ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΤΕΧΝΕΣ
ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΧΑΣΑΠΗΣ

Επιμέλεια

Πρακτικά 9ου Διημέρου Διαλόγου
για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών
15 & 16 Απριλίου 2011

ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΑΓΩΓΗΣ
ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗ ΗΛΙΚΙΑ

ΑΘΗΝΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΤΕΧΝΕΣ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΧΑΣΑΠΗΣ (Επιμέλεια)

Έκδοση CD-ROM
Τμήμα Εκπαίδευσης & Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία
Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Ναυαρίνου 13α, 106 80 Αθήνα

© Δημήτρης Χασάπης για την παρούσα συλλογή
Οι συγγραφείς για τα κείμενα τους

Η εικόνα του εξωφύλλου: Έργο της Astrid Fitzgerald

ΑΘΗΝΑ 2011

ISBN 978-960-87577-7-6

Στο ΔΙΗΜΕΡΟ ΓΙΑ ΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ παρουσιάζονται μόνον πρωτότυπες εργασίες, οι οποίες εντάσσονται στο σχετικό θέμα του συνεδρίου, δεν έχουν παρουσιαστεί σε άλλο συνέδριο, δεν έχουν δημοσιευτεί σε άλλο περιοδικό ή βιβλίο και ανταποκρίνονται στις διεθνώς καθιερωμένες απαιτήσεις της επιστημονικότητας.
Η Επιστημονική Επιτροπή διατηρεί το δικαίωμα επιλογής των υποβαλλόμενων εισηγήσεων με βάση εκτεταμένες περιλήψεις τους και φροντίζει για την αξιολόγηση των πλήρων κειμένων τους πριν την συμπερίληψη τους στα Πρακτικά του Διημέρου.
Για την αξιολόγηση τους, τα κείμενα των εισηγήσεων αποστέλλονται, ανώνυμα, σε δύο (2) κριτές από κατάλογο ειδικών για το εκάστοτε θέμα του Διημέρου επιστημόνων, στον οποίο συμπεριλαμβάνονται και τα μέλη της Επιστημονικής Επιτροπής.
Η αναδημοσίευση εισηγήσεων, οι οποίες έχουν δημοσιευτεί στα Πρακτικά του Διημέρου απαιτεί άδεια του Επιμελητή της έκδοσης.

Επιστημονική Επιτροπή

Ελένη Γιαννακοπούλου, *Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο*
Κώστας Ζαχάρος, *Πανεπιστήμιο Πάτρας*
Ουρανία Κούβου, *Πανεπιστήμιο Αθηνών*
Κώστας Νικολαντωνάκης, *Πανεπιστήμιο Δυτ. Μακεδονίας*
Παύλος Πανταζής, *Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης*
Μαλβίνα Παπαδάκη, *Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση*
Αντιγόνη Παρούση, *Πανεπιστήμιο Αθηνών*
Χαρά Σταθοπούλου, *Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας*
Νικόλας Τσαφταρίδης, *Πανεπιστήμιο Αθηνών*
Δημήτρης Χασάπης, *Πανεπιστήμιο Αθηνών*
Κώστας Χατζηκυριάκου, *Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας*
Άννα Χρονάκη, *Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας*

[λευκή σελίδα]

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Τα μαθηματικά και οι τέχνες, παρά το γεγονός ότι αντιμετωπίζονται συχνά ως αντιθετικά πεδία δραστηριοτήτων, συναρτώνται μεταξύ τους από τα πρώτα στάδια της ανάπτυξης τους και στην ιστορική τους εξέλιξη διαμορφώνουν αμοιβαίες σχέσεις. Σχέσεις, οι οποίες εμπλουτίζουν τη μαθηματική δραστηριότητα υποβάλλοντας νέα πεδία έρευνας και αντίστοιχα επηρεάζουν τις τέχνες υποκινώντας νέες περιοχές καλλιτεχνικής διερεύνησης.

Οι ιστορικές τους συναρτήσεις ιδίως στη μελέτη γεωμετρικών μορφών, ο ρόλος της αισθητικής και της αρμονίας στη μαθηματική έκφραση και στην καλλιτεχνική δημιουργία και οι κοινές νοητικές διαδικασίες παραγωγής μαθηματικής γνώσης και καλλιτεχνικών έργων, όπως είναι η παρατήρηση, η ανάλυση και σύνθεση, η αναλογική σκέψη, η οπτική παράσταση και η γραφική αναπαράσταση αποτελούν μερικά από τα πιο κοινά χαρακτηριστικά μαθηματικών και τεχνών.

Στην ελληνική προσχολική και σχολική πραγματικότητα, όμως, οι πολλαπλές σχέσεις μαθηματικών και τεχνών, όχι μόνο δεν αξιοποιούνται δημιουργικά στην ανάπτυξη δραστηριοτήτων μάθησης και διδασκαλίας, αλλά σε πολλές περιπτώσεις μεταβάλλονται σε πηγές σύγχυσης μεταξύ μαθηματικής γνώσης και καλλιτεχνικής έκφρασης, εξαιτίας όχι μόνο των επιλογών των αναλυτικών προγραμμάτων και των σχολικών βιβλίων, αλλά και των διδακτικών πρακτικών.

Η ενημέρωση για τους σχετικούς προβληματισμούς, τις ερευνητικές δραστηριότητες και τις πρωτοβουλίες ερευνητών και εκπαιδευτικών για τη διερεύνηση και την αξιοποίηση των αμοιβαίων και πολύπλευρων σχέσεων των μαθηματικών με τις τέχνες στην προσχολική και τη σχολική εκπαίδευση αποτέλεσε πρωταρχικό στόχο του 9ου Διημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών με θέμα «Μαθηματικά και Φυσικές Επιστήμες στην προσχολική και σχολική εκπαίδευση» που οργανώθηκε στις 15 & 16 Απριλίου 2011 από το Τμήμα Εκπαίδευσης & Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία του Εθνικού & Καποδιστριακού Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Στην παρούσα έκδοση περιλαμβάνονται τα κείμενα των εισηγήσεων, οι οποίες παρουσιάστηκαν στο Διήμερο αυτό.

Δημήτρης Χασάπης

Αναπληρωτής Καθηγητής Τ.Ε.Α.Π..Η του Ε.Κ.Π. Α.

[λευκή σελίδα]

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ Ι

Μαθηματικά και Τέχνες: Προσεγγίσεις και Προβληματισμοί

Δημήτρης Χασάπης

Μαθηματικά και τέχνες στην εκπαίδευση: Αναζητώντας κοινούς τόπους 13

Λέλα Λυμπεροπούλου

Καλλιτέχνες και μαθηματικά 29

Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης

Επεισόδια από την σχέση των Μαθηματικών με την Τέχνη 47

Παναγιώτα Κοταρίνου & Χαρούλα Σταθοπούλου

Ένα πανόραμα από τις έρευνες για την αξιοποίηση των τεχνών στη διδασκαλία των Μαθηματικών. 57

Δημήτρης Α. Σεβαστάκης

Η διάρρηξη του ρήγματος 91

Ουρανία Κούβου

'Σχεδιάζοντας' τους Αριθμούς: Οι αριθμοί και το σχέδιο ως γνωστικές συμβολικές διεργασίες στην προσχολική ηλικία. 95

Τάσος Πατρώνης & Γεράσιμος Μελετίου

Απλή Τέχνη και Περίπλοκοι Γρίφοι: Ένα ερμηνευτικό σχήμα των αναπαραστάσεων που διαδίδονται μέσα από τη Δημοφιλή (Popular) Κουλτούρα για τα Μαθηματικά 97

Ελένη Γιαννακοπούλου

Λογική και ευαισθησία: Η συμβολή της τέχνης στην αναθεώρηση της σχέσης των ενηλίκων με τα μαθηματικά 105

ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙ

Μαθηματικά και Τέχνες στην Εκπαίδευση: Η Τέχνη του Λόγου

Μαρία Τερδήμου

Μαθηματικά και ποίηση. Δύο όψεις της πανανθρώπινης ομορφιάς *119*

Γιάννης Καρβέλης

Λογοτεχνικά Μαθηματικά: «Το Τερπνόν μετά τού 'Ωφελίμου» *133*

Αναστασία Μιχαλοπούλου

Πώς ασχοληθήκαμε με τη γεωμετρία και τις τέχνες διαβάζοντας την Επιπεδοχώρα στην τάξη *147*

Αναστασία Σπανούδη & Κώστας Χατζηκυριάκου

Πού πάει, πού με πάει αυτό το ποίημα; *169*

Άννα Χρονάκη & Γεωργία Μουτζούρη

Λογοτεχνία και Μαθηματικά στις Μικρές Ηλικίες: πολυφωνικές αφηγήσεις και αναδυόμενες δεξιότητες αριθμητικού γραμματισμού *183*

ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙΙ

Μαθηματικά και Τέχνες στην Εκπαίδευση:
Εκπαιδευτικές Προτάσεις & Διδακτικά Εγχειρήματα

Άρης Μαυρομμάτης & Σοφία Σταθοπούλου

«Τέχνη και Μαθηματικά» Εκπαιδευτικό Πρόγραμμα Δημοτικού Μουσείου Ηρακλειδών *205*

Αποστόλης Παπανικολάου

Εκπαιδευτικό Πρόγραμμα «Τέχνη και Μαθηματικά» στο Μουσείο Ηρακλειδών: Πρόγραμμα Γυμνασίου-Λυκείου *217*

Αναστασία Αϊβάζογλου & Κυριακή Πρεβενιού

«Τέχνη και Μαθηματικά» Παρουσίαση Διαθεματικού Εκπαιδευτικού Προγράμματος: Αποτελέσματα και εμπειρίες στη Γυμνασιακή Εκπαίδευση *253*

Νικόλας Τσαφταρίδης & Δημήτρης Σαρρής

Η μουσική, το παιχνίδι και τα μαθηματικά *265*

Θεοδώρα Ντόκα

Οι εικαστικές τέχνες ως εργαλείο προσέγγισης της Γεωμετρίας *279*

Πανωραία Μπάκα

Οι παραστατικές τέχνες ως εργαλείο διδασκαλίας των μαθηματικών *291*

Δημήτρης Γιαννόπουλος & Πάτροκλος Καζάζης

Εικαστικές κατασκευές και γεωμετρικές ιδιότητες σχημάτων. Μια διαθεματική προσέγγιση με τη χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας *301*

Βασίλης Τσίτσος & Χαρούλα Σταθοπούλου

Χρήση λογισμικών στη δημιουργία κινουμένων σχεδίων για τη διδασκαλία των μαθηματικών: Δυνατότητες και περιορισμοί *321*

Ηλίας Μιχαηλίδης, Κώστας Νικολαντωνάκης & Ιφιγένεια Βαμβακίδου

Μαθηματικά και γραφιστικη στά logos των ποδοσφαιρικών ομάδων *337*

Πέτρος Χαβιάρης

Η αυτορρύθμιση των μαθητών κατά τη συνεργασία τους στα Μαθηματικά: Ο ρόλος του θεατρικού παιχνιδιού *351*

Αντιγόνη Παρούση & Βασίλης Τσελφές

Θεατρική έκφραση και μαθηματικά στην εκπαίδευση εκπαιδευτικών *365*

ΕΝΟΤΗΤΑ Ι

Μαθηματικά και Τέχνες:

Προσεγγίσεις και Προβληματισμοί

[λευκή σελίδα]

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΤΕΧΝΕΣ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: ΑΝΑΖΗΤΩΝΤΑΣ ΚΟΙΝΟΥΣ ΤΟΠΟΥΣ

Δημήτρης Χασάπης

Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι σχέσεις μαθηματικών και τεχνών προσεγγίζονται και αναλύονται από διαφορετικές οπτικές, καθεμιά από τις οποίες τονίζει διαφορετικές όψεις και αναδεικνύει διαφορετικά χαρακτηριστικά και των μαθηματικών ή και των τεχνών, ως κοινωνικών πρακτικών. Με το δεδομένο αυτό επισημαίνονται κοινά πεδία μαθηματικών και τεχνών και κατά συνέπεια δημιουργικές αλληλεπιδράσεις, οι οποίες στην ιστορική τους διαδρομή συνέβαλαν στην ανάπτυξη μαθηματικών θεωριών, αλλά και στη δημιουργία καλλιτεχνικών ρευμάτων. Η αξιοποίηση, όμως, των σχέσεων μαθηματικών και τεχνών για τον εμπλουτισμό του περιεχομένου ή και των διδακτικών πρακτικών στο σχολείο δεν είναι απλά ζήτημα τεχνικών διευθετήσεων του αναλυτικού προγράμματος, υιοθέτησης σχετικών διαθεματικών οπτικών στη διδασκαλία ή τροποποίησης των εκπαιδευτικών μεθόδων. Οι διαφορές του περιεχομένων και των καθιερωμένων πρακτικών, τόσο της παραγωγής της μαθηματικής γνώσης, όσο και της δημιουργίας των καλλιτεχνικών έργων καθιστούν προβληματικό τον εντοπισμό των κοινών τους τόπων και αμφιλεγόμενες τις δυνατότητες παιδαγωγικής αξιοποίησης των διαπιστωμένων σχέσεων μαθηματικών και τεχνών. Το ζήτημα αυτό επισημαίνεται και σχολιάζεται στην παρούσα συζήτηση.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΤΕΧΝΕΣ

Μια επισκόπηση της συναφούς βιβλιογραφίας αναδεικνύει τρεις διαφορετικές οπτικές στις σχέσεις μαθηματικών και τεχνών:

Οπτική πρώτη, αυτή που σχηματικά θα ονομάζονταν η τέχνη των μαθηματικών. Τα μαθηματικά είναι μια μορφή τέχνης, η διατύπωση και η απόδειξη ενός μαθηματικού θεωρήματος, η επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος, η ανάπτυξη μια μαθηματικής θεωρίας είναι δραστηριότητες με χαρακτηριστικά ενός ιδιαίτερου τύπου τέχνης.

Οπτική δεύτερη, η μαθηματική ανάγνωση των έργων της τέχνης. Μαθηματικές έννοιες, σχέσεις και θεωρήματα αναγνωρίζονται σε έργα τέχνης υποδηλώνοντας τη στενή συνάφεια μαθηματικών και τέχνης, ως κοινωνικών πρακτικών.

Οπτική τρίτη, αυτή που αναδεικνύει τα μαθηματικά στοιχεία καλλιτεχνικών έργων και τονίζει το ρόλο των μαθηματικών εννοιών, σχέσεων και θεωριών στη δημιουργία τους.

Καθεμιά από τις οπτικές αυτές - στο εσωτερικό των οποίων εντοπίζονται και επιμέρους διαφοροποιήσεις - επιλέγει και αναδεικνύει διαφορετικές όψεις και (υπερ)τονίζει διαφορετικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών ή και των τεχνών, ως κοινωνικών πρακτικών, ιστορικά αναπτυγμένων και πολιτισμικά καθορισμένων και καθεμιά από τις οπτικές αυτές υποστηρίζεται από πολλές και ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες, ως προς το περιεχόμενο τους, έρευνες και αναλύσεις.

Θα επιχειρηθεί στη συνέχεια μια συνοπτική έκθεση των τριών αυτών οπτικών στις σχέσεις μαθηματικών και τεχνών, μέσα από μια επιλεκτική παρουσίαση των βασικών παραδοχών και των κύριων επιχειρημάτων τους.

Η ΤΕΧΝΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η οπτική αυτή, όπως προαναφέρθηκε, αποδίδει στη μαθηματική δραστηριότητα και στα παράγωγά της (έννοιες και σχέσεις, θεωρήματα και αποδείξεις, προβλήματα και μέθοδοι επίλυσης τους) χαρακτηριστικά της καλλιτεχνικής δημιουργίας. Περιορίζοντας, βέβαια, τη μαθηματική δραστηριότητα στο καθαρά θεωρητικό επίπεδο παραγωγής μαθηματικής γνώσης. Τα χαρακτηριστικά της καλλιτεχνικής δημιουργίας αποδίδονται στα μαθηματικά μέσα από δύο προσεγγίσεις.

Η μια προσέγγιση θεωρεί τα μαθηματικά ως μια μορφή τέχνης, ισχυριζόμενη ότι η μαθηματική δημιουργία προκαλεί στον ερευνητή μαθηματικό, τα ίδια συναισθήματα με εκείνα που προκαλεί ένα έργο τέχνης στον καλλιτέχνη

δημιουργό του. Ο Πουανκαρέ – πατριάρχης της άποψης αυτής – γράφει ότι «*ένας επιστήμονας άξιος του ονόματος, και πάνω απ΄ όλα ένας μαθηματικός, έχει τα ίδια συναισθήματα στη δουλειά του με έναν καλλιτέχνη. Η ευχαρίστηση του είναι το ίδιο έντονη και της ίδιας φύσης*» (Poincare, 1890, σ. 143). Στην ίδια γραμμή σκέψης ο Ράσελ, υποστηρίζει ότι στη μαθηματική εμπειρία ενέχονται αισθητικές απολαύσεισανάλογες της γλυπτικής, τη ζωγραφικής, της μουσικής ή της ποίησης (Russel, 1919, σ. 60).

Ο Hardy υπερβάλλοντας την υποκειμενική εμπειρία της μαθηματικής δραστηριότητας ταυτίζει τους μαθηματικούς με τους καλλιτέχνες, αποδίδοντας, μάλιστα, στα μαθηματικά δημιουργήματα υπέρτερη αξία των καλλιτεχνικών έργων. Στο αυτοβιογραφικό έργο του «Η απολογία ενός μαθηματικού» δηλώνει χωρίς καμία επιφύλαξη ότι «*Ο μαθηματικός, όπως ένας ζωγράφος ή ένας ποιητής είναι ένας σχεδιαστής. Αν τα σχεδιάσματα του είναι περισσότερο διαχρονικά από εκείνων, αυτό οφείλεται στο ότι είναι φτιαγμένα από ιδέες*» (Hardy, 1991, σ. 62).

Στο ίδιο βιβλίο, ο Hardy, υιοθετεί και προβάλλει τη δεύτερη – συμπληρωματική της πρώτης – προσέγγιση των μαθηματικών ως τέχνης, αποδίδοντας στα παράγωγα της μαθηματικής δραστηριότητας, και κυρίως στα μαθηματικά θεωρήματα ή και στις αποδείξεις τους, χαρακτηριστικά καλλιτεχνικών έργων. «*Τα μαθηματικά σχεδιάσματα, όπως και εκείνα ενός ζωγράφου ή ποιητή πρέπει να είναι όμορφα. Οι ιδέες, όπως τα χρώματα ή οι λέξεις πρέπει να ταιριάζουν μεταξύ τους με αρμονικό τρόπο. Η ομορφιά είναι το πρώτο κριτήριο: δεν υπάρχει μόνιμη θέση στον κόσμο για άσχημα Μαθηματικά*» (ο.π. σ. 63).

Αυτή η δεύτερη προσέγγιση, η οποία τονίζει επιλεγμένα, αλλά αντικειμενικά, χαρακτηριστικά της μαθηματικής γνώσης, σε αντίθεση με την πρώτη, η οποία προβάλλει την υποκειμενική αίσθηση που προκαλεί η μαθηματική δραστηριότητα, φαίνεται να κυριαρχεί στη οπτική των μαθηματικών ως μιας ιδιότυπης μορφής τέχνης.

Εκφράσεις, όπως ένα «καλαίσθητο» ή ένα «όμορφο» θεώρημα, μια «καλαίσθητη» ή μια «κομψή» απόδειξη ή μια «όμορφη» λύση ενός μαθηματικού προβλήματος είναι συστατικές του λεξιλογίου της οπτικής αυτής και έχουν, ανάλογα με το πλαίσιο τους, διαφορετικά σημαινόμενα.

Ως ένα τυπικά «όμορφο» μαθηματικό θεώρημα θεωρείται η ταυτότητα του Euler:

$$e^{i\pi}+1=0$$

Η ταυτότητα του Euler κατοχυρώνει την ομορφιά της στο λιτό συνδυασμό των σημαντικότερων για τα μαθηματικά αριθμών και πράξεων:

- του αριθμού e, ο οποίος είναι η βάση των φυσικών λογαρίθμων (e = 2.718281828...) και χρησιμοποιείται ευρύτατα σε μαθηματικούς και επιστημονικούς υπολογισμούς.
- του *i*, ο οποίος είναι η φανταστική μονάδα των μιγαδικών αριθμών ($i^2 = -1$), μιας αριθμητικής δομής η οποία περιλαμβάνει τις ρίζες όλων των πολυωνύμων.
- του αριθμού π (π = 3.14159265...), ο οποίος εκφράζει την τόσο σημαντική για τη γεωμετρία σχέση του μήκους της περιφέρειας με το μήκος της διαμέτρου ενός κύκλου.
- των αριθμών 0 και 1 και
- των πράξεων της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού και της ύψωσης σε δύναμη.

Ως μια τυπικά «καλαίσθητη» απόδειξη θεωρείται η απόδειξη της πρότασης 20 του 9ου Βιβλίου των Στοιχείων του Ευκλείδη για την ύπαρξη άπειρων πρώτων αριθμών (αριθμών οι οποίοι δεν έχουν κανένα άλλο διαιρέτη εκτός του 1 και του εαυτού τους), απόδειξη η οποία εφαρμόζει τη μέθοδο της «απαγωγής στο άτοπο».

Ευκλείδου Στοιχεία, Βιβλίο IX, Πρόταση 20

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν.

Ἔστωσαν οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ: λέγω, ὅτι τῶν Α, Β, Γ πλείους εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοί. Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ ἐλάχιστος μετρούμενος καὶ ἔστω ὁ ΔΕ, καὶ προσκείσθω τῷ ΔΕ μονὰς ἡ ΔΖ. ὁ δὴ ΕΖ ἤτοι πρῶτός ἐστιν ἢ οὔ. ἔστω πρότερον πρῶτος: εὑρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, ΕΖ πλείους τῶν Α, Β, Γ. Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ ΕΖ πρῶτος: ὑπὸ πρώτου ἄρα τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. μετρείσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ Η: λέγω, ὅτι ὁ Η οὐδενὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστιν ὁ αὐτός. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. οἱ δὲ Α, Β, Γ τὸν ΔΕ μετροῦσιν: καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΔΕ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΕΖ: καὶ λοιπὴν τὴν ΔΖ μονάδα μετρήσει ὁ Η ἀριθμὸς ὤν: ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ Η ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστιν ὁ αὐτός. καὶ ὑπόκειται πρῶτος. εὑρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους τοῦ προτεθέντος πλήθους τῶν Α, Β, Γ οἱ Α, Β, Γ, Η: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Σε σύγχρονη γλώσσα και μαθηματική γραφή

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ είναι περισσότεροι από οποιοδήποτε προκαθορισμένο πλήθος πρώτων αριθμών.

Έστω $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$,, , .. p_n . οι πεπερασμένου πλήθους πρώτοι αριθμοί και έστω Ρ ένα κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών αυτών συν ένα, δηλαδή $P = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$. Ο αριθμός Ρ ή είναι ή δεν είναι πρώτος. Αν ο Ρ είναι πρώτος αριθμός *τότε είναι ένας αριθμός ο οποίος δεν περιλαμβάνεται* στο πεπερασμένο πλήθος *των πρώτων αριθμών* p_1 …. p_n.. Αν *ο Ρ δεν είναι πρώτος αριθμός τότε είναι σύνθετος, οπότε διαιρείται με κάποιον από τους πρώτους αριθμούς, έστω του p. Αφού, όμως, κανένας από τους πρώτους αριθμούς* p_1, . p_2, .. p_n *δεν διαιρεί τον Ρ γιατί αφήνει υπόλοιπο 1, τότε ο p είναι ένας νέος πρώτος αριθμός που δεν περιλαμβάνεται* στο πλήθος *των πρώτων αριθμών* p_1, . p_2, .. p_n. *Σε κάθε περίπτωση το αρχικό πεπερασμένο πλήθος των πρώτων αριθμών δεν περιλαμβάνει όλους τους πρώτους αριθμούς.*

Με ποια κριτήρια η απόδειξη αυτή θεωρείται «όμορφη»; Και γενικότερα, με ποια κριτήρια ένα θεώρημα, μια απόδειξη, μια μέθοδος, μια λύση ενός προβλήματος ή μια μαθηματική θεωρία θεωρείται όμορφή ή άσχημη, καλαίσθητη ή άκομψη;

Το ερώτημα των αισθητικών κριτηρίων της «τέχνης των μαθηματικών» αποτελεί ένα ερώτημα στο οποίο έχουν δοθεί και δίνονται διαφορετικές απαντήσεις. Στο ένα άκρο, η αμφισβήτηση του ερωτήματος καθαυτού, αφού η απάντηση του έχει, κατά τον Erdos, μια «ανείπωτη» προφάνεια. «Είναι σαν να ρωτάμε γιατί είναι ωραία η 9η συμφωνία του Μπετόβεν. Εάν δεν μπορείτε να το διαπιστώσετε μόνοι σας δεν μπορεί να σας το πει κανένας» (Devlin, 2002, σ. 140). Στο άλλο άκρο η παράθεση αισθητικών κριτηρίων, τα οποία κατά γενική αναγνώριση, δεν μπορεί να είναι αποκλειστικά και συναρτώνται άμεσα με το ιστορικό πλαίσιο της μαθηματικής δραστηριότητας (Hofstadter, 1979). Ενδιάμεσα, απόψεις όπως εκείνες του Rota (1977), οι οποίες επιχειρούν να ορίσουν την έννοια των αισθητικών κριτηρίων με διαφορετικό τρόπο για τα μαθηματικά από εκείνους της καλλιτεχνικής δημιουργίας.

Η μαθηματική δομή, η οποία αποτελεί απόρροια μιας σύνθεσης με πρωτότυπο και ασυνήθιστο τρόπο μιας σειράς φαινομενικά άσχετων μεταξύ τους μαθηματικών δεδομένων, ώστε να αποτελέσουν ένα ενιαίο, συνιστά σύμφωνα με πολλές αναλύσεις ένα αισθητικό κριτήριο, το οποίο προσδιορίζει την ομορφιά των μαθηματικών. Πρόκειται για ένα κριτήριο, του οποίου η καταγωγή έλκεται από την Πυθαγόρεια κοσμοθεωρία, η οποία απέδιδε στα μαθηματικά τις οργανωτικές αρχές της αρμονίας του κόσμου. Οι Ντέιβις και Χερς αιτιολογούν το κριτήριο αυτό θεωρώντας ότι «*Μια αίσθηση ισχυρής προσωπικής αισθητικής ευχαρίστησης πηγάζει από το φαινόμενο ότι μπορεί να*

οριστεί τάξη μέσα στο χάος. Σε ένα βαθμό, ο αντικειμενικός στόχος των μαθηματικών είναι να δημιουργηθεί τάξη εκεί όπου πρώτα φαινόταν ότι κυβερνούσε το χάος να πάρουμε δομή και σταθερότητα μέσα από την αποδιοργάνωση και την αναταραχή» (Davis & Hersch, 1981, σ. 176).

Το σχετικά ασαφές κριτήριο της αρμονικής σύνθεσης μιας μαθηματικής δομής, συμπληρώνεται σε διάφορες αναλύσεις με το επίσης ασαφές κριτήριο της απλότητας, της συντομίας ή της λιτότητας ενός ορισμού, ενός επιχειρήματος, μιας απόδειξης ή μιας λύσης, στοιχεία τα οποία εξασφαλίζονται με την υιοθέτηση των ελάχιστων δυνατών παραδοχών ή και την επίκληση των ελάχιστων δυνατών πρότερα γνωστών μαθηματικών δεδομένων. Όπως σημειώνει η Μπρίνκμαν, ο συνδυασμός της πολυπλοκότητας με την απλότητα φαίνεται να δημιουργεί μια αισθητική απόλαυση (Brinkmann, 2009) και με βάση την αίσθηση αυτή αποδίδονται στα μαθηματικά χαρακτηριστικά καλλιτεχνικής δημιουργίας.

Παράλληλα, διατυπώνονται κριτήρια τα οποία αναφέρονται στην ευρηματικότητα και στην πρωτοτυπία, στην ευκολία της εφαρμογής και της γενικευσιμότητας, στην απλότητα της διατύπωσης και άλλα χαρακτηριστικά του περιεχομένου και της παρουσίασης της μαθηματικής γνώσης (Brinkmann, 2009, Dreyfus and Eisenberg, 1986, Whitcombe, 1988)

Συμπερασματικά, η συμπερίληψη των μαθηματικών στις τέχνες είναι απόρροια του ακόλουθου συλλογισμού: Οι τέχνες δημιουργούν αξιοποιώντας ένα μέσο και απευθύνονται στις ανθρώπινες αισθήσεις. Η ζωγραφική αξιοποιεί τα χρώματα και τις υλικές επιφάνειες απευθυνόμενη στην όραση, η μουσική αξιοποιεί τον ήχο και απευθύνεται στην ακοή και τα λοιπά ανάλογα για κάθε μορφή τέχνης. Τα μαθηματικά αξιοποιούν τη λογική και απευθύνονται στη σκέψη. Η μαθηματική δημιουργία και τα έργα της προκαλούν αισθητικές απολαύσεις αντίστοιχες των άλλων μορφών τέχνης, με αισθητικά κριτήρια, βέβαια, τα οποία προσιδιάζουν στην μαθηματική πρακτική.

Πέρα από συμφωνίες ή διαφωνίες, η προσέγγιση των μαθηματικών με αισθητικά κριτήρια έχει συμβάλλει δημιουργικά στην ανάπτυξη της μαθηματικής δραστηριότητας και γνώσης υποβάλλοντας την αναζήτηση νέων μορφών τεκμηρίωσης, διατύπωσης και παρουσίασης μαθηματικών ορισμών, θεωρημάτων, αποδείξεων και τεχνικών επίλυσης προβλημάτων. Είναι χαρακτηριστικό το γεγονός ότι σε αναζήτηση μιας «καλαίσθητης» απόδειξης, έχουν καταγραφεί περισσότερες από 370 αποδείξεις του Πυθαγορείου Θεωρήματος (Loomis, 1968).

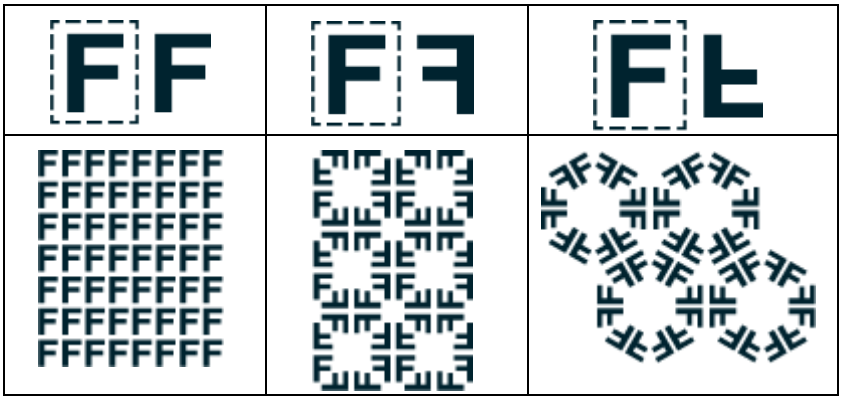
Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ ΤΩΝ ΕΡΓΩΝ ΤΗΣ ΤΕΧΝΗΣ

Οπτική δεύτερη, η μαθηματική ανάγνωση των έργων της τέχνης. Μαθηματικές έννοιες, σχέσεις και θεωρήματα αναγνωρίζονται σε έργα τέχνης υποδηλώνοντας τη στενή συνάφεια μαθηματικών και τέχνης, ως κοινωνικών πρακτικών. Η οπτική αυτή υιοθετεί μια μαθηματική ανάγνωση των έργων τέχνης, αναδεικνύει τις κανονικότητες στα δομικά στοιχεία ενός έργου τέχνης και τις αποδίδει σε εκούσιες ή ακούσιες εφαρμογές μαθηματικών εννοιών, σχέσεων και τεχνικών. Βάση της οπτικής αυτής μπορεί να θεωρηθεί μια υπονοούμενη παραδοχή ότι τα μαθηματικά και οι τέχνες έχουν ως κοινωνικές πρακτικές κοινούς τρόπους σκέψης και συναφείς αναφορές στα υλικά στοιχεία της πραγματικότητας.

Κύριες μαθηματικές έννοιες «ανάγνωσης» των έργων τέχνης από την οπτική αυτή είναι οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί, ιδίως η συμμετρία στους διάφορους τύπους της και η ομοιότητα, ιδίως η αποκαλούμενη στα μαθηματικά «αυτό-ομοιότητα», στην οποία ένα όλο είναι όμοιο με τα μέρη που το αποτελούν. Να θυμίσουμε ότι στα μαθηματικά όμοια είναι τα σχήματα τα οποία έχουν ανάλογες πλευρές και ίσες τις αντίστοιχες γωνίες τους.

Αυτό-ομοιότητα στο φύλλο μιας φτέρης	*Αυτό-ομοιότητα σε κρητικό κέντημα*	*Αυτό-ομοιότητα σε διακοσμητικό στοιχείο*

Η συμμετρία και η αυτό-ομοιότητα βασίζονται σε ένα απλό συνήθως σχέδιο, το οποίο αποτελεί την μοναδιαία ενότητα ενός πληρέστερου σχεδίου που δημιουργείται από την οργανωμένη επανάληψη του μοναδιαίου σχεδίου.



Με κριτήριο τις συμμετρίες ή και τις ομοιότητες των παραστάσεων ή των δομικών τους στοιχείων, σχέδια λαϊκών υφαντών, κεντημάτων και σταμπωτών, ζωγραφικές παραστάσεις, γλυπτά, αρχιτεκτονικά στοιχεία, μουσικά μέρη και ποιητικές συνθέσεις αντιμετωπίζονται *και* ως μαθηματικά έργα.

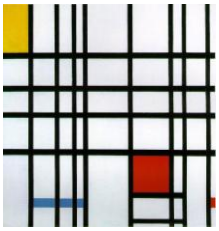
ΤΑ ΕΡΓΑ ΤΕΧΝΗΣ ΩΣ ΠΑΡΑΓΩΓΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Η ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΩΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΛΛΙΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ.

Η άμεση εφαρμογή, η αξιοποίηση ή απλά η επίδραση των μαθηματικών στην καλλιτεχνική δημιουργία είναι ένα γεγονός, το οποίο δεν μπορεί να αμφισβητηθεί, αλλά και δεν μπορεί η αξιολόγηση του να υπερβαίνει τις πραγματικές του διαστάσεις. Σε διάφορες ιστορικές εποχές, σε διάφορους τύπους καλλιτεχνικής δημιουργίας και σε διάφορους βαθμούς, μαθηματικές, και ιδίως γεωμετρικές έννοιες, σχέσεις, τεχνικές και θεωρίες επηρέασαν τη διαμόρφωση αισθητικών κριτηρίων ή και επέδρασαν στην καλλιτεχνική παραγωγή, αλλά και αντίστροφα.

Η έννοιες της αναλογίας και οι κανονικότητες που προκύπτουν από τις εφαρμογές τους επέδρασαν καταλυτικά στη διαμόρφωση αισθητικών κριτηρίων σε διάφορες ιστορικές περιόδους ανάπτυξης του πολιτισμού, από την ελληνική και ρωμαϊκή αρχαιότητα μέχρι την Αναγέννηση και τους νεώτερους χρόνους. Η επίδραση αυτή, όμως, αν και εκκινά από μια μαθηματική οπτική την υπερβαίνει και ανάγεται σε μια φιλοσοφική θεώρηση, οπότε δεν μπορεί να αντιμετωπίζεται απλουστευτικά ως μια «εφαρμογή» ή μια «αξιοποίηση» των μαθηματικών στις τέχνες.

Αντίστοιχα, οι περιπτώσεις εφαρμογής ή αξιοποίησης των μαθηματικών στην καλλιτεχνική δημιουργία είναι πολλές, αλλά αποτελούν και πρέπει να αντιμετωπίζονται ως περιπτώσεις.

Η εφαρμογή γεωμετρικών εννοιών και τεχνικών στην αρχιτεκτονική και στη διακόσμηση ναών και ανακτόρων συνέβαλε – μαζί με το χρώμα - στη δημιουργία των περίφημων αραβουργημάτων της ισλαμικής τέχνης και των γοτθικών διακοσμητικών σχεδίων, αξιοποιήθηκε στη ζωγραφική από συγκεκριμένα καλλιτεχνικά ρεύματα, σε ένα από τα οποία εντάσσονται οι χαρακτηριστικά «γεωμετρικοί» πίνακες του Μοντριάν, καθοδήγησε χαράκτες, όπως τον Έσσερ, ενέπνευσε γλύπτες ή σήμερα συμπράττει εξίσου με τον καλλιτέχνη και τις ψηφιακές τεχνολογίες στη δημιουργία έργων της λεγόμενης «οπτικής τέχνης».

		
Πλακάκια σε τοίχο, Φεζ, Μαρόκο, 1325	*Piet Mondrian, Σύνθεση με κίτρινο, μπλε και κόκκινο, 1937*	*M. C. Escher Όριο κύκλου V, 1960*

Παράλληλα, βέβαια, στην περίοδο της Αναγέννησης η μελέτη της προοπτικής στη ζωγραφική και η συγκρότηση της προβολικής γεωμετρίας στα μαθηματικά αναπτύχθηκαν σε αμοιβαία αλληλόδραση. Αλλά και αυτό δεν αποτελεί παρά ένα γεγονός μιας συγκεκριμένης ιστορικής περιόδου, στη διάρκεια της οποίας κυριάρχησε στην τέχνη μια συγκεκριμένη φιλοσοφική οπτική, η οποία υπέβαλλε και τα αισθητικά της κριτήρια.

Με λίγα λόγια, ο ισχυρισμός του Μόρις Κλάιν ότι «*τα μαθηματικά … έχουν διαμορφώσει σημαντικότατες ζωγραφικές, μουσικές, αρχιτεκτονικές και λογοτεχνικές τεχνοτροπίες….*» (Kline, 1977, σ. 15). δεν μπορεί στη γενικότητα της διατύπωσης του να μην προκαλεί ενστάσεις. Μια επίδραση των μαθηματικών σε κάθε πτυχή του ανθρώπινου πολιτισμού μπορεί να τεκμηριωθεί με ιστορικά γεγονότα και παραδειγματικές περιπτώσεις. Η επίδραση αυτή, όμως, δεν είναι ούτε αποκλειστική ούτε άμεση. Στη γενικότητα της είναι μια επίδραση, η οποία οφείλεται σε μια συγκεκριμένη

ορθολογικότητα, βασισμένη βέβαια στη μαθηματική θεώρηση της υλικής και κοινωνικής πραγματικότητας, θεμελιωτής της οποίας υπήρξε ο Καρτέσιος και παράλληλα είναι μια επίδραση, η οποία διαμεσολαβείται από άλλες επιστήμες, τεχνικές ή κοινωνικές πρακτικές.

Με την παραδοχή αυτή δεδομένη το ερώτημα του εντοπισμού των εκπαιδευτικά αξιοποιήσιμων κοινών τόπων των μαθηματικών με τις τέχνες παραμένει αναπάντητο.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΤΕΧΝΕΣ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Μια ανάγνωση του θεσμοθετημένου σήμερα Διαθεματικού Ενιαίου Πλαισίου Προγραμμάτων Σπουδών καταδεικνύει ότι οι στόχοι της διδασκαλίας των μαθηματικών και των τεχνών στο σχολείο δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, ενώ οι καθιερωμένες διδακτικές πρακτικές τους, όπως αποτυπώνονται σε σχετικές έρευνες και αναλύσεις, είναι μάλλον ασύμβατες.

Το μάθημα των μαθηματικών επιδιώκει πρωτίστως την αγωγή των μαθητών και μαθητριών στις λογικές διεργασίες και στη μεθοδική σκέψη, το μάθημα των εικαστικών (sic) να γνωρίσουν τις εικαστικές τέχνες μέσα από δραστηριότητες έρευνας και δημιουργίας έργων, το μάθημα της μουσικής στοχεύει στην ανάπτυξη και καλλιέργεια της ικανότητας των μαθητών και μαθητριών για αισθητική απόλαυση κατά την ακρόαση, εκτέλεση και δημιουργία μουσικής, ενώ το μάθημα του Θεάτρου προτάσσει της εκπαίδευσης την αγωγή των μαθητών και μαθητριών μέσα από την «ανάπτυξη ικανοτήτων και κλίσεων για να μπορέσουν να λειτουργήσουν αρμονικά τόσο ως αυτόνομες προσωπικότητες όσο και μέσα στην ομάδα».

Επομένως, δεν υπάρχει καμία δυνατότητα να διδαχθούν τα μαθηματικά ως μορφή τέχνης και βέβαια αποκλείεται η διδασκαλία των τεχνών ως εφαρμογών των μαθηματικών, ακόμη και εάν τροποποιούνταν πλήρως ενσωματώνοντας μια τέτοια κατεύθυνση τα εκπαιδευτικά προγράμματα. Παράλληλα, η μαθηματική ανάγνωση έργων τέχνης ή η παραγωγή καλλιτεχνικών έργων μέσα από εφαρμογές μαθηματικών εννοιών, σχέσεων και τεχνικών στο πλαίσιο διαθεματικών προσεγγίσεων δεν μπορεί να υπερβεί τις παγιωμένες οριοθετήσεις των μαθηματικών με τις τέχνες, άρα και των αντίστοιχων μαθημάτων, παρά μόνο εάν ενταχθεί σε ένα ευρύτερο πλαίσιο, το οποίο θα διαμορφώνεται στους κοινούς τόπους μαθηματικών και τεχνών και το οποίο θα διαμορφώνει με τη σειρά του εκπαιδευτικές πρακτικές, ικανές να εντάξουν και τα μαθηματικά και τις τέχνες σε κοινούς εκπαιδευτικούς τόπους. Άρα τους όποιους κοινούς τόπους μαθηματικών και τεχνών στην εκπαίδευση διεκδικούμε οφείλουμε κατ' αρχήν να τους (ανα)κατασκευάσουμε.

Στην οπτική αυτή, μπορεί να αποτελέσουν αφετηρία ενός προβληματισμού οι απόψεις τις οποίες διατυπώνει ο Ντιούι στο έργο του «Η τέχνη ως εμπειρία» (Dewey, 1934/2008) στο οποίο αναλύει την καλλιτεχνική εμπειρία και διατυπώνει μια αισθητική θεωρία. Αφετηρία της ανάλυσης του Ντιούϊ αποτελεί η θέση της αδιάσπαστης ενότητας του καλλιτεχνικού έργου με την εμπειρία της δημιουργίας ή της αίσθησης του. Άρα τέχνη είναι μια διαδικασία και το αποτέλεσμα της.

Διερευνώντας την «κοινή ουσία των τεχνών», όπως χαρακτηριστικά επιγράφει το 9ο κεφάλαιο του έργου αυτού, ο Ντιούι ισχυρίζεται ότι κάθε μορφή καλλιτεχνικής δημιουργίας ενέχει το χειρισμό ενός μέσου και το χειρισμό του χώρου και του χρόνου, του χωρο-χρόνου.

Το μέσο είναι ένα υλικό το οποίο «*χρησιμοποιείται για να εκφράσει ένα νόημα, διαφορετικό από το νόημα που έχει εξαιτίας της φυσικής του ύπαρξης: ένα νόημα όχι του τι είναι ως φυσικό υλικό, αλλά του τι εκφράζει*» ως στοιχείο του καλλιτεχνικού έργου (ο.π. σ. 209). Ταυτόχρονα, όμως, «*πέρα από κάποια ειδικά ενδιαφέροντα, κάθε καλλιτεχνικό δημιούργημα είναι ύλη και μόνο ύλη, έτσι ώστε η αντίθεση δεν είναι μεταξύ ύλης και μορφής, αλλά μεταξύ ύλης σχετικά άμορφης και ύλης επαρκώς μορφοποιημένης*» (ο.π. σ. 198).

Επομένως, «*κάθε τέχνη χρησιμοποιεί το ουσιώδες μέσο της για να αποδώσει πολυπλοκότητα των μερών στην ενότητα των δημιουργημάτων της*» (ο.π. σ. 210), οπότε τα αισθητικά χαρακτηριστικά ενός καλλιτεχνικού έργου προκύπτουν όχι μόνον από το μέσο που αξιοποιεί μια τέχνη, αλλά ιδίως από τη δόμηση των μερών αυτού του μέσου σε ένα συνεκτικό όλο.

Οι παραδοχές αυτές σημαίνουν, ότι κάθε καλλιτεχνικό δημιούργημα είναι προϊόν ενός ιδιότυπου συνδυασμού μορφής και οργάνωσης της μορφής αυτής σε μια δομή και κατά συνέπεια κάθε αισθητική απόλαυση προέρχεται από την εμπειρία αυτής της δομημένης μορφής ενός μέσου (Mack, 2006).

Αν δεχτούμε ότι και τα μαθηματικά αποτελούν μια δραστηριότητα της οποίας το κύριο αντικείμενο είναι η κατασκευή και η μελέτη δομών και κανονικοτήτων (Resnick, 1977, Sapiro, 1977) με την αξιοποίηση, όμως, ενός μέσου, το οποίο σε αντίθεση με την υλικότητα του μέσου των τεχνών, είναι η αφηρημένη σκέψη, τότε μπορούμε να ορίσουμε τη μορφή και την οργάνωση της μορφής, τη δομή δηλαδή, ως κοινό τόπο των μαθηματικών με τις τέχνες. Ως κοινό τόπο με την καθοριστική διάκριση, όμως, των μέσων, τα οποία αξιοποιούν οι τέχνες και είναι μέσα υλικά και των μέσων, τα οποία χειρίζονται τα μαθηματικά και είναι μέσα άϋλα, όπως έννοιες, σχέσεις και λογικά επιχειρήματα.

Η άλλη όψη μιας καλλιτεχνικής δημιουργίας είναι, σύμφωνα με την ανάλυση του Ντιούι, ο χειρισμός του χώρου και του χρόνου. Ο χώρος και ο χρόνος, αλληλένδετα, συνιστούν αισθητά δεδομένα κάθε βιωμένης εμπειρίας και επομένως συνιστούν ιδιότητες κάθε είδους υλικού, το οποίο αποτελεί αντικείμενο καλλιτεχνικής δημιουργίας ή πηγή αισθητικής απόλαυσης.

Ο χειρισμός του χώρου και του χρόνου, όμως, αποτελεί ένα θεμελιώδες στοιχείο διάκρισης των μαθηματικών από τις τέχνες. Ενώ για τις τέχνες ο χωρο-χρόνος υπόκειται στους περιορισμούς της φυσικής πραγματικότητας, για τα μαθηματικά μπορεί να έχει άπειρες διαστάσεις. Επομένως, οι ποιοτικές διακρίσεις, του καλλιτεχνικού χωρο-χρόνου μπορούν άμεσα να αντιστοιχηθούν σε μορφές της υλικής-φυσικής πραγματικότητας, όπως για παράδειγμα, ο χώρος στη ζωγραφική ή ο χρόνος στη μουσική ή ο χωρο-χρόνος στο χορό. Αντίθετα, πολλές μορφές μαθηματικών δομών υπάρχουν μόνο ως εννοιολογικές κατασκευές σε έναν απολύτως φανταστικό χώρο και χρόνο πολλών διαστάσεων και αν ένας τέτοιος χώρος δεν προϋπάρχει, μπορεί να κατασκευαστεί, χωρίς κανένα περιορισμό διαστάσεων, αρκεί να είναι καλά ορισμένος με τα κριτήρια των μαθηματικών.

Στο επίπεδο του αντικειμένου, επομένως, η μορφή και η δόμηση ενός μέσου μπορεί να αποτελέσει έναν κοινό τόπο συνάντησης των μαθηματικών με τις τέχνες, αλλά τα αισθητά χαρακτηριστικά των καλλιτεχνικών και των μαθηματικών δημιουργημάτων, τοποθετούνται σε ριζικά διαφορετικούς χωρο-χρόνους, εξαιτίας κυρίως της διαφορετικότητας των μέσων που αξιοποιούν και επομένως προσφέρουν εντελώς διαφορετικούς τύπους εμπειριών και στη δημιουργία και στην απόλαυση τους.

Στο επίπεδο της πρακτικής, τώρα, η φαντασία σε συνδυασμό με τη δημιουργικότητα αποτελεί, κατά τον Ντιούϊ, την χαρακτηριστική κινητήρια δύναμη της καλλιτεχνικής δραστηριότητας. Η τέχνη ενσωματώνει στα δημιουργήματα της μια φανταστική συνάθροιση νοημάτων και ως εκ τούτου προκαλεί μια αντίστοιχη φανταστική συνάθροιση νοημάτων (ο.π. σ. 218).

Η φαντασία «*αναφέρεται σε μια ποιότητα η οποία κινητοποιεί και διαποτίζει όλες τις διαδικασίες δημιουργίας και παρατήρησης. Είναι ένας 'τρόπος' να βλέπεις και να αισθάνεσαι τα πράγματα καθώς συνθέτουν ένα ολοκληρωμένο όλο*» (ο.π. σ. 278), ενώ ως νοητική λειτουργία ενσωματώνει ιδέες σε συγκεκριμένες εικόνες.

Η δημιουργική φαντασία αποτελεί την ανώτερη μορφή φαντασίας, η οποία αναδεικνύει και εκφράζει τα κρυμμένα νοήματα των αντικειμένων της, μέσα από ένα είδος ανακατασκευής τους. Αποδίδει ένα νόημα στις σχέσεις των μερών με την ανάπτυξη του όλου και αναδεικνύει τις λεπτομέρειες στο επίπεδο του καθολικού. Υπό την επιρροή των ιδεών του Καντ, ο Ντιουϊ θεωρεί

ότι βασική λειτουργία της δημιουργικής φαντασίας είναι η κατασκευή νοημάτων και η ενσωμάτωση τους σε αισθητές μορφές, εκφράζοντας την ελευθερία δράσης της ανθρώπινης υποκειμενικότητας.

Όλα όσα αποδίδει ο Ντιουΐ στη δημιουργική φαντασία και στο ρόλο της στην καλλιτεχνική δραστηριότητα μπορούν επίσης να αποδοθούν και στην μαθηματική δραστηριότητα, ιδίως την ερευνητική και σε μικρότερο βαθμό την εκπαιδευτική. Η επινόηση των μη-ευκλείδειων γεωμετριών αποτελεί το πιο χαρακτηριστικό, ίσως, παράδειγμα δημιουργικής φαντασίας στην ανάπτυξη των μαθηματικών.

Ενώ, όμως, η δημιουργική φαντασία της καλλιτεχνικής δραστηριότητας είναι χωρίς όρους και χωρίς όρια, η φαντασία της μαθηματικής δραστηριότητας υπόκειται στους περιορισμούς που επιβάλλουν αφενός οι κανόνες της παραγωγικής λογικής και αφετέρου τα ίδια τα μαθηματικά ως αποκρυσταλλωμένη και οργανωμένη σε αξιωματικά συστήματα γνώση

Με τα δεδομένα αυτά, η δημιουργική φαντασία θα μπορούσε να θεωρηθεί ένας κοινός τόπος των μαθηματικών και των καλλιτεχνικών δραστηριοτήτων στην εκπαίδευση, αν και η υπόθεση αυτή έχει συναντήσει σοβαρές ενστάσεις, αφού η όποια δημιουργικότητα των παιδιών στα σχολικά μαθηματικά οφείλει να αναπτυχθεί μέσα σε ένα πλαίσιο (αριθμητικής, γεωμετρίας, άλγεβρας, κλπ), το οποίο επιβάλλει κανόνες και περιορισμούς δεσμευτικούς και της φαντασίας και της δημιουργικότητας (Huckstep & Rowland, 2000

Τελικά, φαίνεται ότι οι διαφορές των περιεχομένων, αλλά και των καθιερωμένων πρακτικών, της μαθηματικής και της καλλιτεχνικής δραστηριότητας καθιστούν προβληματικό τον εντοπισμό κοινών τόπων και αμφιλεγόμενες τις δυνατότητες παιδαγωγικής αξιοποίησης των διαπιστωμένων σχέσεων μαθηματικών και τεχνών.

Μια ανταλλαγή, όμως, περιεχομένων και διδακτικών πρακτικών θα είχε σημαντικές παιδαγωγικές και εντέλει κοινωνικές θετικές επιπτώσεις, τουλάχιστον από την οπτική της μαθηματικής εκπαίδευσης. Υιοθετώντας στη διδακτική πρακτική των μαθηματικών παιδαγωγικές αρχές της διδακτικής των τεχνών (της ζωγραφικής, του θεάτρου, της λογοτεχνίας, της μουσικής, του χορού) και αντίστοιχα εισάγοντας και αναδεικνύοντας στα καλλιτεχνικά μαθήματα προσιδιάζοντα μαθηματικά περιεχόμενα (αριθμητικές σχέσεις, γεωμετρικές κατασκευές, αλγεβρικές κανονικότητες) θα μπορούσαμε να εισάγουμε στη μαθηματική εκπαίδευση, έμμεσα αλλά μάλλον αποτελεσματικά, σημαντικές «επιστημολογικές» αλήθειες, οι οποίες έχουν απαλειφθεί από τις κατεστημένα εκπαιδευτικά περιεχόμενα και τις καθιερωμένες διδακτικές πρακτικές.

Παράδειγμα 1ο : Η μορφή και το περιεχόμενο είναι αλληλένδετα και στα μαθηματικά, όπως και στις τέχνες, με κάποιες εξαιρέσεις δεδομένες. Η μορφή μιας μαθηματικής διατύπωσης καθορίζεται από το περιεχόμενο της και αντίστροφα. Ο αριθμός 6 μπορεί να εκφραστεί σε πολλές και ποικίλες μορφές: //////, έξι, 6, VI, 2x3, 7-1, 777-771 κ.ο.κ. Το αποτέλεσμα, όμως, της αριθμητικής πράξης της πρόσθεσης διατυπωμένης ως 3+3 επιβάλλεται από τους κανόνες της πρόσθεσης να εκφραστεί ως = 6. Άρα και στα μαθηματικά ενδιαφέρει το πώς γράφεται μια μαθηματική αλήθεια, όπως ενδιαφέρει το πώς γράφεται μια ή η ιστορία, το πως μιλάμε ή αφηγούμαστε κλπ.

Παράδειγμα 2ο : Τα όρια της γνώσης και οι δυνατότητες γλωσσικής έκφρασης αυτής της γνώσης δεν ταυτίζονται. Ή με άλλα λόγια δεν ξέρουμε μόνο ότι μπορούμε να διατυπώσουμε γλωσσικά και ότι μπορούμε να διατυπώσουμε γλωσσικά δεν εκφράζει όλα όσα ξέρουμε. Άρα είναι μια όψη της γνώσης το «ξέρω κάτι και μπορώ να το εκφράσω» και μια άλλη όψη «το ξέρω πώς να κάνω κάτι αλλά δεν μπορώ να το εκφράσω». Το ζήτημα αυτό ως διχοτομία «άρρητης» και «ρητής» γνώσης (tacit - explicit knowledge) έχει αναδειχθεί και αναλυθεί εκτενώς και από φιλοσοφική (Polanyi, 1966) και από εκπαιδευτική οπτική, στο πλαίσιο ενός ευρύτερου προβληματισμού για τις λεγόμενες «κοινότητες πρακτικής».

