

Minimal $SU(5)$ Grand Unification

Dimitris Katsinis

200942

University of Athens

Nuclear and Particle Physics Section

June 10, 2012

Contents

Summary	3
1 Lessons From SM	4
1.1 Why go Beyond SM?	4
1.2 Running Couplings	6
2 Building SU(5)	9
2.1 The Generators	9
2.2 Particle Content	11
2.3 The Massless Lagrangian	15
2.4 Running Couplings	18
2.5 Weinberg Angle	19
3 SSB of $SU(5)$	21
3.1 $SU(5)$ Breaking	21
3.2 EW Breaking	23
3.3 The Total Potential	24
4 Fermion Masses	26
5 B-Violation and Proton Decay	28
6 Discussion	29
Appendix	30
7 Charge Conjugation	31
8 Gauge Boson Matrices	33
9 The $SU(5)$ Group	34
Bibliography	36

Summary

Standard Model as a gauge theory is briefly reviewed. We discuss the basic ingredients of the SM and things that need a better explanation. Grand Unification emerges as a way to solve some problems of SM. Minimal $SU(5)$ is builded step be step. We introduce the Fermions and Gauge Bosons. We present the massless Lagrangian and the very basic predictions of the theory. We analyse the Higgs Sector of the theory. Upon diagonalization of the mass matrices, we derive the relations concerning fermion masses. Finally we discuss leptoquarks interactions and Proton decay.

The appendix contains basic elements of Group Theory. We present the properties of charge conjugate fields. We analyse some representations of the $SU(5)$.

1 Lessons From SM

1.1 Why go Beyond SM?

Η Ηλεκτρασθενής Θεωρία, μαζί με την Χβαντική Χρωμοδυναμική αποτελούν το Καθιερωμένο Πρότυπο της Φυσικής Στοιχειωδών Σωματιδίων. Το ΚΠ έχει επιβεβαιωθεί με πολύ μεγάλη ακρίβεια. Τα πειράματα στον επιταχυντή LEP επιβεβαίωσαν τις προβλέψεις της Ηλεκτρασθενούς Θεωρίας όχι μόνο στο κλασικό επίπεδο, αλλά και τις χβαντικές διορθώσεις. Το ΚΠ δεν είναι αυτό που έχει κανείς κατά νου για μια θεμελιώδη θεωρία της φύσης. Σίγουρα όμως μας έχει ανοίξει τον δρόμο για το τι στοιχεία πρέπει να έχει μια τέτοια θεωρία. Πρόκειται για μια τοπική θεωρία. Πεδία αλληλεπιδρούν είτε βρισκόμενα στο ίδιο χωροχρονικό σημείο είτε μέσω των παραγώγων τους. Το ΚΠ οφείλει να υπακούει στις αρχές της χβαντομηχανικής και να είναι αναλλοιώτο σε μετασχηματισμούς Poincare. Το ΚΠ λοιπόν δεν μπορεί παρά να είναι μια τοπική χβαντική θεωρία πεδίου. Το ΚΠ δεν είναι μια οποιαδήποτε χβαντική θεωρία πεδίου, έχει μια πολύ πιο συνεκτική δομή, την δομή μιας θεωρία βαθμίδας. Εμφανίζει κάποια συμμετρία η οποία έχει παραβιαστεί αυθόρμητα. Αυτό το γεγονός έχει αντίκτυπο στις χβαντικές ιδιότητες της θεωρίας. Καθιστά την θεωρία επανακανονικοποιήσιμη. Σε γενικές γραμμές αυτό σημαίνει ότι αποτελέσματα της θεωρίας σε διαφορετικές κλίμακες ενεργειών μπορούν να συσχετιστούν μεταξύ τους.

Μια καλή αρχή θα ήταν να αναζητήσουμε μια θεωρία με τα παραπάνω χαρακτηριστικά. Πριν συνεχίσουμε πρέπει να ξεκαθαρίσουμε τι έχουμε στην διάθεσή μας και τι θα θέλαμε να βελτιώσουμε. Όπως είπαμε το ΚΠ είναι μια θεωρία βαθμίδας, με ομάδα βαθμίδας $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Αυτό σημαίνει ότι τα σωματίδια της θεωρίας ανήκουν σε αναπαραστάσεις αυτή της ομάδας, ενώ οι φορείς των αλληλεπιδράσεων, τα μποζόνια βαθμίδας, ανήκουν στην προσαρτημένη αναπαράσταση αυτής της ομάδας.

Η θεωρία παρουσιάζει πολύ πλούσια δομή όσον αφορά την γεύση. Η μίξη των quarks και περιγράφεται από τον πίνακα CKM και προκαλεί παραβίαση της συμμετρίας CP. Υπάρχει ακόμα ο μηχανισμός GIM ο οποίος εξασφαλίζει ότι σε tree level δεν υπάρχουν ουδέτερα ασθενή ρεύματα που να αλλάζουν γεύση (FCNC). Ακόμα αν δεν υπήρχαν οι ζεύξεις Yukawa η θεωρία θα εμφάνιζε μια συμμετρία $SU(3)^5$. Από την σκοπιά της αναζήτησής μας η γεύση θέτει αυστηρούς περιορισμούς στις υποψήφιες θεωρίες.

Ο τομέας Higgs που ευθύνεται για την αυθόρμητη ρήξη συμμετρίας έχει και αυτός ιδιαίτερα χαρακτηριστικά. Μέσω του μηχανισμού Higgs έχουμε την ρήξη

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow SU(3)_C \times U(1)_{em} \quad (1)$$

η οποία επιτρέπει στα σωματίδια και τα μποζόνια βαθμίδας να αποκτήσουν μάζα με συνεπή τρόπο. Αν είμαστε προσεκτικοί θα δούμε ότι στην περίπτωση της διπλέτας Higgs έχουμε μια ακόμα συμμετρία (custodial SU(2) symmetry). Δύο μιγαδικά πεδία ισοδυναμούν με τέσσερα πραγματικά, οπότε ο τομέας Higgs εμφανίζει μια συμμετρία $O(4) \sim SU(2)_L \times SU(2)_R$. Η δεύτερη συμμετρία επιβιώνει από την αυθόρμητη ρήξη συμμετρίας και είναι ο λόγος που η παράμετρος ρ είναι ακριβώς μονάδα.

Αν γράψει κανείς την θεωρία με τα παραπάνω χαρακτηριστικά θα σταθεί τυχερός. Η θεωρία θα εμφανίζει δυο συμπτωματικές συμμετρίες (accidental symmetries), την διατήρηση του βαρυονικού και λεπτονικού αριθμού. Ωστόσο σε κβαντικό επίπεδο οι συμμετρίες αυτές σπάνε μέσω μη διαταρακτικών φαινομένων (Sphaleron) που σχετίζονται με σολιτονικές λύσεις της ηλεκτρασθενούς θεωρίας.

Αντίστοιχο φαινόμενο στην QCD προκαλεί την εμφάνιση ενός όρου ο οποίος παραβιάζει την συμμετρία CP, χωρίς αυτό να παρατηρείται πειραματικά (Strong CP Problem). Παραμένει αναπάντητο τι υπάρχει πίσω από την πολύ μικρή, αν όχι μηδενική τιμή της παραμέτρου θ_{QCD} .

Η θεωρία περιέχει 19 (ή 26/28 αν λάβουμε υπόψιν τις μάζες και τις παραμέτρους μίξης των Dirac / Majorana νετρίνων) ελεύθερες παραμέτρους, οπότε σαν θεωρία δεν είναι καθόλου μοναδική. Με την ίδια θεωρία αλληλεπιδράσεων θα μπορούσαμε να έχουμε μια τελείως διαφορετική εικόνα για κάποιες άλλες τιμές των παραμέτρων. Συνηθίζεται ως παράμετροι να επιλέγονται οι 9(12) μάζες των φερμιονίων, 4(8/10) παράμετροι μίξης, G_F , a_{em} , a_s , m_Z , m_H και θ_{QCD} .

Ένα άλλο πρόβλημα είναι ότι ο μηχανισμός Higgs είναι καθαρά φαινομενολογικός εμπνευσμένος από την στατιστική φυσική. Δεν απαντά στο βαθύτερο ερώτημα για την προέλευση της μάζας. Υπάρχουν κάποια άλλα μοντέλα τα οποία προκαλούν την δυναμική ρήξη της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας με άλλο τρόπο, τα οποία όμως έχουν τα δικά τους προβλήματα. Τα μοντέλα αυτά είτε θεωρούν το σωματίο Higgs ως δέσμια κατάσταση μιας αντίστοιχης QCD σε υψηλότερη κλίμακα (Technicolor, Walking Technicolor), είτε όπως είπαμε το θεωρούν ψευδομποζόνιο Goldstone μιας καθολικής συμμετρίας η οποία σπάει στο 1 TeV (Little Higgs). Υπάρχουν ακόμα μοντέλα που η ρήξη της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας προκαλείται από επιπλέον διαστάσεις χωρίς την ύπαρξη σωματιδίου Higgs (Extra Dimensional Higgsless Models).

Υπάρχουν κι άλλα ακόμα πιο θεμελιωικά ερωτήματα, όπως το γιατί ηλεκ-

τρασθενής κλίμακα είναι 16 τάξεις μεγέθους χαμηλότερη από την κλίμακα της βαρύτητας, ισοδύναμα ποιός μηχανισμός συγκρατεί την μάζα του Higgs στην ηλεκτρασθενή κλίμακα ενέργειας. Στην QCD η κλίμακα της θεωρίας εξασφαλίζεται μέσω της dimensional transmutation, η θεωρία φτάνει σε πόλο Landau και αντικαθιστά μια αδιάστατη παράμετρο με μια διαστατική. Με αυτό τον τρόπο εμφανίζεται κλίμακα στην θεωρία με φυσικό τρόπο.

Ακόμα δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι ο τρόπος με τον οποίο ενοποιείται η βαρύτητα με τις υπόλοιπες δυνάμεις παραμένει ακόμα μυστήριο.

Όλα τα παραπάνω συνηγορούν στο γεγονός ότι το ΚΠ είναι μια χαμηλοενεργειακή ενεργός θεωρία κάποιας θεμελιώδους θεωρίας. Ένας τρόπος να δοθεί απάντηση σε κάποια από αυτά τα ερωτήματα είναι η υπερσυμμετρική (ή μη) μεγάλη ενοποίηση. Με την μεγάλη ενοποίηση περιορίζονται οι ελεύθερες παράμετροι της θεωρίας, για παράδειγμα οι τρεις αλληλεπιδράσεις αποκτούν μια κοινή σταθερά ζεύξης και οι σταθερές ζεύξης των αλληλεπιδράσεων του Καθιερωμένου Προτύπου διαφοροποιούνται εξαιτίας του σπασίματος της ομάδας συμμετρίας της μεγαλοενοποιημένης θεωρίας GUT στις υποομάδες της. Ακόμα προβλέπονται σχέσεις για τις μάζες των σωματιδίων. Θα αναλύσουμε την πιο απλή μεγαλοενοποιημένη θεωρία το ελάχιστον μοντέλο $SU(5)$.

