

Ο Μηχανισμός Higgs στην θεωρία των Ηλεκτρασθενών Αλληλεπιδράσεων

Δημήτρης Κατσινής

ΑΜ: 200942

Τομέας Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων

21 Απριλίου 2010

Περιεχόμενα

1	Ο Αβελιανός Μηχανισμός Higgs	3
2	Μη Αβελιανός Μηχανισμός Higgs	6
2.1	Προσαρτημένη Αναπαράσταση	9
2.2	Αυθόρμητη Ρήξη Τοπικής Συμμετρίας $SU(2)$	10
3	Ο Μηχανισμός Higgs στην Ηλεκτρασθενή Θεωρία	13
3.1	Ο Μηχανισμός Higgs	16
3.2	Αλληλεπιδράσεις των Φερμιονίων	19
3.3	Οι Μάζες των Ανυσματικών Μποζονίων	25
3.4	Οι Μάζες των Φερμιονίων	27
3.4.1	Quarks	30
3.5	Αλληλεπιδράσεις των Μποζονίων Βαθμίδας	32
	Παράρτημα	34
4	Συμβάσεις	34
5	Αποδείξεις	35
	Βιβλιογραφία	36

1 Ο Αβελιανός Μηχανισμός Higgs

Στην λαγκραντζιανή θεώρηση οι εξισώσεις κίνησης καθιστούν την δράση στάσιμη. Για να αποφύγουμε κάποια τετριμμένη λύση της θεωρίας μας η δράση δεν μπορεί να αντιστοιχεί σε μέγιστο. Η απαίτηση αυτή ισοδυναμεί με την απαίτηση η αντιστοιχούσα χαμιλτονιανή πυκνότητα να έχει ολικό ελάχιστο. Ας δούμε πως εφαρμόζεται ο συλλογισμός αυτός στην περίπτωση ενός βαθμωτού (μποζονικού) πεδίου.

Η λαγκραντζιανή πυκνότητα ενός πεδίου μάζας m είναι

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu\phi \partial^\mu\phi^* - m^2|\phi|^2. \quad (1)$$

Πράγματι η εξίσωση Euler - Lagrange δίνει

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi^*} = 0 \Rightarrow \partial_\mu\partial^\mu\phi - m^2\phi = 0. \quad (2)$$

Η αντιστοιχούσα χαμιλτονιανή πυκνότητα είναι

$$\mathcal{H} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_0\phi}\partial_0\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_0\phi^*}\partial_0\phi^* - \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{H} = \left|\dot{\phi}\right|^2 + |\nabla\phi|^2 + m^2|\phi|^2. \quad (3)$$

Βλέπουμε ότι η χαμιλτονιανή πυκνότητα είναι θετικά ορισμένη και η κατάσταση κενού αντιστοιχεί στο

$$\phi = 0. \quad (4)$$

Μπορούμε να εισάγουμε στην θεωρία μια αλληλεπίδραση, γράφουμε έτσι την λαγκραντζιανή πυκνότητα

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu\phi \partial^\mu\phi^* - m^2|\phi|^2 - \frac{\lambda}{2}|\phi|^4. \quad (5)$$

Πάλι η φυσική απαίτηση η θεωρία μας να μην έχει τετριμμένο ελάχιστο στο μείον άπειρο υπαγορεύει

$$\lambda > 0. \quad (6)$$

Το δυναμικό στην κατάσταση κενού είναι

$$V(|\phi|) = m^2|\phi|^2 + \frac{\lambda}{2}|\phi|^4, \quad (7)$$

οπότε το ελάχιστο αντιστοιχεί στο $|\phi| = 0$.

Αν ξεφύγουμε από την σωματιδιακή ερμηνεία μπορούμε να αλλάξουμε το πρόσημο του όρου μάζας, γράφοντας

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu\phi \partial^\mu\phi^* + m^2|\phi|^2 - \frac{\lambda}{2}|\phi|^4. \quad (8)$$

Πλέον το δυναμικό γίνεται

$$V(\phi) = -m^2|\phi|^2 + \frac{\lambda}{2}\phi^4. \quad (9)$$

Τώρα όμως έχει αλλάξει ριζικά η συμπεριφορά της κατάστασης του κενού. Το $\phi = 0$ αντιστοιχεί σε τοπικό μέγιστο, μια κατάσταση που μπορούμε να ερμηνεύσουμε ως ψευδοκενό (false vacuum). Το ολικό ελάχιστο έχει μεταφερθεί στον κύκλο

$$|\phi|^2 = \frac{m^2}{\lambda}. \quad (10)$$

Πλέον όμως μετασχηματισμοί βαθμίδας δεν αφήνουν την κατάσταση του κενού αναλλοίωτη. Αυτή η διαφοροποίηση αλλάζει ριζικά την συμπεριφορά της θεωρίας. Ενώ η λαγκραντζιανή πυκνότητα εμφανίζει μια συμμετρία, η κατάσταση του κενού δεν την εμφανίζει με αποτέλεσμα να επέρχεται ρήξη της συμμετρίας με αυθόρμητο τρόπο.

Έχοντας κατά νου ότι θα μελετήσουμε τον μηχανισμό Higgs στην θεωρία της Ηλεκτρασθενούς Αλληλεπίδρασης, πρέπει να εστιάσουμε στην ρήξη τοπικής συμμετρίας βαθμίδας. Στις θεωρίες βαθμίδας οι αλληλεπιδράσεις ερμηνεύονται ως συνέπεια της αυθόρμητης ρήξης της τοπικής συμμετρίας βαθμίδας. Η αφετηρία αυτού του συλλογισμού είναι η απαίτηση τα πεδία που αντιπροσωπεύουν την ύλη να είναι αναλλοίωτα σε τοπικούς μετασχηματισμούς φάσης. Για να μπορέσουμε να ενσωματώσουμε στην θεωρία μας τοπική συμμετρία μετασχηματισμών φάσης για το πεδίο ϕ

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x)e^{i\alpha(x)} \quad (11)$$

πρέπει να αντικαταστήσουμε τις μερικές παραγώγους με συναλλοίωτες. Έτσι ορίζοντας την συναλλοίωτη παράγωγο εισάγουμε στην θεωρία μας ένα ανυσματικό πεδίο A_μ .

$$\partial_\mu\phi(x) \rightarrow \mathcal{D}_\mu\phi(x) = \partial_\mu\phi(x) - ieA_\mu(x)\phi(x) \quad (12)$$

Με τον τρόπο αυτό η αναλλοίωτη σε τοπικούς μετασχηματισμούς φάσης πραγματώνεται αν απαιτήσουμε το ανυσματικό πεδίο A_μ να έχει την συμμετρία

βαθμίδας

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x). \quad (13)$$

Καταχρηστικά αναφερόμαστε στην συμμετρία του ζεύγους των ανωτέρω μετασχηματισμών, ως τοπική συμμετρία βαθμίδας

$$\begin{cases} \phi(x) & \rightarrow \phi(x) e^{i\alpha(x)} \\ A_\mu(x) & \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x). \end{cases} \quad (14)$$

Η λαγκραντζιανή πυκνότητα αν εισάγουμε και τον κινηματικό όρο του διανυσματικού πεδίου A_μ γίνεται

$$\mathcal{L} = -\mathcal{D}_\mu \phi (\mathcal{D}^\mu \phi)^* - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + m^2 |\phi|^2 - \frac{\lambda}{2} |\phi|^4. \quad (15)$$

Όπως ήδη αναφέραμε, στην μορφή αυτή δεν μπορούμε να έχουμε σωματιδιακή ερμηνεία για το πεδίο ϕ . Πρέπει να μεταφέρουμε το ελάχιστο της θεωρίας μας στο μηδέν. Στην κατάσταση κενού το πεδίο A_μ έχει σβήσει, οπότε όπως πριν έχουμε το δυναμικό

$$V(\phi) = -m^2 |\phi|^2 + \frac{\lambda}{2} |\phi|^4. \quad (16)$$

με το ελάχιστο να βρίσκεται στον κύκλο

$$|\phi|^2 = \frac{m^2}{\lambda}. \quad (17)$$

Μπορούμε να εκφράσουμε το πεδίο ϕ ως

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(h(x) + \sqrt{\frac{2m^2}{\lambda}} \right) \text{Exp} \left(i \sqrt{\frac{\lambda}{m^2}} \pi(x) \right) \quad (18)$$

Αν εκμεταλλευτούμε την αναλλοιώτητα σε τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας μπορούμε να επιλέξουμε την βαθμίδα στην οποία το $\pi(x)$ εξαλείφεται. Η βαθμίδα αυτή λέγεται unitarity gauge και το μποζόνιο π would be Goldstone boson. Ας δούμε τι συμβαίνει με τους βαθμούς ελευθερίας. Πριν την ρήξη της συμμετρίας έχουμε ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο ϕ με 2 βαθμούς ελευθερίας και ένα άμαζο ανυσματικό πεδίο A_μ επίσης με 2 βαθμούς ελευθερίας. Μετά την ρήξη της συμμετρίας έχουμε ένα πραγματικό βαθμωτό πεδίο h με 1 βαθμό ελευθερίας και ένα ανυσματικό πεδίο με μάζα το οποίο αντιστοιχεί σε 3 βαθμούς

ελευθερίας. Ο ψεύτικος βαθμός ελευθερίας που φαίνεται να αντιστοιχεί στο πεδίο π , ισοδυναμεί με την επιλογή βαθμίδας (gauge fixing).

Αντικαθιστώντας

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(h(x) + \sqrt{\frac{2m^2}{\lambda}} \right) \quad (19)$$

η λαγκραντζιανή πυκνότητα γίνεται

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} \left(\partial_\mu h - ieA_\mu \left(h + \sqrt{\frac{2m^2}{\lambda}} \right) \right) \left(\partial^\mu h + ieA^\mu \left(h + \sqrt{\frac{2m^2}{\lambda}} \right) \right) \\ & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 \left(h + \sqrt{\frac{2m^2}{\lambda}} \right)^2 - \frac{\lambda}{8} \left(h + \sqrt{\frac{2m^2}{\lambda}} \right)^4. \end{aligned} \quad (20)$$

Μετά από τις πράξεις και αφού αναδιατάξουμε τους όρους προκύπτει η λαγκραντζιανή πυκνότητα

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & - \left[\frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] - \left[m^2 h^2 + e^2 \frac{m^2}{\lambda} A_\mu A^\mu \right] \\ & - \left[\frac{e^2}{2} A_\mu A^\mu h^2 + e^2 \sqrt{\frac{2m^2}{\lambda}} A_\mu A^\mu h \right] - \left[\frac{\lambda}{8} h^4 + \sqrt{\frac{m^2 \lambda}{2}} h^3 \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Μπορούμε να αναγνωρίσουμε τους κινηματικούς όρους, τους όρους μάζας και τις αλληλεπιδράσεις. Πλέον η αναλλοιώτητα σε μετασχηματισμούς βαθμίδας έχει χαθεί. Το μποζονικό πεδίο h και το ανυσματικό πεδίο A_μ αποκτούν μάζα

$$m_h = \sqrt{2}m \quad m_A = \sqrt{\frac{2e^2 m^2}{\lambda}}. \quad (22)$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η μάζα του πεδίου h προκύπτει από την αυτοαλληλεπίδρασή του. Στην περίπτωση μηδενισμού της σταθεράς ζεύξης λ το πεδίο h παραμένει άμαζο. Φυσικά τότε και το ανυσματικό πεδίο δεν αποκτά μάζα.