Παράδειγμα 3ο : Η σκέψη διαμορφώνεται από τα τεχνικά και τα συμβολικά μέσα, τα οποία υιοθετεί και τα οποία διαμεσολαβούν τις δραστηριότητες με τα αντικείμενα των δραστηριοτήτων αυτών. Οι αναλύσεις του Βυγκότσι και των επιγόνων του στα ζητήματα αυτά είναι γνωστές. Άλλες νοητικές διεργασίες υποκινούν οι αριθμητικές πράξεις με χαρτί και μολύβι και άλλες με τη χρήση υπολογιστικών μηχανών.

Τέλος, μια ανταλλαγή περιεχομένων και διδακτικών πρακτικών μεταξύ μαθηματικών και τεχνών θα συνέβαλε αποφασιστικά στην αναγνώριση της φαντασίας ως μορφής σκέψης και στην απόδοση ενός ισότιμου ρόλου στη φαντασία με το ρόλο τον οποίο η εκπαίδευση αποδίδει στη λογικο-μαθηματική σκέψη και στην ανάπτυξη της. Η φαντασία, ταυτισμένη με την απροσδιοριστία, την υποκειμενικότητα, την ιδιοσυγκρασία, το συναίσθημα, σε αντίθεση με τη σαφήνεια, την αντικειμενικότητα, την εγκυρότητα, τη μεθοδικότητα της λογικής σκέψης είναι απολύτως υποβαθμισμένη σε μια εκπαίδευση προσανατολισμένη μονοδιάστατα στην απόκτηση γνώσης και στην ανάπτυξη νοητικών δεξιοτήτων. Ακόμα και η διδασκαλία των τεχνών στο σχολείο ουσιαστικά επικεντρώνεται και επιδιώκει πρωτίστως την απόκτηση γνώσεων για τις τέχνες και τις τεχνικές τους.

Αν, όμως, η μάθηση είναι μια γενεσιουργός διαδικασία κατασκευής συνεκτικών νοημάτων, τα οποία συγκροτούνται από κάθε άνθρωπο προσωπικά μέσα από την ανακατασκευή των εμπειριών του, ιδίως εκείνων που προέρχονται από την αντιμετώπιση προβληματικών καταστάσεων, τότε ο ρόλος της φαντασίας στην ανακατασκευή αυτών των εμπειριών είναι καθοριστικός. Αφού η φαντασία επιτρέπει την υπέρβαση της βιωμένης εμπειρίας και καθιστά δυνατή την νοητική κατασκευή εναλλακτικών εκδοχών της, στις οποίες μια κατακερματισμένη και ελλιπής κατάσταση ανασυγκροτείται σε ένα συνεκτικό όλο (Dewey, 1916/2004).

Από την οπτική αυτή, η φαντασία είναι μια μορφή αναστοχαστικής σκέψης, η οποία επιτρέπει τη κατασκευή παραδοχών, υποθέσεων, εικασιών, προτάσεων και απαντήσεων, άρα παίρνοντας υπόψη τα παρόντα δεδομένα συνάγει τα απόντα ενδεχόμενα. Αλλά αυτός είναι ο πυρήνας κάθε συλλογισμού, όπως υπογραμμίζει ο Ντιούϊ (Dewey,1922/1991).

Συμπερασματικά, η φαντασία και η ανάπτυξη της μπορεί να αποτελέσει το θεμέλιο στην οικοδόμηση ενός κοινού τόπου των μαθηματικών με τις τέχνες στην εκπαιδευτική πρακτική και αυτό προϋποθέτει την απόδοση ενός ισότιμου ρόλου στη φαντασία με εκείνο της λογικο-παραγωγικής σκέψης τόσο στα μαθηματικά όσο και στα καλλιτεχνικά μαθήματα του σχολείου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Brinkmann, A. (2009), Mathematical Beauty and its Characteristics - A Study on the Students' Points of View, *The Montana Mathematics Enthusiast*, 6 (3), 365- 380.

Davis P.J. & Hersch R. (1981), Η μαθηματική εμπειρία, Αθήνα: Τροχαλία.

Devlin, Keith (2000), Do Mathematicians Have Different Brains?, *The Math Gene: How Mathematical Thinking Evolved And Why Numbers Are Like Gossip*. New York, NY: Basic Books, 111-144.

Dewey, J. (1922/1991), An Analysis of Reflective Thought. Στο J. A. Boydston (ed.), John Dewey: The Later Works, Vol. 13, Carbondale: Southern Illinois University Press.

Dewey, J. (1934/2005), *Art as experience*, New York: The Berkley Pulishing Group (πρώτη έκδοση).

Dewey, J. (1916/ 2004), Democracy and Education, New York: Dover Publications.

Dreyfus, T.; Eisenberg, T. (1986), On the Aesthetics of Mathematical Thought. *For the Learning of Mathematics - An International Journal of Mathematics Education*, 6 (1), 2–10.

Hardy, G.H. (1991), Η απολογία ενός μαθηματικού, μτφ. Δ. Καραγαννάκης & Μ. Λάμπρου, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Hofstadter, D. R. (1979), *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid.* New York, NY: Basic Books.

Huckstep P. & Rowland, T. (2000), Creative Mathematics: Real or hetoric?, *Educational Studies in Mathematics,* 42 (1), 81-100.

Kline, M. (1977), Mathematics in Western Culture, London: Penguin Books.

Mack A. (2006), A Deweyan Perspective on Aesthetic in Mathematics Education, Philosophy of Mathematics Education Journal (online), 19, http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome19/ [15-3-2011]

Polanyi, M. (1966), The Tacit Dimension, London: Routledge.

Poincaré, H. (1890), Notice sur Halphen, *Journal de l'École Polytechnique*, 60ème cahier, Paris

Rota, Gian-Carlo (1977), The phenomenology of mathematical beauty, *Synthese* 111 (2): 171–182

Resnick, M. (1997), Mathematics as a science of patterns, Oxford: Clarendon Press.

Russell, B. (1919), The Study of Mathematics, *Mysticism and Logic: And Other Essays*. Longman.

Shapiro, S. (1997), *Philosophy of mathematics: Structure and ontology*, Oxford: Oxford University Press.

Whitcombe, A. (1988), Creativity, Imagination, Beauty. *Mathematics in School,* 17 (2), 13–15.

dchassapis@ecd.uoa.gr

ΚΑΛΛΙΤΕΧΝΕΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Λέλα Λυμπεροπούλου

Σχολική Σύμβουλος Μαθηματικών Δυτικής Αττικής

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι Μαθηματικοί συνηθίζουν να προβάλλουν τα μαθηματικά επάνω στα έργα τέχνης «ανακαλύπτοντας» τα μαθηματικά του καλλιτέχνη.

Οι ίδιοι οι καλλιτέχνες μιλώντας για τα μαθηματικά ή όταν χρησιμοποιούν τα μαθηματικά, μας αποκαλύπτουν μια άλλη σχέση με τα μαθηματικά αντικείμενα. Οι μοντέρνοι εικαστικοί καλλιτέχνες, όπως ο V. Kandinsky, ο P. Klee και ο P. Mondrian, αναφέρονται στο σημείο τη γραμμή ή τις κάθετες ευθείες μ' ένα πάθος που τους δίνει μιαν άλλη υπόσταση, αντιμετωπίζοντάς τα ως ζωντανά όντα. Ο ιταλός καλλιτέχνης M. Mertz δημιουργεί έργα ή εγκαταστάσεις όπου «ζωγραφίζει» με νέον την ακολουθία των αριθμών Fibonacci.

Ο γάλλος πλαστικός δημιουργός F. Morellet, θέλοντας να χαράξει μια τεθλασμένη γραμμή με αέναη (άπειρη) διαδρομή, χρησιμοποιεί την ακολουθία των δεκαδικών ψηφίων του π, με μια αντιστοίχιση σε μοίρες. Το ερώτημα που τίθεται είναι η δημιουργία διδακτικών προσεγγίσεων που θα ελάμβαναν υπ' όψιν τους αυτή την ενεργό σχέση των καλλιτεχνών με τα μαθηματικά.

Ποια είναι η σχέση των μαθηματικών με τις πλαστικές τέχνες;

Αυτό το ερώτημα απασχολεί, κατά καιρούς, τους μελετητές υπό την οπτική διεπιστημονικών ερευνών. Από την άποψη της διδακτικής των μαθηματικών, η κατανόηση αυτής της σχέσης μπορεί να μας βοηθήσει να συναγάγουμε κάποια συμπεράσματα που θα μας οδηγούσαν, ίσως, σε πρωτότυπες διδακτικές παρεμβάσεις.

Το ερώτημα της σχέσης των μαθηματικών με τις πλαστικές τέχνες τίθεται, βέβαια, σε περισσότερα επίπεδα ή έχει περισσότερες εκφάνσεις. Αν προσπαθήσουμε να το θέσουμε διαφορετικά:

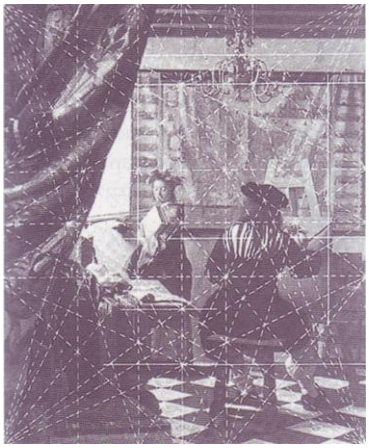
-Ποια είναι η σχέση των Καλλιτεχνών με τα μαθηματικά και, αντίστροφα, των Μαθηματικών με τις τέχνες και ιδιαίτερα τις πλαστικές;

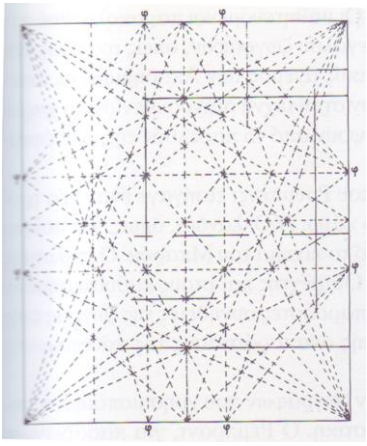
-Που αρχίζει ο ένας χώρος και πού ο άλλος;

-Υπάρχει συσχέτιση μεταξύ τους και, μάλιστα, πάντοτε ή η κατάσταση είναι πιο σύνθετη και περίπλοκη;

I

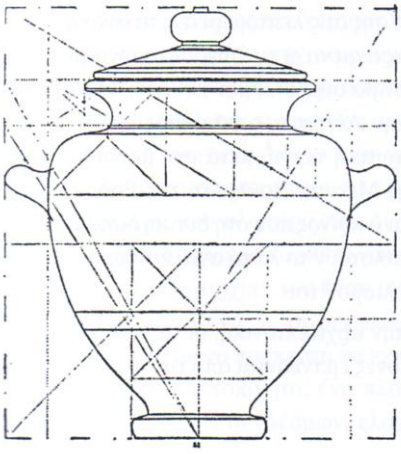
Από την άποψη των Μαθηματικών -ως υποκείμενα- είναι πάμπολλες οι μελέτες, έρευνες και προσπάθειες για να «αποκαλυφθούν» τα μαθηματικά που βρίσκονται πίσω ή και μέσα σ' ένα έργο τέχνης. Αυτή η προσέγγιση ξεκινά από την παραδοχή ότι οι ζωγράφοι ή εικαστικοί καλλιτέχνες γενικότερα «έχουν τη γεωμετρία τους», δομούν, δηλαδή, το έργο τους σύμφωνα με κάποιες μαθηματικές αρχές. Η προσπάθεια αυτή, να «αποκαλυφθούν», δηλαδή, τα μαθηματικά του έργου τέχνης, είναι κατανοητή στο βαθμό που το έργο τέχνης αυτονομείται από το δημιουργό του και μπορεί να ζει μια δική του, ανεξάρτητη, ύπαρξη που αποκτά νόημα, κάθε φορά, μέσα από τα μάτια του κοινού. Όταν, μάλιστα, το κοινό αυτό είναι οι Μαθηματικοί, τότε αυτή η αυτονόμηση μπορεί να καταλήξει ως και τον ετεροκαθορισμό από την οπτική του Μαθηματικού που βρίσκει πρόσφορο έδαφος για να αναπτυχθεί. Αν αναλογισθούμε το βάρος που δίνει η Αναγέννηση στην τεχνική, ή το γεγονός ότι η μοντέρνα τέχνη «φλερτάρει» με τον φορμαλισμό κατανοούμε καλύτερα την ύπαρξη αυτού του πρόσφορου εδάφους. Βλέπουμε, για παράδειγμα, παρακάτω το έργο του Βερμέερ *Το εργαστήριο του ζωγράφου* όπου, επάνω του, ένα πλέγμα ορθογωνίων και διαγωνίων γραμμών μας «αποκαλύπτει» τον χρυσό αριθμό φ.

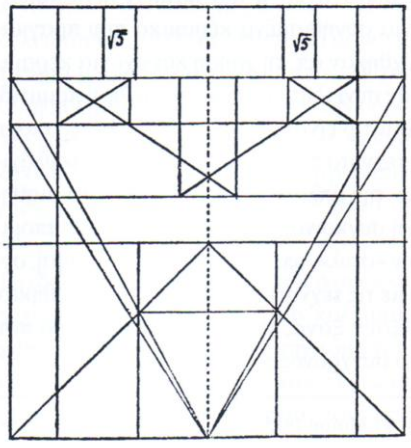




Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε μια αττική ερυθρόμορφο στάμνο και την αρμονική της χάραξη.

Αττική ερυθρόμορφος στάμνος, 515-510 π.Χ.





Κατά κάποιο τρόπο, εμείς οι μαθηματικοί *προβάλλουμε* τις γνώσεις μας και ανακαλύπτουμε μαθηματικές δομές στα έργα τέχνης. Το παράδειγμα του Παρθενώνα ή των αρχαίων αγγείων είναι χαρακτηριστικό. Υπάρχει, μάλιστα, σοβαρή αμφισβήτηση από έγκριτους μελετητές, όπως ο Μανώλης Κορρές, όσον αφορά στη χρήση της αρμονικής χάραξης στην αρχιτεκτονική κάτοψη του Παρθενώνα.

Η καθαρά μαθηματική και, στην προκειμένη περίπτωση, γεωμετρική ανάλυση του έργου τέχνης, θέτει ένα μεγάλο ερώτημα ως προς τις διδακτικές της εφαρμογές:

-Μήπως διατρέχουμε τον κίνδυνο, προβάλλοντας το στενά μαθηματικό «μάθημα της ημέρας» σ' ένα έργο τέχνης, που ξεπερνά κατά πολύ τα όρια της μαθηματικής εφαρμογής, να καλλιεργήσουμε σχηματικές ή λανθασμένες αντιλήψεις και συμπεριφορές στους μαθητές όχι μόνο σε σχέση με το έργο τέχνης αλλά και με τα ίδια τα μαθηματικά;

Πιο συγκεκριμένα, αν μετρήσουμε, προφανώς σε σμίκρυνση, την κάτοψη του Παρθενώνα, και «κλέβοντας» λίγο αν χρειασθεί, θα «ανακαλύψουμε» τις αναλογίες της χρυσής τομής. Όμως θα αγνοούμε το γεγονός ότι αυτό το μικρό «κλέψιμο» γίνεται, σε πραγματικές διαστάσεις, πολύ μεγάλο… Αυτό καθαυτό το μέτρημα, και, πολύ περισσότερο, το «κλέψιμο» σ' αυτό, είναι από διδακτική άποψη ένα ολίσθημα του οποίου τα αρνητικά αποτελέσματα είναι προφανή. Επίσης παραμονεύει η αντίληψη ότι ένα έργο τέχνης μπορεί να συνίσταται στην αυστηρή εφαρμογή κάποιων μαθηματικών κανόνων ή μοντέλων.

II

Είναι, λοιπόν, πολύ ενδιαφέρον να εξετάσουμε το πώς οι ίδιοι οι Καλλιτέχνες «βλέπουν» τα μαθηματικά αντικείμενα, ή ποια είναι η σχέση τους με τα μαθηματικά:

«Με το να αντιμετωπίζω με ζέση τα αινίγματα που μας περιβάλλουν και με το να εξετάζω και να αναλύω τις παρατηρήσεις τις οποίες είχα κάνει, κατέληξα στη σφαίρα της αρμοδιότητας των μαθηματικών. Αν και είμαι παντελώς αμέτοχος οποιασδήποτε εκπαίδευσης ή γνώσης των θετικών επιστημών, συχνά ανακαλύπτω ότι έχω περισσότερα κοινά σημεία με τους μαθηματικούς απ' ότι με τους συναδέλφους μου καλλιτέχνες.»

Αυτά είναι τα λόγια του σημαντικού καλλιτέχνη M.C.Escher, που έρχεται να *συναντήσει* τα μαθηματικά και όχι να εφαρμόσει προηγούμενη γνώση τους, καθώς, όπως λέει ο ίδιος είναι παντελώς αμέτοχος αυτής της γνώσης.

«Το γεωμετρικό σημείο είναι ένα αόρατο ον. Πρέπει, λοιπόν, να ορισθεί ως άυλο. Από υλική άποψη το σημείο είναι ίσο με το Μηδέν. Όμως αυτό το Μηδέν κρύβει διάφορες ανθρώπινες ιδιότητες».

Ο μεγάλος μοντέρνος ζωγράφος V. Kandinsky στο έργο του *Σημείο, Γραμμή, Επίπεδο*, τονίζει, μιλώντας πάντοτε για το σημείο:

«Το σημείο είναι το αποτέλεσμα της πρώτης συνάντησης του εργαλείου με την υλική επιφάνεια, το αρχέγονο επίπεδο… Μ' αυτό το πρώτο σοκ το αρχέγονο επίπεδο γονιμοποιείται».

Ο καλλιτέχνης, χωρίς να παρασύρεται σε λάθος, από μαθηματική άποψη, ορισμούς, μιλά γι' αυτά τα «ψυχρά» μαθηματικά όντα μ' ένα πάθος, που τους δίνει μια άλλη υπόσταση, αντιμετωπίζοντας τα ως ζωντανά όντα με αυτόνομη ζωή –υπάρχει, μάλιστα, μια ερωτική διάσταση στη λέξη «γονιμοποιεί»- που υπακούουν, όμως, σε κάποιους νόμους.

Ο Paul Klee, ένας άλλος μεγάλος καλλιτέχνης του μοντερνισμού, μας μιλάει, κι αυτός, με το δικό του τρόπο για το σημείο:

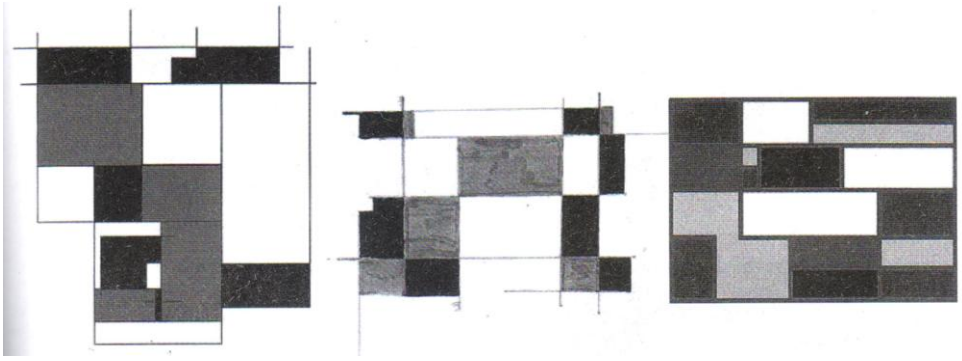
«Το κάτι τι που είναι τίποτε ή το τίποτε που είναι κάτι, είναι η γνώση, που δεν ανάγεται στην έννοια της μη αυθεντικότητας… Το σημείο δεν είναι αδιάστατο, αλλά είναι ένα άπειρα μικρό στοιχείο της επιφάνειας, που σαν στοιχείο δράσης, επιτελεί κίνηση μηδέν, δηλαδή μένει ακίνητο. Ένα τράβηγμα του μολυβιού και να η γραμμή…».

Αυτοί οι «ορισμοί» παραπέμπουν, βέβαια, στον, πραγματικά, δύσκολο ορισμό του σημείου, που, στην καθημερινή διδακτική πρακτική, δημιουργεί πάμπολλα προβλήματα, αρκεί να αναφερθούμε στο βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου όπου το σημείο συμβολίζεται μ' έναν κυκλικό δίσκο, όχι και τόσο μικρό, μια επιφάνεια που, κάποιες φορές, δημιουργεί στους μαθητές την απορία του πόσο μεγάλο ή πόσο μικρό είναι ή ποιο είναι το εμβαδόν του! Το σημείο των καλλιτεχνών είναι μεν άυλο, έχει, όμως ανθρώπινες ιδιότητες. Είναι το άπειρα μικρό στοιχείο της επιφάνειας και όχι ο κυκλικός δίσκος με το ακαθόριστο εμβαδόν του.

Σύμφωνα με έναν άλλο ζωγράφο, τον Piet Mondrian και το κίνημα De Stijl η «ατομική γεωμετρία», τα μαθηματικά του ζωγράφου και μόνον αυτά χρησιμοποιούνται στην οργάνωση της σύνθεσης ενός πίνακα. Η ιδέα απορρέει από την γραμμή που τη συνιστά: Η πιο τέλεια από τις σχέσεις είναι η ορθή γωνία. Αυτή εκφράζει, κατά τον Mondrian πάντα, τη σχέση δύο αντίθετων τύπων γεωμετρικών ευθειών. Η δυαδικότητα, το ένα και το άλλο είναι απαραίτητα στην ορθογώνια σχέση.

Θα μπορούσαμε, λοιπόν, να προσεγγίσουμε τα μαθηματικά αντικείμενα μ' ένα άλλο μάτι, αυτό του δημιουργού, ελπίζοντας ότι αυτή η ματιά θα μας βοηθήσει, εμάς και τους μαθητές μας, να νιώσουμε, να κατανοήσουμε βαθύτερα τα μαθηματικά αντικείμενα;

Μια πρώτη διδακτική παρέμβαση, με αφορμή, μάλιστα, τον Piet Mondrian και τη σχολή του επιχειρήσαμε το 2006 με μαθητές του 2ου Πειραματικού Γυμνασίου Αθηνών. Τα αποτελέσματά της παρουσιάσθηκαν στο 24ο Συνέδριο της Ε. Μ. Ε. Στο σχήμα που ακολουθεί βλέπουμε έργα των μαθητών με θέμα το χρυσό ορθογώνιο.



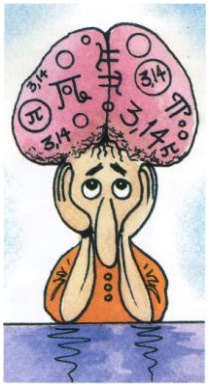
Ένας άλλος σημαντικός καλλιτέχνης, που ανήκει στο κίνημα της Arte povera (φτωχή τέχνη), ο Mario Mertz, χρησιμοποιεί τα μαθηματικά, συγκεκριμένα την ακολουθία των αριθμών Fibonacci, που την «γράφει» με νέον πάνω σε igloo, ή την αναπτύσσει μέσα στο μουσείο, σαν ένα άπειρο φωτεινό μονοπάτι. Παρακάτω βλέπουμε να «γράφει με νέον την ακολουθία Fibonacci επάνω σ' έναν σύγχρονο κίονα, μία βιομηχανική καπνοδόχο.

Κατά τον M. Mertz, η ακολουθία Fibonacci είναι η μεταφορά μιας φυσικής διαδικασίας αναπαραγωγής και ανάπτυξης της φυσικής ζωής, ένας τρόπος να εξερευνήσει τη ροή της ενέργειας σύμφυτης στην ύλη, και τη μυστηριώδη διασύνδεση ανάμεσα στο οργανικό και το ανόργανο.

III

ΟΙ ΔΙΑΔΡΟΜΕΣ ΤΟΥ Π

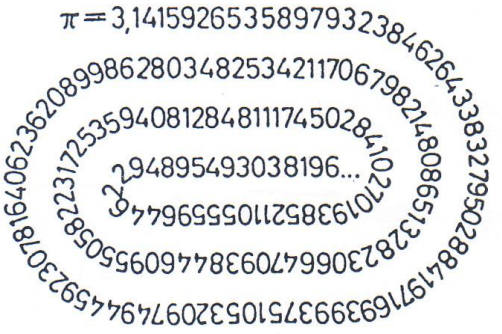
Ας παρατηρήσουμε τις αναπαραστάσεις του π στα σχολικά βιβλία: Παρακάτω βλέπουμε τις εικόνες του τωρινού σχολικού βιβλίου για το π.



π = 3,14159 26535 89793 23846 2643383279 50288 41971 ...

Στο προηγούμενο σχολικό βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου η σπείρα που αναπτύσσεται προς το εσωτερικό της μετά τα πρώτα 200 δεκαδικά ψηφία φαίνεται να συνεχίζει με τρεις τελείες…

Τα πρώτα 200 ψηφία του π είναι



Ας παρατηρήσουμε ότι η παλαιά αναπαράσταση είναι, σίγουρα, λιγότερο φτωχή από την τωρινή.

Ένας σύγχρονός μας γάλλος καλλιτέχνης, ο Francois Morellet, προσπαθώντας να χαράξει μια τεθλασμένη γραμμή με απρόβλεπτη και αέναη

(άπειρη) διαδρομή, τουλάχιστον φαινομενικά, αρχίζει από το 1998, ύστερα από πολλές προσπάθειες, να χρησιμοποιεί τα δεκαδικά ψηφία του π …

Γιατί το π; Ο F. Morellet απαντά:

«Ναι, βέβαια, οποιαδήποτε ακολουθία ψηφίων, «στην τύχη», θα μπορούσε να δώσει τύπους διαδρομών αρκετά παρόμοιων μ' αυτές που δημιουργούνται με τα ψηφία του π. Για παράδειγμα οι αριθμοί ενός τηλεφωνικού καταλόγου που, συχνά, χρησιμοποίησα…Αλλά, αφ' ενός μ' αρέσει οι σειρές των αριθμών «στην τύχη» που χρησιμοποιώ να είναι ελέγξιμες, ώστε να μην κατηγορηθώ ότι «έκλεψα» για να κάνω «ωραίο», αφ' ετέρου διασκέδασα τα τελευταία χρόνια διαβάζοντας κάποια έργα για το π, τα δεκαδικά του, και παθιάστηκα, μάλιστα, με τη σπουδαιότητα που οι μαθηματικοί φιλόσοφοι δίνουν σ' αυτή τη σειρά ψηφίων».

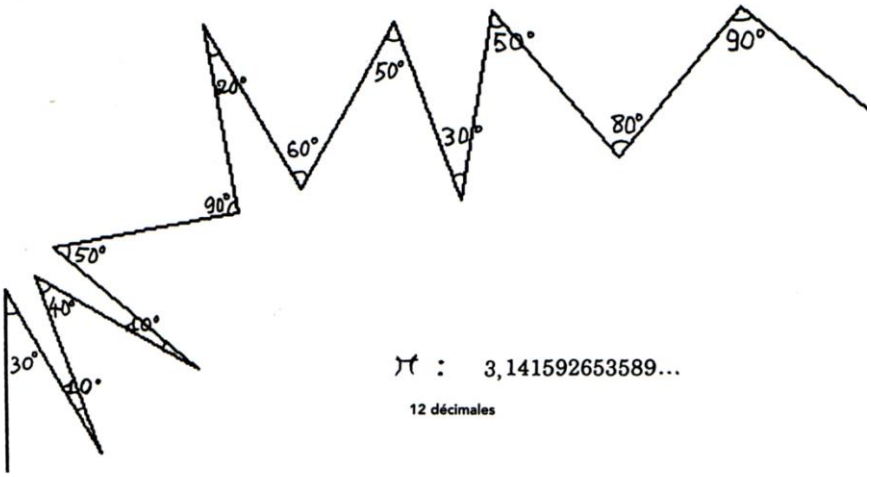
Σε μια σειρά έργων του με τίτλο *Κατασκευές με το π*, δοκιμάζει διαφορετικές γωνίες για να απεικονίσει τα ψηφία του π. Έτσι έχουμε μια διαδρομή, όπως την ονομάζει ο ίδιος, με την παρακάτω αντιστοιχία ψηφίων σε μοίρες:

$1 \rightarrow 10^{o}$, $2 \rightarrow 20^{o}$, $3 \rightarrow 30^{o}$, $4 \rightarrow 40^{o}$, $5 \rightarrow 50^{o}$, $6 \rightarrow 60^{o}$, $7 \rightarrow 70^{o}$, $8 \rightarrow 80^{o}$,

$9 \rightarrow 90^{o}$, $0 \rightarrow 100^{o}$

Αυτή η αντιστοιχία μας δίνει τις παρακάτω εικόνες

1 = 10°

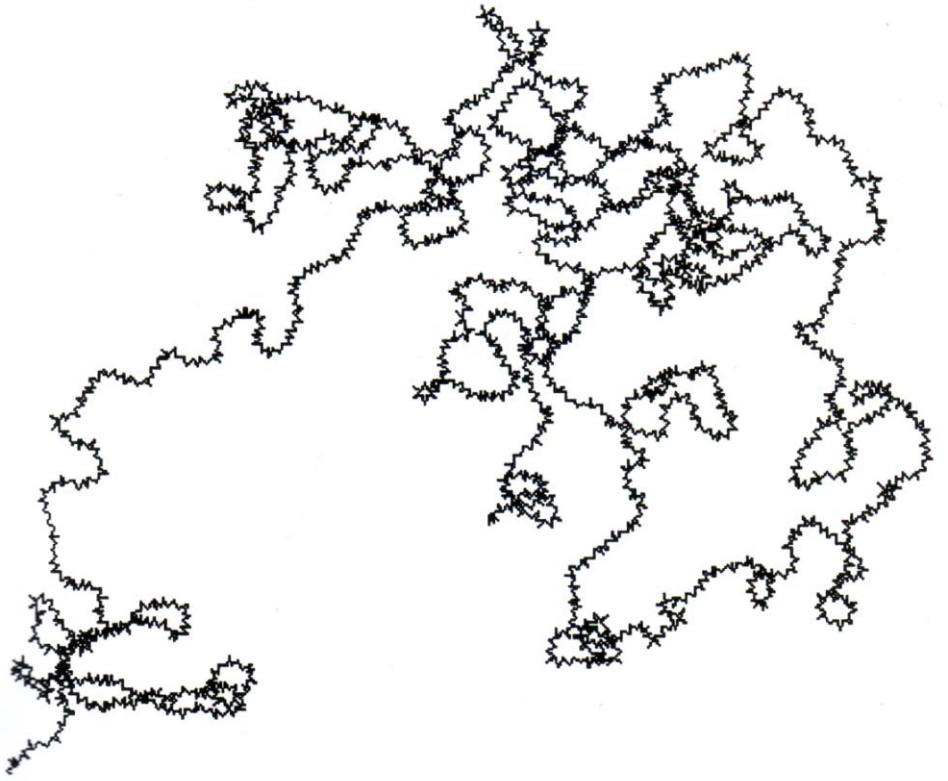


π : 3,141592653589...

12 décimales

50 décimales

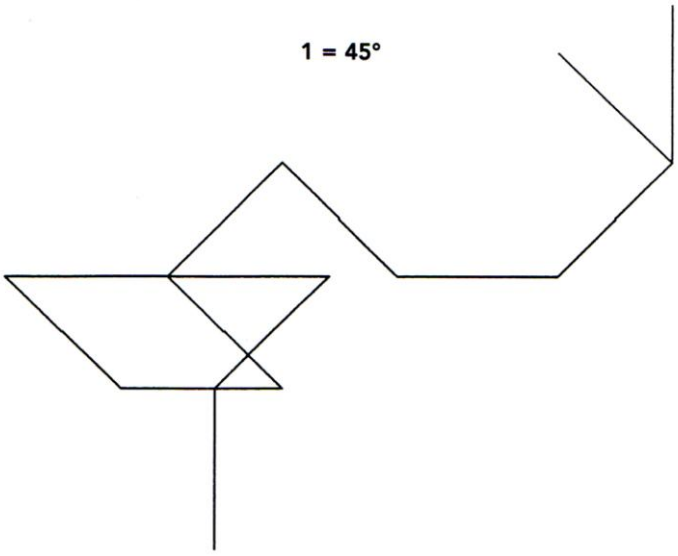
1 = 10°



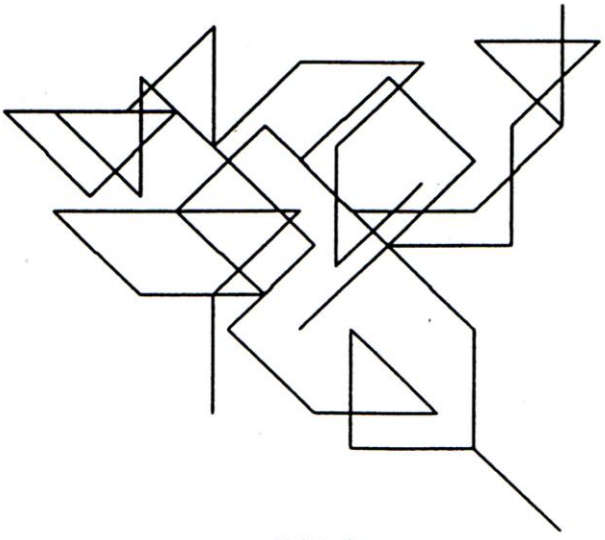
3 000 décimales

Με παρόμοιο τρόπο έχουμε την αντιστοίχιση:

$1 \rightarrow 45^o$, ή $1 \rightarrow 90^o$ ...

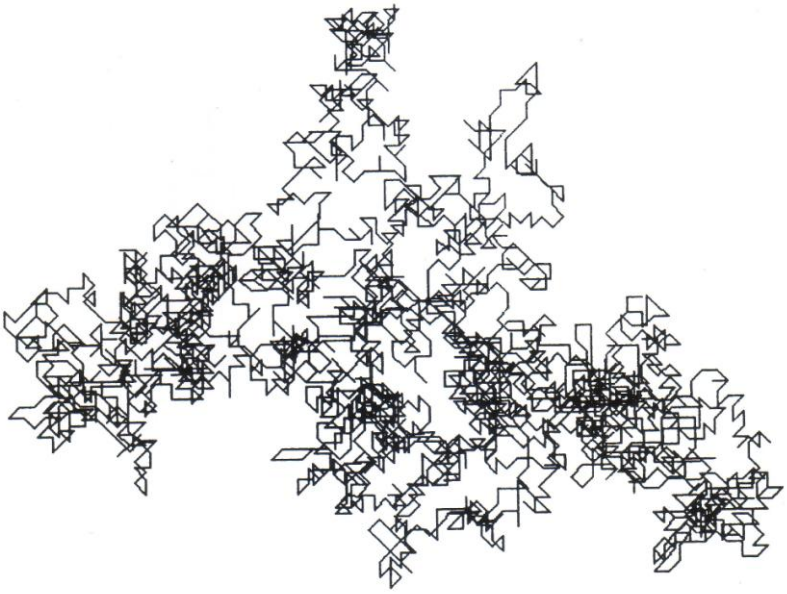


12 décimales



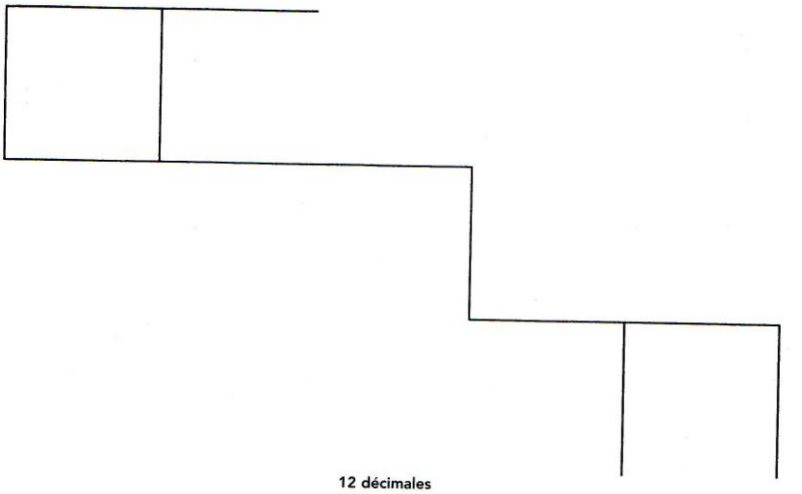
50 décimales

1 = 45°

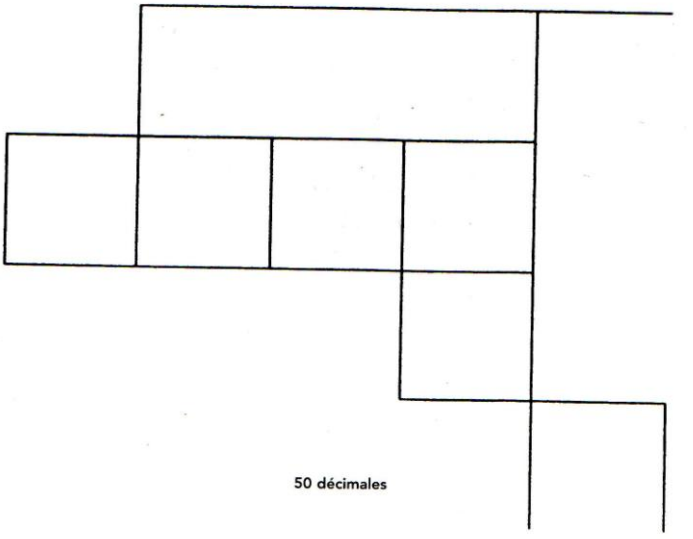


3 000 décimales

1 = 90°

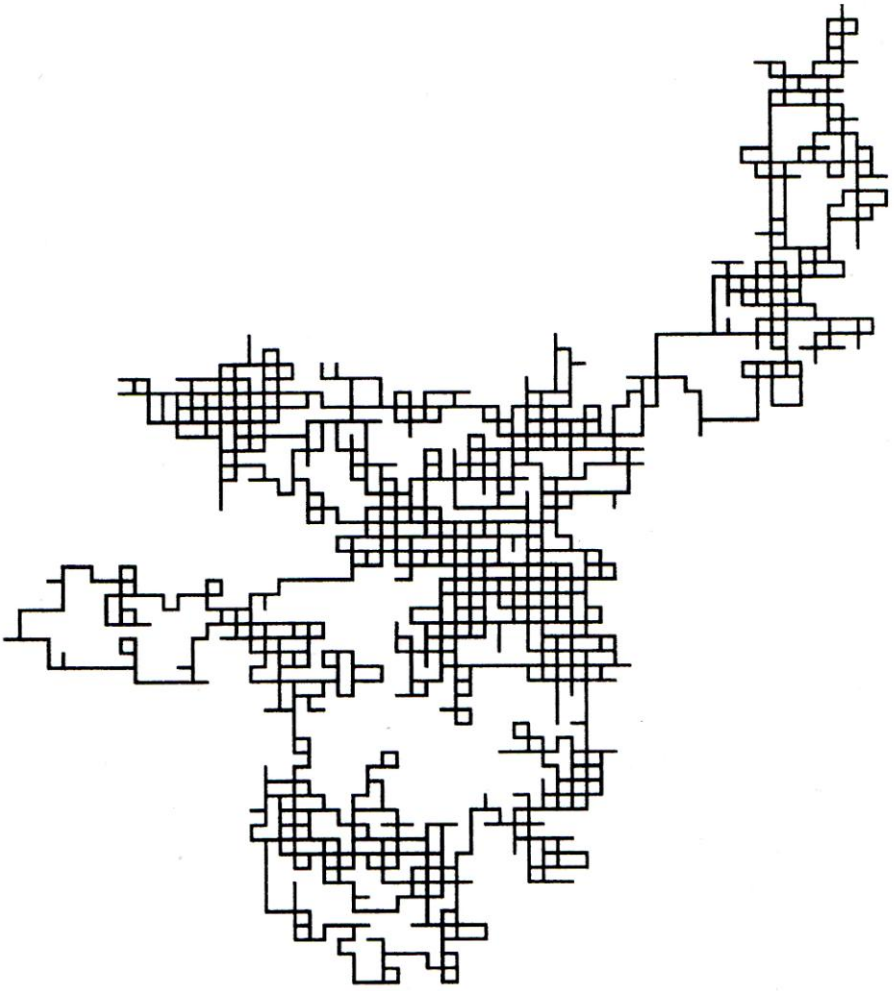


12 décimales



50 décimales

1 = 90°



3 000 décimales

Θα ήταν μάλλον απίθανο ένας μαθηματικός βλέποντας τον παραπάνω πίνακα, χωρίς να έχει οποιαδήποτε πληροφορία για τον τρόπο κατασκευής του, να αναγνωρίσει την ανάπτυξη των δεκαδικών ψηφίων του π. Ο F. Morellet «ζωγραφίζοντας» το π με τον δικό του τρόπο, αναπαριστά μια απρόβλεπτη και αέναη διαδρομή και παράγει ένα έργο τέχνης το οποίο είναι «ωραίο». Η έννοια του άρρητου αριθμού, μια πολύ δύσκολη έννοια, θα μπορούσε, ίσως έτσι να γίνει πιο προσιτή στους μαθητές αλλά και στους μαθηματικούς.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Το ζωντανό, ζωογόνο σημείο των Kandinsky και Klee , που , γονιμοποιώντας το επίπεδο, γεννά τις γραμμές, οι εξαιρετικές λιθογραφίες του M.C.Escher, ο τρόπος που ο Mario Mertz «ζωγραφίζει» την ακολουθία των αριθμών Fibonaccci, η ορθή γωνία του Piet Mondrian και, τέλος, η αέναη τεθλασμένη γραμμή του π που κατασκευάζει ο F. Morellet, είναι κάποια παραδείγματα του πώς οι καλλιτέχνες, όταν συναντούν τα μαθηματικά εκφράζουν με δημιουργικό τρόπο μια γονιμοποιό σχέση μεταξύ μαθηματικών και τέχνης. Θα μπορούσαμε, ίσως, να δημιουργήσουμε παρόμοιες προσεγγίσεις στην διδακτική πρακτική λαμβάνοντας υπ' όψιν μας αυτή την ενεργό, παθιασμένη σχέση των καλλιτεχνών με τα μαθηματικά;

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ματίλα Γκίκα (2010): «Αισθητική των αναλογιών στη φύση και στις τέχνες».

Περιοδικό *Εικαστική Παιδεία,* τεύχος 26, σσ. 54-63.

Susanne Deicher (2001): *Mondrian*. TASCHEN Koln.

M.C. Escher (2004): *The graphic work*. TASCHEN Koln.

Kandinsky(1970): *Point, Ligne, Plan* . Paris :Denoel.

Πάουλ Κλέε (1989): *Η Εικαστική σκέψη*. Αθήνα: Μέλισσα.

Francois Morellet (2001): *Constructions with the number π*. Mainz/Germany: Dorothea van der Koelen Gallery.

Σαρλ Μπουλώ (2002): *Η κρυφή γεωμετρία των ζωγράφων*.Αθήνα: Ένωση Καθηγητών Καλλιτεχνικών Μαθημάτων.

Ελένη Λυμπεροπούλου, Μαλβίνα Παπαδάκη (2006): «*Η συμμετρία στους M.C.Escher και V. Vasarely: από το χώρο του μουσείου στην τάξη των Μαθηματικών*», 23ο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, Ε.Μ.Ε. Πάτρας, σσ. 331-343.

Σταυρούλα Κούβαρη, Λέλα Λυμπεροπούλου (2007): «*Η Πνευματικότητα της Ορθής Γωνίας*», 24ο ΣΥΝΕΔΡΙΟ Μαθηματικής Παιδείας, Ε.Μ.Ε. Κοζάνη, σσ.306-316.

lelalibe@gmail.com

[λευκή σελίδα]

ΕΠΕΙΣΟΔΙΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΣΧΕΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΤΕΧΝΗ

Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης

Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η σχέση των μαθηματικών με την τέχνη τέθηκε πολύ νωρίς και με τρόπο ιδιαίτερα σημαντικό στην αρχαία Ελλάδα. Μολονότι αναζωπυρώθηκε κατά τη διάρκεια της Αναγέννησης αυτή η θέση δεν φαίνεται ορθή για όλους λαμβάνοντας υπόψη μεταξύ άλλων την θεώρηση του Andre Chastel (1912-1990) ο οποίος σημειώνει ότι «Η καλλιτεχνική σπουδαιότητα του Leonard de Vinci θα οδηγήσει στο να ξεχαστεί η αποτυχία της μεγάλης σύνθεσης τέχνης-επιστήμης. Μέσω του αυξανόμενου και οριστικού χωρισμού της επιστημονικής γνώσης και της καλλιτεχνικής δραστηριότητας θα οριστεί η νεώτερη εποχή». Σε αυτό το άρθρο θα προσπαθήσουμε να αντιπαραβάλλουμε τις διαφορετικές θεωρήσεις εξετάζοντας επεισόδια της σχέσης των μαθηματικών με την τέχνη από την αρχαία Ελλάδα (Αριστοτέλης, Πλάτωνας), την Αναγέννηση (εποχή του Leonard de Vinci) και την νεώτερη εποχή (αφηρημένη τέχνη).

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

“Η σχέση των μαθηματικών με την τέχνη συζητήθηκε με ιδιαίτερο τρόπο στην αρχαία Ελλάδα”. Ο Andre Chastel (1912-1990) σημειώνει ότι «Η καλλιτεχνική σπουδαιότητα του Leonard de Vinci θα οδηγήσει στο να ξεχαστεί η αποτυχία της μεγάλης σύνθεσης τέχνης-επιστήμης. Μέσω του αυξανόμενου και οριστικού χωρισμού της επιστημονικής γνώσης και της καλλιτεχνικής δραστηριότητας θα οριστεί η νεώτερη εποχή». Σε αυτό το άρθρο θα εξετάσουμε επεισόδια της σχέσης των μαθηματικών με την τέχνη στην αρχαία Ελλάδα (Αριστοτέλης, Πλάτωνας), την Αναγέννηση (εποχή του Leonard de Vinci) και την νεώτερη εποχή (αφηρημένη τέχνη-κυβισμός).

ΟΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΗΣ

Η θεωρία των σχέσεων μεταξύ μαθηματικών και τεχνών κινείται σε δύο αντίθετες κατευθύνσεις. Η μία θεωρεί τα μαθηματικά ως εργαλείο, θεωρητικό και πρακτικό, στην υπηρεσία των τεχνών, ενώ η άλλη θεωρεί την τέχνη ως μια έμπνευση για τα μαθηματικά.

Τα μαθηματικά μπορούν να θεωρηθούν ως εργαλείο από την διπλή τους φύση, η οποία μεταφράζεται σε μία διχοτομία μεταξύ καθαρών και εφαρμοσμένων μαθηματικών. Αυτή η διάκριση είναι σε διαρκεί αλλαγή. Εδώ και χρόνια το πανεπιστήμιο τοποθετούσε στους τομείς των καθαρών μαθηματικών τα πεδία της αφηρημένης άλγεβρας, θεωρία Galois, αλλά με την δημιουργία της κρυπτογραφίας και των συστημάτων μετάδοσης, αυτοί οι ειδικοί είναι πολύ αναγκαίοι για τις επιχειρήσεις. Αντίθετα για τις πιθανότητες, ενώ η τοποθέτηση τους στα μαθηματικά θεωρούνταν για πολλά χρόνια προβληματική, σήμερα βρίσκονται στους θεωρητικούς τομείς.

Τα μαθηματικά παραμένουν μια επιστήμη αυτή καθαυτή, ένα εργαλείο για τις άλλες επιστήμες καθώς και σε μία ιδιαίτερη θέση στην κατηγοριοποίηση του Comte στη ρίζα του γνωσιακού δέντρου. Αυτή η θέση δεν θα πρέπει να θεωρείται ως σχέση υπεροχής αλλά ως μια ένδειξη ενός μεγαλύτερου αριθμού σχέσεων με τις άλλες επιστήμες.

Οι τέχνες έχουν εμπνεύσει τα μαθηματικά. Η ιδέα της χωρικής συμμετρίας είναι μια αναπαράσταση της τέχνης. Το ίδιο ισχύει για την σμίκρυνση υπό ορισμένη κλίμακα – χάρτης, μακέτα τριών διαστάσεων. Η ομοιοθεσία, σμίκρυνση ή μεγέθυνση, είναι ένα θεμελιώδες εργαλείο της γεωμετρίας και σήμερα τα φράκταλς δεν είναι παρά μια εικονογράφηση αυτής της αρχής (Cartier, 1995).

Η αρχική διαίσθηση του μαθηματικού ή του καλλιτέχνη είναι ελεύθερη, ελεύθερη από την πίεση της πραγματικότητας που βαραίνει στις πειραματικές επιστήμες.

Τα μαθηματικά, πέρα από την εξέλιξη τους που βασίζεται στην σχέση τους με τη φυσική, αναπτύσσονται ακολουθώντας την δική τους λογική και δεν μένουν συνδεδεμένα με την πραγματικότητα. Ο μαθηματικός κάνει μαθηματικά όπως ο καλλιτέχνης κάνει τέχνη με ενδοσκόπηση, χωρίς αυτό να είναι αυθαίρετο.

Ο καλλιτέχνης από την μεριά του, εκφράζει τον εαυτό του, εκφράζει τα βαθύτερα ένστικτά του, που αντιστοιχούν στην πραγματικότητα, αντικειμενική ή μη.

Αν τα μαθηματικά και η τέχνη είναι ελεύθερες, μπορούμε να αναρωτηθούμε από την μία μεριά αν είναι ανακάλυψη ή δημιουργία και από την άλλη μεριά ποια είναι τα κριτήρια τους.

Αν η τέχνη είναι ανακάλυψη, δηλαδή αν ο καλλιτέχνης ανακαλύπτει στον εαυτό του αισθήσεις και νοητικές εικόνες τότε το κριτήριο της τέχνης είναι η συμφωνία ή η πίστη του έργου με τις αισθήσεις του και τις νοητικές εικόνες του. Ο καλλιτέχνης ανακαλύπτει και περιγράφει τον εσωτερικό του κόσμο και ο θεατής μπορεί να αναγνωρίσει την ορθότητα του έργου, να δει δηλαδή ότι είναι μια πιστή αναπαράσταση του κόσμου του καλλιτέχνη.

Αν η τέχνη δεν είναι ανακάλυψη αλλά δημιουργία, το κριτήριο της ακρίβειας του έργου είναι δυσκολότερο να ορισθεί. Η ακρίβεια βρίσκεται στην αντιστοιχία της ιδέας του καλλιτέχνη και του υλικού, ιδέα η οποία εξελίσσεται κατά την πραγματοποίηση του έργου.

Σχετικά με τα μαθηματικά το κριτήριο είναι διπλό. Από την μία πρόκειται για την ακρίβεια της ιδιότητας δηλαδή την συμφωνία στον συλλογισμό και από την άλλη για το ενδιαφέρον της. Αυτό το ενδιαφέρον σχετίζεται γενικά με τον τρόπο που αυτή η ιδιότητα εγγράφεται στο ρεύμα των μαθηματικών και αναγνωρίζεται στην ομορφιά της. Ο Mandelbrojt περιγράφει με εξαιρετικό τρόπο αυτή την μη υλική ομορφιά σημειώνοντας ότι “Για να είναι ενδιαφέρον, ένα μαθηματικό γεγονός οφείλει, πριν από όλα, να είναι όμορφο.... Άρα, ένα όμορφο θεώρημα είναι εκείνο που είναι ικανό να εμπνεύσει έναν μαθηματικό, εκείνο που μπορεί να γεννήσει νέα θεωρήματα. Το ενδιαφέρον μαθηματικό γεγονός δημιουργεί μια κατάσταση του πνεύματος” (Mandelbrojt, 1985).

Ταυτόχρονα είναι λάθος να σκεφθούμε ότι τα μαθηματικά είναι μια τέχνη. Ο μαθηματικός αιχμαλωτίζει διαισθητικά το μαθηματικό φαινόμενο, αλλά οφείλει στη συνέχεια να αντιπαραβάλει αυτή τη διαίσθηση, όχι στον

εξωτερικό κόσμο όπως με τις πειραματικές επιστήμες αλλά με τον συλλογισμό και ίσως οδηγηθεί να αλλάξει την διαίσθησή του. Η αντιπαραβολή με τον συλλογισμό είναι που θα δείξει στον μαθηματικό αν η διαίσθησή του είναι σωστή, αν η ιδιότητα που διαισθάνονταν είναι αληθής.

Ο σύγχρονος καλλιτέχνης, δεν αντιπαραβάλει την νοητική εικόνα του με τον εξωτερικό κόσμο. Αυτή η ιδέα είναι καλή διότι είναι δική του. Αντίθετα, πραγματοποιώντας το έργο του, έναν πίνακα, ο καλλιτέχνης αντιπαραβάλει την ιδέα του με τα υλικά που χρησιμοποιεί για να πραγματοποιήσει ένα όμοιο με αυτή την ιδέα. Στην θέση της αντιπαραβολής της διαίσθησης με τον συλλογισμό που λαμβάνει χώρα στον μαθηματικό, υπάρχει η αντιπαραβολή της ιδέας, της νοητικής εικόνας στα υλικά που θα υλοποιήσουν την ιδέα στον καλλιτέχνη.

Όπως ο μαθηματικός τροποποιεί την διαίσθησή του αν δεν είναι σύμφωνη στον συλλογισμό έτσι και ο καλλιτέχνης μπορεί να τροποποιήσει την ιδέα του κατά την διάρκεια υλοποίησης του έργου. Το έργο θα ολοκληρωθεί όταν η αρχική ιδέα και ο πίνακας θα εξελιχθούν κατά τη διάρκεια της υλοποίησης με τρόπο ώστε να φαίνεται η αντιπαραβολή στα μάτια του καλλιτέχνη. Ο Braque έγραφε ότι "ο πίνακας έχει ολοκληρωθεί όταν έσβησε την ιδέα" (Mandelbrojt, 1995).

ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΑΔΑ – ΠΛΑΤΩΝΑΣ vs. ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ

Το γεωμετρικό πνεύμα διεισδύει κατά τον 5ο αιώνα π.Χ. στους διάφορους τομείς της δημιουργίας, ιδιαίτερα της καλλιτεχνικής. Αυτή την εποχή γεννιούνται τα ιδεώδη της δημοκρατίας και της ελευθερίας τα οποία ευνοούν το πνεύμα της έρευνας και της εφεύρεσης. Εκείνη την περίοδο διαμορφώνεται το θέατρο, όχι μόνον στην λογοτεχνική μορφή αλλά και στην αρχιτεκτονική του μορφή και εμπνέει ζωγράφους και γλύπτες δίνοντας στο κοινό νέες απαιτήσεις αληθοφάνειας και ρεαλισμού. Η εκτέλεση του διακόσμου στα σκηνικά αποτελεί μια πρώτη προσπάθεια να αναδυθούν οι πρώτες έρευνες στην προοπτική.

Ο Πυθαγόρας προβάλλει τους νόμους του ωραίου σε αυτούς του αριθμού, ο οποίος δεν είναι μόνον ένα σημάδι αλλά μία σκέψη. Το ενδιαφέρον του Πυθαγόρα είναι η συγκρότηση μιας ορθολογικής και αποδεικτικής γεωμετρίας, μιας θεωρητικής αριθμητικής που έχει αντικείμενα τις γενικές ιδιότητες των αριθμών, μιας αστρονομίας και μιας μουσικής η οποία χειρίζεται με αφηρημένο και μαθηματικό τρόπο τα διαστήματα και τις συγχορδίες. Ο αριθμός, δηλαδή η αρμονία είναι η αρχή όλων.