1.2 Running Couplings

Μια ενδιαφέρουσα συνέπεια της χβαντικής θεωρίας πεδίου είναι οι λεγόμενες ανώμαλες συμμετρίες. Συμμετρίες της κλασσικής Lagrangian οι οποίες χάνονται στο χβαντικό επίπεδο. Ενώ η κλασσική Lagrangian είναι αναλλοίωτη σε αλλαγές κλίμακας, οι χβαντικές διορθώσεις επιφέρουν ρήξη της συμμετρίας κλίμακας (scale invariance). Με αυτό τον τρόπο εμφανίζεται κλίμακα στην θεωρία και κατ' επέκταση όλες οι ποσότητες που εμφανίζονται στην θεωρία εξαρτώνται από την κλίμακα αυτή. Η διαδικασία της επανακανονικοποίησης (renormalization) υπολογίζει αυτή την εξάρτηση. Στην μελέτη της Ηλεκτρασθενούς θεωρίας επιλέξαμε να κρατήσουμε μόνο τα φυσικά σωματίδια. Η βαθμίδα αυτή δεν είναι καλή για υπολογισμούς στο χβαντικό επίπεδο καθώς σε αυτή την βαθμίδα η θεωρία δεν είναι επανακανονικοποιήσιμη με προφανή τρόπο. Σβήνοντας τα μποζόνια Goldstone οι διαδότες της θεωρίας απέκτησαν προβληματική συμπεριφορά για μεγάλες ορμές, οπότε η επανακανονικοποιήσιμότητα χάνεται. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι έχουμε επιλέξει λάθος βαθμίδα. Η κατάλληλη βαθμίδα είναι η βαθμίδα R_ξ . Στη βαθμίδα αυτή παραμένουν τα μποζόνια Goldstone, ενώ η επιβολή της συνθήκης βαθμίδας γίνεται με τα Faddeev - Popov ghosts. Ο t Hooft ακολουθώντας αυτή την διαδικασία

απέδειξε ότι υπάρχει μια μεγάλη κατηγορία θεωριών οι οποίες είναι επανακανονικοποιήσιμες, οι θεωρίες αυτές είναι θεωρίες βαθμίδας με αυθόρμητη ρήξη συμμετρίας. Έτσι η επανακανονικοποιησιμότητα του ΚΠ εξασφαλίζεται από το γεγονός ότι πρόκειται για μια θεωρία βαθμίδας με αυθόρμητη ρήξη συμμετρίας. Για να μπορέσει να εξασφαλίσει κανείς την επανακανονικοποιησιμότητα της θεωρίας πρέπει να συμπεριλάβει στην Lagrangian όλους του όρους οι οποίοι είναι αναλλοίωτοι σε μετασχηματισμούς βαθμίδας και έχουν διάσταση μικρότερη ή ίση με 4. Στα πλαίσια της κβαντικής θεωρίας πεδίου μπορεί να δει κανείς ότι σε επίπεδο ενός loop οι σταθερές ζεύξης των αλληλεπιδράσεων εξαρτώνται από την κλίμακα ενέργειας σύμφωνα με την σχέση

$$\frac{1}{g_i^2(\mu)} = \frac{1}{g_i^2(Q)} + b_i \log(Q^2/\mu^2) \quad (2)$$

όπου b_i είναι η β -συνάρτηση της κάθε αλληλεπίδρασης. Για να χρησιμοποιήσουμε την σχέση αυτή υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει νέα φυσική μέχρι την κλίμακα στην οποία αναφερόμαστε (desert) και αγνοούμε διορθώσεις που οφείλονται στην απεμπλοκή βαρέων σωματιδίων (threshold corrections). Για μια θεωρία βαθμίδας $SU(N)$ προκύπτει ότι

$$b_N = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[-\frac{11}{3}N + \frac{4}{3}n_g \right], \quad (3)$$

όπου n_g είναι το πλήθος των γενεών. Για την θεωρία βαθμίδας $U(1)$ έχουμε

$$b_1 = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{4}{3}n_g \right] = \frac{1}{4\pi^2} \quad (4)$$

Για την θεωρία βαθμίδας $SU(2)$ έχουμε

$$b_2 = -\frac{5}{24\pi^2} \quad (5)$$

Τέλος, για την θεωρία βαθμίδας $SU(3)$ έχουμε

$$b_3 = -\frac{7}{16\pi^2} \quad (6)$$

Στο \overline{MS} σχήμα επανακανονικοποίησης για $\mu = m_Z$ οι τιμές των σταθερών ζεύξης είναι

$$g_1 = g' = 0.357 \quad g_2 = g = 0.652 \quad g_3 = g_s = 1.221 \quad (7)$$

Χρησιμοποιώντας τις ανωτέρω σχέσεις και την σχέση

$$\alpha_i = \frac{g_i^2}{4\pi} \quad (8)$$

μπορούμε να απεικονίσουμε την εξέλιξη των σταθερών ζεύξης με την ενέργεια. Συνηθίζεται να χρησιμοποιεί κανείς αντί για τις σταθερές ζεύξης g_i τα α_i^{-1} , επειδή με αυτή την μεταβλητή η εξέλιξη είναι γραμμική. Η απεικόνιση αυτή βρίσκεται στο σχήμα 1. Βλέπουμε ότι δεν υπάρχει κάποια περιοχή όπου οι σταθερές ζεύξης να έχουν παραπλήσιες τιμές, έτσι δεν υπάρχει τρόπος να θεωρήσουμε ότι το ΚΠ μπορεί να συμπτυχθεί σε μια πιο θεμελιακή θεωρία, όπου και οι τρεις δυνάμεις του ενοποιούνται.

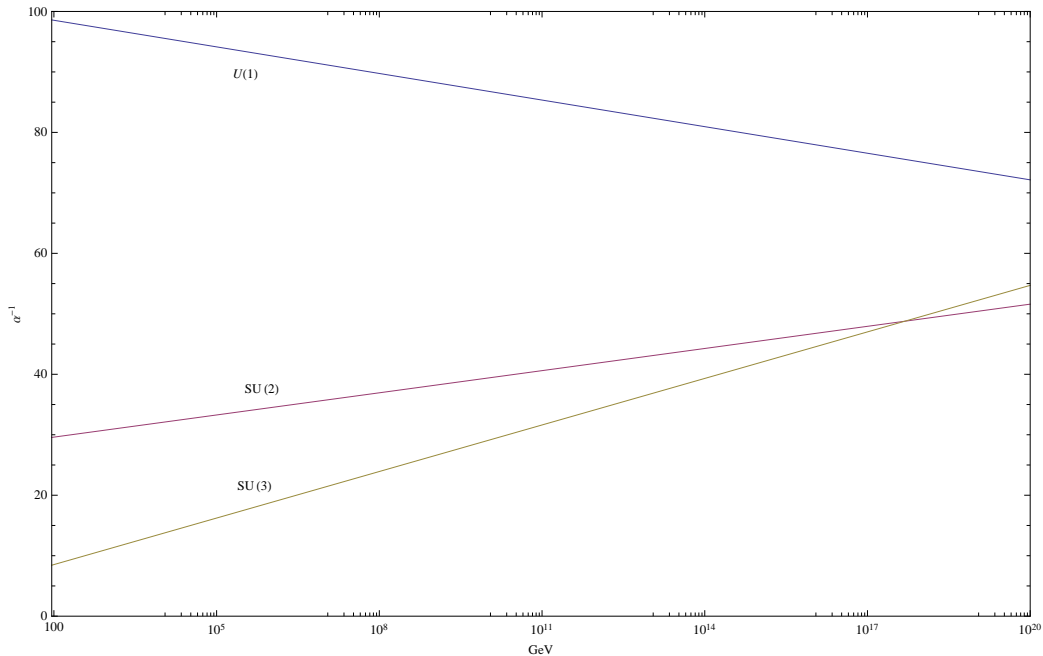


Figure 1: Η εξέλιξη των α^{-1} του Καθιερωμένου Προτύπου.

2 Building SU(5)

2.1 The Generators

Το μοντέλο $SU(5)$ είναι η απλούστερη μεγαλοενοποιημένη θεωρία που μπορεί να κατασκευαστεί. Ιστορικά υπήρξε η δεύτερη μεγαλοενοποιημένη θεωρία που εμφανίστηκε, αλλά η πρώτη η οποία βασιζόταν σε μια απλή ομάδα. Αφού στο ΚΠ έχουμε 4 διαγώνιους γεννήτορες ($U(1) : 1, SU(2) : 1, SU(3) : 2$) η απλούστερη ομάδα που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πρέπει να έχει τάξη 4. Από όλες τις απλές ομάδες με τάξη 4 μόνο η $SU(5)$ μπορεί να αναχθεί στο ΚΠ. Ας δούμε πως μπορεί να γίνει αυτή η αναγωγή. Η ομάδα $SU(5)$ έχει 24 γεννήτορες. Όπως πάντα κανονικοποιούμε τους γεννήτορες ώστε

$$Tr [t^a t^b] = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (9)$$

Κατασκευάζουμε τους 8 πρώτους γεννήτορες από τους γεννήτορες της $SU(3)$:

$$t^{12} = \begin{pmatrix} \lambda^a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = 1, \dots, 8 \quad (10)$$

Οι επόμενοι 3 γεννήτορες κατασκευάζονται από τους γεννήτορες της $SU(2)$:

$$t^{a+8} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^a \end{pmatrix}, \quad a = 1, 2, 3 \quad (11)$$

Ο επόμενος γεννήτορας θα είναι ο πίνακας ο οποίος σχετίζεται με το υπερφορτίο:

$$t^{12} = \frac{1}{\sqrt{60}} \text{diag}(-2, -2, -2, 3, 3) \quad (12)$$

Οι υπόλοιποι γεννήτορες δεν αντιστοιχούν σε γεννήτορες του ΚΠ

$$t^{13} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad t^{14} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$t^{15} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad t^{16} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$t^{17} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad t^{18} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$t^{19} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad t^{20} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$t^{21} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad t^{22} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$t^{23} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad t^{24} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Στους 24 γεννήτορες αντιστοιχούν 24 μποζόνια βαθμίδας. Για να εμφανίσουμε τα φυσικά σωματίδια πρέπει να κατασκευάσουμε τους κατάλληλους γραμμικούς συνδυασμούς. Ορίζουμε τον πίνακα 5×5 ο οποίος περιέχει τα μποζόνια βαθμίδας

$$\mathcal{V}_\mu = \sqrt{2} \sum_{a=1}^{24} V_\mu^{a t^a} \quad (19)$$

Οπότε η συναλλοίωτη παράγωγος της θεωρίας είναι

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - i \frac{g_5}{\sqrt{2}} \mathcal{V}_\mu \quad (20)$$

Ο πίνακας είναι

$$\mathcal{V}_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} G^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}G^8 - \frac{2}{\sqrt{15}}B & G^1 - iG^2 & G^4 - iG^5 & V^{13} - iV^{14} & V^{19} - iV^{20} \\ G^1 + iG^2 - \frac{2}{\sqrt{15}}B & -G^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}G^8 - \frac{2}{\sqrt{15}}B & G^6 - iG^7 & V^{15} - iV^{16} & V^{21} - iV^{22} \\ G^4 + iG^5 & G^6 + iG^7 & -\frac{2}{\sqrt{3}}G^8 - \frac{2}{\sqrt{15}}B & V^{17} - iV^{18} & V^{23} - iV^{24} \\ V^{13} + iV^{14} & V^{15} + iV^{16} & V^{17} + iV^{18} & A^3 + \sqrt{\frac{3}{5}}B & A^1 - iA^2 \\ V^{19} + iV^{20} & V^{21} + iV^{22} & V^{23} + iV^{24} & A^1 + iA^2 & -A^3 + \sqrt{\frac{3}{5}}B \end{pmatrix} \quad (21)$$

Multiplet	Color	W. Isospin	Hypercharge
Q_L	3	2	+1/3
L_L	1	2	-1
u_L^c	$\bar{3}$	1	-4/3
d_L^c	$\bar{3}$	1	+2/3
ℓ_L^c	1	1	+2

Table 1: Οι αναπαράστασεις των φερμιονίων.

$$\nu_\mu = \begin{pmatrix} G_\mu^{11} - \frac{2}{\sqrt{30}} B_\mu & G_\mu^{12} & G_\mu^{13} & X_\mu^1 & Y_\mu^1 \\ G_\mu^{21} & G_\mu^{22} - \frac{2}{\sqrt{30}} B_\mu & G_\mu^{23} & X_\mu^2 & Y_\mu^2 \\ G_\mu^{31} & G_\mu^{32} & G_\mu^{33} - \frac{2}{\sqrt{30}} B_\mu & X_\mu^3 & Y_\mu^3 \\ X_\mu^{1\dagger} & X_\mu^{2\dagger} & X_\mu^{3\dagger} & \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^3 + \sqrt{\frac{3}{5}} B_\mu) & W_\mu \\ Y_\mu^{1\dagger} & Y_\mu^{2\dagger} & Y_\mu^{3\dagger} & W_\mu^\dagger & \frac{1}{\sqrt{2}} (-A_\mu^3 + \sqrt{\frac{3}{5}} B_\mu) \end{pmatrix} \quad (22)$$