2 Μη Αβελιανός Μηχανισμός Higgs

Οι γεννήτορες t^a μιας μη αβελιανής ομάδας συμμετρίας $SU(N)$ ικανοποιούν μια άλγεβρα Lie

$$[t^a, t^b] = if^{abc} t^c, \quad (23)$$

όπου f^{abc} είναι οι σταθερές δομής, οι οποίες είναι πραγματικοί αριθμοί. Οι γεννιότερες μπορούν να αναπαρασταθούν με άιχνους ερμητιανούς πίνακες διάστασης $N \times N$.

Μπορούμε να εκφράσουμε το πεδίο ϕ ως μια στήλη N πεδίων. Με πιο αυστηρή ορολογία, αναπαριστούμε το πεδίο ως ένα σπινόρα N συνιστωσών. Απαιτούμε από την ύλη μας να είναι αναλλοίωτη σε γενικότερους τοπικούς μετασχηματισμούς φάσης

$$\phi(x) \rightarrow \text{Exp}(ia^a(x)t^a) \phi(x). \quad (24)$$

Πρέπει να γενικεύσουμε την συναλλοίωτη παράγωγο ως

$$\mathcal{D}_\mu \phi(x) = \partial_\mu \phi(x) - igA_\mu^a(x)t^a \phi(x). \quad (25)$$

Βλέπουμε ότι η κατασκευή περιέχει ένα διανυσματικό πεδίο για κάθε γεννήτορα, οπότε η θεωρία μας περιέχει $N^2 - 1$ διανυσματικά πεδία. Υπό την δράση τοπικών μετασχηματισμών της μορφής (24), ο ορισμός της συναλλοίωτης παραγώγου αποσκοπεί στην εξασφάλιση του ακόλουθου νόμου μετασχηματισμού

$$\mathcal{D}_\mu \phi(x) \rightarrow \text{Exp}(ia^a(x)t^a) \mathcal{D}_\mu \phi(x). \quad (26)$$

Η απαίτηση αυτή θα μας δώσει τον νόμο μετασχηματισμού των ανυσματικών πεδίων A_μ^a , έτσι κατασκευάζουμε την δράση της μετασχηματισμένης συναλλοίωτης παραγώγου στο μετασχηματισμένο πεδίο

$$(\mathcal{D}_\mu \phi)' = \left(\partial_\mu - ig(A_\mu^a t^a)' \right) \text{Exp}(ia^a t^a) \phi \quad (27)$$

Εκτελώντας προσεκτικά τις πράξεις προκύπτει ότι το πεδίο πρέπει να μετασχηματίζεται ως

$$A_\mu^a(x)t^a \rightarrow \text{Exp}(ia^a(x)t^a) A_\mu^a(x)t^a \text{Exp}(-ia^a(x)t^a) + \frac{1}{g} \partial_\mu \text{Exp}(-ia^a(x)t^a). \quad (28)$$

Οι τοπικοί μετασχηματισμοί βαθμίδας γενικεύονται ως

$$\begin{cases} \phi(x) & \rightarrow \text{Exp}(ia^a(x)t^a) \phi(x). \\ A_\mu^a(x)t^a & \rightarrow \text{Exp}(ia^a(x)t^a) \left(A_\mu^a(x)t^a + \frac{1}{g} \partial_\mu \right) \text{Exp}(-ia^a(x)t^a). \end{cases} \quad (29)$$

Ο ταυιστής του πεδίου ορίζεται ως

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = -igF_{\mu\nu}^a t^a, \quad (30)$$

έτσι έχουμε

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (31)$$

Η μετάβαση από την αβελιανή στην μη αβελιανή περίπτωση είναι αρκετά αναμενόμενη, αρκεί να γενικεύσουμε την αβελιανή λαγκραντζιανή πυκνότητα ως

$$\mathcal{L} = -(\mathcal{D}\phi)^\dagger (\mathcal{D}\phi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + m^2\phi^\dagger\phi - \frac{\lambda}{2}(\phi^\dagger\phi)^2. \quad (32)$$

Το κενό της θεωρία μας βρίσκεται στον κύκλο

$$\phi^\dagger\phi = \sum_i |\phi_i|^2 = \frac{m^2}{\lambda} \quad (33)$$

Υπάρχει μια ελευθερία στην πραγμάτωση του κενού, αφού υπάρχουν πολλοί συνδυασμοί που μπορούν να αντιστοιχηθούν στο ίδιο κενό. Μελετώντας κάποια συγκεκριμένη θεωρία μπορεί να αναζητήσει κανείς άλλους φυσικούς περιορισμούς που να προσδιορίζουν την ακριβή πραγμάτωση του κενού. Το ανυσματικά μποζόνια A_μ^a αποκτούν μάζες

$$g^2\phi^\dagger t^a t^b \phi A_\mu^a A^{b\mu} \quad (34)$$

Ήδη από την αβελιανή περίπτωση γνωρίζουμε ότι η μάζα των ανυσματικών πεδίων βαθμίδας προκύπτει από τον κινηματικό όρο του πεδίου ϕ , στην μη αβελιανή περίπτωση έχουμε

$$-(\mathcal{D}\phi)^\dagger (\mathcal{D}\phi) = -\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi - 2igA_\mu^a\phi^\dagger t^a\partial^\mu\phi - g^2A_\mu^a A^{b\mu} (t^a\phi)^\dagger (t^b\phi) \quad (35)$$

Μετά την ρήξη της συμμετρίας το πεδίο αποκτά την αναμενόμενη τιμή κενού ϕ_0 ο τελευταίος όρος αποκτά δομή όρου μάζας

$$m_{ab}^2 A_\mu^a A^{b\mu} \quad (36)$$

όπου ο πίνακας μάζας είναι

$$m_{ab}^2 = (t^a\phi_0)^\dagger (t^b\phi_0) = \phi_0^\dagger t^a t^b \phi_0 \quad (37)$$

και είναι ημιθετικά ορισμένος αφού

$$m_{aa}^2 = |t^a\phi_0|^2 \quad (38)$$

Στην περίπτωση που για κάποιον συγκεκριμένο γεννήτορα ισχύει

$$t^a \phi_0 = 0 \quad (39)$$

το συγκεκριμένο μποζόνιο παραμένει άμαζο.

Πρέπει να έχουμε κατά νου ότι δεν είναι φυσικά όλα τα πεδία που εμπλέκονται, αφού με κατάλληλους μετασχηματισμούς βαθμίδας μπορούμε να εξαλείψουμε πολλά από αυτά.

Ο αρχικός κινηματικός όρος δίνει τις αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα πεδία βαθμίδας.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A = & -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) + \frac{g}{2} (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \\ & - \frac{g^2}{4} f^{abc} f^{ade} A^{b\mu} A^{c\nu} A_\mu^d A_\nu^e \end{aligned} \quad (40)$$

2.1 Προσαρτημένη Αναπαράσταση

Εκτός από την συνήθη αναπαράσταση μιας ομάδας υπάρχει η δυνατότητα να επιλέξουμε την προσαρτημένη αναπαράστασή της. Κατασκευάζουμε τους πίνακες που θα αποτελέσουν την προσαρτημένη αναπαράσταση από τις σταθερές δομής, ως εξής

$$(t_G^b)_{ac} = \imath f^{abc} \quad (41)$$

Έτσι η άλγεβρα που ικανοποιείται είναι

$$([t_G^b, t_G^c])_{ae} = \imath f^{bcd} (t_G^d)_{ae} \quad (42)$$

Αναπτύσσοντας βλέπουμε ότι αυτή η άλγεβρα δεν είναι τίποτα άλλο παρά η ταυτότητα Jacobi που ικανοποιούν οι σταθερές δομής

$$f^{abd} f^{cde} + f^{cad} f^{bde} + f^{bcd} f^{ade} = 0 \quad (43)$$

Από την κατασκευή της η προσαρτημένη αναπαράσταση είναι μια πραγματική αναπαράσταση, δεδομένου ότι οι σταθερές δομής είναι πραγματικοί αριθμοί. Φαίνεται ξεκάθαρα και μέσω της ισοδυναμίας της άλγεβρας με την ταυτότητα Jacobi. Στην προσαρτημένη αναπαράσταση το πεδίο ϕ αναλύεται σε $N^2 - 1$ συνιστώσες ϕ^a . Το πεδίο ϕ μπορεί να αναπαρασταθεί υπό μορφή πίνακα ως

$$\Phi = \phi^a(x) t^a \quad (44)$$

Η ισοδυναμία της συνήθους καθίπως και της προσαρτημένης αναπαράστασης είναι έκδηλη, αφού στην προσαρτημένη αναπαράσταση έχουμε το πεδίο ως έναν πίνακα $N \times N$ ο οποίος μπορεί να διαγωνοποιηθεί και να απομείνουν N φυσικά πεδία. Στην προσαρτημένη αναπαράσταση η τοπική αναλλοιώτητα σε μετασχηματισμούς φάσης εκφράζεται ως

$$\phi^a(x)t^a \rightarrow \text{Exp}(i\alpha^a(x)t^a)\phi^a(x)t^a. \quad (45)$$

Αντίστοιχα, η συναλλοίωτη παράγωγος γίνεται

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu\phi^a(x) &= \partial_\mu\phi^a(x) - igA_\mu^b(x)(t^b)_{ac}\phi^c(x) \\ &= \partial_\mu\phi^a(x) + gf^{abc}A_\mu^b(x)\phi^c(x) \end{aligned} \quad (46)$$

Για ευκολία ας θεωρήσουμε τις συνιστώσες του πεδίου ϕ πραγματικές. Έτσι

$$-\frac{1}{2}\mathcal{D}_\mu\phi^a\mathcal{D}^\mu\phi^a = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi^a\partial^\mu\phi^a - gf^{abc}A_\mu^b\phi^c\partial_\mu\phi^a - \frac{1}{2}g^2f^{abc}f^{ade}A_\mu^bA^{d\mu}\phi^c\phi^e \quad (47)$$

Οι μάζες των ανυσματικών πεδίων προκύπτουν από τον τελευταίο όρο, ο οποίος μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$g^2\text{Tr}([t^b, \Phi][t^d, \Phi])A_\mu^bA^{d\mu} \quad (48)$$

