Πιθανότητες Ι. Ασκήσεις 5

Συνεχείς κατανομές

1. Αν η τυχαία μεταβλητή X έχει πυκνότητα $f_X(x) = \frac{1}{2x^2}\mathbf{1}_{|x|\geq 1}$, να βρεθεί η πυκνότητα της $Y := X^2$.

2. Αν η τυχαία μεταβλητή X έχει πυκνότητα $f_X(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{x\geq 0}$, να βρεθεί η πυκνόηητα της

$$Y := \begin{cases} X & \text{αν } X \leq 1, \\ 1/X & \text{αν } X > 1. \end{cases}$$

3. Αν η τυχαία μεταβλητή X έχει πυκνότητα $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{x\geq 0}$ όπου λ είναι μια θετική σταθερά (δηλαδή η X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ), να δειχθεί ότι η $Y = [X]$ (ακέραιο μέρος του X) ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή[1]. Ποιά είναι η μέση τιμή της Y;

4. Η τυχαία μεταβλητή X έχει πυκνότητα $f_X(x) = cx^{-r}\mathbf{1}_{x\geq 1}$, όπου οι c, r είναι θετικές σταθερές.

(α) Ποιές είναι οι επιτρεπτές τιμές του r;

(β) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c συναρτήσει του r.

(γ) Για ποιές τιμές του r ισχύει $EX < \infty$;

5. (α) Αν η U ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0, 1)$, τότε για $a < b$ η

$$X := a + (b - a)\,U$$

ακολουθεί την ομοιόμορφη στο (a, b).

(β) Αν η X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (a, b), όπου $a < b$, τότε η

$$U := \frac{X - a}{b - a}$$

ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$.

6. Έστω $\theta > 0$. Υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή U ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0, 1)$.

(α) Αποδείξτε ότι η τυχαία μεταβλητή $X := -\log(U)/\theta$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο θ.

(β) Βρείτε την πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής[2] $Y := \log\left(\frac{U}{1-U}\right)$.

7. Αν η X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή σε κάποιο διάστημα (a, b), $X \sim U(a, b)$, και έχει μέση τιμή $\mu = 5$ και διασπορά $\sigma^2 = 3$ να βρείτε τους αριθμούς a, b. Επίσης να υπολογίσετε ακριβώς

[1] Αυτήν που μετράει το αριθμό *αποτυχιών* ως την πρώτη επιτυχία σε μια ακολουθία πειραμάτων. Στο βιβλίο του κ. Κούτρα, γεωμετρικη ονομάζεται αυτή που μετράει αριθμό *προσπαθειών* ως την πρώτη επιτυχία, η οποία ισούται με την προηγούμενη αυξημένη κατά ένα.

[2] Η συγκεκριμένη Y λέμε ότι ακολουθεί την Λογιστική (Logistic) κατανομή.

την πιθανότητα $P(|X-\mu|>2)$ και να την συγκρίνετε με το άνω φράγμα που δίνει η ανισότητα Chebychev.

8. Ρίχνουμε ένα ζάρι και αν εμφανιστεί η ένδειξη i τότε διαλέγουμε τυχαία έναν αριθμό, έστω X, από το διάστημα $(0,i)$ (σύμφωνα με την ομοιόμορφη κατανομή $U(0,i)$). Βρείτε την πυκνότητα της X. Κατά μέσο όρο ποιον αριθμό διαλέγουμε;

9. (Κατανομή Weibul) Έστω $c>0$. Όταν η X ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\theta>0$ τότε λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή $Y=X^{1/c}$ ακολουθεί την κατανομή Weibul με παραμέτρους c και θ. Βρείτε την συνάρτηση πυκνότητας της Y.