Τα νέα μποζόνια X, Y λέγονται leptoquarks γιατί υπό μια έννοια φέρουν λεπτονικό και βαρυονικό αριθμό. Αυτα τα σωματίδια είναι υπεύθυνα για την διάσπαση του πρωτονίου. Το περιεχόμενο της 24-πλέτας αναλύεται ως

$$24 = (8, 1)_0 \oplus (3, 2)_{-5/3} \oplus (\bar{3}, 2)_{+5/3} \oplus (1, 3)_0 \oplus (1, 1)_0 \quad (23)$$

2.2 Particle Content

Οι κβαντικοί αριθμοί των σωματιδίων του ΚΠ φαίνονται στον πίνακα 2.2. Η συγκεκριμένη επιλογή μας εξασφαλίζει ότι αίρονται όλες οι τριγωνικές ανωμαλίες που προκύπτουν από τις αλληλεπιδράσεις τριών ρευμάτων. Ακόμα χρησιμοποιούμε μόνο αριστερόστροφους σπίνορες προκειμένου να μετασχηματίζονται όλα τα στοιχεία των πολλαπλέτων κάτω από την ίδια αναπαράσταση της ομάδας Lorentz. Μια εισαγωγή στον φορμαλισμό αυτό υπάρχει στο παράρτημα 7. Η πιο απλή αναπαράσταση της ομάδας $SU(5)$ είναι μια στήλη 5 συνιστωσών

$$\psi_{\bar{5}} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \\ a^4 \\ a^5 \end{pmatrix} \quad (24)$$

Η δράση της συναλλοιώτης παραγωγού θα μας υποδείξει το σωματιδιακό περιεχόμενο της $\bar{5}$ -πλέτας. Οι γεννήτορες που αντιστοιχούν στην ομάδα $SU(3)$ δρούν

μόνο πάνω στις 3 πρώτες συνιστώσες της πενταπλέτας και αντίστοιχα οι γεννήτορες που αντιστοιχούν στην ομάδα $SU(2)$ δρουν μόνο στις δύο τελευταίες συνιστώσες, έτσι η πεντάδα αναλλύεται στις αναπαραστάσεις του Καθιερωμένου Προτύπου

$$\bar{5} \rightarrow (\bar{3}, 1)_{+2/3} \oplus (1, 2)_{-1} \quad (25)$$

έτσι δεν έχουμε άλλη επιλογή από το να γράψουμε

$$\psi_5 = \begin{pmatrix} d_L^{1c} \\ d_L^{2c} \\ d_L^{3c} \\ \ell_L \\ -\nu_L \end{pmatrix} \quad (26)$$

Η γραφή της διπλέτας είναι επιτρεπτή λόγω της ισοδυναμίας των αναπαραστάσεων $(1, 2)_{-1}$ και $(1, \bar{2})_{+1}$. Αφού ο γεννήτορας που αντιστοιχεί στο υπερφορτίο είναι άιχνος πρέπει το υπερφορτίο της $\bar{5}$ -πλέτας να μηδενίζεται, έτσι πράγματι στην $\bar{5}$ -πλέτα ταιριάζουν μόνο τα quarks d_L^c .

Είναι ενδιαφέρον να επιβεβαιώσουμε αυτόν τον ισχυρισμό χρησιμοποιώντας το φορτίο. Ο τελεστής του φορτίου είναι γραμμικός συνδυασμός άιχνων γεννητόρων, οπότε με την σειρά του είναι άιχνος, επομένως

$$\hat{Q}\psi_5 = 0 \Rightarrow 3\hat{Q}q_L^c + \hat{Q}\ell = 0 \quad (27)$$

Από την σχέση αυτή διαπιστώνουμε ότι $q_L^c = d_L^c$, αλλά δεν θα σταθούμε εκεί. Ήδη η θεωρία δίνει μια πολύ σημαντική ερμηνεία, συνδέει την κβάντωση του φορτίου με την ύπαρξη του χρώματος. Το φορτίο των down-type quark προκύπτει το ένα τρίτο του φορτίου του ηλεκτρονίου εξαιτίας του γεγονότος ότι υπάρχουν τρία χρώματα. Ο τελεστής του φορτίου είναι

$$\hat{Q} = \text{diag}(-1/3, -1/3, -1/3, 1, 0) = t^{11} + \sqrt{\frac{5}{3}}t^{12} \equiv \hat{I}_3 + \frac{\hat{Y}}{2}, \quad (28)$$

Οπότε ο τελεστής του υπερφορτίου αναπαρίσταται από τον πίνακα

$$\hat{Y} = \frac{1}{3}\text{diag}(-2, -2, -2, 3, 3) \quad (29)$$

Η Lagrangian για την $\bar{5}$ -πλέτα είναι

$$\mathcal{L}_{\bar{5}} = \bar{\psi}_{\bar{5}}\mathcal{D}\psi_{\bar{5}} = \bar{\psi}_{\bar{5}}\not{\partial}\psi_{\bar{5}} - \frac{g_5}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_{\bar{5}}\mathcal{V}^T\psi_{\bar{5}}, \quad (30)$$

όπου καταχρηστικά

$$\bar{\psi}_{\bar{5}} = \left(\bar{d}_L^{1c} \quad \bar{d}_L^{2c} \quad \bar{d}_L^{3c} \quad \bar{\ell}_L \quad -\bar{\nu}_L \right) \quad (31)$$

Πρέπει να βρούμε την αναπαράσταση όπου θα τοποθετήσουμε τα υπόλοιπα 10 σωματίδια. Η αναπαράσταση αυτή δεν είναι παρά ο αντισυμμετρικός συνδυασμός δυο 5-πλέτων, οπότε τα υπόλοιπα σωματίδια θα τοποθετηθούν σε έναν αντισυμμετρικό πίνακα 5×5 . Ο συνδυασμός αυτός μας δίνει

$$\left((3, 1)_{-2/3} \oplus (1, 2)_{+1} \right) \otimes \left((3, 1)_{-2/3} \oplus (1, 2)_{+1} \right)_{AS} = (\bar{3}, 1)_{-4/3} \otimes (3, 2)_{+1/3} \otimes (1, 1)_{+2} \quad (32)$$

Έχουμε να κατατάξουμε τα σωματίδια $u_L^c, (u_L, d_L), e_L^c$ τα οποία ανήκουν στις αναπαράστασεις

$$(\bar{3}, 1)_{-4/3} \otimes (3, 2)_{1/3} \otimes (1, 1)_{+2}, \quad (33)$$

οπότε πράγματι η αναπαράσταση 10 είναι κατάλληλη.

Έτσι κατασκευάζουμε τον πίνακα ψ^{ij} ως εξής

$$\chi^{ij} = \frac{1}{2} (a^i a^j - a^j a^i), \quad i, j = 1, \dots, 5 \quad (34)$$

Για $i, j = 1, 2, 3$ έχουμε το αντισυμμετρικό γινόμενο δυο αναπαράστασεων $(3, 1)$, το οποίο είναι η αναπαράσταση $(\bar{3}, 1)$ δηλαδή αριστερόστροφα antiquarks. Έχουμε τοποθετήσει τα d_L^c οπότε τα antiquarks αυτά είναι u_L^c . Αυτός ο συλλογισμός αποτυπώνεται στην έκφραση

$$u_L^{ic} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} a^j a^k \quad j, k = 1, 2, 3 \quad (35)$$

οπότε προκύπτει ότι

$$\psi^{ij} = \epsilon^{ijk} u_R^{kc} \quad j, k = 1, 2, 3 \quad (36)$$

Η στήλη $\psi^{i4}(\psi^{i5})$, $i = 1, 2, 3$ μετασχηματίζεται ως αριστερόστροφα quarks με $I_3 = +1/2(-1/2)$, άρα αντιστοιχεί στα $u_L(d_L)$. Το στοιχείο ψ^{45} μετασχηματίζεται ως $(1, 1)_{+2}$ οπότε αντιστοιχεί στο ℓ_L^c . Η μορφή της αναπαράστασης 10 είναι

$$\psi_{10} = \begin{pmatrix} 0 & u_L^{3c} & -u_L^{2c} & -u_L^1 & -d_L^1 \\ -u_L^{3c} & 0 & u_L^{1c} & -u_L^2 & -d_L^2 \\ u_L^{2c} & -u_L^{1c} & 0 & -u_L^3 & -d_L^3 \\ u_L^1 & u_L^2 & u_L^3 & 0 & -\ell_L^c \\ d_L^1 & d_L^2 & d_L^3 & \ell_L^c & 0 \end{pmatrix} \quad (37)$$

Πρέπει να βρούμε πως δρούν οι γεννήτορες σε αυτή την αναπαράσταση. Κάτω από έναν μετασχηματισμό βαθμίδας η αναπαράσταση 5 μετασχηματίζεται ως

$$\psi_5 \rightarrow \psi'_5 = (\mathcal{I} - i\theta^a t^a) \psi_5 \quad (38)$$

Επομένως η αναπαράσταση 10 μετασχηματίζεται ως το αντισυμμετρικό γινόμενο δυο τέτοιων μετασχηματισμών, δηλαδή

$$\begin{aligned} \psi_{10}^{ij'} &= \frac{1}{2} [(\delta_k^i - i\theta^a t_k^{ai}) (\delta_\ell^j - i\theta^a t_\ell^{aj}) - (\delta_\ell^i - i\theta^a t_\ell^{ai}) (\delta_k^j - i\theta^a t_k^{aj})] \psi_{10}^{k\ell} \\ &= [\delta_k^i \delta_\ell^j - i\theta^a (\delta_\ell^j t_k^{ai} + \delta_k^i t_\ell^{aj})] \psi_{10}^{k\ell} \end{aligned} \quad (39)$$

Θα κατασκευάσουμε τώρα την Lagrangian για την αναπαράσταση 10. Έχουμε την ευχέρεια ενός αυθαίρετου πολλαπλασιαστικού παράγοντα, οπότε εξ αρχής θα χρησιμοποιήσουμε τον σωστό. Από την σχέση (39) κατασκευάζουμε τον αναλλοίωτο σε μετασχηματισμούς βαθμίδας όρο

$$\begin{aligned} &-\frac{i}{2} \bar{\psi}_{ij} \left[\delta_k^i \delta_\ell^j \partial_\mu - i \frac{g_5}{\sqrt{2}} V_\mu^a (\delta_\ell^j t_k^{ai} + \delta_k^i t_\ell^{aj}) \right] \psi^{k\ell} \\ &= -\frac{i}{2} [\bar{\psi}_{ij} \partial_\mu \psi^{ij}] - \frac{g_5}{2\sqrt{2}} V_\mu^a [\bar{\psi}_{ij} t_k^{ai} \psi^{kj} + \bar{\psi}_{ij} t_\ell^{aj} \psi^{i\ell}] \\ &= \frac{i}{2} [\bar{\psi}_{ji} \partial_\mu \psi^{ij}] + \frac{g_5}{\sqrt{2}} V_\mu^a [\bar{\psi}_{ji} t_k^{ai} \psi^{kj}] = \frac{i}{2} Tr [\bar{\psi} \partial_\mu \psi] + \frac{g_5}{\sqrt{2}} [\bar{\psi} \mathcal{V}_\mu \psi] \end{aligned} \quad (40)$$