Οι σχέσεις των ελληνικών μαθηματικών και της τέχνης ήταν προβληματικές για τον Πλάτωνα (πραγματείες *Νόμοι, Φαίδων, Πολιτεία)* ο οποίος αποκαλούσε τους καλλιτέχνες "οι μεγάλοι ψεύτες". Αντίθετα μιλώντας για την μιμητική ποίηση στην *Πολιτεία*, αναγνωρίζει ότι έχει υποβληθεί στην περίπου μαγική γοητεία της οπότε η θεωρητική αυστηρότητα γίνεται αποχρώσα διότι όπως σημειώνει, αν οι τέχνες εξαφανίζονταν "η ύπαρξη, ήδη σήμερα δυσάρεστη, θα γίνονταν απόλυτα αδύνατο να την ζεις" (V, 299).

Η απελευθέρωση των αισθήσεων για τον Πλάτωνα είναι ένα ηθικό καθήκον. Οι αισθήσεις ταράζουν την ειρήνη του στοχαστή και του ηθικού ανθρώπου, οπότε όσο πιο γρήγορα απαλλαγείς, τόσο πιο γρήγορα η πραγματική γνώση μπορεί να είναι δυνατή. Αυτό το ενδιαφέρον για την αλήθεια οδηγεί τον Πλάτωνα να αντιτεθεί στα τεχνάσματα των γλυπτών και των ζωγράφων, οι οποίοι παραμορφώνουν τα έργα τους για να λάβουν υπόψη την προοπτική. Ενώ είναι ευνοϊκός μεταξύ άλλων στην μέτρηση και στον αριθμό, αντιτίθεται στην προοπτική η οποία ξεκινά να διαμορφώνεται. Για αυτόν, το αντικείμενο της τέχνης είναι πριν απ' όλα η πλέον αυστηρή μύηση. Οι παραμορφώσεις που βασίζονται στα μαθηματικά για να δώσουν την εντύπωση του ανάγλυφου ή αυτή του βάθους, του φαίνονται απαράδεκτες (Loi, 1995).

Ο Αριστοτέλης στην πραγματεία του *Μετά τα Φυσικά* (Tome II, M, 3, 1078b) σημειώνει ότι "....οι φιλόσοφοι που ισχυρίζονται ότι οι μαθηματικές επιστήμες δεν δίνουν καμία θέση στο ωραίο, ούτε στο καλό, είναι ασφαλώς λάθος· το ωραίο, αντίθετα, είναι το κύριο αντικείμενο συλλογισμού αυτών των επιστημών και των αποδείξεών τους. Δεν αποτελεί λόγο να πούμε ότι δεν το επεξεργάζονται επειδή δεν το ονομάζουν, διότι δείχνουν τα αποτελέσματα και τις σχέσεις. Οι ανώτερες μορφές του ωραίου είναι η τάξη, η συμμετρία, το ορισμένο και αυτό είναι που προβάλλουν οι μαθηματικές επιστήμες". Διαπιστώνουμε, μέσα από τα λόγια του Αριστοτέλη καθαρά την διαφορετική θεώρηση του με εκείνη του Πλάτωνα.

ΑΝΑΓΕΝΝΗΣΗ - LEONARD DE VINCI

Ο Leonard de Vinci, δεν έκανε καμία διαφοροποίηση μεταξύ τέχνης και επιστήμης, αλήθειας και ομορφιάς. Παρουσιάζεται συχνά ως μηχανικός, αλλά ήταν φιλόσοφος, που ενδιαφέρονταν για τις αρχές της μηχανικής περισσότερο από την μηχανική αυτή καθαυτή, διότι όπως σημειώνει ο Paul Valery "η πλέον αυθεντική φιλοσοφία δεν είναι τόσο στα αντικείμενα της σκέψης απ' ότι στην πράξη της σκέψης και στον ελιγμό της". Το έμβλημα του Leonard είναι η "Επίμονη Αυστηρότητα" (Valery, 1929) και για αυτόν, όταν η αυστηρότητα έχει καθιερωθεί, μια ελευθερία είναι πιθανή.

Η δημιουργία είναι μια πράξη ελευθερίας και μια σχετική αταξία είναι ουσιαστική. Ο Leonard ανάμεσα σε τόσα είδωλα μεταξύ των οποίων πρέπει να διαλέξουμε, τοποθέτησε μπροστά στο βλέμμα του αυτή την επίμονη αυστηρότητα, η οποία θεωρείται η πλέον απαιτητική από όλες. Ζωγραφίζω για τον Leonard είναι μια ενέργεια η οποία απαιτεί όλες τις γνώσεις (γεωμετρίας, δυναμικής, φυσιολογίας) και όλες τις τεχνικές. Μια μορφή είναι σύνθεση ερευνών που πάνε από την ανατομή στην ψυχολογία. Ο καλλιτέχνης σημειώνει με ακρίβεια τις στάσεις των σωμάτων σύμφωνα με την ηλικία και το φύλο. Ο ίδιος βρίσκει συνολικά στο ζωγραφισμένο έργο όλα τα προβλήματα που μπορεί να προτείνει στο πνεύμα το σχέδιο μιας σύνθεσης της φύσης και πιστεύει ότι τα μαθηματικά είναι το κλειδί της γνώσης σημειώνοντας ότι "καμία έρευνα δεν αξίζει το όνομα της επιστήμης αν δεν περνάει από την μαθηματική απόδειξη" (Loi, 1995).

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ Η ΑΦΗΡΗΜΕΝΗ ΤΕΧΝΗ

Η επιστήμη τους τελευταίους αιώνες είναι ιδιαίτερα διαφορετική από αυτό που ήταν. Η αξιοσημείωτη ανάπτυξη και ποικιλομορφία των μαθηματικών και της αφηρημένης ζωγραφικής δεν είναι γενικά κατανοητά. Ο άνθρωπος στοχαστής εξερευνά πεδία τα οποία οι αισθήσεις είναι ανίκανες να εξερευνήσουν, βασιζόμενος περισσότερο στην θεώρηση και στον υπολογισμό παρά στην παρατήρηση. Κατά αυτό τον τρόπο αποδίδει καλύτερα την εργασία του με τους μαθηματικούς τύπους από ότι με την περιγραφή των αντικειμένων μελέτης του.

Όταν μελετούμε την σύγχρονη τέχνη, το πρώτο πράγμα που διαπιστώνουμε είναι ότι η τέχνη του Picasso, του Paul Klee, του Kandinsky και του Escher, παρουσιάζεται καταρχήν ως ένα προϊόν εμπνεύσεων που οδηγούν στις θεωρήσεις της σύγχρονης επιστήμης. Αυτή η αφηρημένη τέχνη η οποία γεννιέται μέσα από μια ανάγκη ελευθερίας, μπορεί να είναι ιδιαίτερα εκφραστική και να μας θέσει σε επαφή με την ανθρώπινη πραγματικότητα: Η φαντασία και το δημιουργικό πνεύμα του ανθρώπου είναι λιγότερο αναπαραστατικά απ' ότι η παρατήρηση: Η σπουδαιότητα της μορφής σε αυτή την τέχνη είναι θεμελιώδης. Στα τυπικά και αξιωματικά μαθηματικά, η δομή ή ο μετασχηματισμός παίζουν ένα καίριο ρόλο. Τα μαθηματικά είναι μια ανθρώπινη δημιουργία και η φαντασία παίζει έναν θεμελιώδη ρόλο. Οι αριθμοί είναι για τον Dedekind όπως για τον Hankel οι δημιουργίες του ανθρώπινου πνεύματος. "θα συμβούλευα", σημειώνει ο τελευταίος, γράφοντας στον Weber, "να μην λαμβάνεται ως αριθμό την ίδια την τάξη-κατηγορία, αλλά κάτι νέο που το πνεύμα γεννά. Είμαστε θεϊκή φυλή και διαθέτουμε την δύναμη να δημιουργούμε". Την ίδια εποχή ο Cantor

ανακοίνωνε ότι "η ουσία των μαθηματικών, είναι η ελευθερία" ενώ ο Weierstrass σημείωνε ότι "Ο αξιόλογος μαθηματικός είναι ένας ποιητής". Παράλληλα ο Wittgenstein θεωρούσε ότι "Ο μαθηματικός είναι ένας εφευρέτης και όχι ένας εξερευνητής" και ο Leon Brunschvicg επέμεινε στην δυναμική της μαθηματικής νοημοσύνης (Loi, 1995).

Στο επιστημολογικό και φιλοσοφικό επίπεδο, το σημαντικό γεγονός του 19ου αιώνα στα μαθηματικά ήταν η κατασκευή των μη ευκλείδειων γεωμετριών. Η ευκλείδεια γεωμετρία κωδικοποιήθηκε περί τα 300 π.Χ. από τον Ευκλείδη και φαινόταν να μεταφράζει με πολύ καλό τρόπο τους νόμους του φυσικού χώρου στον οποίο ζούμε. Οι σημαντικές επιτυχίες που είχε στις εφαρμογές στις επιστήμες της φύσης και η αυστηρότητα που βρίσκουμε στην παραγωγική δομή της την έκαναν το απόλυτο μοντέλο ακρίβειας, λογικής και βεβαιότητας. Η γεωμετρία ήταν η επιστήμη ενός λογικό-φυσικό-μαθηματικού απόλυτου.

Στο πλαίσιο της νέας κατασκευής (μη ευκλείδειες) οι γεωμέτρες διδάσκουν ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι λιγότερο από 180 μοίρες και ότι υπάρχει τρίγωνο μεγαλύτερο από όλα κ.λπ. Από την άλλη η μοντέρνα αξιωματική (1899) δείχνει την απειρότητα του σύμπαντος των πιθανών γεωμετριών. Η εμφάνιση καμπυλωτών χώρων και παράξενων σχημάτων δεν σταμάτησε να δίνει κουράγιο στους καλλιτέχνες οι οποίοι αναζητούσαν την ελευθερία και ένα νέο βάθος. Η μη ευκλείδεια γεωμετρία συνιστούσε μια θεωρητική δικαιολόγηση στην ανισορροπία που εισήχθηκε από τους ζωγράφους στα έργα τους. Ο Picasso θα γράψει "ζωγραφίζω τα αντικείμενα όπως τα σκέφτομαι και όχι όπως τα βλέπω". Στα 1914 ο κριτικός Alexandre Mercereau παρουσιάζει την ζωγραφική της εποχής του και σημειώνει "όπως οι αξιωματικές αρχές του Bolyai, Lobatschevski, Riemann, Beltrami και Tilly δεν κατέστρεψαν αυτές του Ευκλείδη, αλλά τις οδήγησαν προς την αληθινή τους κατάσταση ...το ίδιο και ο σύγχρονος ζωγράφος δεν αρνείται οτιδήποτε το ατελές πριν τον καιρό του" .

Ο Bolyai σχολιάζοντας την ανακάλυψή του σημείωνε "δεν μπορώ παρά να πω το ακόλουθο, δημιούργησα ένα νέο σύμπαν από τίποτα". Ο Gleizes στα 1912 σημειώνει "ανοίξαμε ένα νέο δρόμο, και δείχνουμε μια νέα έκφραση της πραγματικότητας". Η ομοιότητα είναι ξεκάθαρη και δείχνει την αναλογία των σχετικά συμβατικών καταστάσεων.

Η ιδέα ενός τετραδιάστατου ή πολυδιάστατου χώρου εμφανίστηκε σποραδικά τον 18ο αιώνα, αλλά από τα 1850 άρχισε να γίνεται ένα κανονικό στοιχείο της μαθηματικής σκέψης Στα φιλοσοφικά γραπτά του, ο Poincare, κομματιάζει την έννοια της διάστασης και δείχνει ότι υπάρχει ένας γεωμετρικός χώρος, ένας καθαρά οπτικός χώρος, ένας απτικός χώρος, ένας

κινητικός χώρος που θα έχει τόσες διαστάσεις όσους μύες έχουμε και ο γεωμετρικός χώρος διαφέρει σημαντικά από τον καθένα από αυτούς τους τρεις χώρους.

Όλα αυτά μας οδηγούν να μιλήσουμε για ένα ρεύμα που θα κυριαρχήσει στην φιλοσοφία των επιστημών και είναι ο συμβατισμός (conventionalisme). Αυτή η μορφή της σχετικότητας της γνώσης αποτελεί ένα σημείο που δίνει κουράγιο στον ζωγράφο να δημιουργήσει τις δικές του συμβάσεις. Η ύπαρξη φαινομένων που μας διαφεύγουν, η αναγκαιότητα εννοιών όλο και περισσότερο απομακρυσμένων από τις αισθήσεις μας, η αναστάτωση της θεωρίας του Einstein, η ύπαρξη ενός κόσμου διαφορετικού από τις αντιλήψεις μας πιθανόν να οδήγησαν τον ζωγράφο στην παραμόρφωση και τον χλευασμό της αφηρημένης τέχνης. Παραμορφώνοντας τις γραμμές και τα σώματα στην ελπίδα της καλύτερης αναπαράστασης της πραγματικότητας, ο ζωγράφος έδινε μια συμβατική απάντηση στο πρόβλημα της αναπαράστασης. Η συγχρονικότητα της αφηρημένης τέχνης με τα σημαντικά επαναστατικά ρεύματα της μοντέρνας φυσικής και την κρίση στα θεμέλια των μαθηματικών δεν αποτελεί ένα τυχαίο γεγονός

Την ίδια περίοδο και παράλληλα με την κατανόηση μιας σχετικότητας των ανθρωπίνων γνώσεων, είναι και η σχετικότητα του αισθητηριακού μηνύματος που τέθηκε σε κατηγορία. Σε ένα άρθρο του 1903 υπό τον τίτλο “η σχετικότητα του ευκλείδειου χώρου” στην Revue Scientifique ο Boucher σημειώνει “Οι αισθήσεις μας στο σύνολό τους, δεν μας δίνουν παρά παραμορφωμένες εικόνες των φαινομένων, μεταξύ των οποίων πολλά παραμένουν κρυμμένα διότι κανένα από τα όργανά μας δεν μας φέρνει σε απευθείας επαφή με αυτά ...” (Pont, 1995).

Η τετραδιάστατη γεωμετρία, η μη ευκλείδεια γεωμετρία και η συμβατική επιστημολογία των Duhem, Poincare έπαιξαν σημαντικό ρόλο στο ρεύμα του κυβισμού.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Cartier, Pierre (1995): *Art, science et transformation*. Στη Συλλογή Mathématiques et Art (επιμ. Maurice Loi), Paris, Hermann Editeurs des Sciences et des Arts.

Loi, Maurice (1995): *Préface* Στη Συλλογή Mathématiques et Art (επιμ. Maurice Loi), Paris, Hermann Editeurs des Sciences et des Arts.

Mandelbrojt, Jacques (1995): *Spontanement mathématique* Στη Συλλογή Mathématiques et Art (επιμ. Maurice Loi), Paris, Hermann Editeurs des Sciences et des Arts.

Mandelbrojt, S. (1985): Pourquoi je faits des mathématiques. *Cahiers du Séminaire d'Histoire des mathématiques*, 6, Paris, Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire des mathématiques Fondamentales.

Pont, Jean-Claude (1995): *Autre perspective*. Στη Συλλογή Mathématiques et Art (επιμ. Maurice Loi), Paris, Hermann Editeurs des Sciences et des Arts

Valey, Paul (1929): *Leonard et les Philosophes*, Paris, Editions Kra, coll. Vingtième siècle,

nikolantonakis@noesis.edu.gr,

knikolantonakis@uowm.gr

[λευκή σελίδα]

ΈΝΑ ΠΑΝΟΡΑΜΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΕΡΕΥΝΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΤΕΧΝΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Παναγιώτα Κοταρίνου
Υπ. Διδάκτωρ Παν. Θεσσαλίας

Χαρούλα Σταθοπούλου
Επίκ. Καθηγήτρια Παν. Θεσσαλίας

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα τελευταία χρόνια η ερευνητική κοινότητα, μεταξύ άλλων εναλλακτικών προσεγγίσεων, διερευνά την αξιοποίηση των τεχνών για τη βελτίωση της μάθησης και διδασκαλίας των Μαθηματικών. Η θετική επίδραση της τέχνης στη μάθηση των Μαθηματικών έχει παρατηρηθεί όχι μόνο ως αποτέλεσμα της ενασχόλησης των μαθητών με τις τέχνες σε σχολικά προγράμματα πλούσια σε καλλιτεχνικές δραστηριότητες (Catterall et al, 1999), αλλά κυρίως από τη διδασκαλία των Μαθηματικών μέσω της τέχνης (Learning in and through the arts) (Catteral, 1995; Catterall and Waldorf , 1999; Ingram, 2003).

Στην εισήγησή μας αυτή θα παρουσιάσουμε μια ανασκόπηση της έρευνας που αφορά στην αξιοποίηση διαφόρων μορφών τέχνης στη διδασκαλία/ μάθηση των μαθηματικών στη σχολική τάξη. Οι κυριότερες μορφές τέχνης που φάνηκε να χρησιμοποιούνται στην τάξη —συχνά σε συνδυασμό δύο ή περισσότερες— είναι: Εικαστικές τέχνες, Λογοτεχνία, Αφηγηματική τέχνη και Μαθηματικά, Κινηματογράφος, Μουσική, Χορός, Θέατρο, Δραματική Τέχνη στην Εκπαίδευση. Εξετάζονται οι διάφορες διδακτικές προτάσεις που συνδέονται με αυτές τις μορφές τέχνης ως εναλλακτικές καινοτόμες προτάσεις και αξιολογούνται ως προς την αποτελεσματικότητά τους στη διδασκαλία/ μάθηση των μαθηματικών στις διάφορες βαθμίδες εκπαίδευσης με έμφαση στη δευτεροβάθμια.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η συμβολική και αφηρημένη φύση των μαθηματικών, οι παραδοσιακοί τρόποι διδασκαλίας, η κυρίαρχη προσέγγιση της μαθηματικής γνώσης η οποία επικεντρώνεται στη στείρα αναπαραγωγή διαδικασιών, στην απομνημόνευση και την εξατομικευμένη εργασία, καθώς και το τυπολογικό ύφος των μαθηματικών βιβλίων, συντελούν στην εικόνα ότι τα μαθηματικά είναι αυστηρά, αυταρχικά, αποτελούν έναν κόσμο άσχετο με το κόσμο των μαθητών, με αποτέλεσμα να γίνονται πηγή άγχους, φοβίας που επηρεάζει την επίδοσή τους στο μάθημα των μαθηματικών (Καλαβάσης, 2006; Σακονίδης, 2008).

Επειδή αυτές οι παραδοσιακές μέθοδοι για τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών έχουν περιορισμένα αποτελέσματα, η ερευνητική κοινότητα έχει στραφεί στην αναζήτηση εναλλακτικών προσεγγίσεων. Σ' αυτό το πλαίσιο, μεταξύ άλλων προσεγγίσεων για τη βελτίωση της μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών διερευνάται η σύνδεση των Μαθηματικών με τις τέχνες[1]. Η τάση αυτή ενισχύεται από το γεγονός ότι αρκετές έρευνες τα τελευταία χρόνια έχουν δείξει θετική επίδραση της τέχνης στη μάθηση των περισσοτέρων αντικειμένων του Αναλυτικού προγράμματος. Η θετική επίδραση της τέχνης στη μάθηση των Μαθηματικών έχει παρατηρηθεί όχι μόνο ως αποτέλεσμα της ενασχόλησης των μαθητών με τις τέχνες[2] σε σχολικά προγράμματα πλούσια σε καλλιτεχνικές δραστηριότητες (Catterall et al, 1999a), αλλά κυρίως από τη διδασκαλία των Μαθηματικών μέσω της τέχνης (Learning in and through the arts) (Catteral, 1995a, 1995b; Catterall and Waldorf , 1999b; Ingram et al, 2003). Έχει διαπιστωθεί ότι η επίδοση των μαθητών βελτιώνεται σε ένα περιβάλλον στο οποίο παρέχεται υψηλής ποιότητας εκπαίδευση στις τέχνες και σε ένα σχολικό κλίμα που υποστηρίζει την ενεργή μάθηση (Fiske, 2007). Σε τέτοια σχολικά περιβάλλοντα παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές που συμμετείχαν στα προγράμματα πλούσια σε καλλιτεχνικές δραστηριότητες παρουσίασαν δημιουργικές, γνωστικές και προσωπικές ικανότητες απαραίτητες για την ακαδημαϊκή επιτυχία των μαθητών (Burton,

[1] Τις εικαστικές ή πλαστικές τέχνες –ζωγραφική, γλυπτική, αρχιτεκτονική, φωτογραφία— τις παραστατικές ή ερμηνευτικές τέχνες (performing arts) – δράμα, μουσική, όπερα, χορό, χοροθέατρο—και τη λογοτεχνία.

[2] Οι Hetland και Winner (2004) από την ανασκόπηση 10 μετα-αναλύσεων για την επίδραση της διδασκαλίας των τεχνών σε άλλα γνωστικά αντικείμενα, διαπίστωσαν αιτιακή σχέση μόνο ανάμεσα στο Δράμα και στην προφορική επίδοση των μαθητών (verbal achievement) καθώς και στην ακρόαση μουσικής και χωρικής λογικής (Spatial reasoning).

1999). Σημαντικό επίσης εύρημα αποτελεί το ότι μαθητές από όλα τα κοινωνικο-οικονομικά στρώματα που είχαν μια συνεχή ενασχόληση με τις τέχνες παρουσίασαν υψηλότερες σχολικές επιδόσεις από τους μαθητές με χαμηλή εμπλοκή με τις τέχνες (Catterall et al, 1999a).

2. ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΤΕΧΝΗΣ (ARTS- INTEGRATED INSTRUCTION)

Η Norma Presmeg (2009: 131) στο άρθρο της 'η έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση, αγκαλιάζοντας την τέχνη και τις επιστήμες' μιλάει για το ρόλο των ερευνητών στην εκπαίδευση, όταν το ενδιαφέρον είναι εστιασμένο στη βελτίωση της εμπειρίας της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών. Επισημαίνει μεταξύ άλλων ότι παρά τους αναπόφευκτους νεωτερισμούς που επηρεάζουν τους τρόπους έρευνας, ο ανθρωπισμός που χαρακτηρίζει την προσπάθειά του ερευνητή/ εκπαιδευτικού επιβάλει την ανάγκη αξιοποίησης πτυχών των τεχνών και των φυσικών επιστημών στη διερεύνηση θεμάτων της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Στη βιβλιογραφία συναντάμε έρευνες που εστιάζουν στην επίδραση των πλαστικών ή παραστατικών τεχνών στη διδασκαλία και μάθηση των περισσοτέρων γνωστικών αντικειμένων του Αναλυτικού προγράμματος. Ένα μέρος των ερευνών αναφέρεται στην επίδραση μιας διδασκαλίας τέτοιας μορφής, στη μάθηση των Μαθηματικών σε όλες της βαθμίδες της εκπαίδευσης. Πολλές από τις έρευνες αναφέρονται σε προγράμματα που εφαρμόστηκαν σε μεγάλο αριθμό σχολικών μονάδων καθώς και για μεγάλη χρονική περίοδο. Σ' αυτές τις έρευνες, τα κεντρικά ερωτήματα αφορούν στη διαδικασία, το πλαίσιο και το είδος των αναμενόμενων αποτελεσμάτων από την εφαρμογή διδασκαλιών μέσω της τέχνης.

Η Omniewski (1999), μελέτησε την επίδραση στην επίδοση των μαθητών, μιας διδασκαλίας που προσεγγίζει τα Μαθηματικά μέσω της τέχνης. Πιο συγκεκριμένα, εξέτασε την ύπαρξη διαφορών στην επίδοση, ανάμεσα σε μαθητές 2ας τάξης που διδάχθηκαν μαθηματικά με μιά προσέγγιση βασισμένη στις τέχνες όπως η μουσική, οι οπτικές τέχνες, ο χορός και το Δράμα, σε μαθητές που διδάχθηκαν το ίδιο θέμα με τη βοήθεια χειραπτικού υλικού και σε μαθητές που διδάχθηκαν το ίδιο θέμα με παραδοσιακό τρόπο χρησιμοποιώντας σχολικά βιβλία. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η μεγαλύτερη βελτίωση της επίδοσης παρουσιάστηκε στην πειραματική ομάδα που εφαρμόστηκε διδασκαλία μέσω της τέχνης.

Ο Catteral (1995a)[3] αξιολογώντας το πρόγραμμα "Different Ways of Knowing", το οποίο αναπτύχθηκε με κύριο στόχο τη διερεύνηση ενός διαθεματικού τύπου διδασκαλίας, με στόχο να ενσωματώσει ως συστατικό του στοιχείο τις διάφορες μορφές τέχνης, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι διδακτικές πρακτικές αυτής της μορφής βελτίωσαν την επίδοση των μαθητών στα μαθήματα της Γλώσσας, στα Μαθηματικά και στις κοινωνικές επιστήμες. Η αξιολόγηση έδειξε επίσης ότι οι μαθητές ανέπτυξαν θετικές στάσεις για το σχολείο και τη μάθηση.

Ένα επίσης μεγάλης χρονικής διάρκειας και μεγάλης εμβέλειας πρόγραμμα ήταν το CAPE (Chicago Arts Partnerships in Education) [4] , κατά το οποίο καλλιτέχνες των πλαστικών και παραστατικών τεχνών συνεργάστηκαν με δασκάλους και καθηγητές διαφόρων ειδικοτήτων για να σχεδιάσουν και πραγματοποιήσουν διδασκαλίες βασισμένες στις τέχνες σε διάφορες διάφορες ενότητες από το Αναλυτικό πρόγραμμα. Οι Catterall και Waldorf (1999b) εξέτασαν τις επιπτώσεις του προγράμματος στους καθηγητές στους καλλιτέχνες και τους μαθητές Δημοσίων σχολείων στους οποίους εφαρμόστηκε το πρόγραμμα και διαπίστωσαν ότι οι μαθητές και οι δάσκαλοι ανέπτυξαν θετικές στάσεις για τη διδασκαλία μέσω της τέχνης. Διαπιστώθηκε δε ότι οι μαθητές που μετείχαν στο πρόγραμμα παρουσίασαν καλύτερες επιδόσεις στην ανάγνωση στο διάβασμα και τα Μαθηματικά, από τους υπόλοιπους. Το πρόγραμμα Arts for Academic Achievement[5] πραγματοποιήθηκε σε ένα μεγάλο αριθμό σχολείων με στόχο δάσκαλοι και καλλιτέχνες να συνεργασθούν για τη διδασκαλία διαφόρων γνωστικών αντικειμένων. Οι συνεργαζόμενες ομάδες είχαν επίσης την υποχρέωση να διεξάγουν μια έρευνα δράσης για να μελετήσουν τα αποτελέσματα της διδασκαλίας τους αυτής της μορφής, στην επίδοση των μαθητών. Η πλειοψηφία των δασκάλων από τα σχολεία που συμμετείχαν στο πρόγραμμα,

[3] Το πρόγραμμα "Different Ways of Knowing" εφαρμόστηκε σε διάφορα δημόσια σχολεία των Ηνωμένων Πολιτειών την περίοδο 1991-94. Για την αξιολόγηση αυτού του προγράμματος επελέγησαν τέσσερα σχολεία από διάφορες περιοχές της χώρας, στα οποία το 88% των μαθητών ανήκαν σε μειονοτικές ομάδες. Ο Catteral και οι συνεργάτες του (1995b) αξιολόγησαν επίσης την τρίτη φάση της εφαρμογής του προγράμματος στα Δημοτικά σχολεία της Rosemead μιας πολυπολιτισμικής περιοχής του Los Angeles που η πλειοψηφία των μαθητών ανήκε σε χαμηλά κοινωνικοοικονομικά στρώματα.

[4] Το πρόγραμμα είχε εξαετή διάρκεια (1992-98) και στην πλήρη εφαρμογή του συμμετείχαν 37 Δημόσια σχολεία, εκ των οποίων είκοσι παρέμειναν σταθερά στο πρόγραμμα.

[5] Το τετραετές πρόγραμμα Arts for Academic Achievement εφαρμόστηκε σε 45 δημόσια σχολεία της Μιννεάπολης, με μόνο τέσσερα Γυμνάσια ανάμεσά τους

συνεργάστηκαν με καλλιτέχνες ή δασκάλους καλλιτεχνικών μαθημάτων, κυρίως στη διδασκαλία των Γλωσσικών μαθημάτων. Μεγαλύτερος δισταγμός και επιφυλακτικότητα στο σχεδιασμό και στην πραγματοποίηση διδασκαλιών που ενσωματώνουν τις τέχνες, παρατηρήθηκαν στό μάθημα των Μαθηματικών. Μόνο 16% των διδασκαλιών αυτής της μορφής αφορούσαν στα Μαθηματικά. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε ότι οι μαθητές που συμμετείχαν στο πρόγραμμα , ανεξάρτητα από την πρότερη επίδοσή τους, παρουσίασαν μεγαλύτερη βελτίωση στην ανάγνωση και στα Μαθηματικά, σε σύγκριση με τους μαθητές που δεν συμμετείχαν. Επίσης η βελτίωση της επίδοσης στα μαθηματικά φάνηκε να είναι ανάλογη με το βαθμό ενσωμάτωσης της τέχνης στη διδασκαλία (Ingram, 2003). Η αξιολόγηση του προγράμματος έδειξε επίσης ότι αυτό είχε επιπτώσεις και στους δασκάλους που το εφάρμοσαν. Οι δάσκαλοι ανακάλυψαν νέες διδακτικές στρατηγικές που τους έκαναν να αμφισβητίσουν τον μέχρι τότε ρόλο τους και τις καθημερικές τους πρακτικές.

Η ερευνητική κοινότητα εκτός από τις γενικότερες επιπτώσεις από την ενσωμάτωση της τέχνης στη διδασκαλία, προσανατολίστηκε και σε έρευνες που αφορούν πιο ειδικά στην επίδραση μιας διδασκαλίας μέσω της τέχνης στη μάθηση και τη διδασκαλία στο μάθημα των Μαθηματικών. Μια πλούσια βιβλιογραφία έχει αναπτυχθεί για τις επιδράσεις στη μάθηση, κάθε μιας από τις μορφές τέχνης, όπως της ζωγραφικής, γλυπτικής, αρχιτεκτονικής, της μουσικής, του χορού, της λογοτεχνίας, του θεάτρου καθώς και της Δραματικής Τέχνης στην Εκπαίδευση (Drama in Education).

3. ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΤΕΧΝΗΣ

Α. Εικαστικές τέχνες και Μαθηματικά

Μία ομάδα μελετών εστιάζει στις παράλληλες πορείες, συσχετίσεις και αλληλεπιδράσεις της Γεωμετρίας με τη Ζωγραφική (Φίλη, 2000; Καμπάνη, 2000) στο ρόλο των Μαθηματικών στην Αρχιτεκτονική (Γεωργιάδου, 1997; Βαϊνάς, 1995)[6]. καθώς και στα Γεωμετρικά μοτίβα που συναντάμε σε παραδοσιακές τεχνικές (Stathopoulou[7], 2007; 2008) ή γενικότερα στη

[6] Η Γεωργιάδου μελετά τη σχέση Γεωμετρίας και Βυζαντινής Αρχιτεκτονικής, ενώ ο Βαϊνάς προτείνει να αξιοποιηθεί στα σχολικά Μαθηματικά το σχήμα των γεφυριών.

[7] Η Stathopoulou (2007), μελετά τα Γεωμετρικά patterns που συναντάμε στα "Ξυστά" στο Πυργί της Χίου. Προτείνει, επίσης, (2008) Μαθηματικές δραστηριότητες που αφορούν στην έννοια της συμμετρίας, μέσω ενός WebQuest με θέμα τα "Ξυστά".

λαϊκή παράδοση (Young-Hee[8], 2007). Οι έρευνες που αφορούν στη διδασκαλία των Μαθηματικών μέσω των εικαστικών τεχνών, εξετάζουν την αξιοποίηση στη διδακτική διαδικασία εικαστικών έργων γνωστών καλλιτεχνών, ή άλλων διδακτικών υλικών που είναι βασισμένα στη τέχνη (Chronaki[9], 1995; Καμπάνη[10], 2001; Stathopoulou[11], 2008). Τα έργα τέχνης , όπως έργα ζωγραφικής, γλυπτικής, θα μπορούσαν να παρουσιαστούν και αξιοποιηθούν με εκπαιδευτικά προγράμματα στο πλαίσιο της ίδιας της σχολικήςτάξης ή σε έκθεσης ζωγραφικής στο σχολείο, σε Gallery ή σε Μουσείο (Kent[12], 2007; Λυμπεροπούλου & Παπαδάκη [13], 2006; Corbalan[14], 2004)

Β. Λογοτεχνία και Μαθηματικά

Περισσότεροι ερευνητές μελέτησαν την επίδραση της παιδικής και γενικότερα της"Μαθηματικής" Λογοτεχνίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών[15]. Τα Λογοτεχνικά βιβλία μυθοπλασίας, οι βιογραφίες, οι αυτοβιογραφίες, η ποίηση, τα βιβλία επιστημονικής φαντασίας, δίνουν τη

---

[8] Η Young-Hee (2007), κατασκευάζει, με τη βοήθεια του GSP, μοτίβα ψηφιδοθέτησης (tessellation)"Dang-Cho" που συναντάμε στη λαϊκή παράδοση της Κορέας.

[9] Η Chronaki (1995), επιχειρεί να διερευνήσει το πώς ο ίδιος ο εκπαιδευτικός αξιολογεί μια διδασκαλία η οποία βασίστηκε σε σε art-patterns για να διδαχθεί η έννοια της συμμετρίας.

[10] Η Καμπάνη (2001), μελετά την αξιοποίηση του έργου του Escher στη διδασκαλία των μετασχηματισμών στην Ευκλείδεια, Υπερβολική και Σφαιρική Γεωμετρία.

[11] Οι συγγραφείς προτείνουν ένα Webquest βασισμένο στα Γεωμετρικά patterns των "Έυστών"

[12] Ο Kent (2007), διερευνά τη σύνδεση Μαθηματικών και έργων τέχνης βασισμένων στην τεχνική της "Anamorphosis"στο πλαίσιο μιας έκθεσης – πραγματική ή εικονική—έργων τέχνης αυτής της μορφής.

[13] Η Παπαδάκη και η Λυμπεροπούλου (2006), μελετούν τους μετασχηματισμούς και ειδικότερα τη συμμετρία μέσω της επαφής των μαθητών με το έργο των Escher και Vasarely στο χώρο του μουσείου αλλά και στο σχολείο.

[14] Ο Corbalan (2004), παρουσιάζει την "Martmatics" μια έκθεση έργων τέχνης, με θέμα την αλληλεπίδραση των Μαθηματικών με τις εικαστικές τέχνες. Η έκθεση παρουσιάστηκε σε πάνω από 100 σχολεία β/θμιας εκπαίδευσης στην Ισπανία και έδινε τη δυνατότητα στους μαθητές, εκτός από μια απλή επίσκεψη , να συμμετάσχουν σε διάφορες δραστηριότητες.

[15] Μια εκτεταμένη βιβλιογραφία βρίσκεται στο Κοταρίνου (2007).

δυνατότητα στους εκπαιδευτικούς για μια εποικοδομιστικού τύπου διδασκαλία, παρέχουν έμμεσα εμπειρίες της Μαθηματικής διαδικασίας μέσα από τη γνωριμία των μαθητών με τους ίδιους τους μαθηματικούς και τις ανακαλύψεις τους και προωθούν θετικές στάσεις προς τη διδασκαλία των μαθηματικών (Daisey, 1994a). Δίνουν επίσης τη δυνατότητα ενιαιοποίησης των διαφόρων γνωστικών αντικειμένων όχι μόνο στην πρωτοβάθμια, αλλά και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Κοταρίνου και Σταθοπούλου, 2009a).

Στη βιβλιογραφία συναντάμε προτάσεις για την αξιοποίηση του ποιητικού λόγου (Μπαλής, 2002), του φιλοσοφικού λόγου[16] (Delikanlis, 2007; Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, 2002; Καλδρυμίδου και Τζεκάκη[17], 1996) και του γνωμικού λόγου[18] (Καλογεράκης, 2000), στη διδασκαλία των μαθηματικών. Όσον αφορά στην ποίηση, από την Αρχαία Ελληνική Γραμματεία προτείνονται τα επιγράμματα[19] με αναφορές στα Μαθηματικά (Μπαλής, 2002) ενώ από τη Νεώτερη ποίηση, Ελληνική και παγκόσμια, προτείνονται ποιήματα[20] στα οποία ο ποιητής χρησιμοποιεί μαθηματικές έννοιες ή μαθηματικούς όρους για να διατυπώσει τον ποιητικό του λόγο. Τέλος, μια εναλλακτική δραστηριότητα που αφορά στην ποίηση και τα Μαθηματικά, είναι η γραφή ποιημάτων από τους ίδιους τους μαθητές με την αξιοποίηση μαθηματικών όρων στη σύνθεση του ποιήματος (Keller, 2001) ή θεμάτων από τα Μαθηματικά (Triandafillidis, 2006; Gadanidis, 2008)

Τα παραμύθια[21] και οι θρύλοι καθώς και οι λαϊκές διηγήσεις δεν άφησαν επίσης αδιάφορους τους ερευνητές. Ο Ροντάρι (1985) στο βιβλίο του

---

[16] Από τα φιλοσοφικά κείμενα έχουμε προτάσεις για αξιοποίηση του διαλόγου "Μένων" του Πλάτωνα (Χιονίδου, 2002; Delikanlis, 2007, Καλδρυμίδου και Τζεκάκη (1996) και των έργων " Διάλογοι για τα Μαθηματικά"του A. Renyi (Μπαλής, 2003; Μηλιώνης, 2002) και "Ένας Σωκρατικός διάλογος" του J.P. Kahane (Μηλιώνης, 2002).

[17] Οι Καλδρυμίδου και Τζεκάκη (1996), εξετάζουν τη χρήση κειμένων της Ελληνικής Γραμματείας για τη διαπραγμάτευση επιστημολογικών χαρακτηριστικών των Μαθηματικών.

[18] Αποφθέγματα με θέμα τα Μαθηματικά, από έργα Αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών ή από διάσημους και καταξιωμένους μαθηματικούς.

[19] Κυρίως από την Παλατινή Ανθολογία

[20] Μια σειρά από ποιήματα κατάλληλα για τη διδασκαλία των μαθηματικών ή για συνδιδασκαλία Μαθηματικών και Νέων Ελληνικών έχουν ανθολογηθεί από τον Στέφανο Μπαλή στο βιβλίο του "Μαθηματικά και Ποίηση", Εκδόσεις Νησίδες, 2003.

[21] Οι Brender et al (1999), αξιοποιούν ένα Ρωσσικό λαϊκό μύθο με παιδιά Γυμνασίου, συνοδεύοντας την ανάγνωση του μύθου με διάφορες δραστηριότητες.

"Γραμματική της Φαντασίας", στο κεφάλαιο με τίτλο "Τα Μαθηματικά των παραμυθιών" προτείνει τη γνωριμία των παιδιών με διάφορες μαθηματικές έννοιες μέσω γνωστών παραμυθιών, ή μέσω ιστοριών που θα επινοήσουν οι δάσκαλοι ή τα ίδια τα παιδιά. Μπορούμε, επισημαίνει ο Ροντάρι, όχι μόνο να κάνουμε παραλλαγές σε γνωστά παραμύθια, αλλά να ξεκινήσουμε από έναν συλλογισμό ή μια λογική δομή και να φτιάξουμε ένα παραμύθι, μια ιστορία, ένα παιχνίδι.

Γ. Αφηγηματική τέχνη και Μαθηματικά

Η Αφηγηματική Τέχνη (Storytelling) μπορεί επίσης να αποτελέσει μια καινοτόμο και αποτελεσματική μέθοδο για τη διδασκαλία των Μαθηματικών σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης. Οι Zazkis και Liljedahl (2009) ισχυρίζονται ότι η αφήγηση αποτελεί ένα μέσο για τη δημιουργία μιας τάξης Μαθηματικών στην οποία οι μαθητές εκτιμούν, κατανοούν και διασκεδάζουν με τα Μαθηματικά. Με την αφήγηση ιστοριών, συνεχίζουν οι παραπάνω ερευνητές, μας δίνεται η δυνατότητα να δημιουργήσουμε το κατάλληλο πλαίσιο ή το υπόβαθρο για μαθηματικά προβλήματα ή μας βοηθάει να επεξηγήσουμε μαθηματικές έννοιες ή ιδέες. Η Nash (1993) τονίζει τη σπουδαιότητα των μύθων και αναφέρει παραδείγματα από την αξιοποίησή τους στη διδασκαλία των Μαθηματικών και των φυσικών επιστημών, τόσο από επαγγελματίες αφηγητές, όσο και από τους ίδιους τους καθηγητές επισημαίνοντας, ότι με την προφορική αφήγηση ιστοριών, επιτυγχάνεται μια διεπιστημονική προσέγγιση της γνώσης. Αναφέρει επίσης ότι με την προφορική αφήγηση αναπτύσσεται η φαντασία των παιδιών καθώς και η αποκλίνουσα σκέψη, βασικά συστατικά και τα δύο της δημιουργικότητας Ο Schiro (2004) προτείνει την μαθηματική επική προφορική αφήγηση (Mathematical epic oral storytelling), δηλαδή, την προφορική αφήγηση η οποία διαρκεί πολλές ημέρες, η ιστορία που αφηγείται είναι φανταστική και αποτελεί ένα πλαίσιο για να εμπλακούν τα παιδιά με Μαθηματικά. Ο Schiro αναφέρει ότι οι επικές αφηγήσεις έχουν τη δύναμη να αιχμαλωτίζουν το μυαλό, το συναίσθημα, την περιέργεια, τη φαντασία των παιδιών πολύ περισσότερο από τις σύντομες αφηγήσεις, διότι δίνουν την ευκαιρία στα παιδιά να αναστοχαστούν ανάμεσα στις αφηγήσεις την ιστορία και τα Μαθηματικά που περιέχονται, τους επιτρέπει να τη συζητήσουν με τους συμμαθητές τους και παράλληλα έχουν το χρόνο να την ονειρευτούν. Επίσης δίνει την ευκαιρία και το χρόνο στο δάσκαλο -σε αντίθεση με τις μικρές

Στην Ελληνική βιβλιογραφία συναντάμε την πρόταση για επιλογή των παραμυθιών στη διδασκαλία των Μαθηματικών σε κανονικές τάξεις Δημοτικού (Μητακίδου και Τρέσσου, 2002).

ιστορίες- να επαναλαμβάνει τις μαθηματικές έννοιες ή αλγορίθμους όσες φορές κρίνει απαραίτητο για τους μαθητές του και του επιτρέπει, έτσι, να αυξάνει σταδιακά το επίπεδο δυσκολίας και αφαίρεσης. Τέλος, οι Meel et al (2006) προσθέτουν ότι μια δραματοποίηση, με διαλόγους, κουστούμια και ηχητικά εφέ ενισχύουν την εμπειρία της αφήγησης.

Δ. Κινηματογράφος και Μαθηματικά

Ο κινηματογράφος αποτελεί και αυτός μια μορφή τέχνης, η οποία δεν άφησε αδιάφορους τους ερευνητές. Στη βιβλιογραφία συναντάμε διάφορες προτάσεις για την αξιοποίησή του στη διδακτική διαδικασία (Selby, 2009; Padula, 2006). Κυρίως προτείνονται κινηματογραφικά έργα που στηρίζονται σε επιστημονικά[22], λογοτεχνικά ή θεατρικά έργα,[23] , ταινίες κινουμένων σχεδίων [24] , τηλεοπτικές σειρές[25] καθώς και ολόκληρα εκπαιδευτικά προγράμματα[26] που υποστηρίζουν τους εκπαιδευτικούς οι οποίοι θα θελήσουν να τις ενσωματώσουν στη διδασκαλία τους (Padula, 2005). Την αξιοποίηση βιντεοταινιών μυστηρίου[27] προτείνουν οι Curcio και McNeece

---

[22] Ο Selby (2009), προτείνει την ταινία ' Powers to ten' των Morisson (1968), η οποία βασίζεται στο ομότιτλο έργο των Philip kai Phylis Morisson and the Office of Charles and Ray Eames.

[23] Για μαθητές Γυμνασίου- Λυκείου προτείνονται (Padula, 2006) οι ταινίες "Ένα υπέροχο μυαλό" του Ron Howard και το Proof του John Madden. Η ταινία έχει βασιστεί στο θεατρικό έργο Proof του David Auburn, το οποίο βραβεύτηκε το 2001 με το βραβείο Pulitzer

[24] Η ταινία κινουμένων σχεδίων "The Dot and the Line: A Romance in Lower Mathematics" των Goldman και Jones, έχει βασιστεί στο ομότιτλο έργο του Juster και έχει βραβευθεί από την Ακαδημία κινηματογράφου το 1965. Για τους μαθητές του Δημοτικού, προτείνεται επίσης για την εισαγωγή τους στην ιστορία των Μαθηματικών, η ταινία κινουμένων σχεδίων Donald in Mathemagic Land (Hallenberg, 1995).

[25] Προτείνονται η αστυνομική σειρά "Numb3rs", η οποία περιέχει πλήθος μαθηματικών αναφορών (Padula, 2005) καθώς και η σειρά "Star Trek" "Star Trek: The next Gneration" "Deep Space 9"(Allen, 1993)

[26]Η Texas Instruments σε συνεργασία με το N.C.T.M εκπόνησε το εκπαιδευτικό πρόγραμμα "*We All Use Math Every Day''* (καθημερινά, όλοι χρησιμοποιούμε Μαθηματικά) το οποίο απευθύνεται στις σχολικές βαθμίδες 9-12 και το οποίο στηρίζεται στα μαθηματικά που εμφανίζονται στην τηλεοπτική σειρά "Numb3rs".

[27] Οι βιντεοταινίες που αξιοποίησαν οι Curcio και McNeece είναι η σειρά 7 εικοσαλέπτων βιντεοταινιών "The Challenge of the Unknown" μαζί με τον ομώνυμο οδηγό για τη διδασκαλία (Maddux, Hilary C. Ed. New York: W.W. Norton &C., 1986) καθώς και τα Mathnet episodes on Square One TV

(1993) υποστηρίζοντας ότι υπάρχουν ομοιότητες ανάμεσα στις ερωτήσεις που θέτει ο λύτης προβλήματος για την επίλυσή του και στις ερωτήσεις που θέτει ο ντετέκτιβ για τη διελεύκανση ενός μυστηρίου.

Ε. Μουσική και Μαθηματικά

Όσον αφορά στη μουσική, αφ' ενός συναντάμε μελέτες που διερευνούν σχέσεις και συνδέσεις ανάμεσα στα Μαθηματικά και τη μουσική (Maher, 2004) και τις εκπαιδευτικές εφαρμογές τους (Χιονίδου, 2006; Maher, 2004) ενώ αρκετούς ερευνητές απασχόλησε η σχέση ανάμεσα στην ενασχόληση με τη μουσική και τη γνωστική ανάπτυξη στα μαθηματικά. Οι Winner και Hetland (2001) καθώς και ο Scripp (2002) από μεταναλύσεις των υπαρχουσών ερευνών, επεσήμαναν μία ισχυρή θετική αιτιακή σχέση μεταξύ της μάθησης, της μουσικής και spatial-temporal reasoning. Ο Catterall και οι συνεργάτες του (1999a) μελετώντας δεδομένα από 25.000 μαθητές σε χρονική περίοδο δέκα ετών, συνεπέραναν επίσης— δίχως να θεωρούν τη σχέση αιτιακή— ότι οι μαθητές που ασχολούνταν με τη μουσική στο Γυμνάσιο και το Λύκειο, παίζοντας κάποιο μουσικό όργανο, επέδειξαν σημαντικά υψηλότερες επιδόσεις στα Μαθηματικά από τους μαθητές με χαμηλή συμμετοχή σε μαθήματα μουσικής (Catterall et al, 1999a).

Στ. Χορός και Μαθηματικά

Σε μικρότερο βαθμό συναντάμε έρευνες που αξιοποιούν το χορό στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Μεταξύ αυτών, η έρευνα της Watson, η οποία μελετά τη σχέση του χορού με τέσσερεις (aspects) διαστάσεις των Μαθηματικών: τη διερεύνηση του χώρου, το ρυθμό, τη δομή και το συμβολισμό (Watson, 2004; 2005) και προτείνει μαθηματικές δραστηριότητες στο πλαίσιο του χορού, ως παραδείγματα του πώς ο ανθρώπινος νους μπορεί να δράσει ταυτόχρονα σε φυσικό και συμβολικό επίπεδο (physical and mental mode).

Z. Θέατρο και Μαθηματικά

Το θέατρο αποτελεί ένα ιδιαίτερο λογοτεχνικό είδος. Μπορεί να διαβαστεί ατομικά, να παρουσιαστεί υπό μορφή θεατρικού αναλογίου[28] και το κυριότερο να παρουσιαστεί υπό μορφή θετρικής παράστασης. Στη βιβλιογραφία συναντήσαμε μελέτες και προτάσεις για την αξιοποίηση του θεάτρου στη διδασκαλία των Μαθηματικών και με τους τρεις τρόπους που προαναφέραμε.

Από τις υπάρχουσες έρευνες, όπου αξιοποιήθηκε η δραματική τέχνη υπό μορφή θεατρικής παράστασης στη διδασκαλία των Μαθηματικών, τα αποτελέσματα ήταν ιδιαίτερα θετικά ως προς την κατανόηση μαθηματικών εννοιών και τη δημιουργία θετικών στάσεων για τα Μαθηματικά (Παπαδάκη, 2001; Παπαδάκη 2007; Κοταρίνου κ. α. 2008; Bodur, 2008) καθώς και ως προς τη σύνδεση Μαθηματικών και γλωσσικών μαθημάτων (Γαζίλα, 1993). Το παιδί είτε ως θεατής είτε ως ενεργό μέλος στο ανέβασμα της θεατρικής παράστασης, ενεργοποιώντας τη φαντασία και το συναίσθημά του, είχε τη δυνατότητα να προσεγγίσει διαφορετικά τα Μαθηματικά.

Οι παραστάσεις αυτές πραγματοποιήθηκαν από μαθητές-τριες του ίδιου τμήματος μιας σχολικής τάξης, Δημοτικού σχολείου (Bodur, 2008) Γυμνασίου (Παπαδάκη 2001, 2007; Γαζίλα, 1993; Ponza, 1998) Λυκείου (Κοταρίνου 2008) και στηρίχθηκαν σε κείμενα τα οποία ή έγραψαν τα ίδια τα παιδιά ή προέκυψαν από δραματοποίηση βιβλίων Μαθηματικής Λογοτεχνίας[29].

Ιδιαίτερα ενθαρρυντικά υπήρξαν και τα αποτελέσματα από θεατρικές παραστάσεις που αφορούσαν στα ίδια τα Μαθηματικά ή στην ιστορία τους (Asic, et al. 2008) καθώς και τη ζωή και το έργο διαφόρων επιστημόνων

---

[28] Το θεατρικό αναλόγιο είναι μια σκηνική μορφή κατά την οποία γίνεται ανάγνωση ενός έργου από ηθοποιούς και απευθύνεται σε κοινό.

[29] Η πρώτη παράσταση των μαθητών/τριών του Γυμνασίου στηρίχθηκε στο βιβλίο "Πειραχτήρι των Μαθηματικών του Η. Μ. Enzensberger και η δεύτερη η οποία ανέβηκε το 1985, στον 1ο Διάλογο για τα Μαθηματικά του Ούγγρου μαθηματικού Alfred Renyi (Γαζίλα, 1993).
Η παράσταση των μαθητών/τριών του Λυκείου, με τίτλο "Μια πανέμορφη ιστορία- Η μέτρηση της Γης από τον Ερατοσθένη" βασίστηκε στους διαλόγους στο βιβλίο "Τ' αστέρια της Βερενίκης" του Denis Guedj. Η θεατρική αυτή παράσταση, που αφορούσε την Αλεξάνδρεια της Ελληνιστικής περιόδου, αποτέλεσε το έναυσμα για το project "Ελληνιστική Αλεξάνδρεια: Ο Φάρος της Γνώσης", που είχε στόχο τη γνωριμία των παιδιών με τον Ελληνιστικό κόσμο μέσα από τα μαθήματα της Ιστορίας, των Αρχαίων και Νέων Ελληνικών, των Μαθηματικών, των Θρησκευτικών και της Πληροφορικής (Κοταρίνου, 2008).

(Güner, 2008, Prosperini[30], 1999). Αυτές οι παραστάσεις δεν πραγματοποιήθηκαν στο πλαίσιο της διδασκαλίας των μαθητών σε μία σχολική τάξη, αλλά από μαθητές διαφόρων τάξεων στο πλαίσιο πολιτιστικών προγραμμάτων ή project. Σε ορισμένες περιπτώσεις, οι ίδιοι οι καθηγητές των Μαθηματικών έγραψαν θεατρικά κείμενα ή διασκεύασαν λογοτεχνικά έργα[31] με θέματα από τα Μαθηματικά, τα οποία ανέβασαν σε σχολικές παραστάσεις[32], παίζοντας πολλές φορές και οι ίδιοι (Prosperini, 1999). Σε άλλες περιπτώσεις το γράψιμο και το ανέβασμα των έργων ανέλαβαν ερευνητές και φοιτητές θετικών επιστημών οι οποίοι συμμετείχαν σε ερευνητικές επιτροπές για εναλλακτικούς τρόπους παρουσίασης των Μαθηματικών (Asic, 2008[33])

---

[30] Στην παράσταση αυτή, η οποία ανέβηκε στο Liceo di Desenzano στη Brescia στην Ιταλία, παρουσιάστηκαν αποσπάσματα απο τη ζωή και το έργο των Αρχαίων Ελλήνων Μαθηματικών .

[31] Οι καθηγήτριες Χριστίνα Ζουρνά (Μαθηματικός) και Σόνια Κοτζαβαΐδου (φιλόλογος) διασκεύασαν και παρουσίασαν το 2009, το έργο "Ο πρίγκιπας των Μαθηματικών", βασισμένο στο ομότιτλο λογοτεχνικό έργο της M. Tent, με τη θεατρική ομάδα του 19ου Γυμνασίου-Λυκείου Θεσσαλονίκης .