10. Η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με κάποια παράμετρο $\theta>0$. Η X παριστάνει το χρόνο ζωής (σε έτη) ενός ηλεκτρονικού εξαρτήματος. Ο κατασκευαστής προσφέρει εγγύηση $a=2$ ετών, και αυτό είναι το μέγιστο a έτσι ώστε τουλάχιστον το 95% των εξαρτημάτων να λειτουργούν τουλάχιστον μέχρι το χρόνο εγγύησης (ώστε να μην χρειάζεται να τα αντικαταστήσει). Ποιός είναι ο μέσος χρόνος ζωής των εξαρτημάτων, και ποια η διασπορά του χρόνου ζωής των εξαρτημάτων;

11. Το βάρος X ενός κουτιού αναψυκτικού ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu=330$gr και τυπική απόκλιση $\sigma=10$gr. Βρείτε

(α) Την πιθανότητα όπως ένα τυχαία επιλεγμένο κουτί έχει βάρος μεγαλύτερο των 340gr.

(β) Την πιθανότητα όπως ένα τυχαία επιλεγμένο κουτί έχει βάρος μικρότερο των 310gr.

(γ) Την πιθανότητα όπως ένα τυχαία επιλεγμένο κουτί έχει βάρος μεταξύ των 310gr και των 340gr.

(δ) Την πιθανότητα όπως μεταξύ δέκα τυχαία επιλεγμένων κουτιών, το πολύ 8 από αυτά έχουν βάρος μικρότερο των 340gr.

(ε) Τον αναμενόμενο αριθμό κουτιών, μεταξύ δέκα τυχαία επιλεγμένων κουτιών, που έχουν βάρος μικρότερο των 340gr.

12. Για μια συνεχή κατανομή, ο αριθμός a λέγεται *διάμεσος* της κατανομής αν $P(X\geq a)=P(X\leq a)$, όπου η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την δεδομένη κατανομή.

(α) Να δειχθεί ότι κάθε συνεχής κατανομή έχει τουλάχιστον ένα διάμεσο.

(β) Ποιός είναι ένας διάμεσος για την κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$; Είναι μοναδικός;

13. Να βρεθεί ένας διάμεσος για την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.

14. Αν $X\sim\exp(\lambda)$, να δειχθεί ότι για $k\in\mathbb{N}$ ισχύει

$$E(X^k)=\frac{k!}{\lambda^k}.$$

15. Έστω ότι $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. Αν $P(X>1.85)=0.2$ και $P(X>1.70)=0.9$ να βρεθούν τα μ,σ^2. Δίνεται ότι $\Phi^{-1}(0.8)=0.85, \Phi^{-1}(0.9)=1.29$

16. Αν $X \sim N(0,1)$, να δειχθεί ότι $X^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2)$.

***17.** Αν $Z \sim N(0,1)$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και με $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ φραγμένο, να δειχθεί ότι

$$E(f'(X)) = E(Xf(X)).$$

18. Υπολογίστε τις *απόλυτες* ροπές $E|Z|^p$, $p > 0$, όταν η Z ακολουθεί τυποποιημένη κανονική $N(0,1)$ συναρτήσει της συνάρτησης Γάμμα, και δείξτε ότι $E|X-\mu| = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ όταν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

***19.** Αν η F είναι συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής, τότε ξέρουμε ότι ικανοποιεί τα εξής:

(i) είναι αύξουσα,
(ii) είναι δεξιά συνεχής,
(iii) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$,
(iv) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Αντίστροφα τώρα, υποθέτουμε ότι μια $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις (i)-(iv), και επιπλέον ότι είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής. Και έστω U τυχαία μεταβλητή με κατανομή την ομοιόμορφη στο $(0,1)$. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή

$$X := F^{-1}(U).$$

Να δειχθεί ότι η X έχει συνάρτηση κατανομής F.

Σχόλιο: Η υπόθεση ότι η F είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής δεν χρειάζεται. Χωρίς αυτήν, ορίζει κανείς για $t \in [0,1]$

$$F^{-1}(t) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\}.$$

Και αποδεικνύεται πάλι ότι η $F^{-1}(U)$ έχει συνάρτηση κατανομής F.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

(α) Κάθε F που ικανοποιεί τις (i)-(iv) είναι συνάρτηση κατανομής κάποιας τυχαίας μεταβλητής, π.χ., της $F^{-1}(U)$. Και επομένως οι συνθήκες (i)-(iv) είναι ικανές και αναγκαίες ώστε μια συνάρτηση να είναι συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής.