Επομένως, η Lagrangian για την αναπαράσταση 10 είναι

$$\mathcal{L}_{10} = \frac{i}{2} Tr [\bar{\psi}_{10} \not{D} \psi_{10}] = \frac{i}{2} Tr [\bar{\psi}_{10} \not{\partial} \psi_{10}] + \frac{g_5}{\sqrt{2}} Tr [\bar{\psi}_{10} \mathcal{V} \psi_{10}] \quad (41)$$

όπου καταχρηστικά

$$\bar{\psi}_{10} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{u}_L^{3c} & -\bar{u}_L^{2c} & -\bar{u}_L^1 & -\bar{d}_L^1 \\ -\bar{u}_L^{3c} & 0 & \bar{u}_L^{1c} & -\bar{u}_L^2 & -\bar{d}_L^2 \\ \bar{u}_L^{2c} & -\bar{u}_L^{1c} & 0 & -\bar{u}_L^3 & -\bar{d}_L^3 \\ \bar{u}_L^1 & \bar{u}_L^2 & \bar{u}_L^3 & 0 & -\bar{\ell}_L^c \\ \bar{d}_L^1 & \bar{d}_L^2 & \bar{d}_L^3 & \bar{\ell}_L^c & 0 \end{pmatrix}^T \quad (42)$$

2.3 The Massless Lagrangian

Η συνολική Lagrangian της θεωρίας είναι

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= i\bar{\psi}_5 \not{D}\psi_5 + \frac{i}{2}Tr [\bar{\psi}_{10} \not{D}\psi_{10}] + \mathcal{L}_{gauge} \\ &= i\bar{\psi}_5 \not{\partial}\psi_5 + \frac{i}{2}Tr [\bar{\psi}_{10} \not{\partial}\psi_{10}] - \frac{g_5}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_5 \mathcal{V}^T \psi_5 + \frac{g_5}{\sqrt{2}}Tr [\bar{\psi}_{10} \mathcal{V}\psi_{10}] + \mathcal{L}_{gauge},\end{aligned}\quad (43)$$

όπου \mathcal{L}_{gauge} είναι οι κινητικοί όροι των μποζονίων βαθμίδας και οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ τους.

Οι κινητικοί όροι της θεωρίας είναι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{kin} &= i\bar{\psi}_5 \not{\partial}\psi_5 + \frac{i}{2}Tr [\bar{\psi}_{10} \not{\partial}\psi_{10}] \\ &= i\bar{u}_L^{1c} \not{\partial}u_L^{1c} + i\bar{u}_L^{2c} \not{\partial}u_L^{2c} + i\bar{u}_L^{3c} \not{\partial}u_L^{3c} + i\bar{u}_L^1 \not{\partial}u_L^1 + i\bar{u}_L^2 \not{\partial}u_L^2 + i\bar{u}_L^3 \not{\partial}u_L^3 \\ &\quad + i\bar{d}_L^{1c} \not{\partial}d_L^{1c} + i\bar{d}_L^{2c} \not{\partial}d_L^{2c} + i\bar{d}_L^{3c} \not{\partial}d_L^{3c} + i\bar{d}_L^1 \not{\partial}d_L^1 + i\bar{d}_L^2 \not{\partial}d_L^2 + i\bar{d}_L^3 \not{\partial}d_L^3 \\ &\quad + i\bar{\ell}_L^c \not{\partial}\ell_L^c + i\bar{\ell}_L \not{\partial}\ell_L + i\bar{\nu}_L \not{\partial}\nu_L\end{aligned}\quad (44)$$

Μπορούμε να επαναφέρουμε τις δεξιόστροφες χειραλικές συνιστώσες των πεδίων και να συμπύξουμε τους δείκτες που αφορούν το χρώμα των quarks για να καταλήξουμε στην συνήθη μορφή

$$\mathcal{L}_{kin} = i\bar{u}_L \not{\partial}u_L + i\bar{u}_R \not{\partial}u_R + i\bar{d}_L \not{\partial}d_L + i\bar{d}_R \not{\partial}d_R + i\bar{\ell}_L \not{\partial}\ell_L + i\bar{\ell}_R \not{\partial}\ell_R + i\bar{\nu}_L \not{\partial}\nu_L \quad (45)$$

Γράφουμε τον πίνακα \mathcal{V}_μ (22) ως άθροισμα πινάκων¹ για να μελετήσουμε ξεχωριστά τις αλληλεπιδράσεις των φερμιονίων με τα ανυσματικά μποζόνια

$$\mathcal{V}_\mu = \mathcal{G}_\mu + \mathcal{A}_\mu + \mathcal{B}_\mu + \mathcal{X}_\mu + \mathcal{Y}_\mu, \quad (46)$$

όπου ο πίνακας \mathcal{G}_μ αντιστοιχεί στα γκλουόνια της QCD, ο πίνακας \mathcal{A}_μ στα ανυσματικά μποζόνια της $SU(2)$, ο πίνακας \mathcal{B}_μ στο ανυσματικό μποζόνιο της $U(1)$ και οι πίνακες \mathcal{X}_μ και \mathcal{Y}_μ αντιστοιχούν στα leptoquarks. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να γράψουμε

$$\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_I^{QCD} + \mathcal{L}_I^{SU(2)} + \mathcal{L}_I^{U(1)} + \mathcal{L}_I^X + \mathcal{L}_I^Y, \quad (47)$$

¹Βλεπε παραρτημα 8

όπου

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_I^{QCD} &= -\frac{g_5}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_5\mathcal{G}^T\psi_5 + \frac{g_5}{\sqrt{2}}Tr[\bar{\psi}_{10}\mathcal{G}\psi_{10}] \\
\mathcal{L}_I^{SU(2)} &= -\frac{g_5}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_5\mathcal{A}^T\psi_5 + \frac{g_5}{\sqrt{2}}Tr[\bar{\psi}_{10}\mathcal{A}\psi_{10}] \\
\mathcal{L}_I^{U(1)} &= -\frac{g_5}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_5\mathcal{B}^T\psi_5 + \frac{g_5}{\sqrt{2}}Tr[\bar{\psi}_{10}\mathcal{B}\psi_{10}] \\
\mathcal{L}_I^X &= -\frac{g_5}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_5\mathcal{X}^T\psi_5 + \frac{g_5}{\sqrt{2}}Tr[\bar{\psi}_{10}\mathcal{X}\psi_{10}] \\
\mathcal{L}_I^Y &= -\frac{g_5}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_5\mathcal{Y}^T\psi_5 + \frac{g_5}{\sqrt{2}}Tr[\bar{\psi}_{10}\mathcal{Y}\psi_{10}]
\end{aligned} \tag{48}$$

Το $U(1)$ κομμάτι της θεωρίας είναι

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_I^{U(1)} &= -\frac{g_5}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_5\mathcal{B}^T\psi_5 + \frac{g_5}{\sqrt{2}}Tr[\bar{\psi}_{10}\mathcal{B}\psi_{10}] \\
&= \sqrt{\frac{3}{5}}\frac{g_5}{2}\left(\frac{1}{3}(\bar{u}_L^1\mathcal{B}u_L^1 + \bar{u}_L^2\mathcal{B}u_L^2 + \bar{u}_L^3\mathcal{B}u_L^3 + \bar{d}_L^1\mathcal{B}d_L^1 + \bar{d}_L^2\mathcal{B}d_L^2 + \bar{d}_L^3\mathcal{B}d_L^3)\right. \\
&\quad + \frac{4}{3}(\bar{u}_L^{1c}\mathcal{B}u_L^{1c} + \bar{u}_L^{2c}\mathcal{B}u_L^{2c} + \bar{u}_L^{3c}\mathcal{B}u_L^{3c}) + \frac{2}{3}(\bar{d}_L^{1c}\mathcal{B}d_L^{1c} + \bar{d}_L^{2c}\mathcal{B}d_L^{2c} + \bar{d}_L^{3c}\mathcal{B}d_L^{3c}) \\
&\quad \left. - (\bar{\ell}_L\mathcal{B}\ell_L + \bar{\nu}_L\mathcal{B}\nu_L) + 2\ell_L^c\mathcal{B}\bar{\ell}_L^c\right)
\end{aligned} \tag{49}$$

Αν εκφράσουμε το αποτέλεσμα με αριστερόστροφες και δεξιόστροφες χειραλικές συνιστώσες και συμπτύξουμε τους δείκτες που αφορούν το χρώμα των quarks καταλήγουμε στην μορφή

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_I^{U(1)} &= \sqrt{\frac{3}{5}}\frac{g_5}{2} \\
&\quad \left(\frac{1}{3}(\bar{u}_L\mathcal{B}u_L + \bar{d}_L\mathcal{B}d_L) + \frac{4}{3}\bar{u}_R\mathcal{B}u_R - \frac{2}{3}\bar{d}_R\mathcal{B}d_R - (\bar{\ell}_L\mathcal{B}\ell_L + \bar{\nu}_L\mathcal{B}\nu_L) - 2\ell_R\mathcal{B}\bar{\ell}_R\right)
\end{aligned} \tag{50}$$

Βλέπουμε ότι προκύπτουν τα σωστά υπερφορτία των σωματιδίων, ενώ η σύγκριση με την Lagrangian του KII μας δίνει ότι

$$g' = \sqrt{\frac{3}{5}}g_5 \tag{51}$$

Το $SU(2)$ κομμάτι της θεωρίας είναι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_I^{SU(2)} &= -\frac{g_5}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_5\mathcal{A}^T\psi_5 + \frac{g_5}{\sqrt{2}}Tr[\bar{\psi}_{10}\mathcal{A}\psi_{10}] \\ &= \frac{g_5}{2}\left(\bar{u}_L\mathcal{A}^3u_L - \bar{d}_L\mathcal{A}^3d_L + \sqrt{2}\bar{d}_L\mathcal{W}^\dagger u_L + \sqrt{2}\bar{u}_L\mathcal{W}d_L \right. \\ &\quad \left. + \bar{\nu}_L\mathcal{A}^3\nu_L - \bar{e}_L\mathcal{A}^3e_L + \sqrt{2}\bar{e}_L\mathcal{W}^\dagger\nu_L + \sqrt{2}\bar{\nu}_L\mathcal{W}e_L\right)\end{aligned}\quad (52)$$

Η σύγκριση με την Lagrangian του Καθιερωμένου Προτύπου μας δίνει ότι

$$g = g_5 \quad (53)$$

Ενώ το $SU(3)$ κομμάτι της θεωρίας είναι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_I^{SU(3)} &= \frac{g_5}{\sqrt{2}}\left(\bar{d}_L^1\mathcal{G}^{11}d_L^1 + \bar{d}_L^{1c}\mathcal{G}^{11}d_L^{1c} + \bar{d}_L^1\mathcal{G}^{12}d_L^2 - \bar{d}_L^{2c}\mathcal{G}^{12}d_L^{1c} + \bar{d}_L^1\mathcal{G}^{13}d_L^3 - \bar{d}_L^{3c}\mathcal{G}^{13}d_L^{1c} \right. \\ &\quad + \bar{d}_L^2\mathcal{G}^{21}d_L^1 - \bar{d}_L^{1c}\mathcal{G}^{21}d_L^{2c} + \bar{d}_L^2\mathcal{G}^{22}d_L^2 + \bar{d}_L^{2c}\mathcal{G}^{22}d_L^{2c} + \bar{d}_L^2\mathcal{G}^{23}d_L^3 - \bar{d}_L^{3c}\mathcal{G}^{23}d_L^{2c} \\ &\quad + \bar{d}_L^3\mathcal{G}^{31}d_L^1 - \bar{d}_L^{1c}\mathcal{G}^{31}d_L^{3c} + \bar{d}_L^3\mathcal{G}^{32}d_L^2 - \bar{d}_L^{2c}\mathcal{G}^{32}d_L^{3c} + \bar{d}_L^3\mathcal{G}^{33}d_L^3 + \bar{d}_L^{3c}\mathcal{G}^{33}d_L^{3c} \\ &\quad + \bar{u}_L^1\mathcal{G}^{11}u_L^1 + \bar{u}_L^{1c}\left(\mathcal{G}^{22} + \mathcal{G}^{33}\right)u_L^{1c} + \bar{u}_L^1\mathcal{G}^{12}u_L^2 - \bar{u}_L^{2c}\mathcal{G}^{12}u_L^{1c} + \bar{u}_L^1\mathcal{G}^{13}u_L^3 \\ &\quad - \bar{u}_L^{3c}\mathcal{G}^{13}u_L^{1c} + \bar{u}_L^2\mathcal{G}^{21}u_L^1 - \bar{u}_L^{1c}\mathcal{G}^{21}u_L^{2c} + \bar{u}_L^2\mathcal{G}^{22}u_L^2 + \bar{u}_L^{2c}\left(\mathcal{G}^{11} + \mathcal{G}^{33}\right)u_L^{2c} \\ &\quad + \bar{u}_L^2\mathcal{G}^{23}u_L^3 - \bar{u}_L^{3c}\mathcal{G}^{23}u_L^{2c} + \bar{u}_L^3\mathcal{G}^{31}u_L^1 - \bar{u}_L^{1c}\mathcal{G}^{31}u_L^{3c} + \bar{u}_L^3\mathcal{G}^{32}u_L^2 - \bar{u}_L^{2c}\mathcal{G}^{32}u_L^{3c} \\ &\quad \left. + \bar{u}_L^3\mathcal{G}^{33}u_L^3 + \bar{u}_L^{3c}\left(\mathcal{G}^{11} + \mathcal{G}^{22}\right)u_L^{3c}\right)\end{aligned}\quad (54)$$