2.2 Αυθόρμητη Ρήξη Τοπικής Συμμετρίας $SU(2)$

Ας μελετήσουμε την τοπική συμμετρία $SU(2)$ για τις δύο αναπαραστάσεις. Επιλέγοντας την συνήθη αναπαράσταση το πεδίο μας είναι ένας σπίνορας δύο συνιστωσών. Η συναλλοίωτη παράγωγος είναι

$$\mathcal{D}_\mu\phi = (\partial_\mu - igA_\mu^a\tau^a)\phi \quad (49)$$

Ο κινητικός όρος της θεωρίας θα είναι

$$-\mathcal{D}^\mu\phi^\dagger\mathcal{D}_\mu\phi = -\partial^\mu\phi^\dagger\partial_\mu\phi - igA_\mu^a\tau^a(\phi^\dagger\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^\dagger) - g^2A^{a\mu}A_\mu^b\tau^a\tau^b\phi^\dagger\phi \quad (50)$$

Μπορούμε να συμμετριοποιήσουμε τον τελευταίο όρο εκμεταλλευόμενοι την ιδιότητα

$$\{\tau^a, \tau^b\} = \frac{1}{2}\delta^{ab} \quad (51)$$

έτσι καταλήγουμε στην έκφραση

$$-\mathcal{D}^\mu \phi^\dagger \mathcal{D}_\mu \phi = -\partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - ig A_\mu^a \tau^a (\phi^\dagger \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^\dagger) - \frac{g^2}{4} A^{a\mu} A_\mu^a \phi^\dagger \phi \quad (52)$$

Μετά την ρήξη της συμμετρίας το πεδίο θα αποκτήσει μια αναμενόμενη τιμή κενού

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (53)$$

Έτσι ο τελευταίος όρος θα μετατραπεί σε όρο μάζας

$$-\frac{g^2}{4} A^{a\mu} A_\mu^a \phi^\dagger \phi \Rightarrow -\frac{g^2 v^2}{8} A^{a\mu} A_\mu^a \quad (54)$$

οπότε και τα τρία ανυσματικά πεδία θα αποκτήσουν την ίδια μάζα

$$m_A = \frac{gv}{2} \quad (55)$$

Στην προσαρτημένη αναπαράσταση της ομάδας $SU(2)$ το πεδίο ϕ έχει τρεις συνιστώσες οι οποίες μετασχηματίζονται σαν διανύσματα. Η συναλλοιώτη παράγωγος στην περίπτωση αυτή είναι

$$\mathcal{D}_\mu \phi^a = \partial_\mu \phi^a + g \epsilon^{abc} A_\mu^b \phi^c \quad (56)$$

οπότε ο κινηματικός όρος είναι

$$-\frac{1}{2} \mathcal{D}^\mu \phi^a \mathcal{D}_\mu \phi^a = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a - g \epsilon^{abc} \partial^\mu \phi^a A_\mu^b \phi^c - g^2 (A_\mu^b A^{b\mu} \phi^c \phi^c - A_\mu^b A^{c\mu} \phi^b \phi^c) \quad (57)$$

Μετά την ρήξη της συμμετρίας ας υποθέσουμε ότι το πεδίο αποκτά αναμενόμενη τιμή κενού σε κάποια διεύθυνση, έτσι για παράδειγμα

$$\langle \phi^c \rangle = V \delta^{c3} \quad (58)$$

τότε ο τελευταίος όρος αποκτά δομή όρου μάζας και το δεύτερο κομμάτι του μηδενίζεται αφού προϋποθέτει $b \neq c$

$$\mathcal{L}_{mass} = -\frac{g^2 V^2}{2} (A^{1\mu} A_\mu^1 + A^{2\mu} A_\mu^2) \quad (59)$$

οπότε τα δύο ανυσματικά πεδία αποκτούν μάζα.

$$m_1 = m_2 = gV \quad (60)$$

Το τρίτο πεδίο παραμένει άμαζο λόγω της εναπομείνουσας συμμετρίας στροφών γύρω από την διεύθυνση ρήξης της συμμετρίας. Στο παράδειγμα μας η ρήξη της συμμετρίας θα μπορούσε να γίνει σε οποιαδήποτε τυχαία κατεύθυνση. Τότε ο γραμμικός συνδυασμός των πεδίων που θα ήταν σε αυτή την διεύθυνση θα παρέμενε άμαζος, ενώ δύο οποιοδήποτε ορθογώνιοι γραμμικοί συνδυασμοί πεδίων στο κάθετο επίπεδο θα αποκτούσαν μάζα.

3 Ο Μηχανισμός Higgs στην Ηλεκτρασθενή Θεωρία

Η ηλεκτρασθενής θεωρία βασίζεται στην συμμετρία βαθμίδας $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Οι αριστερόστροφες χειραλικές συνιστώσες των σωματιδίων κατατάσσονται σε διπλέτες του ασθενούς ισοτοπικού σπιν, ενώ οι δεξιόστροφες χειραλικές συνιστώσες δεν έχουν ασθενές ισοτοπικό σπιν, φέρουν όμως υπερφορτίο. Δεξιόστροφα νετρίνα δεν υπάρχουν¹. Το σωματιδιακό περιεχόμενο της θεωρίας είναι

- Αριστερόστροφα Quarks:

$$Q'_{\alpha L} \equiv \begin{pmatrix} u'_{\alpha L} \\ d'_{\alpha L} \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (61)$$

- Δεξιόστροφα Quarks τύπου up:

$$u'_{\alpha R}, \quad \alpha = u, c, t \quad (62)$$

- Δεξιόστροφα Quarks τύπου down:

$$d'_{\alpha R}, \quad \alpha = d, s, b \quad (63)$$

- Αριστερόστροφα Λεπτόνια:

$$L'_{\alpha L} \equiv \begin{pmatrix} \nu'_{\alpha L} \\ \ell'_{\alpha L} \end{pmatrix}, \quad \alpha = e, \mu, \tau \quad (64)$$

- Δεξιόστροφα Φορτισμένα Λεπτόνια:

$$\ell'_{\alpha R}, \quad \alpha = e, \mu, \tau \quad (65)$$

Οι τόνοι συμβολίζουν ότι τα πεδία δεν έχουν καθορισμένη μάζα, αλλά είναι επαλληλία πεδίων με καθορισμένη μάζα. Οι κβαντικοί αριθμοί των πεδίων δίνονται από τον πίνακα 1. Η άλγεβρα των τελεστών του ασθενούς ισοτοπικού σπιν δεν είναι παρά η άλγεβρα της στροφορμής

$$[I^a, I^b] = \epsilon^{abc} I^c \quad (66)$$

¹Οι ταλαντώσεις νετρίνων υποδεικνύουν ότι τα νετρίνα έχουν μάζα, αλλά ακόμα δεν είναι σαφές ο μηχανισμός που δίνει μάζα στα νετρίνα. Στην περίπτωση που αποδειχτεί ότι τα νετρίνα είναι σωματίδια Dirac τότε η εισαγωγή δεξιόστροφων νετρίνων θα είναι απαραίτητη.

οπότε η αναπαράσταση των τελεστών θα είναι οι πίνακες Pauli:

$$I^a = \frac{\sigma^a}{2} \quad (67)$$

Το υπερφορτίο και το ασθενές ισοτοπικό σπιν συνδέονται με το φορτίο μέσω της σχέσης Gell-Mann – Nishijima, η οποία είναι

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}. \quad (68)$$

Η συναλλοίωτη παράγωγος της θεωρίας είναι

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a(x)I^a + \frac{i}{2}g'B_\mu(x)Y \quad (69)$$

Η Lagrangian της ηλεκτρασθενούς αλληλεπίδρασης του Καθιερωμένου Προτύπου σίγουρα πρέπει να έχει κινηματικούς όρους για τα σωματιδίων και δεδομένου ότι τα σωματίδια έχουν μάζα πρέπει να υπάρχουν και όροι μάζας. Ωστόσο δεν είναι τόσο απλό να κατασκευάσουμε τους όρους μάζας γιατί οι όροι της μορφής

$$\bar{f}f = \bar{f}_L f_R + \bar{f}_R f_L \quad (70)$$

δεν είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας. Αρχικά πρέπει με κάποιο τρόπο να απορροφήσουμε τους χβαντικούς αριθμούς των όρων $\bar{f}f$ ώστε οι όροι να είναι αναλλοίωτοι κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας. Μπορούμε να εισάγουμε την αλληλεπίδραση με κάποιο σωματίδιο. Δεδομένου ότι το σωματίδιο πρέπει να έχει ασθενές ισοτοπικό σπιν η πιο απλή κατασκευή που μπορούμε να έχουμε είναι να εισάγουμε στην θεωρία δύο σωματίδια τα οποία να αποτελούν διπλέτα του ασθενούς ισοτοπικού σπιν. Η διπλέτα αυτή είναι η διπλέτα Higgs του Καθιερωμένου Προτύπου

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix}, \quad (71)$$

Οι χβαντικοί αριθμοί της διπλέτας Higgs δίνονται στον πίνακα 2.

Αν εξετάσουμε έναν λεπτονικό όρο μάζας, αυτός αναμένεται να περιέχει το γινόμενο $\bar{L}_{\alpha L}^{\ell} \ell'_{\beta R}$. Ο όρος αυτός είναι διπλέτα του ασθενούς ισοτοπικού σπιν με συνολικό υπερφορτίο $Y = -1$, οπότε αν συνδυαστεί με την διπλέτα Higgs, η οποία έχει $Y = 1$ αποκτούμε έναν όρο ο οποίος είναι αναλλοίωτος

στους μετασχηματισμούς βαθμίδας. Αυτόν τον όρο τον χρησιμοποιούμε στην Lagrangian της ζεύξης των λεπτονίων με το πεδίο Higgs, έτσι

$$\mathcal{L}_{H,L} = - \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} Y_{\alpha\beta}^{\prime\ell} \bar{L}'_{\alpha L} \Phi \ell'_{\beta R} + HC. \quad (72)$$

Ο πίνακας $Y_{\alpha\beta}^{\prime\ell}$ είναι ένας σταθερός πίνακας ο οποίος περιέχει τις ζεύξεις Yukawa του πεδίου Higgs με τα φορτισμένα λεπτόνια.

