

Το μοναδικό κοινό στοιχείο στις δύο περιπτώσεις είναι το $|U_{e3}|$.

4.6.1 Δύο Είδη Ταλαντώσεων

Στην περίπτωση ατμοσφαιρικών πειραμάτων ή *LBL* έχουμε

$$\frac{\Delta m_{31}^2}{2} \left\langle \frac{L}{E} \right\rangle \sim \pi \quad (4.97)$$

οπότε επικρατεί μόνο αυτή η μεγάλη διαφορά μαζών και οι ταλαντώσεις που οφείλονται στην διαφορά μαζών Δm_{21}^2 συμβάλλουν μόνο κατά μέση τιμή. Η ενεργός ταλάντωση δύο νετρίνων που προκύπτει δίνεται από τις σχέσεις

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}^{eff}(L, E) = \sin^2 2\theta_{\alpha\beta}^{eff} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right), \quad \alpha \neq \beta \quad (4.98)$$

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}^{eff}(L, E) = 1 - \sin^2 2\theta_{\alpha\alpha}^{eff} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \quad (4.99)$$

με τις ενεργές γωνίες μίξης να δίνονται από τις σχέσεις

$$\sin^2 2\theta_{\alpha\beta}^{eff} = 4|U_{\alpha 3}|^2 |U_{\beta 3}|^2, \quad \alpha \neq \beta \quad (4.100)$$

$$\sin^2 2\theta_{\alpha\alpha}^{eff} = 4|U_{\alpha 3}|^2 (1 - |U_{\alpha 3}|^2) \quad (4.101)$$

Τα συμπεράσματα είναι πολύτιμα. Όλες οι ταλαντώσεις είναι δυνατές και έχουν το ίδιο μήκος ταλάντωσης

$$L^{osc} = \frac{4\pi}{\Delta m_{31}^2}. \quad (4.102)$$

Οι πιθανότητες δεν εξαρτώνται από τις φάσεις του πίνακα μίξης άρα δεν μπορούν να μετρηθούν παραβιάσεις των συμμετριών CP και T με αυτό τον τρόπο. Οι ταλαντώσεις εξαρτώνται μόνο από τρεις παραμέτρους Δm_{31}^2 , $|U_{e3}|$ και $|U_{\mu 3}|$. Η σχέση των στοιχείων του πίνακα μίξης με τις γωνίες μίξης είναι $|U_{e3}| = \sin^2 \theta_{13}$ και $|U_{\mu 3}| = \cos^2 \theta_{13} \sin^2 \theta_{23}$. Το πλέον σημαντικό είναι όμως ότι η μεμονωμένη ανάλυση δύο νετρίνων κάθε πειράματος ερμηνεύεται απευθείας με βάση την ανωτέρω ανάλυση. Η διαφορά μαζών είναι η ίδια και η γωνία μίξης της ανάλυσης δύο νετρίνων ταυτίζεται με την ενεργό γωνία της ανάλυσης των τριών νετρίνων.

Στην περίπτωση των ηλιακών πειραμάτων ή των $VLBL$ έχουμε

$$\frac{\Delta m_{21}^2}{2} \left\langle \frac{L}{E} \right\rangle \sim \pi, \quad (4.103)$$

οπότε υπερिσχύουν οι ταλαντώσεις που οφείλονται στην μικρή διαφορά μαζών, ενώ οι ταλαντώσεις που οφείλονται στην μεγάλη διαφορά μαζών Δm_{31}^2 θεωρούνται αμελητέες. Στα πειράματα αυτά συνήθως μετράται η πιθανότητα επιβίωσης, αφού σπάνια διακρίνονται ν_μ και ν_τ κατά την ανίχνευση, οπότε η πιθανότητα μετατροπής ουσιαστικά δίνεται από την σχέση $P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} + P_{\nu_e \rightarrow \nu_\tau} = 1 - P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}$. Η πιθανότητα επιβίωσης δίνεται από την σχέση

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}^{eff}(L, E) = (1 - |U_{\alpha 3}|^2)^2 P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}^{(1,2)}(L, E) + |U_{\alpha 3}|^2, \quad (4.104)$$

όπου η ενεργός πιθανότητα επιβίωσης για ταλαντώσεις δυο νετρίνων δίνεται από την σχέση

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}^{(1,2)}(L, E) = 1 - \sin^2 2\theta_{\alpha\alpha}^{eff} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right), \quad (4.105)$$

και η ενεργός γωνία μίξης δίνεται από την σχέση

$$\sin^2 2\theta_{\alpha\alpha}^{eff} = 4 \frac{|U_{\alpha 1}|^2 |U_{\alpha 2}|^2}{(|U_{\alpha 1}|^2 + |U_{\alpha 2}|^2)^2} \quad (4.106)$$

4.6.2 Μίξη δυο μεγάλων Γωνιών

Μίξη δύο μεγάλων γωνιών έχουμε όταν ένα στοιχείο του πίνακα μίξης είναι μηδενικό ή πολύ μικρότερο από τα υπόλοιπα. Στην περίπτωση αυτή με κατάλληλους μετασχηματισμούς μπορούμε να εκφράσουμε τον πίνακα μίξης συναρτήσει

δύο μόνο γωνιών μίξης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ο πίνακας να γίνεται πραγματικός, το αναλλοίωτο Jarlskog να μηδενίζεται και να μην υπάρχει παραβίαση της συμμετρίας CP . Η πιθανότητα ταλάντωσης γίνεται

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i>j} U_{\alpha i} U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E} \right) \quad (4.107)$$

Για ευκολία προκειμένου να αποφύγουμε τους μετασχηματισμούς, ας θεωρήσουμε ότι $U_{e3} = 0$, περίπτωση που ούτως ή άλλως είναι ρεαλιστική. Το τμήμα Dirac του πίνακα μίξης είναι

$$U^D = \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12}c_{23} & c_{12}c_{23} & s_{23} \\ s_{12}s_{23} & -c_{12}s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \quad (4.108)$$

Το νεutrino ν_e αποτελείται μόνο από ν_1 και ν_2 , οπότε η πιθανότητα ταλάντωσης του δίνεται από την σχέση

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \delta_{e\beta} + (1 - \delta_{e\beta}) \sin^2 2\theta_{e\beta}^{eff} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{12}^2 L}{4E} \right), \quad (4.109)$$

όπου η ενεργός γωνία μίξης δίνεται από τις σχέσεις

$$\theta_{ee}^{eff} = \theta_{12} \quad \sin^2 2\theta_{e\mu}^{eff} = \sin^2 2\theta_{12} c_{23}^2 \quad \sin^2 2\theta_{e\tau}^{eff} = \sin^2 2\theta_{12} s_{23}^2. \quad (4.110)$$

Οι πιθανότητες επιβίωσης των νεutrίνων ν_μ και ν_τ είναι

$$P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}(L, E) = 1 - \sin^2 2\theta_{23} \left[s_{12}^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) + c_{12}^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E} \right) \right] - \sin^2 2\theta_{12} c_{23}^4 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right), \quad (4.111)$$

$$P_{\nu_\tau \rightarrow \nu_\tau}(L, E) = 1 - \sin^2 2\theta_{23} \left[s_{12}^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) + c_{12}^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E} \right) \right] - \sin^2 2\theta_{12} s_{23}^4 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right), \quad (4.112)$$

ενώ οι πιθανότητα μετατροπής $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ είναι

$$P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}(L, E) = \sin^2 2\theta_{23} \left[s_{12}^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) + c_{12}^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E} \right) \right] - \frac{1}{4} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \quad (4.113)$$

Από τις σχέσεις αυτές βλέπουμε ότι για πειράματα στα οποία η αρχική δέσμη είναι νετρίνα ν_e η ανάλυση μπορεί να γίνει μέσω ενεργής ταλάντωσης δύο νετρίνων, ωστόσο παίρνουμε πληροφορίες μόνο για τα Δm_{21}^2 και θ_{12} . Ταλαντώσεις οι οποίες δεν σχετίζονται με νετρίνα ν_e μπορούν να δώσουν πληροφορίες για όλες τις παραμέτρους, τις τρεις διαφορές μαζών Δm_{21}^2 , Δm_{31}^2 και Δm_{32}^2 και τις δύο γωνίες μίξης θ_{12} και θ_{23} , αλλά η ανάλυση γίνεται μέσω πολύ πιο πολύπλοκων σχέσεων.

Αφού ξέρουμε ότι $\Delta m_{31}^2 \simeq \Delta m_{32}^2$ μπορούμε να απλοποιήσουμε αρκετά της παραπάνω σχέσεις. Έτσι έχουμε

$$P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}(L, E) \simeq 1 - \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) - \sin^2 2\theta_{12} c_{23}^4 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right), \quad (4.114)$$

$$P_{\nu_\tau \rightarrow \nu_\tau}(L, E) \simeq 1 - \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) - \sin^2 2\theta_{12} s_{23}^4 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right), \quad (4.115)$$

$$P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}(L, E) \simeq \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) - \frac{1}{4} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \quad (4.116)$$

Στην περίπτωση ταλαντώσεων που οφείλονται στην διαφορά μαζών Δm_{31}^2 οι ταλαντώσεις εξαιτίας της διαφοράς μαζών Δm_{21}^2 είναι αμελητέες οπότε οι σχέσεις απλοποιούνται ακόμα περισσότερο, οπότε καταλήγουμε

$$P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}(L, E) = 1 - \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right), \quad (4.117)$$

$$P_{\nu_\tau \rightarrow \nu_\tau}(L, E) = 1 - \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right), \quad (4.118)$$

$$P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}(L, E) = \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) - \frac{1}{4} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \quad (4.119)$$

Στην περίπτωση ταλαντώσεων οφείλονται στην διαφορά μαζών Δm_{21}^2 οι ταλαντώσεις εξαιτίας της διαφοράς μαζών Δm_{31}^2 συμβάλουν μόνο κατά μέση τιμή έτσι έχουμε

$$P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}(L, E) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta_{23} - \sin^2 2\theta_{12} c_{23}^4 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right), \quad (4.120)$$

$$P_{\nu_\tau \rightarrow \nu_\tau}(L, E) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta_{23} - \sin^2 2\theta_{12} s_{23}^4 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right), \quad (4.121)$$

$$P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}(L, E) = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta_{23} - \frac{1}{4} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right). \quad (4.122)$$

Αν η γωνία μίξης θ_{23} δεν θεωρηθεί γνωστή από τα πειράματα με ευαισθησία στο Δm_{31}^2 η ανάλυση γίνεται για τον προσδιορισμό και των τριών παραμέτρων.

4.6.3 Όρια στο $|U_{e3}|$

Όπως είδαμε στα πειράματα ταλαντώσεων που μετρούν την πιθανότητα επιβίωσης με ταλαντώσεις που προκύπτουν από την διαφορά μαζών Δm_{31}^2 η ενεργός γωνία μίξης εξαρτάται μόνο από το στοιχείο το πίνακα μίξης $|U_{\alpha 3}|$. Στα πειράματα *LBL* *CHOOZ* και *Palo Verde* μετρήθηκε η πιθανότητα επιβίωσης αντινετρίνων ν_e με την ενεργό γωνία μίξης να δίνεται από την σχέση

$$\sin^2 2\theta_{ee}^{eff} = 4|U_{\alpha 3}|^2 (1 - |U_{e3}|^2) = \sin^2 2\theta_{13}. \quad (4.123)$$

Τα πειράματα δεν ανίχνευσαν ταλαντώσεις αλλά έθεσαν ένα άνω όριο $(\sin^2 2\theta_{13})_{max}$. Από την σχέση (4.123) έχουμε

$$|U_{e3}|^2 = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \sin^2 2\theta_{13}} \right), \quad (4.124)$$

η λύση με το πρόσημο + απορρίπτεται αφού μια τιμή του $|U_{e3}|^2$ κοντά στην μονάδα δεν θα μπορούσε να ερμηνεύει τις ταλαντώσεις. Το όριο που αποκτούμε είναι

$$|U_{e3}|^2 \leq \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - (\sin^2 2\theta_{13})_{max}} \right). \quad (4.125)$$

Η ανάλυση των παραπάνω πειραμάτων μαζί με τα δεδομένα του Super Kamio-
kande για ατμοσφαιρικές ταλαντώσεις δίνει

$$|U_{e3}|^2 < 5 \times 10^{-5} \quad 99.73\% \text{ CL} \quad (4.126)$$

Τα δεδομένα του Super Kamio-
kande δεν θέτουν τόσο αυστηρά όρια στην
γωνία μίξης, αλλά περιορίζουν την διαφορά μάζας Δm_{13}^2 σε ένα μικρό εύρος
οπότε σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα του CHOOZ και Palo Verde έχουμε
τόσο μεγάλη ακρίβεια. Η απουσία ταλαντώσεων $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ στα πειράματα *LBL*
θέτει ένα όριο

$$|U_{e3}|^2 < 7 \times 10^{-5} \quad 90\% \text{ CL} \quad @ \Delta m^2 = 2.8 \times 10^{-3} \text{ eV}^2. \quad (4.127)$$

Τέλος τα ηλιακά πειράματα και το KamLAND θέτουν και αυτά όριο στο $|U_{e3}|$,
το οποίο δεν είναι τόσο αυστηρό.

4.6.4 Ανάλυση μεσω Μίξης δυο μεγάλων Γωνιών

Από τα όριο που υπάρχουν για το $|U_{e3}|$ σε μια πρώτη προσέγγιση η α-
νάλυση των πειραματικών δεδομένων μπορεί να γίνει θεωρώντας $|U_{e3}| = 0$.
Στην περίπτωση αυτή οι ταλαντώσεις των ηλιακών και ατμοσφαιρικών νετρί-
νων απεμπλέκονται και μπορούμε να θεωρήσουμε ταλαντώσεις δυό νετρίνων.
Συμβολίζοντας

$$\theta_{SOL} = \theta_{12} \quad \theta_{ATM} = \theta_{23} \quad (4.128)$$

ο πίνακας μίξης γίνεται

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta_{SOL} & \sin \theta_{SOL} & 0 \\ -\sin \theta_{SOL} \cos \theta_{ATM} & \cos \theta_{SOL} \cos \theta_{ATM} & \sin \theta_{ATM} \\ \sin \theta_{SOL} \sin \theta_{ATM} & -\cos \theta_{SOL} \sin \theta_{ATM} & \cos \theta_{ATM} \end{pmatrix} \quad (4.129)$$

Τα νετρίνα ν_e είναι η υπέρθεση

$$\nu_e = \cos \theta_{SOL} \nu_1 + \sin \theta_{SOL} \nu_2. \quad (4.130)$$

Τα ηλιακά νετρίνα ν_e μεταβαίνουν στην ορθογώνια κατάσταση

$$\begin{aligned} \nu_{SOL} &= -\sin \theta_{SOL} \nu_1 + \cos \theta_{SOL} \nu_2 \\ &= \cos \theta_{ATM} \nu_\mu - \sin \theta_{ATM} \nu_\tau \end{aligned} \quad (4.131)$$

Η κατάσταση είναι γραμμικός συνδυασμός των ν_μ και ν_τ , με την ακριβή σύσταση
να εξαρτάται από την ατμοσφαιρική γωνία μίξης. Η ατμοσφαιρική γωνία μίξης

είναι σχεδόν μέγιστη, οπότε σε μια πρώτη προσέγγιση μπορεί να θεωρηθεί $\theta_{ATM} = \pi/4$. Τότε η κατάσταση ν_{SOL} γίνεται

$$\nu_{SOL} \frac{1}{\sqrt{2}} (\nu_\mu - \nu_\tau), \quad (4.132)$$

Η προσέγγιση είναι αρκετά καλή όπως μπορεί να δει κανείς αν συγκρίνει με το αποτέλεσμα της ανάλυσης χωρίς την υπόθεση $|U_{e3}| = 0$ που παρουσιάζεται στις σχέσεις 4.136 και 4.137.

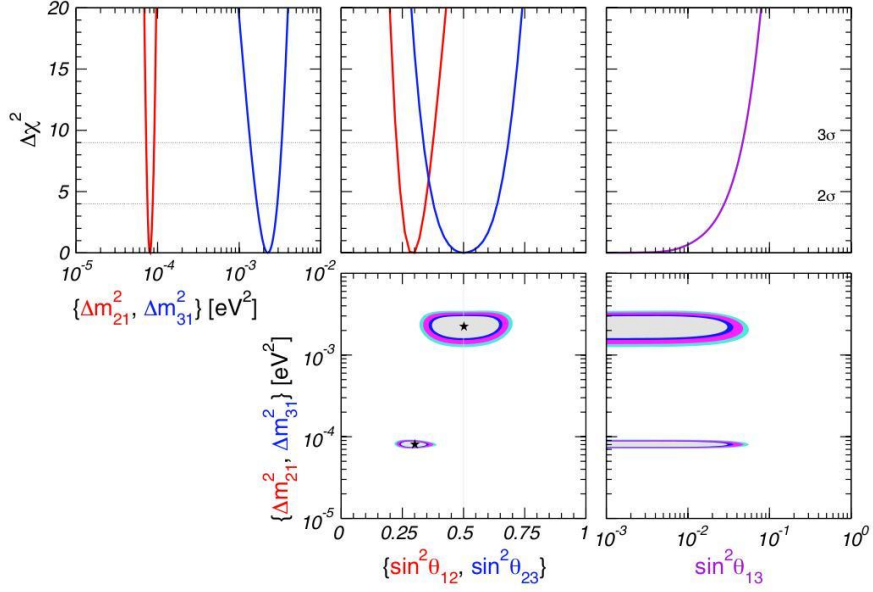
$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.82 & 0.58 & 0.00 \\ -0.41 & 0.58 & 0.71 \\ 0.41 & -0.58 & 0.71 \end{pmatrix} \quad (4.133)$$

4.6.5 Συνολικά αποτελέσματα

Στο σημείο αυτό θα συνοψίσουμε όλα τα πειραματικά αποτελέσματα, με εξαίρεση τα πειράματα LSND και MiniBooNe, χωρίς καμία υπόθεση για την γωνία $|U_{e3}|$. Και οι πέντε παράμετροι Δm_{21} , Δm_{31} , θ_{12} , θ_{23} και θ_{13} είναι ελεύθερες να προσδιοριστούν από τα πειραματικά δεδομένα. Τα πειράματα που έχουν εκτελεστεί δεν μπορούν να ανιχνεύσουν την φάση δ οπότε ο πίνακας μίξης που χρησιμοποιείται είναι

$$U = R^{23} R^{13} R^{12} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (4.134)$$

Έχει επικρατήσει ο πίνακας R^{23} να λέγεται ατμοσφαιρικός πίνακας μίξης και όπως είδαμε σχετίζεται με τις ατμοσφαιρικές ταλαντώσεις, ο πίνακας R^{12} λέγεται ηλιακός πίνακας μίξης επειδή σχετίζεται με τις ηλιακές ταλαντώσεις. Ο πίνακας R_{13} λέγεται πίνακας μίξης αντιδραστήρων, αφού πληροφορίες για αυτό τον πίνακα παίρνουμε από τις ταλαντώσεις νετρίνων που παράγονται από τους αντιδραστήρες ή τους επιταχυντές. Όπως είδαμε η διαφορά μαζών Δm_{21}^2 και η γωνία μίξης θ_{12} προσδιορίζονται κυρίως από τα δεδομένα των ηλιακών πειραμάτων και το KamLAND, η διαφορά μαζών Δm_{23}^2 και η γωνία μίξης θ_{23} προσδιορίζονται κυρίως από τα ατμοσφαιρικά πειράματα και το K2K, ενώ η γωνία μίξης θ_{13} προσδιορίζεται από το CHOOZ.



Σχήμα 11: Τα διαγράμματα των καθολικών πειραματικών αποτελεσμάτων των ταλαντώσεων νετρίνων.

Μια από τις αναλύσεις δίνει

$$\begin{aligned}
 \Delta m_{21}^2 &= 7.92(1 \pm 0.09) \times 10^{-5} \text{ eV}^2 & \sin^2 2\theta_{12} &= 0.314(1_{-0.15}^{+0.18}), \\
 \Delta m_{23}^2 &= 2.4(1_{-0.26}^{+0.21}) \times 10^{-3} \text{ eV}^2 & \sin^2 2\theta_{23} &= 0.44(1_{-0.22}^{+0.41}), \\
 & & \sin^2 2\theta_{13} &= 0.9(1_{-0.9}^{+2.3} \times 10^{-2}),
 \end{aligned} \tag{4.135}$$

όπου το εύρος αντιστοιχεί σε 2σ . Άλλες αναλύσεις έχουν δώσει παρόμοια αποτελέσματα. Οι επιτρεπόμενες περιοχές των παραμέτρων βρίσκονται στο σχήμα 11. Από αυτές τις τιμές μπορούμε να προσδιορίσουμε τις απόλυτες τιμές των στοιχείων το πίνακα μίξης

$$|U|_{bf} = \begin{pmatrix} 0.82 & 0.56 & 0.09 \\ 0.31 - 0.43 & 0.51 - 0.59 & 0.75 \\ 0.37 - 0.47 & 0.59 - 0.66 & 0.66 \end{pmatrix} \tag{4.136}$$

τα διαστήματα δίνονται επειδή δεν έχουμε καμία πληροφορία για την φάση δ .

Αν λάβουμε υπόψιν μας τυπική απόκλιση 2σ ο πίνακας μίξης γίνεται

$$|U|_{2\sigma} = \begin{pmatrix} 0.78 - 0.86 & 0.51 - 0.61 & 0.00 - 0.18 \\ 0.19 - 0.57 & 0.39 - 0.73 & 0.61 - 0.80 \\ 0.20 - 0.47 & 0.40 - 0.74 & 0.59 - 0.79 \end{pmatrix} \quad (4.137)$$

Η μορφή του πίνακα μίξης των νετρίνων είναι τελείως διαφορετική από την μορφή του πίνακα των quarks. Στην περίπτωση των quarks ο πίνακας είναι σχεδόν διαγώνιος με τα μη διαγώνια στοιχεία να είναι πολύ μικρά, ενώ στην περίπτωση των νετρίνων όλα τα στοιχεία του πίνακα μίξης είναι μεγάλα εκτός από το U_{e3} .

4.7 Η Ιεραρχία των Νετρίνων

Αν και δεν ξέρουμε την κλίμακα μάζας στην οποία βρίσκονται τα νετρίνα από της ταλαντώσεις έχουμε πληροφορίες για την ιεραρχία τους. Μπορούμε να εκφράσουμε την μάζα των νετρίνων συναρτήσει της μάζας του ελαφρύτερου νετρίνο. Αν το φάσμα είναι φυσιολογικό, δηλαδή οι διαφορές ανάμεσα στις μάζες των νετρίνων μεγαλώνουν όσο μεγαλώνει η μάζα, όπως συμβαίνει στα quarks και τα φορτισμένα λεπτόνια, τότε

$$m_2^2 = m_1^2 + \Delta m_{21}^2 = m_1^2 + \Delta m_{SOL}^2 \quad m_3^2 = m_1^2 + \Delta m_{31}^2 = m_1^2 + \Delta m_{ATM}^2. \quad (4.138)$$

Στο ανεστραμμένο φάσμα

$$m_1^2 = m_3^2 - \Delta m_{31}^2 = m_3^2 + \Delta m_{ATM}^2 \quad m_2^2 = m_1^2 + \Delta m_{21}^2 = m_2^2 + \Delta m_{ATM}^2 + \Delta m_{SOL}^2. \quad (4.139)$$

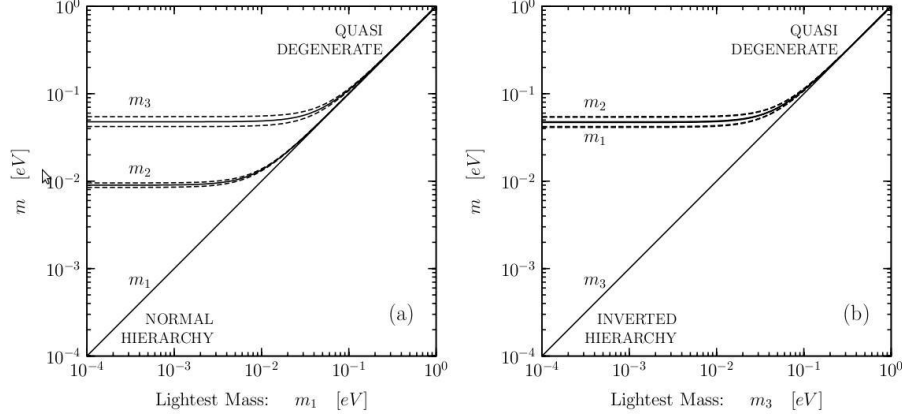
Οι δύο περιπτώσεις φαίνονται στο σχήμα 12.