Επειδή οι γεννήτορες είναι άιχνοι ισχύει ότι

$$G^{11} + G^{22} + G^{33} = 0 \quad (55)$$

Με την βοήθεια αυτής της σχέσης μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω έκφραση ως

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_I^{SU(3)} &= \frac{g_5}{\sqrt{2}}\left(\bar{d}^1G^{11}d^1 + \bar{d}^1G^{12}d^2 + \bar{d}^1G^{13}d^3 + \bar{d}^2G^{21}d^1 + \bar{d}^2G^{22}d^2 + \bar{d}^2G^{23}d^3 \right. \\ &\quad + \bar{d}^3G^{31}d^1 + \bar{d}^3G^{32}d^2 + \bar{d}^3G^{33}d^3 + \bar{u}^1G^{11}u^1 + \bar{u}^1G^{12}u^2 + \bar{u}^1G^{13}u^3 \\ &\quad \left. + \bar{u}^2G^{21}u^1 + \bar{u}^2G^{22}u^2 + \bar{u}^2G^{23}u^3 + \bar{u}^3G^{31}u^1 + \bar{u}^3G^{32}u^2 + \bar{u}^3G^{33}u^3\right)\end{aligned}\quad (56)$$

Από την σχέση αυτή βλέπουμε ότι

$$g_s = g_5 \quad (57)$$

Απομένει να δούμε την αλληλεπίδραση των leptoquarks με τα φερμιόνια. Χρησιμοποιώντας τον πίνακα \mathcal{X}_μ έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I^X = \frac{g_5}{\sqrt{2}} & \left(\bar{d}_L^1 X^1 e_L^c + \bar{d}_L^2 X^2 e_L^c + \bar{d}_L^3 X^3 e_L^c + \bar{e}_L^c X^{1\dagger} d_L^1 + \bar{e}_L^c X^{2\dagger} d_L^2 + \bar{e}_L^c X^{3\dagger} d_L^3 \right. \\ & - \bar{e}_L X^1 d_L^{1c} - \bar{e}_L X^2 d_L^{2c} - \bar{e}_L X^3 d_L^{3c} - \bar{d}_L^{1c} X^{1\dagger} e_L - \bar{d}_L^{2c} X^{2\dagger} e_L - \bar{d}_L^{3c} X^{3\dagger} e_L \\ & + \bar{u}_L^{1c} X^2 u_L^3 - \bar{u}_L^{1c} X^3 u_L^2 + \bar{u}_L^{2c} X^3 u_L^1 - \bar{u}_L^{2c} X^1 u_L^3 + \bar{u}_L^{3c} X^1 u_L^2 - \bar{u}_L^{3c} X^2 u_L^1 \Big) \\ & - \bar{u}_L^1 X^{2\dagger} u_L^{3c} + \bar{u}_L^1 X^{3\dagger} u_L^{2c} - \bar{u}_L^2 X^{3\dagger} u_L^{1c} + \bar{u}_L^2 X^{1\dagger} u_L^{3c} - \bar{u}_L^3 X^{1\dagger} u_L^{2c} + \bar{u}_L^3 X^{2\dagger} u_L^{1c} \end{aligned} \quad (58)$$

Η σχέση αυτή συνοπτικά εκφράζεται ως

$$\mathcal{L}_I^X = \frac{g_5}{\sqrt{2}} \left(\bar{d}^i X^i e^c + \bar{e}^c X^{i\dagger} d^i + \epsilon_{ijk} \bar{u}_L^{ic} X^j u_L^k - \epsilon_{ijk} \bar{u}_L^i X^{j\dagger} u_L^{kc} \right) \quad (59)$$

Αντίστοιχα χρησιμοποιώντας τον πίνακα \mathcal{Y}_μ έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I^Y = \frac{g_5}{\sqrt{2}} & \left(\bar{\nu}_L Y^1 d_L^{1c} + \bar{\nu}_L Y^2 d_L^{2c} + \bar{\nu}_L Y^3 d_L^{3c} + \bar{d}_L^{1c} Y^{1\dagger} \nu_L + \bar{d}_L^{2c} Y^{2\dagger} \nu_L + \bar{d}_L^{3c} Y^{3\dagger} \nu_L \right. \\ & - \bar{u}_L^1 Y^1 e_L^c - \bar{u}_L^2 Y^2 e_L^c - \bar{u}_L^3 Y^3 e_L^c - \bar{e}_L^c Y^{1\dagger} u_L^1 - \bar{e}_L^c Y^{2\dagger} u_L^2 - \bar{e}_L^c Y^{3\dagger} u_L^3 \\ & + \bar{u}_L^{1c} Y^2 d_L^3 - \bar{u}_L^{1c} Y^3 d_L^2 + \bar{u}_L^{2c} Y^3 d_L^1 - \bar{u}_L^{2c} Y^1 d_L^3 + \bar{u}_L^{3c} Y^1 d_L^2 - \bar{u}_L^{3c} Y^2 d_L^1 \\ & \left. - \bar{d}_L^1 Y^{2\dagger} u_L^{3c} + \bar{d}_L^1 Y^{3\dagger} u_L^{2c} - \bar{d}_L^2 Y^{3\dagger} u_L^{1c} + \bar{d}_L^2 Y^{1\dagger} u_L^{3c} - \bar{d}_L^3 Y^{1\dagger} u_L^{2c} + \bar{d}_L^3 Y^{2\dagger} u_L^{1c} \right) \end{aligned} \quad (60)$$

Η σχέση αυτή συνοπτικά εκφράζεται ως

$$\mathcal{L}_I^Y = \frac{g_5}{\sqrt{2}} \left(\bar{\nu}_L Y d_L^c + \bar{d}_L^c Y^\dagger \nu_L - \bar{u}_L^i Y^i e_L^c - \bar{e}_L^c Y^{i\dagger} u_L^i + \epsilon_{ijk} \bar{u}_L^{ic} Y^j d_L^k - \epsilon_{ijk} \bar{d}_L^i Y^{j\dagger} u_L^{kc} \right) \quad (61)$$

2.4 Running Couplings

Είδαμε ότι η συμμετρίας βαθμίδας $SU(5)$ όχι μόνο μπορεί να αναχθεί στο ΚΠ, αλλά προβλέπει ότι για τις σταθερές ζεύξης ισχύει η σχέση

$$g_5 = \sqrt{\frac{5}{3}} g' = g = g_s \quad (62)$$

Πάλι απεικονίζουμε την εξέλιξη των α_i^{-1} με την ενέργεια. Η απεικόνιση αυτή βρίσκεται στο σχήμα 2. Βλέπουμε ότι υπάρχει κάποια περιοχή όπου οι σταθερές ζεύξης έχουν παραπλήσιες τιμές, χωρίς ωστόσο να υπάρχει απόλυτη σύγκλιση. Ενδεικτικά προκύπτει μια κλίμακα της μεγάλης ενοποίησης της τάξης του $5 \times 10^{14} \text{ GeV}$.

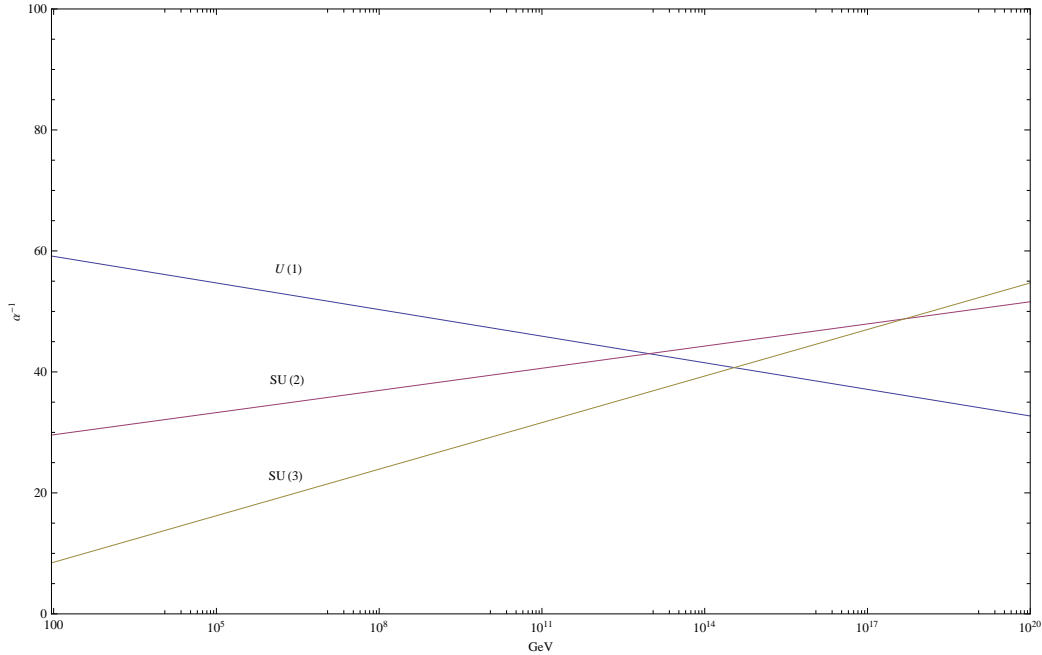


Figure 2: Η εξέλιξη των α^{-1} στο $SU(5)$.

2.5 Weinberg Angle

Από την σχέση (62) βλέπουμε ότι

$$\tan^2 \theta_W = \frac{g'^2}{g^2} = \frac{3}{5} = 0.6 \quad (63)$$

Η τιμή αυτή δεν σχετίζεται με την πειραματική τιμή

$$\tan^2 \theta_W = 0.30073 \pm 0.00025 @ 91.2 \text{ GeV} \quad (64)$$

Αυτή η πρόβλεψη αρχικά έδειχνε να αποτελεί πρόβλημα, ώσπου ο Georgi, ο Weinberg και η Quinn κατάλαβαν ότι η τιμή (63) αναφέρεται σε μια κλίμακα

ενέργειας όπου η $SU(5)$ είναι καλή συμμετρία. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις της ομάδας επανακανονικοποίησης βλέπουμε ότι στην κλίμακα της ηλεκτροσθενούς θεωρίας βρίσκουμε την τιμή

$$\tan^2 \theta_W \simeq 0.33 \quad (65)$$

Η εξέλιξη του $\tan^2 \theta_W$ με την ενέργεια απεικονίζεται στον σχήμα 3. Η θεωρητική τιμή είναι αρκετά κοντά στην πειραματική.