[32] Από μια μικρή έρευνα, στην Ελλάδα έχουν γραφεί και έχουν ανεβαστεί από τους ίδιους τους συγγραφείς σε σχολικές παραστάσεις τα παρακάτω θεατρικά έργα με θέμα τα Μαθηματικά:

- *Οι Αριθμοί είναι αισθηματίες,,* του μαθηματικού Ντίνου Κορδώση, έκδοση του ίδιου, Αθήνα 2005 (ανέβηκε το 2002, στο 50ο Γυμνάσιο Αθηνών)
- *Τα παιδιά του Ευκλείδη,* του μαθηματικού Ηλία Κωνσταντόπουλου, Εκδόσεις Γκρίτζαλη, Μαρούσι, 2001.(ανέβηκε το 2001, στο 4ο Ενιαίο Λύκειο Αμαρουσίου)
- *Ο Άνθρωπος που μετρούσε την άμμο,* του μαθηματικού Ντίνου Κορδώση, βασισμένο στο ομότιτλο λογοτεχνικό βιβλίο της Gillian Bradshow (ανέβηκε το 2007, στο 50ο Γυμνάσιο Αθηνών, με παιδιά που συμμετείχαν στη Λέσχη Ανάγνωσης του σχολείου)
- *Ο Ταρτάλια είναι γνωστός στη σήμανση (Ένα ταξίδι στη φανταστική, παράξενη και μαγική χώρα των Μαθηματικών) ,*του μαθηματικού Ιωάννη Σταμέλου (ανέβηκε το 2007, στο 2ο Γυμνάσιο Αγίου Νικολάου-Λασηθίου, με παιδιά που συμμετείχαν στη Λέσχη Ανάγνωσης του σχολείου), στο πλαίσιο σχολικού προγράμματος Πολιτιστικών Δραστηριοτήτων
- *Η δίκη των αριθμών,* θεατρικό μονόπρακτο του μαθηματικού Γεωργίου Γκαλανάκη, ανέβηκε σε σχολείο του νομού Ηρακλείου.
- *Η Αλίκη στη χώρα των ...κλασμάτων* της φιλολόγου Βασιλικής Αλεξάκη βασισμένο στο ομώνυμο άρθρο της Λ. Λυμπεροπούλου από τον ΕΥΚΛΕΙΔΗ Α' λστ' τ.2/15 . Το έργο ανέβηκε με μαθητές του Καλλιτεχνικού σχολείου Ηρακλείου.
- [33]Στο πλαίσιο του τριετούς project 'Lovely math project' (Asic, 2008) γράφτηκαν έξι έργα σε θεατρική μορφή καθώς και ένα ορατόριο με θέματα από τα μαθηματικά όπως οι θετικοί και αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί, η έννοια του

Οι μαθητές, όπως αναφέρει ένας από τους συγγραφείς θεατρικής παράστασης (Κωνσταντόπουλος, 2001) υποδέχθηκαν από την πρώτη στιγμή με αγάπη και ενθουσιασμό την ιδέα για την παρουσίαση του έργου. Σε προφορικές συζητήσεις που είχαμε με τους μαθηματικούς Ν. Κορδώση και Γ. Σταμέλο που ανέβασαν θεατρικές παραστάσεις, με θεατρική ομάδα μας τονίστηκε η θετική επίδραση της θεατρικής παράστασης στις αντιλήψεις των παιδιών για τα μαθηματικά. Σε ορισμένες περιπτώσεις αξιοποιήθηκαν σε πολιτιστικά προγράμματα έργα γνωστών θεατρικών συγγραφέων τα οποία δεν είχαν Μαθηματικό περιεχόμενο ή μαθηματικές αναφορές, έδωσαν όμως αφορμή για δημιουργία "καταστάσεων προβληματισμού" στα Μαθηματικά (Λυμπεροπούλου και Παπαδάκη, 2009).

Η Padula (2006) προτείνει μια σειρά από θεατρικά έργα[34] μαζί με αντίστοιχες μαθηματικές δραστηριότητες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών σε μαθητές Λυκείου και φοιτητές. Με αφορμή τα έργα αυτά μπορούν να θιγούν θέματα όπως η Θεωρία του Χάους, τα

Fractals, το τελευταίο θεώρημα του Fermat, οι πρώτοι αριθμοί Germain, ενώ ο Gustafson (2003) προτείνει την παρουσίαση από τους μαθητές, μικρών θεατρικών έργων με θέμα από τα Μαθηματικά, υπό μορφή θεατρικού αναλογίου (Reader' s Theater). Ο ίδιος παραθέτει μια σειρά από μικρά έργα μαζί με προτάσεις για δραστηριότητες πριν και μετά την ανάγνωση του έργου.

Τέλος η Cynthia Chin (2007) ανέβασε με μεγάλη επιτυχία με μαθητές το μιούζικαλ των Rosenblum και Lessner, 'Fermats' Last Tango' το οποίο βασίζεται στην ιστορία της απόδειξης του γνωστού θεωρήματος από τον Andrew Wiles. Η Chin στα συμπεράσματά της από όλη τη διαδικασία του ανεβάσματος του έργου τονίζει την προσωπική εμπλοκή των μαθητών, η οποία δεν επιτυγχάνεται από την απλή ανάγνωση του λιμπρέτου ή το άκουσμα μιας ηχογραφημένης παράστασης.

κλάσματος καθώς και οι πράξεις κλασμάτων, η έννοια του λόγου και της αναλογίας, ο μέγιστος κοινός διαιρέτης καθώς και οι ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων. Τέσσερα από τα έργα αυτά ανέβηκαν σε παράσταση από μαθητές/τριες 7ης και 8ης βαθμίδας ενός σχολείου με τη βοήθεια ορισμένων μελών που συμμετείχαν στο project. Οι καθηγητές των μαθητών/τριών που συμμετείχαν στην παράσταση διαπίστωσαν μια θετική αλλαγή στην επίδοσή τους καθώς και στη στάση τους προς τα μαθηματικά.

[34] Τα θεατρικά έργα είναι το "Arcadia" του Tom Stoppard και "Proof"" του David Auburn.

Η. Δραματική Τέχνη στην Εκπαίδευση (ΔΤΕ) και Μαθηματικά

Στη διεθνή κοινότητα έχει αρχίσει τα τελευταία χρόνια να αναπτύσσεται ένας προβληματισμός για την επίδραση της Δραματικής Τέχνης στην Εκπαίδευση και στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Η Δραματική Τέχνη στην Εκπαίδευση αποτελεί μια αυστηρά δομημένη παιδαγωγική διαδικασία, η οποία χρησιμοποιεί ασκήσεις και τεχνικές της δραματικής τέχνης και στην οποία η έμφαση δίνεται στη διαδικασία και όχι στο τελικό προϊόν (Άλκηστις 2000). Αποτελεί μια νέα προσέγγιση στην παιδαγωγική πράξη η οποία στοχεύει σε μια μάθηση βιωματική, συνεργατική, ενεργητική δίνοντας στο παιδί ευκαιρίες να αναπτύξει δεκτικότητα, κατανόηση, ευρηματικότητα, περιέργεια, εκφραστικότητα, αυτοσυναίσθηση (Άλκηστις, 1998; Άλκηστις, 2000; Wagner, 1999; Wooland, 1999).

Οι υπάρχουσες ερευνητικές εργασίες αφορούν αφ' ενός στη συμβολή της ΔΤΕ στην οικοδόμηση εννοιών, στην ανάπτυξη στάσεων και αντιλήψεων και αφ' ετέρου στη μεταγνωστική της λειτουργία. Οι περισσότερες από τις έρευνες αυτές εστίασαν στο πώς η διδασκαλία βασισμένη σε τεχνικές της Δ.Τ.Ε. μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υποστηρίξει καλύτερα το περιεχόμενο των παραδοσιακών προγραμμάτων σπουδών των Μαθηματικών, κυρίως στη προσχολική ηλικία (Tulej[35] 1990; Lampropoulou και Kaldrimidou[36], 1997; Davis et al, 2003), στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση (Saab[37], 1987;

---

[35] Η έρευνα της Tulej (1990) αναφέρεται στην παρουσίαση των αρνητικών αριθμών με τεχνικές του Δράματος σε παιδιά νηπιαγωγείου.

[36] Η έρευνα των Lampropoulou και Kaldrimidou (1997) εστιάζει στις δυνατότητες που έχει το θεατρικό παιχνίδι στη δημιουργία ενός διδακτικού περιβάλλοντος για τις μαθηματικές έννοιες. Από την ανάλυση των δεδομένων τους οι ερευνήτριες συνεπέραναν ότι οι διδακτικές καταστάσεις με θεατρικό παιχνίδι προσέφεραν ένα πλούσιο διδακτικό περιβάλλον, με φαινόμενα και εμπειρίες αναγκαίες για την ανάπτυξη των γεωμετρικών εννοιών και ότι το θεατρικό παιχνίδι λειτούργησε επίσης ως διαγνωστικό μέσο για την διερεύνηση των εννοιολογικών αντιλήψεων από τα παιδιά και την αξιολόγηση της κατανόησής τους.

[37] Η Saab (1987), στη διατριβή της ερεύνησε τις επιδράσεις του Δημιουργικού Δράματος στην επίδοση και στις στάσεις στα Μαθηματικά καθώς και στη δημιουργικότητα, μαθητών 6ης βαθμίδας. Η έρευνα έδειξε ότι 87 μαθητές 6ης βαθμίδας οι οποίοι διδάχθηκαν, επί οκτώ εβδομάδες, θέματα Μαθηματικού υπολογισμού (Mathematics computation) με τεχνικές του Δημιουργικού δράματος (Creative Drama) είχαν σημαντικά υψηλότερη επίδοση από τους μαθητές της ομάδας ελέγχου που διδάχθηκαν το ίδιο θέμα με τον παραδοσιακό τρόπο. Δε διαπιστώθηκε όμως καμιά επίδραση στις στάσεις τους προς τα Μαθηματικά όπως και δεν παρατηρήθηκε καμία μεταβολή στη δημιουργικότητά τους. Ένα ενδιαφέρον για την ερευνήτρια αποτέλεσμα της έρευνας αυτής, ήταν ότι τα κορίτσια της πειραματικής

Tanriseven, 2000; Üredi et al, 2003; Fleming et all [38], 2004; Korkmaz, 2007) καθώς και στις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου (Ekinözü, 2003,2007; Şengül et al, 2009; 2004, 2006[39]).

Σε όλες αυτές τις έρευνες συναντήσαμε μια μεγάλη ποικιλία από φανταστικούς κόσμους (as-if worlds) που μπορούν να αποτελέσουν το πλαίσιο για τις διδασκαλίες. Φανταστικά βασίλεια, φανταστικές παιδικές πόλεις, σχολεία άλλης εποχής αλλά και καταστήματα, νοσοκομεία, τράπεζες, εταιρείες, ταχυδρομεία, μουσεία δίνουν το πλαίσιο ώστε τα παιδιά μέσα από το παιχνίδι ρόλων να ασχοληθούν και επιλύσουν μαθηματικά προβλήματα (Jarrett 1977; Krockover, 1979; Heck[40],1980; Griffiths[41]

ομάδας επέδειξαν μεγαλύτερη δημιουργικότητα (creativity) από τα αγόρια. Για το λόγο αυτό η Saab προτείνει περαιτέρω έρευνα για τη διαφοροποίηση, ως προς το φύλο, της επίδρασης του Δράματος στη διδασκαλία των Μαθηματικών

[38] Το τριετές project, με την ονομασία " The National Theatre's Transformation project" εφαρμόσθηκε σε ένα μικρό αριθμό σχολείων στο Ανατολικό Λονδίνο και κάθε έτος περιελάμβανε μια σειρά από εργαστήρια Δράματος στην πρώτη φάση και ένα μεγάλο εργαστήρι για τη δημιουργία παράστασης στη β΄ φάση. Παράλληλα οι μαθητές παρακολούθησαν θεατρικές παραστάσεις από επαγγελματικούς θιάσους. Στα εργαστήρια συμμετείχαν φοιτητές Δράματος και θεάτρου, ηθοποιοί, performers, μουσικοί, χορευτές, συγγραφείς καθώς και οι δάσκαλοι των τάξεων. Οι παρουσία των δασκάλων έπαιξε σημαντικό ρόλο, καθότι ήταν αυτοί που συνεισέφεραν στην ανατροφοδότηση (feedback) όλης της εργασίας των εργαστηρίων ελέγχου. Τα μέλη επίσης της ερευνητικής ομάδας τα οποία παρακολούθησαν εκ περιτροπής κάθε έτος, τις παραστάσεις των σχολείων, διέκριναν κάθε χρόνο, μια αυξανόμενη αυτοκυριαρχία και αυτοπεποίθηση στους μαθητές. Το ενδιαφέρον ερώτημα που θέτουν οι ερευνητές για τους λόγους που παρουσιάστηκαν τα θετικά αποτελέσματα στα μαθηματικά είναι, αν αυτά οφείλονται στην αυξημένη αυτοπεποίθηση των μαθητών ή ειδικότερα στη γνωστική τους ανάπτυξη.

[39] Διδάχθηκαν Πιθανότητες και Μεταθέσεις, σε μαθητές Β Γυμνασίου, με την αξιοποίηση της δραματοποίησης.

[40] Τα παιδιά κατασκεύασαν το σκηνικό μιας πόλης, με διάφορες επιχειρήσεις όπως εταιρία Real Estate, Τράπεζα, Κομμωτήριο, Εστιατόριο κ.α. στις οποίες επιχειρήσεις τα παιδιά είχαν τους ρόλους των εργαζομένων. Τα παιδιά για να κάνουν τα σκηνικά τους έπρεπε να αγοράσουν υλικά, να κάνουν μετρήσεις και να προβούν σε οικονομικές συναλλαγές ως εργαζόμενοι. Όλες αυτές οι δραστηριότητες ενθουσίασαν τα παιδιά και είχαν επίσης ως αποτέλεσμα να συνειδητοποιήσουν τη σύνδεση των μαθημάτων τους με την πραγματική ζωή.

[41] Η Griffiths (2001), προτείνει παιχνίδια ρόλων όπου τα παιδιά θα γίνουν εναλλάξ ιδιοκτήτες καταστημάτων και πελάτες οι οποίοι θα έρθουν σε χρηματικές συναλλαγές. Η Griffiths διατυπώνει την άποψη ότι το παιχνίδι ρόλων παρέχει ευκαιρίες για συνεργατική μάθηση (peer-tutoring), για συνεργασία με τους γονείς, για παρεμβάσεις

2001; Foster et al[42], 2002; Anderson[43], 1995). Οι Hallenberg (1995), Rodriguez[44] (1997) και Charette[45] (2004), προτείνουν το παιχνίδι ρόλων για την αξιοποίηση της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία. Οι μαθητές ή και ο ίδιος ο δάσκαλος, σε ρόλο διάσημων Ελλήνων Μαθηματικών της Αρχαιότητας μπορούν να βοηθήσουν ώστε να γνωρίσουν οι μαθητές το έργο τους.

Εκτός το παιχνίδι ρόλων, η τεχνική της ΔΤΕ που αξιοποιείται περισσότερο είναι η Δραματοποίηση με θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών (Lawrence[46], 2000) ή από Λογοτεχνικά βιβλία που έχουν αναφορές στα

από τον δάσκαλο και παρέχει ευκαιρίες στα παιδιά να αναστοχαστούν πάνω στις δικές τους εμπειρίες.

[42] Στην έρευνα των Foster et al (2002), συναντάμε την αξιοποίηση του παιχνιδιού ρόλων, στη διερεύνηση μαθηματικών εννοιών από παιδιά προσχολικής ηλικίας.

[43] Η Anderson (1995) στις προτάσεις της για μια δημιουργική χρήση των φύλλων εργασίας (worksheets) περιλαμβάνει το παιχνίδι ρόλων και την αφήγηση ιστοριών. Τα παιδιά αντί να συμπληρώσουν απλά τα κενά των φύλλων εργασίας, καλούνται να υποδυθούν ρόλους όπως πειρατών, παλαιοντολόγων, αστυνομικών ερευνητών, στους οποίους ρόλους τα αποτελέσματα των φύλλων εργασίας είναι απαραίτητα στοιχεία. Με τις δραστηριότητες αυτές, ισχυρίζεται η Anderson, η συμπλήρωση των κενών στα φύλλα εργασίας αποκτά νόημα για τα παιδιά και δεν αποτελεί πλέον μια μοναχική εργασία χωρίς κανένα κίνητρο για την ολοκλήρωσή της.

[44] Ο Rodriguez (1997), προτείνει μια δραστηριότητα με παιχνίδι ρόλων, κατά την οποία οι μαθητές σε ρόλο μελών του Μουσείου της Αλεξάνδρειας κατά την Ελληνιστική περίοδο μαζί με τον Ερατοσθένη αναζητούν το μήκος της περιφέρειας της Γης. Η δραστηριότητα αυτή, όπως ισχυρίζεται ο Rodriguez, έχει πολυπολιτισμική και βιωματική διάσταση και επιτρέπει στους μαθητές μέσα από το παιχνίδι ρόλων να κατανοήσουν όχι μόνο το περιεχόμενο, αλλά και το κοινωνικό πλαίσιο μέσα στο οποίο δρούσαν οι επιστήμονες την εποχή αυτή.

[45] Ο Charette (2004), προτείνει το ρόλο του αρπεδονάπτη στην Αρχαία Αίγυπτο ο οποίος χρησιμοποιεί την τεχνική μέτρησης του ορθογωνίου τριγώνου (Πυθαγόρειο θεώρημα) για την μέτρηση των εδαφών.

[46] Η πρόταση της Lawrence (2000), για τη δημιουργία μιας πιο ανθρώπινης εικόνας για τα Μαθηματικά, είναι η δραματοποιημένη παρουσίαση ιστορικών "ανεκδότων" και προβλημάτων από την ιστορία των Μαθηματικών. Η δραματοποίηση μπορεί να είναι μικρής διάρκειας ή ολόκληρο έργο το οποίο θα διαρκέσει ολόκληρη τη διδακτική περίοδο. Επίσης οι μαθητές μετά από βιβλιογραφική έρευνα για τη ζωή και το έργο του μαθηματικού μπορούν να κατασκευάσουν τα κουστούμια και να γράψουν το έργο για να το παρουσιάσουν στην υπόλοιπη τάξη. Μερικοί μαθητές μπορούν επίσης να συνεργαστούν για να παρουσιάσουν δραματοποιημένες, πραγματικές ή φανταστικές συναντήσεις διαφόρων φημισμένων Μαθηματικών. Η Lawrence παραθέτει ένα παράδειγμα μιας τέτοιας δραματοποίησης, κατά την οποία εμφανίζεται

Μαθηματικά (Nevin[47], 1992; Daisey, 1994[48]; Wilburne et all[49], 2007). Οι υπόλοιπες τεχνικές, όπως ο "Μανδύας του ειδικού[50]" (Gensrick[51], 1992; Pennington και Faux**,** 1999; Holden[52], 2002), ο "δάσκαλος σε ρόλο" (Tent[53],

---

στην τάξη ο ίδιος Πυθαγόρας, ντυμένος με χιτώνα και παρουσιάζει την φιλοσοφία των Πυθαγορείων στα παιδιά και τους εξηγεί το Πυθαγόρειο Θεώρημα χρησιμοποιώντας εποπτικό υλικό.

[47] Τα παιδιά, υποστηρίζει η Nevin έχουν τη δυνατότητα μέσα από τη συμμετοχή τους κατά τη δραματοποίηση της ιστορίας να σκεφτούν και να λύσουν προβλήματα, να ανασκευάσουν την ιστορία ενσωματώνοντας νέες έννοιες, να επικοινωνήσουν μέσα από τα Μαθηματικά και γενικότερα να μετέχουν ενεργά στην οικοδόμηση της γνώσης τους

[48] Ως παράδειγμα Daisey, αναφέρει τη δραματοποίηση των ιστοριών από το βιβλίο του Tahan "Ο άνθρωπος που μετρούσε".

[49] Οι Wilburne και Napoli (2007), πραγματεύεονται τη δραματοποίηση ενός κεφαλαίου λογοτεχνικού έργου για διερεύνηση μαθηματικών εννοιών σε τάξεις Γυμνασίου.

[50] Στη μελέτη των Pennington και Faux**,** (1999) συναντάμε μια ολοκληρωμένη πρόταση για ένα διαθεματικό project στα μαθήματα της Γεωμετρίας, της Ιστορίας και του Δράματος , σε μαθητές 5ης και 6ης Δημοτικού. Οι μαθητές μέσα από το Δράμα έχουν την ευκαιρία να διερευνήσουν τις αρχικές έννοιες της Ευκλείδιας Γεωμετρίας στο περιβάλλον που ο ίδιος ο Ευκλείδης έδρασε, στο Μουσείο της Αλεξάνδρειας στην Αίγυπτο το 290 π. Χ. Τα παιδιά σε ρόλους σχεδιαστών ενός Μουσείου και ο δάσκαλος σε ρόλο επιμελητή Μουσείου, ανασυνθέτουν το παρελθόν στην προσπάθειά τους να ιδρύσουν στην Αλεξάνδρεια, ένα Μουσείο για τον Ευκλείδη. Οι μαθητές διδάσκονται βασικές έννοιες και κατασκευές στη Γεωμετρία για να είναι σε θέση να σχεδιάσουν και πραγματοποιήσουν εκπαιδευτικά προγράμματα στο Μουσείο, στα οποία θα γίνεται αναπαράσταση μαθημάτων του Ευκλείδη σε μαθητές του.

[51]Η Gensrick (1992), πραγματοποίησε μια έρευνα δράσης για να διερευνήσει κατά πόσο είναι δυνατή η πραγματοποίηση διδασκαλίας των Μαθηματικών, με την αξιοποίηση της παραπάνω στρατηγικής. Οι διδασκαλίες της σε τάξεις Γυμασίου με τίτλους "Σχεδιασμός ενός σχολείου" και " Project: Η πισίνα"αφορούσαν η πρώτη στις έννοιες της κλίμακας , της μέτρησης, της επιφάνειας και η δεύτερη στις έννοιες της επιφάνειας και του όγκου. Οι μαθητές στο πρώτο Project, ανέλαβαν ως αρχιτέκτονες και σχεδιαστές να κάνουν τα σχέδια ενός Δημοτικού σχολείου. Στο δεύτερο οι μαθητές ανέλαβαν ρόλους ειδικών συμβούλων του Δημοτικού συμβουλίου, για την κατασκευή από το Δήμο μιας πισίνας.

[52] Στην παρέμβαση, οι μαθητές πήραν ρόλους ειδικών μιας "Δικηγορικής εταιρίας" ειδικευμένης σε θέματα εργατικού δικαίου, ενώ η καθηγήτριά τους πήρε το ρόλο μιας απλής εργαζόμενης στην εταιρία. Το πρόβλημα που έπρεπε να επιλύσουν οι δικηγόροι ήταν η διαφωνία ανάμεσα σε μία υπάλληλο και τη διευθύντριά της, στον υπολογισμό των μισθών των εργαζομένων στην υπηρεσία τους.

2000), η "παγωμένη εικόνα" (Matz και Leier 1992)[54], η "συνέντευξη" (Daisey[55] ,1994; Gadanidis et al[56], 2005), το "ρεπορτάζ" (Gadanidis et al, 2005) η "τηλεοπτική εκπομπή" (Ward[57], 2008) το "στρογγυλό τραπέζι", αξιοποιούνται από ερευνητές μαθηματικούς ή δασκάλους , οι οποίοι έχουν επιμόρφωση μακράς διάρκειας στη ΔΤΕ.

Μία άλλη ομάδα ερευνητών αξιοποίησε την τεχνική της παντομίμας[58] για πιο αποτελεσματική διδασκαλία των πράξεων στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού.

---

[53] Η Tent (2000), σε ρόλο ευέξαπτης βασίλισσας , προκαλεί με επιτυχία τους μαθητές της Α Γυμνασίου οι οποίοι είναι σε ρόλο υποτακτικών της να της απαντήσουν σε ερωτήματα που αφορούν τις ανισότητες.

[54] Οι ερευνητές Matz και Leier (1992) προτείνουν μια μέθοδο την οποία ονομάζουν " Παγωμένη σκηνή" για να βοηθήσουν τους μαθητές στην επιλογή των κατάλληλων πράξεων κατά την επίλυση προβλήματος. Η μέθοδος αυτή περιλαμβάνει το γράψιμο από τους μαθητές, οι οποίοι έχουν χωριστεί σε ομάδες, ενός μικρού θεατρικού διαλόγου γύρω από ένα μαθηματικό πρόβλημα, το οποίο θα έχουν επιλέξει οι ίδιοι, τη δραματοποίησή του και την αξιοποίηση της τεχνικής της "παγωμένης εικόνας" κατά τη διάρκεια της παρουσίασης του έργου. Το χαρακτηριστικό αυτής της μεθόδου είναι ότι κατά την παρουσίαση του έργου, ο αφηγητής "παγώνει" τη σκηνική δράση όταν χρειάζεται ένας μαθηματικός υπολογισμός απαραίτητος για τα λόγια του επόμενου προσώπου του έργου. Η δράση συνεχίζεται όταν κάποιος ακροατής απαντήσει σωστά στο ζητούμενο υπολογισμό. Οι Matz και Leier επισημαίνουν ότι αυτή η προσέγγιση στην επίλυση προβλήματος διδάσκει τους μαθητές/τριες βήμα –βήμα στρατηγικές επίλυσης προβλήματος δίνοντάς ένα ρεαλιστικό πλαίσιο στα προβλήματα και ταυτόχρονα με τις μαθηματικές δεξιότητες καλλιεργεί και τις δεξιότητες ανάγνωσης και γραφής.

[55] Όσον αφορά στις βιογραφίες, η Daisey (1994b) προτείνει να εργαστούν οι μαθητές σε ζευγάρια, και αφού διαβάσουν το ίδιο το βιβλίο ή τα προτεινόμενα αποσπάσματα, να παρουσιάσουν μια βιντοσκοπημένη συνέντευξη με το πρόσωπο της βιογραφίας .

[56] Οι Gadanidis και Hughes (2005), προτείνουν συνεντεύξεις με μαθηματικές έννοιες ή ιστορικά πρόσωπα.

[57] Κατά τη διδασκαλία των τετραπλεύρων ο Ward μετέτρεψε την τάξη σε κανάλι τηλεπώλησης καλωδιακής τηλεόρασης όπου τα παιδιά σε ρόλους παρουσιαστών προσπαθούσαν να 'πουλήσουν' τα διάφορα παραλληλόγραμμα, προβάλοντας με πειστικότητα και χιούμορ τις χαρακτηριστικές ιδιότητές τους.

[58] Η παντομίμα αποτελεί μια τεχνική με την οποία ο ερμηνευτής αναπαριστά μια ιστορία χωρίς τη χρήση ομιλίας, αλλά με εκφραστικές κινήσεις του σώματος και του προσώπου. Για το λόγο αυτό οι μαθητές πρέπει να παρακολουθούν πολύ προσεκτικά για να κατανοήσουν το νόημα των μιμήσεων και κάθε μαθητής πρέπει να εκφράσει τη μαθηματική κατάσταση που ο ίδιος έχει κατανοήσει.

Οι Bae et al (2007) έδειξαν ότι η χρήση της παντομίμας (inquiry-based pantomime) ενισχύει την εννοιολογική κατανόηση από μαθητές πρώτης βαθμίδας, μαθηματικών εννοιών όπως ο πολλαπλασιασμός (Bae, 2007), η διαίρεση μερισμού και μέτρησης (Bae, 2003) συντελεί στην αποτελεσματική διατήρηση της γνώσης αυτής. Η παντομίμα αποτελεί για τους ερευνητές αυτούς ένα δραστικό εργαλείο στη διδασκαλία των Μαθηματικών διότι ενισχύει την επικοινωνία των παιδιών, βελτιώνει τον τρόπο συλλογισμού τους (reasoning), ενισχύει τη δημιουργική και λογική σκέψη και δημιουργεί θετικές στάσεις προς τα Μαθηματικά.

Η Chronaki (1990) εξέτασε τη δυνατότητα της χρήσης του Δράματος ως μεθόδου διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο. Με την έρευνά της προσπάθησε να προσδιορίσει τα οφέλη και την αξία του Δράματος ως διδακτικής μεθόδου και ταυτόχρονα να επισημάνει τους περιορισμούς που αντιμετωπίζουν οι καθηγητές στην προσπάθειά τους να το χρησιμοποιήσουν ως διδακτικό εργαλείο των Μαθηματικών. Από συνεντεύξεις με καθηγητές που είχαν προηγούμενη εμπειρία από διδασκαλίες με τη βοήθεια του δράματος, με μαθητές που διδάχθηκαν με τη μέθοδο αυτή και από την παρατήρηση τριών μαθημάτων (case studies) σε κάθε μία από τις τρεις τάξεις του Γυμνασίου η ερευνήτρια κατέληξε στο συμπέρασμα ότι το Δράμα περέχει κίνητρα και ερεθίσματα ώστε οι μαθητές/-τριες να βρουν ενδιαφέρον στις μαθηματικές δραστηριότητες. Επιπλέον τους/τις ενθαρρύνει να συμμετέχουν ενεργητικά, να επικοινωνούν και να συνεργάζονται μεταξύ τους και συνδέει τα Μαθηματικά με εμπειρίες από την πραγματική ζωή.

Η Duatepe (2004), στη διατριβή της διερευνά τις επιδράσεις της διδασκαλίας που βασίζεται στις τεχνικές του Δράματος, στην επίδοση των παιδιών της Α Γυμνασίου στη Γεωμετρία, στα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης *Van Hiele* και στις στάσεις τους στη Γεωμετρία. Η Duatepe εφάρμοσε τεχνικές, όπως 'παγωμένη εικόνα', 'μανδύα του ειδικού', 'παιχνίδι ρόλων' για να διδαχθούν γεωμετρικές έννοιες όπως: η γωνία, το πολύγωνο, ο κύκλος, ο κύλινδρος. Η έρευνα έδειξε σημαντική επίδραση αυτής της διδασκαλίας στην επίδοση των παιδιών στη Γεωμετρία, όπως και πολύ θετικές επιδράσεις στην αυτοπεποίθηση και την αυτοεικόνα των παιδιών.

Οι μοναδικές ερευνες που αφορούν σε μαθητές Λυκείου είναι η έρευνα της Jeaco (1994), σε μαθητές-τριες αυτής της σχολικής βαθμίδας αλλά και του Γυμνασίου, καθώς και στους γονείς τους, με στόχο τη διερεύνηση των στάσεών τους στη χρήση του Δράματος στη διδασκαλία των Μαθηματικών, μία μελέτη η οποία αφορά στη μελέτη των αλγορίθμων στο μάθημα των

Μαθηματικών ή των υπολογιστών (computer science) (Bachelis, 1994) καθώς και οι έρευνες των Κοταρίνου & Σταθοπούλου (2009a, 2009b, 2009c) και Κοταρίνου, Χρονάκη & Σταθοπούλου (2010). Οι έρευνες πραγματοποιήθηκαν στο μάθημα των Μαθηματικών και της Φυσικής, με μαθητές 10ης και 11ης βαθμίδας (Α΄ και Β΄ Λυκείου αντίστοιχα) με στόχο να συνειδητοποιήσουν οι μαθητές-τριες αφ' ενός τη σχέση των Μαθηματικών με το αντίστοιχο πλαίσιο- κοινωνικό, οικονομικό, ιστορικό- και αφ' ετέρου να κατανοήσουν έννοιες των Μαθηματικών και της Φυσικής. Για το λόγο αυτό, πραγματοποιήθηκαν διαθεματικά projects στα οποία αξιοποιήθηκαν τεχνικές της Δραματικής τέχνης στην Εκπαίδευση και κυρίως το παιχνίδι ρόλων. Οι δραστηριότητες περιελάμβαναν δημόσια αντιπαράθεση (role-playing debate), συζήτηση στρογγυλής τραπέζης (round table debate), ραδιοφωνικές εκπομπές όλα συνδυασμένα με παιχνίδι ρόλων. Η δημόσια αντιπαράθεση αφορούσε στην επιλογή από τη Γαλλική Εθνοσυνέλευση μιας ενιαίας μονάδας μέτρησης του μήκους, κατά την περίοδο της Γαλλικής Επανάστασης (Kotarinou et al, 2010). Η συζήτηση στρογγυλής τραπέζης είχε ως θέμα την ηθική και πολιτική ευθύνη του επιστήμονα και οι ραδιοφωνικές εκπομπές είχαν ως θέμα "Τα Μαθηματικά στη ζωή μας"(Kotarinou et al. 2008, 2009b, 2009c) και η τηλεοπτική εκπομπή είχε θέμα 'τα Ξυστά και τα μαθηματικά τους' (Σταθοπούλου, Κοταρίνου και Χαβιάρης, 2010). Από τα φύλλα αξιολόγησης που συμπλήρωσαν οι μαθητές, και από τις συνεντεύξεις οι ερευνήτριες διαπίστωσαν οι δραστηριότητες με τεχνικές της ΔΤΕ είχαν μεγάλη αποτελεσματικότητα τόσο στο γνωστικό επίπεδο όσο και στο κοινωνικοπολιτισμικό, δίνοντάς στους μαθητές τη δυνατότητα να αντιληφθούν τα μαθηματικά ως ένα πολιτισμικό αγαθό.

Θ. Θεατροπαιδαγωγικά προγράμματα

Σύμφωνα με τη Σέξτου (2005: 22) τα θεατροπαιδαγωγικά προγράμματα ή TiE (Theater in Education) είναι ένα είδος θεάτρου που βασίζεται στις δυνάμεις της καλλιτεχνικής φόρμας και συμβουλεύεται την παιδαγωγική στην προσπάθειά του να προσφέρει σε ειδικό κοινό (μαθητές) και σε ειδικές συνθήκες (σχολεία, εκπαιδευτικό σύστημα) ευκαιρίες για μάθηση με αποτελεσματικούς τρόπους.

Τα θεατρο-παιδαγωγικά προγράμματα (TiE) συνήθως περιλαμβάνουν

• Μια μεταφερόμενη και σύντομη θεατρική παράσταση που λειτουργεί ως ερέθισμα για περαιτέρω δράση και συζήτηση ή την παρουσίαση ενός θέματος με θεατρικό τρόπο,

• Βιωματικά εργαστήρια που βασίζονται στο εκπαιδευτικό δράμα, το θεατρικό παιχνίδι και τη δραματοποίηση αφηγηματικού ή οπτικοακουστικού υλικού, και

• Συζητήσεις όπου οι μαθητές συμμετέχουν ως ενεργοί θεατές για τη λήψη αποφάσεων και την επίλυση προβλημάτων γύρω από το θέμα του προγράμματος.

Συνήθως, στο πλαίσιο αυτών προγραμμάτων, οι θεατροπαιδαγωγικές ομάδες προσφέρουν στα σχολεία ένα έντυπο υλικό (teachers' package) που αποτελεί προέκταση του προγράμματος. Αυτό περιλαμβάνει ασκήσεις θεατρικού παιχνιδιού, αφορμές για δραματοποιήσεις, συζητήσεις με τα παιδιά και συνδέσεις της παράστασης με άλλα αντικείμενα του αναλυτικού προγράμματος, όπως: η γλώσσα, η γεωγραφία, οι φυσικές επιστήμες, τα μαθηματικά[59], η οικολογία, τα εικαστικά και η μουσική (Σέξτου, 2005:43). Ένα από τα πλεονεκτήματα των θεατροπαιδαγωγικών προγραμμάτων αποτελεί το γεγονός ότι εκτός από το δάσκαλο και άλλα πρόσωπα μπορούν να αναλάβουν ρόλους και στις περιπτώσεις που ο δάσκαλος δεν έχει εμπιστοσύνη στον εαυτό του να υποδυθεί κάποιο ρόλο υπάρχει ο ηθοποιός που μπορεί να αναλάβει το ρόλο του (Jeaco, 1994).

Μία εναλλακτική πρόταση για προσέγγιση των Μαθηματικών μέσα από το Δράμα και η οποία προσομοιάζει με τα θεατρο-παιδαγωγικά προγράμματα, παρουσιάζεται στην έρευνα των Ufektepe και Ozel (2002). Οι ερευνητές με τη συμμετοχή προπτυχιακών φοιτητών Μαθηματικών τμημάτων ή θετικών επιστημών γενικότερα[60], δημιούργησαν μια μουσική και θεατρική

---

[59] Η ομάδα Harrogate το 1996 προσέφερε στους εκπαιδευτικούς μια σειρά από δραστηριότητες για τη γλώσσα και τα Μαθηματικά καθώς και το υλικό "The Gift Horse",ειδικά σχεδιασμένο γι'αυτούς (βλ. Σέξτου 2005). Η Watch Theatre Company το 1985 ανέλαβε την παραγωγή του έργου 'Maths Magic and the Moon' το οποίο πραγματευόταν το ρόλο των Μαθηματικών στην κοινωνία. Η θεατροπαιδαγωγική ομάδα Belgrade Coventry στην παραγωγή της 'Big Deal' απαιτούσε τη συμμετοχή των μαθητών και κατά την παράσταση και σε διαφορες δραστηριότητες που επακολουθούσαν στη σχολική τάξη. (Jeaco, 1995). Τη φθίνουσα πορεία των TIE ομάδων τη δεκαετία του 80 ακολούθησε ένα ανανεωμένο ενδιαφέρον για το θεσμό την επόμενη δεκαετία, με τη δημιουργία νέων ομάδων (Jeaco, 1995).

[60] Η συμμετοχή φοιτητών στη θέση ηθοποιών-παιδαγωγών είναι ένα από τα σημεία στα οποία η παράσταση αυτή διέφερε από τα θεατρο-παιδαγωγικά προγράμματα. Η παράσταση με τίτλο "Math Show" είχε διάρκεια μία έως δύο ώρες και συνολικά

παράσταση η οποία συνοδευόταν από δραστηριότητες των οποίων κύριο χαρακτηριστικό ήταν η κοινωνική αλληλεπίδραση και η δημιουργική έκφραση. Η παράσταση καθώς και οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν με σκοπό να απαλύνουν τα τραυματικά συναισθήματα των μαθητών από τη διδασκαλία των μαθηματικών και να μειώσουν το άγχος προς τα μαθηματικά, τόσο των ίδιων όσο και των φοιτητών που έπαιρναν μέρος στην παράσταση (Show).

Η Locke (1993), έχοντας η ίδια προηγούμενη επαγγελματική εμπειρία στη συγγραφή και παραγωγή θεατροπαιδαγωγικών προγραμμάτων με θέμα τις φυσικές επιστήμες και τα Μαθηματικά, ανέβασε δύο παραστάσεις με μαθητές μιας τάξης Γυμνασίου οι οποίες παρουσιάστηκαν σε μαθητές δημοτικού. Στη μία το έργο είχαν γράψει και σκηνοθετήσει τα ίδια τα παιδιά και στο δεύτερο συγγραφέας ήταν η ίδια. Και στις δύο παραστάσεις έγινε προσπάθεια να εμπλακούν ενεργά και οι μαθητές –θεατές. Τα παιδιά του Γυμνασίου, χωρισμένα σε ομάδες, κατά τη διάρκεια 7 εβδομάδων, ερεύνησαν τα θέματα που έπρεπε να παρουσιάσουν, έγραψαν, σκηνοθέτησαν το έργο και το παρουσίασαν σε παιδιά 4ης έως και 6ης Δημοτικού. Από τα φύλλα αξιολόγησης που μοιράστηκαν στους συντελεστές της παράστασης και τους θεατές, αμέσως μετά την παράσταση, καθώς και ένα μήνα μετά διαπιστώθηκαν ότι οι επιδόσεις των μαθητών που συνετέλεσαν στην παράσταση, δεν διαφοροποιήθηκαν από αυτές των θεατών, οι μεγαλύτεροι μαθητές (11-12 ετών) συγκράτησαν καλύτερα στη μνήμη τους τις έννοιες, σε σχέση με τους μικρότερους μαθητές (9-11ετών) και τα ποσοστά επιτυχίας επηρεάστηκαν θετικά, ανάλογα με τη διδασκαλία των εννοιών αυτών απο το δάσκαλο, πριν ή μετά την παράσταση και ότι η πλειοψηφία των μαθητών κατανόησε τις μαθηματικές έννοιες του έργου.

I. Μαθηματική παράσταση[61] (mathematical performance)

Οι Gadanidis, Hughes, Borba (2008a, 2000b), αναζητούν τους τρόπους ώστε οι μαθηματικές εμπειρίες και μαθηματικές ιδέες στη σχολική τάξη να γίνουν πιο αποτελεσματικές. Για το λόγο αυτό εξετάζουν τα Μαθηματικά και τη μαθηματική εκπαίδευση μέσα από το φακό των παραστατικών τεχνών (performing arts) και θεωρούν ένα μαθητή που κάνει Μαθηματικά ή ένα καθηγητή που διδάσκει Μαθηματικά, ως ένα μαθηματικό που δίνει

παρουσιάστηκε σε 10.000 μαθητές 15 σχολείων στοιχειώδους εκπαίδευσης, στο διάστημα τριών ετών, από τον Οκτώβριο του1998 έως τον Ιούνιο του 2001.

[61] Σύμφωνα με το Λεξικό του Μπαμπινιώτη ως 'παράσταση' ορίζεται η παρουσίαση σε ακροατήριο θεατρικού, γενικότερα καλλιτεχνικού έργου ή άλλου θεάματος.

παράσταση (performance Mathematician). Οι Gadanidis και Borba (2008) ισχυρίζονται ότι μαθηματικές παραστάσεις (performances) που πραγματεύονται σύνθετες μαθηματικές έννοιες και στις οποίες μπορεί να περιλαμβάνονται μεταξύ άλλων και η σύνθεση ποιημάτων ή τραγουδιών, ο χορός, η δημιουργία video-clips, οι δραματοποιημένοι διάλογοι[62] και σκετς με διάφορες τεχνικές ΔΤΕ, δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές βιώσουν με τους συνομηλίκους τους και την οικογένειά τους νέους μαθηματικούς κόσμους, να μοιραστούν συναισθηματικές στιγμές με αφορμή τα μαθηματικά και να απολαύσουν τη μαθηματική ομορφιά.

4. ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Οι εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις, συνήθως, προβάλλουν την ανάγκη για εφαρμογή καινοτόμων πρακτικών με στόχο τη βελτίωσης της μάθησης. Οι εκπαιδευτικές καινοτομίες εστιάζουν, κυρίως, στην αλλαγή αρχών και πεποιθήσεων, στην εφαρμογή νέων διδακτικών προσεγγίσεων, στη χρήση νέων διδακτικών μέσων που ενσωματώνει στη διδασκαλία του ο εκπαιδευτικός (Fullan, 1991).

Οι συνήθεις σχολικές πρακτικές για τη διδασκαλία των μαθηματικών βασίζονται σε ένα πρόγραμμα σπουδών για το συγκεκριμένο αντικείμενο, σε συγκεκριμένο βιβλίο καθώς και σε συγκεκριμένες οδηγίες για τον εκπαιδευτικό. Η διαπίστωση ότι αυτές οι πρακτικές οδηγούν απλώς σε συσσώρευση γνώσης παράλληλα με την ανάγκη για αλλαγή φιλοσοφίας του εκπαιδευτικού συστήματος και προσαρμογής της μαθησιακής διαδικασίας

---

62 Οι Gadanidis, Gerofsky & Jardine εγκαινίασαν το 2008 ένα festival Μαθηματικών παραστάσεων (mathematical performances), στον Καναδά. (www.mathfest.ca) στο οποίο οι μαθητές και οι καθηγητές μπορούν να παρουσιάσουν τις παραστάσεις τους σε ψηφιακή μορφή (Gadanidis, 2009). Μια σειρά από μαθηματικές παραστάσεις με τεχνικές του Δράματος (mathematical performances) οι οποίες είχαν πραγματοποιηθεί κατά καιρούς σε μαθητές Γυμνασίου, απο τους Gadanidis και Hughes ανέβηκαν στο διαδίκτιο (www.edu.uwo.ca/mathscene) με τη βοήθεια και άλλων συντελεστών στο πλαίσιο ενός project των Gadanidis (UWO), Hughes (UOIT), Borba (São Paulo State University, Brazil). Μία παράσταση (performance) με θέμα το 'άπειρο' παραθέτουν οι Schroeder και Gerofsky (1998), οι οποίες διδάσκουν αντίστοιχα κίνηση και μαθηματικά. Η παράσταση πραγματοποιήθηκε το 1998, στο πλαίσιο του ετήσιου Συνεδρίου Bergamo και περιελάμβανε δημιουργική κίνηση, μοντέρνο χορό, αυτοσχεδιασμό, ανάγνωση ποιημάτων και κειμένων των ίδιων των δημιουργών ή μιας συραφής από έργα άλλων συγγραφέων , Μαθηματικών ή Φιλοσόφων. Η παράσταση πλαισιωνόταν από μουσική και συμμετοχή του κοινού.

στη διαρκώς μεταβαλλόμενη πολυδιάστατη πραγματικότητα της εποχής μας οδήγησε την πολιτεία —τουλάχιστον τη ρητορική της— να αναφερθεί στην ανάγκη για εφαρμογή καινοτόμων πρακτικών. Στα τελευταία αναλυτικά προγράμματα, που αφορούν στην υποχρεωτική εκπαίδευση, στην Ελλάδα σε μια προσπάθεια εκπαιδευτικής μεταρρύθμισης η διαθεματική προσέγγιση της γνώσης προτείνεται ως μια καινοτομία με στόχο τη συνοχή της διδασκόμενης ύλης και τη δημιουργία ενός πλαισίου που θα διασφάλιζε μεγαλύτερη αυτονομία στον εκπαιδευτικό[63].

Σ' αυτή την εργασία παρουσιάστηκαν μια σειρά από εναλλακτικές προτάσεις για τη διδασκαλία των μαθηματικών, οι οποίες προϋποθέτουν ένα διαθεματικό πλαίσιο και αλλαγή στις σχολικές πρακτικές— αλλαγή στην κουλτούρα της τάξης. Η εφαρμογή των εναλλακτικών διδακτικών προσεγγίσεων από το δάσκαλο, όπως αναφέρθηκαν σ' αυτή την εργασία, απομακρύνει από αναπαραγωγή στείρας γνώσης και ενεργοποιεί το ενδιαφέρον και τη δημιουργικότητα των μαθητών οι οποίοι κοινωνικά αλληλεπιδρώντας γίνονται δημιουργικοί και κατασκευάζουν τη γνώση τους, συνειδητοποιώντας τη σύνδεση των μαθηματικών με διάφορες εκφάνσεις της ζωής και της δημιουργίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Άλκηστις, Κ. (1998). *Το βιβλίο της δραματοποίησης,* Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα

Άλκηστις, Κ. (2000). *Η δραματική τέχνη στην εκπαίδευση,* Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα

Allen, S. (1993). *The World according to Gene Rodenberry.* (ED358491)

Anderson, A. (1995). Creative Use of Worksheets: Lessons My Daughter Taught Me, *Teaching Children Mathematics,* v2 n2 p72-79 Oct 1995.

[63] http://www.pi-schools.gr/paideia_dialogos/analitika-programata.pdf

Asic, G., Ozcalli, M., Deren, M. (2008). Lovely Math Project Drama applications in Teaching Mathematics, proceedings of International congress of Drama/Theatre in Education, Ankara 21-23 November 2008, pg. 386-389.

Βαϊνάς, Κ. (1995). Γεωμετρία - Αισθητική - Αρχιτεκτονική δύο παραδείγματα από / για τα σχολικά μαθηματικά γεωμετρικά μοτίβα - Γεφύρια με παραβολικές καμάρες, *20ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας,* 10-12 Νοεμβρίου, Ηράκλειο.

Bae, J., Park, D., Park, M. (2007). The retention of Mathematical concepts in multiplication in the inquiry-based pantomime instructions, *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* v1, p195, Seoul: PME.

Bae, J. (2003). Enhancing Children's Understanding of Mathematical Concepts Using Pantomime *Proceedings of the Seminar on the Best Practices and Innovations in the Teaching and Learning of Science and Mathematics at the Primary School Level,* August 2003 Sengalor, Malaysia.

http://hrd.apecwiki.org/index.php/Seminar_on_the_Best_Practices_and_Innovations_in_the_Teaching_and_Learning_of_Science_and_Mathematics_at_the_Primary_School_Level

Bachelis, G., James, D., Maxim, B., Stout, Q. (1994). Bringing Algorithms to Life: Cooperative Computing Activities Using Students as Processors. *School Science and Mathematics* , v94, n4, p176-86, Apr 1994.

Bodur, B. (2008) Mathteatre- Teaching and Learning with Drama and a presentation, proceedings of International congress of Drama/Theatre in Education, Ankara 21-23 November 2008, pg. 306-321.

Brender, M., Dickman, N., Heller, R., Marku L., Shukler, A., Zaslavsky, O. (1999). Mathematics and Literature: Learning Mathematics in a Folk-tale context, in *Proceedings of PME XXIII,* Haifa, Vol.I, pp. 267.

Burton, J., Horowitz, R., Abeles, H. (1999). Learning In and Through the Arts: Curriculum Implications, in Edward B. Fiske (Ed.), *Champions of Change: The Impact of the Arts on Learning.* The Arts Education Partnership; The President's Committee on the Arts and Humanities, Washington, D.C. p.1-18.

Γαζίλα, Β. (1993). Πώς μια θεατρική παράσταση για τα Μαθηματικά καλύπτει κενά στη διδασκαλία τους στη Μέση Εκπαίδευση, *Διάσταση,* τεύχος 3-4, 1993.

Γεωργιάδου- Καμπουρίδη, Β. (1997) Γεωμετρία και Βυζαντινή Αρχιτεκτονική, *14ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας*, 14-16 Νοεμβρίου, Μυτιλήνη.

Catterall, J., Iwanaga, J. and Chapleau, R. (1999a). "Involvement in the Arts and Human Development", in Edward B. Fiske (Ed.), *Champions of Change: The Impact of the Arts on Learning.* The Arts Education Partnership; The President's Committee on the Arts and Humanities, Washington, D.C. p.1-18.

Catterall, J., Waldorf L. (1999b). "The Chicago Arts Partnerships in Education: Summary Evaluation." in Edward B. Fiske (Ed.), *Champions of Change: The Impact of the Arts on Learning.* The Arts Education Partnership; The President's Committee on the Arts and Humanities, Washington, D.C. p.47-62

Catterall, J., (1995a). *Different ways of knowing: 1991-94 National Longitudinal Study Final report*, the Galef Institute of Los Angeles, Los Angeles, California.

Catteral J., Dreyfus, J., Dejarnette, K. (1995b). *How Can "Different Ways of Knowing" Impact a Learning Community? Summary of the Rosemead School District 1994-95 Evaluation Report*, Galef Inst., Santa Monica, CA, ED461002.

Charette, R. (2004). "Integrating the history of mathematics in the teaching of mathematics" ICME, Topic Study Group 17.

Chronaki, A. (1997). *Case studies in the Teaching of Mathematics through the use of Art-based activities,* Unpublished PhD thesis, Bath: University of Bath.

Chronaki, A. (1995). A teacher's evaluation of art-based curriculum materials in the mathematics classroom, *20ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας*, 10-12 Νοεμβρίου, Ηράκλειο.

Chronaki, A. (1990). An investigation of the potentiality of using drama in the teaching of mathematics in secondary school, Unpublished Master Dissertation, University of Bath.

Corbalan, F. (2004). MartMATICS, *"The 10th International Congress on Mathematics Education",* July 4-17 2004, Copenhagen, Denmark, TG21. http://www.icme-organisers.dk/tsg21/Corbalan.pdf

Daisey, P. (1994). The use of trade books in secondary science and mathematics instruction: Classroom Stragedies, *School Science and Mathematics,* v94 n4.

Davis, A.; Millward, P.; Pettitt, D. (2003). Using story and drama to develop mathematics in Davis, Andrew **;** Pettitt, Deirdre *Developing understanding in primary mathematics : key stages 1 and 2,* RoutledgeFalmer, London.

Delikanlis, P. (2007). Geometry in Meno by Plato: A contribution for Humanity Education through problem solving, *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, ,* v1, p213, Seoul: PME.

Duatepe, A. (2004). *The effects of Drama based instruction on seventh grade students' Geometry achievement, Van Hiele geometric thinking levels, attitude toward Mathematics and Geometry,* Thesis submitted to the Graduate School of Natural and Applied Sciences 0f Middle East Technical University

Ekinözü, İ., Şengül, S. (2007). "Permütasyon ve Olasılık Konusunun Öğretiminde Canlan dırma Kullanılmasının Öğrenci Başarısına ve Hatırlama Düzeyine Etkisi" Kastamonu Eğitim Dergisi . Cilt: 15 No:1, 251-258, Mart 2007.(The effect of the usage of Role-play in permutation and probability subject to the students' success and recall level, *Kastamonu Education Journal,* vol. 15, No: 1, 251-258, March 2007).

Ekinözü, İ. (2003). "İlköğretim 8. Sınıf Öğrencilerinin Permütasyon ve Olasılık Konusunu Dramatizasyon Yöntemiyle Öğretiminin Başarıya Etkisi " Yayınlanmamaış Yüksek Lisans Tezi. Marmara Üniversitesi, İstanbul **(** *An investigation on the Effects of Permutation and Probablity in Elementary School on the Success of Education with Dramatization*, Unpublished Master Thesis, Marmara University, Istanbul **).**

Fiske, E. (ed.) (2007). *Champions of Change: The Impact of the Arts on Learning*. The Arts Education Partnership; The President's Committee on the Arts and Humanities

Fleming M., Merell C., Tymms (2004). P., The impact of Drama on pupils' language, mathematics, and attitude in two primary schools, *Research in Drama Education,* Volume 9, Number 2.

Foster, M. and Foster, R. (2002). Numeracy all around: developing childrens' mathematics through role play and directed daily experience, in Cooper, H. and Sixsmith, C. (Ed.) *Teaching across the early years 3-7,* v.1,part 4, p. 189-195 October 2002, Routledge.

Fullan, M., (1991). *The new meaning of Educational Change*, London: Cassell

Gadanidis, G., Hughes, J., Borba M. (2008) Students as Performance Mathematicians, *Mathematics Teaching in the Middle School,* v14 n3 p168-175 (Oct 2008).

Gadanidis, G. & Borba M. (2008). Our Lives as Performance Mathematicians, *For the Learning of Mathematics*, vol 28 num 1 (March 2008).

Gadanidis, G. (2008). A lust for mathematics. Canadian Mathematical Society Notes. vol. 4 n.1 (February 2008).

Gadanidis, G., Gadanidis, Janette M.; Huang, Alyssa Y. (2005). Using Humor to Gain Mathematical Insight, *Mathematics Teaching in the Middle School*, v10 n5 p244-250 Jan 2005.

Gensrick, J. (1992). Drama in education : using "Mantle of the Expert" in the teaching of mathematics Thesis (M.A.)--University of Wisconsin--Madison, 1992.

Griffiths, R. (2001). Money and Shops, Role Play and Real Life, *Mathematics Teaching*, n174 p20-22 Mar 2001.

Güner, H., Sari, A. (2008). A case study on History of Science: A play called "Because Science is not to give up" proceedings of International congress of Drama/Theatre in Education, Ankara 21-23 November 2008, pg. 369-385.

Gustafson, C. (2003). *Acting cool! : using reader's theatre to teach math and science in your classroom,* Worthington, Ohio : Linworth Learning.

Hallemberg, H. (1995). Mathematics in History, *Montessori Life,* v7 n2 p30-32 Spr 1995.

Heck, S. (1980) Problem Solving Plus Role Playing Equal Interest Plus Basic Skills in Mathematics, *Arithmetic Teacher*, v28 n1 p34-36 Sep 1980.

Hetland, L. & Winner, E. (2004). Cognitive Transfer from Arts Education to Non-arts Outcomes: Research Evidence and Policy Implications, in E. Eisner and M. Day (eds.), *Handbook on Research and Policy in Art Education,* National Art Education Association.

Holden, J. (2002**).** What's This Got to Do with Maths? *Education Review* vol.15 no 2, pp 35-40

Ingram, D.& Seashore, K. (2003). Arts for academic achievement: Summarative evaluation report, Center for Applied Research and Educational Improvement, University of Minnesota.

Jarrett, Olga S. (1997). Science and Math through Role-Play Centers in the Elementary School Classroom, *Science Activities*, v34 n2 p13-19 Sum 1997.

Jeaco, D. (1994). ''Cracking'' Mathematics through Drama: Years 7 to 13, *Mathematics in School,* v.23 n5 p38-39, November 1994.

Καλαβάσης, Φ., Ορφανός Σ., Λόξα Γ., Καφούση Σ., Σκουμπουρδή Χ., Χαβιάρης, Π., Σταθοπούλου, Χ., Καπέλου, Α. (2005). Φοβίες και άγχος για το μάθημα των Μαθηματικών στο Παπαηλιού Χ. (Επιμ) *Τόμος Α΄, Αθήνα,* Ατραπός.