Με τον ίδιο τρόπο θα κατασκευάσουμε τους όρους μάζας των quarks. Στα quarks πρέπει να κατασκευάσουμε δύο όρους μάζας από τους όρους

$$\bar{Q}'_{\alpha L} q'_{\beta R}{}^D, \quad \alpha = 1, 2, 3, \beta = d, s, b \quad (73)$$

και

$$\bar{Q}'_{\alpha L} q'_{\beta R}{}^D, \quad \alpha = 1, 2, 3, \beta = d, s, b \quad (74)$$

Το γινόμενο (73) έχει υπερφορτίο $Y = -1$, οπότε η ζεύξη του με την διπλέτα Higgs που έχει υπερφορτίο $Y = 1$ δημιουργεί έναν αναλλοίωτο όρο, ακριβώς όπως στην περίπτωση των λεπτονίων,

$$- \sum_{\alpha=1,2,3} \sum_{\beta=d,s,b} Y_{\alpha\beta}^{\prime D} \bar{Q}'_{\alpha L} \Phi q'_{\beta R}{}^D. \quad (75)$$

Το γινόμενο (74) έχει υπερφορτίο $Y = 1$, οπότε μόνο η ζεύξη με μια διπλέτα Higgs η οποία έχει υπερφορτίο $Y = -1$ μπορεί να μας δώσει αναλλοίωτο όρο. Με τον μετασχηματισμό

$$\tilde{\Phi} = i\sigma_2 \Phi^* \quad (76)$$

μπορούμε να κατασκευάσουμε αυτή την διπλέτα, οπότε ο αναλλοίωτος όρος είναι

$$- \sum_{\alpha=1,2,3} \sum_{\beta=u,c,t} Y_{\alpha\beta}^{\prime U} \bar{Q}'_{\alpha L} \tilde{\Phi} q'_{\beta R}{}^U, \quad (77)$$

Ας συνοψίσουμε τι έχουμε στην διάθεσή μας: έχουμε κινηματικούς όρους για τα σωματίδια, μπορούμε να προσθέσουμε άφοβα κινηματικούς όρους για τα ανυσματικά πεδία βαθμίδας και το πεδίο Higgs, έχουμε κατασκευάσει κάποιους περίεργους όρους που μοιάζουν με όρους μάζας και μπορούμε να γράψουμε έναν όρο μάζας για το πεδίο Higgs και μια αλληλεπίδραση Φ τετάρτης, οπότε η πιο γενική Lagrangian που να σέβεται τη συμμετρία που θέλουμε να επιβάλλουμε

Πίνακας 1: Οι χβαντικοί αριθμοί των φερμιονίων.

	I	I_3	Y	Q
$u'_{\alpha L}$	1/2	+1/2	+1/3	+2/3
$d'_{\alpha L}$	1/2	-1/2	+1/3	-1/3
$u'_{\alpha R}$	0	0	+4/3	+2/3
$d'_{\alpha R}$	0	0	-2/3	-1/3
$\nu'_{\beta L}$	1/2	+1/2	-1	0
$\ell'_{\beta L}$	1/2	-1/2	-1	-1
$\ell'_{\beta R}$	0	0	-2	-1

είναι

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{EW} = & \imath \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{L}'_{\alpha L} \not{D} L'_{\alpha L} + \imath \sum_{\alpha=1,2,3} \bar{Q}'_{\alpha L} \not{D} Q'_{\alpha L} \\
& + \imath \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\ell}'_{\alpha R} \not{D} \ell'_{\alpha R} + \imath \sum_{\alpha=d,s,b} \bar{q}'_{\alpha R}{}^D \not{D} q'_{\alpha R}{}^D + \imath \sum_{\alpha=u,c,t} \bar{q}'_{\alpha R}{}^U \not{D} q'_{\alpha R}{}^U \\
& - \frac{1}{4} A_{\mu\nu}^a A^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \\
& + (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \\
& - \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} \left(Y_{\alpha\beta}^{\ell} \bar{L}'_{\alpha L} \Phi \ell'_{\beta R} + (Y_{\alpha\beta}^{\ell})^* \bar{\ell}'_{\beta R} \Phi^\dagger L'_{\alpha L} \right) \\
& - \sum_{\alpha=1,2,3} \sum_{\beta=d,s,b} \left(Y_{\alpha\beta}^{D} \bar{Q}'_{\alpha L} \Phi q'_{\beta R}{}^D + (Y_{\alpha\beta}^{D})^* \bar{q}'_{\beta R}{}^D \Phi^\dagger Q'_{\alpha L} \right) \\
& - \sum_{\alpha=1,2,3} \sum_{\beta=u,c,t} \left(Y_{\alpha\beta}^{U} \bar{Q}'_{\alpha L} \tilde{\Phi} q'_{\beta R}{}^U + (Y_{\alpha\beta}^{U})^* \bar{q}'_{\beta R}{}^U \tilde{\Phi}^\dagger Q'_{\alpha L} \right).
\end{aligned} \tag{78}$$

Μέχρι στιγμής έχουμε καταφέρει να γράψουμε μια θεωρία η οποία να σέβεται την συμμετρία βαθμίδας, αλλά εξακολουθούμε να έχουμε προβλήματα. Τα σωματίδιά μας καθώς και όλα τα μποζόνια βαθμίδας είναι άμαζα, το οποίο αντιβαίνει με την φυσική πραγματικότητα. Οι τόνοι υποδηλώνουν ότι τα πεδία που εμφανίζονται δεν έχουν καθορισμένη μάζα.

3.1 Ο Μηχανισμός Higgs

Εισάγαμε στην θεωρία την διπλέτα Higgs προκειμένου να μπορούμε να γράψουμε κάποιους όρους οι οποίοι να μοιάζουν με όρους μάζας, πρέπει με έναν έξυπνο

Πίνακας 2: Οι χβαντικοί αριθμοί της διπλέτας Higgs.

	I	I_3	Y	Q
$\phi^+(x)$	1/2	1/2	+1	1
$\phi^0(x)$	1/2	-1/2	+1	0

τρόπο να μετατρέψουμε τους όρους αυτούς σε όρους μάζας. Ο τρόπος αυτός δεν είναι παρά η αυθόρμητη ρήξη συμμετρίας. Ας εξετάσουμε τον όρο Higgs της Lagrangian του Καθιερωμένου Προτύπου

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad (79)$$

Ο όρος περιλαμβάνει το δυναμικό

$$V(\phi) = \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (80)$$

Προφανώς για να υπάρχει κάτω φράγμα πρέπει $\lambda > 0$. Αν $\mu^2 > 0$ το ελάχιστο της θεωρίας μας είναι στο μηδέν και δεν καταφέρνουμε κάτι. Αφενός το κενό είναι συμμετρικό σε μετασχηματισμούς βαθμίδας, οπότε δεν έχουμε ρήξη της συμμετρίας βαθμίδας, ενώ στην φύση δεν παρατηρούμε αυτή την συμμετρία. Αφετέρου αν κάνουμε ένα ανάπτυγμα γύρω από το ελάχιστό του δυναμικού τότε τα σωματίδιά μας θα παραμείνουν άμαζα. Αν θεωρήσουμε $\mu^2 < 0$ έχουμε την αυθόρμητη ρήξη της συμμετρίας

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_Q \quad (81)$$

Θα δούμε στις γραμμές που ακολουθούν τον τόσο έξυπνο, αν και καθαρά φαινομενολογικό, τρόπο που επιτυγχάνεται η αυθόρμητη ρήξη της συμμετρίας.

Ορίζουμε

$$v \equiv \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}, \quad (82)$$

τότε το δυναμικό Higgs μπορεί να γραφεί

$$V(\phi) = \lambda \left(\Phi^\dagger \Phi - \frac{v^2}{2} \right)^2. \quad (83)$$

Είναι προφανές ότι το δυναμικό παρουσιάζει ελάχιστο για

$$\Phi^\dagger \Phi = \frac{v^2}{2}. \quad (84)$$

Όπως γνωρίζουμε το ελάχιστο του δυναμικού αντιστοιχεί στο κενό. Φερμιόνια και διανυσματικά μποζόνια δεν μπορούν να υπάρχουν στο κενό, αφού το κενό οφείλει να είναι αναλλοίωτο σε στροφές. Αντίστοιχα φορτισμένα σωματίδια δεν μπορούν να υπάρχουν στο κενό, αφού το κενό οφείλει να είναι ηλεκτρικά ουδέτερο. Μόνο ουδέτερα βαθμωτά πεδία μπορούν να έχουν τιμή στο κενό, η οποία ονομάζεται αναμενόμενη τιμή κενού (VEV). Από την σχέση (84) η αναμενόμενη τιμή κενού του πεδίου Higgs πρέπει να πραγματοποιείται μέσω της συνιστώσας ϕ^0 , οπότε στο κενό

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (85)$$

Η αναμενόμενη τιμή κενού $\langle \Phi \rangle$ σπάει αυθόρμητα την συμμετρία $SU(2)_L \times U(1)_Y$, αφού

$$I_1 \langle \Phi \rangle = \frac{\sigma_1}{2} \langle \Phi \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \neq 0 \quad (86)$$

$$I_2 \langle \Phi \rangle = \frac{\sigma_2}{2} \langle \Phi \rangle = -\frac{i}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \neq 0 \quad (87)$$

$$I_3 \langle \Phi \rangle = \frac{\sigma_3}{2} \langle \Phi \rangle = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \langle \Phi \rangle \neq 0 \quad (88)$$

$$Y \langle \Phi \rangle = \langle \Phi \rangle \neq 0 \quad (89)$$

αλλά

$$Q \langle \Phi \rangle = \left(I_3 + \frac{Y}{2} \right) \langle \Phi \rangle = 0 \quad (90)$$

Η εναπομείνουσα συμμετρία της διατήρησης του φορτίου είναι ο λόγος που το φωτόνιο δεν αποκτά μάζα.

Η αρχική συμμετρία αντιστοιχεί σε μετασχηματισμούς της μορφής

$$\phi \rightarrow e^{ia^a \frac{\sigma_a}{2}} e^{ib \frac{Y}{2}} \phi \quad (91)$$

για $a^1 = a^2 = 0$ και $a^3 = b$ ο μετασχηματισμός γίνεται

$$\phi \rightarrow \begin{pmatrix} e^{ib} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \phi \quad (92)$$

Το κενό της θεωρίας είναι αναλλοίωτο σε μετασχηματισμούς αυτής της μορφής και η αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα είναι το ηλεκτρικό φορτίο.

Οι διεγερμένες καταστάσεις στην κατάλληλη βαθμίδα μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}. \quad (93)$$

όπου το πεδίο $H(x)$ είναι πραγματικό βαθμωτό πεδίο. Το πεδίο $H(x)$ περιγράφει το σωματίδιο Higgs. Αρχικά υπάρχουν δύο βαθμωτά μιγαδικά πεδία, τα οποία αντιστοιχούν σε 4 βαθμούς ελευθερίας. Όπως θα δούμε στην τελική κατάσταση έχουμε ένα πραγματικό βαθμωτό πεδίο και 3 ανυσματικά μποζόνια έχουν αποκτήσει μάζα, οπότε έχουν αποκτήσει διαμήκη πόλωση, έτσι πάλι έχουμε 4 βαθμούς ελευθερίας.