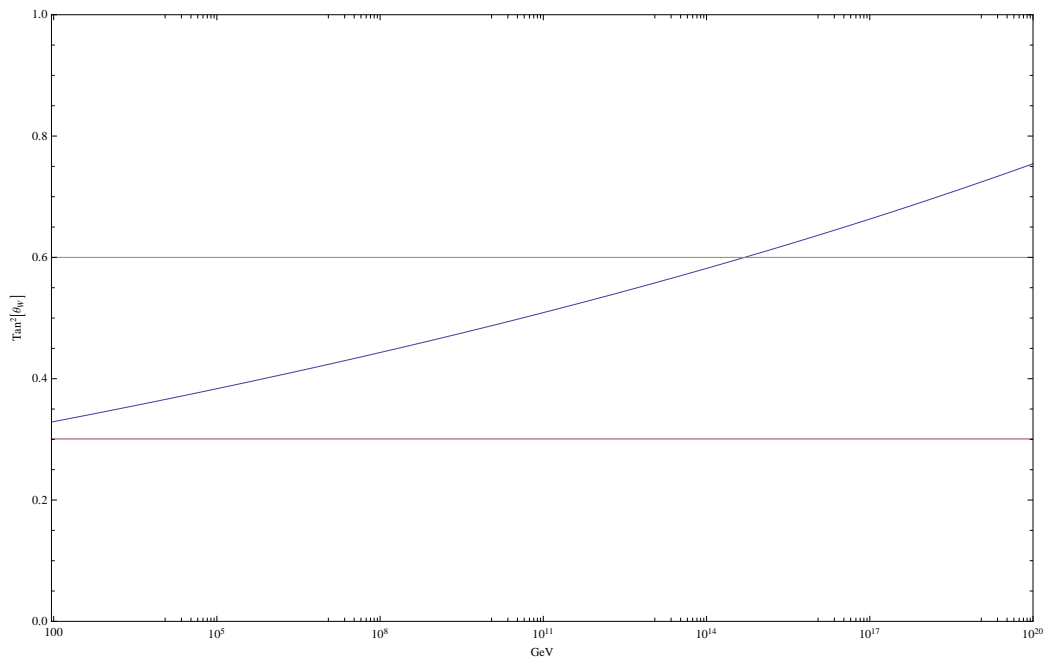


Figure 3: Η εξέλιξη του $\tan^2 \theta_W$ στο $SU(5)$.

3 SSB of $SU(5)$

Έχουμε καταφέρει να κατατάξουμε τα σωματίδια του ΚΠ σε αναπαραστάσεις την ομάδας $SU(5)$. Επίσης έχουμε δει πως μπορούν να συνδεθούν τα μποζόνια βαθμίδας του $SU(5)$ με τα μποζόνια βαθμίδας του ΚΠ. Και έχουμε μια σχετικά καλή πρόβλεψη για τις σταθερές ζεύξης. Το επόμενο βήμα είναι να μελετήσουμε τον τομέα Higgs της θεωρίας. Αρχικά θέλουμε να σπάσουμε την μεγαλοενοποιημένη θεωρία στο ΚΠ και στην συνέχεια να σπάσουμε την ηλεκτρασθενή συμμετρία. Στην διαδικασία αυτή πρέπει να δώσουμε σωστές μάζες στα γνωστά σωματίδια και παράλληλα να ανεβάσουμε στην κλίμακα της μεγάλης ενοποίησης σωματίδια που εμφανίζονται στην θεωρία αλλά δεν έχουν παρατηρηθεί πειραματικά.

3.1 $SU(5)$ Breaking

Για την ρήξη της συμμετρίας $SU(5)$ εισάγουμε 24 πεδία Higgs στην προσαρτημένη αναπαράσταση της ομάδας. Ορίζουμε έναν άιχνο πίνακα 5×5 ο οποίος μετασχηματίζεται σύμφωνα με την αναπαράσταση $5 \times 5 = 24 \oplus 1$

$$\Sigma = 2\phi^a t^a \quad (66)$$

Η Lagrangian για το πεδίο Σ είναι

$$\mathcal{L}_{kin}^\Sigma = \frac{1}{4} Tr \left[(\mathcal{D}_\mu \Sigma)^\dagger \mathcal{D}^\mu \Sigma \right] \quad (67)$$

όπου η συναλλοίωτη παράγωγος δίνεται από την σχέση

$$\mathcal{D}_\mu \Sigma = \partial_\mu \Sigma - i \frac{g_5}{\sqrt{2}} [\mathcal{V}_\mu, \Sigma] \quad (68)$$

Η αναμενόμενη τιμή κενού πρέπει να έχει την μορφή

$$\langle \Sigma \rangle = v \text{diag} \left(1, 1, 1, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right) \quad (69)$$

προκειμένου να αφήνει άθραστο το ΚΠ. Χρησιμοποιώντας την σχέση

$$m_{ab}^2 V_\mu^a V^{\mu b} = \frac{g_5^2}{8} Tr \left[[\mathcal{V}_\mu, \langle \Sigma \rangle] [\mathcal{V}^\mu, \langle \Sigma \rangle] \right] \quad (70)$$

βλέπουμε ότι τα leptoquarks αποκτούν μάζα

$$m_X^2 = m_Y^2 = \frac{25}{8} g_5^2 v^2,$$

η οποία προφανώς πρέπει να βρίσκεται στην κλίμακα της μεγάλης ενοποίησης.

Το δυναμικό για το πεδίο Σ έχει την μορφή

$$V(\Sigma) = \frac{\mu^2}{2} \text{Tr}[\Sigma^2] + \frac{a}{4} [\text{Tr}[\Sigma^2]]^2 + \frac{b}{2} \text{Tr}[\Sigma^4] \quad (71)$$

όπου

$$a > 0, \quad 15a + 7b > 0, \quad \mu^2 < 0 \quad (72)$$

προκειμένου η διεύθυνση της αναμενόμενης τιμής κενού να αντιστοιχεί σε ολικό ελάχιστο. Για την συγκριμένη μορφή ελαχίστου το δυναμικό γίνεται

$$V(\langle \Sigma \rangle) = \frac{15}{2} \left(\frac{\mu^2}{2} v^2 + \frac{15}{8} a v^4 + \frac{7}{8} b v^4 \right) \quad (73)$$

οπότε από την συνθήκη για την ελαχιστοποίησή του αποκτούμε την σχέση

$$\mu^2 + \frac{15}{2} a v^2 + \frac{7}{2} b v^2 = 0 \quad (74)$$

Γράφουμε το πεδίο Σ ως

$$\Sigma = \langle \Sigma \rangle + \begin{pmatrix} H_{11}^8 + \sqrt{\frac{2}{15}} H_0 & H_{12}^8 & H_{13}^8 & \tilde{H}_1^X & \tilde{H}_1^Y \\ H_{21}^8 & H_{22}^8 + \sqrt{\frac{2}{15}} H_0 & H_{23}^8 & \tilde{H}_2^X & \tilde{H}_2^Y \\ H_{31}^8 & H_{32}^8 & H_{33}^8 + \sqrt{\frac{2}{15}} H_0 & \tilde{H}_3^X & \tilde{H}_3^Y \\ \tilde{H}_1^{X\dagger} & \tilde{H}_2^{X\dagger} & \tilde{H}_3^{X\dagger} & \frac{1}{\sqrt{2}} H_Z - \sqrt{\frac{3}{10}} H_0 & H^+ \\ \tilde{H}_1^{Y\dagger} & \tilde{H}_2^{Y\dagger} & \tilde{H}_3^{Y\dagger} & H^- & -\frac{1}{\sqrt{2}} H_Z - \sqrt{\frac{3}{10}} H_0 \end{pmatrix} \quad (75)$$

Αντικαθιστώντας στο δυναμικό 71 βρίσκουμε ότι το φάσμα μαζών είναι

$$m_8^2 = \frac{5}{2} b v^2 \quad m_z^2 = m_{\pm}^2 = 10 b v^2 \quad m_0^2 = -2 \mu^2$$

Τα σωματιδία \tilde{H}^X και \tilde{H}^Y είναι δυνητικά μποζόνια Goldstone τα οποία απορροφώνται από τα leptoquarks προκειμένου να αποκτήσουν μάζα.

3.2 EW Breaking

Για να σπάσουμε την ηλεκτρασθενή συμμετρία θα ακολουθήσουμε πειστά την συνταγή του ΚΠ. Εισάγουμε ένα πεδίο H το οποίο μετασχηματίζεται σύμφωνα με την αναπαράσταση 5

$$H = \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \\ h^3 \\ h^+ \\ h^0 \end{pmatrix} \quad (76)$$

και έχει αναμενόμενη τιμή κενού

$$\langle H \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad (77)$$

Το δυναμικό είναι

$$V(H) = \mu_0^2 |H|^2 + \lambda |H|^4 \quad \mu_0^2 < 0, \quad \lambda > 0 \quad (78)$$

οπότε στην διεύθυνση του ελαχίστου παίρνει την μορφή

$$V(\langle H \rangle) = \frac{1}{2} \mu_0^2 v_0^2 + \frac{\lambda}{4} v_0^4 \quad (79)$$

Η ελαχιστοποίηση μας δίνει την σχέση

$$\mu_0^2 + \lambda v_0^2 = 0 \quad (80)$$

Ακριβώς όπως στο ΚΠ τα μποζόνια W και Z αποκτούν μάζες

$$m_W = m_Z \cos \theta_W = \frac{g v_0}{2} \quad (81)$$

προφανώς στην ηλεκτρασθενή κλίμακα. Γράφοντας το πεδίο H ως

$$H = \begin{pmatrix} \tilde{H}^1 \\ \tilde{H}^2 \\ \tilde{H}^3 \\ H_4 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (v_0 + h) e^{i \frac{\phi}{v_0}} \end{pmatrix} \quad (82)$$

και αντικαθιστώντας στο δυναμικό υπολογίζουμε το φάσμα των μαζών

$$m_h^2 = -\mu_0^2 \quad (83)$$

Τα πεδία ζ και H_4 είναι δυνητικά μποζόνια τα οποία απορροφώνται από τα μποζόνια Z και W αντίστοιχα προκειμένου να αποκτήσουν μάζα. Τα πρώτα σοβαρά προβλήματα κάνουν την εμφάνισή τους. Τα μποζόνια \tilde{H} φέρουν χρώμα και παραμένουν άμαζα γεγονός που δεν είναι αποδεκτό, καθώς όχι μόνο δεν παρατηρούνται στην φύση, αλλά αν πράγματι ήταν άμαζα θα προκαλούσαν πολύ γρήγορη διάσπαση του πρωτονίου.

Υπάρχει και ένα ακόμα πρόβλημα. Η επανακανονικοποιησιμότητα απαιτεί την εμφάνιση όλων των όρων οι οποίοι είναι αναλλοίωτοι σε μετασχηματισμούς βαθμίδας, ενώ εμείς δεν έχουμε γράψει ζεύξεις μεταξύ των πεδίων Σ και H . Τα πεδία αυτά ζεύγονται σε επίπεδο ενός *loop* μέσω των μποζονίων βαθμίδας, οπότε η ύπαρξη των ζεύξεων στην Lagrangian επιτρέπει τους κατάλληλους αντισταθμιστικούς όρους ώστε να απαλειφθούν οι απειρισμοί. Η ρήξη

$$SU(5) \xrightarrow{GUT \text{ Scale}} SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \xrightarrow{EW \text{ Scale}} SU(3) \times U(1)_{em} \quad (84)$$

δεν μπορεί να λάβει χώρα ως δυο ανεξάρτητα γεγονότα. Πρέπει να μελετηθεί σαν ένα ενιαίο φαινόμενο.