Καλδρυμίδου, Μ.; Τζεκάκη, Μ. (1996). Ιστορία, Επιστημολογία και Διδασκαλία των Μαθηματικών: Μια εναλλακτική προσέγγιση του νοήματος των Μαθηματικών, 13ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, Αλεξανδρούπολη 29/11 έως 01/12 1996.

Καλογεράκης, Ι. (2000). Η Ελλάδα κοιτίδα των μαθηματικών αποφθεγμάτων. Η χρήση τους κατά την διδασκαλία, *17ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας,* Νοέμβρης 10- 12, Αθήνα.

Καμπάνη, Ε. (2001). Η αξιοποίηση του έργου του M. C. Escher στη διδασκαλία των μετασχηματισμών στην Ευκλείδεια, Υπερβολική και Σφαιρική Γεωμετρία, στο Α. Αρβανιτογεώργος; Β. Παπαντωνίου και Δ. Πόταρη (επιμ.) *Ερευνητικές προσεγγίσεις στη διδακτική της Γεωμετρίας, Πρακτικά 4ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Γεωμετρίας,* Πατάκης, Αθήνα.

Καμπάνη, Ε. (2000). Αλληλεπιδράσεις των Μαθηματικών με τη Ζωγραφική κατά την περίοδο της Αναγέννησης, *17ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας,* Νοέμβρης 10- 12, Αθήνα.

Keller, R.; Davidson, D. (2001). The Math Poem: Incorporating mathematical terms in poetry, *Mathemativs Teacher,* Vol.94, No.5, May 2001.

Kent, P. (2007). Developing Mathematical Learning in the Technology-Enhanced boundary crossing of Mathematics and Art, *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, ,* v1, p238, Seoul: PME.

Korkmaz, T., Karadağ, E. (2007). Geometri derslerinde drama yönteminin etkiliğinin değerlendirilmesi [The evaluation of effectiveness of drama method in geometry lesson]. *Yeditepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi* (EDU 7), 2 (2), s.1–19.

Kotarinou, P., Chronaki, A.; Stathopoulou, C. (2010). Debating for 'one measure for the world':Sensitive pendulum or heavy earth? Mathematics Education and Society 6th International Conference, Berlin, Germany20-25 March, 2010.

Κοταρίνου, Π.; Σταθοπούλου, Χ. (2009a). 'Το εύθραυστο εκκρεμές ή η βαρειά γη; Ένα debate για την καθιέρωση του 'Μέτρου'. Εισήγηση στο 26ο Πανελλήνιο Συνέδριο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας στη Θεσσαλονίκη, 13-14-15 Νοεμβρίου 2009.

Κοταρίνου, Π.; Σταθοπούλου Χ. (2009b). "Ο άνθρωπος που μετρούσε την άμμο": ένα διαθεματικό project για μια ενοποιητική διδασκαλία διαφορετικών γνωστικών αντικειμένων στο Λύκειο, 3ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών, Ρόδος, 29-31 Οκτωβρίου 2009, σελ.331-341.

Kotarinou, P.; Stathopoulou Ch. (2009c). "Drama in education" in teaching Mathematics to 10th grade's students" in Tzekaki M., Kaldrimidou M., Sakonidis C. (Eds) *Proceedings of the 33th Conferenceof the International Groupfor the Psychology of Mathematics Education,* Vol.1, pp. Thessaloniki, Greece: PME, σελ. I 410.

Κοταρίνου, Π.; Κουτλή Δ.; Χρυσανθάκη- Αποστολοπούλου, Ν. (2008). "The impact of dramatic arts on the teaching of mathematics in the secondary education" εισήγηση στην 6η Διεθνή Συνδιάσκεψη για το θέατρο στην εκπαίδευση: *"Θέατρο και εκπαίδευση στο κέντρο της σκηνής"* του Πανελληνίου Δικτύου για το Θέατρο στην Εκπαίδευση, Αθήνα 27-30 Μαρτίου 2008.

Κοταρίνου, Π. (2007). "Η λογοτεχνία και οι δραματικές τέχνες στη διδασκαλία της Γεωμετρίας στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση" εισήγηση στο 6ο Διήμερο Διαλόγου για τη διδασκαλία των μαθηματικών *"Μαθηματικά και Λογοτεχνία"* που διοργανώθηκε από την Ομάδα έρευνας της Μαθηματικής Εκπαίδευσης του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη 17-18 Μαρτίου 2006.

Krockover, G. (1979). Solving Everyday Problems by Applying Science and Mathematics Principles, *School Science and Mathematics*, v79 n8 p607-12 Nov 1979.

Κωνσταντόπουλος, Η. (2001). Τα παιδιά του Ευκλείδη (θεατρική παρουσίαση των Στοιχείων του Ευκλείδη), *18ου Πανελλήνιου Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας της Ε.Μ.Ε. Μαθηματικός Αλφαβητισμός. Ο ρόλος του σχολείου στην κοινωνία της πληροφορίας και των νέων τεχνολογιών,* Ρόδος 23-25 Νοεμβρίου 2001, Ελληνική Μαθηματική εταιρία.

Lampropoulou, M.; Kaldrimidou, M. (1997). The deamatic play as a didactical environment for the young children: A study who focuses on mathematical notions. Paper at the EECERA Conference on the Quality of Early Childhood Education, *CHILBHOOD IN A CHANGIG SOCIETY,* Munich, Germany, 3-6 September, 1997.

Lawrence, H. (2000). A Visit from Pythagoras--Using Costumes in the Classroom. *Mathematics Teacher*, v93, n8, p 652-55, Nov. 2000.

Locke**,** Ti **(**1993)**.** *Science/math education & Educational theatre,* Thesis (Master In Teaching), The Evergreen State College, Olympia Washington.

Λυμπεροπούλου, Λ.; Παπαδάκη, Μ. (2009). Μια κατάσταση προβληματισμού: Το Quad του Beckett, *26ο Πανελλήνιου Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας της Ε.Μ.Ε.,* Θεσσαλονίκη, 13-14-15, Νοεμβρίου 2009.

Λυμπεροπούλου, Λ.; Παπαδάκη, Μ. (2006). Η Συμμετρία στους M.C. Escer και V. Vasarely: από το χώρο του Μουσείου στην τάξη των Μαθηματικών, *23ο Πανελλήνιου Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας της Ε.Μ.Ε.,* Πάτρα, 24-26 Νοεμβρίου, 2006.

Maher, P. (2004), Mathematics and music: some educational considerations, Philosophy of mathematics education journal, 18 . ISSN 1465-2978.

Maher, Philip J., (2004). Mathematics and music: some educational considerations, *"The 10th International Congress on Mathematics Education",* July 4-17 2004, Copenhagen, Denmark, TG21.

Matz, Karl A.; Leier, Cynthia (1992). Word Problems and the Language Connection. *Arithmetic Teacher*, v39, n8, p14-17 Apr 1992.

Μηλιώνης, Χ. (2007). Εξερευνώντας την Επιπεδοχώρα, στο Χασάπης Δ. (επιμ.) *Μαθηματικά και Λογοτεχνία*, 6ο Διήμερο Διαλόγου για τη διδασκαλία των μαθηματικών, 17&18 Μαρτίου 2006, Θεσσαλονίκη, City Publish, Θεσσαλονίκη.

Μητακίδου, Σ.; Τρέσσου, Ε. (2002). *Διδάσκοντας Γλώσσα και Μαθηματικά με Λογοτεχνία. Μια δημιουργική συνάντηση,* Παρατηρητής, Θεσσαλονίκη.

Μπαλής, Σ. (2003). Διαθεματική προσέγγιση των Μαθηματικών -Ιστορία-Αρχαία Ελληνική Γραμματεία-Λογοτεχνία, *20ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας,* Νοέμβρης 07-09, Βέροια.

Μπαλής Σ. (2002). Διαθεματικές δραστηριότητες από τα Μαθηματικά στην : Ποίηση - Πεζογραφία - Αρχαία Ελληνική Γραμματεία, *19ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας*, Νοέμβρης, 8-10, Κομοτηνή.

Nash, J. (1993). Telling tales about science and math, in Weaver, M. (ed.), *Tales as Tools,* Jonesborough, Tennessee: The National Storytelling Press, (pp. 133-138).

Nevin, M. (1992). A Language Arts Approach to Mathematics*, Arithmetic Teacher*, v40 n3 p142-46, Nov 1992.

Omniewski, R. (1999). *The Effects of an Arts Infusion Approach on the Mathematics Achievement of Second-Grade Students*, doctoral Dissertation, Kent State University, Dissertation Abstracts International, 60(05), 1389 A

Παπαδάκη, Μ. (2001). Ταυτότητες και τρίγωνο του Pascal ή μαθηματικά και Θέατρο, *Ευκλείδης Α΄,* Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, 42, 32-35.

Παπαδάκη Μ. (2007). Θέατρο και Μαθηματικά Η περίπτωση της "7ης Νύχτας" από το "Πειραχτήρι των Αριθμών" του Χανς Μάγκνους Εντσενσμπέργκερ, στο *Μαθηματικά Λογοτεχνία, 6ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών,* Χασάπης Δ. (επιμ.) Publish City, Θεσσαλονίκη 2007.

Padula, J. (2005). Mathematical Fiction: Its Place in Secondary-School Mathematics Learning*, Australian Mathematics Teacher,* v61 n4 p6-13 2005.

Padula, J. (2006). Mathematical Fiction for Senior Students and Undergraduates: Novels, Plays, and Film, *Australian Senior Mathematics Journal*, v20 n2 p36-44 2006.

Pennington, E & Faux, G. (1999). *"...No Royal Road to Geometry" A ten lesson project in Mathematics, History & Drama for year5 or 6,* Education Initiatives, Cardew Farm, Dalston, Carlisle.

Ponza, M. (1998). A role for the history of Mathematics in the teaching and learning of Mathematics: An Argentinian experience, *Mathematics in School,* 27, no4, pp.10-13, S '98.

Presmeg, N. (2009). Mathematics education research embracing arts and sciences, ZDM Mathematics Education 41:131–141.

Prosperini, L. (1999). 'Matematica a teatro: perché no?', *Didattica delle Scienze e Informatica nella Scuola*, a.XXXV, n.199, 28-34.

Rodriguez, Alberto J. (1997). Invited Paper. *Science Teacher*, v64 n1 p8 Jan 1997.

Ροντάρι, Τ. (1985). *Γραμματική της Φαντασίας,* Τεκμήριο, Αθήνα

Saab, J. (1987) *The effects of creative Drama methods on mathematics achievement, attitudes and creativity,* PhD Dissertation Education D., West Virginia University

Schroeder, C., Gerofski, S. (1998). Beyond the Span of my Limbs: Gesture, Number and Infinity, *Journal of Curriculum Theorizing,* !4(3), 39-48.

Selby, V. (2009). Storytelling adds meaning, *Mathematics Teacher,* Vol.102, No,8, April 2009.

Şengül, S., Örnek (Tükenmez) S. (2009). The effects of dramatization method on elementary school students' levels of maths attitudes and achievements, *Procedia Social and Behavioral Sciences* 1, 2131-2135.

Şengül, S., Ekinözü, İ. (2006). Canlandırma Yönteminin Öğrencilerin Matematik Tutumuna Etkisi", *Kastamonu Eğitim Dergisi*, Cilt: 14 No:2. 517- 526, Ekim 2006. **(**The Effects of Dramatization Method on Students' Attitudes towards Math's, *Kastamonu Education Journal*, Section: 14 No: 2. 517–526).

Şengül, S. Ekinözü , İ. (2004). " Permütasyon ve Olasılık Konusunun Öğretiminde Canlan dırma Kullanılmasının Öğrenci Başarısına ve hatırlama Düzeyine Etkisi " *XIII.Ulusal Eğitim Bilimleri Kurultayı.*6-9 Temmuz 2004, İnönü Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Malatya. (The effect of the usage of Role-play in permutation and probability subject to the students' success and recall level)

Σέξτου, Π. (2005). *Θεατρο-παιδαγωγικά προγράμματα στα σχολεία*, Μεταίχμιο, Αθήνα.

Schiro, M., Lawson, D. (2004). *Oral storytelling and Teaching Mathematics,* SAGE publications.

Scripp, L. (2002). An Overview of Research on Music and Learning, in in Richard Deasy, *Critical links: Learning in the Atrts and Student Academic and Social Development,* Arts Education Partnership.

Σταθοπούλου, Χ.; Κοταρίνου, Π.; Χαβιάρης Π. (2010). Εθνομαθηματικές ιδέες, τεχνικές του δράματος και webquest: Καινοτόμες προσεγγίσεις στη διδασκαλία στη Γεωμετρία στο Λύκειο, 27ο Πανελλήνιο Συνέδριο της ΕΜΕ, Χαλκίδα, 19-20-21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ.

Stathopoulou, Ch., Kotarinou P. (2008). "Using Ethnomathematical ideas for desighing an interdisciplinary project through a webqwest" *11 ICME (International Congress on Mathematical Education)***,** July 6 - 13, Monterrey, Mexico.

Stathopoulou, C. (2007). Traditional patterns in Pyrgi of Chios: Mathematics and Community, *Nexus Network Journal,* v.9, n.1, pp.103-118.

Tanriseven, I. (2000). "*Matematik Öğretiminde Problem Çözme Stratejisi Olarak Dramatizasyonun Kullanılması"* Yayınlanmamaış Yüksek Lisans Tezi. Marmara Üniversitesi, İstanbul (*Using Dramatization as a problem solving strategy in mathematics*, Unpublished master thesis Marmara University, Instabul)

Tent, M. (2000). Inequalities: Part of Every Child's Life, *Mathematics Teaching in the Middle School,* v5 n5 p292-95 Jan 2000.

Triandafillidis, T. (2006). "Wishes, Lies, and Dreams": Poetry writing in the Mathematics Classroom, *For the Learning of Mathematics*. 26, 2 , July 2006.

Tulej, J., Gorman M. (1990). Mathematics and Drama, *Mathematics teaching,*131

Ufuktepe, U., Ozel, C. (2002) Avoiding Mathematics Trauma: Alternative Teaching Methods, *2nd International Conference on the Teaching of Mathematics Crete-Greece*, Willey & Sons, July 2002.

Üredi, I., Şengül, S., Gürdal, A. (2003). " Matematik Öğretiminde Problem Çözme Sürecinde Canlandırma Kullanılmasının Öğrenci Başarı ve Hatırlama Düzeyine Etkisi ", *Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Dergisi*, Vol.20(2).

(The effects of using Dramatization during the process of problem solving in Maths'on the success and remembrance levels of students, *Boğaziçi Üniversity Educational Sciences Journal*, vol. 20(2).

Φίλη, Χ. (2000). Γεωμετρία και Τέχνη: Δύο παράλληλες αναζητήσεις, *17ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας,* Νοέμβρης 10- 12, Αθήνα.

Wagner, B. (1999). *Dorothy Heathcote. Drama as a Learning Medium,* Heinemann, Portsmouth.Ward-Penny, Robert (2008). The performing Arts in the Mathematics Classroom, *Mathematics in School,* 37, no4.

Watson, A. (2005). Dance and mathematics: engaging senses in learning, *Australian Senior Mathematics Journal* 19(1)

Watson, A. (2004). Dance and Mathematics: power of novelty in the teaching of mathematics, *"10th International Congress on Mathematical Education",* July 4-17 2004, Copenhagen, Denmark, TG14.

Wilburne, J., Napoli M., (2007). Integrating Literature and Mathematics: A mysterious connection, (2007) *Mathematics Teaching in the Middle School,* v13 n3 p134-139 Oct 2007.

Winner, E., Hetland, L., (2001). The arts and Academic Improvement: What the Evidence Shows, *From Theory to Practice, Translations,* The National Art Education Association, V10, No. 1, Winter 2001.

Wooland, B. (1999). *Η Διδασκαλία του Δράματος στο Δημοτικό σχολείο,* Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα.

Young-Hee K. (2007). Construction of Korean traditional tessellations via GSP (Geometer's Sketchpad), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* v1, p250, Seoul: PME.

Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Μ,. Πολιτίδου Ελισάβετ (2006). Μία περίπτωση Έρευνας Δράσης Διδασκαλίας Μαθηματικών και Μουσικής. *Ευκλείδης Γ*

Χιονίδου-Μοσκοφόγλου Μ. (2002). Μένων (Πλάτων) - Μαθηματικά. Μια βιωματική διαθεματική δραστηριότητα στη διδασκαλία των Μαθηματικών, *19ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας*, 8-10 Νοεμβρίου, Κομοτηνή.

pkotarinou@uth.gr

hastath@uth.gr

Η ΔΙΑΡΡΗΞΗ ΤΟΥ ΡΗΓΜΑΤΟΣ

Δημήτρης Α. Σεβαστάκης

Ζωγράφος, Επίκουρος Καθηγητής Αρχιτεκτόνων ΕΜΠ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

ΕΙΚΑΣΤΙΚΕΣ ΤΕΧΝΕΣ - ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Πολιτιστικά και αφηγηματικά πυκνώματα όπως είναι οι εικαστικές τέχνες αλλά και παραγωγικές εφαρμογές τους όπως είναι οι διαφημιστικές αναπαραστάσεις, οι βιομηχανικές απεικονιστικές εφαρμογές , οι αφίσες, τα κόμιξ, η διαδικτυακή εικονοαφήγηση κ.α, ορίζουν τις κυρίαρχες αντιληπτικές επικράτειες. Άραγε αυτές οι έσχατες περιοχές των κοινόκτητων εννοιών του ορατού, θεμελιώνονται κάπου, σε κάποιο κανονιστικό, αιτιοκρατικό, σύστημα; Και ακόμα μια από τις κεντρικές προβληματικές του μοντέρνου για την αυτοπροσδιοριστία της μορφής, για τους μαθηματικούς ή άλλους κώδικες που θεμελιώνουν διιστορικά μάλιστα, το οφθαλμικά προσλήψιμο , έχει καμιά εφαρμογή μέσα στην καταιγίδα από αναπαραστάσεις; Ή μήπως η χειμαρρώδης εικονογραφία, δημιουργεί ένα χάος αδιάστατο και μη δομήσιμο; Η διατύπωση του ορατού, η κατασκευή μιας εικόνας σε ποια γραμματική, σε ποιο συντακτικό, με ποιά λογική ακολουθία συστήνεται; Πού και πώς τεκμηριώνονται έννοιες όπως η ισοδυναμία , ή αναλογία, ή η ταυτότητα;

Η σύγχρονη τέχνη μέσα από το τέχνασμα της μορφικής, εννοιολογικής, ηθικής και συντακτικής αποδόμησης, οργανώνει μια ηγεμονική και ανελαστική ανακωδικοποίηση: προαποφασισμένη ακαδημαϊκή και πολιτικά ορθή ρήξη με το παρελθόν. Να η συντριπτικά υπέρτερη σύγχρονη παραδοχή. Η προαποφασισμένη «επανάσταση» με ιδιαίτερη ένταση μάλιστα στον ελληνικό χώρο, οδήγησε το συλλογικό βλέμμα, από την νεωτερικότητα, στην σύσταση ενός χρονικού προτύπου που κατηγοριοποιεί το «παλαιό» και το «καινούριο», ως ηθικές κατηγορίες και όχι ως οντολογικές ποιότητες χρόνου

Σ αυτό το θεωρησιακό περιβάλλον θα τεθούν ορισμένα ερωτήματα στο πλάι των παρακάτω σημειώσεων:

ΥΠΑΡΧΕΙ ΚΑΠΟΙΑ ΓΕΝΕΑΛΟΓΙΚΗ ΣΧΕΣΗ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΣΤΟΧΑΣΜΟ ΚΑΙ ΤΗ ΤΕΧΝΗ;

Πιθανόν η γνωστότερη μέριμνα μετρικού ελέγχου της κατασκευής του έργου θα μπορούσε να είναι η πολυδημοσιευμένη ανατομική πρόταση Ντα Βίντσι. Ή μήπως η εκμετάλλευση της γεωμετρίας του φωτός από τον Ντύρρερ; Φυσικά είχαν προηγηθεί κατά μερικούς αιώνες τα κλασσικά αναλογικά τεκμήρια όπως τουλάχιστον τα αποκαλύπτει η αρχαιοελληνική γλυπτική. Αλλά και τα πιο ολοκληρωτικά συμπεράσματα της γεωμετρικής περιόδου. Ίσως ένας πιο σίγουρος σταθμός θα μπορούσαν να είναι οι αρχές του 15ου αιώνα όπου ετέθη ως κεντρικό αίτημα η «κατάκτηση της πραγματικότητας» άρα υπήρξε ένταση των μεθοδολογιών μετρικού ελέγχου, προοπτικής θεμελίωσης (Μπρουνελλέσκι) και εικονογραφικής αφομοίωσής αυτού του μαθηματικού και αναπαραστατικού ευρήματος (Μασάτζιο κ.α).Από την άλλη η γεωμετρική τέχνη του εικοστού αιώνα ,οι εμμονές του Μόντριαν , ολόκληρη η κονστρουκτιβιστική παράδοση των Ρώσων πρωτοπόρων αλλά και οι ιδεοληπτικές μετρητικές καθηλώσεις των μεγάλων αφηρημένων (Καντίνσου κλπ) μάλλον αποφορτίζουν την έρευνα για τον προσδιορισμό της υπόγειας ή εμφανούς διασύνδεσης μαθηματικών και τέχνης: Στην πραγματικότητα η τέχνη σε όλες τις περιόδους θέτει αιτήματα μιας γενικής τεκμηρίωσης που να βασίζεται σε ένα αφηρημένο πεδίο αμετάκλητων αξιών τόσο μετρικά όσο και εννοιολογικά.

Θα μπορούσε όμως κάποιος να κάνει απλές υποθέσεις προσπαθώντας να αιτιολογήσει το γιατί η τέχνη διατρέχεται από τέτοιες εμμονές. Το μεγαλύτερο τμήμα της- μέχρι τις παρυφές τουλάχιστον της νεωτερικότητας- είναι εκκλησιαστική, ή αυλική, όχι μόνο θεσμικά αλλά και στο πεδίο εφαρμογών. Οι εικαστικές τέχνες έχουν να λύσουν αρχιτεκτονικές συμβάσεις, προσπαθούν να επιλύσουν προβλήματα συνάρθρωσης με αρχιτεκτονικές υλοποιήσεις, εφόσον εικονογραφούν ή διακοσμούν ναϊκά ή ανακτορικά συγκροτήματα. Προοπτικές βραχύνσεις, προβλήματα οφθαλμαπάτης και οπτικών διορθώσεων , εγείρουν ισχυρά υπολογιστικά ερωτήματα.. Επίσης η ανερχόμενη επιστημονική γνώση και η αρχειοθέτηση της παρατήρησης, οδήγησε σε μια διευρυνόμενη κουλτούρα μεθοδολογικού ελέγχου. Ακόμα η αναπαραγωγή της τέχνης (η κάλυψη της αυξανόμενης ζήτησης ιδιαίτερα εκκλησιαστικής εικονογραφίας) έπρεπε να ήταν δυνατή και από ανθρώπους – εργαζόμενους στα εργαστήρια - χωρίς ιδιαίτερο ταλέντο για προφανείς λόγους παραγωγικότητας και κόστους παραγωγής. Άρα χρειάζονταν ένα εργαλείο παραγωγής που να μη στηρίζεται στο –δυσεύρετο- ταλέντο, αλλά σε ένα μετρικό –υπολογιστικό σύστημα-κάτι σαν ναυπηγική εικόνας. Οι δε μεγάλοι μορφολογικοί κλονισμοί αλλά και αποδομήσεις κάθε ευστάθειας και

μέτρου ιδιαίτερα από καλλιτέχνες και ορμικά ρεύματα της ύστερης νεωτερικότητας (Πόλλοκ, αφηρημένοι εξπρεσιονιστές κλπ) δημιούργησαν και την αντίρροπη τάση: κεντρικό επίδικο άλλων τεχνοτροπιών, έγινε η επιθυμία μαθηματικής ή εν πάση περιπτώσει, υπολογιστικής θεμελίωσης, μιας στέρεης συνθετικής θέσης-έργου. Το ισχυρότερο όμως φαινόμενο διεύρυνσης και ποιοτικής αναγωγής της μετρικής και υπολογιστικής λειτουργίας είναι *οι λογισμικές εφαρμογές που μαθηματικοποιούν όχι μόνο την εικόνα αλλά την ίδια την αρχιτεκτονική της αντίληψης.*

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΠΑΝΩ ΣΤΟ ΙΔΕΟΛΟΓΙΚΟ ΠΕΡΙΚΕΙΜΕΝΟ

Στην Ελλάδα και το χώρο των εικαστικών, η πολιτιστικά –σχεδόν- προ-σχηματισμένη ιδεολογική σχέση με «την ρήξη», με μια διαρκή νεωτερική ορμή, εντάθηκε μεταπολεμικά. Ιστορικοί λόγοι, κατέτειναν στην δημιουργία ενός νεωτερικού δογματισμού, ως κεντρικού επικυρωτικού στοιχείου ενός βαθέως αιτήματος ταυτότητας. Το σίγουρο είναι ότι η μεταπολεμική πολιτιστική μετανάστευση των Ελλήνων διανοουμένων με υποτροφίες ιδρυμάτων της δυτικής Ευρώπης και των ΗΠΑ, αλλά και προσληπτικές ιδιοτυπίες, κατέληγαν στην βιαστική παραλαβή πληροφοριών που παρέμειναν αναφομοίωτες και δερματικές. Αυτό μοιραία απέληξε σε μια διευρυνόμενη θεωρησιακή αστάθεια και εκφραστική ανομία. Κύριοι φορείς της γλωσσικής αποικοδόμησης ήταν κυρίως τα ρεύματα που θεσμίζουν δυο εκδοχές της παραστατικότητας: η *Conceptual art* –(η μεταντυσσανική κανονιστική κληρονομιά) – και *η Pop art* . Και οι δύο εκδοχές-παρόλο που συγκροτήθηκαν πάνω στο έργο σημαντικών διεθνών καλλιτεχνών- καταχράστηκαν διαφορετικού τύπου αυτονόητα : Τις εύκολες και ευθύγραμμες εννοιολογήσεις, οι οποίες πυκνώνονταν υπό την επιρροή ενός προωθημένου πολιτιστικού ιμπεριαλισμού οι μεν, και τις εικονογραφικές προφάνειες που μορφοποιήθηκαν- από τον μεσοπόλεμο ακόμα -στις παρυφές της βιομηχανικής εικόνας της διαφήμισης και των κόμιξ. Μέσα στα εκφραστικά σκέλη που συγκροτήθηκαν από τις δύο κυρίαρχες εννοήσεις, η δημιουργία του καλλιτεχνικού έργου, απελευθερώθηκε από οποιαδήποτε εμμένεια , είτε προς το μορφικό είτε προς το αφηγηματικό πεδίο. Η δημιουργία του έργου, απελευθερωμένη από τα συντακτικά συστήματα που συγκρότησε ή ανακεφαλαίωσε το πρώιμο μοντέρνο, μπορεί να καταλαμβάνει οποιαδήποτε διατυπωτική- εκφωνητική θέση. Μια εμπρόθετη συνθήκη Χάους Μπορεί να καταφεύγει σε ποικίλα και συχνά αντιφατικά γλωσσικά μορφώματα , άρα να αποδεσμεύει τον αναγνώστη- θεατή και τον δημιουργό από δουλείες και κωδικοποιήσεις. Δεν υφίσταται δηλαδή, συνέπεια και πειθαρχία ως προς εκφραστικούς ή ηθικούς κώδικες.

Γλώσσα είναι η προσπάθεια μορφοποίησης κοινωνικών μεταβλητών και συνάψεων μέσα από κοινόκτητες συμβολοποιήσεις και κωδικοποιητικές αποφάσεις . Στη θέση της γλώσσας (άρα και των μαθηματικών εννοήσεων και δομών;) και των πολιτιστικών εμμονών που είναι τα φερόμενα σημασιακά φορτία εντός της, αναπτύσσεται ένας ιδιώνυμος πολιτιστικός επεκτατισμός. Δεν είναι μόνο οι οργανωσιακές εκδιπλώσεις της τέχνης –οι μεγάλες θεσμίσεις κυρίως του Ευρωπαϊκού χώρου που εκφράζουν αυτή την διαστολή, αλλά νομίζω και η επέκταση και ο βιομηχανικός πολλαπλασιασμός των έργων. Νομίζω αυτό το πάχος, θεμελιώνει την πιο οχληρή και δυσώδη ιστορική ψευδολογία: Η λειτουργία του έργου –εκθεσιακή κλπ- αποσπάται από την λειτουργία της δημιουργίας του έργου. Δεν ήταν έτσι στις περιόδους και στις περιπτώσεις της εκκλησιαστικής τέχνης ή συλλογικών εκφραστικών ενοτήτων. Η Δημιουργία από συντακτικό γεγονός υπαρκτικής τάξης, μεταπίπτει προς ένα απλό οπτικό ή επιτελεστικό, περιστατικό. «Monument to now» . Ακριβώς αυτό αποσυναρμολογεί την σχέση μεταξύ κριτικής και καλλιτεχνικού γεγονότος. Γιατί η ρήξη δεν σημαίνει καθόλου εξέγερση η σύγκρουση με ένα παραδομένο σύστημα αξιών, αλλά η ρήξη συγκροτεί ένα επικοινωνιακό και υπαρκτικό παραπλήρωμα –απολύτως αποδεκτό μέσα στις νέες πολιτισμικές χωρητικότητες.

Η νέα και διευρυνόμενη ιστορική δυνατότητα της τέχνης, να μπορεί επιτέλους να συμβαίνει χωρίς να εννοεί – αφού, όπως προείπα, η αποδέσμευση από εκφραστικούς, διατυπωτικούς και μετρικούς κώδικες, μετατοπίζει από το εκφραστικά αναγκαίο προς στο ανέκφραστο και ανέκφορο, δηλαδή προς ένα είδος πανσημίας- δεν είναι απλή ανανέωση τρόπων, αλλά ήθους. Έτσι ο καλλιτέχνης μπορεί με ηθική άνεση, να είναι ρηξιακός και παράλληλα να εντάσσεται στις στρατηγικές του συστήματος(φουτυριστές), ή συστημικός που όμως αποσυναρμολογεί συστημικές δομές(Πικάσσο Νταλί). Το χειρότερο είναι ότι μπορεί να μεταμφιέζεται μέσα στην πολιτισμική αποδόμηση, στον ένα ή στον άλλο τύπο, δηλαδή να αφομοιώνεται από το σύστημα ανέξοδα, ως ένα ρευστό μοντέλο (γοητευτικών και διασκεδαστικών, οπορτουνιστικών πάντως) αντιφάσεων.

Σ αυτό το πεδίο ο μαθηματικός στοχασμός και οι γλωσσικές εννοήσεις μάλλον διαταράσσονται ως πρωτόκολλα, μέσα στον ηθικό αποσχεδιασμό.

‘ΣΧΕΔΙΑΖΟΝΤΑΣ’ ΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ: ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΤΟ ΣΧΕΔΙΟ ΩΣ ΓΝΩΣΤΙΚΕΣ ΣΥΜΒΟΛΙΚΕΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΕΣ ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗ ΗΛΙΚΙΑ.

Ουρανία Κούβου

Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αυτή η εισήγηση θα πραγματευτεί την ομοιότητα ανάμεσα στο σχέδιο και το αριθμητικό σύστημα ως γνωστικές συμβολικές διαδικασίες που συνεισφέρουν στην διανοητική ανάπτυξη του μικρού παιδιού. Πιο συγκεκριμένα, τα μικρά παιδιά σύμφωνα με τον Vygotsky, ενσωματώνουν σχεδιαστικά στερεότυπα, αλλά και αριθμητικά σύμβολα, όπως εξάλλου και γλωσσικά, ως διανοητικές δραστηριότητες οργανώνοντας την σκέψη τους και επαναπροσδιορίζοντας την συνείδησή τους. Με αυτόν τον τρόπο μετατρέπουν την νεοαποκτηθείσα γνώση σε εργαλείο με το οποίο μαθαίνουν να είναι ενεργά μέλη ενός πολιτιστικού περιβάλλοντος. Θα εξεταστεί η περίπτωση παιδικών ιχνογραφημάτων όπου αριθμητικά σύμβολα χρησιμοποιούνται ως αυτοτελή μέρη του σχεδίου. Ο μη διαχωρισμός της σχεδιαστικής διαδικασίας από αυτόν την γραφής αριθμητικών και γραμματικών συμβόλων κάνει σαφή την αλληλεξάρτηση και δημιουργική σχέση των δύο αυτών συμβολικών συστημάτων στα πρώτα σχολικά χρόνια. Σε αυτή την περίπτωση, εγείρεται το εξής δίλημμα: θα μπορούσε το παιδικό σχέδιο να θεωρηθεί ένα προπαρασκευαστικό πεδίο για την ανάπτυξη άλλων συμβολικών συστημάτων ή συνεισφέρει ισάξια στην διανοητική ανάπτυξη του παιδιού όντας ένας ακόμη τρόπος ενσωμάτωσης πολιτιστικών συμβόλων.

[λευκή σελίδα]

ΑΠΛΗ ΤΕΧΝΗ ΚΑΙ ΠΕΡΙΠΛΟΚΟΙ ΓΡΙΦΟΙ:

ΈΝΑ ΕΡΜΗΝΕΥΤΙΚΟ ΣΧΗΜΑ ΤΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΠΟΥ ΔΙΑΔΙΔΟΝΤΑΙ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗ ΔΗΜΟΦΙΛΗ (POPULAR) ΚΟΥΛΤΟΥΡΑ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τάσος Πατρώνης & Γεράσιμος Μελετίου

Με συνεργασία των:

Μαρίας Ανδρικοπούλου, Σωφρόνη Βαμβακούση, Αγγελικής Γρετσίστα, Γιάννη Ρίζου και Βάνας Σταυρίδη

Πανεπιστήμιο Πάτρας

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία μας παρουσιάζουμε ένα ερμηνευτικό σχήμα για την επίδραση της νέας μαζικής επικοινωνίας στη διαμόρφωση των κοινωνικών αναπαραστάσεων για τα Μαθηματικά. Συζητάμε παραδείγματα από την εκλαΐκευση των Μαθηματικών ή της Ιστορίας τους, όπως και "μαθηματικά μυθιστορήματα", που γράφονται με στόχο είτε μια περισσότερο ελκυστική παρουσίαση γνώσεων είτε μια περισσότερο σοφιστικέ τέρψη του αναγνώστη (είτε και τα δύο), καθώς και ανάλογες κινηματογραφικές ταινίες και θεατρικά έργα. Αντί της έκφρασης "βιομηχανία της κουλτούρας" των Adorno και Horkheimer χρησιμοποιούμε τον όρο «*Δημοφιλής (Popular) Κουλτούρα*» και το σχετικό προβληματισμό του κοινωνιολόγου της κουλτούρας S. Hall. Υποστηρίζουμε ότι, στην περίπτωσή μας, η Δημοφιλής Κουλτούρα ανακλά ως ένα βαθμό την κουλτούρα των σχολικών εγχειριδίων και τις αναπαραστάσεις τους για τα Στοιχειώδη Μαθηματικά, την κουλτούρα του πρωταθλητισμού (Μαθηματικές Ολυμπιάδες), καθώς και στοιχεία Μπαρόκ ή στοιχεία μυστηρίου (επίλυση αστυνομικών και άλλων γρίφων).

«Ένας δολοφόνος που χρειάζεται τόση βοήθεια από τη Θεία Πρόνοια έχει σίγουρα διαλέξει λάθος επάγγελμα».
R. Chandler*, Η Απλή Τέχνη του Φόνου*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Από τη δεκαετία του '40 η Σχολή της Φρανκφούρτης, με κεντρικές φιγούρες τους T.Adorno και M.Horkheimer, ανάλυσε κριτικά τη μαζική διάδοση διαφόρων ειδών τέχνης (Λογοτεχνία, Μουσική, Εικαστικές τέχνες, Κινηματογράφος κ.α.). Η σχολή αυτή περιέγραψε τα μαζικά μέσα επικοινωνίας και την παραγωγή απλοποιημένων και δεκτικών από το ευρύ κοινό μορφών τέχνης, ως "μαζική κουλτούρα" και "βιομηχανία της κουλτούρας", ή ως "χρήση του Διαφωτισμού για εξαπάτηση των μαζών". Στο διάστημα που μεσολάβησε από τότε μέχρι σήμερα, τα φαινόμενα που ανάλυσε η Σχολή της Φρανκφούρτης απόκτησαν καινούριες διαστάσεις μέσω των νέων μορφών εμπορευματοποιημένης επικοινωνίας (Ιδιωτική τηλεόραση, Video, Multiplex cinema, Βιβλίο-υπεραγορά, Διαδίκτυο). Το ότι "μάθαμε να ζούμε" στην εποχή της νέας μαζικής επικοινωνίας δεν σημαίνει ότι θα σταματήσουμε να προβληματιζόμαστε για τα επιφαινόμενα της. Ο κοινωνιολόγος των ΜΜΕ Marshall McLuhan εισήγαγε τους όρους *«θερμό» («hot»)* και *«ψυχρό/ήπιο» («cool»)* για να χαρακτηρίσει τα μέσα επικοινωνίας ως προς το κατά πόσο χειραγωγούν το δέκτη ή απαιτούν από αυτόν να σκεφτεί, ενώ οι N.Postman και C.Weingartner έδειξαν τη σπουδαιότητα αυτών των χαρακτηριστικών για την εκπαίδευση (*Η εκπαίδευση ως μέσο ανατροπής του Κατεστημένου*).

Σε τούτη την εργασία παρουσιάζουμε ένα πιο σύνθετο ερμηνευτικό σχήμα για την επίδραση της νέας μαζικής επικοινωνίας στη διαμόρφωση των κοινωνικών αναπαραστάσεων για τα Μαθηματικά και εξετάζουμε κατά πόσο οι αναπαραστάσεις αυτές συνιστούν μόρφωση (παιδεία) ή κάποιο είδος *ημιμόρφωσης*. Συζητάμε παραδείγματα από την εκλαΐκευση των Μαθηματικών ή της Ιστορίας τους, όπως και "μαθηματικά μυθιστορήματα", που γράφονται με στόχο είτε μία περισσότερο σοφιστικέ τέρψη του αναγνώστη (είτε και τα δύο). Αντί της έκφρασης "μαζική κουλτούρα" ή/και "βιομηχανία της κουλτούρας" των Adorno και Horkheimer χρησιμοποιούμε τον όρο *«Δημοφιλής* (*Popular*) *Κουλτούρα»* και το σχετικό προβληματισμό του κοινωνιολόγου της κουλτούρας St.Hall. Υποστηρίζουμε ότι στην περίπτωση μας, η Δημοφιλής Κουλτούρα διαμορφώνεται από τις αρνητικές εμπειρίες του κοινού και ανακλά, ως ένα βαθμό, την κουλτούρα των σχολικών εγχειριδίων και τις αναπαραστάσεις τους για Στοιχειώδη Μαθηματικά, την κουλτούρα του πρωταθλητισμού (Μαθηματικές Ολυμπιάδες), καθώς και στοιχεία νέο-Μπαρόκ ή ελκυστικά στοιχεία μυστηρίου (επίλυση αστυνομικών

και άλλων γρίφων). Στο βαθμό που οι κοινωνικές αυτές αναπαραστάσεις ανταποκρίνονται στα ενδιαφέροντα και ενσωματώνουν διαισθήσεις ή βιωματικές "αλήθειες" των υποκειμένων της επικοινωνίας και κυρίως του δέκτη (π.χ. του αναγνώστη ενός λογοτεχνικού κειμένου που αφορά τα Μαθηματικά) είναι δυνατό να συντελούν στον προβληματισμό και την κατανόηση (χωρίς αυτή να έπεται μόνο από την ανάγνωση), ενώ τα αποτελέσματα είναι πολύ διαφορετικά μέσα από τη μίμηση και το συρμό, ή τη χειραγώγηση.

1. (ΑΣΤΙΚΗ) ΚΟΥΛΤΟΥΡΑ ΚΑΙ ΜΟΡΦΩΣΗ VS. ΗΜΙΜΟΡΦΩΣΗ

«Εκείνη τη συγκεκριμένη Τετάρτη του 1723 [μετά την τακτική συνεδρίαση της Ακαδημίας Επιστημών, που στεγαζόταν στο Λούβρο] *ένας νεαρός μπαίνει δειλά στο καφέ Γκραντό*. Μοιάζει αμήχανος, ο χώρος δεν του είναι οικείος. Διστακτικά πλησιάζει τη μεγάλη συντροφιά στο βάθος. Άψογα ντυμένος, περπατά με χάρη, γυμνασμένος (…) όχι όμορφος, αλλά με ζωηρά εκφραστικά μάτια, λένε τα κείμενα της εποχής (…) *Έτσι μπήκε στο χώρο των επιστημών* (…) η *Γκαμπριέλ Εμιλί λε Τονελιέ ντε Μπρετέιγ μαρκησία του Σατλέ*.» (http://sxeseis.gr, ανώνυμος-διαγραμμένο μέλος (;)) Οι υπογραμμίσεις δικές μας.

Αυτό το απόσπασμα από το Διαδίκτυο επιδέχεται δύο διαφορετικούς τρόπους ανάγνωσης ή ερμηνείας. Αυτοί οι τρόποι ανάγνωσης αντιστοιχούν σε δύο έννοιες που απασχόλησαν τη Σχολή της Φρανκφούρτης (ιδιαίτερα τον Teodor Adorno) και που η δεύτερη προέκυψε ιστορικά ως μετεξέλιξη της πρώτης: τη *μόρφωση* ή *παιδεία* (στα γερμανικά: *Bildung*) και την *ημιμόρφωση* (*Halbbildung*). Πιο συγκεκριμένα, αν δούμε την περιγραφή της εισόδου της Emilie de Breteuil στο καφέ, μεταμφιεσμένης σε άντρα, ως τη δίψα μιας νέας γυναίκας της ανώτερης τάξης για μάθηση και χειραφέτηση, έχουμε ένα παράδειγμα για το ξεκίνημα της "*καλλιέργειας*" ("Culture", με τη μεταφορική σημασία που οφείλεται στο Βολταίρο) που μορφώνει ένα άτομο, τουλάχιστον με την έννοια του Γαλλικού Διαφωτισμού μόνο – αν είναι κανείς τόσο αυστηρά προσηλωμένος στη μεταγενέστερη φιλοσοφική παράδοση του Γερμανικού Ιδεαλισμού ώστε να αρνηθεί στο Βολταίρο και την αγαπημένη του Emilie τον εμβριθή χαρακτήρα της *Bildung*[1]. Αν όμως, δούμε την ίδια

[1] «Η μόρφωση (Bildung) εγείρει και το ιδανικό της γερμανικής εμβρίθειας, το πειθαρχημένο πάθος της βαθειάς και ευσυνείδητης διείσδυσης στο γνωστικό αντικείμενο: Τόσο της ριζικής και οπωσδήποτε επίμονης διερεύνησης (…) όσο και της απέριττης ακριβολογίας στην έκφραση.» (Λ.Αναγνώστου, Εισαγωγή στο Βιβλίο του Adorno *Θεωρία της Ημιμόρφωσης*, εκδ. Αλεξάνδρεια, 1989, σελ.10.)

ανώνυμη περιγραφή ως ένα απλό εφέ ή σενάριο για μυθιστορηματική βιογραφία ευρείας κατανάλωσης, ως ένα στερεότυπο της "κουλτούρας των καφέ" ή της "γυναικείας αποκοτιάς", τότε πέφτουμε στην περιοχή των φαινομένων ημιμάθειας και εύκολης συγκίνησης που ο Adorno περιέλαβε κάτω από τον όρο *«ημιμόρφωση»*[2].

Η μετεξέλιξη της έννοιας της μόρφωσης σ' αυτή της ημιμόρφωσης αποτελεί, κατά τη Σχολή της Φρανκφούρτης, αναπόφευκτο αποτέλεσμα της κυριαρχίας των καπιταλιστικών δομών στην κοινωνία αλλά και πάνω στο ίδιο το άτομο, που «αναγκάζεται να επαναλαμβάνει μέσα του τις (κοινωνικές) δυσμορφίες»[3].

Όπως γράφει ακόμα ο Adorno «η μορφωτική πρόοδος που η νεαρή αστική τάξη προσέγραψε στον εαυτό της συγκρινόμενη με τη φεουδαρχία, δεν σημείωσε διόλου την ευθύγραμμη πορεία που υπέβαλε εκείνη η ελπίδα (...). Οι ποιότητες που μεταγενέστερα έλαβαν το όνομα "μόρφωση" έδωσαν στην ανερχόμενη τάξη τις ικανότητες που απαιτούσαν η οικονομία και η διοίκηση (...). Διαφορετική ήταν η κατάσταση της νέας τάξης (του προλεταριάτου) που προήλθε από την αστική κοινωνία, όταν αυτή δεν είχε προλάβει καν να εδραιωθεί. Το προλεταριάτο δεν ήταν υποκειμενικά διόλου πιο προηγμένο από την αστική τάξη, όταν οι σοσιαλιστικές θεωρίες προσπαθούσαν να του αφυπνίσουν τη συνείδηση (...). Οι κατέχοντες διέθεταν το μονοπώλιο της μόρφωσης ακόμη και σε μία κοινωνία τυπικά ίσων· ο απανθρωπισμός μέσα από την καπιταλιστική διαδικασία παραγωγής στερούσε στους εργαζομένους όλες τις προϋποθέσεις για μόρφωση, προπάντων τη σχόλη.»[4]

2. (HOT vs. COOL) × (HARD vs. SOFT)

Από τον προ-αστικό κόσμο ιδεών, που "θρυμματίστηκε απότομα" κατά τον Adorno, διατηρήθηκαν αρκετά κομμάτια παλιάς ιδεολογικής κρούστας, είτε σε αρχέγονη και άκαμπτη μορφή, ως απολιθώματα, είτε επεξεργασμένα σαν γλυκόπικρη καραμέλα, για ευρεία και ανώδυνη κατανάλωση. Τα μαζικά μέσα επικοινωνίας (στην αρχή οι εφημερίδες και τα λαϊκά αναγνώσματα, στη συνέχεια το ραδιόφωνο, ο κινηματογράφος και η τηλεόραση) ανέλαβαν το ρόλο αυτής της επεξεργασίας της προ-αστικής ιδεολογίας από "*άκαμπτη*" ("*hard*") μορφή σε περισσότερο "*εύκαμπτη*" ("*soft*") και ανώδυνη. Η συνείδηση των πολιτών πέρασε, έτσι, «από τη μια ετερονομία στην άλλη: τη θέση της αυθεντίας της Βίβλου παίρνει η αντίστοιχη των αθλητικών χώρων, της

---

[2] Βλ. πάλι Λ.Αναγνώστου, ο.π., σελ.9.

[3] T. Adorno, *Θεωρία της Ημιμόρφωσης*, ο.π., σελ. 47.

[4] T. Adorno, ο.π., σελ. 36-37.

τηλεόρασης και των "ιστοριών που έγραψε η ζωή", που βασίζεται στην αξίωση της κατά γράμμα ακρίβειας, των "γεγονότων" εντεύθεν της παραγωγικής (ή δημιουργικής) φαντασίας».[5]

Για να καταφέρουν αυτό το θαύμα της επικοινωνίας, τα μαζικά μέσα στηρίχτηκαν (ας μας επιτραπεί η έκφραση) στην "ύπνωση" των εργαζόμενων τάξεων και από τη *hard* και *hot* χειραγώγηση (που παρήγαγε την παλιά ιδεολογική κρούστα) τις μετέφεραν σε *soft*, αλλά πάλι *hot* τύπου (δηλαδή χειραγωγούμενη) κατανάλωση κοινωνικών προτύπων.

Οι όροι «*hard*» και «*soft*» εισάγονται εδώ άτυπα ως ιδεολογικές αναπαραστάσεις από την εμπειρία των εμπλεκόμενων ατόμων – και χρειάζονται οπωσδήποτε περισσότερη θεωρητική επεξεργασία. Παρόλ' αυτά, θα επιχειρήσουμε να τους προσδώσουμε ένα περισσότερο "ακριβές" (και πάλι όμως ιδεολογικό!) περιεχόμενο από την εμπειρία με τα στοιχειώδη μαθηματικά και τη χρήση τους στους υπολογισμούς και στην επίλυση τεχνικών προβλημάτων.

Οι τριγωνομετρικοί και οι λογαριθμικοί πίνακες, οι αλγόριθμοι της αριθμητικής και οι μέθοδοι επίλυσης γραμμικών εξισώσεων και συστημάτων αποτελούσαν τα υπολογιστικά *μέσα* (ή, εν προκειμένω *εργαλεία*) που θεωρούνταν αναγκαία εφόδια κάθε υποψήφιου τεχνικού, μηχανικού ή πειραματικού φυσικού, μέχρι τουλάχιστον πριν από 4 ή 5 δεκαετίες. Η κατάσταση άλλαξε πρώτα με τη διάδοση των υπολογιστών τσέπης (calculators), που διέθεταν και ειδικές συναρτήσεις (εκθετική, λογαριθμική τριγωνομετρικές, μέσους όρους κ.ά.) στο "ρεπερτόριο" τους, για να αλλάξει πολύ ριζικότερα με την εξάπλωση των PC στην εκπαίδευση.

Ως κοινά χαρακτηριστικά του τρόπου χρήσης των προηγούμενων και "απαρχαιωμένων" σήμερα, μέσων θεωρούνταν, από τη μια μεριά, η σχεδόν παθητική συμμετοχή του νου του χρήστη στους υπολογισμούς, και από την άλλη, η επαρκής γνώση για κάποιες υποτιθέμενες "*hard*" ("άκαμπτες" ή μη-αναγώγιμες) δομές και ρουτίνες από τα στοιχειώδη μαθηματικά όπως η Αριθμητική των ακεραίων και ο Αλγόριθμος του Ευκλείδη. Με άλλα λόγια, σε σχέση με τις αναπαραστάσεις που δημιουργούν, (χρησιμοποιώντας παράλληλα και το πλαίσιο του Mc Luhan[6]), τα παλαιότερα υπολογιστικά

---

[5] Ο.π., σελ. 38. Ο Adorno αναφέρεται, στο σημείο αυτό, στο άρθρο του K.-G. Grüneisein "Landbevölkerung im Kraftfeld der Stadt" "Ο αγροτικός πληθυσμός μέσα στο δυναμικό πεδίο της πόλης", που δημοσιεύτηκε στο: Gemeindestudie des Instituts für sozialwissenschaftliche Forschung, Darmstadt 1952.

[6] Βλ. M.McLuhan, άρθρο στο βιβλίο: *Το μήνυμα του μέσου*, εκδ. Αλεξάνδρεια, 1991.

μέσα θα μπορούσαν ιδεολογικά να χαρακτηριστούν ως *hot* και ταυτόχρονα *hard.*

Τα χαρακτηριστικά αυτά μπορεί να αντιπαρατεθούν με εκείνα των σύγχρονων υπολογιστικών μέσων, που ενώ απαιτούν μια ενεργητικότερη συμμετοχή του νου του χρήστη (προκειμένου να υπάρχει ο έλεγχος της διαδικασίας, τουλάχιστον από την πλευρά της κοινής λογικής), δεν χρειάζονται ειδική εκ των προτέρων γνώση των υποκείμενων μαθηματικών μεθόδων. Με την έννοια αυτή, θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε τα σύγχρονα υπολογιστικά μέσα ως *cool* και *soft.*

Οι παλαιότερες μέθοδοι υπολογισμού έχουν από καιρό ξεχαστεί από την επίσημη εκπαίδευση (αν και τις θυμούνται μερικές φορές στη παιδαγωγική πρακτική τους οι παλαιότεροι δάσκαλοι). Η τεχνασματική επίλυση στοιχειωδών αλγεβρικών (ή αριθμοθεωρητικών) προβλημάτων επιβιώνει, όμως, μέχρι τις μέρες μας με την "ψυχρή" κουλτούρα πρωταθλητισμού των *Μαθηματικών Ολυμπιάδων,* καθώς και των τοπικών (εθνικών) μαθηματικών διαγωνισμών που συνήθως προηγούνται απ' αυτές. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να μιλάμε, ανάλογα με το είδος των μαθηματικών δομών, για *cool* και *hard* ή *cool* και *soft* εργαλεία σκέψης και επίλυσης προβλημάτων.

3. ΔΥΟ ΠΡΟΣΩΠΑ ΤΗΣ ΔΗΜΟΦΙΛΟΥΣ ΚΟΥΛΤΟΥΡΑΣ

Οι συνδυασμοί *hot* × *soft* και *cool* × *hard* διακρίνουν δύο, συμπληρωματικούς μεταξύ τους, χαρακτήρες της δημοφιλούς κουλτούρας, που καταχρηστικά θα ονομάσουμε "θερμό" και "ψυχρό" χαρακτήρα. Η "*θερμή*" *δημοφιλής κουλτούρα* καθορίζεται από τα μαζικά μέσα και πρότυπα με χαρακτήρα *hot* και *soft* (όπως ήταν παλιότερα οι κινηματογραφικές ταινίες–μελό και σήμερα είναι συνήθως τα μεγάλης ακροαματικότητας ιδιωτικά κανάλια της τηλεόρασης). Αντίθετα, η "ψυχρή" δημοφιλής κουλτούρα έχει ένα *cool* και *hard* χαρακτήρα, που συνδυάζει άκαμπτα ιδεολογικά πρότυπα ηρώων με κάποιους βαθμούς ελευθερίας στην επίλυση γριφωδών προβλημάτων. Αυτός ο χαρακτήρας θα ταίριαζε τόσο στους σκληροτράχηλους ντετέκτιβ του Αμερικανικού αστυνομικού μυθιστορήματος του Μεσοπολέμου (όπως ο Σαμ Σπέιντ του Ντάσιελ Χάμμετ), όσο και στους σκληρά προπονημένους αθλητές των Μαθηματικών Ολυμπιάδων της εποχής του Ψυχρού Πολέμου. Αντίθετα, "θερμά" είναι τα προκατασκευασμένα διδακτικά σενάρια, οι εξωπραγματικές ιστορίες με αριστοκράτες ντετέκτιβ και δολοφόνους με δηλητήρια και εξωτικά ψάρια[7], ή τα σήριαλ μαζικής

[7] Βλ. σχετ. R. Chandler, *Η Απλή Τέχνη του Φόνου*, εκδ. Ερατώ, 1982.

κατανάλωσης με έρωτα πασπαλισμένο με λίγο μυστήριο. Η βιομηχανία του Χόλλυγουντ συνδύασε και τους δύο αυτούς χαρακτήρες της δημοφιλούς κουλτούρας, γεγονός που υποβάλλει την ιδέα ότι δεν πρόκειται για αντιμαχόμενους χαρακτήρες. Πρόκειται μάλλον για δύο "πρόσωπα" της δημοφιλούς κουλτούρας που απευθύνονται σε δύο αντίστοιχες κατηγορίες καταναλωτών και τελικά διαμορφώνονται και απ' αυτούς. Ο St.Hall[8] έχει σχετικά στρέψει την προσοχή μας στο πως διαφορετικές κατηγορίες του κοινού διαμορφώνουν περισσότερο παρά "αποκωδικοποιούν" τα νοήματα.