(β) Αν έχουμε ένα μηχανισμό που παράγει μία τυχαία μεταβλητή U με κατανομή ομοιομορφη στο $(0,1)$, τότε μπορούμε να παραγάγουμε οποιαδήποτε άλλη τυχαία μεταβλητή μέσω του μετασχηματισμού $F^{-1}(U)$. Αρκεί βέβαια να μπορούμε να υπολογίσουμε την F^{-1}. Αυτό κάναμε στην άσκηση 6(α).

Απαντήσεις

1. Υπολογίζουμε την συνάρτηση κατανομής της Y. Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$F_Y(t) := P(Y \le t) = P(X^2 \le t),$$

το οποίο είναι 0 για $t < 1$ γιατί η X παίρνει με πιθανότητα 1 τιμές με απόλυτη τιμή ≥ 1. Για $t \ge 1$,

$$P(X^2 \le t) = P(|X| \le \sqrt{t}) = \int_{|x| \le \sqrt{t}} f_X(x)\, dx = \int_{-\sqrt{t}}^{-1} \frac{1}{2x^2}\, dx + \int_1^{\sqrt{t}} \frac{1}{2x^2}\, dx = 1 - \frac{1}{t}.$$

Άρα η F_Y είναι συνεχής (στο $\mathbb{R}$) και διαφορίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ με συνεχή παράγωγο στο ίδιο σύνολο. Απο γνωστή πρόταση (βλέπε φυλλάδιο συμπληρωμάτων θεωρίας), έπεται ότι η κατανομή της Y έχει πυκνότητα $f_Y(t) = t^{-2}\mathbf{1}_{t \ge 1}$.

2. Όμοια όπως στην προηγούμενη άσκηση, $F_Y(t) = 0$ για $t < 0$ και $F_Y(t) = 1$ για $t > 1$, ενώ για $t \in [0, 1]$ έχουμε

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y \le t) = P(Y \le t, X \le 1) + P(Y \le t, X > 1) = P(X \le t) + P(1/X \le t) \\ &= F_X(t) + 1 - F_X(1/t). \end{aligned}$$

Προκύπτει ότι η F_Y είναι συνεχής (στο $\mathbb{R}$), και για $t \in (0, 1)$ η τελευταία σχέση για την F_Y δίνει με παραγώγιση

$$F_Y'(t) = f_X(t) + t^{-2} f_X(1/t) = e^{-t} + t^{-2} e^{-1/t}.$$

Δηλαδή η F_Y' υπάρχει και είναι συνεχής στο συμπλήρωμα ενός πεπερασμένου συνόλου (του $\{0, 1\}$). Απο γνωστή πρόταση έπεται ότι μια πυκνότητα για την Y είναι η

$$f_Y(t) = \begin{cases} e^{-t} + t^{-2} e^{-1/t} & \text{αν } t \in (0, 1), \\ 0 & \text{αν } t \in \mathbb{R} \setminus (0, 1). \end{cases}$$

3. Επειδή $P(X \ge 0) = 1$, έχουμε ότι ο Y είναι με πιθανότητα 1 ένας μη αρνητικός ακέραιος. Για $k \in \mathbb{Z}, k \ge 0$,

$$P([X] = k) = P(k \le X < k + 1) = \lambda \int_k^{k+1} e^{-\lambda x}\, dx = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} = e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda}).$$

Γεωμετρική με παράμετρο $p = 1 - e^{-\lambda}$.

4. (α) $r > 1$. (β) $c = r - 1$. (γ) $r > 2$.

6. (β) Για $t \in \mathbb{R}$,

$$F_Y(t) = P\left(\frac{U}{1-U} \le e^t\right) = P\left(U \le \frac{e^t}{1 + e^t}\right) = \frac{1}{1 + e^{-t}}.$$

Πυκνότητα $f_Y(t) = F_Y'(t) = e^{-t}(1 + e^{-t})^{-2}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

7. $a = 2, b = 8$. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι 2/6=1/3. Το φράγμα από την ανισότητα Chebyshev είναι 3/4.