Και στις δύο περιπτώσεις υπάρχει μια περιοχή όπου οι μάζες των νετρίνων είναι σχεδόν εκφυλισμένες

$$m_1 \simeq m_2 \simeq m_3 \simeq m_\nu, \quad m_\nu \gg \sqrt{\Delta m_{ATM}^2} \simeq 5 \times 10^{-2} eV \quad (4.140)$$

Στην περιοχή αυτή είναι πολύ δύσκολο να ξεχωρίσει κανείς τα δύο φάσματα. Από την άλλη αν η μάζα το ελαφρύτερου νετρίνο είναι μικρότερη από $\sqrt{\Delta m_{ATM}^2}$ τότε τα φάσματα είναι τελείως διαφορετικά. Στην περίπτωση του φυσιολογικού φάσματος

$$m_1 \ll m_2 \ll m_3, \quad (4.141)$$



Σχήμα 12: Τα διαγράμματα της μάζας των νετρίνων συναρτήσει της ελαφρύτερης μάζας.

ενώ στην περίπτωση του ανεστραμμένου φάσματος

$$m_3 \ll m_1 \simeq m_2 \quad (4.142)$$

Ανεξάρτητα από το είδος του φάσματος τουλάχιστον δύο νετρίνα έχουν μάζα μεγαλύτερη από $\sqrt{\Delta m_{SOL}^2} > 8 \times 10^{-3} eV$, ενώ τουλάχιστον ένα νετρίνο έχει μάζα μεγαλύτερη από $\Delta m_{ATM}^2 > 4 \times 10^{-2} eV$. Μεγαλοενοποιημένες θεωρίες προτιμούν το φυσιολογικό φάσμα, αφού θα ήταν ιδιαίτερα δύσκολο να δοθεί μάζα σε κάποιο multiplet και να μην ακολουθούν όλα τα στοιχεία του το ίδιο φάσμα.

4.8 LSND και MiniBooNe

Μέχρι στιγμής θα μπορούσε να πει κανείς ότι όλα βαίνουν καλά. Υπάρχουν όμως δυο πειράματα τα οποία δεν μπορούν να ερμηνευτούν στα πλαίσια όλων όσων έχουμε πει. Η ομάδα του πειράματος LSND, ισχυρίζεται ότι κατάφερε να ανιχνεύσει ταλαντώσεις στο κανάλι $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ και πιο λίγες ταλαντώσεις στο κανάλι $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$. Οι ταλαντώσεις υποδείκνυαν μια ύπαρξη ανενεργού νετρίνο με διαφορά μάζας της τάξης του $0.1 \sim 100 eV^2$. Το πείραμα MiniBooNe κλήθηκε να επιβεβαιώσει ή να απορρίψει τον ισχυρισμό. Το MiniBooNe έχει $\langle L/E \rangle \sim 1$, όπως και το LSND οπότε είναι ευαίσθητο σε ταλαντώσεις

$\Delta m^2 \sim 1$. Αρχικά χρησιμοποιήθηκαν δέσμες ν_μ , υπό την προϋπόθεση ότι ισχύει η συμμετρία CPT το MiniBooNe απέρριψε τον ισχυρισμό του *LSND* σε 98% *C.L.*. Ωστόσο οι μετρήσεις περιείχαν μια ανεξήγητη υπεροχή ν_e σε χαμηλές ενέργειες. Στην ζώνη ενεργειών 200 – 475 *MeV* καταγράφηκαν 544 ν_e με αναμενόμενο αριθμό 415.2 ± 43.4 . Τα δύο πειράματα θα μπορούσαν να έχουν συμβατά αποτελέσματα αν θεωρήσουμε δύο ανενεργά νετρίνα. Για να ξεκαθαρίσει η κατάσταση το MiniBooNe άρχισε να ψάχνει ταλαντώσεις στο κανάλι του *LSND*. Το παράδοξο είναι ότι δεν εμφανίστηκε υπεροχή για $\bar{\nu}_e$. Στην ζώνη ενεργειών 200 – 475 *MeV* καταγράφηκαν 61 $\bar{\nu}_e$ με αναμενόμενο αριθμό 61.5 ± 11.7 . Το πείραμα συνεχίζει να λαμβάνει δεδομένα για να μπορέσει να επιτευχθεί καλύτερη ακρίβεια. Αν τα αποτελέσματα μείνουν ως έχουν είτε το υπόβαθρο έχει υποτιμηθεί είτε υπάρχει παραβίαση της συμμετρίας CPT . Είναι εξαιρετικά ενδιαφέρον ποια θα είναι η εξήγηση για αυτά τα πειράματα, καθώς αναμένεται να απορριφθούν αρκετά μοντέλα φυσικής Πέραν του Καθιερωμένου Προτύπου τα οποία δεν θα μπορούν να εξηγήσουν αυτά τα πειράματα.

5 Μάζα και Μίξη των Νετρίνων

5.1 Όροι Μάζας Dirac και Μίξη

Η μάζα των νετρίνων μπορεί να προέρθει από έναν Dirac όρο μάζα, ο οποίος λαμβάνει χώρα μέσω του μηχανισμού Higgs ακριβώς όπως στα υπόλοιπα φερμιόνια. Η μόνη επέκταση του Καθιερωμένου Προτύπου που απαιτείται, είναι η εισαγωγή δεξιόστροφων συνιστωσών

$$\nu_{\alpha R} \quad Y = 0, \quad I = 0 \quad (5.1)$$

στα πεδία των νετρίνων. Αυτό το μοντέλο συνήθως λέγεται ελάχιστα επεκτεταμένο Καθιερωμένο Πρότυπο. Στην περίπτωση αυτή η ασυμμετρία μεταξύ λεπτονίων και quarks εξαλείφεται αφού τα δύο είδη σωματιδίων πλέον αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο. Βέβαια εξακολουθεί να υπάρχει μια θεμελιώδης διαφορά τα δεξιόστροφα πεδία $\nu_{\alpha R}$ είναι singlets της βαθμίδας $SU(3)_C \times SU(2)_L$ και έχουν υπερφορτίο $Y = 0$, με άλλα λόγια δεν συμμετέχουν στις αλληλεπιδράσεις του καθιερωμένου προτύπου. Για τον λόγο αυτό τα δεξιόστροφα νετρίνα έχει επικρατήσει να χαρακτηρίζονται ως *ανενεργά*. Η εισαγωγή ενός δεξιόστροφου νετρίνο για κάθε αριστερόστροφο νετρίνο δεν είναι ο πιο οικονομικός τρόπος για να εισάγουμε τους Dirac όρους μάζας. Ακόμα και ένα δεξιόστροφο νετρίνο θα αρκούσε. Ο όρος ζεύξης των λεπτονίων με το πεδίο Higgs αποκτώντας την ίδια δομή με τον αντίστοιχο όρο με τα quarks γίνεται

$$\mathcal{L}_{H,L} = - \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} Y_{\alpha\beta}^{\ell} \bar{L}_{\alpha L} \Phi \ell'_{\beta R} - \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} Y_{\alpha\beta}^{\nu} \bar{L}_{\alpha L} \tilde{\Phi} \nu'_{\beta R} + H.C., \quad (5.2)$$

όπου Y^{ν} είναι ένας νέος πίνακας με σταθερές ζεύξεις Yukawa. Αντικαθιστώντας το πεδίο Higgs η Lagrangian γράφεται

$$\mathcal{L}_{H,L} = - \left(\frac{v+H}{\sqrt{2}} \right) \left[\bar{\ell}'_L Y^{\ell} \ell'_R + \bar{\nu}'_L Y^{\nu} \nu'_R \right] + H.C. \quad (5.3)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με τα quarks διαγωνοποιούμε τους πίνακες Y^{ℓ} και Y^{ν} των σταθερών ζεύξης Yukawa

$$\begin{aligned} (V_L^{\ell})^{\dagger} Y^{\ell} V_R^{\ell} &= Y^{\ell}, & Y_{ij}^{\ell} &= y_i^{\ell} \delta_{ij}, & y_i^{\ell} &> 0 \\ (V_L^{\nu})^{\dagger} Y^{\nu} V_R^{\nu} &= Y^{\nu}, & Y_{ij}^{\nu} &= y_i^{\nu} \delta_{ij}, & y_i^{\nu} &> 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Μετά την διαγωνοποίηση η Lagrangian γίνεται

$$\mathcal{L}_{H,L} = - \left(\frac{v+H}{\sqrt{2}} \right) [\bar{\ell}_L Y^\ell \ell_R + \bar{\nu}_L Y^\nu \nu_R] + H.C., \quad (5.5)$$

όπου

$$\nu_L = (V_L^\nu)^\dagger \nu'_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \\ \nu_{3L} \end{pmatrix} \quad \nu_R = (V_R^\nu)^\dagger \nu'_R = \begin{pmatrix} \nu_{1R} \\ \nu_{2R} \\ \nu_{3R} \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

. Από την σχέση $\nu_i = \nu_{iL} + \nu_{iR}$ που ισχύει για σωματίδια Dirac μπορούμε να εκφράσουμε την Lagrangian ως

$$\mathcal{L}_{H,L} = - \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \frac{y_\alpha^\ell v}{\sqrt{2}} \bar{\ell}_\alpha \ell_\alpha - \sum_{k=1,2,3} \frac{y_k^\nu v}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_k \nu_k - \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \frac{y_\alpha^\ell}{\sqrt{2}} \bar{\ell}_\alpha \ell_\alpha H - \sum_{k=1,2,3} \frac{y_k^\nu}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_k \nu_k H, \quad (5.7)$$

οπότε οι μάζες των νετρίνων είναι

$$m_k = \frac{y_k^\nu v}{\sqrt{2}}. \quad (5.8)$$

Όπως βλέπουμε η μάζα των νετρίνων είναι ανάλογη με την αναμενόμενη τιμή κενού του πεδίου Higgs, οπότε για να εξηγηθεί η πολύ μικρότερη μάζα τους σε σχέση με την μάζα των υπολοίπων φερμιονίων πρέπει οι σταθερές ζεύξης y_k^ν να έχουν εξαιρετικά μικρή τιμή. Αν και αυτό το σενάριο μπορεί να ισχύει, η απαίτηση για ρύθμιση της τιμής των παραμέτρων με τόσο μεγάλη ακρίβεια δεν φαντάζει φυσική. Αν και όλες οι μάζες μπαίνουν με το χέρι στο Καθιερωμένο Πρότυπο, η εξαιρετικά μικρή μα των νετρίνων θέτει περιορισμούς στις πιθανές επεκτάσεις του Καθιερωμένου Προτύπου.

Η μίξη των νετρίνων είναι ανάλογη με την μίξη των quarks. Έτσι το λεπτονικό ρεύμα της ασθενούς αλληλεπίδρασης φορτισμένου ρεύματος γίνεται

$$J_{W,L}^k = 2\bar{\nu}'_L \gamma^k \ell'_L = 2\bar{\nu}_L (V_L^\nu)^\dagger \gamma^k V_L^\ell \ell_L = 2\bar{\nu}_L (V_L^\nu)^\dagger V_L^\ell \gamma^k \ell_L. \quad (5.9)$$

Ορίζοντας

$$U = (V_L^\ell)^\dagger V_L^\nu \quad (5.10)$$

το ρεύμα αποκτά την μορφή

$$J_{W,L}^k = 2\bar{\nu}_L U^\dagger \gamma^k \ell_L, \quad (5.11)$$

Αν ορίσουμε τα πεδία νετρίνων καθορισμένης γεύσης, δηλαδή τα νετρίνα του Καθιερωμένου Προτύπου, ως

$$\nu_L^F = U \nu_L = (V_L^\ell)^\dagger \nu'_L, \quad \nu_L^F = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

το ρεύμα αποκτά την ίδια μορφή με την μορφή που έχει στο Καθιερωμένο πρότυπο

$$j_{W,L}^k = 2\bar{\nu}_L^F \gamma^k \ell_L. \quad (5.13)$$

Υπάρχει όμως μια παγίδα. Επειδή να νετρίνα έχουν διαφορετικές μάζες η τελευταία σχέση χρησιμεύει μόνο στην περίπτωση κατά την οποία δεν λαμβάνονται υπόψιν οι μάζες των νετρίνων, διαφορετικά οι διάφορες ιδιοκαταστάσεις μάζας μπλέκονται μέσω των όρων μάζας. Μέσω των πεδίων καθορισμένης έχουμε

$$\mathcal{L}_{H,L} = -\frac{v+H}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \left[y_\alpha^\ell \bar{\ell}^{\alpha L} \ell_{\alpha R} + \bar{\nu}_{\alpha L} \sum_{k=1,2,3} U_{\alpha k} y_k^\nu \nu_{kR} \right] + H.C. \quad (5.14)$$

Το λεπτονικό ρεύμα της ασθενούς αλληλεπίδρασης φορτισμένου ρεύματος (5.13) είναι αναλλοίωτο σε μετασχηματισμούς

$$\ell_{\alpha L} \rightarrow e^{i\phi_\alpha} \ell_{\alpha L}, \quad \nu_{\alpha L} \rightarrow e^{i\phi_\alpha} \nu_{\alpha L} \quad (5.15)$$

Για να παραμείνουν αναλλοίωτοι οι όροι μάζας της Lagrangian (5.14) τα δεξιά στροφα πεδία των φορτισμένων λεπτονίων πρέπει να μετασχηματιστούν ως

$$\ell_{\alpha R} \rightarrow e^{i\phi_\alpha} \ell_{\alpha R}, \quad (5.16)$$

ενώ ο μετασχηματισμός

$$\sum_{k=1,2,3} U_{\alpha k} y_k^\nu \nu_{kR} \rightarrow e^{i\phi_\alpha} \sum_{k=1,2,3} U_{\alpha k} y_k^\nu \nu_{kR} \quad (5.17)$$

αν και αφήνει αναλλοίωτη την Lagrangian, δεν μπορεί να αφήσει αναλλοίωτους τους κινητικούς όρους, αφού ο μετασχηματισμός αυτός είναι unitary μόνο αν $y_k^\nu = y^\nu$ ή $U_{\alpha k} = \delta_{\alpha k}$, επομένως οι λεπτονικοί αριθμοί των γεύσεων δεν διατηρούνται. Διατηρείται όμως ο λεπτονικός αριθμός, αφού $U(1)$ μετασχηματισμοί της μορφής

$$\nu_{kL} \rightarrow e^{i\phi} \nu_{kL}, \quad \nu_{kR} \rightarrow e^{i\phi} \nu_{kR}, \quad \ell_{\alpha L} \rightarrow e^{i\phi} \ell_{\alpha L}, \quad \ell_{\alpha R} \rightarrow e^{i\phi} \ell_{\alpha R} \quad (5.18)$$

αφήνουν αναλλοίωτο και το ρεύμα, και τους όρους μάζας, αλλά και τους κινητικούς όρους.

5.2 Όροι Μάζας Majorana

Από την στιγμή που στο Καθιερωμένο Πρότυπο υπάρχουν μόνο αριστερόστροφα νετρίνα και δεξιόστροφα αντινετρίνα θα μπορούσε να αναρωτηθεί κανείς αν αυτά μπορούν να σχηματίσουν όρους μάζας Majorana. Η απάντηση είναι αρνητική. Ένας όρος μάζας Majorana θα είχε την μορφή

$$\bar{\nu}_L^C \nu_L, \quad (5.19)$$

αλλά ο όρος αυτός έχει $I_3 = 1$ και $Y = -2$. Στο Καθιερωμένο Πρότυπο δεν υπάρχει τριπλέτα του isospin με $Y = 2$, ώστε να μπορεί να κατασκευαστεί κάποιος επανακανονικοποιήσιμος όρος στην Lagrangian. Υπάρχουν δύο επιλογές αν θέλουμε να κρατήσουμε αυτό τον όρο μάζας: είτε θα συμπεριλάβουμε μια τριπλέτα Higgs στο Καθιερωμένο Πρότυπο, είτε θα κατασκευάσουμε κάποιον μη επανακανονικοποιήσιμο όρο. Ένας μη επανακανονικοποιήσιμος όρος δεν είναι τόσο καταστροφικός όσο θα νόμιζε κανείς. Ξέρουμε ή θέλουμε να πιστεύουμε ότι το Καθιερωμένο Πρότυπο δεν είναι παρά μια ενεργός θεωρία η οποία είναι η προσέγγιση χαμηλής ενέργειας κάποιας πιο θεμελιώδους θεωρίας. Ένας μη επανακανονικοποιήσιμος όρος θα μπορούσε να είναι η ένδειξη μιας νέας φυσικής. Είναι απαραίτητο ωστόσο ο μη επανακανονικοποιήσιμος όρος να σέβεται τις συμμετρίες του Καθιερωμένου Πρότυπου, ώστε η νέα θεωρία να μπορεί να περιλαμβάνει τις συμμετρίες του Καθιερωμένου Πρότυπου. Η απαίτηση οφείλεται στο γεγονός ότι η νέα θεωρία θα πρέπει να μπορεί να μειωθεί στο Καθιερωμένο Πρότυπο στο όριο των χαμηλών ενεργειών. Μια Lagrangian της οποίας τα πεδία έχουν διάσταση $[E]^d$ λέγεται τελεστής διάστασης d . Για να έχει η Lagrangian διαστάσεις $[E]^4$ η σταθερά ζεύξης είναι ανάλογη με M^{4-d} , όπου M είναι μια μάζα χαρακτηριστική της ενεργειακής κλίμακας όπου σπάει η συμμετρία. Η Lagrangian της ασθενούς αλληλεπίδρασης του Fermi είναι ένας 6-διάστατος τελεστής ο οποίος διαιρείται με M^2 . Η αναλογία με την μάζα M^{4-d} συμπιέζει την δυνατότητα να παρατηρηθούν φαινόμενα που οφείλονται στην νέα φυσική Πέραν του Καθιερωμένου Προτύπου. Στην πιο απλή περίπτωση ένας όρος μάζας Majorana για μία γενιά προέρχεται από έναν 5-διάστατο τελεστή

$$\mathcal{L}_5 = \frac{g}{M} (L_L^T \sigma_2 \Phi) C^\dagger (\Phi^T \sigma_2 L_L) + H.C., \quad (5.20)$$

μετά την αυθόρμητη ρήξη της συμμετρίας η \mathcal{L}_5 δημιουργεί μάζα Majorana για τα νετρίνα

$$\mathcal{L}_{Mass}^M = \frac{1}{2} \frac{gv^2}{M} \bar{\nu}_L^C \nu_L + H.C. \quad (5.21)$$

Η μάζα είναι που αποκτούν τα νετρίνα

$$m = \frac{gv^2}{M}. \quad (5.22)$$

Όπως έχουμε δει οι μάζες των φερμιονίων είναι ανάλογες της αναμενόμενης τιμής κενού v , οπότε η τιμή v θέτει μια τάξη μεγέθους για της μάζες που αποκτώνται μέσω του μηχανισμού *Higgs*. Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$m \sim \frac{m_D^2}{M}, \quad (5.23)$$

όπου m_D είναι μια μάζα Dirac ενός σωματιδίου της ίδια γενιάς. Η σχέση αυτή έχει την ίδια μορφή με την σχέση που θα αποκτήσουμε μέσω του μηχανισμού See-Saw. Για μια τυπική μάζα $m_D \sim 10^2 \text{ GeV}$, αλλά $M \sim 10^{15} \text{ GeV}$ στην κλίμακα ενέργειας της μεγάλης ενοποίησης έχουμε $m \sim 10^{-2} \text{ eV}$.

5.2.1 Μίξη Majorana Νετρίνων

Ένας όρος μάζας Majorana είναι

$$\mathcal{L}_{Mass}^M = \frac{1}{2} \nu_L^{T'} C^\dagger M^L \nu_L' + H.C. = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \nu_{\alpha L}^{T'} C^\dagger M_{\alpha\beta}^L \nu_{\beta L}' + H.C. \quad (5.24)$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι ο πίνακας μάζας είναι συμμετρικός. Η διαγωνοποίηση του μπορεί να γίνει με τον μετασχηματισμό

$$(V_L^\nu)^T M^L V_L^\nu = M \quad M_{ij} = m_i \delta_{ij} \quad m_i > 0. \quad (5.25)$$

Ο μετασχηματισμός αυτός γίνεται εκφράζοντας τα νετρίνα ως γραμμικό συνδυασμό νετρίνων καθορισμένης μάζας

$$\nu' = V_L^\nu \nu_L \quad \nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \\ \nu_{2L} \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

Τα νετρίνα καθορισμένης μάζας ικανοποιούν την συνθήκη Majorana

$$\nu_k^C = \nu_k, \quad (5.27)$$

οπότε η Lagrangian Majorana μπορεί να γραφεί

$$\mathcal{L}^M = \frac{1}{2} \bar{\nu} (i\cancel{\partial} - M) \nu \quad (5.28)$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει η Lagrangian Majorana δεν είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς

$$\nu_{kL} \rightarrow e^{i\phi} \nu_{kL}, \quad (5.29)$$

γεγονός που σηματοδοτεί παραβίαση του λεπτονικού αριθμού.

Το ρεύμα της ασθενούς αλληλεπίδρασης φορτισμένου ρεύματος μετασχηματίζεται όπως στην περίπτωση των Dirac νετρίνων (5.11), μόνο που πλέον δεν μπορούν να απορροφηθούν και οι τρεις φάσεις του διαγώνιου πίνακα που παραμετροποιεί τον πίνακα μίξης. Ο πίνακας μίξης εκφράζεται ως

$$U = U^D U^M, \quad (5.30)$$

όπου U^D είναι ο πίνακας μίξης που μελετήσαμε στην περίπτωση Dirac και U^M είναι ένας διαγώνιος πίνακας ο οποίος περιέχει τρεις φάσεις α

$$D^M = \text{diag}(e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_2}, e^{i\alpha_3}). \quad (5.31)$$

Αφού μόνο οι διαφορές φάσεις έχουν φυσικό νόημα, μόνο δύο φάσεις του πίνακα έχουν φυσικό νόημα, οπότε μπορούμε να απαλείψουμε την πρώτη φάση θέτοντας την ίση με το μηδέν. Η φάση του πίνακα U^D λέγεται φάση Dirac, ενώ οι φάσεις του πίνακα U^M λέγονται φάσεις Majorana. Οι ταλαντώσεις νετρίνων δεν είναι σε θέση να μας δώσουν πληροφορίες για τις φάσεις Majorana, αφού η ενδεχόμενη παραβίαση της συμμετρίας CP στις ταλαντώσεις εξαρτάται μόνο από την φάση Dirac. Και στην περίπτωση Majorana το αναλλοίωτο Jarlskog έχει την ίδια έκφραση με την περίπτωση Dirac.