3.2 Αλληλεπιδράσεις των Φερμιονίων

Όλες οι αλληλεπιδράσεις των ανυσματικών μποζονίων με τα φερμιόνια εμπεριέχονται στον όρο

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I = & -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{L}'_{\alpha L} (gA^a \sigma^a - g' \mathcal{B}) L'_{\alpha L} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1,2,3} \bar{Q}'_{\alpha L} \left(gA^a \sigma^a + \frac{1}{3} g' \mathcal{B} \right) Q'_{\alpha L} \\ & + g' \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\ell}'_{\alpha R} \mathcal{B} \ell'_{\alpha R} - \frac{2}{3} g' \sum_{\alpha=d,s,b} \bar{q}'_{\alpha R} \mathcal{B} q'_{\alpha R} + \frac{1}{3} g' \sum_{\alpha=u,c,t} \bar{q}'_{\alpha R} \mathcal{B} q'_{\alpha R} \end{aligned} \quad (94)$$

Μπορούμε να χωρίσουμε τις αλληλεπιδράσεις σε δύο κατηγορίες, στις αλληλεπιδράσεις όπου μεταφέρεται φορτίο (charged current) και στις αλληλεπιδράσεις όπου δεν μεταφέρεται φορτίο (neutral current). Για τα λεπτόνια έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{I,L} = & -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \begin{pmatrix} \bar{\nu}'_{\alpha L} & \bar{\ell}'_{\alpha L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} gA^3 - g' \mathcal{B} & g(A^1 - iA^2) \\ g(A^1 + iA^2) & -gA^3 - g' \mathcal{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu'_{\alpha L} \\ \ell'_{\alpha L} \end{pmatrix} \\ & + g' \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\ell}'_{\alpha R} \mathcal{B} \ell'_{\alpha R} \end{aligned} \quad (95)$$

Οι μη διαγώνιοι όροι αποτελούν την Lagrangian της CC αλληλεπίδρασης

$$\mathcal{L}_{I,L}^{CC} = -\frac{g}{2} \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \left[\bar{\nu}'_{\alpha L} (A^1 - iA^2) \ell'_{\alpha L} + \bar{\ell}'_{\alpha L} (A^1 + iA^2) \nu'_{\alpha L} \right] \quad (96)$$

Ορίζουμε το πεδίο, το οποίο εξαϋλώνει μποζόνια W^+ και δημιουργεί μποζόνια W^- , ως

$$W^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (A^{1\mu} - iA^{2\mu}) \quad (97)$$

Έτσι η αλληλεπίδραση γίνεται

$$\mathcal{L}_{I,L}^{CC} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \left[\bar{\nu}'_{\alpha L} W \ell'_{\alpha L} + \bar{\ell}'_{\alpha L} W^\dagger \nu'_{\alpha L} \right] \quad (98)$$

Ορίζοντας το ρεύμα ως

$$j_{W,L}^\mu = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\nu}'_{\alpha L} \gamma^\mu \ell'_{\alpha L} = \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\nu}'_{\alpha} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \ell'_{\alpha} \quad (99)$$

Η Lagrangian γίνεται

$$\mathcal{L}_{I,L}^{CC} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} j_{W,L}^\mu W_\mu + H.C. \quad (100)$$

Αν εκμεταλευτούμε την αναπαράσταση των τελεστών του ασθενούς ισотоπικού σπιν με τους πίνακες Pauli μπορούμε να ορίσουμε τους τελεστές που ανεβάζουν και κατεβάζουν το ασθενές ισотоπικό σπιν ως

$$I^\pm = \frac{1}{2} (\sigma^1 \pm i\sigma^2) \quad (101)$$

Έτσι μπορούμε να εκφράσουμε το ρεύμα της CC αλληλεπίδρασης ως

$$j_{W,L}^\mu = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{L}'_{\alpha L} \gamma^\mu I^+ L'_{\alpha L} \quad (102)$$

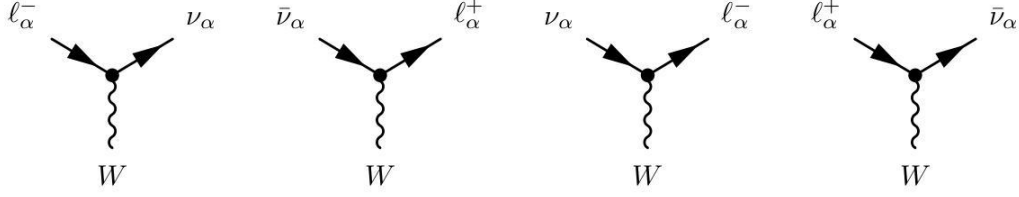
οπότε αντίστοιχα έχουμε

$$j_{W,L}^{\mu\dagger} = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{L}'_{\alpha L} \gamma^\mu I^- L'_{\alpha L} \quad (103)$$

Οι ζεύξεις των λεπτονίων με το ανυσματικό μποζόνιο W φαίνονται στο σχήμα (5).

Οι διαγώνιοι όροι της (95) αποτελούν την Lagrangian της NC αλληλεπίδρασης

$$\mathcal{L}_{I,L}^{NC} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \left[\bar{\nu}'_{\alpha L} (gA^3 - g'B) \nu'_{\alpha L} - \bar{\ell}'_{\alpha L} (gA^3 + g'B) \ell'_{\alpha L} - 2g'\bar{\ell}'_{\alpha R} B \ell'_{\alpha R} \right] \quad (104)$$



Σχήμα 1: Οι ζεύξεις των λεπτονίων με το ανυσματικό μποζόνιο W .

Αφού η θεωρία μας θέλουμε να αναχθεί στην κβαντική ηλεκτροδυναμική το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό A^μ πρέπει να είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των πεδίων $A^{3\mu}$ και B^μ , παράλληλα θα σχηματιστεί και ένα πεδίο Z^μ το οποίο θα είναι κάθετο στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Ο γραμμικός συνδυασμός παραμετροποιείται μέσω της γωνίας Weinberg

$$\begin{aligned} A^\mu &= \sin \theta_W A^{3\mu} + \cos \theta_W B^\mu \\ Z^\mu &= \cos \theta_W A^{3\mu} - \sin \theta_W B^\mu \end{aligned} \quad (105)$$

Εκφράζοντας την Lagrangian συναρτήσεϊ του ηλεκτρομαγνητικού δυναμικού έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{I,L}^{NC} &= -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \left[\bar{\nu}'_{\alpha L} \left((g \cos \theta_W + g' \sin \theta_W) \not{Z} + (g \sin \theta_W - g' \cos \theta_W) \not{A} \right) \nu'_{\alpha L} \right. \\ &\quad - \bar{\ell}'_{\alpha L} \left((g \cos \theta_W - g' \sin \theta_W) \not{Z} + (g \sin \theta_W + g' \cos \theta_W) \not{A} \right) \ell'_{\alpha L} \\ &\quad \left. - 2g' \bar{\ell}'_{\alpha R} \left(-\sin \theta_W \not{Z} + \cos \theta_W \not{A} \right) \ell'_{\alpha R} \right] \end{aligned} \quad (106)$$

Ξέρουμε ότι τα νετρίνα δεν αλληλεπιδρούν ηλεκτρομαγνητικά οπότε για να έχουν νόημα όσα έχουμε αναφέρει πρέπει να μηδενίζεται η ζεύξη των νετρίνων με το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό, γεγονός που υποδεικνύει ότι

$$\tan \theta_W = \frac{g'}{g} \quad (107)$$

Έτσι η Lagrangian γίνεται

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{I,L}^{NC} = & -\frac{g}{2 \cos \theta_W} \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \left[\bar{\nu}'_{\alpha L} \not{Z} \nu'_{\alpha L} - \bar{\ell}'_{\alpha L} (1 - 2 \sin^2 \theta_W) \not{Z} \ell'_{\alpha L} + 2 \sin^2 \theta_W \bar{\ell}'_{\alpha R} \not{Z} \ell'_{\alpha R} \right] \\ & + g \sin \theta_W \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\ell}'_{\alpha} \not{A} \ell'_{\alpha} \end{aligned} \quad (108)$$

Από τον τελευταίο όρο αναγνωρίζουμε ότι

$$g \sin \theta_W = e \quad (109)$$

αντίστοιχα

$$g' \cos \theta_W = e \quad (110)$$

οπότε μεταξύ των σταθερών ζεύξης και του e ισχύει η σχέση

$$\frac{1}{g^2} + \frac{1}{g'^2} = \frac{1}{e^2} \quad (111)$$

Η NC αλληλεπίδραση μπορεί να σπάσει σε ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση και σε ασθενή αλληλεπίδραση μέσω του μποζονίου Z

$$\mathcal{L}_{I,L}^{\gamma} = -e j_{\gamma,L}^{\mu} A_{\mu} \quad j_{\gamma,L}^{\mu} = - \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\ell} \gamma^{\mu} \ell \quad (112)$$

$$\mathcal{L}_{I,L}^Z = -\frac{g}{2 \cos \theta_W} j_{Z,L}^{\mu} Z_{\mu} \quad (113)$$

Το NC ρεύμα εκφράζεται ως

$$j_{Z,L}^{\mu} = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \left[g_L^{\nu} \bar{\nu}'_{\alpha L} \gamma^{\mu} \nu'_{\alpha L} + g_L^{\ell} \bar{\ell}'_{\alpha L} \gamma^{\mu} \ell'_{\alpha L} + g_R^{\ell} \bar{\ell}'_{\alpha R} \gamma^{\mu} \ell'_{\alpha R} \right] \quad (114)$$

όπου οι σταθερές ζεύξης για τα φερμιόνια ορίζονται ως

$$q_L^f = I_3^f - q^f \sin^2 \theta_W \quad q_L^f = -q^f \sin^2 \theta_W \quad (115)$$

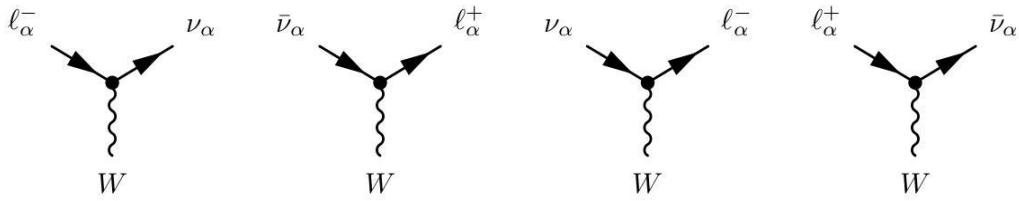
Μία άλλη μορφή του ρεύματος είναι

$$j_{Z,L}^{\mu} = \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \left[\bar{\nu}'_{\alpha} \gamma^{\mu} (g_V^{\nu} - g_A^{\nu} \gamma^5) \nu'_{\alpha} + \bar{\ell}'_{\alpha} \gamma^{\mu} (g_V^{\ell} - g_A^{\ell} \gamma^5) \ell'_{\alpha} \right] \quad (116)$$

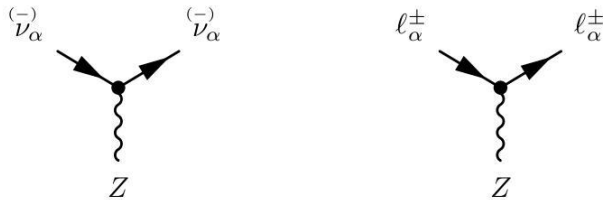
Οι ανυσματικές και ψευδοβαθμωτές ζεύξεις των φερμιονίων δίνονται από τις σχέσεις

$$g_V^f = g_L^f + g_R^f = I_3^f - 2q_f \sin^2 \theta_W \quad g_A^f = g_L^f - g_R^f = I_3^f \quad (117)$$

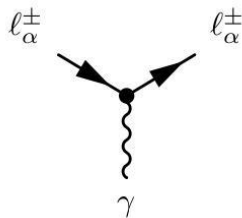
Οι ζεύξεις των λεπτονίων με τα ανυσματικά μποζόνια W και Z φαίνονται στα σχήματα (5) και (6), αντίστοιχα, ενώ οι ζεύξεις των λεπτονίων στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο φαίνονται στο σχήμα (7). Για τα quarks ακολουθεί κανείς την



Σχήμα 2: Οι ζεύξεις των λεπτονίων με το ανυσματικό μποζόνιο W .