3.3 The Total Potential

Πλέον έχουμε στην διάθεση μας το δυναμικό

$$V(\Sigma, H) = \frac{\mu^2}{2} Tr[\Sigma^2] + \frac{a}{4} [Tr[\Sigma^2]]^2 + \frac{b}{2} Tr[\Sigma^4] + \alpha |H|^2 Tr[\Sigma^2] \\ + \beta \bar{H} \Sigma^2 H + \mu_0^2 |H|^2 + \lambda |H|^4$$

και τροποποιούμε το κενό της σχέση 69 ως

$$\langle \Sigma \rangle = v \text{diag} \left(1, 1, 1, -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\epsilon, -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\epsilon \right), \quad (85)$$

όπου $\epsilon = \frac{3}{20} \frac{\beta v_0^2}{b v^2}$ σε τάξη $\mathcal{O}(v_0^2/v^2)$, ενώ το κενό της σχέσης 77 παραμένει ίδιο.

Παρόλο που οι όροι με το ϵ επηρεάζουν την ρήξη της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας, το αποτέλεσμά τους είναι αμελητέο καθώς συμπίεζονται από τον εξαιρετικά μικρό όρο $\frac{v_0^2}{v^2}$ ο οποίος είναι τάξης $\mathcal{O}(10^{-24})$. Οι συνθήκες ελαχιστοποίησης

τροποποιούνται ως

$$\begin{aligned} \mu^2 + \frac{15}{2}av^2 + \frac{7}{2}bv^2 + av_0^2 + \frac{3}{10}\beta v_0^2 &= 0 \\ \mu_0^2 + \lambda v_0^2 + \frac{15}{2}av^2 + \left(\frac{9}{4} - \frac{3}{2}\epsilon\right)\beta v^2 &= 0 \end{aligned} \quad (86)$$

Ερχόμαστε πλέον αντιμέτωποι με ένα παλιό πρόβλημα. Για να παραμείνει η αναμενόμενη τιμή κενού v_0 στην ηλεκτρασθενή κλίμακα χρειάζεται αφύσικη ρύθμιση των παραμέτρων για πολλά δεκαδικά ψηφία. Ωστόσο ακόμα και αν αυτό είναι εφικτό σε tree level, χβαντικές διορθώσεις καταστρέφουν αυτή την ρύθμιση, οπότε δεν υπάρχει κάτι που να κρατά την αναμενόμενη τιμή κενού v_0 στην ηλεκτρασθενή κλίμακα. Η μόνη λύση απέναντι στο πρόβλημα της ιεραρχίας είναι η υπερσυμμετρία.

Δεν θα αναλύσουμε το φάσμα μαζών του συνολικού δυναμικού καθώς είναι μια πολύ σύνθετη διαδικασία. Θα αρκεστούμε σε μερικές παρατηρήσεις. Τα ήδη βαριά \tilde{H}^8 και H^\pm λαμβάνουν αμελητέες διορθώσεις, ηλεκτρασθενούς τάξης, στην μάζα τους. Ένας γραμμικός συνδυασμός των h , H_Z και H_0 λαμβάνει μάζα στην ηλεκτρασθενή κλίμακα, ενώ οι άλλοι δύο κάθετοι συνδυασμοί ανεβαίνουν στην κλίμακα της μεγάλης ενοποίησης. Ένας γραμμικός συνδυασμός των \tilde{H}_Y και \tilde{H} απορροφάται από τα leptosquarks Y ενώ ο άλλος ανεβαίνει στην κλίμακα της μεγάλης ενοποίησης. Το γεγονός αυτό είναι ιδιαίτερα ευπρόσδευκτο καθώς περιορίζει την διάσπαση του πρωτονίου μέσω ανταλλαγής Higgs.

4 Fermion Masses

Τα φερμιόνια ανήκουν στις αναπαραστάσεις $\bar{5}$ και 10. Τα γινόμενα αυτών των αναπαραστάσεων είναι

$$\bar{5} \times \bar{5} = \bar{10} \oplus \bar{15}, \quad \bar{5} \times 10 = 5 \oplus \bar{45}, \quad 10 \times 10 = \bar{5} \oplus 45 \oplus 50 \quad (87)$$

Από τις αναπαραστάσεις αυτές μόνο οι αναπαραστάσεις 5 και 45 διαθέτουν ουδέτερες συνιστώσες, οπότε μπορούν να ζεύγονται με τα φερμιόνια σε tree level. Οι αναπαραστάσεις 10 και 50 μπορούν να επηρεάσουν μόνο την επανακατανομή της μάζας. Η αναπαράσταση 24 δεν ζεύγνεται με τα φερμιόνια, οπότε με φυσικό τρόπο οι μάζες των φερμιονίων είναι στην ηλεκτρασθενή κλίμακα. Στο ελάχιστον μοντέλο $SU(5)$ χρησιμοποιούμε την αναπαράσταση 5 που έχουμε ήδη διαθέσιμη. Η ζεύξη του Higgs με τα φερμιόνια είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mass} &= Y_{ij}^D \psi_{5i\alpha}^T \mathcal{C} \psi_{10j\alpha\beta} H_\beta + Y_{ij}^U \frac{1}{4} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon} \psi_{10i\alpha\beta}^T \mathcal{C} \psi_{10j\gamma\delta} H_\epsilon + H.C. \\ &= -\frac{v_0}{2} Y_{ij}^D (\bar{d}_{iR} d_{jL} + \bar{\ell}_{iL} \ell_{jR}) - \frac{v_0}{\sqrt{2}} Y_{ij}^U \bar{u}_{iR} u_{jL} + H.C. \end{aligned} \quad (88)$$

όπου $Y^U = Y^{U\dagger}$. Επομένως οι όροι μάζας γράφονται

$$\mathcal{L}_{mass} = \bar{d}'_L \mathcal{M}'_d d'_R + \bar{\ell}'_L \mathcal{M}'_\ell \ell'_R + \bar{u}'_L \mathcal{M}'_u u'_R + H.C. \quad (89)$$

όπου $\mathcal{M}'_\ell = \mathcal{M}'_d{}^\dagger \cdot \mathcal{M}'_u = \mathcal{M}'_u{}^\dagger$. Οι σχέσεις συζυγίας μας οδηγούν στις εξής σχέσεις για τους πίνακες διαγωνοποίησης

$$V_{L,R}^\ell = V_{R,L}^d \quad V_R^u = V_L^u K, \quad (90)$$

όπου K διαγώνιος πίνακας ο οποίος περιέχει φάσεις. Τροποποιούμε λίγο τον συμβολισμό βάζοντας τόνους στα μέχρι στιγμής άτονα πεδία για να υποδηλώσουμε ότι είναι ιδιοκαταστάσεις γεύσης χωρίς καθορισμένη μάζα. Οι ιδιοκαταστάσεις μάζας δεν έχουν τόνο και είναι

$$\begin{aligned} d_L &= V_{dL}^\dagger d'_L & \ell_L &= V_{\ell L}^\dagger \ell'_L & u_L &= V_{uL}^\dagger u'_L \\ d_L^c &= V_{dR}^\dagger d'^c_L & \ell_L^c &= V_{\ell R}^\dagger \ell'^c_L & u_L^c &= K^* V_{uL}^\dagger u'^c_L \end{aligned} \quad (91)$$

Τα φερμιόνια στρέφονται ως

$$\begin{pmatrix} d_L^c \\ \ell_L \\ -\nu_L \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} V_{CKM}^\dagger K u_L^c \\ V_{CKM}^\dagger u_L \\ d_L \\ \ell_L^c \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας K μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να απαλειφθούν μη φυσικές φάσεις του πίνακα V_{CKM} , αλλά δεν μπορεί να απαλειφθεί τελειώς. Στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε και άλλες αναπαραστάσεις για να δώσουμε μάζα στα φερμιόνια παύουν να ισχύουν οι σχέσεις 90 και κάνουν την εμφάνισή τους και άλλοι πίνακες μίξης, οι οποίοι όμως αφορούν μόνο την ζεύξη των φερμιονίων με τα leptiquarks. Στην περίπτωσή μας προβλέπουμε ότι για κάθε γενιά

$$m_d = m_\ell \quad (92)$$

προφανώς στην κλίμακα της μεγάλης ενοποίησης.

5 B-Violation and Proton Decay

Μέχρι στιγμής έχουμε δει τις προβλέψεις της θεωρίας $SU(5)$ για μεγέθη τα οποία προβλέπονται από το ΚΠ και είναι μετρημένα πειραματικά με πολύ μεγάλη ακρίβεια. Έχοντας τοποθετήσει λεπτόνια και quarks στην ίδια πολλαπλέτα έχουμε σπάσει την συμμετρία της διατήρησης βαρυονικού και λεπτονικού αριθμού. Δεδομένου ότι οι συμμετρίες αυτές σπάνε από μη διαταρακτικά φαινόμενα στην ηλεκτρασθενή θεωρία καταρχήν δεν είναι τόσο καταστροφικό να γράψουμε μια θεωρία χωρίς αυτές τις συμμετρίες. Η αλληλεπίδραση των leptoquarks είναι υπεύθυνη για την μετάδοση της παραβίασης του βαρυονικού και λεπτονικού αριθμού. Ωστόσο η παραβίαση δεν γίνεται με τυχαίο τρόπο. Γίνεται έτσι ώστε η διαφορά $B - L$ να διατηρείται. Η ζεύξη των leptoquarks με την ύλη είναι

$$\mathcal{L}_I^X = \frac{g_5}{\sqrt{2}} \left(\bar{d}_L^i \mathcal{X}^i e_L^c - \bar{e}_L^i \mathcal{X}^i d_L^c + \epsilon_{ijk} \bar{u}_L^{ic} K \mathcal{X}^j u_L^k + H.C. \right) \quad (93)$$

$$\mathcal{L}_I^Y = \frac{g_5}{\sqrt{2}} \left(\bar{\nu}_L \mathcal{Y}^i d_L^{ic} - \bar{u}_L^i V_{CKM}^\dagger \mathcal{Y}^i e_L^c + \epsilon_{ijk} \bar{u}_L^{ic} K V_{CKM}^\dagger \mathcal{Y}^j d_L^k + H.C. \right) \quad (94)$$

Βλέπουμε ότι μέσω αυτών των ζεύξεων υπάρχει περιθώριο για διάσπαση του πρωτονίου. Στα πλαίσια του μη υπερσυμμετρικού $SU(5)$ η διάσπαση του πρωτονίου μεταδίδεται από τελεστές που έχουν διάσταση 6 της μορφής

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{G_X}{\sqrt{2}} \bar{Q} \gamma^\mu Q \bar{e} \gamma_\mu Q \quad (95)$$

Η εκτίμηση του χρόνου ζωής του πρωτονίου είναι της τάξης

$$\tau_p \simeq \frac{M_X^4}{m_p^2} = \mathcal{O}(10^{30}) \text{ years}$$

Πειραματικά το Super Kamiokande μελετώντας τα κανάλια $p \rightarrow e^+ \pi^0$ και $p \rightarrow \mu^+ \pi^0$ έχει θέσει τα όρια

$$8.2 \times 10^{33} \text{ \& } 6.6 \times 10^{33} \text{ years @ 90\% c.l.} \quad (96)$$

6 Discussion

Αν και η μη υπερσυμμετρική $SU(5)$ μεγαλοενοποιημένη θεωρία δεν είναι συμβατή με τα πειραματικά αποτελέσματα, εκτός αν είμαστε αντιμέτωποι με εξαιρετικά αφύσικες συμπίεσεις λόγω μίξης, η θεωρία αξίζει να μελετηθεί καθώς οι βασικές ιδέες που θίξαμε αποτελούν τον σκελετό κάθε μεγαλοενοποιημένης θεωρίας. Η συγκεκριμένη θεωρία αποτελεί την πρώτη μεγαλοενοποιημένη θεωρία η οποία βασίζεται σε μια απλή ομάδα. Οι ιδέες για την μεγάλη ενοποίηση που εμφανίστηκαν με την μελέτη αυτής της θεωρίας πέρασαν σε πιο σύνθετα βιώσιμα μοντέλα τα οποία είτε έχουν πιο μεγάλη ομάδα συμμετρίας, είτε πιο πλούσιο σωματιδιακό περιεχόμενο, είτε ενσωματώνουν νέα θεωρητικά πλαίσια (υπερσυμμετρία, επιπλέον διαστάσεις). Η επανεμφάνιση του προβλήματος της ιεραρχίας κάνει την υπερσυμμετρία σχεδόν επιτακτική, καθώς θεωρείται ο μοναδικός τρόπος να δώσει κανείς λύση στο πρόβλημα αυτό με φυσικό τρόπο. Οι υπερσυμμετρικές μεγαλοενοποιημένες θεωρίες εμφανίζονται ως απομεινάρια της θεωρίας χορδών σε χαμηλές ενέργειες έτσι υπάρχει αρκετά μεγάλη πιθανότητα το σύμπαν στις πρώιμες φάσεις του να έχει περάσει από μια τέτοια φάση. Η αποσύζευξη των βαρέων σωματιδίων και η διάσπασή τους επηρέασε τον σχηματισμό της ύλης, ενώ εμφανίζονται αρκετοί υποψήφιοι για την σκοτεινή ύλη. Η λειτουργία του LHC ενδεχομένως να μας βοηθήσει θέτοντας ισχυρότερους περιορισμούς στις προβλέψεις των μεγαλοενοποιημένων θεωριών.