Αν γράψουμε τον 5-διάστατο τελεστή της σχέσης (5.21) για τρεις γενιές νετρίνων έχουμε

$$\mathcal{L}_{Mass}^M = \frac{1}{2} \frac{v^2}{M} \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \nu_{\alpha L}^{\prime T} C^\dagger \nu_{\beta L}^{\prime} + H.C. \quad (5.32)$$

οπότε ο πίνακας μάζας που προκύπτει είναι

$$M^L = \frac{v^2}{M} g_{\alpha\beta}, \quad (5.33)$$

όπου διαπιστώνουμε ότι ο πίνακας $g_{\alpha\beta}$ πρέπει να είναι συμμετρικός.

5.3 Όροι Μάζας Dirac και Majorana για 1 Γενιά

Στην περίπτωση των Dirac νετρίνων υποθέσαμε την ύπαρξη δεξιόστροφων νετρίνων για να κατασκευάσουμε τους όρους μάζας. Αν το δεξιόστροφο νεutrino είναι σωματίδιο Majorana θα μπορούσε να δώσει έναν δεξιόστροφο όρο μάζας Majorana

$$\mathcal{L}_{mass}^R = \frac{1}{2} m_R \bar{\nu}_R^T C^\dagger \nu_R + H.C. \quad (5.34)$$

Έτσι δυνητικά μπορούμε να έχουμε μια συνολική Lagrangian που να περιέχει Dirac και Majorana όρους μάζας

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mass}^{D+M} &= \mathcal{L}_{mass}^L + \mathcal{L}_{mass}^D + \mathcal{L}_{mass}^R \\ &= \frac{1}{2} m_L \bar{\nu}_L^T C^\dagger \nu_L - m_D \bar{\nu}_R \nu_L + \frac{1}{2} m_R \bar{\nu}_R^T C^\dagger \nu_R + H.C. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Αυτή η Lagrangian είναι κάτι εντελώς καινούργιο για τα δεδομένα της σωματιδιακής φυσικής. Κανένα άλλο γνωστό σωματίδιο δεν θα μπορούσε να έχει όρους μάζας Majorana, οπότε τα νετρίνα θέτονται σε πολύ ειδική θέση ανοίγοντας δρόμο για νέα φυσική. Ο αριστερόστροφος όρος μάζας όπως είδαμε απαγορεύεται από τις συμμετρίες του Καθιερωμένου Προτύπου, ωστόσο κάτι τέτοιο δεν ισχύει για τον δεξιόστροφο όρο, αφού τα δεξιόστροφα νετρίνα είναι singlet της βαθμίδας του $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Έτσι η πλέον οικονομική επέκταση του Καθιερωμένου Προτύπου επιτρέπει τους δύο τελευταίους όρους μάζας με την εισαγωγή ενός δεξιόστροφου νετρίνο Majorana. Υπάρχει ακόμα ένα σημείο που χρειάζεται συζήτηση. Η Lagrangian έχει τρεις όρους, όμως με μετασχηματισμούς των πεδίων μπορούμε να ορίσουμε μόνο δύο πραγματικές θετικές μάζες. Εμείς θα θεωρήσουμε την m_L μιγαδική.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα της φυσική της Lagrangian είναι χρήσιμο να ορίσουμε την στήλη των αριστερόστροφων νετρίνων

$$N_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_L \\ C \nu_R^T \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

Έτσι η Lagrangian μπορεί να εκφραστεί ως

$$\mathcal{L}_{mass}^{D+M} = \frac{1}{2} N_L^T C^\dagger M N_L + H.C., \quad (5.37)$$

όπου ο πίνακας μάζας M έχει την συμμετρική μορφή

$$M = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

5.3.1 Μίξη

Από την ανάλυση αυτή βλέπουμε ότι τα νετρίνα δεν έχουν καθορισμένη μάζα καθώς ο πίνακας μάζας δεν είναι διαγώνιος. Όπως έχουμε κάνει ήδη αρκετές φορές, μπορούμε να διαγωνοποιήσουμε τον πίνακα μάζας μετασχηματίζοντας τα νετρίνα ως

$$N_L = U n_L, \quad n_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

οπότε ο πίνακας μάζας γίνεται

$$U^T M U = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad m_i \geq 0 \quad (5.40)$$

Όπως μπορεί να δει κανείς οι μάζες και τα στοιχεία του πίνακα μίξης υπολογίζονται από τις ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα το πίνακα

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \Re[m_L] & m_D & -\Im[m_L] & 0 \\ m_D & m_R & 0 & 0 \\ -\Im[m_L] & 0 & -\Re[m_L] & -m_D \\ 0 & 0 & -m_D & -m_R \end{pmatrix}. \quad (5.41)$$

Μετά από αρκετές πράξεις καταλήγει κανείς ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι

$$m_{2,1}^2 = \frac{1}{2} \left[|m_L|^2 + m_R^2 + 2m_D^2 \pm \left((\Re[m_L] + m_R)^2 [(\Re[m_L] - m_R)^2 + 4m_D^2] + (\Im[m_L])^4 + 2(\Im[m_L])^2 ((\Re[m_L])^2 - m_R^2 + 2m_D^2) \right)^{1/2} \right] \quad (5.42)$$

Για πραγματικό m_L η παραπάνω σχέση απλοποιείται αρκετά

$$m'_{2,1} = \frac{1}{2} \left[m_L^2 + m_R^2 \pm \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2} \right] \quad (5.43)$$

Ο τόνος συμβολίζει ότι η μάζα που προκύπτει από αυτή την σχέση δεν είναι πάντα θετική, οπότε το αρνητικό πρόσημο πρέπει να απορροφηθεί στον πίνακα μίξης. Ουσιαστικά η μάζα κάθε ιδιοκατάστασης δίνεται από την απόλυτη τιμή της τονούμενης μάζας.

Ο πίνακας μίξης μπορεί να γραφεί ως

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\lambda} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta e^{i\lambda} & \sin \theta \\ -\sin \theta e^{i\lambda} & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (5.44)$$

με τις παραμέτρους του να δίνονται από τα ιδιοανύσματα του πίνακα. Το πρώτο ιδιοάνυσμα είναι

$$\mathcal{M} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m_2 \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

το οποίο δίνει

$$\tan 2\theta = \frac{2m_D}{m_R - \Re[m_L]} \quad (5.46)$$

Και το δεύτερο ιδιοάνυσμα είναι

$$\mathcal{M} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \lambda \\ -\sin \theta \cos \lambda \\ \cos \theta \sin \lambda \\ -\sin \theta \sin \lambda \end{pmatrix} = m_1 \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \lambda \\ -\sin \theta \cos \lambda \\ \cos \theta \sin \lambda \\ -\sin \theta \sin \lambda \end{pmatrix}, \quad (5.47)$$

το οποίο δίνει

$$\tan 2\lambda = \frac{2\Im[m_L]}{\Re[m_L] + m_R - \sqrt{(\Re[m_L] - m_R)^2 + 4m_D^2}} \quad (5.48)$$

Αφού $0 \leq 2\lambda \leq 4\pi$ προκύπτουν 4 τιμές για το λ . Οι επιτρεπτές τιμές είναι αυτές που καθιστούν θετικές τις δύο μάζες. Στην περίπτωση που ο πίνακας μίξης είναι πραγματικός, $\tan 2\lambda = 0$, οπότε $e^{i\lambda} = \pm 1$ ή $e^{i\lambda} = \pm i$. Ανακεφαλαιώνοντας για μια γενιά αριστερόστροφων και δεξιόστροφων νετρίνων μετά την διαγωνοποίηση προκύπτουν δυο νετρίνα Majorana καθορισμένης μάζας. Τα αρχικά νετρίνα ν_L και ν_R^C είναι αριστερόστροφα στην βάση των γεύσεων. Το νεutrino ν_L είναι ενεργό ενώ το νεutrino ν_R είναι ανενεργό, οπότε η μίξη μεταξύ των ν_L και ν_R^C δείχνει ότι ταλαντώσεις μεταξύ ενεργών και ανενεργών νετρίνων είναι δυνατή με διαφορά μαζών

$$\Delta m^2 = \left[(\Re[m_L] + m_R)^2 [(\Re[m_L] - m_R)^2 + 4m_D^2] + (\Im[m_L])^4 + 2(\Im[m_L])^2 ((\Re[m_L])^2 - m_R^2 + 2m_D^2) \right]^{1/2} \quad (5.49)$$

5.3.2 Ασθενείς Αλληλεπιδράσεις

Ας γράψουμε αναλυτικά την σχέση (5.39)

$$\begin{aligned}\nu_L &= U_{11}\nu_{1L} + U_{12}\nu_{2L} \\ \nu_R^C &= U_{21}\nu_{1L} + U_{22}\nu_{2L}\end{aligned}\quad (5.50)$$

Όπως βλέπουμε τα ενεργά και ανενεργά νετρίνα είναι γραμμικός συνδυασμός των ίδιων νετρίνων καθορισμένης μάζας. Αυτό επιτρέπει τις ταλαντώσεις μεταξύ των ενεργών και ανενεργών νετρίνων. Η αρχική ιδέα του Pontecorvo επανέρχεται στο προσκήνιο. Η Lagrangian της ασθενούς αλληλεπίδρασης φορτισμένου ρεύματος γίνεται

$$L^{CC} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{i=1,2} U_{1i}^* \bar{\nu}_{iL} \gamma^\mu \ell_L W_\mu + H.C. \quad (5.51)$$

Ενώ το πραγματικά περίεργο φαινόμενο είναι ότι ο μηχανισμός *GIM* δεν λειτουργεί

$$L^{NC} = -\frac{g}{2 \cos \theta_W} \sum_{ij=1,2} U_{1i}^* U_{1j} \bar{\nu}_{iL} \gamma^\mu \nu_{jL} Z_\mu \quad (5.52)$$

5.3.3 Μέγιστη Μίξη

Από την σχέση (5.46) βλέπουμε ότι η μέγιστη μίξη αντιστοιχεί σε

$$m_L = m_R. \quad (5.53)$$

Στην περίπτωση αυτή η σχέση (5.43) δίνει

$$m'_{2,1} = m_L \pm m_D. \quad (5.54)$$

Αν $m_L > m_D$ και οι δύο μάζες είναι θετικές, οπότε η μίξη δίνεται από τον πίνακα

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.55)$$

Στην περίπτωση $m_L < m_D$ προκύπτει $m_1 < 0$, οπότε η μίξη δίνεται από τον πίνακα

$$U = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.56)$$

Έτσι έχουμε

$$\nu_{1L} = -\frac{i}{\sqrt{2}} (\nu_L - \nu_R^C) \quad (5.57)$$

$$\nu_{2L} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\nu_L + \nu_R^C) \quad (5.58)$$

οπότε τα νετρίνα καθορισμένης μάζας είναι

$$\nu_1 = \nu_{1L} + \nu_{1L}^C = -\frac{i}{\sqrt{2}} [(\nu_L + \nu_R) - (\nu_L^C + \nu_R^C)] \quad (5.59)$$

$$\nu_2 = \nu_{2L} + \nu_{2L}^C = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\nu_L + \nu_R) + (\nu_L^C + \nu_R^C)] \quad (5.60)$$

με διαφορά μαζών

$$\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2 = 4m_L m_D \quad (5.61)$$

5.3.4 Όριο Dirac

Το όριο Dirac αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου

$$m_L = m_R = 0 \quad (5.62)$$

$$m'_{2,1} = \pm m_D \quad (5.63)$$

το οποίο αντιστοιχεί σε πίνακα μίξης

$$U = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.64)$$

Με τον τρόπο αυτό αποκτούμε δύο νετρίνα Majorana ίδιας μάζας με αντίθετες ομοτιμίες CP . Τότε τα νετρίνα μπορούν να συνδυαστούν σε ένα Dirac νετρίνο

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{2}} (i\nu_1 + \nu_2) = \nu_L + \nu_R \quad (5.65)$$

Αντίστοιχα ένα νετρίνο Dirac μπορεί να σπάσει σε δύο Majorana νετρίνα με αντίθετες ομοτιμίες CP .

Μια εξίσου ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι η περίπτωση όπου

$$|m_L|, m_R \ll m_D \quad (5.66)$$

Τότε η μάζα των νετρίνων είναι

$$m'_{2,1} = \frac{m_L + m_R}{2} \pm m_D \quad (5.67)$$

οπότε η πραγματική μάζα που αποκτούν είναι

$$m_{2,1} = m_D \pm \frac{m_L + m_R}{2} \quad (5.68)$$

και τα νετρίνα αποκτούν αντίθετες ομοτιμίες CP . Η διαφορά μάζων των δύο καταστάσεων είναι

$$(m_L + m_R) \ll m_{2,1} \quad (5.69)$$

Τα νετρίνα Majorana είναι σχεδόν εκφυλισμένα και λέγονται ψευδο-Dirac νετρίνα γιατί είναι πολύ δύσκολο να διακριθούν από τα νετρίνα Dirac. Ο καλύτερος τρόπος για να αποκαλυφθεί η ψευδο-Dirac φύση των νετρίνων είναι οι ταλαντώσεις μεταξύ ενεργών και ανενεργών νετρίνων. Οι ταλαντώσεις αυτές θα οφείλονται σε διαφορά μαζών

$$\Delta m^2 \simeq m_D(m_L + m_R) \quad (5.70)$$

και η γωνία μίξης θα είναι πρακτικά μέγιστη

$$\tan 2\theta = \frac{2m_D}{m_R - m_L} \gg 1 \rightarrow \theta \simeq \frac{\pi}{4} \quad (5.71)$$

5.3.5 Ο Μηχανισμός See-Saw

Η πλέον ρεαλιστική περίπτωση είναι αυτή όπου

$$m_L = 0 \quad m_R \gg m_D \quad (5.72)$$

Τότε έχουμε

$$m'_1 \simeq -\frac{m_D^2}{m_R} \quad (5.73)$$

$$m'_2 \simeq m_R \quad (5.74)$$

οπότε το νετρίνο ν_2 έχει μάζα της ίδιας τάξης με την m_R και το ν_1 είναι πολύ ελαφρύ. Η μίξη είναι ελάχιστη αφού

$$\tan 2\theta = 2\frac{m_D}{m_R} \ll 1 \quad (5.75)$$

Ο μηχανισμός See-Saw είναι ιδιαίτερα σημαντικός γιατί εξηγεί την κλίμακα της μάζας των νετρίνων σχετίζοντάς τις με φυσικό τρόπο με τις μάζες των υπολοίπων φερμιονίων. Η απαίτηση $m_L = 0$ αντικατοπτρίζει την απαγόρευση ύπαρξης αυτής της μάζας από τις συμμετρίες και την επανακανονικοποιησιμότητα. Η μάζα m_D είναι της τάξης των υπολοίπων φερμιονίων αφού γεννάται από τον μηχανισμό Higgs, και σε κάθε περίπτωση δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από κλίμακα ενέργειας ρήξης της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας $\sim 10^2 \text{ GeV}$. Η μάζα m_R δεν σχετίζεται με το Καθιερωμένο Πρότυπο και μπορεί να υπάρχει πάνω από την κλίμακα ενέργειας ρήξης της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας. Μπορεί όμως να προκύπτει και ως αποτέλεσμα φυσικής Πέραν του Καθιερωμένου Προτύπου. Έτσι η m_R μπορεί να σχετίζεται με την κλίμακα ρήξης μια μεγαλύτερης συμμετρίας. Αν για παράδειγμα η μάζα m_R προκύπτει στα πλαίσια της Μεγάλης Ενοποίησης η κλίμακα ενέργειας είναι της τάξης $10^{14} - 10^{16}$. Ότι η σχέση (5.73) είναι της ίδιας μορφής με την σχέση που προκύπτει από τον 5-διάστατο τελεστή δεν είναι τυχαίο. Ο μηχανισμός See-Saw είναι μια ειδική περίπτωση 5-διάστατων τελεστών.

Ας δούμε πως ακριβώς πραγματοποιείται ο μηχανισμός See-Saw μέσω 5-διάστατων τελεστών. Η Lagrangian για $m_L = 0$ γίνεται

$$\mathcal{L}_{mass}^{D+M} = -m_D (\bar{\nu}_R \nu_L + \bar{\nu}_L \nu_R) + \frac{1}{2} m_R (\bar{\nu}_R^T C^\dagger \nu_R + \nu_R^\dagger C \nu_R^*) \quad (5.76)$$

Πάνω από την κλίμακα ενέργειας ρήξης της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας η παραπάνω Lagrangian γίνεται

$$\mathcal{L}_{mass}^{D+M} = -y^\nu (\bar{\nu}_R \tilde{\Phi}^\dagger L_L + \bar{L}_L \tilde{\Phi} \nu_R) + \frac{1}{2} m_R (\bar{\nu}_R^T C^\dagger \nu_R + \nu_R^\dagger C \nu_R^*) \quad (5.77)$$

Θεωρώντας την μάζα m_R πολύ μεγαλύτερη από τις ενέργειες του Καθιερωμένου Προτύπου μπορούμε να θεωρήσουμε τα δεξιόστροφα νετρίνα στατικά. Έτσι οι εξισώσεις Euler Lagrange δίνουν

$$0 \simeq \frac{\partial \mathcal{L}_{mass}^{D+M}}{\partial \nu_R} = m_R \nu_R^T C^\dagger - y^\nu \bar{L}_L \tilde{\Phi}, \quad (5.78)$$

οπότε για το νετρίνο ν_R έχουμε

$$\nu_R \simeq -\frac{y^\nu}{m_R} \tilde{\Phi}^T C \bar{L}_L^T \quad (5.79)$$

Αντικαθιστώντας στην Lagrangian αποκτούμε μια Lagrangian για το αριστερόστροφο νετρίνο ν_L η οποία έχει την μορφή ενός 5-διάστατου τελεστή.

Μια ακόμα περίπτωση είναι η περίπτωση όπου η μάζα m_L είναι πολύ μικρή αλλά μη μηδενική.

$$m_L \ll m_D \ll m_R \quad m_L = g \frac{m_D^2}{M} \quad (5.80)$$

Η μάζα M είναι στην κλίμακα ενέργειας της φυσικής Πέραν του Καθιερωμένου Προτύπου. Αφού τα νετρίνα Majorana παραβιάζουν την διατήρηση του λεπτονικού αριθμού και θα θέλαμε η θεωρία Πέραν του Καθιερωμένου Προτύπου να διατηρεί το L ή $B - L$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι η νέα φυσική σχετίζεται με την ρήξη της L ή $B - L$ συμμετρίας. Στην περίπτωση αυτή αποκτούμε

$$m_1 \simeq \left| g \frac{m_D^2}{M} - \frac{m_D^2}{m_R} \right| \quad m_2 \simeq m_R \quad (5.81)$$

Ο μηχανισμός See-Saw πρώτου είδους αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου $m_L \ll m_D^2/m_R$ ενώ ο μηχανισμός See-Saw δεύτερου είδους αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου $m_L \gg m_D^2/m_R$

5.4 Όροι Μάζας Dirac και Majorana για 3 Γενίες

Ας θεωρήσουμε τα νετρίνα των τριών γενιών και N_S δεξιόστροφα ανενεργά νετρίνα. Η μορφή της γενικής Lagrangian μάζας που μπορούμε να κατασκευάσουμε είναι

$$\mathcal{L}_{mass}^{D+M} = \mathcal{L}_{mass}^L + \mathcal{L}_{mass}^D + \mathcal{L}_{mass}^R \quad (5.82)$$

όπου οι όροι μάζας Majorana είναι

$$\mathcal{L}_{mass}^L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=e, \mu, \tau} (\nu')_{\alpha L}^T C^\dagger M_{\alpha\beta}^L \nu'_{\beta L} + H.C. \quad (5.83)$$

$$\mathcal{L}_{mass}^R = \frac{1}{2} \sum_{s, s'=s_1, \dots, s_{N_S}} (\nu')_{sR}^T C^\dagger M_{ss'}^R \nu'_{s'R} + H.C. \quad (5.84)$$

ενώ ο όρος μάζας Dirac είναι

$$\mathcal{L}_{mass}^D = - \sum_{s=1, \dots, N_S} \sum_{\alpha=e, \mu, \tau} \bar{\nu}_{sR} M_{s\alpha}^D \nu'_{\alpha L} + H.C. \quad (5.85)$$

Και οι τρεις πίνακες είναι μιγαδικοί. Οι πίνακες μάζας Majorana είναι συμμετρικοί. Ο αριστερόστροφος πίνακας μάζας M^L είναι 3×3 , ενώ ο δεξιόστροφος

πίνακας μάζας M^R είναι $N_S \times N_S$. Ο πίνακας M^D είναι $N_S \times 3$. Γράφοντας τα νετρίνα σαν μια στήλη $N = 3 + N_S$ νετρίνων

$$N'_L = \begin{pmatrix} \nu'_L \\ \nu_{R'}^{C'} \end{pmatrix} \quad \nu_{R'}^{C'} = \begin{pmatrix} \nu_{s_1 R}^{C'} \\ \vdots \\ \nu_{s_{N_S} R}^{C'} \end{pmatrix} \quad (5.86)$$

η Lagrangian αποκτά την μορφή

$$\mathcal{L}_{mass}^{D+M} = \frac{1}{2} (N'_L)^T C^\dagger M^{D+M} N'_L + H.C. \quad (5.87)$$

Ο πίνακας M^{D+M} είναι συμμετρικός $N \times N$ πίνακας

$$M^{D+M} = \begin{pmatrix} M^L & (M^D)^T \\ M^D & M^R \end{pmatrix}. \quad (5.88)$$

Εκφράζοντας τα νετρίνα ως

$$N'_L = V'_L n_L \quad n_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \vdots \\ \nu_{NL} \end{pmatrix}, \quad (5.89)$$

ο πίνακας μάζας να διαγωνοποιείται

$$(V'_L)^T M^{D+M} V'_L = M \quad M_{ij} = m_i \delta_{ij} \quad m_i > 0. \quad (5.90)$$

Η Lagrangian γράφεται

$$\mathcal{L}_{mass}^{D+M} = \frac{1}{2} (n_L)^T C^\dagger M n_L + H.C. \quad (5.91)$$

ή ισοδύναμα

$$\mathcal{L}_{mass}^{D+M} = \frac{1}{2} \bar{n}_L^C M n_L + H.C. \quad (5.92)$$

Ορίζοντας την στήλη

$$n = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_N \end{pmatrix} \quad \nu_i = \nu_{iL} + \nu_{iL}^C \quad (5.93)$$

με τα νετρίνα ν να ικανοποιούν την συνθήκη Majorana

$$\nu_i^C = \nu_i \quad (5.94)$$

η Lagrangian γίνεται

$$\mathcal{L}_{mass}^{D+M} = \bar{n} (i\not{\partial} - M) n. \quad (5.95)$$

5.4.1 Ασθενείς Αλληλεπιδράσεις

Το λεπτονικό ρεύμα της ασθενούς αλληλεπίδρασης φορτισμένου ρεύματος είναι

$$j_{W,L}^\mu = 2\bar{\nu}'_L \gamma^\mu \ell'_L \quad (5.96)$$

για τα σωματίδια καθορισμένης μάζας το ρεύμα γίνεται

$$j_{W,L}^\mu = 2\bar{\nu}_L U^\dagger \gamma^\mu \ell_L, \quad (5.97)$$

ο πίνακας U έχει στοιχεία

$$U_{\alpha k} = \sum_{\beta=e,\mu,\tau} [(V_L^\ell)^\dagger]_{\alpha\beta} [V_L^\nu]_{\beta k}, \quad (5.98)$$

όπου ο πίνακας V_L^ℓ είναι 3×3 και διαγωνοποιεί τον πίνακα μάζας των λεπτονίων και ο πίνακας V_L^ν είναι $N \times N$ και διαγωνοποιεί τον πίνακα μάζας των νετρίνων. Ο πίνακας U έχει διαστάσεις $3 \times N$ αλλά δεν είναι unitary αφού

$$UU^\dagger = 1 \quad U^\dagger U \neq 1 \quad (5.99)$$

Ο πίνακας μίξης μπορεί να παραμετροποιηθεί μέσω $3 + 3N_S$ γωνιών μίξης και $3 + 3N_S$ φάσεων, οι οποίες χωρίζονται σε $1 + 2N_S$ φάσεις Dirac και $2 + N_S$ φάσεις Majorana.