8. Έχουμε πείραμα σε δύο βήματα. Ως συνήθως, δεσμεύουμε ως προς το τι έγινε στο πρώτο βήμα. Έστω N η τυχαία μεταβλητή που καταγράφει το αποτέλεσμα της ρίψης του ζαριού. Προφανώς $F_X(t) = 0$ για $t < 0$ και $F_X(t) = 1$ για $t > 6$, ενώ για $t \in [0, 6]$ έχουμε

$$P(X \le t) = \sum_{i=1}^{6} P(X \le t \,|\, N = i)P(N = i) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} \frac{\min\{i, t\}}{i} = \frac{1}{6}\left([t] + t \sum_{t<i\le 6}^{6} \frac{1}{i}\right).$$

Η τρίτη έκφραση έκφραση για την συνάρτηση κατανομής της X δείχνει ότι αυτή είναι συνεχής. Η τελευταία δείχνει ότι η F_X είναι διαφορίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, \ldots, 6\}$ με συνεχή παράγωγο στο ίδιο δύνολο. Άρα μια πυκνότητα για την X είναι η

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{6}\sum_{t<i\le 6}^{6} \frac{1}{i} & \text{αν } t \in (0, 6), \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Έπειτα, $E(X) = \int_{\mathbb{R}} t f_Y(t)\, dt = \ldots = 7/4$. Ο υπολογισμός αυτός είναι πιο άμεσος με χρήση της δεσμευμένης μέσης τιμής, την οποία δεν έχουμε καλύψει ακόμη.

9. Όμοια όπως στην Άσκηση 1, $F_Y(t) = 0$ για $t < 0$, ενώ για $t \ge 0$ έχουμε

$$F_Y(t) = P(X^{1/c} \le t) = P(X \le t^c) = F_X(t^c).$$

Προκύπτει ότι η F_Y είναι συνεχής (στο $\mathbb{R}$), και για $t > 0$ η τελευταία σχέση για την F_Y δίνει με παραγώγιση

$$F_Y'(t) = f_X(t^c)\, c\, t^{c-1}.$$

Δηλαδή η F_Y' υπάρχει και είναι συνεχής στο συμπλήρωμα ενός πεπερασμένου συνόλου (του $\{0\}$ αν $c \le 1$ και του $\emptyset$ αν $c > 1$). Απο γνωστή πρόταση έπεται ότι μια πυκνότητα για την Y είναι η

$$f_Y(t) = \theta c e^{-\theta t^c} t^{c-1} \mathbf{1}_{t>0}.$$

10. Το μέγιστο a που ικανοποιεί την $P(X \ge a) \ge 0.95$, δηλαδή την $e^{-a\theta} \ge 0.95$, είναι το $a = -\frac{\log 0.95}{\theta}$. Από τα δεδομένα, αυτό είναι το 2. Επομένως

$$\theta = -\frac{\log 0.95}{2} \approx 0.02564.$$

Ο μέσος όρος της και η διασπορά της X είναι αντίστοιχα $1/\theta \approx 39, 1/\theta^2 \approx 1520$.

11. Θα χρησιμοποιήσουμε το ότι η τυχαία μεταβλητή $Z := (X - \mu)/\sigma = (X - 330)/10$ ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή για να εκφράσουμε όλες τις ζητούμενες πιθανότητες συναρτήσει της συνάρτησης κατανομής, Φ, της $N(0, 1)$.