Σχήμα 3: Οι ζεύξεις των λεπτονίων με το ανυσματικό μποζόνιο Z .



Σχήμα 4: Η ζεύξη των λεπτονίων με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

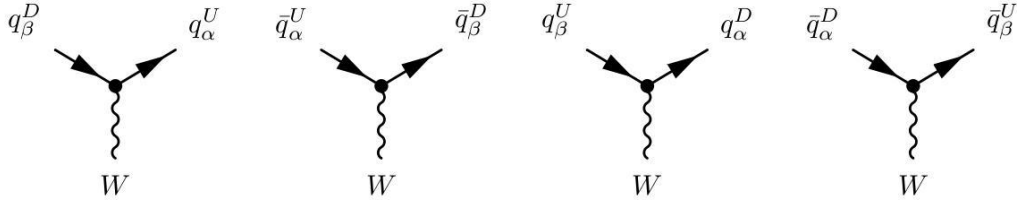
ίδια διαδικασία με τα ρεύματα να δίνονται από τις σχέσεις

$$j_{W,Q}^\mu = 2 \sum_{\alpha=1,2,3} \bar{Q}'_{\alpha L} \gamma^\mu I^+ Q'_{\alpha L} = \sum_{\alpha=1,2,3} \bar{Q}'_{\alpha} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) I^+ Q'_{\alpha} \quad (118)$$

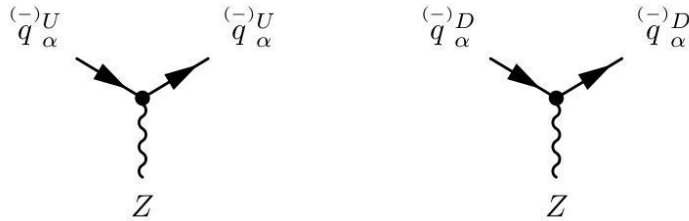
$$j_{\gamma,L}^\mu = \frac{2}{3} \sum_{\alpha=u,c,t} \bar{q}'_{\alpha}{}^U \gamma^\mu q'_{\alpha}{}^U - \frac{1}{3} \sum_{\alpha=d,s,b} \bar{q}'_{\alpha}{}^D \gamma^\mu q'_{\alpha}{}^D \quad (119)$$

$$j_{Z,Q}^\mu = \sum_{\alpha=u,c,t} \bar{q}'_{\alpha}{}^U \gamma^\mu (g_V^U - g_A^U \gamma^5) q'_{\alpha}{}^U + \sum_{\alpha=d,s,b} \bar{q}'_{\alpha}{}^D \gamma^\mu (g_V^D - g_A^D \gamma^5) q'_{\alpha}{}^D \quad (120)$$

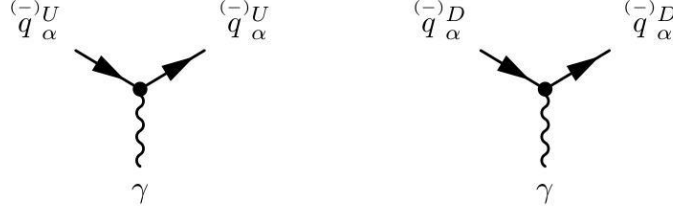
Οι ζεύξεις των quarks με τα ανυσματικά μποζόνια W και Z φαίνονται στα σχήματα (5) και (6), αντίστοιχα, ενώ οι ζεύξεις των quarks στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο φαίνονται στο σχήμα (7).



Σχήμα 5: Οι ζεύξεις των quarks με το ανυσματικό μποζόνιο W .



Σχήμα 6: Οι ζεύξεις των quarks με το ανυσματικό μποζόνιο Z .



Σχήμα 7: Οι ζεύξεις των quarks με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

3.3 Οι Μάζες των Ανυσματικών Μποζονίων

Η δράση της συναλλοίωτης παραγώγου στην διπλέτα Higgs είναι

$$\begin{aligned}
 D_\mu \Phi(x) &= \left[\partial_\mu + \frac{i}{2} g A_\mu^a(x) \sigma^a + \frac{i}{2} g' B_\mu(x) \right] \Phi(x) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu(x) [v + H(x)] \\ \partial_\mu H(x) - \frac{i}{2} \frac{g}{\cos \theta_W} Z_\mu(x) [v + H(x)] \end{pmatrix}, \tag{121}
 \end{aligned}$$

οπότε ο όρος Higgs της Lagrangian του Καθιερωμένου Προτύπου γίνεται

$$\mathcal{L}_H = \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H + \frac{g^2}{4} (v + H)^2 W_\mu^\dagger W^\mu + \frac{g^2}{8 \cos^2 \theta_W} (v + H)^2 Z_\mu Z^\mu - \frac{\lambda}{4} (H^2 + 2vH)^2. \tag{122}$$

Αναπτύσσοντας την ανωτέρω έκφραση καταλήγουμε

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_H &= \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H - \lambda v^2 H^2 - \lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4} H^4 + \frac{g^2 v^2}{4} W_\mu^\dagger W^\mu + \frac{g^2 v^2}{8 \cos \theta_W} Z_\mu Z^\mu \\
 &+ \frac{g^2 v}{2} W_\mu^\dagger W^\mu H + \frac{g^2 v}{4 \cos \theta_W} Z_\mu Z^\mu H \\
 &+ \frac{g^2}{4} W_\mu^\dagger W^\mu H^2 + \frac{g^2}{8 \cos \theta_W} Z_\mu Z^\mu H^2 \tag{123}
 \end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος είναι ο κινητικός όρος του σωματιδίου Higgs. Ο δεύτερος όρος είναι ο όρος μάζας του σωματιδίου Higgs, από τον οποίο βλέπουμε ότι

$$m_H = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}. \tag{124}$$

Αφού η παράμετρος μ έχει εισαχθεί στο Καθιερωμένο Πρότυπο αυθαίρετα η τιμή της δεν μπορεί να σχετιστεί με κάποια άλλη ποσότητα που να έχει ήδη μετρηθεί, οπότε το Καθιερωμένο Πρότυπο δεν μπορεί να μας δώσει κάποια πρόβλεψη για την μάζα του σωματιδίου Higgs. Ο τρίτος και τέταρτος όρος αντιστοιχούν σε αυτοζεύξεις του πεδίου Higgs και φαίνονται στο σχήμα (8). Ο πέμπτος και έκτος όρος είναι ιδιαίτερα σημαντικοί, καθώς είναι οι όροι μάζας των μποζονίων W και Z , οι μάζες των οποίων είναι

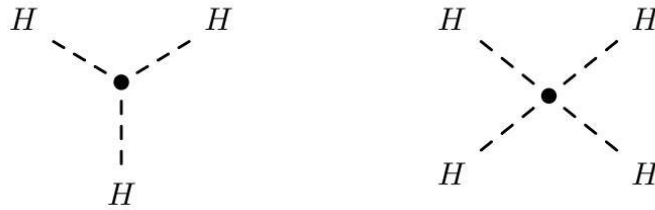
$$m_W = \frac{gv}{2} \quad m_Z = \frac{gv}{2 \cos \theta_W}. \quad (125)$$

Η παράμετρος ρ ορίζεται ως

$$\rho = \frac{m_W^2}{m_Z^2 \cos^2 \theta_W} \quad (126)$$

και σε επίπεδο tree level διαγραμμάτων έχει την τιμή $\rho = 1$, ενώ σε διαγράμματα ανώτερης τάξης η τιμή της παραμέτρου εξαρτάται από τον τρόπο επανακανονικοποίησης.

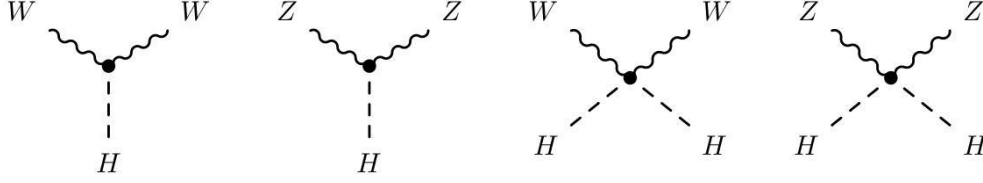
Οι τέσσερις τελευταίοι όροι αντιστοιχούν σε ζεύξεις του πεδίου Higgs με τα μποζόνια W και Z και φαίνονται στο σχήμα (9).



Σχήμα 8: Οι αυτοζεύξεις του πεδίου Higgs.

Στο Καθιερωμένο Πρότυπο μπορούν να εισαχθούν επιπλέον πεδία Higgs, τα οποία όμως θα συμβάλλουν στην μάζα των W και Z . Για έναν αυθαίρετο αριθμό πεδίων Higgs, συμπεριλαμβανομένης της διπλέτας του Καθιερωμένου Προτύπου

$$\rho = \frac{\sum_k \left[I^k (I^k + 1) - (I_3^k)^2 \right] v_k^2}{\sum_k (I_3^k)^2 v_k^2}, \quad (127)$$



Σχήμα 9: Οι ζεύξεις ανυσματικών μποζονίων με το πεδίο Higgs.

όπου I^k είναι το isospin του πεδίου Higgs και I_3^k είναι η τρίτη συνιστώσα του isospin της συνιστώσας του πεδίου Higgs, η οποία έχει μη μηδενική αναμενόμενη τιμή κενού. Συνέπεια αυτής της σχέσης είναι ότι αν περιοριστούμε σε διπλές Higgs, τότε υποχρεωτικά $\rho = 1$. Πειραματικά έχει βρεθεί

$$\rho = 0.9998_{-0.0005}^{+0.0008}, \quad (128)$$

οπότε υπάρχει περιθώριο μόνο για ύπαρξη περαιτέρω διπλέτων Higgs².