Τέλος μπορούμε να ορίσουμε τα νετρίνα καθορισμένης γεύσης

$$\nu_L = U n_L = (V_L^\ell)^\dagger \nu'_L \quad \nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix} \quad (5.100)$$

και να επανακτήσουμε την έκφραση του Καθιερωμένου προτύπου για το ρεύμα

$$j_{W,L}^\mu = 2\bar{\nu}_L \gamma^\mu \ell_L \quad (5.101)$$

Όπως είδαμε και στην περίπτωση της μίας γενιάς ο μηχανισμός *GIM* δεν λειτουργεί

$$j_{Z,\nu}^\mu = \bar{n}_L \gamma^\mu U^\dagger U n_L, \quad (5.102)$$

οπότε μπορούμε να έχουμε ασθενείς αλληλεπιδράσεις ουδετέρου ρεύματος μεταξύ διαφορετικών νετρίνων καθορισμένης μάζας.

5.4.2 Ο Μηχανισμός See-Saw

Όπως στην περίπτωση της μιας γενιάς θα θεωρήσουμε $M^L = 0$, έτσι έχουμε

$$M^{D+M} = \begin{pmatrix} 0 & (M^D)^T \\ M^D & M^R \end{pmatrix}, \quad (5.103)$$

με τα στοιχεία του πίνακα μάζας M^R να είναι πολύ μεγαλύτερα από τα στοιχεία του πίνακα μάζας M^D . Η διαγωνοποίηση σε μπλοκ σε πρώτη τάξη ως προς $(M^R)^{-1} M^D$ είναι

$$W^T M^{D+M} W \simeq \begin{pmatrix} M_{light} & 0 \\ 0 & M_{heavy} \end{pmatrix}, \quad (5.104)$$

με τον πίνακα W να είναι

$$W \simeq \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} M^{D\dagger} (M^R M^{R\dagger})^{-1} M^D & (M^{R^{-1}} M^D)^\dagger \\ -M^{R^{-1}} M^D & 1 - \frac{1}{2} M^{R^{-1}} M^D M^{D\dagger} (M^{R\dagger})^{-1} \end{pmatrix} \quad (5.105)$$

και οι πίνακες μάζας να είναι

$$M_{light} \simeq -M^{D\dagger} M^{R^{-1}} M^D \quad M_{heavy} \simeq M^R \quad (5.106)$$

Οι βαριές μάζες δίνονται από τις ιδιοτιμές του πίνακα M^R ενώ οι ελαφριές μάζες συμπίπτουν από τον παράγοντα $M^{D\dagger} M^{R^{-1}}$. Παρόλα αυτά οι μάζες τους μπορεί να αποκτηθούν σε μεγάλο εύρος ανάλογα με τα στοιχεία των πινάκων. Θα αναλύσουμε μόνο δύο απλά μοντέλα τον τετραγωνικό μηχανισμό See-Saw και τον γραμμικό μηχανισμό See-Saw.

Ο τετραγωνικός μηχανισμός See-Saw προκύπτει όταν

$$M^R = \mathcal{M}I, \quad (5.107)$$

όπου I είναι ο ταυτοτικός πίνακας $N_S \times N_S$ και \mathcal{M} είναι η κλίμακα ενέργειας της φυσικής Πέραν του Καθιερωμένου Προτύπου. Έτσι έχουμε

$$M_{light} \simeq -\frac{M^{D\dagger} M^D}{\mathcal{M}}, \quad (5.108)$$

οπότε οι μάζες των ελαφριών νετρίνων είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα

$$m_i \simeq -\frac{(m_i^D)^2}{\mathcal{M}} \quad (5.109)$$

με τις μάζες $(m_i^D)^2$ να είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα $M^{D^T} M^D$. Οι τιμές των μαζών αναμένουμε να είναι της τάξης μεγέθους των μαζών των φορτισμένων λεπτονίων ή των quarks έτσι

$$m_1 : m_2 : m_3 = (m_1^D)^2 : (m_2^D)^2 : (m_3^D)^2 \quad (5.110)$$

Στην περίπτωση του γραμμικού See-Saw έχουμε $N_S = 3$ και

$$M^R = \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}^D} M^D, \quad (5.111)$$

όπου \mathcal{M}^D είναι η κλίμακα των στοιχείων του πίνακα M^D και $\mathcal{M} \gg \mathcal{M}^D$ είναι η κλίμακα ενέργειας της νέας φυσικής. Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι $\mathcal{M}^D \sim 10^2 \text{ GeV}$ που είναι η κλίμακα ενέργειας ρήξης της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας. Ο πίνακας M_{light} γίνεται

$$M_{light} \simeq -\frac{\mathcal{M}^D}{\mathcal{M}^D} M^D \quad (5.112)$$

οπότε οι μάζες των ελαφριών νετρίνων είναι

$$m_i = \frac{\mathcal{M}^D}{\mathcal{M}} m_i^D. \quad (5.113)$$

Έτσι έχουμε

$$m_1 : m_2 : m_3 = m_1^D : m_2^D : m_3^D \quad (5.114)$$

5.4.3 Διαγωνοποίηση

Αν έχουμε ένα συμμετρικό $N \times N$ μιγαδικό πίνακα μαζών Majorana τότε αυτός μπορεί να διαγωνοποιηθεί με τον μετασχηματισμό

$$(V_L^\nu)^T M^M V_L^\nu = M \quad M_{ij} = m_i \delta_{ij}, \quad m_i > 0 \quad (5.115)$$

με τον πίνακα V_L^ν να είναι unitary. Θα παρουσιάσουμε μια διαδικασία ώστε να βρούμε τις μάζες m_i και τον πίνακα V_L^ν . Πολλαπλασιάζουμε από αριστερά την σχέση (5.115) με τον πίνακα $V_L^{\nu*}$

$$M^M V_L^\nu = V_L^{\nu*} M \quad (5.116)$$

Ορίζουμε τα διανύσματα $v^{(j)}$ να είναι οι στήλες του πίνακα V_L^ν , με στοιχεία

$$v_k^{(j)} = [V_L^\nu]_{kj} \quad (5.117)$$

Το γεγονός ότι ο πίνακας είναι unitary μας εξασφαλίζει την ορθοκανονικότητα

$$\sum_k v^{(i)*} v^{(j)} = \delta_{ij} \quad (5.118)$$

Χρησιμοποιώντας τα διανύσματα η εξίσωση (5.116) γίνεται

$$M^M v^{(i)} = m_i v^{(i)*} \quad (5.119)$$

οπότε χωρίζοντας το πραγματικό και φανταστικό μέρος έχουμε

$$\begin{pmatrix} \Re [M^M] & -\Im [M^M] \\ -\Im [M^M] & -\Re [M^M] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Re [v^{(i)}] \\ \Im [v^{(i)}] \end{pmatrix} = m_i \begin{pmatrix} \Re [v^{(i)}] \\ \Im [v^{(i)}] \end{pmatrix}. \quad (5.120)$$

Η σχέση αυτή είναι η εξίσωση ιδιοτιμών του πίνακα

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \Re [M^M] & -\Im [M^M] \\ -\Im [M^M] & -\Re [M^M] \end{pmatrix} \quad (5.121)$$

Οι θετικές ιδιοτιμές του πίνακα είναι οι μάζες και τα ιδιοανύσματα αποτελούν το πραγματικό και φανταστικό μέρος των στηλών του πίνακα V_L^p . η εξίσωση έχει $2N$ λύσεις, οπότε εμείς πρέπει να κρατήσουμε μόνο αυτές με θετικές ιδιοτιμές, αφού αν το m_i είναι ιδιοτιμή, τότε και το $-m_i$ είναι ιδιοτιμή

$$\begin{pmatrix} \Re [M^M] & -\Im [M^M] \\ -\Im [M^M] & -\Re [M^M] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Im [v^{(i)}] \\ \Re [v^{(i)}] \end{pmatrix} = -m_i \begin{pmatrix} -\Im [v^{(i)}] \\ \Re [v^{(i)}] \end{pmatrix}. \quad (5.122)$$

5.5 Η Σχέση με Μεγαλοενοποιημένες Θεωρίες

Στις μεγαλοενοποιημένες θεωρίες τα σωματίδια κατατάσσονται σε πολλαπλές οι οποίες αλληλεπιδρούν μέσω μποζονίων μιας ανώτερης συμμετρίας. Ως επί το πλείστον 3 μοντέλα μεγαλοενοποιημένων θεωριών σχετίζονται με την φυσική νετρίνων. Μια ξεχωριστή περίπτωση είναι η επέκταση του Καθιερωμένου Προτύπου ώστε να γίνει συμμετρικό, όπου η μόνη προσθήκη είναι τα δεξιόστροφα μποζόνια της ασθενούς αλληλεπίδρασης και τα δεξιόστροφα νετρίνα, ενώ η συμμετρία $U(1)$ πλέον αντιστοιχεί στην διατήρηση του $B - L$. Η βαθμίδα είναι

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L} \quad (5.123)$$

Οι μεγαλοενοποιημένες θεωρίες είναι οι

$$SU(5) \quad (5.124)$$

$$SU(4) \times SU(2)_L \times SU(2)_R \quad (5.125)$$

$$SO(10) \quad (5.126)$$

Η απλούστερη ομάδα που περιέχει τις συμμετρίες του Καθιερωμένου Πρότυπου, είναι η ομάδα $SU(5)$. Στην περίπτωση της $SU(5)$ διατηρείται το $B - L$. Το μοντέλο δεν περιέχει δεξιόστροφα νετρίνα, οπότε μπορούμε είτε να έχουμε αριστερόστροφες μάζες Majorana με την εισαγωγή τριπλέτων Higgs είτε μη επανακανονικοποιήσιμους όρους, όπως συζητήσαμε στην σχετική ενότητα, αλλιώς τα νετρίνα παραμένουν άμαζα. Υπάρχει ακόμα η περίπτωση του μοντέλου Pati - Salam $SU(4) \times SU(2)_L \times SU(2)_R$, όπου ο λεπτονικός αριθμός θεωρείται ένα τέταρτο χρώμα. Στο μοντέλο συμμετέχουν και $V + A$ ρεύματα στην ασθενή αλληλεπίδραση αλλά συμπιέζονται από την μάζα $m_{W_R}^2$. Το μοντέλο Pati - Salam μπορεί να προκύψει από ρήξη της συμμετρίας $SO(10)$. Η $SO(10)$ περιέχει ένα singlet της βαθμίδας $SU(5)$ (συνεπώς και του Καθιερωμένου Προτύπου), το οποίο αναγνωρίζεται ως δεξιόστροφο νετρίνο ν_R . Το δεξιόστροφο νετρίνο όμως αλληλεπιδρά με τα υπόλοιπα μποζόνια της βαθμίδας. Έτσι έχουμε ένα συμμετρικό μοντέλο. Η $SO(10)$ δεν είναι απαραίτητο να διατηρεί το $B - L$, οπότε στα πλαίσιά της η διπλή β -διάσπαση χωρίς εκπομπή νετρίνων είναι επιτρεπτή. Στις συμμετρικές θεωρίες η σχέση Gell-Mann - Nishijima γίνεται

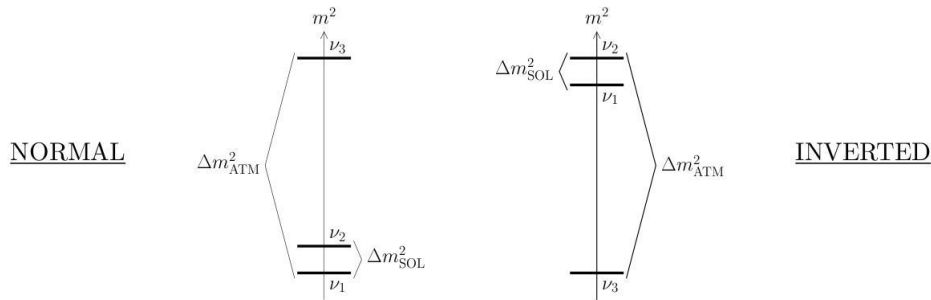
$$Q = I_{3L} + I_{3R} + \frac{B - L}{2} \quad (5.127)$$

Όταν συζητήσαμε τον μηχανισμό See-Saw έχουμε κάνει σκόπιμα μια μικρή παράληψη. Οι σχέσεις με τους λόγους των μαζών ισχύουν στην κλίμακα ενέργειας της μεγάλης ενοποίησης. Για να εκφράσουμε τους λόγους αυτούς στην κλίμακα ενεργειών μας πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις της ομάδας επανακανονικοποίησης. Για παράδειγμα στην περίπτωση της $SO(10)$ η εξίσωση (5.110) γίνεται

$$m_1 : m_2 : m_3 = 0.05 (m_u^D)^2 : 0.07 (m_c^D)^2 : 0.18 (m_t^D)^2 \quad (5.128)$$

6 Άμεση μέτρησης της μάζας των νετρίνων

Όπως έχουμε συζητήσει οι πληροφορίες που έχουμε από τις ταλαντώσεις αφορούν τις διαφορές Δm^2 . Η απόλυτη κλίμακα μάζας είναι άγνωστη. Θα δούμε πως μπορούμε να θέσουμε κάποια όρια στην μάζα των νετρίνων. Επίσης όπως είδαμε οι φάσεις Majorana δεν επηρεάζουν τις ταλαντώσεις. Πρέπει με κάποιο τρόπο να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε την φύση των νετρίνων. Θα δούμε ότι αυτό μπορεί να γίνει μελετώντας διπλές β -διασπάσεις. Στο σχήμα 13 παρουσιάζονται τα δύο πιθανά φάσματα.



Σχήμα 13: Το φάσμα της μάζας των νετρίνων.

6.1 β - Διάσπαση

Η β -διάσπαση υπήρξε η διαδικασία που εισήγαγε το νεutrino στην φυσική στοιχειωδών σωματιδίων. Η διαδικασία είναι γνώστη από τόσο παλιά που θα περίμενε κανείς ότι δεν έχει να μας δώσει νέες πληροφορίες. Ωστόσο αυτό δεν ισχύει. Η β -διάσπαση μπορεί να μας δώσει την μάζα των νετρίνων, αλλά η μάζα είναι τόσο μικρή που οι αποκλίσεις σε σχέση με την περίπτωση των άμαζων νετρίνων είναι ελάχιστες.

Κατά την β -διάσπαση η ενέργεια που απελευθερώνεται γίνεται κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου και ενέργεια του νετρίνου

$$Q_\beta = E_e + E_\nu. \quad (6.1)$$

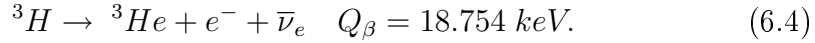
Στην οριακή περίπτωση που το ηλεκτρόνιο αποκτά την μέγιστη κινητική ενέργεια, το νεutrino δεν έχει ορμή, έτσι

$$E_{e-max} = Q_\beta - m_{\nu_e} \quad (6.2)$$

Στην περίπτωση της επιτρεπόμενης β -διάσπασης έχουμε

$$\frac{d\Gamma}{dE_e} = \frac{G_F^2 m_e^5}{2\pi^3} \cos^2 \theta_C |\mathcal{M}|^2 F(Z, E_e) E_e p_e (Q_\beta - E_e) \sqrt{(Q_\beta - E_e)^2 - m_{\nu_e}^2}. \quad (6.3)$$

Ενώ θεωρητικά όλα δείχνουν εύκολα, το πρόβλημα είναι ότι κοντά στο μέγιστο του φάσματος συμβαίνουν πολύ λίγα γεγονότα, οπότε η στατιστική δεν επαρκεί για να διεξάγουμε συμπεράσματα. Αποδεικνύεται ότι όσο χαμηλότερη είναι η τιμή Q_β τόσο καλύτερη στατιστική στο άνω όριο που φάσματος έχουμε. Το πιο ακριβές όριο πειραματικά έχει προκύψει από την β -διάσπαση του τριτίου



Υπάρχουν άλλοι δύο λόγοι για τους οποίους η συγκεκριμένη διάσπαση είναι καλή πηγή πληροφοριών για την μάζα των νετρίνων. Η διάσπαση είναι υπερεπιτρεπτή, οπότε το πυρηνικό στοιχείο μήτρας είναι πολύ μεγάλο. Ακόμα, επειδή το άτομο είναι σχετικά απλό, οι υπολογισμοί μπορούν να γίνουν με πολύ μεγάλη ακρίβεια.

Ορίζουμε την συνάρτηση Kurie ως

$$K(E_e) = \left[(Q_\beta - E_e) \sqrt{(Q_\beta - E_e)^2 - m_{\nu_e}^2} \right]^{1/2} \quad (6.5)$$

Αν παραλείψουμε την μάζα του νετρίνο τότε

$$K(E_e) = Q_\beta - E_e, \quad (6.6)$$

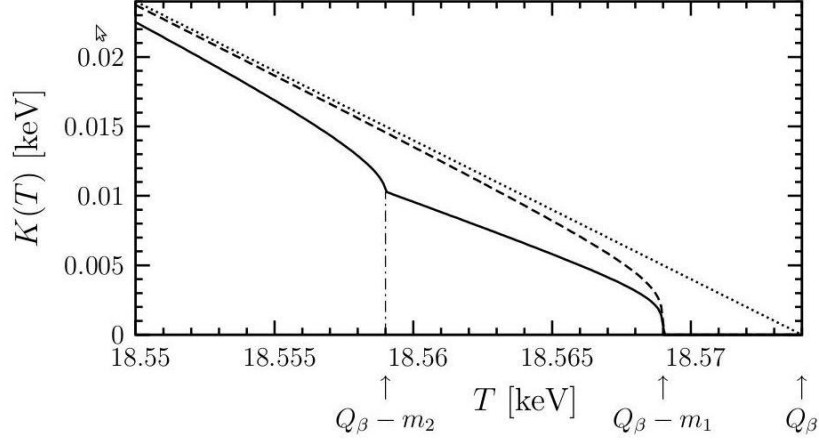
οπότε αν μετρήσουμε το μέγιστο του φάσματος μιας β -διάσπασης και το συγκρίνουμε με την παραπάνω τιμή μπορούμε να προσδιορίσουμε την μάζα του νετρίνο. Πρακτικά αυτό που συμβαίνει είναι να μετράται η απόκλιση του διαγράμματος από τη ευθεία. Στο σχήμα 14 παρουσιάζεται ένα διάγραμμα Kurie καθώς και η επίδραση που έχει η μίξη σε αυτό.

Με αυτή την μέθοδο τα πειράματα Mainz και Troitzk έχουν προσδιορίσει τα ακόλουθα όρια

$$m_{\nu_e} < 2.3 \text{ eV} \quad (95\%C.L.) \quad (6.7)$$

$$m_{\nu_e} < 2.5 \text{ eV} \quad (95\%C.L.) \quad (6.8)$$

Οι δύο ομάδες έχουν πλέον ενωθεί και εργάζονται στο πείραμα KATRIN, το οποίο μπορεί έχει ευαισθησία 0.2 eV



Σχήμα 14: Το διάγραμμα Kurie μιας β -διάσπασης. Η ευθεία γραμμή αντιστοιχεί στην περίπτωση των άμαζων νετρίνων, η διακεκομμένη καμπύλη στην περίπτωση που το νεutrino έχει μάζα, ενώ η συνεχόμενη καμπύλη αντιστοιχεί στην περίπτωση που το νεutrino είναι επαλληλία δύο ιδιοκαταστάσεων μάζας.

Μια εναλλακτική μέθοδος είναι η χρήση cryogenic microcalorimeters, τα οποία μετράνε την συνολική ενέργεια που απελευθερώνεται σε μια β -διάσπαση. Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από τελική κατάσταση των ατόμων. Ένα πείραμα με ^{187}Re , το οποίο έχει την μικρότερη τιμή $Q_\beta = 2.47 \text{ eV}$ είχε ως αποτέλεσμα

$$m_{\nu_e} < 26 \text{ eV} \quad 95\%C.L. \quad (6.9)$$

Η τιμή δεν είναι ιδιαίτερα περιοριστική, αλλά είναι μια πολλά υποσχόμενη τεχνική.

Μέχρι στιγμής δεν έχουμε λάβει υπόψιν μας την μίξη των νετρίνων. Για να συμπεριλάβουμε την μίξη στην ανάλυση μας αναλύουμε την διάσπαση ως

$${}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + e^- + \bar{\nu}_k \quad (6.10)$$

Αν υπάρχει μίξη με ανενεργά νετρίνα το άθροισμα πρέπει να συμπεριλάβει και αυτά. Οπότε πειράματα β -διάσπασεων μπορούν να δώσουν και τέτοιου είδους πληροφορίες. Η συνάρτηση Kurie ορίζεται ως

$$K(E_e) = \left[(Q_\beta - E_e) \sum_k |U_{ek}|^2 \sqrt{(Q_\beta - E_e) - m_k^2} \right]^{1/2} \quad (6.11)$$

Στην περίπτωση της μίξης η μετατόπιση του άνω άκρου του φάσματος δίνει πληροφορίες για την μάζα του ελαφρύτερου νετρίνο

$$m_{light} = Q_\beta - E_{e-max}. \quad (6.12)$$

Επίσης παρατηρούνται βυθίσεις για σημεία

$$E_{e-k} = Q_\beta - m_k \quad m_k \neq m_{light} \quad (6.13)$$

ανάλογες του $|U_{ek}|^2$. Πρέπει να πούμε πως στην περίπτωση που ένα πείραμα δεν ανιχνεύσει επίδραση της μάζας του νετρίνο τότε η ακρίβεια στην μέτρηση $Q_\beta - E_e$ είναι πολύ μεγαλύτερη από την μάζα του νετρίνο. Έτσι για $m_k \ll Q_\beta - E_e$ έχουμε

$$K^2 \simeq (Q_\beta - E_e) \sqrt{(Q_\beta - E_e)^2 - m_\beta^2} \quad m_\beta^2 = \sum_k |U_{ek}| m_k^2. \quad (6.14)$$

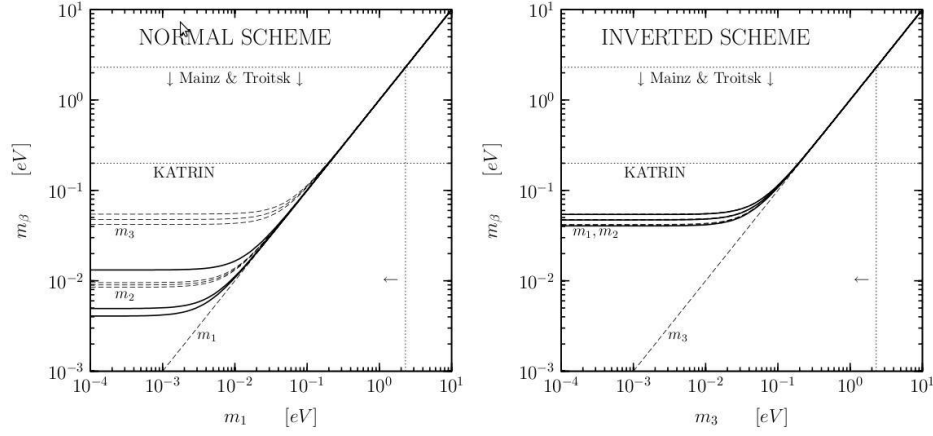
Η έκφραση είναι ίδια με την αντίστοιχη έκφραση για μια γενιά, και έτσι αναγνωρίζουμε το m_β ως την ενεργό μάζα του νετρίνο στην β-διάσπαση. Στην τυπική παραμετροποίηση έχουμε

$$m_\beta^2 = c_{12}^2 c_{13}^2 m_1^2 + s_{12}^2 c_{13}^2 m_2^2 + s_{13}^2 m_3^2. \quad (6.15)$$

Από τις ταλαντώσεις έχουμε πληροφορίες για τις διαφορές μαζών Δm_{21}^2 και Δm_{31}^2 και τις γωνίες μίξης θ_{12} και θ_{13} . Έτσι μπορούμε να εκφράσουμε την ενεργό μάζα των νετρίνων στην β-διάσπαση ως συνάρτηση της μάζας του ελαφρύτερου νετρίνο. Στο σχήμα 15 παρουσιάζεται η αντίστοιχη καμπύλη. Στο φυσιολογικό φάσμα το μεγάλο εύρος οφείλεται στην έλλειψη ακριβείας για την τιμή της γωνίας μίξης θ_{13} . Στην περίπτωση του ανεστραμμένου φάσματος η ενεργός μάζα πρακτικά συμπίπτει με τις μάζες m_1 και m_2 . Στην περίπτωση του εκφυλισμού

$$m_\beta^2 \simeq m_\nu^2 \sum_k |U_{ek}|^2 = m_\nu^2. \quad (6.16)$$

Ακόμα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις οι τιμές της ενεργού μάζας δεν επικαλύπτονται. Οπότε τα μελλοντικά πειράματα μπορούν να αποκλείσουν ή να επιβεβαιώσουν την ανεστραμμένη ιεραρχία αν φτάσουν την ακρίβειά τους στα $4 \times 10^{-2} eV$. Μια ολική διερεύνηση είναι εφικτή καθώς για να εξετάσουμε όλα τα ενδεχόμενα αρκεί να φτάσουμε την ακρίβεια στα $4 \times 10^{-2} eV$.



