

Διορθώσεις για το «Ένα δεύτερο μάθημα στις Πιθανότητες», έκδοση 2020

- (1) Σελ. 6. Παράδειγμα 1.15. Στο $\liminf_{n \geq 1} A_n := \mathbb{R}$, το $:=$ να γίνει $=$.
- (2) Σελ. 24. Στο (i) της Πρότασης 4.1 και δύο γραμμες πιο κάτω, το $s(f)$ να γίνει $\sigma(f)$.
- (3) Σελ. 27. Πρώτη γραμμή του κεφαλαίου. Το «... το ολοκλήρωμα οποιασδήποτε...» να γίνει «... το ολοκλήρωμα για όσο το δυνατόν περισσότερες $\mathcal{A}/\mathcal{B}([-\infty, \infty])$ -μετρήσιμες συναρτήσεις $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ ».
- (4) Σελ. 30. Γραμμή 4. Η πρόταση μέσα στις αγκύλες «αποδεικνύεται εύκολα...» να αντικατασταθεί από την «είναι απλή και μετρήσιμη, ως δείκτρια ενός συνόλου, και επιπλέον το σύνολο αυτό έχει λ-μέτρο 0».
- (5) Σελ. 38. Στον ορισμό του \mathcal{L}^∞ . Το \mathcal{L}^∞ να γίνει $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.
- (6) Σελ. 40. Παρατήρηση 5.30. (i) «Κάθε f_n είναι μετρήσιμη και φραγμένη». Και δύο γραμμές μετά, «...ακολουθία φραγμένων μετρήσιμων συναρτήσεων που προσεγγίζουν ...»
- (7) Σελ. 52. Άσκηση 6.4. Τα $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}), X, \mathbf{Q}$ να γίνουν $(X, \mathcal{A}, \mu), f, \nu$ αντίστοιχα.
- (8) Σελ. 52. Άσκηση 6.7. ... και πυκνότητα f Borel-μετρήσιμη. Να δειχθεί...
- (9) Σελ. 59. Άσκηση 7.6. F_1, F_2 είναι οι συναρτήσεις κατανομής των X_1 και X_2 αντίστοιχα.
- (10) Σελ. 70. Στο παράδειγμα 9.7, πρέπει να δείξει κανείς ότι η f είναι $(\mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{F})/\mathbb{R}$ -μετρήσιμη. Αυτό γιατί $f = h \circ g$ με

$$g : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow [0, \infty) \times [0, \infty], \quad g(t, \omega) := (t, X(\omega)),$$

$$h : [0, \infty) \times [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(t, x) := \mathbf{1}_{t < x}.$$

Η h είναι μετρήσιμη ως δείκτρια ανοιχτού συνόλου και κάθε ανοιχτό στον χώρο γινόμενο ανήκει στη σ -άλγεβρα γινόμενο (εύκολη άσκηση). Η g είναι μετρήσιμη γιατί αντιστρέφει κάθε μετρήσιμο ορθογώνιο του $[0, \infty) \times [0, \infty]$ σε στοιχείο της $\mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{F}$ (και έπειτα επικαλούμαστε την Πρόταση 4.3). Πράγματι, $g^{-1}(U \times V) = U \times X^{-1}(V)$.

- (11) Σελ. 72. Άσκηση 9.4(β). Η υπόθεση ότι η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή μπορεί να παραληφθεί, απλώς η άσκηση γίνεται δυσκολότερη.
- (12) Σελ. 72. Άσκηση 9.4(γ). ... με μέση τιμή $\mu \in \mathbb{R}$, διάμεσο ...
- (13) Σελ. 77. Στο Θεώρημα 10.10. Επιπλέον υποθέτουμε ότι κάθε \mathcal{F}_i είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές.
- (14) Σελ. 80. Άσκηση 10.7. Η X παίρνει πραγματικές τιμές.
- (15) Σελ. 81. Άσκηση 10.13. Το «μεροληπτική μεγέθους» να γίνει «μεροληπτική με βάση το μέγεθος».
- (16) Σελ. 92. Στην 6η γραμμή της απόδειξης. Η ισότητα $\mathbf{E}(Y_n^2) = \text{Var}(Y_n^2)$ να γίνει $\mathbf{E}(Y_n) = \text{Var}(Y_n)$.
- (17) Σελ. 94. Στην παράγραφο πριν το Θεώρημα 12.4. Υποθέτουμε ότι $\mu \in (0, \infty]$. Έπειτα, μετά τη σχέση (12.1) σημειώνουμε ότι στο A ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$, και άρα $N_t < \infty$ για κάθε $t > 0$.
- (18) Σελ. 97. Άσκηση 12.5(β). Το « $n \in \mathbb{N}^+$ » να γίνει « $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ».
- (19) Σελ. 114. Στην απόδειξη του Πορίσματος 14.11 πρέπει να ειπωθεί ότι οι $g(X_n), g(X)$ είναι τυχαίες μεταβλητές. Αυτό ισχύει γιατί οι X_n, X είναι τ.μ. και η g Borel μετρήσιμη ως συνεχής.
- (20) Σελ. 117. Πόρισμα 14.17. Χρειάζεται να ειπωθεί ότι το D_g είναι σύνολο Borel ώστε να ορίζεται η πιθανότητα $\mathbf{P}(X^{-1}(D_g))$. Αυτό ισχύει γιατί αν ορίσουμε

$$\tau_g(x) := \inf_{\delta > 0} \sup\{|g(y) - g(z)| : y, z \in (x - \delta, x + \delta)\}$$

(ονομάζεται ταλάντωση της g στο x) για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε

$$\mathbb{R} \setminus D_g = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^+} \{x \in \mathbb{R} : \tau_g(x) < 1/k\}$$

και καθένα από τα σύνολα στην τομή είναι ανοιχτό. Οπότε το D_g είναι Borel (μάλιστα είναι F_σ σύνολο).

- (21) Σελ. 120. Άσκηση 14.15. Να υποτεθεί ότι $S = \mathbb{N}$. Το (ii) \Rightarrow (i) είναι σωστό όπως ζητείται. Όμως το (i) \Rightarrow (ii) ισχύει αν και μόνο αν όλα τα σημεία του S είναι μεμονωμένα.
- (22) Σελ. 147. Στον ορισμό του \mathcal{D}_1 . Να γραφεί «... για κάθε $A_2 \in \mathcal{C}_2 \cup \{\Omega\}, \dots, A_n \in \mathcal{C}_n \cup \{\Omega\}$..».
- (23) Σελ. 155. Στη λύση της 2.5. Η δικαιολόγηση της $|B_n| \leq n$ είναι λάθος γιατί δεν γνωρίζουμε ακόμα αν το B_n είναι αριθμήσιμο ώστε να εφαρμόσουμε την αριθμήσιμη προσθετικότητα. Λέμε λοιπόν ότι αν πάρουμε οποιοδήποτε $I \subset B_n$ πεπερασμένο, τότε $1 \geq \mathbf{P}(\cup_{\beta \in I} A_i) = \sum_{\beta \in I} \mathbf{P}(A_i) \geq |I| \frac{1}{n}$, άρα $|I| \leq n$, που δίνει το ζητούμενο.
- (24) Σελ. 170. Στη λύση της 17.1 (γ). $\Lambda^*(x) = x^2/(2\sigma^2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.