3.4 Οι Μάζες των Φερμιονίων

Για να κατασκευάσουμε όρο μάζας για τα λεπτόνια είχαμε εισάγει στην θεωρία μας τον όρο

$$\mathcal{L}_{H,L} = - \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} Y_{\alpha\beta}^{\ell} \bar{L}'_{\alpha L} \Phi'_{\beta R} + HC. \quad (129)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την έκφραση της σχέσης (93) ο όρος αυτός γίνεται

$$\mathcal{L}_{H,L} = - \frac{v+H}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} Y_{\alpha\beta}^{\ell} \bar{\ell}'_{\alpha L} \ell'_{\beta R} + HC. \quad (130)$$

Ο όρος που είναι ανάλογος της αναμενόμενης τιμής κενού v δημιουργεί έναν όρο μάζας για το λεπτόνιο ενώ ο όρος που είναι ανάλογος του πεδίου H είναι η ζεύξη του λεπτονίου με το πεδίο Higgs. Ο πίνακας Y^{ℓ} εν γένει δεν είναι διαγώνιος, οπότε τα πεδία ℓ' δεν έχουν καθορισμένη μάζα. Μέσω ενός μετασχηματισμού

$$(V_L^{\ell})^{\dagger} Y^{\ell} V_R^{\ell} = Y^{\ell}, \quad Y_{\alpha\beta}^{\ell} = y_{\alpha}^{\ell} \delta_{\alpha\beta} \quad y_{\alpha}^{\ell} > 0, \quad (131)$$

²Αν εξαιρέσουμε περιπτώσεις υπερβολικά μικρών αναμενόμενων τιμών κενού, οι οποίες δεν θα προέκυπταν με φυσικό τρόπο

όπου οι πίνακες V_L^ℓ και V_R^ℓ είναι unitary , ο πίνακας διαγωνοποιείται, οπότε η Lagrangian αποκτά την μορφή

$$\mathcal{L}_{H,L} = -\frac{v+H}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} y_\alpha^\ell \bar{\ell}_{\alpha L} \ell_{\alpha R} + HC. \quad (132)$$

Τα άτονα πεδία πλέον έχουν καθορισμένη μάζα.

$$\ell_L = (V_L^\ell)^\dagger \ell'_L = \begin{pmatrix} e_L \\ \mu_L \\ \tau_L \end{pmatrix} \quad (133)$$

Μια άλλη μορφή της Lagrangian είναι

$$\mathcal{L}_{H,L} = - \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \frac{y_\alpha^\ell v}{\sqrt{2}} \bar{\ell}_\alpha \ell_\alpha - \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \frac{y_\alpha^\ell}{\sqrt{2}} \bar{\ell}_\alpha \ell_\alpha H, \quad (134)$$

όπου φαίνεται ξεκάθαρα ότι οι μάζες των λεπτονίων δίνονται από την σχέση

$$m_\alpha = \frac{y_\alpha^\ell v}{\sqrt{2}}. \quad (135)$$

Αφού στο Καθιερωμένο Πρότυπο οι συντελεστές y_α^ℓ είναι άγνωστες παράμετροι, η μάζα των λεπτονίων δεν μπορεί να προβλεφθεί, οπότε προσδιορίζεται μόνο πειραματικά.

Το λεπτονικό ρεύμα της CC ασθενούς αλληλεπίδρασης γίνεται

$$j_{W,L}^k = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\nu}'_L \gamma^k \ell'_L = 2 \bar{\nu}'_L \gamma^k V_L^\ell \ell_L. \quad (136)$$

Εκμεταλλευόμενοι την ισοδυναμία των πινάκων γ σε μετασχηματισμούς ομοιότητας και ορίζοντας τα νετρίνα ως

$$\nu_L = (V_L^\ell)^\dagger \nu'_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix} \quad (137)$$

καταλήγουμε ότι

$$j_{W,L}^k = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_L \gamma^k \ell_L. \quad (138)$$

Τα νετρίνα της σχέσης (137) είναι νετρίνα καθορισμένης γεύσης αφού ορίζονται μέσω της ζεύξης τους με τα αντίστοιχα φορτισμένα λεπτόνια. Στο Καθιερωμένο Πρότυπο τα νετρίνα καθορισμένης γεύσης, έχουν και καθορισμένη μάζα αφού οι καταστάσεις καθορισμένης γεύσης είναι γραμμικός συνδυασμός άμαζων πεδίων.

Η ζεύξη μέσω του μποζονίου W διατηρεί τους λεπτονικούς αριθμούς κάθε γεύσης L_α , οπότε κατά επέκταση διατηρείται και ο λεπτονικός αριθμός

$$L = L_e + L_\mu + L_\tau. \quad (139)$$

Η διατήρηση των λεπτονικών αριθμών κάθε γεύσης σχετίζονται με την αναλλοιώτητα της Lagrangian σε μετασχηματισμούς

$$\nu_{\alpha L} \rightarrow e^{i\phi_a} \nu_{\alpha L}, \quad \ell_{\alpha L} \rightarrow e^{i\phi_a} \ell_{\alpha L}, \quad \ell_{\alpha R} \rightarrow e^{i\phi_a} \ell_{\alpha R}, \quad (140)$$

ενώ η διατήρηση του λεπτονικού αριθμού σχετίζεται με τους μετασχηματισμούς

$$\nu_{\alpha L} \rightarrow e^{i\phi} \nu_{\alpha L}, \quad \ell_{\alpha L} \rightarrow e^{i\phi} \ell_{\alpha L}, \quad \ell_{\alpha R} \rightarrow e^{i\phi} \ell_{\alpha R}. \quad (141)$$

Τα αντίστοιχα διατηρούμενα ρεύματα είναι

$$j_\alpha^k = \bar{\nu}_{\alpha L} \gamma^k \nu_{\alpha L} + \bar{\ell}_{\alpha L} \gamma^k \ell_{\alpha L}, \quad (142)$$

με διατηρούμενα φορτία

$$L_\alpha = \int d^3x j_\alpha^0(x). \quad (143)$$

Το λεπτονικό ρεύμα της NC ασθενούς αλληλεπίδρασης μετασχηματίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} j_{Z,L}^k &= 2g_L^\nu \bar{\nu}'_L \gamma^k \nu'_L + 2g_L^\ell \bar{\ell}'_L \gamma^k \ell'_L + 2g_R^\ell \bar{\ell}'_R \gamma^k \ell'_R \\ &= 2g_L^\nu \bar{\nu}_L (V_L^\ell)^\dagger \gamma^k V_L^\ell \nu_L + 2g_L^\ell \bar{\ell}_L (V_L^\ell)^\dagger \gamma^k V_L^\ell \ell_L + 2g_R^\ell \bar{\ell}_R (V_R^\ell)^\dagger \gamma^k V_R^\ell \ell'_R \\ &= 2g_L^\nu \bar{\nu}_L \gamma^k \nu_L + 2g_L^\ell \bar{\ell}_L \gamma^k \ell_L + 2g_R^\ell \bar{\ell}_R \gamma^k \ell_R \end{aligned} \quad (144)$$

Το λεπτονικό ρεύμα της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης διατηρεί την μορφή του

$$j_{\gamma,L}^k = -\bar{\ell}' \gamma^k \ell' = -\bar{\ell} \gamma^k \ell. \quad (145)$$

3.4.1 Quarks

Για τα quarks είχαμε κατασκευάσει τους όρους

$$- \sum_{\alpha=1,2,3} \sum_{\beta=d,s,b} Y_{\alpha\beta}^{\prime D} \bar{Q}'_{\alpha L} \Phi q'_{\beta R}{}^D. \quad (146)$$

$$- \sum_{\alpha=1,2,3} \sum_{\beta=u,c,t} Y_{\alpha\beta}^{\prime U} \bar{Q}'_{\alpha L} \tilde{\Phi} q'_{\beta R}{}^U, \quad (147)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (93) η Lagrangian της ζεύξης των quarks με το πεδίο Higgs γίνεται

$$\mathcal{L}_{H,Q} = -\frac{v+H}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha,\beta=d,s,b} Y_{\alpha\beta}^{\prime D} \bar{q}'_{\alpha L}{}^D q'_{\beta R}{}^D - \frac{v+H}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha,\beta=u,c,t} Y_{\alpha\beta}^{\prime U} \bar{q}'_{\alpha L}{}^U q'_{\beta R}{}^U + HC. \quad (148)$$

Οι πίνακες $Y^{\prime D}$ και $Y^{\prime U}$ εν γένει δεν είναι διαγώνιοι, οπότε τα τονούμενα πεδία δεν έχουν καθορισμένη μάζα. Μέσω των μετασχηματισμών

$$(V_L^D)^\dagger Y^{\prime D} V_R^D = Y^\ell, \quad Y_{\alpha\beta}^D = y_\alpha^D \delta_{\alpha\beta}, \quad y_\alpha^D > 0, \quad (149)$$

$$(V_L^U)^\dagger Y^{\prime U} V_R^U = Y^\ell, \quad Y_{\alpha\beta}^U = y_\alpha^U \delta_{\alpha\beta}, \quad y_\alpha^U > 0, \quad (150)$$

όπου V_L^D , V_R^D , V_L^U και V_R^U είναι κατάλληλοι unitary πίνακες οι πίνακες Y διαγωνοποιούνται. Ορίζοντας τα πεδία

$$q_L^D = (V_L^D)^\dagger q'_L{}^D = \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix}, \quad q_R^D = (V_R^D)^\dagger q'_R{}^D = \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ b_R \end{pmatrix}, \quad (151)$$

$$q_L^U = (V_L^U)^\dagger q'_L{}^U = \begin{pmatrix} u_L \\ c_L \\ t_L \end{pmatrix}, \quad q_R^U = (V_R^U)^\dagger q'_R{}^U = \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \\ t_R \end{pmatrix}, \quad (152)$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{H,Q} = & - \sum_{\alpha=d,s,b} \frac{y_\alpha^D v}{\sqrt{2}} \bar{q}_\alpha^D q_\alpha^D - \sum_{\alpha=u,c,t} \frac{y_\alpha^U v}{\sqrt{2}} \bar{q}_\alpha^U q_\alpha^U \\ & - \sum_{\alpha=d,s,b} \frac{y_\alpha^D}{\sqrt{2}} \bar{q}_\alpha^D q_\alpha^D H - \sum_{\alpha=u,c,t} \frac{y_\alpha^U}{\sqrt{2}} \bar{q}_\alpha^U q_\alpha^U H. \end{aligned} \quad (153)$$

Οι μάζες των quarks από την σχέση αυτή είναι

$$m_\alpha = \frac{y_\alpha^D v}{\sqrt{2}}, \quad \alpha = d, s, b \quad m_\alpha = \frac{y_\alpha^U v}{\sqrt{2}}, \quad \alpha = u, c, t. \quad (154)$$

Αφού στο Καθιερωμένο Πρότυπο οι συντελεστές y_α^D και y_α^U είναι άγνωστες παράμετροι, η μάζα των quarks δεν μπορεί να προβλεφθεί, οπότε προσδιορίζεται μόνο πειραματικά.