Σχήμα 15: Η ενεργός μάζα των νετρίνων στην β -διάσπαση συναρτήση της μάζας του ελαφρύτερου νετρίνο για τις δύο περιπτώσεις φάσματος.

6.2 Διπλή β - Διάσπαση

Η διπλή β -διάσπαση $2\beta_{2\nu}$ είναι μια διαδικασία που είχε προταθεί ήδη από τον M. Goerpert - Meyer το 1935. Πρόκειται για την διαδικασία

$$\mathcal{N}(A, Z) \rightarrow \mathcal{N}(A, Z \pm 2) + e^\mp + 2\bar{\nu}_e. \quad (6.17)$$

Στην περίπτωση της διπλής β -διάσπασης χωρίς εκπομπή νετρίνων $2\beta_{0\nu}$ η διαδικασία είναι

$$\mathcal{N}(A, Z) \rightarrow \mathcal{N}(A, Z \pm 2) + 2e^\mp. \quad (6.18)$$

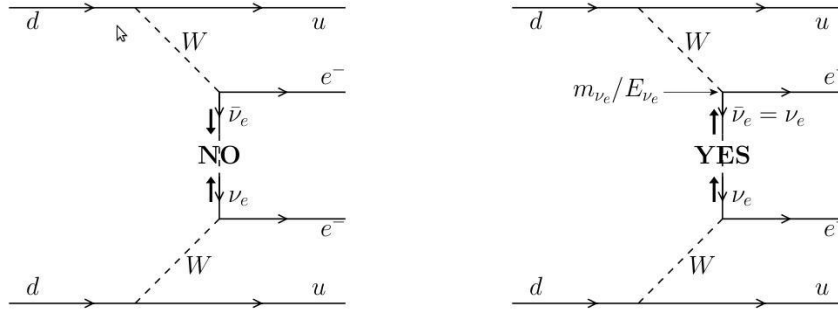
Σαν διαδικασία δεύτερης τάξης είναι πολύ συμπιεσμένη, οπότε η παρατήρησή της γίνεται σε πυρήνες όπου η β -διάσπαση δεν είναι επιτρεπτή. Η διάκριση των δύο διαδικασιών γίνεται από το φάσμα του αθροίσματος της ενέργειας των ηλεκτρονίων. Στην περίπτωση $2\beta_{2\nu}$ το φάσμα είναι συνεχές ενώ στην περίπτωση $2\beta_{0\nu}$ στο φάσμα υπάρχει μια μόνο γραμμή στην τιμή Q της διάσπασης. Από το πείραμα Heidelberg - Moscow το οποίο χρησιμοποιεί ^{76}Ge έχουμε το όριο

$$T_{1/2}^{0\nu}(^{76}\text{Ge}) > 1.9 \times 10^{25} \text{ y} \quad (90\%C.L.) \quad (6.19)$$

Υπήρξε και ένας ισχυρισμός για ανίχνευση της $2\beta_{0\nu}$, αλλά αμφισβητήθηκε αρκετά, οπότε η ανίχνευση της $2\beta_{0\nu}$ θεωρείται στόχος των μελλοντικών πειραμάτων.

Για να συμβεί $2\beta_{0\nu}$ πρέπει να τηρούνται δύο προϋποθέσεις: τα νετρίνα είναι σωματίδια Majorana και να μην είναι άμαζα. Αν έχουν μάζα υπάρχει μια σχετική

πιθανότητα m_{ν_e}/E_{ν_e} να γίνει εκπομπή νετρίνο με αντίθετη ελικότητα και να είναι εφικτή η διάσπαση. Στο σχήμα 16 παρουσιάζεται η διάσπαση και αυτές οι προϋποθέσεις.



Σχήμα 16: Σχηματική αναπαράσταση της διπλής β -διάσπασης χωρίς εκπομπή νετρίνων, καθώς και οι απαραίτητες προϋποθέσεις για να είναι εφικτή η διάσπαση.

Η ενεργός μάζα που συμμετέχει στην διαδικασία είναι

$$m_{2\beta} = \sum_k U_{ek}^2 m_k. \quad (6.20)$$

Με την τυπική παραμετροποίηση η ενεργός μάζα εκφράζεται ως

$$m_{2\beta} = c_{12}^2 c_{13}^2 m_1 + e^{2i\lambda_2} s_{12}^2 c_{13}^2 m_2 + e^{2i(\lambda_3 - \delta)} m_3 \\ |U_{e1}|^2 m_1 + e^{i\alpha_2} |U_{e2}|^2 m_2 + e^{i\alpha_3} |U_{e3}|^2 m_3, \quad \alpha_3 = 2\lambda_2, \alpha_2 = 2(\lambda_3 - \delta) \quad (6.21)$$

Η συμμετρία CP διατηρείται όταν $\delta = 0, \pi$ και $\lambda_k = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$, οπότε οι φάσεις α_k γίνονται

$$\alpha_k = 0, \pi \quad e^{i\alpha_k} = \pm 1. \quad (6.22)$$

Διακρίνονται έτσι 4 περιπτώσεις στις οποίες έχουμε πραγματική μάζα

$$(++) \quad m_{2\beta} = |U_{e1}|^2 m_1 + |U_{e2}|^2 m_2 + |U_{e3}|^2 m_3 \quad (6.23)$$

$$(+ -) \quad m_{2\beta} = |U_{e1}|^2 m_1 + |U_{e2}|^2 m_2 - |U_{e3}|^2 m_3 \quad (6.24)$$

$$(-+) \quad m_{2\beta} = |U_{e1}|^2 m_1 - |U_{e2}|^2 m_2 + |U_{e3}|^2 m_3 \quad (6.25)$$

$$(--)\quad m_{2\beta} = |U_{e1}|^2 m_1 - |U_{e2}|^2 m_2 - |U_{e3}|^2 m_3 \quad (6.26)$$

Η μέγιστη δυνατή τιμή του $m_{2\beta}$ αντιστοιχεί στην περίπτωση ++ που έχουμε

$$m_{2\beta}^{max} = \sum_k |U_{ek}|^2 m_k \quad (6.27)$$

ενώ κάποια από τις υπόλοιπες τρεις περιπτώσεις (ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων) αντιστοιχεί στην ελάχιστη ενεργό μάζα.

Η διπλή β-διάσπαση μπορεί να συμβεί και με ανταλλαγή άλλων σωματιδίων, ή μέσω άλλων αλληλεπιδράσεων. Γενικά όλοι αυτοί οι μηχανισμοί συμβάλλουν και αυτοί στην διαδικασία ο καθένας με την δική του συμπίεση. Παρόλα αυτά μπορεί να δει κανείς ότι τα νετρίνα Majorana με μάζα είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την $2\beta_{0\nu}$.

Στην $2\beta_{0\nu}$ ο χρόνος ημιζωής δίνεται από την σχέση

$$[T_{1/2}^{0\nu}(\mathcal{N})]^{-1} = G_{0\nu}^{\mathcal{N}} |\mathcal{M}_{0\nu}^{\mathcal{N}}|^2 \frac{|m_{2\beta}|^2}{m_e^2}, \quad (6.28)$$

όπου $G_{0\nu}^{\mathcal{N}}$ και $\mathcal{M}_{0\nu}^{\mathcal{N}}$ είναι ο παράγοντας του φασικού χώρου και το πυρηνικό στοιχείο μήτρας αντίστοιχα. Ο παράγοντας του φασικού χώρου μπορεί να υπολογιστεί με πολύ μεγάλη ακρίβεια, αλλά ο υπολογισμός του πυρηνικού στοιχείου μήτρας είναι ιδιαίτερα δύσκολος και εξαρτάται από το πυρηνικό μοντέλο. Για το ^{76}Ge έχουμε

$$G_{0\nu}^{76\text{Ge}} = 6.31 \times 10^{-15} y^{-1} \quad (6.29)$$

$$1.5 \leq |\mathcal{M}_{0\nu}^{76\text{Ge}}| \leq 4.6 \quad (6.30)$$

με τις τιμές αυτές προκύπτει

$$|m_{2\beta}| \leq 0.3 - 1.0 \text{ eV}. \quad (6.31)$$

Βλέπουμε ότι η έλλειψη ακρίβειας στον υπολογισμό του πυρηνικού στοιχείου μήτρας επηρεάζει πολύ την ακρίβεια της ενεργής μάζας που προβλέπουμε. Παρόλα αυτά η ανίχνευση της $2\beta_{0\nu}$ αρκεί για να μας επιβεβαιώσει ότι τα νετρίνα είναι σωματίδια Majorana.

6.2.1 Φυσιολογικό Φάσμα

Στο φυσιολογικό φάσμα ελαφρύτερη μάζα είναι η m_1 οπότε

$$m_{2\beta} = |U_{e1}|^2 m_1 + e^{i\alpha_2} |U_{e2}|^2 \sqrt{m_1^2 + \Delta m_{SOL}^2} + e^{i\alpha_3} |U_{e3}|^2 \sqrt{m_1^2 + \Delta m_{ATM}^2} \quad (6.32)$$

Συνήθως ο τελευταίος όρος παραλείπεται αφού $|U_{e3}| \ll |U_{e1}|, |U_{e2}|$. Στην περιοχή εκφυλισμού επιπλέον έχουμε $m_1 \gg \Delta m_{ATM}^2$ οπότε

$$m_{2\beta} \simeq m_1 (|U_{e1}|^2 + e^{i\alpha_2} |U_{e2}|) \quad (6.33)$$

Στις 4 περιπτώσεις που διατηρούν την συμμετρία CP έχουμε

$$(++) , (+-) \quad m_{2\beta} \simeq m_1 \quad (6.34)$$

$$(-+) , (--) \quad m_{2\beta} \simeq m_1 (|U_{e1}|^2 - |U_{e2}|^2) \simeq m_1 \cos 2\theta_{12}. \quad (6.35)$$

Στην περιοχή όπου επικρατούν οι διαφορές Δm^2 οι τιμές των μαζών είναι

$$m_2 \simeq \sqrt{\Delta m_{SOL}^2} \quad m_3 \simeq \sqrt{\Delta m_{ATM}^2} \quad (6.36)$$

Χρησιμοποιώντας της τιμές που προκύπτουν από της ταλαντώσεις βλέπουμε ότι η ενεργός μάζα μπορεί να μηδενίζεται στις περιπτώσεις $(-+)$ και $(--)$ όταν

$$m_1 = \tan^2 \theta_{12} \sqrt{\Delta m_{SOL}^2} \simeq 4 \times 10^{-3} \rightarrow m_{2\beta} = 0 \quad (6.37)$$

Για ακόμα μικρότερες τιμές του m_1 καταλήγουμε

$$m_{2\beta} \simeq |U_{e2}|^2 \sqrt{\Delta m_{SOL}^2} \simeq 2.7 \times 10^{-3} \quad (6.38)$$

ανεξαρτήτως των φάσεων α_2 και α_3 .

Στην περίπτωση του φυσιολογικού φάσματος στην μη εκφυλισμένη περιοχή η ενεργός μάζα δεν έχει κάτω φράγμα, έχει όμως άνω φράγμα

$$|m_{2\beta}| \leq 6 \times 10^{-3} \text{ eV} \quad m_1 \leq 10^{-3} \text{ eV} \quad (6.39)$$

6.2.2 Ανεστραμμένο Φάσμα

Στο ανεστραμμένο φάσμα έχουμε $m_1 \simeq m_2 \gg m_3$

$$m_{2\beta} = (|U_{e1}|^2 + e^{i\alpha_2}|U_{e2}|^2) \sqrt{m_3^2 + \Delta m_{ATM}^2} + e^{i\alpha_3}|U_{e3}|^2 m_3 \quad (6.40)$$

Πάλι ο τελευταίος όρος παραλείπεται, αλλά τώρα δεν μπορεί να υπάρχει μηδενισμός της ενεργού μάζας αφού τα στοιχεία του πίνακα μίξης $|U_{e1}|$ και $|U_{e2}|$ απέχουν πολλά σ . Στην περιοχή εκφυλισμού ισχύει ότι και στο φυσιολογικό φάσμα μόνο που το m_1 αντικαθιστάται από το m_3 . Στην περιοχή όπου $\sqrt{\Delta m_{ATM}^2} \gg m_3$ για τις περιπτώσεις που διατηρούν την συμμετρία CP έχουμε

$$(++) , (+-) \quad m_{2\beta} \simeq \sqrt{\Delta m_{ATM}^2} \quad (6.41)$$

$$(-+) , (--) \quad m_{2\beta} \simeq \sqrt{\Delta m_{ATM}^2} (|U_{e1}|^2 - |U_{e2}|^2) \simeq \sqrt{\Delta m_{ATM}^2} \cos 2\theta_{12} \quad (6.42)$$

Η ενεργός μάζα είναι φραγμένη

$$9 \times 10^{-3} \text{ eV} \leq |m_{2\beta}| \leq 5 \times 10^{-2} \text{ eV} \quad m_3 \leq 10^{-2} \text{ eV}. \quad (6.43)$$

Στο σχήμα 17 είναι σχεδιασμένη η ενεργός μάζα των νετρίνων στην διπλή β -διάσπαση. Βλέπουμε ότι τα όρια για την ενεργό μάζα στην περίπτωση του φυσιολογικού και του ανεστραμμένου φάσματος δεν επικαλύπτονται. Επομένως με την διπλή β -διάσπαση εκτός από την φύση των νετρίνων μπορούμε να ξεχωρίσουμε και το φάσμα τους αν η ακρίβεια των πειραμάτων φτάσει το $9 \times 10^{-3} \text{ eV}$.

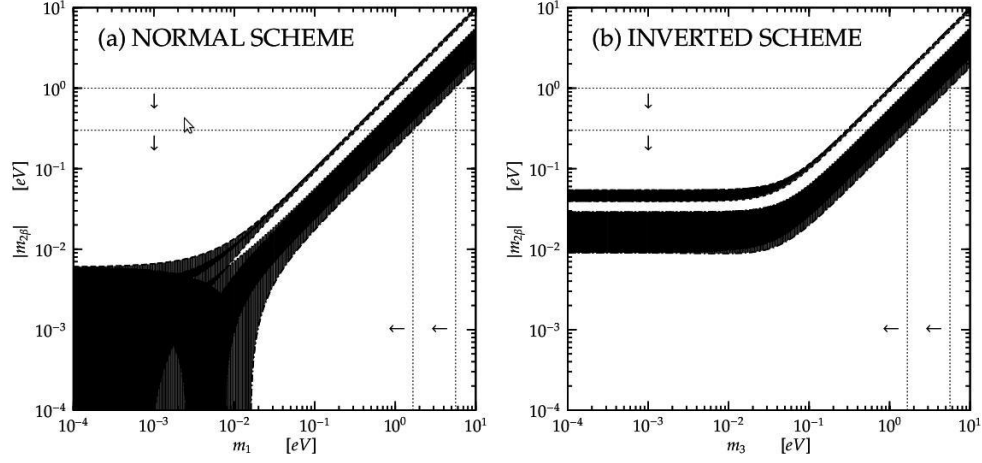
6.3 Άλλα Όρια

Όρια στην μάζα των νετρίνων υπάρχουν από διασπάσεις πιονίων και τ . Τα όρια αυτά δεν είναι τόσο στενά αλλά η αξία τους ήταν ότι απέκλεισαν την περίπτωση των ανενεργών νετρίνων με μάζα μεγαλύτερη από το όριο. Από τις διασπάσεις πιονίων έχουμε

$$m_k < 0.17 \text{ MeV} \quad (90\%C.L.), \quad (6.44)$$

ενώ από τις διασπάσεις τ έχουμε

$$m_k < 18.2 \text{ MeV} \quad (90\%C.L.) \quad (6.45)$$



Σχήμα 17: Η ενεργός μάζα των νετρίνων στην διπλή β -διάσπαση. Οι λευκή λωρίδα αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου παραβιάζεται η συμμετρία CP

Από αναλύσεις που έχουν γίνει στα νετρίνα του υπερκαινοφανούς SN1987A υπάρχει το γενικό όριο

$$m_k \leq 30 \text{ eV}, \quad (6.46)$$

ενώ αν η ανάλυση γίνει με κάποιο συγκεκριμένο μοντέλο το όριο κυμαίνεται από 5 ως 30 eV.

Από μια συνολική ανάλυση των κοσμολογικών παρατηρήσεων μπορούμε να εκτιμήσουμε ότι

$$\sum_j m_j \leq 0.5 \sim 1.0 \text{ eV} \quad (6.47)$$

Παράρτημα

1 Σχετικιστική Κβαντομηχανική

Η θεωρία των στοιχειωδών σωματιδίων είναι στενά συνδεδεμένη με την ομάδα Poincare. Για την ακρίβεια όλα τα σωματίδια ανήκουν σε κάποια αναπαράσταση της ομάδας Poincare, ενώ η απαίτηση η φυσική να είναι ίδια για όλους τους παρατηρητές έχει ως αποτέλεσμα η μορφή των εξισώσεων να είναι σχετικιστικά αναλλοίωτη. Υπό το πρίσμα της σχετικότητας θα μπορούσε να πει κανείς ότι ο πλέον θεμελιώδης διαχωρισμός των σωματιδίων είναι ο διαχωρισμός τους σε σωματίδια με μάζα και σε σωματίδια χωρίς μάζα. Εκτός από το τετριμμένο ότι τα άμαζα σωματίδια κινούνται με την ταχύτητα του φωτός, η οποία είναι σταθερή σε όλα τα συστήματα αναφοράς, εν αντιθέσει με τα μαζικά σωματίδια των οποίων η ταχύτητα εξαρτάται πάντα από το σύστημα αναφοράς, υπάρχουν πάρα πολλές ιδιότητες οι οποίες καταδεικνύουν πόσο διαφορετική είναι η φύση ενός σωματιδίου με μάζα σε σχέση με ένα άμαζο σωματίδιο. Οι διαφορές αυτές θα παρουσιαστούν στο παρόν κεφάλαιο.

1.1 Οι Ομάδες Lorentz και Poincare

Η ομάδα Poincare ή η μη ομογενής ομάδα Lorentz είναι η ομάδα των χωροχρονικών μετασχηματισμών που διατηρούν αναλλοίωτο το στοιχειώδες χωροχρονικό μήκος

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}d\hat{x}^\mu d\hat{x}^\nu, \quad (1.1)$$

ισοδύναμα

$$g_{\kappa\lambda} \frac{\partial \hat{x}^\kappa}{\partial x^\mu} \frac{\partial \hat{x}^\lambda}{\partial x^\nu} = g_{\mu\nu}. \quad (1.2)$$

Ο γενικότερος μετασχηματισμός που ικανοποιεί αυτή την σχέση είναι γραμμικός⁵, οπότε η δράση των μετασχηματισμών Poincare είναι

$$x^\mu \rightarrow \hat{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + \alpha^\mu, \quad (1.3)$$

όπου α^μ είναι ένα τυχαίο σταθερό τετράνυσμα και $\Lambda^\mu{}_\nu$ ένας σταθερός πίνακας ο οποίος υπόκειται στον περιορισμό

$$g_{\mu\nu} = g_{\kappa\lambda} \Lambda^\kappa{}_\mu \Lambda^\lambda{}_\nu. \quad (1.4)$$

⁵Υπάρχει μια ευρύτερη ομάδα χωροχρονικών μετασχηματισμών, η ομάδα των σύμμορφων μετασχηματισμών, για την οποία το στοιχειώδες μήκος $g_{\mu\nu}d\hat{x}^\mu d\hat{x}^\nu$ εν γένει είναι ανάλογο του στοιχειώδους μήκους $g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, ωστόσο η φυσική σημασία των σύμμορφων μετασχηματισμών στον τετραδιάστατο χωρόχρονο δεν είναι ακόμα ξεκάθαρη.

Υπό μορφή πινάκων η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί

$$\Lambda^T g \Lambda = g. \quad (1.5)$$

Παίρνοντας την ορίζουσα αυτής της σχέσης έχουμε

$$(Det(\Lambda))^2 = 1 \quad \rightarrow \quad Det(\Lambda) = \pm 1. \quad (1.6)$$

Το αποτέλεσμα αυτό μας εγγυάται την φυσικά αναμενόμενη ύπαρξη αντίστροφου μετασχηματισμού

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu = g_{\nu\kappa} g_{\mu\lambda} \Lambda^\kappa{}_\lambda. \quad (1.7)$$

Η δράση δύο διαδοχικών μετασχηματισμών μας δίνει

$$\ddot{x}^\mu = \ddot{\Lambda}^\mu{}_\kappa \dot{x}^\kappa + \ddot{a}^\mu = \ddot{\Lambda}^\mu{}_\kappa \left(\dot{\Lambda}^\kappa{}_\nu x^\nu + \dot{a}^\kappa \right) + \ddot{a}^\mu, \quad (1.8)$$

οπότε διαπιστώνουμε ότι η δράση δυο μετασχηματισμών ισοδυναμεί με την δράση ενός μετασχηματισμού της μορφής

$$\ddot{x}^\mu = \left(\ddot{\Lambda}^\mu{}_\kappa \dot{\Lambda}^\kappa{}_\nu \right) x^\nu + \left(\ddot{\Lambda}^\mu{}_\kappa \dot{a}^\kappa + \ddot{a}^\mu \right). \quad (1.9)$$

Από την σχέση (1.6) βλέπουμε ότι υπάρχουν κανονικοί μετασχηματισμοί με $Det(\Lambda) = 1$, οι οποίοι σχηματίζουν μια υποομάδα της ομάδας Lorentz \mathcal{L}_+ (είτε ομογενούς είτε μη ομογενούς). Οι μη κανονικοί μετασχηματισμοί με $Det(\Lambda) = -1$ δεν αποτελούν ομάδα και συμβολίζονται \mathcal{L}_- .