(α) $P(X > 340) = P(Z > 1) = 1 - \Phi(1) \approx 0.158$

(β) $P(X < 310) = P(Z < -2) = \Phi(-2) \approx 0.023$

(γ) $P(310 < X < 340) = P(-2 < Z < 1) = \Phi(1) - \Phi(-2) \approx 0.818$

(δ) Ο αριθμός N των κουτιών απο τα 10 που έχουν βάρος μικρότερο από 340gr ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = 10$, και $p := P(X < 340) = \Phi(1) \approx 0.84$. Άρα

$$P(N \le 8) = 1 - P(N > 8) = 1 - P(N = 9) - P(N = 10) = 1 - 10p^9\,(1 - p) - p^{10}.$$

(ε) $E(N) = np \approx 8.41$

12. (α) Αν ο a είναι διάμεσος, τότε επειδή η κατανομή είναι συνεχής, έχουμε $P(X = a) = 0, P(X \geq a) = P(X > a)$. Άρα

$$1 = P(X \leq a) + P(X > a) = P(X \leq a) + P(X \geq a) = 2P(X \leq a) = 2F(a).$$

Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα του διάμεσου. Επειδή η F είναι συνεχής (αντιστοιχεί σε συνεχή κατανομή, δεν έχει άλματα) και

$$F(-\infty) = 0 < 1/2 < 1 = F(\infty),$$

από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ με $F(a) = 1/2$. Για αυτό το a έχουμε

$$P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - P(X \leq a) = 1/2 = P(X \leq a).$$

Άρα τουλάχιστον ένας διάμεσος υπάρχει.
(β) Απο τα επιχειρήματα στο (α) προκύπτει ότι ο $a \in \mathbb{R}$ είναι ένας διάμεσος αν και μόνο αν $F(a) = 1/2$. Στην περίπτωση της κατανομής $N(\mu, \sigma^2)$, η F είναι γνησίως αύξουσα (έχει πυκνότητα θετική σε όλο το $\mathbb{R}$), οπότε υπάρχει μόνο ένας διάμεσος. Θα δείξουμε ότι ισούται με την μέση τιμή μ. Έχουμε

$$F(\mu) = P(X \leq \mu) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq 0\right) = \frac{1}{2}.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί η $(X - \mu)/\sigma$ έχει κατανομή $N(0, 1)$, και για αυτήν ξέρουμε ότι έχει πυκνότητα άρτια συνάρτηση.

13. Αν ο a είναι ένας διάμεσος, τότε

$$P(X \geq a) = P(X \leq a) \Longrightarrow e^{-\lambda a} = 1 - e^{-\lambda a} \Longrightarrow a = \frac{\log 2}{\lambda}.$$

Άρα υπάρχει μόνο ένας διάμεσος, το οποίο ήταν αναμενόμενο γιατί η συνάρτηση κατανομής F της εκθετικής είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \infty)$ με $F(0) = 0, F(\infty) = 1$.

14. Για $k = 0$ ισχύει προφανώς. Αν ισχύει για έναν $k \geq 0$ φυσικό, τότε

$$\begin{aligned} E(X^{k+1}) &= \int_0^\infty x^{k+1} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \int_0^\infty x^{k+1} (-e^{-\lambda x})'\, dx = (k+1) \int_0^\infty x^k e^{-\lambda x}\, dx \\ &= \frac{k+1}{\lambda} \int_0^\infty x^k \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{k+1}{\lambda} E(X^k) = \frac{(k+1)!}{\lambda^{k+1}}. \end{aligned}$$

Στην παραγοντική ολοκλήρωση, χρησιμοποιήσαμε το ότι $\lim_{x\to\infty} x^{k+1} e^{-\lambda x} = 0$.

15. Η τυχαία μεταβλητή $Z := (X - \mu)/\sigma$ ακολουθεί την κατανομή $N(0, 1)$. Απο τα δεδομένα

$$0.2 = P\left(Z > \frac{1.85 - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1.85 - \mu}{\sigma}\right) \Longrightarrow \Phi\left(\frac{1.85 - \mu}{\sigma}\right) = 0.8 = \Phi(0.85).$$

Και επειδή η Φ είναι 1-1, παίρνουμε

$$\frac{1.85 - \mu}{\sigma} = 0.85 \tag{1}$$

Όμοια, βρίσκουμε ότι

$$\Phi\left(\frac{1.70 - \mu}{\sigma}\right) = 0.1 = 1 - 0.9 = 1 - \Phi(1.29) = \Phi(-1.29).$$