Σαν ένα παράδειγμα ας πάρουμε τη μυθιστορηματική βιογραφία της M. Tent: *C. F.Gauss, ο Πρίγκιπας των Μαθηματικών*, που απευθύνεται μάλλον σε ένα νεανικό αναγνωστικό κοινό (κατά την ίδια τη συγγραφέα: «αυτή η βιογραφία είναι αποτέλεσμα της συναναστροφής μου με τους μαθητές»). Η εκλαΐκευση γνώσεων του Απειροστικού Λογισμού και η μύηση του αναγνώστη στο σχετικό τρόπο σκέψης θα ήταν ένας αναμενόμενος στόχος της έκδοσης αυτής και θα έδειχνε ένα δρόμο για μορφωτική αξιοποίηση της δημοφιλούς κουλτούρας στα Μαθηματικά. Και πραγματικά ο τρόπος της αφήγησης, η οικειότητα της γλώσσας και των διαλόγων κάνουν αυτό το ανάγνωσμα ελκυστικό στους νεαρούς αναγνώστες από τις πρώτες γραμμές. Παρόλ' αυτά στο πρώτο σημείο όπου ο μαθηματικός συλλογισμός δεν είναι εντελώς τετριμμένος, όταν δηλαδή τίθεται ως θέμα μελέτης η σειρά $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots$ η συγγραφέας δεν δίνει την ευκαιρία στους αναγνώστες να καταλάβουν, με τα δικά τους μέσα σκέψης, το λόγο που η σειρά αυτή απειρίζεται[9].

---

[8] "Reflections upon the encoding/decoding model: an interview with Stewart Hall". In: J. Cruz & J. Lewis (eds) *Reading, Listening: Audiences & Cultural Reception*. Boulder, Westview Press, pp. 253-74.

[9] Πιο συγκεκριμένα στη σελίδα 74 του βιβλίου της M. Tent (εκδ. Τραυλός, 2007) η σειρά γράφεται ως εξής: $1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{13}+\ldots\right)$ και ο αναγνώστης πρέπει να εκτελέσει όλες τις πράξεις στις παρενθέσεις για να βρει ότι το άθροισμα σε κάθε παρένθεση είναι μεγαλύτερο του 1. Επειδή ο υπολογισμός πρέπει να επαναλαμβάνεται εκ νέου κάθε φορά, η διαδικασία αυτή δε συνιστά απόδειξη. Υπάρχει όμως τρόπος με τα μέσα και τις γνώσεις που διαθέτουν π.χ. οι μαθητές της Β' Λυκείου, να δοθεί μια απλή αλλά ταυτόχρονα πλήρης απόδειξη. Πράγματι, το άθροισμα των $2^{\nu}+1$ πρώτων όρων της σειράς αυτής γράφεται $1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{\nu-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^{\nu}}\right)$ απ' όπου φαίνεται

Άλλο ένα παράδειγμα από το χώρο της λεγόμενης "Μαθηματικής Λογοτεχνίας" και μάλιστα στη μορφή comic novel, είναι το βραβευμένο βιβλίο του Θ. Ανδριόπουλου, *Ποιος σκότωσε τον κύριο Χ;* (εκδ. Ελληνοεκδοτική, 2010). Εκεί, προκαλείται η εντύπωση στον αναγνώστη ότι το Θεώρημα της μη – πληρότητας του Gödel προκύπτει άμεσα από μια αναλογία μεταξύ φυσικών αριθμών και λογικών προτάσεων, ενώ η κατάσταση είναι αρκετά πιο πολύπλοκη και απεικονίζεται καλύτερα με το διακοσμητικό φόντο της σελίδας 124, παρά με το λόγο των ηρώων.

valdemar@math.upatras.gr

iarizos@teihal.gr

gmelet@teiep.gr

αμέσως ότι το άθροισμα αυτό είναι μεγαλύτερο του $1+\frac{1}{2}\nu$. Επειδή όμως $\nu \to \infty$, η ακολουθία $1+\frac{1}{2}\nu$ φανερά απειρίζεται.

ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑ:

Η ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΗΣ ΤΕΧΝΗΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΘΕΩΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΧΕΣΗΣ ΤΩΝ ΕΝΗΛΙΚΩΝ ΜΕ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ελένη Γιαννακοπούλου

Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εισήγηση συνοψίζεται μια σημαντική συζήτηση μεταξύ των ψυχολόγων Zajonc και Lazarus για τις πολύπλευρες και αμοιβαίες σχέσεις νόησης και συναισθήματος καθώς και για την προτεραιότητα του ενός έναντι του άλλου στις ανθρώπινες λειτουργίες. Η συζήτηση ξεκίνησε με τη δημοσίευση ενός άρθρου του Zajonc το 1980 με το οποίο πρόβαλε την άποψη ότι το συναίσθημα μπορεί να είναι απολύτως ανεξάρτητο από τη νόηση και σε πολλές περιπτώσεις να προηγείται της νόησης και την απάντηση του Lazarus ότι η νόηση αποτελεί αναπόσπαστο συστατικό στοιχείο του ανθρώπινου συναισθήματος. Η συζήτηση αυτή συνεχίστηκε για μια εικοσαετία με τη συμμετοχή των δύο πρωταγωνιστών και πολλών άλλων ερευνητών, υποκινώντας ένα δημιουργικό προβληματισμό για τις σχέσεις νόησης και συναισθήματος και κατ' επέκταση λογικής και ευαισθησίας και για το ρόλο τους στις ποικίλες ανθρώπινες δραστηριότητες. Στη βάση αυτή, και με την υπόθεση ότι η καλλιτεχνική δημιουργία μπορεί να υποκινήσει συναισθηματικές λειτουργίες, διατυπώνονται προβληματισμοί για την ενδεχόμενη συμβολή της τέχνης στην αναθεώρηση της αρνητικής σχέσης την οποία έχουν αναπτύξει πολλοί ενήλικες με τα μαθηματικά, ως αποτέλεσμα σχολικών τους εμπειριών.

Η ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΖΑΓΙΕΝΤΣ-ΛΑΖΑΡΟΥΣ

Στις αρχές της δεκαετίας του 1980 ξεκίνησε μια συζήτηση για τις σχέσεις νόησης και συναισθήματος η οποία συνεχίστηκε για μια εικοσαετία[10] και αναζωπυρώθηκε πρόσφατα με ιδιαίτερη αναφορά στη μάθηση και άρα στην εκπαίδευση των ενηλίκων [11].

Η συζήτηση ξεκίνησε με ένα άρθρο του Ρόμπερτ Ζάγιεντς καθηγητή κοινωνικής ψυχολογίας στο Πανεπιστήμιο Σταντφορντ των ΗΠΑ, στο περιοδικό American Psychologist, με τον χαρακτηριστικό τίτλο "Feeling and Thinking: Preferences Need No Inferences" (Zajonc, 1980), στο οποίο αμφισβήτησε την επικρατούσα τότε στην ψυχολογία άποψη ότι το συναίσθημα είναι μια μετα-γνωστική ανθρώπινη λειτουργία, ότι το συναίσθημα «προκαλείται μόνο αφού έχει επιτελεστεί μια σημαντική επεξεργασία πληροφοριών» (ο.π. σ.151) ή με άλλα λόγια ότι ο θυμός, η ντροπή, ο φόβος, η ευχαρίστηση, προκαλούνται υπό τον όρο ότι έχουν προηγηθεί κάποιες νοητικές λειτουργίες.

Ο Ζάγιεντς στο άρθρο αυτό υποστηρίζει την άποψη ότι οι συναισθηματικές λειτουργίες είναι ανεξάρτητες από τις γνωστικές και μάλιστα προηγούνται, είναι δηλαδή προ-γνωστικές. «Είναι απολύτως πιθανό ότι σε ένα αρχικό στάδιο η αντίδραση ενός ανθρώπινου οργανισμού σε ερεθίσματα να είναι συναισθηματική, όπως είναι συναισθηματικό και το πρώτο στοιχείο μιας εμπειρίας το οποίο ανακαλεί στη μνήμη του» (ο.π. σ. 154). Σε αντίθεση με τις ψυχολογικές θεωρίες, οι οποίες «αποδίδουν στο συναίσθημα ένα δευτερεύοντα ρόλο, τον οποίο διαμεσολαβεί και κυριαρχεί η νόηση» (ο.π. σ. 170), ο Ζάγιεντς διατυπώνει τη θέση ότι το συναίσθημα είναι λειτουργικά και ενδεχομένως βιολογικά ανεξάρτητο από τη νόηση. Όλη η ανάλυση του Ζάγιεντς βασίζεται σε έναν ορισμό του συναισθήματος ως αρχική προτίμηση, εκφρασμένη ή υπονοούμενη, για ένα αντικείμενο ή ερέθισμα σε αντιδιαστολή με άλλα ως «συμπάθεια, αντιπάθεια, προτίμηση, αξιολόγηση ή η εμπειρία της ευχαρίστησης ή δυσαρέσκειας» (σ. 151). Σε επόμενα βέβαια άρθρα του στο πλαίσιο της ίδιας συζήτησης γενικεύει την έννοια του συναισθήματος, όρο τον οποίο χρησιμοποιεί χωρίς να τον διακρίνει από την ευαισθησία και την συγκίνηση (Zajonc, 1984, 2000).

Στο άρθρο του Ζάγιεντς απαντάει ο Ρίτσαρντ Λάζαρους καθηγητής στο Πανεπιστήμιο Μπέρκλεϊ της Καλιφόρνια των ΗΠΑ, με ένα άρθρο του στο ίδιο περιοδικό με τίτλο «Thoughts on the Relations Between Emotion and

---

[10] Η συζήτηση αυτή συνοψίζεται στο Lazarus, 1999.

[11] Ενδεικτικά Dirx 2006, 2008.

Cognition» (Lazarus, 1982) διατυπώνοντας τη θέση ότι «η νοητική λειτουργία είναι αναγκαία και ικανή συνθήκη του συναισθήματος» (ο.π. σ. 119). Ο Λάζαρους απορρίπτοντας τα βασικά επιχειρήματα της θέσης του Ζάγιεντς υπερασπίζεται την προτεραιότητα της νόησης επί του συναισθήματος. Διατυπώνοντας τον ισχυρισμό ότι οι νοητικές λειτουργίες «αποτελούν υπόβαθρο και συστατικό στοιχείο όλων των συναισθηματικών καταστάσεων», οι οποίες δεν μπορούν να αποσπαστούν από το πλαίσιο στο οποίο εκδηλώνονται, απορρίπτει τη θέση του Ζάγιεντς ότι οι νοητικές και οι συναισθηματικές λειτουργίες είναι αποτέλεσμα διακριτών ψυχο-φυσιολογικών καταστάσεων. Το πλαίσιο σε συνδυασμό με τις ατομικές διαθέσεις προσδιορίζει μια αξιολόγηση της κατάστασης η οποία σε συνδυασμό με την υποκειμενική σπουδαιότητα είναι αναγκαία συνθήκη για την εκδήλωση οποιουδήποτε συναισθήματος. Ως συναίσθημα ορίζεται ένα σύμπλεγμα ανθρώπινων λειτουργιών, όπως σκέψεις, πεποιθήσεις, κίνητρα νοήματα, υποκειμενικές σωματικές εμπειρίες και καταστάσεις. Για τον Λάζαρους η θέση του Ζάγιεντς συνεπάγεται ότι η νόηση είναι πάντα ενσυνείδητη, ορθολογική και εμπρόθετη, ενώ το συναίσθημα πρωτόγονο, ανεπεξέργαστο και ακούσιο.

Η συζήτηση Ζάγιεντς – Λάζαρους στην οποία ενεπλάκησαν και άλλοι (Lazarus, 1999), φαινομενικά επικεντρώνεται στη προτεραιότητα της νόησης έναντι του συναισθήματος ή του συναισθήματος έναντι της νόησης, αλλά στη πραγματικότητα εξετάζει τις σύνθετες σχέσεις νόησης και συναισθήματος. Ο Ζάγιεντς, παρόλο που υποστηρίζει την απόλυτη διάκριση των δύο αυτών λειτουργιών, δέχεται την αμοιβαία, αν και όχι συμμετρική, συνάφειά τους. «Υπάρχουν πιθανώς, ελάχιστες αντιληπτικές και νοητικές λειτουργίες της ανθρώπινης καθημερινότητας χωρίς μια σημαντική συναισθηματική διάσταση» (σ. 153), «το συναίσθημα είναι πάντοτε παρών στη σκέψη, ενώ η νόηση δεν συνοδεύει πάντα το συναίσθημα» (σ. 154), είναι δύο από τις χαρακτηριστικές διατυπώσεις του. Αντίστοιχα ο Λάζαρους υποστηρίζει ότι η νόηση και το συναίσθημα συνυπάρχουν χωρίς βέβαια να διευκρινίζει το χαρακτήρα αυτής της συνύπαρξης.

Τα επιχειρήματα του Ζάγιεντς επιτρέπουν τη διατύπωση της υπόθεσης ότι οι αμοιβαίες, αλλά ασύμμετρες, σχέσεις νόησης και συναισθήματος επιδρούν στη διαμόρφωση της νόησης καθεαυτής, αφού το συναίσθημα πάντα συνοδεύει τη νόηση ή διαφορετικά διατυπωμένο η νόηση υφίσταται μόνο σε σχέση με το συναίσθημα. Με την παραδοχή βέβαια της διάκρισης νόησης και συναισθήματος, η οποία και αυτή αμφισβητείται και από φιλοσοφικές οπτικές και από θεωρητικές προσεγγίσεις ρευμάτων της κριτικής ψυχολογίας.

Παράλληλα, έχει διατυπωθεί η άποψη (Roald, 2007) ότι στη συζήτηση αυτή συζητούνται διαφορετικά φαινόμενα επειδή οι συμμετέχοντες προσλαμβάνουν και αναλύουν με διαφορετικούς όρους και το συναίσθημα και την νόηση.

ΤΟ ΣΥΝΑΙΣΘΗΜΑ ΣΤΗΝ ΜΑΘΗΣΗ ΕΝΗΛΙΚΩΝ

Ο ρόλος του συναισθήματος στην εκπαίδευση βρέθηκε πάντοτε στο επίκεντρο σχετικών προβληματισμών και τα τελευταία χρόνια οι συναισθηματικές διαστάσεις της μάθησης και της εκπαίδευσης ενηλίκων αποτελούν ένα από τα επίκαιρα θέματα της αντίστοιχης βιβλιογραφίας, (Dirx, 2008).

Όπως και στην εκπαίδευση των ανηλίκων έτσι και στην εκπαίδευση των ενηλίκων, υπάρχει μια ευρύτατα διαδεδομένη άποψη, η οποία θεωρεί το συναίσθημα ως κίνητρο της μάθησης, αλλά και μια εξίσου διαδεδομένη άποψη, η οποία θεωρεί το συναίσθημα ως εμπόδιο της μάθησης. Τελικά βέβαια στο όνομα μιας ορθολογικότητας και οι δύο αυτές απόψεις αποδίδουν έμφαση στις λογικές διαδικασίες και προτάσσουν την απόκτηση της γνώσης. Μια εναλλακτική άποψη (Heron, 1992), θεωρεί το συναίσθημα συστατικό στοιχείο των νοητικών διαδικασιών, άρα και της μάθησης. Για την άποψη αυτή η ουσιαστική μάθηση θεμελιώνεται και προέρχεται από τις υποκειμενικές συναισθηματικές σχέσεις των ενηλίκων με τον εαυτόν τους και το ευρύτερο κοινωνικό τους πλαίσιο. Τα νοήματα, τα οποία αποδίδονται σε αυτές τις συναισθηματικές σχέσεις αντανακλούν τις ιδιαίτερες κοινωνικο-πολιτιστικές και ψυχικές καταστάσεις μέσα στις οποίες εκδηλώνονται. Όπως σχολιάζει ο Ντιρξ (Dirx, 2001), αυτή η διαδικασία απόδοσης νοημάτων είναι ουσιαστικά φαντασιακή και μετα-ορθολογική (όχι όμως αν-ορθολογική), παρά απλώς αναστοχαστική και ορθολογική.

Στη βάση αυτή, το πλαίσιο της μάθησης των ενηλίκων, τυπικό ή άτυπο αποτελεί σύμφωνα με τη χαρακτηριστική έκφραση του Μπρούκφιλντ ένα «συναισθηματικό πεδίο μάχης» (Brookfield 1993) με τους ενήλικες σε ένα διαρκή συναγωνισμό για αναγνώριση αποδοχή ή άσκηση εξουσίας. Σε συναφείς έρευνες οι ενήλικες περιγράφουν τις εμπειρίες τους από τη συμμετοχή τους σε προγράμματα εκπαίδευσης με συναισθηματικούς όρους άλλοτε ως ευχάριστες ή ενδιαφέρουσες και άλλοτε ως δυσάρεστες ή βαρετές. Την ίδια στιγμή που υπερτονίζουν το ρόλο της συμμετοχής τους σε μια ομάδα ή την ανάπτυξη κοινωνικών σχέσεων.

Η οπτική που θεωρεί το συναίσθημα συστατικό στοιχείο των νοητικών διαδικασιών και της μάθησης των ενηλίκων έχει αναπτυχθεί μέσα σε δύο κύρια θεωρητικά ρεύματα της εκπαίδευσης των ενηλίκων: τη θεωρία της μετασχηματίζουσας μάθησης (Mezirow, 1991), και τη θεωρία της εμπειρικής μάθησης (Kolb, 1984).

Εντελώς σχηματικά, ο προβληματισμός για το ρόλο του συναισθήματος στο πλαίσιο της θεωρίας της μετασχηματίζουσας μάθησης αναπτύχθηκε από τον Ρόμπερτ Μπόϋντ και τους συνεργάτες του (Boyd & Myers, 1988, Boyd, 1991), οι οποίοι ανέδειξαν το κεντρικό ρόλο των συναισθηματικών καταστάσεων σε δύο κατά τη γνώμη τους συστατικές διαδικασίες της μετασχηματίζουσας μάθησης, τη συνειδητοποίηση και την ολοκλήρωση της προσωπικότητας. Θα πρέπει εδώ παρενθετικά να σημειωθεί ότι σε όλες αυτές τις αναλύσεις η έννοια της μετασχηματίζουσας μάθησης παραμένει μάλλον ασαφής (Dirkx, 1997). Βασισμένοι στη γνωστή ως «ψυχολογία του βάθους» ανάλυσαν τις διαδικασίες μέσα από τις οποίες οι ενήλικοι αξιοποιώντας τις μαθησιακές εμπειρίες τους σε τυπικά εκπαιδευτικά περιβάλλοντα κατασκευάζουν, ανακατασκευάζουν και αποδίδουν προσωπικά νοήματα στις εμπειρίες αυτές χρησιμοποιώντας φαντασιακές προσεγγίσεις των συναισθημάτων. Στις θεωρίες της εμπειρικής μάθησης, η μαθησιακή διαδικασία αποτελεί ένα κύκλο ο οποίος περιλαμβάνει συγκεκριμένες εμπειρίες – αναστοχασμό – νέα γνώση – εφαρμογή και νέες εμπειρίες. Η μάθηση επομένως είναι προϊόν του αναστοχασμού, μιας νοητικής και ορθολογικής διαδικασίας απόδοσης νοήματος σε μια ήδη βιωμένη εμπειρία. Νεότερες θεωρητικές αναλύσεις προσέθεσαν στον κύκλο αυτό την προϋπόθεση της συναισθηματικής ενεργοποίησης του ατόμου και απέδωσαν στο συναίσθημα ένα κεντρικό ρόλο στις διαδικασίες της εμπειρικής μάθησης (Heron, 1992).

Σε όλες τις προαναφερθείσες προσεγγίσεις αποδίδεται στη τέχνη και ως δημιουργική δραστηριότητα και ως αισθητική εμπειρία ένας σημαντικός ρόλος στη μάθηση και άρα στην εκπαίδευση ενηλίκων.

Η ΤΕΧΝΗ ΩΣ ΜΑΘΗΣΙΑΚΗ ΕΜΠΕΙΡΙΑ

Υπάρχουν πολλοί τρόποι προσέγγισης των έργων τέχνης, καθένας από τους οποίους προσφέρει διαφορετικές κατανοήσεις και ευκαιρίες κατασκευής νοημάτων, όπως και καθένας από τους τρόπους αυτούς προκαλεί και διαφορετικά συναισθήματα, άρα διαφορετικές αισθητικές εμπειρίες (Roald, 2007). Ένα πίνακας ζωγραφικής, για παράδειγμα, μπορεί να προσφέρει διάφορες μαθησιακές εμπειρίες μέσα από διαφορετικές «αναγνώσεις» των χαρακτηριστικών, της δομής ή του περιεχομένου, τόσο των επιμέρους

στοιχείων του όσο και του συνολικού θέματος του. Σε μια πρώτη επαφή πληροφορεί για τον ίδιο τον πίνακα και τον ζωγράφο του. Σε μια άλλη «ανάγνωση» παρέχει γνώσεις για τα τεχνικά χαρακτηριστικά των ζωγραφικών έργων, για τα υλικά και τις τεχνοτροπίες τους. Η πιο σημαντική «ανάγνωση» του, όμως, είναι εκείνη η οποία προβάλει ή δημιουργεί νοήματα, τα οποία ξεπερνούν τα ίδιο το έργο. Παράδειγμα χαρακτηριστικό, οι πολλαπλές δυνατότητες «ανάγνωσης» της Γκουέρνικα του Πικάσο. Μια τέτοια κατασκευή νοημάτων παίρνει συχνά ένα χαρακτήρα αποκάλυψης και υποβάλλει την ανάπτυξη μαθησιακών δραστηριοτήτων, κατά κανόνα ευχάριστων και δημιουργικών, οι οποίες με τη σειρά τους παρέχουν ευκαιρίες διαλόγου κα αναστοχασμού. Η εμπλοκή ενός ενηλίκου σε μαθησιακές δραστηριότητες, οι οποίες προκαλούνται από αισθητικές εμπειρίες είναι ταυτόχρονα νοητική και συναισθηματική. Η νοητική εμπειρία μάλιστα, αφενός αίρει τη διάσταση υποκειμένου και αντικειμένου, αφού πρόκειται για μια συμμετοχική δραστηριότητα του υποκειμένου την οποία προκαλεί το ίδιο το έργο τέχνης και αφετέρου έχει έναν αυτοσκοπό, αφού η συμμετοχή σε μια αισθητική εμπειρία δεν επιδιώκει κανέναν άλλο στόχο πέρα από την ίδια την αισθητική εμπειρία (Roald, 2007). Κατά συνέπεια, στην αισθητική εμπειρία αίρεται και η διάκριση νόησης και συναισθήματος. Όπως υπογραμμίζει ο Κιρουπ (Kjørup 2000, όπως αναφέρεται στο Roald, 2007, σ. 76-77),βτα συναισθήματα παίζουν ένα ρόλο πρόκλησης της σκέψης, αφού κατευθύνουν την προσοχή μας σε βασικά χαρακτηριστικά ενός έργου τέχνης, τα οποία είναι αναγκαία για μια έντονη αισθητική εμπειρία, η οποία με τη σειρά της ανατροφοδοτεί τη σκέψη. Παράλληλα, όμως η πρόκληση της προσοχής μας σε επιλεγμένα χαρακτηριστικά ενός έργου τέχνης είναι και αποτέλεσμα νοητικών διεργασιών.

Υιοθετώντας μια φαινομενολογική προσέγγιση, ο Χανς-Γκιοργκ Γκάνταμερ εισάγει μια διαφορετική, αλλά συμπληρωματική της προηγούμενης, οπτική της αισθητικής εμπειρίας υποστηρίζοντας ότι η επαφή με ένα έργο τέχνης ενέχει νοητικές διεργασίες κατανόησης (Gadamer, 1986,1989). Η κατανόηση δημιουργείται σε ένα «ερμηνευτικό κύκλο», που συγκροτείται ως μια διαρκής διαδικασία εμπειριών, οι οποίες παρέχονται από μια νοητική παλινδρόμηση ανάμεσα στην παρατήρηση των μερών και του όλου ενός έργου τέχνης. Η επαφή με ένα έργο τέχνης βιώνεται κατ' αρχήν ως μια παθητική πράξη, υποστηρίζει ο Γκάνταμερ, στη οποία μας υποβάλλεται από το ίδιο το έργο τέχνης η «αλήθεια» του και η ερμηνεία της «αλήθειας» αυτής βασίζεται αρχικά στις προσωπικές μας αντιλήψεις και στους ατομικούς μας τρόπους κατανόησης του. Η τροποποίηση αυτής της πρώτης κατανόησης του έργου τέχνης προκαλείται, όπως προαναφέρθηκε, από έναν «ερμηνευτικό κύκλο» παρατήρησης, η οποία δημιουργεί μια νέα ερμηνεία του έργου κ.ο.κ. Δημιουργείται, έτσι, ένας εσωτερικός διάλογος για το νόημα του έργου δια

του οποίου επερωτώνται και αναθεωρούνται πρότερες κατανοήσεις και ερμηνείες των αισθητικών μας εμπειριών. Μέσα από τέτοιες διαδικασίες, οι επαφές μας με τα έργα τέχνης, λειτουργώντας ως διαμεσολαβητές, οδηγούν στην αυτό-κατανόηση όψεων της προσωπικότητας μας μέσα από την υιοθέτηση νέων ή την τροποποίηση παλιών οπτικών. Αυτή η αυτό-κατανόηση, βέβαια, είναι μια συνεχής και χωρίς τέλος νοητική διαδικασία.

Το βασικό ερώτημα της παρούσας εισήγησης μπορεί, επομένως, να διατυπωθεί ως εξής: Μπορεί η τέχνη ως δημιουργική δραστηριότητα ή και ως αισθητική εμπειρία να συμβάλλει στην κατανόηση, στην ερμηνεία και τελικά στην αναθεώρηση της αρνητικής σχέσης την οποία έχουν αναπτύξει πολλοί ενήλικες με τα μαθηματικά, ως αποτέλεσμα σχολικών τους εμπειριών;

ΤΑ ΣΥΝΑΙΣΘΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΕΝΗΛΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Με το βιβλίο του Λόρυ Μπάξτον «Πανικοβάλλεστε με τα μαθηματικά; Αντιμετωπίζοντας το άγχος των μαθηματικών» (Buxton, 1981) άνοιξε πριν τριάντα χρόνια η συζήτηση για τα αρνητικά συναισθήματα των ενηλίκων για τα μαθηματικά. Ο Μπάξτον έδειξε, μέσα από μελέτες χαρακτηριστικών περιπτώσεων, ότι επιτυχημένοι στην επαγγελματική τους ζωή ενήλικες μπορεί να κατέχονται από έναν εξουθενωτικό φόβο απέναντι στα μαθηματικά, ο οποίος δεν μπορούσε εύκολα να αντιμετωπιστεί. Όπως χαρακτηριστικά σημειώνει «η λογική κυριαρχείται από το συναίσθημα ή συχνότερα εμποδίζεται απ' το συναίσθημα» (ο.π. σ. 3). Ο ίδιος ανέπτυξε και εφάρμοσε ένα πρόγραμμα, το οποίο αποκάλεσε «μαθηματική θεραπεία», σε μια προσπάθεια να αποκαταστήσει την αυτοπεποίθηση των ανθρώπων αυτών κατά την ενασχόληση τους με τα μαθηματικά.

Η πιο πρόσφατη μακροχρόνια έρευνα του Τζεφ Ήβανς σε ενήλικες διαφόρων ηλικιών (Evans, 2000) επιβεβαίωσε τις διαπιστώσεις του Μπάξτον και μάλιστα για πολύ στοιχειώδεις μαθηματικές έννοιες και πράξεις, όπως είναι για παράδειγμα η πρόσθεση διψήφιων αριθμών. Το βασικό συμπέρασμα του Ήβανς είναι ότι «*το συναίσθημα είναι αναπόσπαστο στοιχείο της σκέψης, συμπεριλαμβανομένης και της μαθηματικής σκέψης*» (ο.π. σ. 228). Το συναίσθημα δεν «παρεμβαίνει» αναγκαστικά στη μαθηματική σκέψη – παρόλο που η σκέψη πολλές φορές αδρανοποιείται από καταστάσεις πανικού – αλλά μάλλον λειτουργεί ένα είδος «*συναισθηματικού φορτίου το οποίο συνοδεύει τις ιδέες και έτσι συναρτάται με τη νόηση*» (ο.π. σ. 230).

Για να ερμηνεύσει τα αρνητικά συναισθήματα των ενηλίκων για τα μαθηματικά ο Ήβανς χρησιμοποιεί την έννοια της «πρακτικής», η οποία αναφέρεται σε ένα σύνολο εθίμων, γλωσσών, εργαλείων, ενδιαφερόντων κ.α. τα οποία επικρατούν σε μια «κοινότητα» και τα οποία με τη σειρά τους

ορίζουν αυτή την κοινότητα. Οι πρακτικές αυτές και η χρήση τους συναρτώνται με τις ταυτότητες των ατόμων και επομένως με τους τρόπους σκέψης και τα συναισθήματα τους. Χαρακτηριστικά παραδείγματα τέτοιων «πρακτικών» και «κοινοτήτων» είναι εκείνες των διαφόρων επαγγελματικών ομάδων. Οι ενήλικοι που έχουν αναπτύξει και διατηρούν αρνητικά συναισθήματα απέναντι στα μαθηματικά αδυνατούν να κατανοήσουν και να υιοθετήσουν πρακτικές της μαθηματικής κοινότητας.

Σε μια μικρότερης έκτασης έρευνα της εισηγήτριας επιχειρήθηκε να ανιχνευτούν και να ερμηνευτούν τα συναισθήματα ενηλίκων όταν υποχρεώνονται να ασχοληθούν με μαθηματικές δραστηριότητες εντός και εκτός ενός σχολικού περιβάλλοντος. Στην έρευνα συμμετείχαν 191 ενήλικες που φοιτούσαν κατά το σχολικό έτος 2006-7 σε Σχολεία Δεύτερης Ευκαιρίας της Αθήνας και της Θεσσαλονίκης. Δύο είναι οι ενδιαφέρουσες διαπιστώσεις, οι οποίες προέκυψαν από την έρευνα αυτή. Διαπίστωση πρώτη, οι ενήλικες δεν βίωναν κανένα αρνητικό συναίσθημα όταν εκτελούσαν μαθηματικούς υπολογισμούς και αριθμητικές πράξεις, οι οποίες προέκυπταν σε δραστηριότητες της καθημερινότητας τους, ενώ αντίθετα εκδήλωναν ένα εύρος αρνητικών συναισθημάτων, από απαρέσκεια μέχρι φόβο, όταν ασχολούνταν με τα μαθηματικά του σχολείου, τα οποία όμως γενικεύοντας ταύτιζαν με τα «μαθηματικά» ως γνώση και πρακτική. Διαπίστωση δεύτερη, οι ενήλικες της έρευνας απέδιδαν την αρνητική συναισθηματική και νοητική τους σχέση με τα μαθηματικά στις κακές σχολικές τους εμπειρίες από το μάθημα των μαθηματικών, στην αδυναμία τους να διαβάσουν μαθηματικά κείμενα, στην ανασφάλεια και στην αβεβαιότητα τους για τη σωστή επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, στην αίσθηση ανικανότητας και αδυναμίας να κατανοήσουν μαθηματικές έννοιες και τεχνικές και τέλος στην πεποίθηση τους ότι η μαθηματική γνώση δεν είναι αναγκαία εκτός σχολείου, παρά μόνο σε συγκεκριμένα επαγγέλματα. Ένα συμπέρασμα το οποίο προκύπτει από τις διαπιστώσεις αυτές είναι ότι τα αρνητικά συναισθήματα των ενηλίκων αναφέρονται στην εικόνα των μαθηματικών την οποία κατασκευάζει το σχολείο. Επομένως, τα συναισθήματα αυτά «διδάσκονται» στο σχολείο και «μαθαίνονται» στο σχολείο μέσα από το περιεχόμενο και τις πρακτικές διδασκαλίας των σχολικών μαθηματικών και τελικά παγιώνονται ως συστατικά στοιχεία του «μαθηματικού αυτό-προσδιορισμού» των ενηλίκων.

Όπως, μάλιστα, έχει διατυπωθεί από τους Πράϊς και Μπιγκς (Pries & Biggs, 2001), η δημιουργία, η ενίσχυση και η παγίωση των αρνητικών συναισθημάτων για τα μαθηματικά συνιστούν ένα είδος αέναου κύκλου, όπου αρχικά κάποιες αρνητικές εμπειρίες από τα μαθηματικά προκαλούν αρνητικές αντιδράσεις απέναντι σε καταστάσεις, οι οποίες περιλαμβάνουν μαθηματικές γνώσεις ή τεχνικές, οι οποίες στη συνέχεια οδηγούν στην

αποφυγή των καταστάσεων αυτών με συνέπεια ένα είδος αποξένωσης από τα μαθηματικά, η οποία με τη σειρά της οδηγεί σε αδυναμία κατανόησης και χειρισμού μαθηματικών καταστάσεων. Η αδυναμία αυτή αναπαράγει και ενισχύει τα αρνητικά συναισθήματα, επιβεβαιώνοντας την ανικανότητα κατανόησης και χειρισμού μαθηματικών καταστάσεων κ.ο.κ. Ο κύκλος αυτός της αίσθησης μιας μαθηματικής ανεπάρκειας η οποία προέρχεται και οδηγεί σε αρνητικά συναισθήματα για τα μαθηματικά επαναλαμβάνεται σε κάθε ευκαιρία διαμορφώνοντας αυτό που προαναφέρθηκε ως «μαθηματικό αυτό-προσδιορισμό» των ενηλίκων. Ζητούμενο, επομένως, είναι το σπάσιμο του «φαύλου κύκλου» αρνητικών συναισθημάτων – νοητικής ανεπάρκειας στα μαθηματικά.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΑΝΤΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΩΝ

Από την ανάλυση που προηγήθηκε θα μπορούσαμε αντί για συμπέρασμα να διατυπώσουμε το ακόλουθο ερώτημα: Εάν τροποποιήσουμε το πλαίσιο και διαμορφώσουμε ανάλογα το περιεχόμενο των μαθηματικών δραστηριοτήτων, οι οποίες περιλαμβάνονται σε προγράμματα εκπαίδευσης ενηλίκων, έτσι ώστε οι δραστηριότητες αυτές να συναρθρωθούν με δημιουργικές καλλιτεχνικές δραστηριότητες και αισθητικές εμπειρίες από έργα τέχνης, θα μπορούσαμε να επιτύχουμε αρχικά τη συνειδητοποίηση και στην συνέχεια την αναθεώρηση της αρνητικής συναισθηματικής σχέσης, την οποία πολλοί ενήλικες έχουν αναπτύξει με τα μαθηματικά;

Και αν η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι θετική, με ποια μεθοδολογία θα υλοποιηθεί αυτή η συνάρθρωση μαθηματικών δραστηριοτήτων, καλλιτεχνικής δημιουργίας και αισθητικών εμπειριών; Μπορεί αφετηρία της συνάρθρωσης αυτής να αποτελέσει ο προσανατολισμός σε μια μαθηματική οπτική των έργων τέχνης και στην «ανάγνωση» και στη «δημιουργία», ώστε να προβληθεί μια εικόνα για τα μαθηματικά ως ενός – εκ των πολλών – τρόπων να βλέπουμε τον κόσμο, να παριστάνουμε τον κόσμο και να μιλάμε για τον κόσμο;

Η τυπική εκπαίδευση υπεραξιώνει τη νόηση και υποβαθμίζει το συναίσθημα με κύριο όχημα τη γλώσσα και τις βασισμένες στη γλώσσα μορφές μάθησης και διδασκαλίας. Χωρίς να υποβαθμίζονται αυτές οι μορφές μάθησης και διδασκαλίας είναι βέβαιο ότι δεν αφορούν παρά σε μια μόνο διάσταση της προσωπικότητας και των γνωστικών μας δυνατοτήτων. Υιοθετώντας και ενσωματώνοντας στις διδακτικές πρακτικές και τρόπους μάθησης οι οποίοι αξιοποιούν τις τέχνες απευθυνόμαστε στο εξίσου σημαντικό για τη νοητική μας συγκρότηση συναίσθημα, όπως προηγούμενα - έστω και συνοπτικά - αναλύθηκε στην εισήγηση αυτή. Με την προϋπόθεση, βέβαια, αποδεχόμαστε

μαζί με τη γλώσσα και κάθε άλλη μορφή έκφρασης των σκέψεων, των ιδεών, των αισθημάτων, των διαθέσεων και των προθέσεων μας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Boyd, R. D. (ed.) (1991), *Personal Transformations in Small Groups: A Jungian Perspective.* London: Routledge.

Boyd, R. D., & Myers, J. G. (1988), Transformative Education, *International Journal of Lifelong Education, 7*(4), 261–284.

Brookfield, S. (1993), Through the Lens of Learning: How the Visceral Experience of Learning Reframes Teaching. Στο D. Boud, R. Cohen, and D. Walker (eds.), *Using Experience for Learning.* Bristol, PA: Society for Research in Higher Education.

Buxton, L. (1981), Do you panic about maths? *Coping with maths anxiety,* London: Heinemann Educational.

Dirkx, J.M. (2006), Engaging Emotions in Adult Learning: A Jungian Perspective on Emotion and Transformative Learning. Στο E. Taylor (ed.), *Fostering Transformative Learning in the Classroom: Challenges and Innovations.* New Directions in Adult and Continuing Education, no. 109. San Francisco: Jossey-Bass.

Dirkx, J.M. (2001), The Power of Feelings: Emotion, Imagination, and the Construction of Meaning in Adult Learning." Στο S. B. Merriam (ed.), *The New Update on Adult Learning Theory.* New Directions for Adult and Continuing Education, no. 89. San Francisco: Jossey-Bass.

Dirkx, J.M. (1997), Nurturing Soul in Adult Learning. Στο P. Cranton, (ed.), *Transformative Learning in Action.* New Directions for Adult and Continuing Education, no.74. San Francisco: Jossey-Bass.

Evans, J. (2000), Adults Mathematical Thinking and Emotions: a Study of Numerate Practices, London: Routledge Falmer.

Gadamer, Hans-Georg. (1989/1960) *Truth and Method.* New York: The Continuum Publishing Company..

Gadamer, Hans-Georg. 1986/1970), *The Relevance of the Beautiful and other Essays*. Cambridge: Cambridge University Press.

Heron, J. (1992) *Feeling and Personhood: Psychology in Another Key.* Thousand Oaks, Calif.: Sage.

Kolb, D. (1984), *Experiential Learning.* Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall.

Lazarus, R. (1982) Thoughts on the relation between cognition and emotion. *American Psychologist, 37*(9), 1019-1024.

Lazarus, R. (1984) On the primacy of cognition. *American Psychologist*, *39*(2), 124-129.

Lazarus, R. (1999) The Cognition-Emotion Debate: a Bit of History. Στο Dalgleish, T. and Power, M. (eds). *Handbook of Cognition and Emotion.* New York: John Wiley & Sons, 3-20.

Power, M. (eds). *Handbook of Cognition and Emotion.* New York: John Wiley & Sons: 3-20.

Pries, C. & Biggs B. T. (2001) Can Instructors Help Learners Overcome Mathematics Anxiety? *American Technical Education Association Journal*, 28(4), 6-10.

Mezirow, J. (1991), *Transformative Dimensions of Adult Learning.* San Francisco: Jossey-Bass.

Roald, T. (2007), Cognition in emotion. An investigation through experiences with art, Amsterdam: Rodopi B.V.

Zajonc, R. (1980) Feeling and thinking: Preferences need no inferences. *American Psychologist*, *35*(2), 151-175.

Zajonc, R. (1984) On the primacy of affect. *American Psychologist*, *39*(2), 117-123.

egian@tutors.eap.gr

[λευκή σελίδα]

ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙ

Μαθηματικά και Τέχνες στην Εκπαίδευση: Η Τέχνη του Λόγου

[λευκή σελίδα]

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΠΟΙΗΣΗ
ΔΥΟ ΟΨΕΙΣ ΤΗΣ ΠΑΝΑΝΘΡΩΠΙΝΗΣ ΟΜΟΡΦΙΑΣ.

Μαρία Τερδήμου

Μαθηματικός, Διδάκτωρ Φιλοσοφίας

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Να μετράμε, χρησιμοποιώντας τα δάκτυλα του χεριού μας και να γράφομε, σχεδιάζοντας, με κόπο αρχικά, τα γράμματα του αλφάβητου: τα δύο πρώτα πράγματα που μαθαίνομε να κάνομε, όταν πρωτοεισερχόμαστε, μικρά παιδιά ακόμη, στη μαγεία της μάθησης. Και όταν μεγαλώσομε και αν είμαστε τυχεροί, η γραφή μας μπορεί να εξελιχθεί και να φτάσει να γίνει ποίηση και η απλή Αριθμητική να μας δείξει το δρόμο για τον υπέροχο κόσμο των Μαθηματικών. Να γίνομε, δηλαδή, μύστες των δύο μοναδικών γλωσσών που έχει ο άνθρωπος, σύμφωνα με τα λόγια του Χάϊζενμπεργκ, για να αντιμετωπίζει την πραγματικότητα, της γλώσσας των Μαθηματικών και της Ποίησης. Τι είναι η ποίηση; Η τέχνη να οδηγείσαι και να φτάνεις σε αυτό που σε υπερβαίνει, μας λέει ο ποιητής Οδυσσέας Ελύτης. Και τα Μαθηματικά, σίγουρα όχι μόνο τύποι, πράξεις, τεχνικές ή εργαλείο χρήσιμο για τις άλλες επιστήμες, αλλά το «κατ' εξοχήν μάθημα» για τους Πυθαγόρειους δηλαδή το κατ' εξοχήν προϊόν της μάθησης, ή για άλλους, όπως ο W. T. Tutte, η ανθρωπιστική επιστήμη που υμνεί την αιώνια λογική, ή η τέχνη που πλάθει δομές αιθερικής ομορφιάς από την πρωταρχική ύλη που ονομάζεται λογική, αλλά πάνω από όλα τα Μαθηματικά είναι κυρίως ευχαρίστηση. Και τα δύο οδηγούν στην ομορφιά. Και σύμφωνα με τον Dirac, η μαθηματική ομορφιά δεν μπορεί να οριστεί περισσότερο από ό, τι μπορεί να οριστεί η ομορφιά στην τέχνη αλλά εκείνοι που μελετούν τα Μαθηματικά δεν έχουν συνήθως καμιά δυσκολία στο να την εκτιμούν. Η ισχύουσα αντίληψη είναι ότι τα Μαθηματικά και η Ποίηση δεν μπορεί να έχουν κάποιο κοινό στοιχείο. Και όμως, αν ξύσομε την επιφάνεια και διεισδύσουμε λίγο περισσότερο στο σώμα των δύο από τις σημαντικότερες ανθρώπινες δραστηριότητες καθ' όλη τη διάρκεια του γραπτού πολιτισμού, σίγουρα θα βρούμε στοιχεία συγγενικά, ομοιότητες, αθέατες στην πρώτη ματιά. Και αυτές είναι που θα πρέπει να φέρομε στο φως, να τις αποδείξομε, τι μαθηματικοί θα ήμασταν αλλιώς. Και θα το κάνομε με τη βοήθεια αποσπασμάτων δοκιμιακού λόγου καθώς και επιλεγμένων ποιητικών κειμένων από τη νεοελληνική, κυρίως γραμματεία, από έργα δηλαδή των Οδυσσέα Ελύτη, Έκτορα Κακναβάτου, Μανόλη Ξεξάκη και άλλων.

Να μετράμε, χρησιμοποιώντας τα δάκτυλα του χεριού μας και να γράφομε, σχεδιάζοντας, με κόπο αρχικά, τα γράμματα του αλφάβητου: τα δύο πρώτα πράγματα που μαθαίνομε να κάνομε, όταν πρωτοεισερχόμαστε, μικρά παιδιά ακόμη, στη μαγεία της μάθησης. Και όταν μεγαλώσομε και αν είμαστε τυχεροί, η γραφή μας μπορεί να εξελιχθεί και να φτάσει να γίνει ποίηση και η απλή Αριθμητική να μας δείξει το δρόμο για τον υπέροχο κόσμο των Μαθηματικών. Να γίνομε, δηλαδή, μύστες των δύο μοναδικών γλωσσών που έχει ο άνθρωπος, σύμφωνα με τα λόγια του Χάϊζενμπεργκ, για να αντιμετωπίζει την πραγματικότητα, της γλώσσας των Μαθηματικών και της Ποίησης.

Τι είναι η ποίηση; Η τέχνη να οδηγείσαι και να φτάνεις σε αυτό που σε υπερβαίνει, μας λέει ο ποιητής (Ελύτης, *Λέξη* 1991, σ. 716). Η ποίηση μας απαλλάσσει από το να είμαστε δέσμιοι των τυχαίων γεγονότων. Δημιουργεί μια άλλη ύπαρξη μέσα στην ύπαρξη. Μας αναγκάζει να αισθανόμαστε αυτό που με το λογικό μας γνωρίζομε και να φανταζόμαστε αλλιώς αυτό που η γνώση μας έχει αποστηθίσει, που σημαίνει, δημιουργεί απ' αρχής τον κόσμο.(Ελύτης, *2x7*, 1996, σ. 34-35). Η Ποίηση εγείρεται στο σημείον όπου ο ορθολογισμός καταθέτει τα όπλα ή όπως μας λέει ο Novalis[1] στα *Αποσπάσματα*, του ποίηση είναι η αναπαράσταση του αισθήματος, του εσωτερικού κόσμου στο σύνολο του. Και τα Μαθηματικά, σίγουρα δεν είναι μόνο τύποι, πράξεις, τεχνικές ή εργαλείο χρήσιμο για τις άλλες επιστήμες. Αντίθετα, έχουν ένα δικό τους φως και μια δική τους σοφία, πάνω και πέρα από κάθε πιθανή εφαρμογή τους στην επιστήμη και θα είναι πλούσια η ανταμοιβή κάθε ευφυούς ανθρώπου που θα συλλάβει κάτι από το εσωτερικό τους νόημα. Συγχρόνως, είναι το «κατ' εξοχήν μάθημα» για τους Πυθαγόρειους δηλαδή το κατ' εξοχήν προϊόν της μάθησης, ή για άλλους, όπως ο W. T. Tutte[2], η ανθρωπιστική επιστήμη που υμνεί την αιώνια λογική, ή η τέχνη που πλάθει δομές αιθερικής ομορφιάς από την πρωταρχική ύλη που ονομάζεται λογική, αλλά πάνω από όλα τα Μαθηματικά είναι κυρίως ευχαρίστηση.

---

[1] Novalis: ψευδώνυμο του Georg Philipp Friedrich Freiherr von Hardenberg (1772–1801), συγγραφέα και φιλόσοφου του πρώϊμου γερμανικού ρομαντισμού. Το βασικότερο έργο του είναι το *Ύμνοι στη νύχτα* (1800). Στη συλλογή ποιημάτων με τίτλο *Τα Ελεγεία της Οξώπετρας* του Οδυσσέα Ελύτη, το ποίημα με τίτλο "Ελεγείο του Gruningen" είναι αφιερωμένο στον Novalis.

[2] William Thomas Tutte, (1917–2002) Βρετανός μαθηματικός με σημαντική προσφορά στα πεδία της θεωρίας Γραφημάτων και Συνδυαστικής. Κατά τη διάρκεια του Δευτέρου Παγκοσμίου Πολέμου αποκρυπτογράφησε ένα βασικό σύστημα γερμανικών κωδίκων, γεγονός που επηρέασε άμεσα την εισβολή των Συμμάχων στην Ευρώπη.

Και τα δύο οδηγούν στην κρυμμένη ομορφιά, με άλλα λόγια στην απώτερη ουσία του κόσμου. Και σύμφωνα με τον Paul Dirac[3], η μαθηματική ομορφιά δεν μπορεί να οριστεί περισσότερο από ό, τι μπορεί να οριστεί η ομορφιά στην τέχνη αλλά εκείνοι που μελετούν τα Μαθηματικά δεν έχουν συνήθως καμιά δυσκολία στο να την εκτιμούν. Και ο G.H.Hardy, στην *Απολογία* του θα μας πει ότι η ομορφιά είναι το πρώτο κριτήριο και ότι δεν υπάρχει μόνιμη θέση στον κόσμο για άσχημα Μαθηματικά (G.H.Hardy 1993, σ. 63). Και, συνεχίζει «μπορεί να είναι πολύ δύσκολο να οριστεί η μαθηματική ομορφιά, αλλά αυτό είναι εξίσου αληθινό για κάθε είδους ομορφιά, μπορεί να μη γνωρίζουμε ακριβώς τι εννοούμε λέγοντας ότι ένα ποίημα είναι όμορφο, αλλά αυτό δεν μας εμποδίζει να αναγνωρίζουμε την ομορφιά του όταν το διαβάσουμε» (G.H.Hardy 1993,σ. 63-64). Και ο παραλληλισμός ανάμεσα στην Ποίηση και τα Μαθηματικά από τον Hardy δεν σταματάει εδώ. Αλλού, θα πει «…Αν έχει παράξει κάποιος οτιδήποτε…είτε ένα γεωμετρικό θεώρημα είτε ένα ποίημα…» (Hardy 1993, σ. 57) και όταν θελήσει να μιλήσει για την «ομορφιά ενός μαθηματικού θεωρήματος η οποία σε μεγάλο βαθμό εξαρτάται από τη σοβαρότητα του» θα τη συγκρίνει «με την ομορφιά ενός στίχου που εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη σπουδαιότητα των ιδεών που περιέχει» (Hardy 1993, σ. 67).

Η ισχύουσα αντίληψη είναι ότι τα Μαθηματικά και η Ποίηση δεν μπορεί να έχουν κάποιο κοινό στοιχείο. Και όμως, αν ξύσομε την επιφάνεια και διεισδύσουμε λίγο περισσότερο στο σώμα των δύο από τις σημαντικότερες ανθρώπινες δραστηριότητες καθ' όλη τη διάρκεια του γραπτού πολιτισμού, σίγουρα θα βρούμε στοιχεία συγγενικά, ομοιότητες, αθέατες στην πρώτη ματιά. Και αυτές είναι που θα πρέπει να φέρομε στο φως, να τις αποδείξομε, τι μαθηματικοί θα ήμασταν αλλιώς. Και θα το κάνομε με τη βοήθεια αποσπασμάτων δοκιμιακού λόγου καθώς και επιλεγμένων ποιητικών κειμένων από το έργο ενός από τους μεγαλύτερους ποιητές που γέννησε ο τόπος μας, του οποίου μάλιστα τα γενέθλια των εκατό χρόνων εορτάζομε φέτος, του Οδυσσέα Ελύτη,.

Μαθηματικά και Ποίηση: ένα κοινό δομικό συστατικό στοιχείο τους είναι σίγουρα η διαίσθηση και η φαντασία

Ο συνθέτης και αρχιτέκτονας Γιάννης Ξενάκης σημειώνει κάπου:«Τα μαθηματικά κινούνται στη χώρα της φαντασίας και μαθηματική σκέψη είναι η ικανότητα της συνδυαστικής. Πολλοί μαθηματικοί εργάζονται σαν τους

[3] Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984) Βρετανός καθηγητής του Cambrige και ένας από τουςσημαντικότερους φυσικούς που επηρέασαν και συνέβαλαν καταλυτικά στην πρόοδο της φυσικής του 20ου αιώνα Η συνεισφορά του στην Κβαντομηχανική ήταν ιδιαίτερα σημαντική. Το 1933 του απενεμήθει το βραβείο Νόμπελ Φυσικής για την ανακάλυψη των νέων και παραγωγικών μορφών της ατομικής θεωρίας.

καλλιτέχνες. Και οι δυο ξεκινούν με μια σύλληψη την οποία εκ των υστέρων προσπαθούν να αποδείξουν. Συλλαμβάνουν κάτι, και μετά το επαληθεύουν. Τόσο στα Μαθηματικά όσο και στην τέχνη ο δρόμος είναι το απόλυτο σκοτάδι. Τα Μαθηματικά υπάρχουν για να επιβεβαιώνουν την αναγκαιότητα ενός φανταστικού κόσμου. Χωρίς αυτά τα όνειρα και η φαντασία θα ήταν στο κενό».(Μπαλής 2001, σ. 19).

Έλληνες Λόγιοι του 18ου αιώνα θα μας πουν περίπου το ίδιο πράγμα με τα δικά τους λόγια: Οι μονάδες της Γεωμετρίας είναι «φανταστά», δηλαδή αποτέλεσμα της ανθρώπινης φαντασίας και "γεννώνται διά της αφαιρέσεως» λέει ο Βενιαμίν Λέσβιος (Βενιαμίν Λέσβιος, 1818, σ. 21) ενώ ο Μεθόδιος Ανθρακίτης θεωρεί ότι "η φαντασία μέσου χώραν νοός τε και αισθήσεως έχει και ότι "ο Γεωμέτρης τας αποδείξεις εν τη φαντασία ποιείται, την γαρ των σχημάτων ακρίβειαν, και πανθ' όσα αυτοίς παρέπεται, τα εν τη φαντασία μόνα διασώζειν δύναται".(Ανθρακίτης 1749, τόμ. Β σσ. 7,8).

ΟΔΥΣΣΕΑΣ ΕΛΥΤΗΣ: ΜΙΑ ΝΕΑ ΚΑΙ ΣΥΓΧΡΟΝΩΣ ΠΑΜΠΑΛΑΙΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ο ποιητής, συνειδητοποιώντας πολύ νωρίς τη μαγική διάσταση της ποίησης και αποφασισμένος να τη διαφυλάξει από κάθε εξωτερική επιβουλή, επεδίωξε τη συμφιλίωση του ονείρου με τον αριθμό**,** μας λέει ο Grodent, (Grodent, *Λέξη* 1991, σ. 876). Έτσι, η σχέση του με τους αριθμούς αρχίζει και μας βάζει μπροστά στο παράδοξο που, όπως παρακάτω θα διαπιστώσουμε, τον χαρακτηρίζει: τον ονειρικό αυθορμητισμό και τον μαθηματικό περιορισμό. Και βέβαια η υπερρεαλιστική μέθοδος την οποία, κατά κύριο λόγο, ακολουθεί δεν είναι ασύμβατη με την αριθμολογία, που παρεμβαίνει δυναμιτίζοντας το Πνεύμα και του δημιουργού και του αναγνώστη σε όλα τα επίπεδα (Grodent, *Λέξη* 1991, σ. 879).

Ο Ελύτης οργανώνει τα ποιήματα του και εν γένει τις ποιητικές συλλογές του σε συνάρτηση με τους αριθμούς τρία, τέσσερα αλλά κυρίως με τον αριθμό επτά, έναν μόνιμο διαιρέτη της ελυτικής ποίησης, (Σαββίδης 1973 σ. 149) ο οποίος λειτουργεί ως δομικό πλαίσιο ποιημάτων και ενοτήτων, με στόχο, πιστεύομε την αναλογία και επηρεάζει άμεσα την εσωτερική αρχιτεκτονική του έργου του Μάλιστα, νομίζομε ότι και μόνη η οπτική επαφή με τη «γεωμετρική απόδοση» των ποιημάτων υποβάλλει την αίσθηση του ρυθμού. Ας το δούμε λίγο πιο συγκεκριμένα.

Το *Άσμα ηρωϊκό και πένθιμο για τον χαμένο Ανθυπολοχαγό της Αλβανίας* περιέχει 14 στροφές.