Το ρεύμα της ασθενούς αλληλεπίδρασης φορτισμένου ρεύματος για τα quarks είναι

$$j_{W,Q}^k = 2\bar{q}_L^U \gamma^k q_L^D, \quad (155)$$

οπότε αν αντικαταστήσουμε τα τονούμενα πεδία με τα άτονα έχουμε

$$j_{W,Q}^k = 2\bar{q}_L^U (V_L^U)^\dagger \gamma^k V_L^D q_L^D = 2\bar{q}_L^U \gamma^k (V_L^U)^\dagger V_L^D q_L^D. \quad (156)$$

Βλέπουμε ότι το ρεύμα εξαρτάται από τις ιδιοκαταστάσεις μάζας μέσω του πίνακα

$$j_{W,Q}^k = 2\bar{q}_L^U \gamma^k V_{CKM} q_L^D \quad V_{CKM} = (V_L^U)^\dagger V_L^D. \quad (157)$$

Ο πίνακας V_{CKM} είναι ο πίνακας μίξης των quarks και έχει επικρατήσει να ονομάζεται πίνακας Cabibbo - Kobayashi - Maskawa. Βλέπουμε ότι λόγω της μίξης δεν υπάρχει νόμος διατήρησης των γεύσεων για τα quarks. Το μόνο που διατηρείται είναι ο βαρυονικός αριθμός, ο οποίος είναι $1/3$ για τα quarks και $-1/3$ για τα antiquarks.

Το ρεύμα της NC ασθενούς αλληλεπίδρασης για τα quarks είναι

$$j_{Z,Q}^k = 2g_L^D \bar{q}_L^D \gamma^k q_L^D + 2g_R^D \bar{q}_R^D \gamma^k q_R^D + 2g_L^U \bar{q}_L^U \gamma^k q_L^U + 2g_R^U \bar{q}_R^U \gamma^k q_R^U, \quad (158)$$

οπότε αν αντικαταστήσουμε τα τονούμενα πεδία με τα άτονα έχουμε

$$\begin{aligned} j_{Z,Q}^k &= 2g_L^D \bar{q}_L^D (V_L^D)^\dagger \gamma^k V_L^D q_L^D + 2g_R^D \bar{q}_R^D (V_R^D)^\dagger \gamma^k V_R^D q_R^D \\ &\quad + 2g_L^U \bar{q}_L^U (V_L^U)^\dagger \gamma^k V_L^U q_L^U + 2g_R^U \bar{q}_R^U (V_R^U)^\dagger \gamma^k V_R^U q_R^U \\ &= 2g_L^D \bar{q}_L^D \gamma^k q_L^D + 2g_R^D \bar{q}_R^D \gamma^k q_R^D + 2g_L^U \bar{q}_L^U \gamma^k q_L^U + 2g_R^U \bar{q}_R^U \gamma^k q_R^U \end{aligned} \quad (159)$$

Η διατήρηση της μορφής του ρεύματος δεν επιτρέπει την αλλαγή γεύσης σε NC ασθενείς αλληλεπίδρασεις. Αυτός είναι ο μηχανισμός GIM.

Το ρεύμα της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης για τα quarks διατηρεί την μορφή του

$$j_{\gamma,Q}^k = \frac{2}{3} \bar{q}^U \gamma^k q^U - \frac{1}{3} \bar{q}^D \gamma^k q^D. \quad (160)$$

Ο πίνακας μίξης V_{CKM} αναλυτικά έχει τις συνιστώσες

$$V = (V_L^U)^\dagger V_L^D = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \quad (161)$$

Οι πειραματικές τιμές για τα μέτρα των συνιστωσών του σε επίπεδο εμπιστοσύνης 90% είναι

$$|V| = \begin{pmatrix} 0.9739 - 0.9751 & 0.221 - 0.227 & 0.0029 - 0.0045 \\ 0.221 - 0.227 & 0.9730 - 0.9744 & 0.039 - 0.044 \\ 0.0048 - 0.014 & 0.037 - 0.043 & 0.9990 - 0.9992 \end{pmatrix} \quad (162)$$

Αντίστοιχα μπορεί να κατασκευαστεί ο πίνακας μίξης των λεπτονίων

$$U = (V_L^\ell)^\dagger V_L^\ell = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \quad (163)$$

Για ιστορικούς λόγους έχει επικρατήσει ο πίνακας μίξης των quarks να συνδέει quarks που έχουν $I_3 = 1/2$ στα αριστερά με quarks που έχουν $I_3 = -1/2$ στα δεξιά, ενώ ο πίνακας μίξης των λεπτονίων συνδέει φορτισμένα λεπτόνια που έχουν $I_3 = -1/2$ στα αριστερά με νετρίνα που έχουν $I_3 = 1/2$ στα δεξιά.

3.5 Αλληλεπιδράσεις των Μποζονίων Βαθμίδας

Αν εκφράσουμε τους κινητικούς όρους των μποζονίων $A^{a\mu}$ και B^μ συναρτήσει των W , Z^μ και A^μ θα προκύψουν οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μποζονίων βαθμίδας. Πράγματι από την έκφραση

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4}A_{\mu\nu}^a A^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (164)$$

αντικαθιστώντας

$$A^{1\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} (W^\mu + W^{\mu\dagger}) \quad (165)$$

$$A^{2\mu} = \frac{i}{\sqrt{2}} (W^\mu - W^{\mu\dagger}) \quad (166)$$

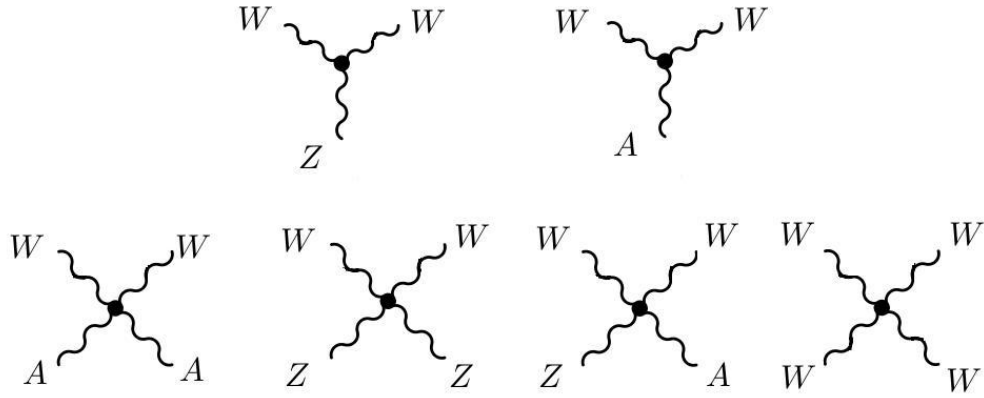
$$A^{3\mu} = \sin \theta_W A^\mu + \cos \theta_W Z^\mu \quad (167)$$

$$B^\mu = \cos \theta_W A^\mu - \sin \theta_W Z^\mu \quad (168)$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{gauge} = & -\frac{1}{2} F_{W\mu\nu}^\dagger F_W^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{Z\mu\nu} F_Z^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ & + ie \cot \theta_W \left(F_W^{\mu\nu} Z_\mu W_\nu^\dagger - F_{W\mu\nu}^\dagger Z^\mu W^\nu + F_Z^{\mu\nu} W_\mu^\dagger W_\nu \right) \\ & + ie \left(F_W^{\mu\nu} A_\mu W_\nu^\dagger - F_{W\mu\nu}^\dagger A^\mu W^\nu + F^{\mu\nu} W_\mu^\dagger W_\nu \right) \\ & + e^2 \cot^2 \theta_W \left((W_\mu Z^\mu) (W_\nu^\dagger Z^\nu) - (W^\mu W_\mu^\dagger) (Z^\nu Z_\nu) \right) \\ & + e^2 \left((W_\mu A^\mu) (W_\nu^\dagger A^\nu) - (W^\mu W_\mu^\dagger) (A^\nu A_\nu) \right) \\ & + e^2 \cot \theta_W \left((W_\mu Z^\mu) (W_\nu^\dagger A^\nu) + (W_\mu^\dagger Z^\mu) (W_\nu A^\nu) - 2 (W^\mu W_\mu^\dagger) (Z^\nu A_\nu) \right) \\ & + \frac{e^2}{2 \sin^2 \theta_W} \left((W_\mu W^\mu) (W_\mu^\dagger W^{\mu\dagger}) - (W_\mu^\dagger W^\mu)^2 \right) \end{aligned} \quad (169)$$

Αναγνωρίζουμε τους κινηματικούς όρους των πεδίων στην πρώτη γραμμή και ακολουθούν τριγραμμικές ζεύξεις W^+W^-Z , τριγραμμικές ζεύξεις W^+W^-A , τετραγραμμικές ζεύξεις W^+W^-ZZ , τετραγραμμικές ζεύξεις W^+W^-AA , τετραγραμμικές ζεύξεις W^+W^-AZ και τετραγραμμικές ζεύξεις $W^+W^-W^+W^-$. Οι ζεύξεις φαίνονται στο σχήμα (10).



Σχήμα 10: Οι ζεύξεις των ανυσματικών μποζονίων βαθμίδας στα ανυσματικά μποζόνια βαθμίδας.

Παράρτημα

4 Συμβάσεις

Δουλεύουμε στο φυσικό σύστημα μονάδων.

$$c = 1 \quad \hbar = 1 \quad (170)$$

και χρησιμοποιούμε την μετρική

$$n_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (171)$$

Με αυτή την μετρική η εξίσωση Klein Gordon

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi + m^2 \phi = 0. \quad (172)$$

γράφεται

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi - m^2 \phi = 0 \quad (173)$$

5 Αποδείξεις

Η ιδιότητα της σχέσης (48) αποδεικνύεται ως εξής: Για άχρους ερμητιανούς πίνακες που αποτελούν την θεμελιώδη αναπαράσταση μιας ομάδας $SU(N)$ ισχύει

$$\text{Tr} (t^a t^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (174)$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} f^{abc} f^{ade} &= f^{bca} f^{def} \delta^{af} = 2\text{Tr} (f^{bca} t^a f^{def} t^f) \\ &= 2\text{Tr} ([t^b, t^c] [t^d, t^e]) \end{aligned} \quad (175)$$

Βιβλιογραφία

- I. Aitchinson, A. Hey: **Gauge Theories in Particle Physics, Vol II**, Taylor & Francis, 2004.
- D. Griffiths: **Introduction to Elementary Particles**, John Wiley & Sons, 2008.
- F. Haltzen, A.D. Martin: **Quarks and Leptons**, John Wiley & Sons, 1984.
- M. Peskin, D. Schroeder: **An Introduction to Quantum Field Theory**, Westview Press, 1992.
- S. Weinberg: **The Quantum Theory of Fields, Vol II**, CUP, 1996.