Ο τελευταίος υπολογισμός υπαγορεύεται απο την γραφική παράσταση της πυκνότητας της $N(0,1)$. Άρα

$$\frac{1.70-\mu}{\sigma}=-1.29 \tag{2}$$

Βρίσκουμε από τις (1), (2) ότι $\mu \approx 1.79, \sigma \approx 0.07$

16. Έστω $Y = X^2$. Η συνάρτηση κατανομής της Y ισούται με 0 στο $(-\infty, 0)$ γιατί $P(Y<0) = P(\emptyset) = 0$. Όμοια, $F_Y(0) = P(Y \le 0) = P(X=0) = 0$ γιατί η X έχει συνεχή κατανομή.
Για $x > 0$,

$$F_Y(x) = P(X^2 \le x) = P(-\sqrt{x} \le X \le \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}).$$

Αν f είναι η πυκνότητα της $N(0,1)$, παραγωγίζουμε την τελευταία ισότητα, και παίρνουμε

$$F_Y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\Big) = \frac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x^{-1/2} e^{-x/2}.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η F_Y είναι συνεχής, και η F_Y' υπάρχει και είναι συνεχής στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (το οποίο έχει πεπερασμένο συμπλήρωμα). Άρα η Y έχει πυκνότητα

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x^{-1/2} e^{-x/2} \mathbf{1}_{x>0} = \frac{(1/2)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(1/2)}\, x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x/2} \mathbf{1}_{x>0},$$

η οποία είναι η πυκνότητα της $\Gamma(1/2, 1/2)$. Χρησιμοποιήσαμε το ότι $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

17. Εστω $a < b$ πραγματικοί ώστε $f = f' = 0$ στο $(-\infty, a] \cup [b, \infty)$. Τότε

$$\begin{aligned} E(f'(X)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f'(x) e^{-x^2/2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)\, e^{-x^2/2}\Big|_{x=a}^{x=b} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f(x) (e^{-x^2/2})'\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f(x) x e^{-x^2/2}\, dx = E(Xf(X)). \end{aligned}$$

Στην παραγοντική ολοκλήρωση, χρησιμοποιήσαμε το ότι $f(a) = f(b) = 0$.

18. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} E|Z|^p &= \int_{\mathbb{R}} |x|^p \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty x^p\, e^{-x^2/2}\, dx \overset{x=\sqrt{2y}}{=} \frac{2^{p/2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty y^{(p-1)/2}\, e^{-y}\, dy \\ &= \frac{2^{p/2}}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Ειδικές περίπτωσεις:

(α) $p = 2k$, με k μη αρνητικό ακέραιο. Χρησιμοποιούμε την σχέση $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ που ισχύει για κάθε $x > 0$, και την $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

$$\begin{aligned} E(Z^{2k}) &= \frac{2^k}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \left(k - \frac{1}{2}\right)\left(k - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= (2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1. \end{aligned}$$

Αυτόν τον αριθμό τον έχουμε συναντήσει στο Φυλλάδιο 1, άσκηση 22(i). Είναι το πλήθος των διαφορετικών ζευγαρωμάτων $2k$ διαφορετικών αντικειμένων. Αυτό δεν είναι τυχαίο.

(β) $p = 2k+1$, με k μη αρνητικό ακέραιο. Χρησιμοποιούμε πάλι την σχέση $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ και το ότι $\Gamma(1) = 1$.

$$E(|Z|^{2k+1}) = \frac{2^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma(k+1) = \frac{2^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\,k!$$

Τώρα, αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, έχουμε ότι $Z := (X-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$, οπότε

$$E|X-\mu| = \sigma E|Z| = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Χρησιμοποιήσαμε την (3) για $p = 1$.

19. Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$F_X(t) := P(X \leq t) = P(F^{-1}(U) \leq t) = P(U \leq F(t)) = F(t).$$

Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι η U ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$ και ότι ο $F(t)$ είναι ένας αριθμός στο $(0,1)$. Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι η F είναι γνησίως αύξουσα με σύνολο τιμών το $(0,1)$, οπότε για $t \in \mathbb{R}$ και $U \in (0,1)$ έχουμε

$$F^{-1}(U) \leq t \iff U \leq F(t).$$