Θέτοντας $\mu = \nu = 0$ στην (1.4) παίρνουμε

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i{}_0)^2, \quad (1.10)$$

από όπου προκύπτει

$$\Lambda^0{}_0 \geq 1 \quad \text{ή} \quad \Lambda^0{}_0 \leq -1. \quad (1.11)$$

Μετασχηματισμοί με $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ λέγονται ορθόχρονοι και αποτελούν την υποομάδα \mathcal{L}^\dagger , ενώ μετασχηματισμοί με $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ λέγονται ανάχρονοι, δεν αποτελούν ομάδα και συμβολίζονται \mathcal{L}^\ddagger .

Κάθε μετασχηματισμός Lorentz ανήκει σε κάποια κατηγορία ανάλογα με τα πρόσημα των $Det(\Lambda)$ και $\Lambda^0{}_0$. Η υποομάδα \mathcal{L}^\dagger ονομάζεται περιορισμένη ομάδα Lorentz και στην περίπτωση της ομογενούς ομάδας Lorentz σχηματίζουν μια

συνεχή ομάδα 6 παραμέτρων. Θεωρώντας τον απειροστό μετασχηματισμό της μορφής

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \epsilon \omega^\mu{}_\nu \quad a^\mu = \delta b^\mu, \quad (1.12)$$

όπου $|\epsilon| \ll 1$ και $|\delta| \ll 1$ η σχέση (1.4) γίνεται

$$g_{\mu\nu} = g_{\kappa\lambda} (\delta^\kappa{}_\nu + \epsilon \omega^\kappa{}_\nu) (\delta^\lambda{}_\mu + \epsilon \omega^\lambda{}_\mu) \quad (1.13)$$

$$= g_{\mu\nu} + \epsilon (\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (1.14)$$

από όπου βλέπουμε ότι η σχέση (1.4) ισοδυναμεί με την απαίτηση της αντισυμμετρικότητας του $\omega_{\mu\nu}$

$$\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = 0. \quad (1.15)$$

Πράγματι το ω έχει 6 ανεξάρτητες παραμέτρους αφού είναι αντισυμμετρικός πίνακας 4×4 . Η ομάδα Poincare έχει 10 συνεχείς παραμέτρους, τους 6 που αντιστοιχούν στην ομάδα Lorentz και 4 που αντιστοιχούν στην μετατόπισεις.

Ένας πεπερασμένος περιορισμένος μετασχηματισμός Lorentz κατασκευάζεται με διαδοχική δράση απειροστών μετασχηματισμών

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \left(\delta_{i+1}^i + \frac{\omega^i{}_{i+1}}{N} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\left(\mathbf{1} + \frac{\omega}{N} \right)^N \right]^\mu{}_\nu = [e^\omega]^\mu{}_\nu, \quad (1.16)$$

όπου $i_1 = \mu$ και $i_{N+1} = \nu$.

Κάθε μετασχηματισμός Lorentz μπορεί να γραφεί ως γινόμενο ενός περιορισμένου μετασχηματισμού Lorentz και ενός από τους ακόλουθους διακριτούς μετασχηματισμούς:

Αναστροφή Χώρου $P = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \in \mathcal{L}_-^\dagger$

Αναστροφή Χρόνου $T = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \in \mathcal{L}_-^\dagger$

Αναστροφή Χώρου και Χρόνου $PT = \text{diag}(-1, -1, -1, -1) \in \mathcal{L}_+^\dagger$

1.1.1 Αναπαραστάσεις

Οι γενικότερες αφηρημένες έννοιες σε σχέση με τις ομάδες πρέπει να γίνουν πιο συγκεκριμένες, άρα για τον λόγο αυτό πρέπει να μελετηθούν οι αναπαραστάσεις. Η αναπαράσταση δρα ως τελεστής πάνω σε κάποιο αντικείμενο

και εκφράζει την μεταβολή του αντικειμένου υπό την δράση του μετασχηματισμού. Για παράδειγμα η δράση της ομάδας Poincare σε κάποιο αντικείμενο $|\Psi\rangle$ συνοψίζεται ως

$$|\Psi\rangle \rightarrow |\hat{\Psi}\rangle = \mathcal{D}(\Lambda, \alpha) |\Psi\rangle. \quad (1.17)$$

Ο τελεστής $\mathcal{D}(\Lambda, a)$ πρέπει να υπακούει την σχέση πολλαπλασιασμού (1.9), οπότε

$$\mathcal{D}(\Lambda_2, a_2)\mathcal{D}(\Lambda_1, a_1) = \mathcal{D}(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2). \quad (1.18)$$

Επίσης, από την απαίτηση της διατήρησης του εσωτερικού γινομένου πρέπει οι τελεστές να είναι unitary

$$\mathcal{D}^\dagger \mathcal{D} = \hat{\mathbf{1}}. \quad (1.19)$$

Για να κατασκευάσουμε την αναπαράσταση ξεκινάμε από τον ταυτοτικό τελεστή $\mathcal{D}(1, 0) = \hat{\mathbf{1}}$ και προσθέτουμε τους απειροστούς μετασχηματισμούς της σχέσης (1.12). Τότε ο τελεστής πρέπει να είναι ίσος με τον ταυτοτικό τελεστή και κάποιο γραμμικό ως προς τον μετασχηματισμό τμήμα

$$\mathcal{D}(1 + \epsilon\omega, \delta b) = \hat{\mathbf{1}} + \frac{1}{2}\iota\epsilon\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \iota\delta b_\mu P^\mu + \dots. \quad (1.20)$$

Για να είναι μοναδιακός ο τελεστής \mathcal{D} πρέπει οι τελεστές $J^{\mu\nu}$ και P^μ να είναι hermitian

$$(J^{\mu\nu})^\dagger = J^{\mu\nu} \quad (P^{\mu\nu})^\dagger = P^{\mu\nu}. \quad (1.21)$$

Αφού το ω είναι αντισυμμετρικό μπορούμε να επιλέξουμε και το \hat{J} να είναι αντισυμμετρικό, αφού η δράση του συμμετρικού τμήματός του θα μηδενίζεται. Η συνιστώσα P^0 είναι ο τελεστής που αντιστοιχεί στην ενέργεια, οπότε θα συμβολίζεται ως ο τελεστής της Hamiltonian H . Οι τελεστές J και P ικανοποιούν την ακόλουθη άλγεβρα Lie:

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \iota(J^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - J^{\nu\rho}g^{\mu\sigma} - J^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} + J^{\nu\sigma}g^{\mu\rho}) \quad (1.22\alpha')$$

$$[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = \iota(P^\rho g^{\mu\sigma} - P^\sigma g^{\mu\rho}) \quad (1.22\beta')$$

$$[P^\mu, P^\rho] = 0 \quad (1.22\gamma')$$

Από τους 6 γεννήτορες $J^{\mu\nu}$ μπορούμε να αναγνωρίσουμε τους τελεστές που αντιστοιχούν στην στροφορμή⁶

$$J^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk} J^{jk} \quad (1.23)$$

⁶Οι δείκτες με λατινικούς χαρακτήρες παίρνουν τιμές 1,2,3 εν αντιθέσει με τους ελληνικούς που παίρνουν 0,1,2,3.

και τους τελεστές που αντιστοιχούν στις προωθήσεις

$$K^i = J^{0i}. \quad (1.24)$$

Οι τελεστές αυτοί ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης:

$$[J^i, J^j] = \imath \epsilon_{ijk} J^k \quad (1.25\alpha')$$

$$[J^i, K^j] = \imath \epsilon_{ijk} K^k \quad (1.25\beta')$$

$$[K^i, K^j] = -\imath \epsilon_{ijk} J^k \quad (1.25\gamma')$$

Βλέπουμε ότι η στροφορμή αποτελεί ομάδα ενώ οι προωθήσεις όχι. Η σχέση (1.20) γράφεται στην μορφή

$$\mathcal{D}(\mathbf{1} + \epsilon\omega, \delta b) = \mathbf{1} + \imath \epsilon \lambda_k K^k + \imath \epsilon n_k J^k - \imath \delta b_\mu P^\mu + \dots, \quad (1.26)$$

όπου $\lambda_k = \omega_{0k}$ και $n_k = -\frac{1}{2} \epsilon_{kjl} \omega^{jl}$. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις μετάθεσης (1.25) στις σχέσεις μετάθεσης (1.22) έχουμε:

$$[J^i, J^j] = \imath \epsilon_{ijk} J^k \quad (1.27\alpha')$$

$$[J^i, K^j] = \imath \epsilon_{ijk} K^k \quad (1.27\beta')$$

$$[K^i, K^j] = -\imath \epsilon_{ijk} J^k \quad (1.27\gamma')$$

$$[J^i, P^j] = \imath \epsilon_{ijk} P^k \quad (1.27\delta')$$

$$[P^i, K^j] = \imath H \delta^{ij} \quad (1.27\epsilon')$$

$$[J^i, H] = [P^i, H] = [H, H] = [P^i, P^j] = 0 \quad (1.27\zeta')$$

$$[H, K^i] = \imath P^i \quad (1.27\eta')$$

Οι μετατοπίσεις ως ένα βαθμό είναι τετριμμένες. Το μεγάλο ενδιαφέρον υπάρχει στους γεννήτορες της ομάδας Lorentz. Αν ορίσουμε νέους γεννήτορες ως

$$M = \frac{J + \imath K}{2} \quad N = \frac{J - \imath K}{2}, \quad (1.28)$$

από τις σχέσεις μετάθεσης (1.25) καταλήγουμε στις σχέσεις μετάθεσης

$$[M^i, M^j] = \imath \epsilon_{ijk} M^k \quad (1.29\alpha')$$

$$[N^i, N^j] = \imath \epsilon_{ijk} N^k \quad (1.29\beta')$$

$$[M^i, N^j] = 0 \quad (1.29\gamma')$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η άλγεβρα της ομάδας Lorentz ισοδυναμεί με την άλγεβρα $SU(2)_M \times SU(2)_N$. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να κατατάξουμε όλα τα σωματίδια σε δυάδες (M, N) . Η χωρική αναστροφή αλλάζει το πρόσημο των γεννητόρων K ενώ αφήνει αναλλοίωτους τους γεννήτορες J , οπότε οι γεννήτορες M και N εναλλάσσονται,

$$I_P M (I_P)^{-1} = N, \quad I_P N (I_P)^{-1} = M \quad (1.30)$$

οπότε υπό την επίδραση μετασχηματισμών ομοτιμίας έχουμε την μετατατροπή

$$(M, N) \rightarrow (N, M). \quad (1.31)$$

Τα αριστερόστροφα φερμιόνια ανήκουν στην αναπαράσταση $(1/2, 0)$ ενώ τα δεξιόστροφα στην αναπαράσταση $(0, 1/2)$. Αφού στην φύση υπάρχουν μόνο αριστερόστροφα νετρίνα και δεξιόστροφα αντινετρίνα η ομοτιμία δεν μπορεί να είναι συμμετρία της φύσης.

1.1.2 Μετασχηματισμοί Πεδίων

Υπό την επίδραση μετασχηματισμών Lorentz σε πεδία είναι

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(\acute{x}) = S(\Lambda)\psi(x), \quad \psi(x) \equiv \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \vdots \\ \psi_n(x) \end{pmatrix}. \quad (1.32)$$

Στην περίπτωση $n = 0$, που αντιστοιχεί στα βαθμωτά, $S(\Lambda) = 0$, ενώ στην περίπτωση ότι $n = 1$, που αντιστοιχεί στα διανύσματα, $S(\Lambda) = \Lambda$. Στην περίπτωση απειροστού μετασχηματισμού Lorentz είναι

$$S(\mathbf{1} + \epsilon\omega) = \mathbf{1} + \frac{i}{2}\epsilon\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}, \quad (1.33)$$

όπου $S^{\mu\nu}$ είναι το τμήμα που αντιστοιχεί στο spin των γεννητόρων των μετασχηματισμών Lorentz. Ο πλήρης μετασχηματισμός είναι

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(\acute{x}) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}\acute{x}) = \mathcal{D}(\Lambda)\psi(\acute{x}), \quad (1.34)$$

οπότε σε απειροστό επίπεδο έχουμε

$$\begin{aligned} \psi'(\acute{x}) &= \left(\mathbf{1} + \frac{i}{2}\epsilon\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu} \right) \psi(x - \epsilon\omega x) \\ &= \left\{ \mathbf{1} + \frac{i}{2}\epsilon\omega_{\mu\nu} [-i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu) + S^{\mu\nu}] \right\} \psi(x). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Στην μορφή αυτή βλέπουμε ότι

$$\mathcal{D}(\mathbf{1} + \epsilon\omega) = \mathbf{1} + \frac{i}{2}\epsilon\omega_{\mu\nu} [-i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu) + S^{\mu\nu}]. \quad (1.36)$$

Η σύγκριση με την σχέση (1.20) δίνει

$$J^{\mu\nu} = -i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu) + S^{\mu\nu} \quad (1.37)$$

Οι γεννήτορες μπορούν να γραφούν ως

$$J^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu}, \quad (1.38)$$

οπου

$$L^{\mu\nu} = -i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu) = x^\nu P^\mu - x^\mu P^\nu \quad (1.39)$$

Οι γεννήτορες $L^{\mu\nu}$ ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης (1.22α'), οπότε υποχρεωτικά και οι γεννήτορες $S^{\mu\nu}$ ικανοποιούν τις ίδιες σχέσεις μετάθεσης. Ορίζοντας

$$L^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}L^{jk} = \sum_{j,k} \epsilon^{ijk}x^jP^k = (\vec{x} \times \vec{P})^k, \quad (1.40)$$

βλέπουμε ότι οι γεννήτορες $L^{\mu\nu}$ αντιστοιχούν στην τροχιακή στροφορμή. Οι γεννήτορες $S^{\mu\nu}$ παράγουν την ποσότητα

$$S^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}S^{jk}, \quad (1.41)$$

που αντιστοιχεί στο spin. Οπότε η ολική στροφορμή είναι $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.

1.1.3 Τελεστές Casimir

Κατά αναλογία με τον μετασχηματισμό των πεδίων (1.34) που αντιστοιχεί σε μετασχηματισμούς Lorentz, οι μετασχηματισμοί των πεδίων που αντιστοιχούν σε μετασχηματισμούς Poincare είναι

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}(x - a)) = \mathcal{D}(\Lambda)\psi(x) \quad (1.42)$$

Όλα τα σωματίδια ανήκουν σε αναπαραστάσεις της ομάδας Poincare και μπορούν να καταταχθούν με βάση της τιμές των τελεστών Casimir της ομάδας.

Ο πρώτος τελεστής Casimir της ομάδας είναι

$$P^2 = P_\mu P^\mu, \quad (1.43)$$

με ιδιοτιμές

$$p^2 = m^2 \quad (1.44)$$

Τα φυσικά σωματίδια έχουν θετική ή μηδενική μάζα.
Ο δεύτερος τελεστής Casimir της ομάδας είναι

$$W^2 = W_\mu W^\mu, \quad (1.45)$$

όπου W είναι το τετράνυσμα Pauli - Lubanski

$$W_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho} P^\sigma. \quad (1.46)$$

Υπό μορφή συνιστωσών

$$W^0 = \vec{J} \cdot \vec{P} = \vec{S} \cdot \vec{P} \quad \vec{W} = \vec{J}P^0 - \vec{K} \times \vec{P}, \quad (1.47)$$

οπότε στο σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου

$$W^0 = 0 \quad \vec{W} = m\vec{S} \quad (1.48)$$

που οδηγεί στο

$$W^2 = -m^2 |\vec{S}|^2, \quad (1.49)$$

με ιδιοτιμές

$$w^2 = -m^2 s(s+1). \quad (1.50)$$

Ένα πλήρες σετ παρατηρήσεων μεγεθών είναι το P^2 , οι τρεις συνιστώσες της ορμής \vec{P} , το W^2 και μια συνιστώσα W^μ . Τα διάφορα σωματίδια διαχωρίζονται από την μάζα m και το spin s (ενδεχομένως και από άλλους κβαντικούς αριθμούς). Για δεδομένο είδος σωματιδίων η ορμή \vec{P} και η μια συνιστώσα W^μ ορίζουν τις διαφορετικές καταστάσεις. Συνήθως ξεχωρίζουμε τις καταστάσεις μέσω της ιδιοτιμής του τελεστή ελικότητας

$$\hat{h} = \frac{W^0}{s|\vec{P}|} = \frac{\vec{S} \cdot \vec{P}}{s|\vec{P}|}. \quad (1.51)$$

1.2 Η εξίσωση Dirac

Η εξίσωση Dirac είναι

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi(x) = 0 \quad (1.52)$$

και η Lagrangian της εξίσωσης Dirac είναι

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x)(i\cancel{\partial} - m)\psi(x), \quad (1.53)$$

όπου $\psi(x)$ είναι ένας σπίνορας 4 συνιστωσών. Ο συζυγής σπίνορας ορίζεται ως

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0. \quad (1.54)$$

και

$$\cancel{A} = \gamma^\mu A_\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (1.55)$$

Οι πίνακες Dirac στην πιο απλή αναπαράσταση τους είναι πίνακες 4×4 οι οποίοι υπακούουν τις ακόλουθες σχέσεις

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (1.56)$$

και

$$\gamma^0(\gamma_\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^\mu \quad (1.57)$$

$$(\gamma^0)^2 = \mathbf{1}, \quad (\gamma^k)^2 = -\mathbf{1}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (1.58)$$

Η πυκνότητα πιθανότητας δίνεται από την σχέση

$$\rho(x) = |\psi(x)|^2 = \psi^\dagger(x)\psi(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x) \quad (1.59)$$

και είναι θετικά ορισμένη, ενώ η εξίσωση συνέχειας έχει την μορφή

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad j^\mu = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x). \quad (1.60)$$

Οι διάφορες αναπαραστάσεις των πινάκων Dirac συνδέονται μεταξύ τους με μετασχηματισμούς ομοιότητας

$$\gamma'^\mu = S\gamma^\mu S^{-1}, \quad S^{-1} = S^\dagger. \quad (1.61)$$

Για να μένει αναλλοίωτη η εξίσωση Dirac οι σπίνορες πρέπει να μετασχηματίζονται ως

$$\psi'(x) = S\psi(x). \quad (1.62)$$

Στην αναπαράσταση Dirac οι πίνακες έχουν την μορφή

$$\gamma_D^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma}_D = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.63)$$

όπου οι πίνακες έχουν γραφεί με την μορφή μπλοκ 2×2 και σ είναι οι πίνακες του Pauli. Ορίζεται ο πίνακας γ^5 ως

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (1.64)$$

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (1.65)$$

$$(\gamma^5)^2 = \mathbf{1} \quad (1.66)$$

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5 \quad (1.67)$$

Στην αναπαράσταση Dirac ο πίνακας γ^5 είναι

$$\gamma_D^5 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.68)$$

Στην χειραλική αναπαράσταση, όπου ο πίνακας γ^5 διαγωνοποιείται, οι πίνακες έχουν την μορφή

$$\gamma_C^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma}_C = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_C^5 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (1.69)$$

ή σε πιο συμπαγή μορφή

$$\gamma_C^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ -\sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.70)$$

όπου

$$\sigma^\mu = (\mathbf{1}, \vec{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu = (-\mathbf{1}, \vec{\sigma}) \quad (1.71)$$

1.2.1 Σχετικιστική Συναλλοιότητα

Όπως είδαμε υπό την επίδραση ενός μετασχηματισμού Lorentz ένας σπίνορας Dirac μετασχηματίζεται ως

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(\acute{x}) = S(\Lambda)\psi(x), \quad (1.72)$$

Για απειροστούς μετασχηματισμούς ο γεννήτορας είναι

$$S(1 + \epsilon\omega) = 1 + \frac{i}{4}\epsilon\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}, \quad (1.73)$$

όπου

$$S^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}. \quad (1.74)$$

Για πεπερασμένους μετασχηματισμούς $\Lambda = e^\omega$ έχουμε

$$S(e^\omega) = e^{-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}} \quad (1.75)$$

Ο συζυγής σπίνορας μετασχηματίζεται ως

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(\acute{x}) = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda), \quad (1.76)$$

οπότε για να μπορέσει να παραμείνει αναλλοίωτη η Lagrangian της εξίσωσης Dirac πρέπει οι πίνακες Dirac να μετασχηματιστούν ως

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu\gamma^\nu \quad (1.77)$$

Αν απομονώσουμε το τμήμα των γεννητόρων των προωθήσεων που αντιστοιχεί στο spin έχουμε

$$K_{spin}^k = -\frac{1}{2}\sigma^{0k} = -\frac{i}{2}\gamma^0\gamma^k = -\frac{i}{2}\alpha^k, \quad (1.78)$$

όπου $\alpha^k = \gamma^0\gamma^k$. Στην αναπαράσταση Dirac και στην χειραλική αναπαράσταση έχουμε

$$\alpha_D^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_C^k = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & -\sigma^k \end{pmatrix} \quad (1.79)$$

Ο πίνακας μετασχηματισμού που αντιστοιχεί πεπερασμένες προωθήσεις $S_{boost}^k(\phi)$ με $v = \tanh\phi$ κατά την διεύθυνση του άξονα x^k είναι

$$S_{boost}^k(\phi) = e^{-i\phi K_{spin}^k} = e^{\frac{1}{2}\phi\alpha^k} = \cosh\frac{\phi}{2} - \alpha^k \sinh\frac{\phi}{2} \quad (1.80)$$

Οι πίνακες $S_{boost}^k(\phi)$ είναι Hermitian, αλλά δεν είναι unitary.

Ο τελεστής του spin είναι

$$S^i = \frac{1}{4} \sum_{j,k} \epsilon^{ijk} \sigma^{jk} = \frac{1}{2} \Sigma^i, \quad (1.81)$$

όπου

$$\Sigma^i = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \epsilon^{ijk} \sigma^{jk} = \frac{i}{2} \sum_{j,k} \epsilon^{ijk} \gamma^j \gamma^k. \quad (1.82)$$

Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε

$$\Sigma^k = \gamma^0 \gamma^k \gamma^5. \quad (1.83)$$

Οι πίνακες Σ^k ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης

$$[\Sigma^i, \Sigma^j] = 2i \epsilon^{ijk} \Sigma^k \quad \{\Sigma^i, \Sigma^j\} = 2\delta_{ij} \quad (1.84)$$

Και στις δύο αναπαραστάσεις έχουν την ίδια μορφή

$$\vec{\Sigma}_D = \vec{\Sigma}_C = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (1.85)$$

από την οποία φαίνεται ότι οι πίνακες αυτοί είναι η γενίκευση 4×4 των πινάκων Pauli.