Appendix

7 Charge Conjugation

Θα μελετήσουμε την δράση της συζυγίας φορτίου. Ορίζουμε τον σπίνορα ο οποίος έχει υποστεί συζυγία φορτίου ως

$$\psi^c = \mathcal{C}\bar{\psi}^T = \mathcal{C}\gamma^0\psi^* \quad (97)$$

Για τον τελεστή συζυγίας φορτίου χρησιμοποιούμε την αναπαράσταση

$$\mathcal{C} = i\gamma^2 \quad (98)$$

Εύκολα αποδεικνύονται οι σχέσεις

$$\mathcal{C} = -\mathcal{C}^T = -\mathcal{C}^\dagger = -\mathcal{C}^{-1} \quad \mathcal{C}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{C} = -(\gamma^\mu)^T \quad (99)$$

Για τον συζυγή σπίνορα η δράση της συζυγίας φορτίου είναι

$$\bar{\psi}^c = (\psi^c)^\dagger \gamma^0 = (\mathcal{C}\bar{\psi}^T)^\dagger \gamma^0 = \bar{\psi}^* \mathcal{C}^\dagger \gamma^0 = \psi^T \gamma^0 \mathcal{C}^\dagger \gamma^0 \quad (100)$$

Χρησιμοποιώντας την άλγεβρα Clifford καταλήγουμε

$$\bar{\psi}^c = -\psi^T \mathcal{C}^\dagger = -\psi^T \mathcal{C}^{-1} \quad (101)$$

Η συζυγία φορτίου μετατρέπει αριστερόστροφους σπίνορες Weyl σε δεξιόστροφους και αντίστροφα. Για παράδειγμα ο απειροστός μετασχηματισμός Lorentz ενός αριστερόστροφου σπίνορα είναι

$$\chi_L \rightarrow \left(1 + \frac{i}{2}\epsilon \cdot \sigma + \frac{1}{2}n \cdot \sigma\right) \chi_L \quad (102)$$

Παίρνοντας την μιγαδική συζυγία και δρώντας με τον πίνακα σ^2 ο νόμος μετασχηματισμού γίνεται

$$\sigma^2 \chi_L^* \rightarrow \left(1 + \frac{i}{2}\epsilon \cdot \sigma - \frac{1}{2}n \cdot \sigma\right) \sigma^2 \chi_L^* \quad (103)$$

που είναι ο νόμος μετασχηματισμού ενός δεξιόστροφου σπίνορα Weyl. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να γράψουμε μία θεωρία με δεξιόστροφους και αριστερόστροφους χειραλικούς σπίνορες Weyl χρησιμοποιώντας την μία από τις δυο χειραλικότητες και την συζυγία φορτίου. Στην μελέτη της θεωρίας $SU(5)$

θα χρησιμοποιήσουμε αυτό τον τρόπο γραφής, οπότε πρέπει να δούμε πως μεταγλωτίζουμε τους κινηματικούς όρους και τα ρεύματα. Ξεκινάμε εκφράζοντας τους σπινόρες $\bar{\psi}_R^c$ και ψ_R^c συναρτήσει των σπινόρων $\bar{\psi}_L$ και ψ_L :

$$\bar{\psi}_R^c = \bar{\psi}^c \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) = -\psi^T \mathcal{C}^{-1} \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) = -\psi_L^T \mathcal{C}^{-1} \quad (104)$$

$$\psi_R^c = \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) \psi^c = \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) \mathcal{C} \bar{\psi}^T = \mathcal{C} \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) \bar{\psi}^T = \mathcal{C} \left(\bar{\psi} \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) \right)^T = \mathcal{C} \bar{\psi}_L^T \quad (105)$$

Τα ρεύματα μετασχηματίζονται ως

$$\bar{\psi}_R^c \gamma^\mu \chi_R^c = -\psi_L^T \mathcal{C}^{-1} \gamma^\mu \mathcal{C} \bar{\chi}_L^T = \psi_L^T (\gamma^\mu)^T \bar{\chi}_L^T = -\bar{\chi}_L \gamma^\mu \psi_L \quad (106)$$

Το πρόσημο οφείλεται στην εναλλαγή των φερμιονίων. Για τον κινηματικό όρο έχουμε

$$\bar{\psi}_R^c \not{\partial} \psi_R^c = \bar{\psi}_R^c \gamma^\mu (\partial_\mu \psi_R^c) = -(\partial_\mu \bar{\psi}_L) \gamma^\mu \psi_L = \bar{\psi}_L \not{\partial} \psi_L \quad (107)$$

Στο τελευταίο βήμα πετάξαμε τον επιφανειακό όρο.

8 Gauge Boson Matrices

Θα ορίσουμε μερικούς χρήσιμους πίνακες με βάση τον πίνακα (22).

Ορίζουμε τον πίνακα \mathcal{G}_μ που περιέχει τα γκλούονια της QCD:

$$\mathcal{G}_\mu = \begin{pmatrix} G_\mu^{11} & G_\mu^{12} & G_\mu^{13} & 0 & 0 \\ G_\mu^{21} & G_\mu^{22} & G_\mu^{23} & 0 & 0 \\ G_\mu^{31} & G_\mu^{32} & G_\mu^{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (108)$$

Ορίζουμε τον πίνακα \mathcal{A}_μ που περιέχει τα ανυσματικά μποζόνια της $SU(2)_L$:

$$\mathcal{A}_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}A_\mu^3 + W_\mu & \\ 0 & 0 & 0 & W_\mu^\dagger & -\frac{1}{\sqrt{2}}A_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (109)$$

Ορίζουμε τον πίνακα \mathcal{B}_μ που περιέχει το ανυσματικό μποζόνιο της $U(1)_Y$:

$$\mathcal{B}_\mu = \sqrt{\frac{3}{10}} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}B_\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}B_\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3}B_\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_\mu \end{pmatrix} \quad (110)$$

Ορίζουμε τον πίνακα \mathcal{X}_μ που περιέχει τα leptiquarks X

$$\mathcal{X}_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & X_\mu^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_\mu^3 & 0 \\ X_\mu^{1\dagger} & X_\mu^{2\dagger} & X_\mu^{3\dagger} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (111)$$

Ορίζουμε τον πίνακα \mathcal{Y}_μ που περιέχει τα leptiquarks Y

$$\mathcal{Y}_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & Y_\mu^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_\mu^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_\mu^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_\mu^{1\dagger} & Y_\mu^{2\dagger} & Y_\mu^{3\dagger} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (112)$$

9 The SU(5) Group

Οι διαστάσεις των αναπαραστάσεων $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ της ομάδας $SU(5)$ δίνονται από την σχέση

$$D = (\alpha + 1) (\beta + 1) (\gamma + 1) (\delta + 1) \frac{(\alpha + \beta + 2)}{2} \frac{(\beta + \gamma + 2)}{2} \frac{(\gamma + \delta + 2)}{2} \frac{(\alpha + \beta + \gamma + 3)}{3} \frac{(\beta + \gamma + \delta + 3)}{3} \frac{(\alpha + \beta + \gamma + \delta + 4)}{4} \quad (113)$$

Οι χαμηλοδιάστατες αναπαραστάσεις είναι

$$\begin{array}{ll}
 5 \rightarrow (1, 0, 0, 0) \equiv \square & \bar{5} \rightarrow (0, 0, 0, 1) \equiv \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \\
 10 \rightarrow (0, 1, 0, 0) \equiv \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} & \bar{10} \rightarrow (0, 0, 1, 0) \equiv \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \\
 15 \rightarrow (2, 0, 0, 0) \equiv \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} & \bar{15} \rightarrow (0, 0, 0, 2) \equiv \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \\
 & 24 \rightarrow (1, 0, 0, 1) \equiv \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \\
 40 \rightarrow (1, 1, 0, 0) \equiv \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} & \bar{40} \rightarrow (0, 0, 1, 1) \equiv \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \\
 45 \rightarrow (1, 0, 1, 0) \equiv \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} & \bar{45} \rightarrow (0, 1, 0, 1) \equiv \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \\
 50 \rightarrow (0, 2, 0, 0) \equiv \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} & \bar{50} \rightarrow (0, 0, 2, 0) \equiv \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}
 \end{array} \quad (114)$$

Θα μελετήσουμε μερικούς συνδυασμούς αναπαράστασεων

- $5 \times 5 = 10 + 15$

$$\square \otimes \square = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (115)$$

- $\bar{5} \times \bar{5} = \bar{10} + \bar{15}$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (116)$$

- $5 \times \bar{5} = 1 + 24$

$$\square \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (117)$$

- $5 \times \bar{10} = \bar{5} + 45$

$$\square \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (118)$$

- $\bar{5} \times 10 = 5 + \bar{45}$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (119)$$

- $10 \times 10 = \bar{5} + 45 + 50$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (120)$$

- $\bar{10} \times \bar{10} = 5 + \bar{45} + \bar{50}$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (121)$$

Bibliography

References

- [1] I. Aitchinson, A. Hey: **Gauge Theories in Particle Physics, Vol II**, Taylor & Francis, 2004.
- [2] F. Haltzen, A.D. Martin: **Quarks and Leptons**, John Wiley & Sons, 1984.
- [3] M. Peskin, D. Schroeder: **An Introduction to Quantum Field Theory**, Westview Press, 1992.
- [4] S. Weinberg: **The Quantum Theory of Fields, Vol II**, CUP, 1996.
- [5] The Standard Model: Alchemy and Astrology: J. Lykken, hep-ph/0609274.
- [6] Unity of All Elementary-Particle Forces: H. Georgi S.L. Glashow, PRL 32, (1974), pp 438-441.
- [7] Hierarchy of interaction in Unified Theories: H. Georgi, H. Quinn, S. Weinberg, PRL 33, (1974), pp 451-454.
- [8] Aspects of the unification of Strong, Weak and Electromagnetic Interactions: A. Buras, J. Ellis, M.K. Gaillard, D.V. Nanopoulos Nucl. Phys B 135, (1978), 66-92.
- [9] Symmetry Breaking Patterns in SU(5): M. Magg, Q. Shaffi, Z Phys C 4, (1980), 63-66.
- [10] Grand Unified Theories and Proton Decay: P. Langacker, Phys. Rep. 72, (1981), 185-385.
- [11] Grand Unified Theories: G. Ross (1985).
- [12] Search for Proton Decay via $p \rightarrow e^+\pi^0$ and $p \rightarrow \mu^+\pi^0$ in a Large Water Cherenkov Detector: The Super-Kamiokande Collaboration, hep-ex/0903.0676v2