Το έργο *Φωτόδεντρο και η δέκατη τέταρτη ομορφιά* περιέχει 21 ποιήματα και την ομώνυμη συλλογή *Φωτόδεντρο*, η οποία βρίσκεται κατά σειρά στη δέκατη τέταρτη θέση

Το *Έξι και μία τύψεις για τον ουρανό* περιέχει επτά ποιήματα και ένα επιπλέον με τίτλο *Επτά ημέρες για την αιωνιότητα.*

Η *Καλοσύνη στις λυκοποριές*, περιλαμβάνει επτά ποιήματα, το ίδιο και *Οι Παραλλαγές πάνω σε μια ακτίνα*

Ο Ήλιος ο Πρώτος δημοσιεύτηκε με δέκα οκτώ ποιήματα αλλά όπως ο ίδιος ο ποιητής σημειώνει «…21 ποιήματα είχε φυσικά η συλλογή. Αν βγήκε με 18 είναι γιατί η Γερμανική λογοκρισία τα διέγραψε. Το ένα το κατέστρεψα, τα άλλα δύο ενσωματωθήκανε, με διάφορες τροποποιήσεις, στη σειρά *Η καλοσύνη στις Λυκοποριές* (M. Vitti, 2000 σ.104).

Η συλλογή *Τα ετεροθαλή* περιλαμβάνει δύο επιμέρους ενότητες με επτά ποιήματα η κάθε μία. Και το επτά μαζί με το τέσσερα και το τρία κυριαρχούν κατά το πλείστον στα περισσότερα από τα ποιήματα, δημιουργώντας ένα εμφανέστατο στιχουργικό παιχνίδι και μια γεωμετρική διάταξη του έργου.

Σε κάποια η δομή είναι 4-7- 4-7- 4-7 -4-7 -4-7- 4-7- 4-7, αλλού 7-7-7-7-7-7-7, αλλού 3-7- 3-7- 3-7- 3-7- 3-7- 3-7- 3-7- 3-7- 3-7- 3-7- 3, άλλο με 42 στίχους, αλλού 4-3-4-3-4-3-4, αλλού 4-4-4.

Το έργο *2x7*, όπως ο τίτλος του φανερώνει, περιέχει 14 κείμενα.

Στους *Προσανατολισμούς* υπάρχουν επιμέρους ενότητες όπως τα *Επτά νυχτερινά επτάστιχα*, επτά ποιήματα με επτά στίχους το καθένα. Τα επτάστιχα εμφανίζονται με παραλλαγές στην στροφική διάταξη (4+3, 4+3, 3+4, 7, 4+3, 4+3, 3+4). Υπάρχουν επίσης τα *Παράθυρα προς την Πέμπτη εποχή*, ο *Ωρίων* ο *Διόνυσος*, *Οι κλεψύδρες του αγνώστου*, με επτά ποιήματα η κάθε ενότητα, οι *Αιθρίες* και η *Συναυλία των Γιακίνθων* με είκοσι ένα ποιήματα ή κείμενα η κάθε μία και η *Θητεία του καλοκαιριού* με δέκα τέσσερα ποιήματα.

Ο *Μικρός Ναυτίλος* είναι ένα έργο με αυστηρή μαθηματική και γεωμετρική δόμηση, στο οποίο εύκολα εντοπίζεται η κυριαρχία των ίδιων αριθμών, δηλαδή των επτά, τέσσερα και τρία. Τόσο η Είσοδος όσο και η Έξοδος αποτελούνται από τρεις παραγράφους που ταυτόχρονα χωρίζονται και συνδέονται μεταξύ τους με τρεις τονισμένους στίχους. Υπάρχουν τέσσερεις ποιητικές πράξεις, η κάθε μία από τις οποίες περιλαμβάνει τρεις ενότητες, με τις δύο εξ αυτών να έχουν επτά, επίσης, ποιήματα η κάθε μία.

Στη *Μαρία Νεφέλη,* οι τρεις βασικές ενότητες - συνομιλίες («Η Παρουσία», «Το τραγούδι της Μαρίας Νεφέλης», «Το Τραγούδι του Ποιητή») παρουσιάζουν τη

Μ. Ν. και τον ποιητή να συνομιλούν, με την κάθε συνομιλία να περιλαμβάνει επτά ποιήματα και από ένα ποίημα, το «Αιώνιο στοίχημα» με επτά στροφές.

Το *Ημερολόγιο ενός αθέατου Απριλίου*, ένα έργο άκρως ερμητικό, που υφαίνεται επάνω σε ένα καμβά, καμωμένο από συμβατικές ημερολογιακές ενδείξεις (Αργυρίου *Λέξη* 1991 σ. 767), περιέχει σαράντα εννέα «εγγραφές», αν μας επιτρέπεται η λέξη. Το ημερολόγιο αναφέρεται σε είκοσι οκτώ ημέρες, αλλά στις περισσότερες από αυτές αντιστοιχούν περισσότερα από ένα ποιήματα.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η αρχιτεκτονική συγκρότηση του *Μονογράμματος*, συλλογή με επίσης, επτά ποιήματα, στο οποίο κάθε ποίημα βασιζόμενο στη μαθηματική πρόοδο και αναστροφή 7-21-35-49-35-21-7 οργανώνεται σύμφωνα με το ίδιο σχήμα αριθμητικής ανάπτυξης – συρρίκνωσης ή συρρίκνωσης – ανάπτυξης. Έτσι στα επτά ποιήματα έχομε κατά σειρά 3+1+3 στίχους, 3+4+7+4+3, 1+7+5+9+5+7+1, 11+1+7+11+7+1+11, 7+4+3+7+3+4+7, 6+4+1+4+6, 2+3+2.

Τα *Ελεγεία της Οξώπετρας* από τις τελευταίε, χρονολογικά, ποιητικέ συλλογές του Ελύτη, περιέχουν και αυτά δέκα τέσσερα ποιήματα Ακόμη και η προτελευταία, *Δυτικά της Λύπης*, περιλαμβάνει επτά ποιήματα. Και των δύο αυτών συλλογών, τα περισσότερα ποιήματα έχουν πλήθος στίχων, πολλαπλάσιο του επτά, όπως το 28, το 42, το 49.

Περισσότερο πολύπλοκο από όλα είναι το *Άξιον Εστί*, που μοιάζει, θα λέγαμε, με σχέδιο βυζαντινής εκκλησίας. Αυτό το «μνημείο που άδει», όπως έλεγε ο Valery, δεν έχει φανερώσει ακόμα όλα τα συνυφασμένα με τους αριθμούς μυστικά του, καθώς μια τέτοια αποκωδικοποίηση θα απαιτούσε γνώσεις ερμηνευτικές, πυθαγόρειες και χριστιανικές, ισχυρίζεται ο Michel Grodent (Grodent, *Λέξη* 1991, σ. 881). Ο Γ. Π. Σαββίδης, όμως επιχειρεί την παρακάτω (πολύ σύντομα παρουσιασμένη) ανάλυση: Το έργο αποτελείται από τρία μέρη: «Η Γένεσις», «Τα Πάθη», το «Δοξαστικό». Το πρώτο διαιρείται σε επτά «ύμνους», ανάλογους, πιθανόν, των επτά ημερών της Δημιουργίας. Στο δεύτερο, καθένα από τα τρία τμήματα διαιρείται σε δώδεκα (3x4) κομμάτια, ποιήματα και πεζά, συμμετρικά διαρθρωμένα ανάλογα με τη μορφή τους και στο τρίτο μέρος η τριαδική συμμετρία είναι εξίσου έκδηλη.(Σαββίδης 1973, σσ. 148-150).

Εμείς μπορούμε να σημειώσομε την επανειλημμένη εμφάνιση των αριθμών τρία τέσσερα και επτά στο έργο, όπως για παράδειγμα «οι Εφτά Μπαλτάδες» (σ. 13), «οι επτά θύρες». «οι στρατιές επτά» (σ. 47). Ως προς το τέσσερα, στη σελίδα 23 το έχομε υπό μορφή στίχου «Ορμαθός και αριθμός των άκρων του σταυρού της Τετρακτίδος»» και στη σελίδα 15 «Αρετή με τις τέσσερεις ορθές γωνίες» κ.λπ.

Και αλλού, όμως, οι αριθμοί αυτοί καθορίζουν την ουσία κάποιων στίχων. Έτσι, ο ποιητής έχει «στα γραπτά» του «τρεις και τέσσερεις ανέμους ανορθόγραφους» (*Δυτικά της Λύπης*, σ. 26) ή τον «πάππο και τον θείο» που κατάγονται από την Έφεσο και ανήκουν σε μία «δέκατη τέταρτη γενεά» (*Δυτικά της Λύπης*, σ. 10)

Ο Mario Vitti, θεωρεί ότι ο αριθμός επτά ή οποιοσδήποτε άλλος, λειτουργεί στην εργασία ενός ποιητή πρώτιστα ως μέτρο αυτοπειθαρχίας. Σε μια συνθετική φύση, γράφει, όπως αυτή που εκδηλώνεται με πλούσιους τεχνικούς συνδυασμούς στον Ελύτη, η εκούσια υποταγή στην πειθαρχία ενός αριθμού είναι μια ιδιοτυπία που μετατρέπεται σε στοιχείο προσωπικής τέχνης και απαραίτητου αυτοπεριορισμού (Mario Vitti 2000 σ. 29.) Και αυτό γιατί, θα λέγαμε εμείς, η απελευθέρωση της ποιητικής γλώσσας από κάθε εξωτερικό μορφολογικό περιορισμό δημιουργεί την ανάγκη για αυτοπεριορισμό. Το ερώτημα που αυθόρμητα, μας γεννάται, όμως, είναι γιατί ο αυτοπεριορισμός αυτός να συναρτάται σε τέτοιο βαθμό με τον αριθμό επτά και όχι με κάποιον άλλο.

Ο αριθμός επτά, όπως γνωρίζομε, αποτελεί το πυθαγόρειο έμβλημα της τελειότητας μια και είναι άθροισμα του τρία και του τέσσερα που εκφράζουν τα τέλεια σχήματα, το ισόπλευρο τρίγωνο και το τετράγωνο και υπήρξε συγχρόνως και ο ιερός αριθμός, για όλους σχεδόν τους λαούς, κλείνοντας μέσα του δύναμη μυστηριακή. Ο Vitti, στην κριτική του μελέτη *Οδυσσέας Ελύτης* επικαλούμενος το *Dictionnaire des Symboles*, σημειώνει ότι ο αριθμός τέσσερα, είναι σύμφωνα με την αρχαία παράδοση το σύμβολο της γης και το τρία το σύμβολο του ουρανού. Το εφτά, είναι χαρακτηριστικό της λατρείας του Απόλλωνα, δηλαδή του θεού του Φωτός, των Τεχνών και της φυσικής τάξης και αρμονίας. Το επτά συμβολίζει, επίσης, την ολότητα του χώρου και του χρόνου. Αλλού, ο αριθμός τρία χαρακτηρίζεται ως ο πρώτος αρσενικός και ενεργητικός αριθμός, σύμβολο του Πνεύματος και ο αριθμός τέσσερα ως θηλυκός και παθητικός αριθμός, σύμβολο της Ύλης.

Ο Ελύτης δεν έχει γράψει κανένα θεωρητικό κείμενο στο οποίο να σχολιάζει την εμμονή του στους συγκεκριμένους αριθμούς. Σε ανέκδοτη, όμως, συνέντευξη του απαντάει σε σχετικό ερώτημα. Εξ' όσων γνωρίζομε, σύνολο συνεντεύξεων του, μεταξύ των οποίων και η αναφερόμενη, θα εκδοθεί στο άμεσο μέλλον και τότε ίσως πάρομε σίγουρες απαντήσεις στα ερωτήματα μας.

Η έμμεση αναφορά του ποιητή στους πυθαγόρειους δεν γίνεται μόνο μέσα από τους αριθμούς τρία, τέσσερα και επτά. Θα αναφερθεί σε αυτούς και άμεσα, έστω και λανθασμένα, μέσα από τα λόγια: «Μη λησμονούμε ότι μόνον ένας Πυθαγόρειος έφτασε στο σημείο να πει ότι το τετράγωνο είναι η φωτιά, ο κύβος η γη, το οκτάεδρο οι άνεμοι και το δωδεκάεδρο ο σύμπας κόσμος »

(Ελύτης 1993, σ. 21, φανταζόμαστε ότι εννοεί τον πυθαγόρειο Φιλόλαο) και αλλού «Κοιμάμαι κι ονειρεύομαι προβλήματα, όλα τα Πυθαγόρεια θεωρήματα, τα θαύματα της τριγωνομετρίας....»(Ελύτης 1986, σ. 66), ή «Το πλην του ενός με αγγίζει που θα' λεγε τινάς τι Πυθαγόρειος» (Ελύτης, 1996, σ. 62). Τέλος, θα αποτολμήσομε να παρατηρήσομε ότι στην ενότητα «Και με φως και με θάνατον» από τη συλλογή *Μικρός Ναυτίλος*, σχολιάζοντας γράμματα του ελληνικού αλφάβητου και μάλιστα μόνο επτά από αυτά, φτάνει στο «Υ: Το πιο ελληνικό γράμμα. Μια υδρία.» (σ. 28). Ο Μιχάλης Κοπιδάκης σε μελέτη του για τον Ελύτη, με τίτλο τον παραπάνω στίχο σημειώνει : «Το Ύψιλον ήταν το πεφιλημένο στοιχείο του Πυθαγόρα, «το γράμμα φιλόσοφον» (Κοπιδάκης, Λέξη 1991, σ. 772).

Η σχέση του ποιητή με τους αριθμούς, όμως, δεν περιορίζεται στους παραπάνω.

Την μονάδα, την οικουμενική αρχή, ο Ελύτης την ξεχωρίζει ιδιαίτερα όταν γράφει «Το ένα και το απόλυτο που συλλαμβάνει ο νους μας είναι τα πολλά και τα σχετικά των άλλων, φτασμένα στην καθαρότητα της μονάδας» (Ελύτης 1993, σ. 256). Άλλη φορά την βάζει να παλεύει με το εννέα «Έξοδος των αριθμών: Πάλη του 1 με το 9...» (Ελύτης 1990, σ. 24) να παλεύει δηλαδή η αρχή με το τέλος. Και αλλού την συμπονά αφόρητα με τα λόγια «Δύστυχο καταμόναχο ένα μου τι θ' απογίνεις, θα σε φάνε από το πλάι πέντε – έξ μηδενικά και πάει τετέλεσται» (Ελύτης 1982, σ. 32).

Στην πρώτη σχεδόν σελίδα του *Άξιον Εστί,* θα αναφερθεί στο «σημείο μηδέν όπου ευωδιάζει απ' αρχής πάλι ένα πουλί» (σ. 14.) και θα δώσει τέλος στο μνημειώδες αυτό έργο με τα λόγια «Νυν Νυν το μηδέν και Αιέν ο κόσμος ο μικρός ο μέγας» (σ. 88)

Θα συνεχίσει, παρομοιάζοντας τη Μυρτώ με ωραίο οκτώ (Ελύτης 1968, σ. 75) και θα φτιάξει μια δική του αριθμητική, από την ανάποδη, όπως λέει. Πως? Προσθέτοντας ένα φεγγάρι που σου αποσπά κάτι από το ψυχικό σου βάρος, αφαιρόντας τρεις βαθμούς στεναχώριας και βάζοντας τρεις βαθμίδες πιο ψηλά στην κλίμακα ένα τρίο του Haydn (Ελύτης 1996, (2x7), σ. 45)

Θα παίξει και με άλλες μαθηματικές έννοιες, όπως είναι οι δυνάμεις, οι εξισώσεις το άπειρο. «Μιλώ μ' έναν φανατισμό που δεν είναι παρά σωφροσύνη στον κύβο» θα πει δηλώνοντας την υπερβολή με τη βοήθεια της τρίτης δύναμης. (Ελύτης 1990, (Δ.Ι) σ. 37). Θα θεωρήσει ότι «...η δίνη καθαρίζει και σχεδόν τετραγωνίζεται μέσα στην έκφραση» (Ελύτης 1993, σ. 173), θα μας δώσει έναν ορισμό της ζωής ως «μία εξίσωση από κολοκύθια που βράζουν χωρίς προορισμό» (Ελύτης 1998, σ. 54) και θα τελειώσει τις επτά ημέρες για την αιωνιότητα, έχοντας «απαγγείλει τα λόγια που απομαγνητίζουν το άπειρο» (Ελύτης 1990 (6+1), σ. 25). Το δέος που νιώθει, και δεν είναι

βέβαια ο μόνος, μπροστά στην έννοια του απείρου θα το εκφράσει λέγοντας ότι «το άπειρο υπάρχει για μας όπως η γλώσσα για τον κωφάλαλο» (Ελύτης 1980 (Μ.Ν.) σ. 24).

Έξω όμως από το «παιχνίδι» με τους αριθμούς, ο Ελύτης εκφράζει την εκτίμηση που έχει για τη μαθηματική επιστήμη, όταν στη *Μαρία Νεφέλη* λέει «φτασμένες οι προλήψεις σε μια καθαρότητα μαθηματική θα μας βοηθήσουνε να κατανοήσουμε τη βαθύτερη δομή του κόσμου» (Ελύτης, 1980 σ. 39) και αλλού «..και η οιονεί μαθηματική κατανομή του χώρου (αναπήδησε) σαν μια απάντηση στο άμετρο και το συγκεχυμένο των αισθημάτων» (Ελύτης 1993, σ. 191). Δηλαδή, ο υπερθετικός βαθμός της καθαρότητας αποκτά μορφή μαθηματικής αλήθειας και αντιδιαστέλλεται στο συγκεχυμένον και το άμετρον. Σε μία συνέντευξη του στην εφημερίδα *Τα Νέα* (19-3-1996) έλεγε: «Νομίζω ότι η ποίηση πρέπει να' ναι μυστηριώδης, συνάμα και διαφανής, με ένα οιωνεί γεωμετρικό υπόβαθρο» (Μπαλής, 2001, σ. 42). Λοιπόν, «ας είναι καλά, ο εκάστοτε γεωμέτρης ποιητής, που 'χει κερδίσει τον στέφανο του ανέμου» (Ελύτης, 1996, (2x7), σ. 21). Και όταν μιλάει για τον Κυβισμό τον θεωρεί «το ευεργετικότερο κίνημα που σημειώθηκε ποτέ στις Εικαστικές Τέχνες» γιατί «τις επέστρεψε από μία βάση αμαρτωλή και επανατοποθέτησε την έκφραση στην καθαρή βάση της Γεωμετρίας, αποκαθιστώντας την ύλη στο χώρο της υπέρτατης τάξης του Πνεύματος» (Ελύτης, 1996, (Α.Χ.), σ. 447).

Οι μνήμες του από τα Μαθηματικά, όμως, ποιες είναι ?

Στον *Μικρό Ναυτίλο* (Ελύτης 1986, σ.57) θα μας πει «Τα ανώτερα Μαθηματικά μου τα έκανα στο σχολείο της θάλασσας. Ιδού και μερικές πράξεις για παράδειγμα

(1) Εάν αποσυνδέσεις την Ελλάδα, στο τέλος θα δεις να σου απομένουν μια ελιά, ένα αμπέλι και ένα καράβι. Που σημαίνει με άλλα τόσα την ξαναφτιάχνεις.

(2) Το γινόμενο των μυριστικών χόρτων επί την αθωότητα δίνει πάντοτε το σχήμα κάποιου Ιησού Χριστού.

(3) Η ευτυχία είναι η ορθή σχέση ανάμεσα στις πράξεις (σχήματα) και στα αισθήματα (χρώματα). Η ζωή μας κόβεται, στα μέτρα που έκοψε τα χρωματιστά χαρτιά του ο Matisse.

(4) Όπου υπάρχουν συκιές υπάρχει Ελλάδα. Όπου προεξέχει το βουνό απ' τη λέξη του υπάρχει ποιητής. Η ηδονή δεν είναι αφαιρετέα.

(5) Ένα δειλινό στο Αιγαίο περιλαμβάνει τη χαρά και τη λύπη σε τόσο ίσες δόσεις που δεν μένει στο τέλος παρά η αλήθεια.

(6) Κάθε πρόοδος στο ηθικό επίπεδο δεν μπορεί παρά να είναι αντιστρόφως ανάλογη προς την ικανότητα που έχουν η δύναμη και ο αριθμός να καθορίζουν τα πεπρωμένα μας.

(7) Ένας «Αναχωρητής» για τους μισούς είναι, αναγκαστικά, για τους άλλους μισούς, ένας «Ερχόμενος».

Δεν μπορούμε, βέβαια, παρά να σημειώσομε ξανά ότι ο αριθμός των προτάσεων είναι επτά.

Η αναφορά στο δίπολο «δύναμη – αριθμός» δεν γίνεται μόνο στην παραπάνω έκτη πρόταση. Στο *Σχέδιο για μια εισαγωγή στο χώρο του Αιγαίου* ο ποιητής σημειώνει: «Η δύναμη και ο αριθμός ανέκαθεν μας εμποδίζανε να αποδεχτούμε τη μόνη δικαιοσύνη, που είναι μια «ακριβής στιγμή», ή τη μόνη ηθική, που δεν είναι παρά μια συνεχής αναγωγή στο πιο απλουστευτικό είναι μας» (Ελύτης 1993, σ. 17). Στο *Άξιον Εστί* (σ. 42) θα πει ότι «Ήρθαν ντυμένοι φίλοι αμέτρητες φορές οι εχθροί μου…Έφεραν Βίβλους γραμμάτων και αριθμών την πάσα Υποταγή και Δύναμη…» και στα *Μικρά Έψιλον* θα αποκαλέσει την Ελλάδα ως «χρυσή χώρα της Λιγοσύνης που αχρηστεύει την αξία του αριθμού…» (Ελύτης, 1993, σ. 256). Ο αριθμός, δηλαδή, στα μάτια του ποιητή, συμπορεύεται με τη δύναμη, δηλαδή με την εξουσία, η οποία, από τη φύση της είναι μια έννοια αρνητικά φορτισμένη. Εδώ, εκ πρώτης όψεως, θα φαινόταν μια αντίφαση σε σχέση με τα όσα αναφέραμε παραπάνω για τη μαθηματική καθαρότητα, η οποία όμως, αντίφαση, στην πραγματικότητα, πιστεύομε δεν υπάρχει. Η ματιά του ποιητή απέναντι στα Μαθηματικά είναι καθαρά αφαιρετική και η μαθηματική καθαρότητα παραπέμπει σίγουρα στην καθαρότητα των αισθήσεων. Τα Μαθηματικά τα αντιδιαστέλλει από τη λέξη και υλική πραγματικότητα του αριθμού γιατί σε όλη την ποίηση του τα Μαθηματικά και η Γεωμετρία θεωρούνται ως η εναρμόνια τάξη του κόσμου που είναι ελευθερία και δικαιοσύνη, σε αντίθεση με τη υλική επιβολή του αριθμού, με την επιβολή, στην ουσία, της εξουσίας.

Ας θυμηθούμε το «όπου ευημερούν οι αριθμοί δεν ευημερούν οι άνθρωποι».

Η παρουσία της Γεωμετρίας είναι εξίσου σημαντική στο έργο του Ελύτη.

Σε κάποια ομιλία, δικαιολογώντας την έμφυτη, στην ιδιοσυγκρασία του, εξισορροπιστική ιδιότητα, ο ποιητής λέει: «Ίσως είχα εκ γενετής το ένστικτο της Γεωμετρίας. Διέκρινα πίσω από την προβολή των φαινομένων μια αόρατη γεωμετρία.. Η υπέρβαση και η γεωμέτρηση ήταν οι δύο ροπές που προσδιόριζαν αποκλειστικά τη φύση μου. Υπέρβαση και Γεωμέτρηση μαζί. Που η μια να γεννά και να γεννιέται συγχρόνως από την άλλη.» (Ελύτης 1983 *Λέξη*,). Τις ίδιες λέξεις θα χρησιμοποιήσει αργότερα για να χαρακτηρίσει τα λόγια του Lorca «Δουλεύω πλήρες ωράριο σαν εργάτης», διευκρινίζοντας ότι ο Lorca, χρησιμοποιώντας τις λέξεις αυτές, πραγματοποιούσε εκείνη τη στιγμή

τρία πράγματα, τη μυθοποίηση, την υπέρβαση και τη γεωμέτρηση (Ελύτης, 1993, σ. 171).

«Μια αόρατη γεωμετρία διέπει στο βάθος ολάκερη την οικουμένη», όπως για παράδειγμα «ένα φυτό που διαιρεί, άνισα, πλην σωστά το χώρο» (Ελύτης, 1993, σ. 170). Έτσι βλέπει τον κόσμο ο ποιητής. Και αλλού θα πει «…Θα αλλάξουν όλα μια μέρα κι εμείς μαζί τους θα αλλάξουμε, αλλά η φύση μας ανεπανόρθωτα θα‘ ναι χαραγμένη πάνω στη γεωμετρία που καταφρονέσαμε στον Πλάτωνα» (Ελύτης, 1986 (Μι.Ν.), σ. 121). Και όταν συγκρίνει τη ζωγραφική του Pierro dela Francesca με αυτήν του Vermeer θα αποδώσει «δύναμη μέδουσας μαγνητικής στην αφανή γεωμετρία που διέπει το έργο τους και εξασκούσε ανέκαθεν τη γοητεία της» (Ελύτης, 1993, σ. 188).

Τα γεωμετρικά σχήματα θα τα κάνει ποίηση: «Καθαρογραμμένα μεσ’ στα φρούτα: ο κύκλος, το τετράγωνο. Το τρίγωνο και ο ρόμβος, όπως τα βλέπουν τα πουλιά…».(Ελύτης 1980 (Ετ), σ. 44). Θα μιλήσει για τα είδη τους, το σκαληνό τρίγωνο, τον κώνο που τον κόβουμε και γίνεται κόλουρος ((Ελύτης 1993, σ. 172). Θα τα κάνει και λογοπαίγνιο: «Να τι ζητούσε ο Ιωάννης ο νεώτερος μέσα στου τετραγώνου του τον κύκλο» (Ελύτης 1995, σ. 14).

Θα τελειώσομε με την πιο λυρική αναφορά στη γεωμετρία, η οποία, πιστεύομε, έχει ποτέ υπάρξει. Μας λέει: «εξεπίτηδες χρησιμοποιώ κάποιους όρους της γεωμετρίας .Επειδή και το πιο παράφορο παραμιλητό, έχει, οφείλει να έχει την αφανή γεωμετρία του. Διαφορετικά, μήτε που καταλαβαίνουμε ότι πρόκειται για παραμιλητό» (Ελύτης, 1993, σ. 172).

Προσπαθήσαμε να ανιχνεύσουμε στοιχεία αριθμητικής και γεωμετρίας στην ποίηση του Οδυσσέα Ελύτη, πάντα κάτω από το πρίσμα που δίνει ο ποιητής στις αλήθειες αυτές. Το αν τα καταφέραμε ή όχι θα το κρίνει ο αναγνώστης. Εμείς, σίγουρα δεν μπορούμε να επιχειρηματολογήσομε για το αποτέλεσμα της προσπάθειας μας, γιατί όπως λέει και ο ποιητής, επιχειρήματα, «μόνο η άνοιξη δικαιωματικά διαθέτει».

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ανθρακίτης Μεθόδιος (1749) *Οδός Μαθηματικής,* Βενετία

Αργυρίου Αλέξης (1991) «Αλγεβρική σπουδή στο *Ημερολόγιο ενός αθέατου Απριλίου*» περιοδικό *Λέξη* τεύχος 106, Νοέμβρης Δεκέμβρης 1991

Βενιαμίν Λέσβιος (1818), *Στοιχεία Ευκλείδου*, Βιέννη

Ελύτης Οδυσσέας (1968 *) Το Άξιον Εστί* Αθήνα: Ίκαρος

Ελύτης Οδυσσέας (1980 *) Τα Ετεροθαλή* Αθήνα: Ίκαρος (Ετ.)

Ελύτης Οδυσσέας (1980) *Μαρία Νεφέλη* Αθήνα: Ίκαρος (Μ.Ν.)

Ελύτης Οδυσσέας (1982) *Τρία ποιήματα με σημαία ευκαιρίας* Αθήνα: Ίκαρος

Ελύτης Οδυσσέας (1983) «Υπέρβαση και Γεωμέτρηση», Περιοδικό *Λέξη,* τεύχος 27, Σεπτέμβριος 1983

Ελύτης Οδυσσέας (1984) *Ημερολόγιο ενός αθέατου Απριλίου* Αθήνα: Ύψιλον (Απρ.)

Ελύτης Οδυσσέας (1984) *Το φωτόδεντρο και η δέκατη τέταρτη ομορφιά* Αθήνα: Ίκαρος (Φωτ.)

Ελύτης Οδυσσέας (1986) *Ο Μικρός Ναυτίλος* Αθήνα: Ίκαρος (Μι.Ν.)

Ελύτης Οδυσσέας (1986) *Τα Ρω του έρωτα* Αθήνα: Ύψιλον

Ελύτης Οδυσσέας (1988) *Προσανατολισμοί* Αθήνα: Ίκαρος

Ελύτης Οδυσσέας (1990) *Το Μονόγραμμα* Αθήνα: Ίκαρος

Ελύτης Οδυσσέας (1990*) Έξι και μία τύψεις για τον ουρανό* Αθήνα: Ίκαρος (6+1)

Ελύτης Οδυσσέας (1990) *Δημόσια και Ιδιωτικά,* Αθήνα: Ίκαρος (Δ.Ι.)

Ελύτης Οδυσσέας (1991 *) Τα Ελεγεία της Οξώπετρας* Αθήνα: Ίκαρος (Ε.Ο.)

Ελύτης Οδυσσέας (1991), Λόγος στην Ακαδημία της Στοκχόλμης (8-12-1979), περιοδικό *Λέξη* (Λόγος)

Ελύτης Οδυσσέας (1993) *Εν Λευκώ*, Αθήνα: Ίκαρος

Ελύτης Οδυσσέας (1995*) Δυτικά της Λύπης* Αθήνα: Ίκαρος

Ελύτης Οδυσσέας (1996) *2x7*, Αθήνα: Ίκαρος, (2x7)

Ελύτης Οδυσσέας (1996) *Ανοικτά χαρτιά* Αθήνα: Ίκαρος (Α.Χ.)

Ελύτης Οδυσσέας (1998) *Εκ του πλησίον* Αθήνα: Ίκαρος

Κοπιδάκης Μιχάλης (1991) «Υ. Το πιο ελληνικό» περιοδικό *Λέξη*

Μπαλής Στέφανος (2001), *Μαθηματικά και Ποίηση, από τον Αρχιμήδη στον Ελύτη* Αθήνα: Νησίδες

Σαββίδης Γιώργος (1973) *Πάνω Νερά* Αθήνα:Ερμής

Grodent Michel, (1991) μετάφραση Γ. Βαρβέρης, «Ελύτης: η σημασία του ονείρου και του αριθμού». Περιοδικό *Λέξη* τεύχος 106, Νοέμβρης Δεκέμβρης 1991

Vitti Mario (2000, πρώτη έκδοση 1984) *Οδυσσέας Ελύτης*, Αθήνα: Ερμής

Hardy G.H. (1993) *Η Απολογία ενός μαθηματικού* μετ. Μ. Λάμπρου, Δ. Καραγιαννάκης, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

maria1979@her.forthnet.gr

[λευκή σελίδα]

ΛΟΓΟΤΕΧΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΤΟ ΤΕΡΠΝΟΝ ΜΕΤΑ ΤΟΥ 'ΩΦΕΛΙΜΟΥ

Γιαννης Καρβελης

Μηχ/γος-Ηλ/γος, Συγγραφεας

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τελευταία παρατηρείται στην Ελλάδα ενδιαφέρον για τη Μαθηματική Λογοτεχνία και κυκλοφορούν αρκετά βιβλία ελλήνων συγγραφέων, όπου οι ήρωες περιγράφονται με εναργή τρόπο και αναδεικνύονται τα χαρακτηριστικά που εξηγούν τη δράση τους. Ακόμα περιγράφονται οι σχέσεις μεταξύ τους και με τον κοινωνικό περίγυρο. Έτσι οι συγγραφείς δίνουν ενδιαφέρουσες πληροφορίες με ελκυστικό τρόπο. Έχουμε λοιπόν αρκετά ολοκληρωμένα μυθιστορήματα, με ότι περιεχόμενο δίνουμε συνήθως στον όρο αυτό. Όμως είναι περιορισμένο το πλήθος των σχετικών θεμάτων, αλλά και η δυνατότητα διδακτικής τους αξιοποίησης. Η Μαθηματική Λογοτεχνία συμβάλει στη διαμόρφωση καλού κλίματος και καλής σχέσης με τα Μαθηματικά, αλλά πρακτικά, λόγω μεγέθους των βιβλίων, είναι δύσκολο να αξιοποιηθεί για τη διδασκαλία. Για τον πιο άμεσο εκπαιδευτικό στόχο καταλληλότερα είναι τα Ψυχαγωγικά Μαθηματικά. Παντού στον κόσμο κυκλοφορούν βιβλία με μικρές ή μεγάλες ιστορίες που έχουν σχέση με τα Μαθηματικά. Η ψυχαγωγική διάσταση είναι το δόλωμα για τον εκλαϊκευτικό ή τον εκπαιδευτικό στόχο, ενώ κέντρο του ενδιαφέροντος παραμένει το μαθηματικό πρόβλημα. Πρόκειται λοιπόν για προσχηματική λογοτεχνία. Η λογοτεχνική γραφή τις πιο πολλές φορές είναι υποτυπώδης, άλλωστε συνήθως μιλάμε για μικρής έκτασης κείμενα, όπου οι ήρωες δημιουργούνται για να εξυπηρετήσουν τις ανάγκες του προβλήματος. Δεν τονίζονται οι χαρακτήρες, δεν αναλύονται οι σχέσεις, δεν ενδιαφέρει το περιβάλλον και σπανίζουν άλλου είδους μηνύματα ή προεκτάσεις. Τέλος η λύση δίνεται στο τέλος της ιστορίας ή στο τέλος του βιβλίου με μαθηματικό τρόπο, ως αποκάλυψη. Πάντως είναι αρκετά χρήσιμα και αποτελεσματικά, ιδίως όταν προϋπάρχει ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά. Δεν προτείνεται βέβαια να υποκαταστήσουν μέρος της τυπικής διδασκαλίας των Μαθηματικών, μπορούν όμως να την υποστηρίξουν και να την εμπλουτίσουν στην τάξη, αλλά και στο σπίτι, περιπτωσιακά ή στις διακοπές. Μικρά σενάρια γύρω από ένα μαθηματικό πρόβλημα περιέχονται και σε σχολικά βιβλία, αλλά συχνά χωρίς επιτυχία. Για να είναι επιτυχημένη η αξιοποίηση των μαθηματικών ιστοριών υπάρχουν κάποιες προϋποθέσεις σχετικές με τη δομή, τη γλώσσα και το ύφος τους. Κύρια στοιχεία πρέπει να είναι η ψυχαγωγική διάσταση, ο ρεαλισμός και η πλοκή, κυρίως σε σχέση με βιώματα και εμπειρίες των μαθητών. Έτσι η λογοτεχνική τους επεξεργασία αποκτά ιδιαίτερη σημασία, ώστε να μπορούμε να μιλάμε για Λογοτεχνικά Μαθηματικά.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Ο όρος του τίτλου και οι λίγοι που θα ακολουθήσουν δεν υποδηλώνουν πρόθεση «ορισμών» λογοτεχνικών ειδών. Παρατίθενται με σκοπό την επισήμανση κάποιων χαρακτηριστικών τους και τη διευκόλυνση της συνεννόησης. Ελπίζω ότι, σε αντιδιαστολή με το «Μαθηματική Λογοτεχνία», η λέξη «Μαθηματικά» στη θέση του ουσιαστικού με το «Λογοτεχνικά» ως επιθετικό προσδιορισμό είναι στοιχεία ενδεικτικά για τη σημασία που δίνεται στον όρο.

Και μια διευκρίνιση για τον υπότιτλο. Ως πρώην εκπαιδευτικός, με είκοσι χρόνια διδασκαλίας σε διάφορες βαθμίδες της Τεχνικής Εκπαίδευσης και εννιά χρόνια θητείας ως Πάρεδρος στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, θα καταθέσω μερικές απόψεις που απορρέουν από τις ιδιότητες αυτές. Θα προσπαθήσω να δείξω γιατί και πως η αφηγηματική παρουσίαση μαθηματικών εννοιών και προβλημάτων συνδέεται με την καλλιέργεια των μαθηματικών δεξιοτήτων (όπου οι μαθητές μας φαίνεται να υστερούν) και ακόμα πως είναι χρήσιμη στη διαμόρφωση καλού κλίματος διδασκαλίας. Θα αρχίσω λοιπόν από το «Ὠφέλιμον» του υπότιτλου.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΕΞΙΟΤΗΤΕΣ

Η εποχή μας χαρακτηρίζεται από έντονους ρυθμούς αύξησης της γνώσης, ιδιαίτερα στους τεχνολογικούς τομείς, όπου παράλληλα εντείνεται και η εξειδίκευση. Όσοι ασχολούνται με την Τεχνική Εκπαίδευση έχουν συνειδητοποιήσει ότι η παροχή πλήρων και ολοκληρωμένων γνώσεων σε οποιονδήποτε τομέα της είναι στόχος ανέφικτος. Αλλά και πολλά μηνύματα που έρχονται από την αγορά εργασίας, μέσα από έρευνες (όπως του Παρατηρητηρίου μετάβασης στην αγορά εργασίας του Π.Ι.) και συνεργασίες με τους κοινωνικούς εταίρους, είναι καθαρά. Κυρίως από τις μεγάλες επιχειρήσεις δε ζητούνται πλέον τόσο πολύ έτοιμα και εξειδικευμένα στελέχη, όσο απόφοιτοι με καλή υποδομή βασικών γνώσεων και δεξιοτήτων στην ειδικότητά τους και κυρίως με αναπτυγμένες τις βασικές γενικές δεξιότητες. Έτσι θα είναι ικανοί να εξειδικεύονται και να καταρτίζονται «δια βίου», όταν και όπου χρειάζεται. Και οι δεξιότητες στα Μαθηματικά θεωρούνται από τις πιο σημαντικές.

Όμως και στα Μαθηματικά επίσης παρατηρείται συνεχής παραγωγή νέων γνώσεων, συνοδευόμενη από όλο και μεγαλύτερη εξειδίκευση. Βέβαια στις τεχνολογικές εφαρμογές μεγάλο μέρος της παλιάς γνώσης απαξιώνεται, ενώ στα Μαθηματικά δεν απορρίπτεται σχεδόν τίποτα. Έτσι έχουμε μια συνεχή συσσώρευση γνώσεων. Αυτή η πλημμυρίδα της γνώσης δείχνει ότι είναι μάταιο και άσκοπο για ένα εκπαιδευτικό σύστημα να βάλει ως στόχο να

μαθαίνουν τα παιδιά όλο και περισσότερα και νεότερα Μαθηματικά. Έτσι λοιπόν στην κατανομή των στόχων ανάμεσα στη μαθηματική γνώση και τη μαθηματική δεξιότητα έχει αρχίσει να αυξάνεται το βάρος της δεξιότητας. Αυτό σημαίνει ότι τα παιδιά πρέπει να έχουν μεν αφομοιώσει τις βασικές μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες και να έχουν αποκτήσει συγκροτημένη μαθηματική σκέψη, αλλά ακόμα να μπορούν να χρησιμοποιούν τα στοιχεία αυτά στην προσωπική και επαγγελματική τους ζωή με επιτυχία.

Σε όλον τον κόσμο ο προβληματισμός για την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας των Μαθηματικών δίνει πια μεγάλη έμφαση στις εφαρμογές τους. Αυτό αποτυπώνεται και στους διεθνείς διαγωνισμούς PISA και TIMMS, όπου η έρευνα δεν περιορίζεται στα πεδία περιεχομένου (Content Domains), αλλά δίνει μεγάλη βαρύτητα στα γνωσιακά πεδία (Cognitive Domains), που ορίζουν τις αναμενόμενες συμπεριφορές των μαθητών. Ερευνάται και αξιολογείται ο βαθμός απόκτησης γνώσεων και δεξιοτήτων ώστε να μπορούν να αναστοχάζονται τη μάθηση σε όλη τους τη ζωή. Έτσι το πεδίο επίλυσης προβλήματος (problem solving) προσπαθεί να διακρίνει την ικανότητα εφαρμογών σε εξωσχολικά πλαίσια, στην καθημερινή ζωή.

Πολλοί αμφισβητούν τη φιλοσοφία και τις σκοπιμότητες του PISA. Όμως δε μπορεί κανείς να αγνοήσει τα αποτελέσματά του, ιδιαίτερα ως προς την τελική σχετική κατάταξη. Την περασμένη δεκαετία, στο πεδίο των Μαθηματικών και της επίλυσης προβλήματος, η χώρα μας είχε καταταγεί: το 2000 28η στις 31 χώρες - μέλη του ΟΟΣΑ που συμμετείχαν, το 2003 32η στις 40, το 2006 28η στις 30 και το 2009 30η στις 34. Πολλοί εκπαιδευτικοί και ερευνητές συμφωνούν πλέον ότι αυτά τα αποτελέσματα έχουν σχέση με τα αναλυτικά προγράμματα και τους στόχους τους. Και καταλήγουν στο ότι είναι ανάγκη να δοθεί έμφαση όχι μόνο στο τι διδάσκονται οι μαθητές αλλά και στο ποιες δεξιότητες αποκτούν.

Υπάρχουν λοιπόν ανοιχτά ζητήματα προσανατολισμού των σπουδών, αλλά και διδακτικής προσέγγισης. Γιατί εκτός από καλά προγράμματα σπουδών και βιβλία, χρειάζονται καλοί δάσκαλοι και καθηγητές. Και ακόμα χρειάζεται πρόσφορο έδαφος, κατάλληλο κλίμα και καλή σχέση των μαθητών με το αντικείμενο. Και εδώ εμφανίζεται το γνωστό παλιό πρόβλημα. Η πρώτη γνωριμία με τα Μαθηματικά γίνεται συνήθως στο σχολείο. Πολλές φορές συνοδεύεται από προκαταλήψεις και στερεότυπα, που στη συνέχεια γεννούν και ερωτηματικά. Ακούμε τα παιδιά να λένε ότι τα Μαθηματικά είναι δύσκολα, κουραστικά και άχαρα και αμέσως μετά έρχεται το ερώτημα: «Μου χρειάζονται εμένα όλα αυτά;» Τα δεδομένα αυτά δυσκολεύουν την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας. Θα ήταν ευχής έργον να μπορούσε ο δάσκαλος να αναδείξει τη γοητεία τους, να τα συνδέσει με τη ζωή, κυρίως με βιώματα και εμπειρίες των παιδιών, να πείσει για τη χρησιμότητά τους, με

δυο λόγια να τα κάνει ενδιαφέροντα και ευχάριστα. Αυτό θα έκανε πιο αποτελεσματική τη διδασκαλία. Δεν είναι βέβαια σκόπιμο η χρησιμότητα των Μαθηματικών να δηλώνεται εξαρχής, ούτε να υπερτονίζεται. Αρκετοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι αυτό δημιουργεί άγχος στους μαθητές και είναι ένας από τους σημαντικούς παράγοντες των δυσκολιών που έχουν στη σχέση τους με τα Μαθηματικά. Η χρησιμότητα και η αναγκαιότητά τους πρέπει να αναδεικνύονται με κατάλληλο τρόπο και το συμπέρασμα να βγαίνει από τα ίδια τα παιδιά.

Όλα αυτά κάνουν τη διδασκαλία των Μαθηματικών μια τέχνη που απαιτεί προικισμένους εκπαιδευτικούς, με αγάπη και μεράκι για τη δουλειά τους. Ο καλός τεχνίτης όμως, εκτός από καλά υλικά (προγράμματα σπουδών και βιβλία), χρειάζεται και κατάλληλα εργαλεία για την άσκηση της τέχνης του. Ένα τέτοιο χρήσιμο εργαλείο είναι ο μύθος, που η διδακτική του διάσταση υπάρχει και αξιοποιείται από τα αρχαία χρόνια, στα έπη και τις ραψωδίες, στις τραγωδίες, στη μυθολογία και στη λαϊκή σοφία όλων των εποχών. Άλλωστε τα παιδιά παίρνουν πολλές από τις πρώτες γνώσεις τους από τα παραμύθια. Τι προσφέρει ο μύθος;

-Τέρπει και ψυχαγωγεί, άρα συμβάλλει στην αποδοχή της διδασκαλίας.

-Προκαλεί το ενδιαφέρον και ζωντανεύει τον τυποποιημένο λόγο των Μαθηματικών.

-Εξάπτει την περιέργεια, άρα προκαλεί την ενεργό συμμετοχή.

-Δίνει απτή υπόσταση σε αφηρημένες έννοιες και τις κάνει πιο κατανοητές.

-Διευκολύνει την προσέγγιση της γνώσης και της δίνει μεγαλύτερη διάρκεια.

-Συνδέει τη γνώση με τη ζωή, αναδεικνύοντας έτσι τη χρησιμότητά της και βοηθώντας στην άσκηση της μαθηματικής δεξιότητας.

Άλλωστε η εφαρμογή προϋποθέτει πάντα ένα (έστω στοιχειώδες) σενάριο, μια ιστορία.

Και ας μην ξεχνάμε ότι βασικοί σκοποί του εκπαιδευτικού μας συστήματος, εκτός από την εκπαίδευση, είναι και η αγωγή, η παιδεία, η γνωριμία και η εξοικείωση με την Τέχνη.

Ας προχωρήσουμε λοιπόν στο «Τερπνόν» του υπότιτλου, στο κύριο θέμα της διημερίδας.

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΟΤΕΧΝΙΑ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

Είναι ευχάριστο το ότι τον τελευταίο καιρό παρατηρείται στην Ελλάδα αυξημένο ενδιαφέρον για τη Μαθηματική Λογοτεχνία. Γράφουν οι εφημερίδες, οργανώνονται εκδηλώσεις, ημερίδες, συνέδρια, γίνονται αναφορές σε πλήθος δικτυακών τόπων και, το πιο σημαντικό, κυκλοφορούν βιβλία. Εδώ θέλω να προσθέσω και κάτι ακόμα, πολύ ελπιδοφόρο. Τα βιβλία αυτά μπαίνουν σε πολλά σχολεία, χάρις κυρίως στη δραστηριότητα της ομάδας «Θαλής και Φίλοι» και της λειτουργίας των Λεσχών Ανάγνωσης που υποστηρίζουν, σε συνεργασία με πολλούς μαθηματικούς που έχουν μεράκι και αγάπη για τη δουλειά τους.

Δεν είναι βέβαια σύμπτωση που εμψυχωτές των δράσεων αυτών είναι δύο συγγραφείς που κατά τη γνώμη μου είναι σημεία αναφοράς όταν μιλάμε για τη Μαθηματική Λογοτεχνία στην Ελλάδα: Ο Απόστολος Δοξιάδης, που κατά πολλούς έχει σηματοδοτήσει την αρχή αυτής της εκδήλωσης ενδιαφέροντος για το είδος σε παγκόσμιο επίπεδο, με το μυθιστόρημα «Ο θείος Πέτρος και η Εικασία του Γκόλντμπαχ» και ο Τεύκρος Μιχαηλίδης, που απόδειξε με τα «Πυθαγόρεια εγκλήματα» πως ένα καλό τέτοιο βιβλίο μπορεί να γίνει “best seller”.

Τα βιβλία αυτά έχουν κάτι κοινό μεταξύ τους, αναφέρονται στο μεγάλο ζήτημα της μη Πληρότητας των Μαθηματικών, με προεκτάσεις που αγγίζουν και πολλές άλλες πτυχές της ανθρώπινης σκέψης. Οι συγγραφείς είχαν την ευτυχία της έμπνευσης να το συνδυάσουν με κάτι άλλο, πολύ ενδιαφέρον: Ο μεν Απόστολος Δοξιάδης με τη θρυλική Εικασία του Γκόλντμπαχ, που του έδωσε την ευκαιρία να περιγράψει το ταξίδι ενός μαθηματικού προς μια (ίσως ανύπαρκτη) «Ιθάκη», ο δε Τεύκρος Μιχαηλίδης με μια τραγική στιγμή της ιστορίας των Μαθηματικών στην αρχαία Ελλάδα, όταν ο επιστημονικός και ιδεολογικός φανατισμός οδήγησε τους Πυθαγόρειους σε μια αποτρόπαιη πράξη, στο έγκλημα.

Και στα δύο αυτά βιβλία τα πρόσωπα που πρωταγωνιστούν περιγράφονται με πολύ εναργή τρόπο και αναδεικνύονται όλα εκείνα τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της ψυχοσύνθεσης τους που σχετίζονται με τη δράση τους και την εξηγούν. Παράλληλα περιγράφονται ζωντανά οι σχέσεις μεταξύ τους και με τον κοινωνικό περίγυρο της εποχής. Έτσι και οι συγγραφείς έχουν την ευκαιρία να δώσουν μια σειρά από ενδιαφέρουσες πληροφορίες με τρόπο γλαφυρό και γοητευτικό. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι έχουμε δύο ολοκληρωμένα μυθιστορήματα Μαθηματικής Λογοτεχνίας, με ότι περιεχόμενο δίνουμε συνήθως στον όρο αυτό.

Να περιμένουμε άραγε πολλά ακόμα βιβλία με τέτοιου είδους σπουδαία θέματα; Νομίζω ότι μάλλον δεν υπάρχουν πάρα πολλά θέματα από τα

Μαθηματικά που μπορεί να αποτελέσουν τον πυρήνα μυθιστορημάτων. Βεβαίως υπάρχουν πολύ σημαντικά ζητήματα γύρω από τα Μαθηματικά, καθώς και πολλά άλυτα προβλήματα ή προβλήματα που η λύση τους ήταν μια πραγματική πνευματική περιπέτεια. Αλλά λίγα προσφέρονται ως βάση για ένα λογοτεχνικό έργο, κυρίως λόγω του περιεχομένου τους που δεν είναι πάντα προσιτό στο ευρύτερο κοινό. Μπορεί να αντλήσει κανείς υλικό από την ιστορία ενός θεωρήματος, (όπως τα βιβλία που έχουν γραφτεί για το Τελευταίου Θεωρήματος του Φερμά), από βιογραφίες μεγάλων μαθηματικών καθώς και από σημαντικούς σταθμούς της ιστορίας των Μαθηματικών. Όλα αυτά όμως πιο πολύ θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ιστορικά μαθηματικά βιβλία και λιγότερο μυθιστορήματα.

Περιορισμένο λοιπόν το πλήθος των θεμάτων, αλλά περιορισμένη και η δυνατότητα διδακτικής αξιοποίησής τους. Η Μαθηματική Λογοτεχνία μπορεί να συμβάλει στη διαμόρφωση ενός καλού κλίματος γύρω από τα Μαθηματικά και μιας καλής σχέσης με αυτά, αλλά πρακτικά είναι δύσκολο να αξιοποιηθεί για να υποστηρίξει τη μαθηματική διδασκαλία. Το μέγεθος του μυθιστορήματος επιτρέπει την ανάγνωση δύο ή τριών το πολύ βιβλίων το χρόνο, που δεν έχουν και άμεση σχέση με καθημερινές μαθηματικές πρακτικές. Πάντως προσωπικά δε θεωρώ επαρκή μια σχολική βιβλιοθήκη χωρίς μερικά τέτοια βιβλία. Ακόμη πιστεύω πως οι δάσκαλοι και καθηγητές πρέπει να τα συνιστούν πότε-πότε στα παιδιά για διάβασμα στο σπίτι και συζήτηση στην τάξη. Για τον πιο άμεσο όμως εκπαιδευτικό στόχο καταλληλότερα είναι τα λεγόμενα «Ψυχαγωγικά Μαθηματικά».

ΤΑ ΨΥΧΑΓΩΓΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Πάντα κυκλοφορούσαν βιβλία που έχουν άμεση σχέση με τα Μαθηματικά χωρίς όμως να είναι τυπικά μαθηματικά βιβλία. Αναφέρομαι σε εκείνα που περιέχουν μικρές ή μεγάλες ιστορίες μαθηματικής πλοκής, που συνήθως τα ονομάζουμε «Ψυχαγωγικά Μαθηματικά». Είναι πιο σωστός ο όρος αυτός από τον «Διασκεδαστικά Μαθηματικά», που κι αυτόν συναντάμε ορισμένες φορές. Η ψυχαγωγία, όπως άλλωστε δηλώνει και η ετυμολογία της λέξης, είναι διαδικασία ανύψωσης της ψυχής σε ένα παραπάνω σκαλοπάτι καλλιέργειας που γίνεται με τρόπο ευχάριστο και πλουτίζει το γνωστικό και συναισθηματικό κόσμο του ανθρώπου. Ενώ η διασκέδαση είναι διαδικασία διασκορπισμού της έγνοιας και των προβλημάτων από το μυαλό, κάτι που δεν μπορεί να συνυπάρξει με το διάβασμα βιβλίου σχετικού με Μαθηματικά, όπου αντίθετα απαιτείται κάποιος βαθμός συγκέντρωσης του νου.

Υπάρχουν πολλά τέτοια βιβλία, κυρίως στην Ευρώπη και την Αμερική. Ενδεικτικά θα αναφέρω κάποια γνωστά ονόματα συγγραφέων, όπως των

Πέρελμαν και Μπόλυα στη Ρωσία, των Γκάρντνερ και Ρόουζ στις Ηνωμένες Πολιτείες και του Ενζενμπέργκερ στη Γερμανία. Οι ιστορίες τους μπορούν να αξιοποιηθούν για την ευκολότερη και πιο ευχάριστη εξοικείωση των μαθητών με πολλές μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες. Στο είδος αυτό η ψυχαγωγική διάσταση είναι κατά κάποιον τρόπο το δόλωμα για τον εκλαϊκευτικό ή τον εκπαιδευτικό στόχο. Οι ιστορίες είναι επιτυχημένες κυρίως όταν η απάντηση είναι απροσδόκητη ή υπάρχει κάποια αληθοφανής ή προφανής αλλά λάθος απάντηση, ή όταν δεν φαίνεται καν ότι μπορεί να υπάρχει λύση, όταν π.χ. δεν υπάρχουν αριθμητικά δεδομένα, αλλά ζητούνται και τελικά προκύπτουν αριθμοί. Εδώ πάντως το κέντρο του ενδιαφέροντος είναι το μαθηματικό πρόβλημα, πρόκειται λοιπόν για προσχηματική λογοτεχνία.

Η λογοτεχνική γραφή τις πιο πολλές φορές είναι έως και υποτυπώδης και δεν ενδιαφέρει πολύ. Συνήθως μιλάμε για μικρής έκτασης κείμενα ή για συλλογές μικρών ιστοριών με κάποιο κοινό συνδετικό κρίκο. Οι ήρωες δημιουργούνται μόνο και μόνο για τις ανάγκες του προβλήματος. Δεν διαγράφονται καθαρά οι χαρακτήρες, δεν αναλύονται οι σχέσεις, δεν ενδιαφέρει πολύ το άμεσο περιβάλλον ούτε ο κοινωνικός περίγυρος, σπανίζουν άλλου είδους μηνύματα ή προεκτάσεις. Τέλος η λύση δίνεται συνήθως ολόκληρη από κάποιον είτε στο τέλος της ιστορίας είτε στο τέλος του βιβλίου με μαθηματικό βασικά τρόπο, ως αποκάλυψη.

Πάντως είναι αρκετά χρήσιμα και αποτελεσματικά, ιδίως όταν προϋπάρχει κάποια κλίση και ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά, που τότε καλλιεργούνται περισσότερο.