Ο πίνακας μετασχηματισμού που αντιστοιχεί στις πεπερασμένες στροφές κατά γωνία θ γύρω από τον άξονα x^k είναι

$$S_{rot}^k(\phi) = e^{-i\theta S^k} = e^{\frac{i}{2}\theta \Sigma^k} = \cosh \frac{\phi}{2} + i \Sigma^k \sinh \frac{\phi}{2} \quad (1.86)$$

Αφού ο πίνακας Σ^k είναι Hermitian ο πίνακας S_{rot}^k είναι unitary

1.2.2 Χειραλικότητα

Η χειραλικότητα (Chirality) ενός σωματιδίου εκφράζει αν το σωματίδιο συμπεριφέρεται στους μετασχηματισμούς σύμφωνα με την δεξιόστροφη ή αριστερόστροφη αναπαράσταση της ομάδας Poincare. Οι σπίνορες Dirac, οι οποίοι κατά κύριο λόγο αντιπροσωπεύουν τα σωματίδια, έχουν και τις δύο συνιστώσες, οπότε ανήκουν στην αναπαράσταση $(1/2, 1/2)$. Ορίζοντας κατάλληλους τελεστές μπορούμε να απομονώσουμε μόνο την μία συνιστώσα. Για τους σπίνορες Dirac

ορίζουμε την χειραλικότητα ως την δράση του πίνακα γ^5 πάνω στον σπίνορα. Εξαιτίας αυτής της ιδιότητας ο πίνακας γ^5 αποκαλείται και πίνακας χειραλικότητας (chirality matrix). Συμβολίζοντας με Ψ_R και Ψ_L τα πεδία τα οποία είναι ιδιοκαταστάσεις του πίνακα γ^5 με τιμές 1 και -1 αντίστοιχα, έχουμε:

$$\gamma^5 \psi_R = +\psi_R \quad (1.87)$$

$$\gamma^5 \psi_L = -\psi_L \quad (1.88)$$

Αυτά τα χειραλικά πεδία αποκαλούνται δεξιόστροφο και αριστερόστροφο αντίστοιχα. Τα σπινωριακά πεδία καθορισμένης χειραλικότητας ονομάζονται σπίνορες Weyl. Ένας σπίνορας Dirac πάντα μπορεί να αναλυθεί σε μια αριστερόστροφη και μια δεξιόστροφη συνιστώσα

$$\psi = \psi_R + \psi_L \quad (1.89)$$

όπου

$$\psi_R = \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi \quad (1.90)$$

$$\psi_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi \quad (1.91)$$

Ορίζουμε έτσι τους προβολικούς τελεστές

$$P_R \equiv \frac{1 + \gamma^5}{2} \quad (1.92)$$

$$P_L \equiv \frac{1 - \gamma^5}{2} \quad (1.93)$$

Εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι οι αυτοί οι τελεστές ικανοποιούν της απαραίτητες σχέσεις που πρέπει να ικανοποιεί ένας προβολικός τελεστής, δηλαδή:

$$P_R + P_L = 1 \quad (1.94)$$

$$(P_R)^2 = P_R \quad (1.95)$$

$$(P_L)^2 = P_L \quad (1.96)$$

$$P_L P_R = P_R P_L = 0 \quad (1.97)$$

Εκτός από τις ιδιότητες τους ως προβολικοί τελεστές, οι τελεστές έχουν και τις ακόλουθες ιδιότητες

$$P_R^\dagger = P_R \quad (1.98)$$

$$P_L^\dagger = P_L \quad (1.99)$$

$$P_R \gamma^\mu = \gamma^\mu P_L \quad (1.100)$$

$$P_L \gamma^\mu = \gamma^\mu P_R \quad (1.101)$$

Η Lagrangian του πεδίου Dirac

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi \quad (1.102)$$

μπορεί να γραφεί ως

$$\mathcal{L} = i(\bar{\psi}_R\cancel{\partial}\psi_L + \bar{\psi}_L\cancel{\partial}\psi_R) - m(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R), \quad (1.103)$$

όπου $\bar{\psi}_R = \overline{(P_R\psi)}$. Βλέπουμε ότι τα πεδία ψ_R και ψ_L έχουν ανεξάρτητους κινητικούς όρους, αλλά ο όρος μάζας είναι πεπλεγμένος.

Οι εξισώσεις των πεδίων είναι

$$i\cancel{\partial}\psi_R = m\psi_L \quad (1.104)$$

$$i\cancel{\partial}\psi_L = m\psi_R \quad (1.105)$$

είναι ολοφάνερο ότι η τρόπος εξέλιξης του κάθε πεδίου σχετίζεται με το άλλο μέσω της μάζας. Πολύ απλά, για άμαζα σωματίδια η εξέλιξη κάθε πεδίου είναι ανεξάρτητη. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτουν οι εξισώσεις Weyl

$$i\cancel{\partial}\psi_R = 0 \quad (1.106)$$

$$i\cancel{\partial}\psi_L = 0 \quad (1.107)$$

Στην χειραλική αναπαράσταση οι προβολικοί τελεστές είναι

$$P_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.108)$$

οπότε αν γράψουμε τον σπίνορα

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_R \\ \chi_L \end{pmatrix} \quad (1.109)$$

τότε

$$\psi_R = \begin{pmatrix} \chi_R \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_L \end{pmatrix}, \quad (1.110)$$

οπότε η Lagrangian υπό την μορφή σπινόρων δύο συνιστωσών γίνεται

$$\mathcal{L} = i\chi_R^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu\chi_R - i\chi_L^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi_L + m(\chi_R^\dagger\chi_L + \chi_L^\dagger\chi_R). \quad (1.111)$$

Οι αντίστοιχες εξισώσεις είναι

$$i(\partial_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})\chi_R = -m\chi_L \quad (1.112)$$

$$i(\partial_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})\chi_L = -m\chi_R \quad (1.113)$$

Υπό την επίδραση στροφών οι σπίνορες Dirac μετασχηματίζονται σύμφωνα με τον μετασχηματισμό (1.86) οπότε οι σπίνορες Weyl μετασχηματίζονται ως

$$\chi_{R,L} \rightarrow \left(\cos \frac{\theta}{2} + i\sigma^k \sin \frac{\theta}{2} \right) \chi_{R,L}, \quad (1.114)$$

ενώ υπό την επίδραση προωθήσεων ως

$$\chi_R \rightarrow \left(\cosh \frac{\phi}{2} - \sigma^k \sinh \frac{\phi}{2} \right) \chi_R \quad (1.115)$$

$$\chi_L \rightarrow \left(\cosh \frac{\phi}{2} + \sigma^k \sinh \frac{\phi}{2} \right) \chi_L \quad (1.116)$$

βλέπουμε λοιπόν ότι οι δεξιόστροφοι και οι αριστερόστροφοι σπίνορες ανήκουν σε διαφορετικές αναπαραστάσεις της ομάδας Lorentz.

1.2.3 Ελικότητα

Η ελικότητα ενός σωματιδίου ορίζεται ως η προβολή του spin στην διεύθυνση της ορμής του. Αφού ένα άμαζο σωματίδιο κινείται με την ταχύτητα του φωτός σε όλα τα συστήματα αναφοράς η ελικότητα είναι ίδια για κάθε παρατηρητή. Αυτό δεν συμβαίνει για σωματίδια τα οποία έχουν μάζα. Αν θεωρήσουμε μια λύση καθορισμένης ορμής της εξίσωσης Dirac για άμαζο σωματίδιο,

$$i\cancel{\partial}\psi(x, p) = 0 \quad (1.117)$$

με

$$P^\mu\psi(x, p) = p^\mu\psi(x, p) \quad (1.118)$$

και

$$p^0 = E = |\vec{p}| \quad (1.119)$$

η εξίσωση παίρνει την μορφή

$$(\gamma^0|\vec{p}| - \vec{\gamma} \cdot \vec{p})\psi(x, p) = 0. \quad (1.120)$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με $\gamma^5\gamma^0$ και χρησιμοποιώντας την σχέση $\Sigma^\mu = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^5$ έχουμε

$$\frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}\psi(x, p) = \gamma^5\psi(x, p) \quad (1.121)$$

Βλέπουμε ότι για άμαζα σωματίδια καθορισμένης ορμής η ελικότητα ταυτίζεται με την χειραλικότητα, επομένως υπάρχουν κοινές ιδιοκαταστάσεις

$$\frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \psi_R(x, p) = +\psi_R(x, p) \quad (1.122)$$

$$\frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \psi_L(x, p) = -\psi_L(x, p) \quad (1.123)$$

1.2.4 Λύσεις

Η εξίσωση Dirac μπορεί να λυθεί μέσω αναπτύγματος Fourier του πεδίου

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm 1} \left[a^{(h)}(p) u^{(h)}(p) e^{-ip \cdot x} + b^{(h)\dagger}(p) v^{(h)}(p) e^{ip \cdot x} \right], \quad (1.124)$$

όπου h είναι η ελικότητα και

$$P^0 = E = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} \quad (1.125)$$

προκειμένου να ικανοποιείται η σχετικιστική σχέση διασποράς για την ενέργεια. Οι ποσότητες $u^{(h)}$ και $v^{(h)}$ είναι σπίνορες, ενώ οι ποσότητες $a^{(h)}$ και $b^{(h)}$ είναι αριθμητικοί συντελεστές. Χρησιμοποιούμε την Hermitian συζυγία προκειμένου να διατηρείται ίδιος ο συμβολισμός με την κβαντικής θεωρίας πεδίου. Το μέτρο της ολοκλήρωσης είναι αναλλοίωτο Lorentz αφού

$$\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} = \frac{d^4p}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) \quad (1.126)$$

Η εξίσωση Dirac ισοδυναμεί με τις εξισώσεις

$$(\not{p} - m)u^{(h)}(p) = 0 \quad (1.127)$$

$$(\not{p} + m)v^{(h)}(p) = 0 \quad (1.128)$$

Για τους συζυγείς σπίνορες οι αντίστοιχες εξισώσεις είναι

$$\bar{u}^{(h)}(p)(\not{p} - m) = 0 \quad (1.129)$$

$$\bar{v}^{(h)}(p)(\not{p} + m) = 0 \quad (1.130)$$

Από τις εξισώσεις αυτές βλέπουμε

$$\bar{u}^{(h)}(p)v^{(h')}(p) = 0 \quad (1.131)$$

Το πεδίο μπορεί να γραφεί ως

$$\psi(x) = \sum_{h=\pm 1} \psi^{(h)}(x), \quad (1.132)$$

όπου

$$\psi^{(h)}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \left[a^{(h)}(p)u^{(h)}(p)e^{-ip \cdot x} + b^{(h)\dagger}(p)v^{(h)}(p)e^{ip \cdot x} \right], \quad (1.133)$$

είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή της ελικότητας

$$\hat{h}\psi^{(h)}(x) = h\psi^{(h)}(x). \quad (1.134)$$

Δρώντας με τον τελεστή στο ανάπτυγμα έχουμε

$$\hat{h}\psi^{(h)}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \left[a^{(h)}(p) \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} u^{(h)}(p)e^{-ip \cdot x} + b^{(h)\dagger}(p) \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} v^{(h)}(p)e^{ip \cdot x} \right], \quad (1.135)$$

επομένως για να ικανοποιείται η σχέση 1.134 πρέπει

$$\frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} u^{(h)}(p) = hu^{(h)}(p), \quad (1.136)$$

$$\frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} v^{(h)}(p) = -hv^{(h)}(p). \quad (1.137)$$

Οι αντίστοιχες εξισώσεις για τους συζυγείς σπίνορες είναι

$$\bar{u}^{(h)}(p) \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = h\bar{u}^{(h)}(p), \quad (1.138)$$

$$\bar{v}^{(h)}(p) \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = -h\bar{v}^{(h)}(p), \quad (1.139)$$

Από τις εξισώσεις αυτές βλέπουμε ότι

$$\bar{u}^{(h)}(p)u^{(h')}(p) \sim \delta_{hh'}, \quad (1.140)$$

$$\bar{v}^{(h)}(p)v^{(h')}(p) \sim \delta_{hh'}, \quad (1.141)$$

οπότε επιλέγουμε την αναλλοίωτη κανονικοποίηση

$$\bar{u}^{(h)}(p)u^{(h')}(p) = 2m\delta_{hh'}, \quad (1.142)$$

$$\bar{v}^{(h)}(p)v^{(h')}(p) = -2m\delta_{hh'}. \quad (1.143)$$

Με της ανωτέρω συνθήκες μπορεί κανείς να δει ότι

$$\bar{u}^{(h)}(p)\gamma^\mu u^{(h')}(p) = \bar{v}^{(h)}(p)\gamma^\mu v^{(h')}(p) = 2p^\mu\delta_{hh'}, \quad (1.144)$$

$$\bar{u}^{(h)}(p)\gamma^5 u^{(h')}(p) = \bar{v}^{(h)}(p)\gamma^5 v^{(h')}(p) = 0 \quad (1.145)$$

$$u^{(h)\dagger}(p)v^{(h')}(p_p) = v^{(h)\dagger}(p)u^{(h')}(p_p) = 0, \quad (1.146)$$

όπου $p_p = (p^0, -\vec{p})$. Χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέσεις βλέπουμε ότι οι αριθμητικοί συντελεστές δίνονται από τις σχέσεις

$$a^{(h)}(p) = \int d^3x u^{(h)\dagger}(p)\psi(x)e^{ip\cdot x} \quad (1.147)$$

$$b^{(h)}(p) = \int d^3x \psi^\dagger(x)v^{(h)}(p)e^{ip\cdot x} \quad (1.148)$$

Ο νορμαλισμός της

$$\int d^3x |\psi(x)|^2 = 1 \quad (1.149)$$

συνεπάγεται ότι

$$\int d^3x \sum_{h=\pm 1} \left[|a^{(h)}(p)|^2 + |b^{(h)}(p)|^2 \right] = 1 \quad (1.150)$$

Οι τέσσερις σπίνορες $u^{(+)}$, $u^{(-)}$, $v^{(+)}$ και $v^{(-)}$ είναι κάθετοι μεταξύ τους, οπότε σχηματίζουν μια βάση στον χώρο των τετραδιάστατων σπίνορες. Αντίστοιχα τα γινόμενα

$$u^{(+)}\bar{u}^{(+)}, \quad u^{(-)}\bar{u}^{(-)}, \quad v^{(+)}\bar{v}^{(+)}, \quad v^{(-)}\bar{v}^{(-)} \quad (1.151)$$

σχηματίζουν μια βάση στον χώρο των πινάκων 4×4 , ικανοποιούν μάλιστα την σχέση πληρότητας

$$\sum_{h=\pm 1} \left[\frac{u^{(h)}\bar{u}^{(h)}}{2m} - \frac{v^{(h)}\bar{v}^{(h)}}{2m} \right] = \mathbf{1}. \quad (1.152)$$

Το τμήμα του πεδίου που είναι ανάλογο του $e^{-ip \cdot x}$ και $e^{ip \cdot x}$, αντιστοιχεί στα σωματίδια και στα αντισωματίδια αντίστοιχα

$$P^0 e^{-ip \cdot x} = E e^{-ip \cdot x}, \quad P^0 e^{ip \cdot x} = -E e^{ip \cdot x}. \quad (1.153)$$

Ο προβολικός τελεστής των συνιστωσών με θετική και αρνητική ενέργεια ορίζεται ως

$$\Lambda_{\pm}(p) = \frac{m \pm \not{p}}{2m}, \quad (1.154)$$

ο οποίος ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\sum_{r=\pm} \Lambda_r = \mathbf{1}, \quad \Lambda_r(p)\Lambda_s(p) = \Lambda_r(p)\delta_{rs}. \quad (1.155)$$

Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \Lambda_+(p)u^{(h)}(p) &= u^{(h)}(p), & \Lambda_-(p)u^{(h)}(p) &= 0, \\ \Lambda_+(p)v^{(h)}(p) &= 0, & \Lambda_-(p)v^{(h)}(p) &= v^{(h)}(p) \end{aligned} \quad (1.156)$$

Από αυτές τις σχέσεις και την σχέση πληρότητας (1.152) αποκτούμε τις σχέσεις

$$\Lambda_+(p) = \sum_{h=\pm 1} \frac{u^{(h)}(p)\bar{u}^{(h)}(p)}{2m} \quad (1.157)$$

$$\Lambda_-(p) = - \sum_{h=\pm 1} \frac{v^{(h)}(p)\bar{v}^{(h)}(p)}{2m} \quad (1.158)$$

Αν ορίσουμε το τετράνυσμα πόλωσης ως

$$s_h^\mu = h \left(\frac{|\vec{p}|}{m}, \frac{E}{m} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \right), \quad (1.159)$$

μπορούμε να εκφράσουμε τον προβολικό τελεστή της ελικότητας ως

$$P_h = \frac{1 + \gamma^5 \not{s}}{2} \quad (1.160)$$

Οι δύο προβολικοί τελεστές μετατίθενται

$$[P_h, \Lambda_r] = 0, \quad (1.161)$$

οπότε μπορούμε να ορίσουμε έναν τελεστή ο οποίος ταυτόχρονα προβάλλει τις καταστάσεις ενέργειας και ελικότητας

$$\Lambda_{\pm}^h = \Lambda_{\pm}(p)P_h = P_h\Lambda_{\pm}(p) = \left(\frac{m \pm \not{p}}{2m}\right) \left(\frac{1 + \gamma^5 \not{\xi}}{2}\right), \quad (1.162)$$

ο οποίος ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\sum_{r=\pm} \sum_{h=\pm 1} \Lambda_r^h(p) = \mathbf{1}, \quad \Lambda_r^h \Lambda_s^{h'} = \Lambda_r^h(p) \delta_{rs} \delta_{hh'}. \quad (1.163)$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε ότι

$$\begin{aligned} \Lambda_+^h(p)u^{(h')}(p) &= \delta_{hh'}u^{(h')}(p), & \Lambda_-^h(p)u^{(h')}(p) &= 0, \\ \Lambda_+^h(p)v^{(h')}(p) &= 0, & \Lambda_-^h(p)v^{(h')}(p) &= \delta_{hh'}v^{(h')}(p). \end{aligned} \quad (1.164)$$

Από τις σχέσεις αυτές και τις προηγούμενες σχέσεις μπορούμε να δούμε ότι

$$\Lambda_+^h(p) = -\frac{u^{(h)}(p)\bar{v}^{(h)}(p)}{2m}, \quad (1.165)$$

$$\Lambda_-^h(p) = -\frac{v^{(h)}(p)\bar{u}^{(h)}(p)}{2m}. \quad (1.166)$$

Στην αναπαράσταση Dirac οι λύσεις της εξίσωσης Dirac είναι

$$u_D^h(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+m}\chi^{(h)}(\vec{p}) \\ h\sqrt{E-m}\chi^{(h)}(\vec{p}) \end{pmatrix} \quad (1.167)$$

$$v_D^h(p) = \begin{pmatrix} -\sqrt{E-m}\chi^{(-h)}(\vec{p}) \\ h\sqrt{E+m}\chi^{(-h)}(\vec{p}) \end{pmatrix}, \quad (1.168)$$

όπου οι πίνακες $\chi^{(h)}(\vec{p})$ θα προσδιοριστούν στην συνέχεια. Στο νευτώνειο όριο οι σπίνορες γίνονται

$$u_D^h(p) \simeq \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi^{(h)}(\vec{p}) \\ h\frac{|\vec{p}|}{2m}\chi^{(h)}(\vec{p}) \end{pmatrix} \quad (1.169)$$

$$v_D^h(p) \simeq \sqrt{2m} \begin{pmatrix} -\frac{|\vec{p}|}{2m} \chi^{(-h)}(\vec{p}) \\ h \chi^{(-h)}(\vec{p}) \end{pmatrix}. \quad (1.170)$$

Οι συνιστώσες οι οποίες δεν συμπίεζονται από τον παράγοντα $|\vec{p}|/2m$ λέγονται μεγάλες συνιστώσες, ενώ οι συνιστώσες που συμπίεζονται λέγονται μικρές συνιστώσες. Για τον λόγο αυτό η αναπαράσταση Dirac είναι χρήσιμη στην περιγραφή μη σχετικιστικών σωματιδίων.

Στην χειραλική αναπαράσταση οι λύσεις της εξίσωσης Dirac είναι

$$u_C^h(p) = \begin{pmatrix} -\sqrt{E+h|\vec{p}|} \chi^{(h)}(\vec{p}) \\ \sqrt{E-h|\vec{p}|} \chi^{(h)}(\vec{p}) \end{pmatrix} \quad (1.171)$$

$$v_C^h(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E-h|\vec{p}|} \chi^{(-h)}(\vec{p}) \\ \sqrt{E+h|\vec{p}|} \chi^{(-h)}(\vec{p}) \end{pmatrix}, \quad (1.172)$$

Στο σχετικιστικό όριο οι σπίνορες γίνονται

$$u_C^+(p) \simeq -\sqrt{2E} \begin{pmatrix} \chi^{(+)}(\vec{p}) \\ -\frac{m}{2E} \chi^{(+)}(\vec{p}) \end{pmatrix} \quad u_C^-(p) \simeq \sqrt{2E} \begin{pmatrix} -\frac{m}{2E} \chi^{(-)}(\vec{p}) \\ \chi^{(-)}(\vec{p}) \end{pmatrix} \quad (1.173)$$

$$v_C^+(p) \simeq -\sqrt{2E} \begin{pmatrix} \frac{m}{2E} \chi^{(+)}(\vec{p}) \\ \chi^{(+)}(\vec{p}) \end{pmatrix} \quad v_C^-(p) \simeq \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \chi^{(-)}(\vec{p}) \\ \frac{m}{2E} \chi^{(-)}(\vec{p}) \end{pmatrix}. \quad (1.174)$$

Βλέπουμε ότι οι δύο από τις τέσσερις συνιστώσες κάθε σπίνορα συμπίεζονται από τον παράγοντα $m/2E$. Για τον λόγο αυτό η χειραλική αναπαράσταση είναι χρήσιμη στην περιγραφή σχετικιστικών σωματιδίων.

Προκειμένου οι ανωτέρω λύσεις να είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή ελικότητας, δηλαδή να ικανοποιούν τις σχέσεις (1.136) και (1.137), οι σπίνορες $\chi^{(h)}(\vec{p})$ πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση ιδιοτιμών

$$\hat{h} \chi^{(h)}(\vec{p}) = h \chi^{(h)}(\vec{p}) \quad (1.175)$$

Οι σπίνορες είναι ορθογώνιοι και μπορούν να κανονικοποιηθούν

$$\chi^{(h)\dagger}(\vec{p}) \chi^{(h')}(\vec{p}) = \delta_{hh'} \quad (1.176)$$

Οι σπίνορες ορίζονται έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση

$$i\sigma_2 \left(\chi^{(h)\dagger}(\vec{p}) \right)^* = -h \chi^{(-h)\dagger}(\vec{p}). \quad (1.177)$$

Ισχύει ακόμα η σχέση

$$\chi^{(h)\dagger}(\vec{p})\sigma^k\chi^{(h')}(\vec{p}) = h\frac{p^k}{|\vec{p}|} \quad (1.178)$$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες οι σπίνορες είναι

$$\chi^{(+)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad \chi^{(-)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (1.179)$$

Αν επιλέξουμε τον άξονα z στην διεύθυνση του \vec{p} τότε

$$\chi^{(+)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \chi^{(+)} \quad \chi^{(-)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \chi^{(-)} \quad (1.180)$$

Στην περίπτωση άμαζων σωματιδίων επιλέγουμε την χειραλική αναπαράσταση οπότε από τις σχέσεις (1.173) και (1.174) έχουμε

$$u_L^{(+)}(p) = u_R^{(-)}(p) = v_R^{(+)}(p) = v_L^{(-)}(p) = 0 \quad (1.181)$$

οπότε μπορούμε να παραλείψουμε τους δείκτες. Έτσι το ανάπτυγμα Fourier των χειραλικών πεδίων είναι

$$\psi_R(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm 1} \left[a^{(+)}(p)u^{(+)}(p)e^{-ip\cdot x} + b^{(-)\dagger}(p)v^{(-)}(p)e^{ip\cdot x} \right] \quad (1.182)$$

$$\psi_L(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm 1} \left[a^{(-)}(p)u^{(-)}(p)e^{-ip\cdot x} + b^{(+)\dagger}(p)v^{(+)}(p)e^{ip\cdot x} \right] \quad (1.183)$$

1.3 Σωματίδια Majorana

Αν ξεκινήσει κανείς από τις εξισώσεις Weyl

$$i\cancel{\partial}\psi_L = 0, \quad (1.184)$$

$$i\cancel{\partial}\psi_R = 0, \quad (1.185)$$

παρατηρεί ότι άμαζα σωματίδια μπορούν να περιγραφούν μέσω σπινόρων δύο συνιστωσών και αναρωτιέται αν μπορεί να γίνει το ίδιο για σωματίδια με μάζα. Αν και φαντάζει παράξενο η απάντηση είναι ότι γίνεται αν ορίσουμε μια ειδική σχέση ανάμεσα στα ψ_R και ψ_L . Προφανώς για να είμαστε συνεπείς πρέπει να ικανοποιούνται οι εξισώσεις

$$i\cancel{\partial}\psi_L = m\psi_R \quad (1.186)$$

$$i\cancel{\partial}\psi_R = m\psi_L \quad (1.187)$$

Από την 1.187 έχουμε

$$\begin{aligned} (i\cancel{\partial}\psi_R)^\dagger \gamma^0 &= (m\psi_L)^\dagger \gamma^0 \\ -i\partial_\mu \bar{\psi}_R \gamma^\mu &= m\bar{\psi}_L. \end{aligned} \quad (1.188)$$

Για να αποκτήσουμε την ίδια μορφή με την εξίσωση 1.187 αναστρέφουμε

$$-i(\gamma^\mu)^T \partial_\mu \bar{\psi}_R^T = m\bar{\psi}_L^T \quad (1.189)$$

και δρούμε με τον τελεστή συζυγίας φορτίου

$$C \left(-i(\gamma^\mu)^T \partial_\mu \bar{\psi}_R^T \right) = mC\bar{\psi}_L^T. \quad (1.190)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα

$$C(\gamma^\mu)^T C^{-1} = -\gamma^\mu \quad (1.191)$$

έχουμε

$$i\cancel{\partial}C\bar{\psi}_R^T = mC\bar{\psi}_L^T \quad (1.192)$$

Αν ορίσουμε

$$\psi_R = C\bar{\psi}_L^T, \quad (1.193)$$

έχουμε την ίδια μορφή με την εξίσωση (1.186).

Από την ιδιότητα $C(\gamma^5)^T C^{-1} = \gamma^5$ προκύπτει ότι

$$P_L C = C P_L^T. \quad (1.194)$$

Από την σχέση αυτή έχουμε

$$P_L(C\bar{\psi}_L^T) = C \left(\bar{\psi}_L^T P_L \right)^T = 0, \quad (1.195)$$

οπότε ο ορισμός που δώσαμε είναι συνεπής.

Η εξίσωση (1.186) μετασχηματίζεται στην εξίσωση Majorana:

$$i\cancel{\partial}\psi_L = mC\bar{\psi}_L^T \quad (1.196)$$

Το πεδίο είναι

$$\psi = \psi_L + \psi_R = \psi_L + C\bar{\psi}_L^T, \quad (1.197)$$

οπότε η συνθήκη Majorana είναι

$$\psi = C\bar{\psi}^T \quad (1.198)$$

Ο όρος $C\bar{\psi}^T$ αν εξαιρέσουμε μια φάση, την οποία μπορούμε για ευκολία να παραλείψουμε, είναι ίδιος με το συζυγές πεδίο ψ_L^C .

$$C\bar{\psi}^T = \psi_L^C. \quad (1.199)$$

Με αυτή την σύμβαση έχουμε

$$\psi = \psi_L + \psi_L^C, \quad (1.200)$$

και η συνθήκη Majorana γίνεται

$$\psi = \psi^C. \quad (1.201)$$

Η συνθήκη αυτή επιβάλλει την ταύτιση σωματιδίου αντισωματιδίου, οπότε μπορεί να ισχύει μόνο για ουδέτερα φερμιόνια.

Η Lagrangian της εξίσωσης Majorana είναι

$$\mathcal{L}^M = \frac{1}{2}\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi \quad (1.202)$$

Οι όροι μάζας των σωματιδίων Majorana είναι

$$\mathcal{L}_{Mass}^M = -\frac{1}{2}m\bar{\psi}_L^C\psi_L + H.C. \quad (1.203)$$

ή ισοδύναμα

$$\mathcal{L}_{Mass}^M = -\frac{1}{2}m\left(\psi_L^T C^\dagger \psi_L + \psi_L^\dagger C \psi_L^*\right). \quad (1.204)$$

Βλέπουμε ότι μετασχηματισμοί $U(1)$ που αντιστοιχούν στην διατήρηση του αριθμού των σωματιδίων δεν αφήνουν αναλλοίωτη την Lagrangian.

$$\mathcal{L}_{Mass}^M = -\frac{1}{2}m\left(e^{2i\phi}\psi_L^T C^\dagger \psi_L + e^{-2i\phi}\psi_L^\dagger C \psi_L^*\right). \quad (1.205)$$

1.3.1 Συμμετρίες

Είναι αναμενόμενο ένα σωματίδιο Majorana να έχει λιγότερους βαθμούς ελευθερίας σε σχέση με ένα σωματίδιο Dirac.

Στην περίπτωση Dirac έχουμε

$$CPT : \quad \nu(\vec{p}, h) \rightarrow \bar{\nu}(\vec{p}, -h) \quad (1.206)$$

Με μια κατάλληλη προώθηση μπορούμε να έχουμε

$$Boost : \quad \bar{\nu}(\vec{p}, -h) \rightarrow \bar{\nu}(-\vec{p}, h) \quad (1.207)$$

Με έναν μετασχηματισμό CPT έχουμε

$$CPT : \quad \bar{\nu}(-\vec{p}, h) \rightarrow \nu(-\vec{p}, -h) \quad (1.208)$$

Πάλι με κατάλληλη προώθηση μπορούμε να έχουμε

$$Boost : \quad \nu(-\vec{p}, -h) \rightarrow \nu(\vec{p}, h) \quad (1.209)$$

Οι διευθύνσεις των ορμών $-\vec{p}$ μπορούν να αλλάξουν με μια στροφή κατά 180° , έτσι έχουμε

$$Rotation - 180 : \quad \bar{\nu}(-\vec{p}, h) \rightarrow \bar{\nu}(\vec{p}, h) \quad \nu(-\vec{p}, -h) \rightarrow \nu(\vec{p}, -h) \quad (1.210)$$

Βλέπουμε επομένως ότι ένα σωματίδιο Dirac με ορμή \vec{p} μπορεί να βρεθεί σε τέσσερις καταστάσεις:

$$\nu(\vec{p}, h) \quad \nu(\vec{p}, -h) \quad \bar{\nu}(\vec{p}, h) \quad \bar{\nu}(\vec{p}, -h) \quad (1.211)$$

Στην περίπτωση Majorana έχουμε

$$CPT : \quad \nu(\vec{p}, h) \rightarrow \nu(\vec{p}, -h) \quad (1.212)$$

Με κατάλληλη προώθηση μπορούμε να έχουμε

$$Boost : \quad \nu(\vec{p}, -h) \rightarrow \nu(-\vec{p}, h) \quad (1.213)$$

Με στροφή κατά 180° επιστρέφουμε στην αρχική κατάσταση

$$Rotation - 180 : \quad \nu(-\vec{p}, h) \rightarrow \nu(\vec{p}, h) \quad (1.214)$$

Από την αρχική κατάσταση με κατάλληλη προώθηση μπορούμε να έχουμε

$$\text{Boost : } \nu(\vec{p}, h) \rightarrow \nu(-\vec{p}, -h) \quad (1.215)$$

Με έναν μετασχηματισμό CPT έχουμε

$$CPT : \nu(-\vec{p}, -h) \rightarrow \nu(-\vec{p}, h) \quad (1.216)$$

Ακόμα οι καταστάσεις $\nu(-\vec{p}, -h)$ και $\nu(\vec{p}, -h)$ συνδέονται με στροφή κατά 180° :

$$\text{Rotation} - 180 : \nu(-\vec{p}, -h) \rightarrow \nu(\vec{p}, -h) \quad (1.217)$$

Βλέπουμε επομένως ότι ένα σωματίδιο με ορμή \vec{p} μπορεί να βρεθεί σε δύο καταστάσεις:

$$\nu(\vec{p}, h) \quad \nu(\vec{p}, -h) \quad (1.218)$$

Ένα σωματίδιο Majorana έχει τους μισούς βαθμούς ελευθερίας από ένα σωματίδιο Dirac. Αυτό οφείλεται στην συνθήκη Majorana

$$\nu = \nu^C \quad (1.219)$$

1.3.2 Φορμαλισμός δυο Συνιστωσών

Υπό μορφή δυο συνιστωσών ο αριστερόστροφος σπίνορας είναι

$$\nu_L(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi(x) \end{pmatrix} \quad \bar{\nu}_L(x) = \begin{pmatrix} -\phi^\dagger(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.220)$$

Στην χειραλική αναπαράσταση των πινάκων γ η Majorana Lagrangian (1.202) γίνεται

$$\mathcal{L}^M = -\frac{i}{2} \phi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \phi - i \frac{m}{2} (\phi^T \sigma_2 \phi - \phi^\dagger \sigma_2 \phi^*) \quad (1.221)$$

οπότε η εξίσωση που προκύπτει είναι

$$\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \phi - m \sigma_2 \phi^* = 0, \quad (1.222)$$

η οποία γράφεται

$$(\partial_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \phi + m \sigma_2 \phi^* = 0 \quad (1.223)$$

Το ανάπτυγμα Fourier που ικανοποιεί την εξίσωση είναι

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm 1} \left[\sqrt{E - h|\vec{p}|} a^{(h)}(p) \chi^{(h)}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} - h \sqrt{E + h|\vec{p}|} a^{(h)\dagger}(p) \chi^{(-h)}(\vec{p}) e^{ip \cdot x} \right] \quad (1.224)$$

Στο σχετικιστικό όριο το ανάπτυγμα γίνεται

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm 1} \left[a^{(-)}(p) \chi^{(-)}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} - a^{(+)\dagger}(p) \chi^{(-)}(\vec{p}) e^{ip \cdot x} \right] \quad (1.225)$$

Βιβλιογραφία

- W. M. Alberico, S. M. Bilenky: **Neutrino Oscillations, Masses and Mixing**, hep-ph/0306239v1
- C.H. Albright: **Overview of Neutrino Mixing Models and Ways to Differentiate Among Them**, hep-ph/0905.0146v3
- G. Altarelli, F. Feruglio: **Models of Neutrino Masses and Mixings**, hep-ph/0405048v2
- G. Altarelli, F. Feruglio: **Neutrino Masses and Mixings: A Theoretical Perspective**, hep-ph/9905536v3
- A.S. Barabash: **Double Beta Decay: Present Status**, hep-ex/0807.2948v1
- S.M. Bilenky, M. D. Mateev, S.T. Petcov: **A Comment on the Measurement of Neutrino Masses in β -Decay Experiments**, hep-ph/0603178v2
- F. Boehm, P. Vogel: **Physics of Massive Neutrinos**, CUP, 1992. W. Buchmüller: **Neutrinos, Grand Unification and Leptogenesis**, hep-ph/0204288v2
- W. Buchmüller, R.D. Peccei, T. Yanagida: **Leptogenesis as the Origin of Matter**, hep-ph/0502169v2
- C. Burgess, G.D. Moore: **The Standard Model: A Primer**, CUP, 2007
- F. Cavanna, M.L. Costantini, O. Palamara, F. Vissani: **Neutrinos as Astrophysical Probes**, astro-ph/0311256v1
- W.N. Cottingham, D.A Greenwood: **An Introduction to the Standard Model of Particle Physics 2nd Edition**, CUP, 2007
- A.D. Dolgov: **Neutrinos in Cosmology**, hep-ph/0202122
- S. Elliot, P. Vogel: **Double Beta Decay**, hep-ph/0202264v1
- J. Ellis: **Neutrino Physics: Theory and Phenomenology**, hep-ph/9907458v1
- G.L. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, D. Montanino, A. Palazzo, A.M. Rotunno: **Neutrino Oscillations: a Global Analysis**, hep-ph/0310012v2
- G.L. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, A. Palazzo: **Global Analysis of three-Flavor Neutrino Masses and Mixings**, hep-ph/0506083v2
- G.L. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, A. Palazzo, A.M. Rotunno: **What we (Would Like to) Know About the Neutrino Mass**, hep-ph/0809.2936v1
- C. Giunti, C.W. Kim: **Coherence of Neutrino Oscillations in the Wave Packet Approach**, hep-ph/9711363v2
- C. Giunti: **Theory of Neutrino Oscillations**, hep-ph/0401244v1
- C. Giunti: **Theory of Neutrino Oscillations**, hep-ph/0409230v1
- C. Giunti: **Neutrino Flavor States and the Quantum Theory of Neutrino Oscillations**, hep-ph/0608070v2

C. Giunti: **Theory and Phenomenology of Neutrino Mixing**, hep-ph/0611125v1

C. Giunti, C.W. Kim: **Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics**, OUP, 2007

C. Giunti: **Neutrino Flavor States and the Quantum Theory of Neutrino Oscillations**, hep-ph/08010653v1

M. C. Gonzalez-Garcia, Michele Maltoni: **Phenomenology with Massive Neutrinos**, hep-ph/0704.1800v2

M.C. Gonzalez-Garcia: **Neutrino Physics**, hep-ph/0910.2505v1

D. Griffiths: **Introduction to Elementary Particles**, John Wiley & Sons, 2008

W. Grimus, P. Stockinger, S. Mohanty: **The Field-Theoretical Approach to Coherence in Neutrino Oscillations**, hep-ph/9807442v2

F. Halzen, A.D. Martin: **Quarks and Leptons**, John Wiley & Sons, 1984

W.C. Haxton: **Topics in Neutrino Astrophysics**, nucl-th/9901076v2

B. Kayser: **On the Quantum Mechanics of Neutrino Oscillation**, July 1981, Phys Rev D, Vol 24(1)

B. Kayser, F. Gibrat-Debu, F. Perrier: **Physics of Massive Neutrinos**, World Scientific, 1989

B. Kayser: **Neutrino Mass, Mixing, and Oscillation**, hep-ph/0104147v1

B. Kayser: **Neutrino Physics**, hep-ph/0506165v1

B. Kayser: **Neutrino Oscillation Phenomenology**, hep-ph/0801.1121v3

B. Kayser: **Neutrino Mass, Mixing, and Flavor Change**, hep-ph/0804.1497v2

B. Kayser: **Are Neutrinos Their Own Antiparticles?**, hep-ph/0903.0889v1

S.F. King: **Constructing the Large Mixing Angle MNS Matrix in See-Saw Models with Right-Handed Neutrino Dominance**, hep-ph/0204360v3

S.F. King: **Neutrino Mass Models**, hep-ph/0310204

S.F. King: **Predicting Neutrino Parameters from SO(3) Family Symmetry and Quark-Lepton Unification**, hep-ph/0506297v3

S.F. King: **Invariant See-Saw Models and Sequential Dominance**, hep-ph/0610239v2

S.F. King: **Neutrino Mass**, hep-ph/0712.170v1

S.F. King: **Neutrino Mass Models: a Road Map**, hep-ph/0810.0492v1

S.F. King: **Neutrino Mass Models and the Implications of a Non-Zero Reactor Angle**, hep-ph/0904.3225v1

R. D. McKeown, P. Vogel: **Neutrino Masses and Oscillations: Triumphs and Challenges**, hep-ph/0402025v1

H.V. Klapdor-Kleingrothaus: **First Evidence of Neutrinoless Double Beta**

Decay and World Status of Double Beta Experiments, hep-ph/0512263v1

P. Kovtun, A. Zee: **A Schematic Model of Neutrinos**, hep-ph/0604169v1

A. Kusenk: **Sterile Neutrinos: the Dark Side of the Light Fermions**, hep-ph/0906.2968v2

H. Lipkin: **What is coherent in Neutrino Oscillations**, hep-ph/0304187v3

H. Lipkin: **Quantum Theory of Neutrino Oscillations for Pedestrian - Simple Answers to Confusing Questions**, hep-ph/0505141v4

H. Lipkin: **New Method for Studying Neutrino Mixing and Mass Differences**, hep-ph/0801.1465v2

H. Lipkin: **The GSI Method for Studying Neutrino Mass Differences For Pedestrians**, hep-ph/0805.0435v2

Joint Study, **The Neutrino Matrix**, 411216v2

S.S.C. Law: **Neutrino Models and Leptogenesis**, hep-ph/0901.1232v1

T.D. Lee, R. Friedberg: **A Possible Relation between the Neutrino Mass Matrix and the Neutrino Mapping Matrix**, hep-ph/0606071v1

T.D. Lee, R. Friedberg: **Hidden Symmetry of the CKM and Neutrino Mapping Matrices**, hep-ph/0705.4156v1

T.D. Lee, R. Friedberg: **Jarlskog Invariant of the Neutrino Mapping Matrix**, hep-ph/0709.1526v1

T.D. Lee, R. Friedberg: **Theory of Timeon**, hep-ph/0809.3633v1

T.D. Lee, R. Friedberg: **A Timeon Model of Quark and Lepton Mass Matrices**, hep-ph/0809.3633v1

E. Ma: **Non-Abelian Discrete Symmetries and Neutrino Masses: Two Examples**, hep-ph/0405152v2

E. Ma: **Neutrino Mass: Mechanisms and Models**, hep-ph/0905.0221v1

E. Ma, X.G. He: **Seesaw Options for Three Neutrinos**, hep-ph/0907.2737v2

M. Maltoni: **New interactions: past and future experiments**, hep-ph/0810.3517v1

The MiniBooNe Collaboration: **Unexplained Excess of Electron-Like Events From a 1-GeV Neutrino Beam**, hep-ex/0812.2243v2

The MiniBooNe Collaboration: **MiniBooNE Oscillation Results**, hep-ex/0907.3747v1

The MiniBooNe Collaboration: **New Results from MiniBooNE: A Search for Electron Antineutrino Appearance at $\sim 1 eV^2$** , hep-ex/0910.0263v1

R.N. Mohapatra, P.B. Pal: **Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics**, World Scientific, 2004

R.N. Mohapatra, S. Nussinov: **Bimaximal Neutrino Mixing and Neutrino Mass Matrix**, hep-ph/9809415

R.N. Mohapatra **Understanding Neutrino Masses and Mixing in the See-Saw Framework**, hep-ph/0306016v2

R.N. Mohapatra **Physics of Neutrino Mass**, hep-ph/0411131v1

R.N. Mohapatra **Neutrino Mass and Grand Unification**, hep-ph/0412050v1

R.N. Mohapatra et al: **Theory of Neutrinos**, hep-ph/0412099v2

R.N. Mohapatra et al: **Seesaw Mechanism and Its Implications**, hep-ph/0412379v1

R.N. Mohapatra et al: **Theory of Neutrinos: A White Paper**, hep-ph/0510213v2

R.N. Mohapatra, A.Yu. Smirnov: **Neutrino Mass and New Physics**, hep-ph/0603118v2

R. N. Mohapatra and W. Rodejohann **Scaling in the Neutrino Mass Matrix**, hep-ph/0608111v4

A. Nucciotti: **Double Beta Decay: Experiments and Theory Review**, nucl-ex/0707.2216v3

S. Pascoli, S.T. Petcov: **Majorana Neutrinos, Neutrino Mass Spectrum and the $|\langle m \rangle| \sim 10^{-3}$ eV Frontier in Neutrinoless Double Beta Decay**, hep-ph/0711.4993v1

C. Quigg: **Cosmic Neutrinos**, hep-ph/0802.0013v2

D.P. Roy: **Eighty Years of Neutrino Physics**, hep-ph/0809.1767v3

U. Sarkar: **Importance of Neutrinoless Double Beta Decay**, hep-ph/0712.2690v1

G. Senjanović: **See-Saw and Grand Unification**, hep-ph/0501244v1

A.Y. Smirnov M. Lindner, M.A. Schmidt: **Screening of Dirac flavor structure in the seesaw and neutrino mixing**, hep-ph/050567v2

A.Yu. Smirnov, E.Kh. Akhmedov, M. Maltonic: **Oscillations of High Energy Neutrinos in Matter: Precise Formalism and Parametric Resonance**, hep-ph/0506064

A.Yu. Smirnov, R.Z. Funchal **Sterile Neutrinos: Direct Mixing Effects Versus Induced Mass Matrix of Active Neutrinos**, hep-ph/0603009v3

A.Yu. Smirnov: **Neutrino Masses and Mixing: Leptons Versus Quarks**, hep-ph/0604213v1

A.Yu. Smirnov: **Neutrino Mass and New Physics** Journal of Physics: Conference Series 53 (2006) 44-82

A.Yu. Smirnov: **Recent Developments in Neutrino Phenomenology**, hep-ph/0702061v1

A.Yu. Smirnov, A.S. Barabash, A.D. Dolgov, R. Dvornicky, F. Simkovic: **Statistics of Neutrinos and the Double Beta Decay**, hep-ph/0704.2944v1

- A.Yu. Smirnov, J. Kersten: **Right-Handed Neutrinos at LHC and the Mechanism of Neutrino Mass Generation**, hep-ph/0705.3221v2
- A.Yu. Smirnov, S.P. Mikheev: **Neutrino Oscillations in a Variable-Density Medium and ν -Bursts due to the Gravitational Collapse of Stars**, hep-ph/0706.0454
- A.Yu. Smirnov, A.N. Ioannisian: **Describing neutrino oscillations in matter with Magnus expansion**, hep-ph/0803.1967v2
- A.Yu. Smirnov: **Neutrino-2008: Where are we? Where are we going?**, hep-ph/0810.2668v1
- A.Yu. Smirnov, O.L.G. Peres: **Oscillations of very low energy atmospheric neutrinos**, hep-ph/0903.5323v1
- A.Yu. Smirnov, E.Kh. Akhmedov: **Paradoxes of neutrino oscillations**, hep-ph/0905.1903v2
- L. Stodolsky, **When the Wavepacket is Unnecessary**, March 1998, Phys Rev D
- L. Stodolsky: **Looking Back with Neutrinos**, astro-ph/0006384v1
- A. Strumia, F. Vissani: **Neutrino Masses and Mixings and...**, hep-ph/0606054v2
- J.A. Thomas, D.L. Vahle: **Neutrino Oscillations: Present Status and Future Plans**, World Scientific, 2008
- Wu-Ki Tung: **Group Theory in Physics**, World Scientific, 1985
- P. Vogel: **Double Beta Decay: Theory, Experiment and Implication**
- L. Visinelli, P. Gondolo: **Neutrino Oscillations and Decoherence**, hep-ph/0810.4132v1
- S. Weinberg: **The Quantum Theory of Fields, Vol1**, CUP, 1995. K. Winter (editor): **Neutrino Physics**, CUP, 2008
- Z. Xing: **Flavor Mixing and CP Violation of Massive Neutrinos**, hep-ph/0307359v4
- K. Zuber: **Neutrino Physics**, Tylor & Francis, 2004.