Δεν προτείνεται βέβαια σε καμιά περίπτωση να υποκαταστήσει η χρήση τέτοιων βιβλίων μέρος της τυπικής διδασκαλίας των Μαθηματικών. Απλά μπορούν να την υποστηρίξουν και να την εμπλουτίσουν, μέσα στην τάξη αλλά και με άλλες περιπτωσιακές εφαρμογές, π.χ. μια μικρή εργασία που προϋποθέτει το διάβασμα κάποιου διηγήματος ένα Σαββατοκύριακο στο σπίτι. Όταν λοιπόν αξιοποιούνται, σε κατάλληλες πάντα περιπτώσεις, βελτιώνεται το όλο κλίμα του μαθήματος, συνδέονται τα Μαθηματικά με τη ζωή και αναδεικνύεται η ομορφιά τους. Παράλληλα πολλά παιδιά παρακινούνται να έρθουν σε επαφή και με τη Μαθηματική Λογοτεχνία, επομένως με την Τέχνη και τον Πολιτισμό.

Υπάρχει και ένα άλλο σημείο όπου μπορεί να είναι χρήσιμες τέτοιες ιστορίες. Έχω τη γνώμη ότι είναι καιρός να σπάσει η (σχεδόν) μονοκρατορία της «άσκησης» στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Η αφηρημένη άσκηση είναι μαθηματικοκεντρική, παραπέμπει σχεδόν αποκλειστικά στο μαθηματικό αντικείμενο, εμπεδώνει και υποστηρίζει τη θεωρία. Ας αξιοποιηθεί λοιπόν

και η «εφαρμογή», σε μεγαλύτερη έκταση από τη σημερινή, ώστε και τα σχολικά Μαθηματικά να βγουν από το χώρο τους και να αναδείξουν τη χρησιμότητά τους στις Τεχνολογικές και Εφαρμοσμένες Επιστήμες και την καθημερινή ζωή. Και οι εφαρμογές πάντα προϋποθέτουν ένα κατάλληλο σενάριο, μια μικρή ιστορία.

Βέβαια μικρά σενάρια γύρω από ένα μαθηματικό πρόβλημα περιέχονται σε σχολικά βιβλία, αλλά πολλές φορές χωρίς επιτυχία. Όταν αναφέρεσαι στο μέσο ύψος μιας ειδικής ράτσας σκύλων σε συνάρτηση με την ηλικίας τους ή στο βελησεκές αυτόματου εκτοξευτή εφημερίδων, τότε δεν μπορείς να προκαλέσεις το ενδιαφέρον των παιδιών (τα παραδείγματα είναι από υπάρχοντα σχολικά βιβλία της Τεχνικής Εκπαίδευσης, ίσως σήμερα κάποια να έχουν καταργηθεί). Και όταν αρχίσεις να μιλάς για μοτοσικλέτες και περιγράφεις ότι ο αναβάτης στην πορεία του διαπιστώνει ότι το ρεζερβουάρ του είναι γεμάτο κατά τα 3/17, ενώ με τη συγκεκριμένη ταχύτητα έχει τόση κατανάλωση ανά χιλιόμετρο και το πλησιέστερο βενζινάδικο … κ.λ.π. δεν πείθεις, μάλλον κινδυνεύεις να προκαλέσεις την αδιαφορία των παιδιών. Για να είναι αξιοποιήσιμες οι μαθηματικές ιστορίες υπάρχουν κάποιες προϋποθέσεις σχετικές με τη δομή, τη γλώσσα, το ύφος και άλλα χαρακτηριστικά τους. Τα κύρια στοιχεία τους πρέπει να είναι η ψυχαγωγική διάσταση για να είναι ελκυστικές, ο ρεαλισμός για να είναι πειστικές, η πλοκή για να προκαλούν ενδιαφέρον και συμμετοχή. Και όλα αυτά σε σχέση με τα ενδιαφέροντα, τα βιώματα και τις εμπειρίες των μαθητών, ώστε να είναι πιο αποδεκτές και αποτελεσματικές. Έτσι η λογοτεχνική τους επεξεργασία αποκτά ιδιαίτερη σημασία, ώστε να μπορούμε να μιλάμε για «Λογοτεχνικά Μαθηματικά».

ΤΑ ΛΟΓΟΤΕΧΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Μπορούμε να ονομάσουμε «Λογοτεχνικά Μαθηματικά» ιστορίες που βρίσκονται στις παρυφές της Μαθηματικής Λογοτεχνίας και των Ψυχαγωγικών Μαθηματικών, αφού και με τα δύο αυτά σύνολα έχουν κοινά στοιχεία. Πρόκειται για μικρά ή μεγάλα αφηγήματα με μαθηματικό πυρήνα, για ιστορίες μαθηματικής πλοκής, ώστε να τονίζεται ο ρεαλισμός, να αναδεικνύεται η σύνδεση των Μαθηματικών με τη ζωή και να διευκολύνονται οι εξηγήσεις. Εδώ συνυπάρχουν ως συμπρωταγωνιστές άνθρωποι και μαθηματικές έννοιες, με τους χαρακτήρες και τις ιδιότητές τους, καθώς και ανθρώπινες και μαθηματικές σχέσεις, σε ένα περιβάλλον δράσης και πλοκής περιστατικών με τα οποία παρουσιάζεται το πρόβλημα αλλά και η πορεία της λύσης. Η κυρίαρχη διάσταση είναι η ψυχαγωγική, που έχει πολλές αντιστοιχίες με το αστυνομικό αφήγημα. Κοινά στοιχεία τους είναι το

«μυστήριο», η συντήρηση του ενδιαφέροντος, η πρόκληση για λύση, η έκπληξη, η ανατροπή. Εδώ έχουμε ένα λογικό ή μαθηματικό μυστήριο, που ο ήρωας (ή και ο αναγνώστης, αν επιτευχθεί ο στόχος της ενεργού συμμετοχής) καλείται να λύσει. Όπως και στην αστυνομική έρευνα πρέπει και εδώ να ανακαλυφθούν με τη σωστή ανάγνωση-έρευνα όλα τα δεδομένα, που τώρα έχουν και μαθηματική υφή, να μπουν σε μια λογική τάξη και τέλος, με συνεπαγωγικές διαδικασίες να οδηγηθεί ο αναγνώστης στη λύση. Η οποία, κατά τη γνώμη μου, πρέπει να δίνεται (όσο είναι δυνατό) μέσα από τη συνέχεια της δράσης ως φυσική συνέπειά της και όχι ως «αποκάλυψη». Έτσι γίνεται πιο ευχάριστη και πιο εύκολη η κατανόησή της.

Θέματα υπάρχουν πολλά, θα κάνω μερικές ενδεικτικές αναφορές.

-Τα είδη των αριθμών (οι άρρητοι, οι μαγικοί και ανεξερεύνητοι πρώτοι, οι δίδυμοι και τρίδυμοι πρώτοι, οι τέλειοι, οι Μερσέν κ.ά.)

-Οι σχέσεις μεταξύ τους (οι πρώτοι και η κρυπτογραφία, η σχέση της Χρυσής Τομής με την ακολουθία Φιμπονάτσι κ.ά.)

-Ιδιότητες γραφικών παραστάσεων (οι κωνικές, οι ξεχωριστές ιδιότητες της παραβολής) και γεωμετρικών σχημάτων (το «χρυσό» ορθογώνιο, το μαγικό κανονικό πεντάγωνο)

-Θεωρήματα με απλές και όμορφες αποδείξεις (η απειρία των πρώτων του Ευκλείδη, η «άρρητη» ρίζα του 2, η απόδειξη του Πάππου για τα ισοσκελή τρίγωνα) ή ωραίες προεκτάσεις (όπως το γάντι του Μπάρυ Μαζούρ για το Πυθαγόρειο Θεώρημα).

-Στοιχεία από τη Θεωρία των Πιθανοτήτων και τη Στατιστική, με τα παράξενα παιχνίδια που μπορεί να παίξει αν δεν χρησιμοποιηθεί σωστά.

Κάποια από τα θέματα αυτά, ακόμα και χωρίς πρωταγωνιστικό ρόλο, μπορούν έντεχνα να συμπαρατεθούν, προσθέτοντας ενδιαφέρον αλλά και χρησιμότητα στο αφήγημα.

Στο θέμα των χαρακτήρων έχουμε μια μετάθεση του κέντρου βάρους από τον ήρωα-άνθρωπο προς τη μαθηματική έννοια. Ο άνθρωπος παραμένει ο βασικός πρωταγωνιστής, άλλωστε είναι ο μοναδικός φορέας του συναισθήματος και του χιούμορ, οι σωστές δόσεις των οποίων είναι απαραίτητες. Οι «ήρωες» λοιπόν, εκτός από τους ανθρώπινους, είναι οι αριθμοί και οι μαθηματικές έννοιες, με τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητές τους. Τώρα ο περίγυρος και η έρευνα περιλαμβάνουν ακόμα τις μαθηματικές σχέσεις και διαδικασίες.

Υπάρχουν όμως και κάποιοι απαράβατοι περιορισμοί: Ο κύριος κορμός της αφήγησης και η πλοκή της οργανώνονται και στηρίζονται σε σχέσεις

αιτιότητας, που είναι αντικειμενικά υπαρκτές. Άρα απαιτείται συνέπεια και λογική αυστηρότητα. Μοιάζει σαν μια άσκηση ισορροπίας ανάμεσα σε λογικομαθηματικούς περιορισμούς και αφηγηματικές ανάγκες, όπως ένας αυτοσχεδιασμός (ταξίμι) που εξελίσσεται με μια μελωδική ελευθερία, η οποία όμως υπακούει στους κανόνες δομής του μουσικού τρόπου, του «μακάμ».

Τέλος η γλώσσα και το ύφος, ο λόγος των Λογοτεχνικών Μαθηματικών, δεν μπορεί να είναι ο τυπικός, αυστηρός και λιτός (αλλά σαφής και πλήρης) λόγος των Μαθηματικών. Οι χαρακτήρες, οι σχέσεις και ο περίγυρος πρέπει να διαγράφονται λιτά μεν και καθαρά, για λόγους ρεαλισμού και πειστικότητας, αλλά και με γλαφυρότητα, για να είναι η ιστορία ελκυστική. Αυτά όλα απαιτούν ένα λόγο εμπλουτισμένο. Που όμως πρέπει να έχει κοινά στοιχεία με τη μαθηματική γλώσσα: συνεπή δομή χωρίς χάσματα και συνεπαγωγική σχέση των στοιχείων που οργανώνονται με την πλοκή της αφήγησης. Απαγορεύονται φυσικά αυθαιρεσίες, και λογικά άλματα, καθώς και κάθε περιττό ή παραπειστικό στοιχείο.

ΔΥΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Όσοι έχουν διδάξει Μαθηματικά ξέρουν τη δύναμη που έχει κάθε συγκεκριμένο παράδειγμα, ιδιαίτερα στην πρώτη προσέγγιση αφηρημένων εννοιών. Για το ρόλο λοιπόν που τότε μπορεί να παίξει ο αφηγηματικός λόγος, που κάποτε είναι πιο σαφής και συνήθως πιο εύληπτος από το μαθηματικό, θα αναφερθώ σε δυο χαρακτηριστικά κατά τη γνώμη μου παραδείγματα: έναν πολύ ωραίο γνωστό γρίφο από την Αριθμητική και μια άσκηση από την Ανάλυση.

Ο ΓΡΙΦΟΣ : «Ένας καθηγητής δίνει σε δυο άριστους μαθητές το εξής πρόβλημα:

-Ζητούνται δύο ακέραιοι αριθμοί, με τιμές από το 3 ως και το 100. Σε σένα Αυτώνη

θα δώσω το άθροισμά τους και σε σένα Γιάννη το γινόμενό τους.

Παίρνει ο καθένας το δεδομένο του και, μετά από σκέψεις, ακολουθεί ο διάλογος:

Γιάννης: *-Να το λύσω δε μπορώ.*

Αντώνης: *-Ναι, το ξέρω. Ούτε κι εγώ.*

Γιάννης: *-Όμως τώρα εγώ μπορώ.*

Αντώνης: *-Τώρα πια μπορώ κι εγώ.*

Ποιοι είναι οι δύο αριθμοί;»

Με πολλή προσπάθεια μπόρεσα να «μαθηματικοποιήσω» την εκφώνηση του γρίφου, ως εξής:

ΑΣΚΗΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ (και Συντακτικού!) *«Στο σύνολο των ζευγών των ακεραίων του [3,100] ζητείται εκείνο που έχει άθροισμα του οποίου καθένα μεν από τα ζεύγη προσθετέων έχει γινόμενο που παράγεται και από άλλο ζεύγος, αλλά μόνον το ζητούμενο έχει γινόμενο που δεν παράγεται από άλλο ζεύγος με άθροισμα τέτοιας ιδιότητας».*

Η προσεκτική σύνταξη και η σωστή χρήση των αναφορικών αντωνυμιών και των συνδέσμων (συμπλεκτικών-αντιθετικών) εξασφαλίζει την αρτιότητα, όχι όμως και το εύληπτο της εκφώνησης. Υπάρχει πλήρης αντιστοιχία δεδομένων στις δυο διατυπώσεις, αλλά είναι προφανές ότι η αφηγηματική είναι πιο κατανοητή και δεν αφήνει καμιά αμφιβολία, ούτε χρειάζεται πολλές αναγνώσεις ή εξηγήσεις, όπως η μαθηματική. Βέβαια θα μπορούσε να παρατηρήσει κάποιος ότι η μαθηματική διατύπωση έχει προχωρήσει και σε έκφραση κάποιων περιορισμών που προκύπτουν από το διάλογο και τους οποίους είναι απαραίτητο να αναζητήσει ο υποψήφιος λύτης, αν του δοθεί η πρώτη εκφώνηση. Πρόκειται φυσικά για δύσκολη άσκηση, για πολύ δυνατούς μαθητές Γυμνασίου ή Λυκείου. Είναι όμως, πιστεύω, ένα ενδιαφέρον παράδειγμα σύγκρισης. Και πιο ενδιαφέρον είναι το ότι η αφηγηματική διατύπωση διευκολύνει και την πορεία της λύσης. Παρουσιάζοντας τη λύση ο καθηγητής έχει την ευκαιρία να αναφερθεί στους πρώτους αριθμούς, στο Βασικό Θεώρημα της Αριθμητικής και στην Εικασία του Goldbach (εύκολα αποδείξιμη στα όρια του γρίφου), δείχνοντας πως μπορούν να αξιοποιηθούν για τη λύση ενός (εκ πρώτης όψεως) φαινομενικού μυστηρίου.

Το άλλο παράδειγμα, από την Ανάλυση, παρουσιάζει και ένα επί πλέον στοιχείο άξιο προσοχής. Εκτός του ότι κάνει εντελώς σαφή και συγκεκριμένη μια αφηρημένη άσκηση συναρτήσεων, βοηθά τη φαντασία να επινοήσει την απαραίτητη για τη λύση βοηθητική συνάρτηση αλλά και να κατανοήσει πλήρως το νόημά της.

ΑΣΚΗΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ : *« Έστω η f(x) ορισμένη και συνεχής στο [0, 2], με f(0)=0 και f(2)=2. Να δειχτεί ότι υπάρχουν* x_1 *και* x_2 *τέτοια ώστε* $x_2-x_1= f(x_2)-f(x_1)=1$*».*

Αν αντί της αόριστης f(x) δοθεί η S=f(t), γίνεται ένα βήμα προς την κατεύθυνση συνάρτησης με συγκεκριμένο νόημα και μπορεί να φανταστεί ο μαθητής μια πραγματική κατάσταση, την απόσταση που διανύει ένα κινητό σε συνάρτηση με το χρόνο. Έστω λοιπόν η S=f(t).

Για τη λύση χρειάζεται η επινόηση της βοηθητικής συνάρτησης g(t)=f(t+1)-f(t), ορισμένης και συνεχούς στο [0, 1], με g(0)+g(1)=f(2)=2. Αν g(0)=g(1)=1,

υπάρχουν δύο λύσεις. Αν όχι, έστω $g(0)<1$, οπότε $g(1)>1$ και, σύμφωνα με το Θεώρημα των Ενδιάμεσων Τιμών, υπάρχει t_1 στο [0, 1] τέτοιο ώστε $g(t_1)=1$. Είναι λοιπόν $g(t_1)= f(t_1+1)-f(t_1)= f(t_2)-f(t_1)=1$, με $t_2-t_1=1$.

Στη λύση αυτή χρησιμοποιούνται αφηρημένες έννοιες και η επινόηση της βοηθητικής συνάρτησης χρειάζεται την καθοδήγηση του καθηγητή (ή του φροντιστή) ή μεγάλη εμπειρία στη λύση παρόμοιων ασκήσεων. Όμως η λύση είναι δύσκολη για πολλά παιδιά, ίσως και ακατανόητη στην ουσία της, ακόμα και αν «τεχνικά» μπορέσουν να την ολοκληρώσουν.

Με τη χρήση όμως μιας μικρής ιστορίας οι θεωρητικές έννοιες μπορούν να αποκτήσουν υπόσταση, η κατανόηση να γίνει πληρέστερη και ενδεχομένως υποβοηθείται η φαντασία στην επινόηση της απαραίτητης βοηθητικής συνάρτησης, η οποία αποκτά πλέον νόημα σαφές και συγκεκριμένο. Ας δούμε λοιπόν την περίληψη μιας μικρής και απλοϊκής ιστορίας, που θα μπορούσε κάλλιστα να εμπλουτιστεί με πρόσωπα, περιγραφές και διαλόγους.

«Ένα λεωφορείο (Λ) έκανε τη διαδρομή Κατωχώρα - Πανωχώρα (Κ-Π), που είναι δύο χιλιόμετρα, σε δύο λεπτά. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει τμήμα της διαδρομής μήκους ενός χλιομέτρου που το έκανε σε ένα λεπτό».

Η $f(t)$ είναι τώρα η απόσταση του Λ από το Κ, όπου βρίσκεται την $t=0$, σε συνάρτηση με το χρόνο. Αναζητούμε αν υπάρχουν δύο θέσεις, που απέχουν 1 Km, από τις οποίες το Λ πέρασε με διαφορά 1 min, δηλαδή τις χρονικές στιγμές t_x και t_x+1. Η μεταβλητή t_x+1 μπορεί τώρα να οδηγήσει στην επινόηση ενός άλλου λεωφορείου (Λ΄) που έχει σε κάθε σημείο την ίδια ταχύτητα με το Λ αλλά προηγείται χρονικά από αυτό κατά 1 min, ξεκίνησε δηλαδή ένα λεπτό νωρίτερα. Η $f(t+1)$ είναι τώρα η απόσταση του Λ΄ από το Κ. Η δε απόσταση ΛΛ΄ δίνεται κάθε στιγμή από τη βοηθητική συνάρτηση $g(t)=f(t+1)-f(t)$. Αναζητούμε λοιπόν αν αυτή παίρνει κάποια στιγμή την τιμή 1 Km. Έστω ότι καθένα από τα Λ και Λ΄ διανύει απόσταση Δ_1 το πρώτο λεπτό της κίνησής του και Δ_2 το δεύτερο. Είναι τώρα φανερό ότι την $t_0=0$ είναι $ΛΛ΄=\Delta_1$ και την $t_1=1$ είναι $ΛΛ΄=\Delta_2$, με $\Delta_1+\Delta_2=2$ Km. Έστω ότι δεν είναι $\Delta_1=\Delta_2=1$ Km (οπότε υπάρχουν δύο λύσεις). Τότε το Λ΄ προηγείται του Λ απόσταση που στην αρχή είναι μικρότερη (ή μεγαλύτερη) του 1 Km και μετά ένα λεπτό γίνεται μεγαλύτερη (ή μικρότερη). Άρα υπάρχει μια ενδιάμεση στιγμή t_x ($0< t_x <1$) που προηγείται 1 Km ακριβώς. Αυτή δε την απόσταση θα την καλύψει το Λ σε 1 min, αφού αυτή είναι η χρονική καθυστέρησή του σε σχέση με το Λ΄. Άρα υπάρχουν οι ζητούμενες θέσεις, είναι οι $f(t_x)$ και $f(t_x+1)$.

Βλέπουμε λοιπόν ακόμα ότι εκτός από την ευκολότερη κατανόηση της άσκησης και την πιθανότερη επινόηση της βοηθητικής συνάρτησης, διευκολύνεται και η συνειδητοποίηση του Θεωρήματος των Ενδιάμεσων

Τιμών, με τη βοήθεια μιας απλής εφαρμογής. Που τελικά μπορεί να λυθεί και μόνο με την απλή λογική και στοιχειώδεις αριθμητικές πράξεις.

Τελειώνω με μια μικρή αναφορά σε μιαν άλλη πτυχή της διημερίδας. Στο βιβλίο «Ποιήματα» του μαθηματικού Δημήτρη Γαβαλά, μου «χτύπησε στο μάτι» ένας τίτλος: «0!=1». Άραγε τι θα μπορούσε να πει ένας ποιητής γι αυτήν την αξιωματική παραδοξότητα της Αριθμητικής;

« 0! = 1 »

Άκουσες το «παραγοντικό μηδέν»

ισούται με τη μονάδα.

Από τότε επιδιώκεις το θαυμασμό

να φαντάζεις κι εσύ κάτι.

yankarv@gmail.com

[λευκή σελίδα]

ΠΩΣ ΑΣΧΟΛΗΘΗΚΑΜΕ ΜΕ ΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΤΙΣ ΤΕΧΝΕΣ ΔΙΑΒΑΖΟΝΤΑΣ ΤΗΝ ΕΠΙΠΕΔΟΧΩΡΑ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ

Αναστασία Μιχαλοπούλου

Εκπαιδευτικός Α/θμιας Εκπ/σης
ΜΑ Μαθηματικά στην Εκπαίδευση

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία θα παρουσιαστούν εκπαιδευτικές δραστηριότητες που αναπτύχθηκαν και υλοποιήθηκαν με αφορμή την ανάγνωση του βιβλίου Επιπεδοχώρα (Abbot,1884) από μία τάξη πέμπτης δημοτικού. Αρχικά θα γίνει μία παρουσίαση της σχέσης μαθηματικών και λογοτεχνίας και στη συνέχεια θα αναλύσουμε την πρωτοβουλία μας ως εκπαιδευτικοί να διερευνήσουμε τη σχέση που μπορούν να έχουν τα μαθηματικά με τη δημιουργία εικόνων, κινούμενων εικόνων και μυθοπλασίας. Θα περιγραφούν δραστηριότητες εικαστικών τεχνών με στόχο την ενεργό εμπλοκή των μαθητών με τη γεωμετρική έννοια της διάστασης. Θα παρουσιαστεί η δουλειά των μαθητών κατά την προετοιμασία και την παραγωγή ταινίας animation μικρού μήκους βασισμένη στην Επιπεδοχώρα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Με ποιον τρόπο θα μπορούσε μία τάξη δημοτικού να ασχοληθεί με τη γεωμετρία διαβάζοντας ένα λογοτεχνικό βιβλίο; Στην παρούσα εργασία θεωρείται χρήσιμη η επικοινωνία ανάμεσα στη λογοτεχνία, τα μαθηματικά και τον κινηματογράφο και παρουσιάζεται μία απόπειρα ανίχνευσης αυτών των σχέσεων στο πλαίσιο του σχολικού προγράμματος.

Αρχικά θα γίνει μία προσπάθεια να δοθεί ένας ορισμός στον όρο μαθηματική λογοτεχνία και στη συνέχεια θα παρουσιαστεί η αφήγηση ως μια κοινή βάση της λογοτεχνικής, μαθηματικής και κινηματογραφικής γλώσσας. Επίσης θα γίνει σύντομη αναφορά στις υπάρχουσες θεωρίες της μάθησης, αλλά και στην σύγχρονη τάση της έρευνας να συντονίσει τις ψυχολογικές και τις κοινωνικές ερμηνείες του πώς λειτουργεί και πώς πραγματοποιείται η ανθρώπινη μάθηση.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΟΤΕΧΝΙΑ: Η ΕΠΙΠΕΔΟΧΩΡΑ

Κατά την τελευταία δεκαετία παρατηρείται μια σημαντική αύξηση στη λογοτεχνική παραγωγή έργων που συνδέονται με τον ένα ή τον άλλο τρόπο με τα μαθηματικά (Μιχαηλίδης, 2007).Το φαινόμενο αυτό φαίνεται να αντιμετωπίζεται από κομμάτι της μαθηματικής κοινότητας ως μια μεγάλη ευκαιρία και πρόκληση για την εκπαίδευση. Η λογοτεχνική γλώσσα δημιουργεί ένα φανταστικό και οικείο περιβάλλον στον αναγνώστη που του επιτρέπει να προσεγγίσει τα μαθηματικά με έναν εναλλακτικό τρόπο πέρα από την αυστηρότητα της μαθηματικής γλώσσας (Λέρη,2008).Η μαθηματική λογοτεχνία ως μια καινοτομία της λογοτεχνικής διαπραγμάτευσης των επιστημών λειτουργεί προς την κατεύθυνση της λογοτεχνικής ακρίβειας και της επιστημονικής μυθοπλασίας (Παπαδάτος&Πολίτης,2008). Οι δυνατότητες που ανοίγονται μέσα από τον δρόμο της μαθηματικής λογοτεχνίας φαίνονται στη δουλειά που παράγουν λέσχες ανάγνωσης της ομάδας «Θαλής και Φίλοι» (Μιχαηλίδης,2007). Ως λέσχη ανάγνωσης, σύμφωνα με το εθνικό κέντρο βιβλίου (ΕΚΕΒΙ), θεωρείται μία ομάδα ανθρώπων, που συναντιούνται με κάποιο προσυμφωνημένο πρόγραμμα για να συζητήσουν ένα βιβλίο της επιλογής τους.

Η τέχνη του λόγου όπως και τα μαθηματικά αποτελούν γλώσσες με τις οποίες ο άνθρωπος χειρίζεται την πραγματικότητα. Η μαθηματική λογοτεχνία έρχεται να δώσει την ενότητα σε αυτές τις δυο γλώσσες. Αντιπροσωπευτικό παράδειγμα αποτελεί το βιβλίο “Flatland” (Επιπεδοχώρα) του Edwin Abbot Abbot, το οποίο και θεωρείται το πρώτο μαθηματικό μυθιστόρημα και κυκλοφόρησε το 1884 (Kasman,1999). Χαρακτηρίζεται ως λογοτεχνικό βιβλίο με σημαντικό μαθηματικό περιεχόμενο(Κολέζα, 2010).

Ο μαθηματικός και συγγραφέας του βιβλίου «Επιπεδοχώρα» Abbot μέσα από τα μάτια του πρωταγωνιστή του, του τετραγώνου A.Square περιγράφει εύληπτα τις τρεις διαστάσεις στις οποίες ζει ο άνθρωπος, τις δυο διαστάσεις στο χώρο του επιπέδου, αλλά και το χώρο της μιας διάστασης. Το κείμενο είναι πολύ ενδιαφέρον και το εύρημα είναι εξαιρετικά όμορφο, δεδομένου ότι προτρέπει τον αναγνώστη να οπτικοποιήσει και εντέλει να λειτουργήσει μέσα στον κόσμο της γεωμετρίας και των διαστάσεων. Πέρα όμως από την καθαρή γεωμετρία το κείμενο προσφέρεται και για άλλου τύπου σκέψεις, όπως είναι αυτή της αναποτελεσματικότητας της ανθρώπινης λογικής να ξεφύγει από τους περιορισμούς του περιβάλλοντός της (Mehan& Wood 1975) . Μιλώντας σε πρώτο πρόσωπο, ο κεντρικός ήρωας εξηγεί στον τρισδιάστατο αναγνώστη του πόσο δύσκολο είναι να αντιληφθεί κάποιος από τον δικό του κόσμο πράγματα που είναι προφανή για έναν παρατηρητή από την τρίτη διάσταση. Με αυτόν τον τρόπο τον οδηγεί βήμα προς βήμα στο να τολμήσει να φανταστεί κι αυτός μια τέταρτη διάσταση που θα του φαίνεται το ίδιο ασύλληπτη και μυστηριώδης όσο είναι για ένα επίπεδο ον οι έννοιες «πάνω» και «κάτω». (Μιχαηλίδης,2008). Έτσι μέσα από την ανάγνωση του συγκεκριμένου βιβλίου μπορεί ο αναγνώστης να δει με ποια λογική δομήθηκε η θεωρία των διαστάσεων αλλά και να συσχετίσει τον τομέα αυτό των μαθηματικών με άλλες ανθρώπινες δραστηριότητες. Για παράδειγμα με την επικοινωνία με ανθρώπους που έρχονται από άλλους πολιτισμούς, με διαφορετικές θρησκείες, διαφορετικού φύλου.

Η ΑΦΗΓΗΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΗ ΛΟΓΟΤΕΧΝΙΑ

Μέσα από τη λαογραφία του 19 ου αιώνα δίνεται κύρος στο λαϊκό, προφορικό λόγο. Εμπνευσμένοι από το ρομαντισμό οι λαογράφοι διατείνονται ότι η αφήγηση είναι γνώση . Παρόλα αυτά η αφήγηση περιορίζεται στο παραμύθι, τη μπαλάντα, το λαϊκό τραγούδι, τους αφηγηματικούς θρύλους και τις παραδόσεις(Bettelheim,1950). Από την άλλη σε άλλους ειδικούς κλάδους της επιστήμης δέχτηκαν την αφήγηση ως βασικό και νόμιμο εργαλείο καταγραφής και διεύρυνσης της γνώσης πολλούς αιώνες πριν. Συγκεκριμένα στην ιατρική και τη νομική από την αρχαιότητα χρησιμοποίησαν την «κλινική» αφήγηση (case history). Στα τέλη του 20ου αιώνα πια η κλινική αφήγηση χρησιμοποιείται σε μεγάλη κλίμακα και στην Παιδαγωγική Επιστήμη, ιδιαίτερα τη Διδακτική των Μαθηματικών και των Φυσικών Επιστημών όπου οι περισσότερες παιδαγωγικές θεωρίες αναπτύσσονται και διαμορφώνονται στην πράξη (είτε στην κλινική συνέντευξη, είτε στο διδακτικό πείραμα). Ο αφηγηματικός νους είναι αιτιοκρατικός (Δοξιάδης,2006) γεγονός που έρχεται να υπογραμμίσει τη συνάφεια των μαθηματικών με την αφήγηση.

Ο ανθρώπινος νους φαίνεται να έχει δύο τρόπους να σκέφτεται, τον παραδειγματικό και τον αφηγηματικό (Bruner, 1986). Η αφήγηση τόσο στη λογοτεχνία, όσο και στα μαθηματικά συνιστά ερμηνεία του κόσμου. Το να είναι σε θέση κάποιος να αφηγηθεί τον τρόπο με τον οποίο έφτασε σε λύση κάποιου προβλήματος είναι αντίστοιχο με το να είναι σε θέση να αφηγηθεί μια ιστορία. Είναι προφανές ότι ο τρόπος που επιλέγουμε να πούμε μια ιστορία είναι σε άμεση συνάρτηση με την κοσμοθεωρία μας. Οι αφηγήσεις που επιλέγουμε να κάνουμε είναι δηλωτικές της ποιότητας της ανθρώπινης σκέψης. Η αφήγηση λοιπόν λέγεται με πρόθεση και είναι ολοκληρωμένη με αρχή, μέση και τέλος.

ΠΩΣ ΜΑΘΑΙΝΟΥΜΕ

Η θεωρία βάσει της οποίας ερμηνεύει η επιστημονική κοινότητα τον τρόπο που μαθαίνει ο άνθρωπος παίζει θεμελιώδη ρόλο στο τι και πώς διδάσκεται στο εκπαιδευτικό σύστημα. Στη συνέχεια θα γίνει μια αναφορά στις υπάρχουσες θεωρίες μάθησης. Κατά κύριο λόγο οι θεωρίες αυτές χωρίζονται σε εκείνες που θεωρούν ως μονάδα ανάλυσης το άτομο και σε εκείνες που έχουν ως μονάδα ανάλυσης την κοινωνική ομάδα(Bransford,2000)

Η μάθηση παραδοσιακά αποτέλεσε ζητούμενο των ψυχολογικών θεωριών. Αυτές οι θεωρίες εξετάζουν το φαινόμενο της μάθησης από την οπτική γωνία του ατόμου. Η μπιχεβιοριστική θεωρία (behaviorist theory), η γνωσιακή θεωρία (cognitive theory) ,η κονστρουβιστική θεωρία (constuctivist) , καθώς και η θεωρία της κοινωνικής μάθησης (social learning theory) αποτελούν τις βασικές «σχολές» θεωριών της ψυχολογικής διάστασης της μάθησης.

Οι μπιχεβιοριστικές θεωρίες εστιάζουν στην οριοθέτηση της συμπεριφοράς μέσω ερεθισμάτων και αντιδράσεων. Αγνοούνται τελείως τα θέματα του νοήματος και έτσι αυτή η θεωρία μάθησης φαίνεται να επαρκεί ερμηνευτικά σε περιπτώσεις αυτοματοποίησης ή εκπαίδευσης ζώων (Skinner 1974)

Οι γνωσιακές θεωρίες εστιάζουν σε εσωτερικές γνωστικές δομές και αντιμετωπίζουν τη μάθηση ως αλλαγή των υπαρχουσών γνωστικών δομών. Η μάθηση ερμηνεύεται ως μεταφορά πληροφοριών μέσω της επικοινωνίας ή της επίλυσης προβλημάτων. Αυτές οι θεωρίες είναι χρήσιμες στην κατασκευή ασκήσεων που βασίζονται σε υπάρχουσες γνωστικές δομές (Wenger 1987)

Οι κονστρουβιστικές θεωρίες δίνουν έμφαση στις διαδικασίες με τις οποίες οι μαθητές κατασκευάζουν τη δική τους γνώση καθώς ανταποκρίνονται στο περιβάλλον τους. Οι θεωρίες αυτές εστιάζουν πρωταρχικά στην εμπειρία. Οι κονστρουκτιβιστικές θεωρίες είναι χρήσιμες για το σχεδιασμό περιβάλλοντων μάθησης -εξομοιωμένοι κόσμοι- επιτρέποντας έτσι την κατασκευή κάποιων

γνωστικών δομών μέσω προσωπικών και άμεσων εμπειριών. (Piaget 1954, Freudental 1991)

Τέλος οι κοινωνικές θεωρίες μάθησης , λαμβάνουν υπόψη τον παράγοντα της κοινωνικής αλληλεπίδρασης , αλλά ακόμη από την ψυχολογική και ατομική διάσταση της μάθησης. Δίνουν έμφαση στο μιμιτισμό και το ρόλο του προτύπου στις διαπροσωπικές σχέσεις και εστιάζουν στην κοινωνική παρατήρηση ως μορφή μάθησης. Οι θεωρίες αυτές χρησιμεύουν στο να κατανοηθεί ο τρόπος με τον οποίο η κοινωνική συνύπαρξη επηρεάζει τη συμπεριφορά (Bandura 1977).

Στον αντίποδα των ψυχολογικών θεωριών μάθησης είναι εκείνες οι θεωρίες που ερμηνεύουν το φαινόμενο της μάθησης από την κοινωνική οπτική διάσταση. Η προσοχή εστιάζεται στην κοινωνία και στον τρόπο που αυτή διαμορφώνει τη μάθηση των ατόμων. Σε αυτές τις θεωρίες ανήκουν οι θεωρίες της δραστηριότητας (Activity theories) , οι θεωρίες της κοινωνικοποίησης (Socialization theories), και οι θεωρίες των κοινωνικών οργανισμών (Organizational systems).

Οι θεωρίες της δραστηριότητας εστιάζουν στην ανθρώπινη δραστηριότητα και στην ιστορική οργάνωσή της. Ο βασικός σκοπός αυτών των θεωριών είναι να ερμηνεύσουν τη μάθηση ως γεφύρωμα του χάσματος που υπάρχει ανάμεσα στην ιστορική κοινωνική δραστηριότητα και την εξελικτική ατομική δραστηριότητα- για παράδειγμα το κενό ανάμεσα στην υφιστάμενη μορφή γλώσσας και στην εξελικτική δυνατότητα του παιδιού να μιλήσει αυτή τη γλώσσα. Ο σκοπός είναι να διερευνηθεί η «ζώνη επικείμενης ανάπτυξης» (zone of proximal development) στην οποία ο μαθητής που δέχτηκε κάποια εκπαίδευση μπορεί να επιτύχει σε μία δραστηριότητα. (Vygotsky 1934).

Οι θεωρίες της κοινωνικοποίησης εστιάζουν στον τρόπο με τον οποίο κάποιος που εισέρχεται σε μια κοινότητα γίνεται σταδιακά μέλος της. Αυτή η θεωρία ερμηνεύει την σταδιακή αναγνώριση του καινούργιου ως μέλος της κοινότητας, καθώς ο πρώτος εσωτερικεύει τις νόρμες της κοινωνικής ομάδας (Parsons 1962).

Οι θεωρίες των κοινωνικών οργανισμών απασχολούνται τόσο με τον τρόπο που το άτομο μαθαίνει στο πλαίσιο του οργανισμού, όσο και με τον τρόπο που οι ίδιοι οι οργανισμοί μαθαίνουν και εξελίσσουν τη δομή τους (Brown& Duguid 1996).

Δεδομένου ότι η μάθηση συντελείται μέσα από προσωπικές, ατομικές παραμέτρους (Piaget 1967) αλλά και στο πλαίσιο των κοινωνικών αλληλεπιδράσεων (Vygotsky 1994), η προσπάθεια ανεύρεσης πρακτικών που στηρίζουν αλλά και βελτιστοποιούν και τις δυο αυτές όψεις της κρίνεται αναγκαία.

ΑΠΟ ΤΙΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΜΑΘΗΣΗΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΑΞΗ

Οι θεωρίες μάθησης εν γένει είναι περιγραφικές (Bruner, 1970), γι αυτό γίνεται προσπάθεια να διατυπωθούν οι επιστημονικές θέσεις περισσότερο ως μια θεωρία διδασκαλίας. Δίνεται έμφαση στο ρόλο του εκπαιδευτικού που θα οργανώνει τις διαδικασίες μάθησης και διδασκαλίας ενός ορισμένου αντικειμένου, λαμβάνοντας υπόψη τη γνωστική ανάπτυξη του μαθητή και τη διαδρομή που θα ακολουθήσει αυτός προκειμένου ν' αποκτήσει κατά κύριο λόγο διαδικασίες και στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων, για να μπορέσει να οικειοποιηθεί τα πολιτιστικά εργαλεία του κοινωνικού περιβάλλοντος (Wenger,1998).

Ο άνθρωπος που μαθαίνει είναι ο ενεργός δημιουργός των τρόπων που γνωρίζει (Von Glasersfeld, 1987).Η σκέψη εξυπηρετεί την οργάνωση του εμπειρικού κόσμου και η γνώση φαίνεται να κατασκευάζεται ενεργά από το σκεπτόμενο άτομο. Τα μαθηματικά όπως και κάθε άλλη μορφή γνώσης στον άνθρωπο ξεκινούν από την εμπλοκή του με τον περιβάλλοντα κόσμο (Piaget,1969). Επομένως στην πράξη χρειάζεται μία επαγρύπνηση κατά την κατασκευή εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων ως προς το κατά πόσο εξυπηρετείται η δημιουργία κατάλληλων περιβαλλόντων μάθησης. Ο άνθρωπος αντιδρά στα αντικείμενα με βάση το νόημα που δίνει σε αυτά. Στο πλαίσιο της σχολικής τάξης θα πρέπει να ληφθεί υπόψη η συγχρονισμένη συνύπαρξη νοημάτων. Στη διάρκεια της ενασχόλησης της σχολικής τάξης με την Επιπεδοχώρα οι διαφορετικοί μαθητές παρουσίασαν ένα συντονισμό και πέρασαν από μία θεωρητικά κοινή πορεία. Ένα εργαλείο για να αποτυπωθεί η μαθησιακή πορεία των μαθητών είναι μέσα από τη διήγηση της μαθησιακής του πορείας.Το νόημα και το περιεχόμενο των πραγμάτων, γεννιέται και μορφοποιείται κατά την κοινωνική συνεύρεση των ανθρώπων και είναι βαθιά εξαρτημένο από τον τρόπο που σκέφτονται τα μέλη αυτής της κοινωνίας που προσπαθούν να επικοινωνήσουν(Blumer, 1969). Το αποτέλεσμα των παραπάνω φαίνεται να είναι ότι κάθε κουλτούρα εγκλωβίζεται από τα μέλη της και εγκλωβίζει τα μέλη της σε αυτήν. Παρόλα αυτά το ενδιαφέρον προκύπτει όταν κανείς αναλογιστεί ότι ανεξάρτητα από τον τρόπο που γίνεται το μάθημα των μαθηματικών, υπάρχει πάντα επικοινωνία ανάμεσα στα μέλη της κοινότητας, αυτό που αλλάζει και διαφοροποιεί τα πράγματα είναι η ποιότητα αυτής της επικοινωνίας. Οι παράγοντες που δείχνουν να σχετίζονται με την ποιότητα αυτή, είναι οι υποχρεώσεις των μελών της κοινότητας καθώς και οι ρουτίνες που ακολουθεί η ομάδα (Voigt, 1990).

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας στην υποχρεωτική εκπαίδευση, στις περισσότερες χώρες, δίνει έμφαση στην ταξινόμηση επίπεδων σχημάτων, στη μελέτη και τη σύγκριση των ιδιοτήτων τους και στη χρήση μιας παραγωγικής λογικής στην οργάνωση εννοιών και ιδιοτήτων (Κολέζα, 2010). Παρόλα αυτά δεδομένου ότι ο χώρος και το σχήμα είναι συνυφασμένα με την κίνηση και το χρόνο, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η γεωμετρία μας βοηθά να περιγράψουμε και να αναπαραστήσουμε την εμπειρία μας με τον χώρο, το σχήμα, την κίνηση και τον χρόνο (Freudental, 1973).

Στην προσπάθεια να οργανωθούν εκπαιδευτικές δραστηριότητες με το βιβλίο Επιπεδοχώρα ακολουθήθηκε η ρεαλιστική προσέγγιση των μαθηματικών. Με βάση την εξέλιξη του βιβλίου έγινε προσπάθεια να οργανωθούν μαθησιακές καταστάσεις σε σχέση με την άμεση παρατήρηση και την παρατήρηση υπό γωνία, τον προσανατολισμό και τον προσδιορισμό της θέσης, λογικές δραστηριότητες, δραστηριότητες μετασχηματισμού, σχεδίασης και κατασκευής, μέτρησης και υπολογισμού (Gravemeijer, 1990).

«ΕΠΙΠΕΔΟΧΩΡΑ» ΣΤΗ ΣΧΟΛΙΚΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ

Το βιβλίο «Επιπεδοχώρα» χρησιμοποιήθηκε από μία τάξη Ε΄δημοτικού με 24 μαθητές στο 2ο Δημοτικό Σχολείο του Νέου Ψυχικού. Εντάχθηκε στα μαθήματα της Ευέλικτης ζώνης και δηλώθηκε ως πολιτιστικό πρόγραμμα φιλαναγνωσίας στην αρχή της τρέχουσας σχολικής χρονιάς. Η συνάντηση γινόταν με τους μαθητές για μία διδακτική ώρα σαράντα πέντε λεπτών, μία φορά την εβδομάδα (τρίτη σχολική ώρα του ημερησίου σχολικού προγράμματος). Η χρονική περίοδος ενασχόλησης με το συγκεκριμένο βιβλίο άρχισε τον Οκτώβριο 2010 και ολοκληρώθηκε το Μάιο 2011. Τα γνωστικά αντικείμενα που συσχετίστηκαν με την ανάγνωση του βιβλίου ήταν τα μαθηματικά, η γλώσσα , η αισθητική αγωγή και οι τεχνολογίες πληροφορίας και επικοινωνίας.

Οι εκπαιδευτικές δραστηριότητες σχεδιάστηκαν σύμφωνα με συγκεκριμένα διατυπωμένους στόχους. Η πρόθεση ήταν η ενεργητική εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες που θα είχαν νόημα για αυτούς:

- Να διαβάσουμε το βιβλίο μαθηματικής λογοτεχνίας «Επιπεδοχώρα»
- Να αφηγηθούμε την ιστορία του πρωταγωνιστή
- Να συγκρίνουμε αφηγήσεις
- Να παρατηρήσουμε τον τρισδιάστατο κόσμο μας
- Να απεικονίσουμε τις τρεις διαστάσεις
- Να κατασκευάσουμε κανονικά πολύγωνα

- Να δημιουργήσουμε σχήματα σε δύο και σε τρεις διαστάσεις
- Να παράγουμε ομαδική αφήγηση
- Να εικονογραφήσουμε ομαδική αφήγηση
- Να επεξεργαστούμε ψηφιακά το υλικό μας
- Να παράγουμε ταινία εμψύχωσης- ψηφιακής αφήγησης

Η διαδικασία με την οποία ασχοληθήκαμε με το βιβλίο ουσιαστικά ακολούθησε τις αρχές οργάνωσης μία τυπικής σχολικής λέσχης ανάγνωσης. Οι γονείς ενημερώθηκαν για την επιλογή του βιβλίου και για την εκπαιδευτική διάθεση διασύνδεσης των μαθηματικών με τις τέχνες. Οι συναντήσεις μας περιελάμβαναν αρχικά την ανάγνωση συγκεκριμένων σελίδων του βιβλίου και ακολουθούσε η εμπλοκή των μαθητών με σχετικές δραστηριότητες. Τις περισσότερες φορές η συνάντηση ολοκληρωνόταν με την παρουσίαση των μαθητών (ομαδικά ή ατομικά) της δουλειάς τους στους υπόλοιπους.

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΤΗΣ ΜΑΘΗΤΙΚΗΣ ΚΟΙΝΟΤΗΤΑΣ

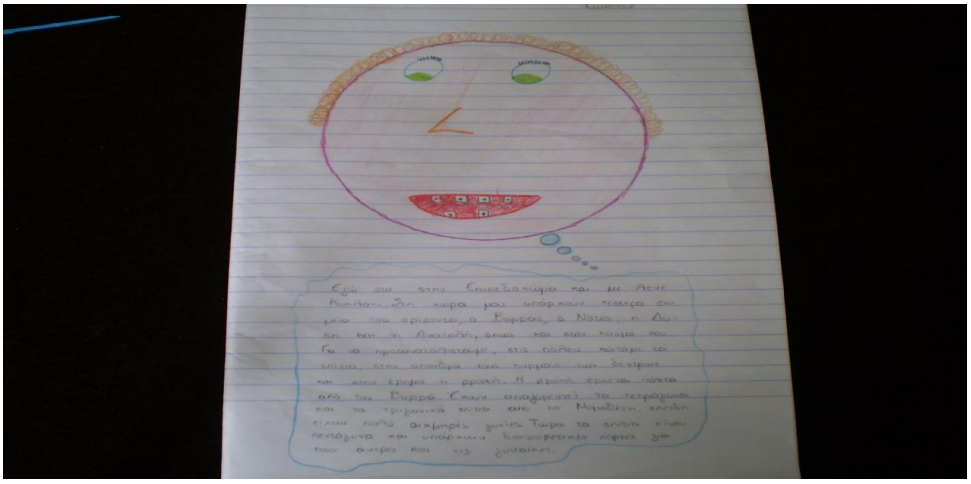
Στην πρώτη συνάντηση της σχολικής τάξης έγινε προσπάθεια να δημιουργηθεί ένα κλίμα εργαστηρίου. Οι μαθητές μίλησαν για τις αναγνωστικές τους συνήθειες και αναζήτησαν ένα όνομα για τη λέσχη ανάγνωσης που δημιουργήσαμε.

Εικόνα

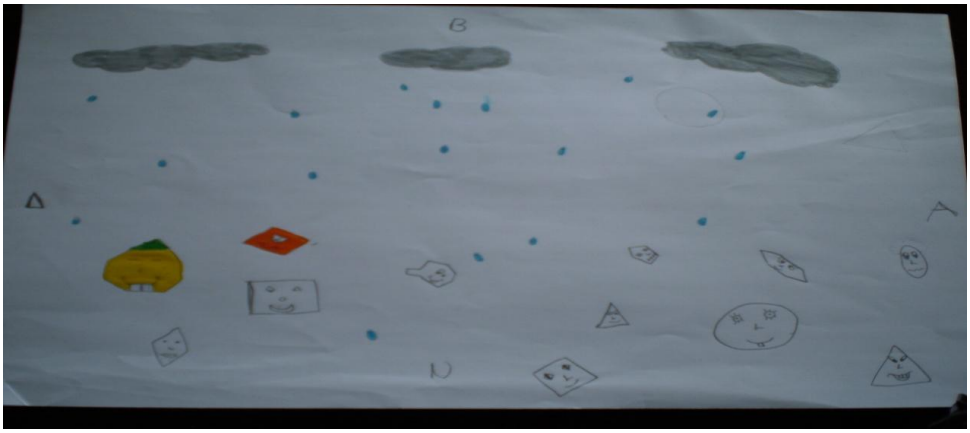
Η προσπάθεια της συγκεκριμένης δραστηριότητας εστιάστηκε στην έμφαση της συμβολής των μαθητών στη δημιουργία της ταυτότητας της κοινότητας (Wenger, 1998).

Στη δεύτερη συνάντηση οι μαθητές χωρίστηκαν σε τρεις ομάδες ανάλογα με το αντικείμενο που τους ενδιάφερε να ασχοληθούν περισσότερο. Οι ομάδες ονομάστηκαν λογοτέχνες, μαθηματικοί, καλλιτέχνες. Αφού διάβασαν αρχικά το κομμάτι του βιβλίου που τους ζητήθηκε ασχολήθηκαν με τις παρακάτω δραστηριότητες. Οι μαθηματικοί σχεδίασαν με χάρακα και μοιρογνωμόνιο γωνίες.

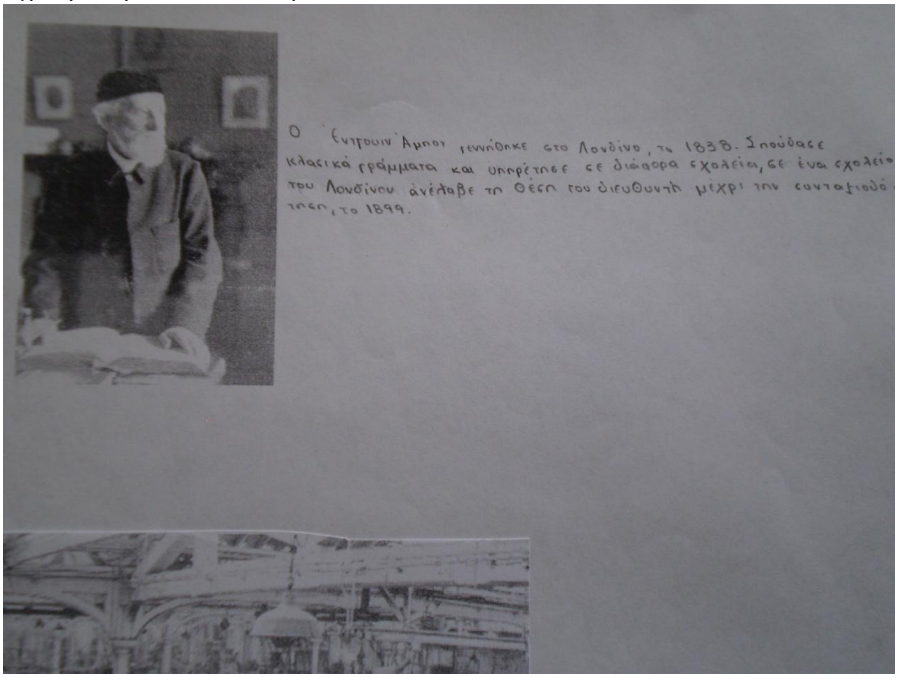
Οι λογοτέχνες δημιούργησαν έναν φανταστικό κάτοικο της επιπεδοχώρας ο οποίος σε μορφή κόμικς παρουσιάζει τον εαυτό του.



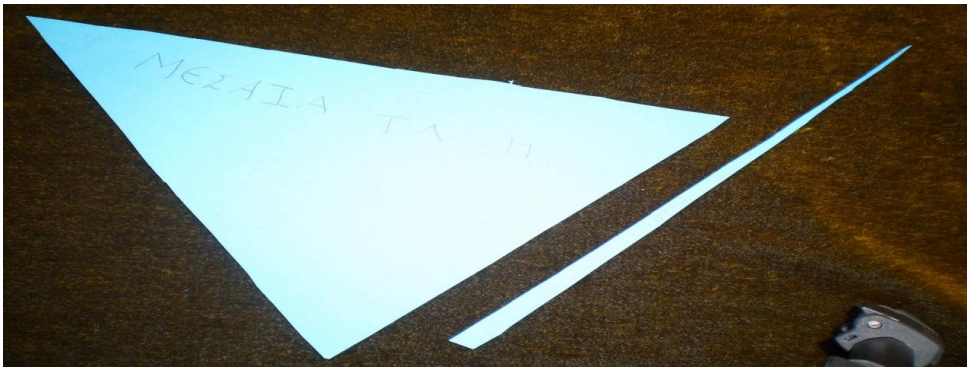
Οι καλλιτέχνες εικονογράφησαν μια βροχερή μέρα στην επιπεδοχώρα ακολουθώντας τη λογοτεχνική περιγραφή του βιβλίου.



Στην τρίτη συνάντηση οι λογοτέχνες παρουσίασαν ένα σύντομο βιογραφικό του συγγραφέα της Επιπεδοχώρας και αφού επεξεργάστηκαν σχετικές πληροφορίες μας μίλησαν για την Αγγλία του 19ου αιώνα, εποχή που ο Abbot συνέγραψε την Επιπεδοχώρα.

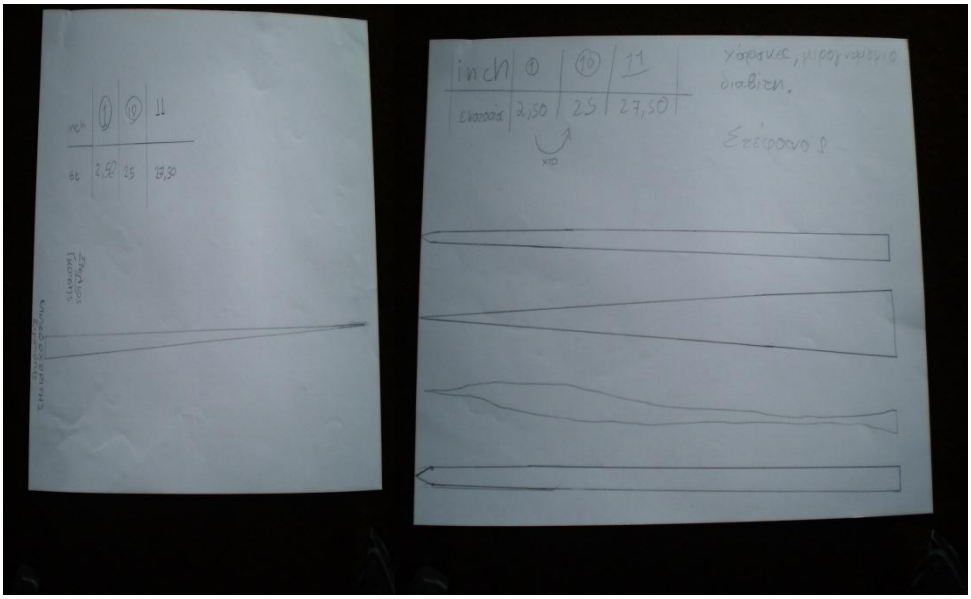


Οι μαθηματικοί κατασκεύασαν σε χαρτί canson έναν επιπεδοχωρίτη σύμφωνα με τις διαστάσεις που αναφέρονται στο βιβλίο.



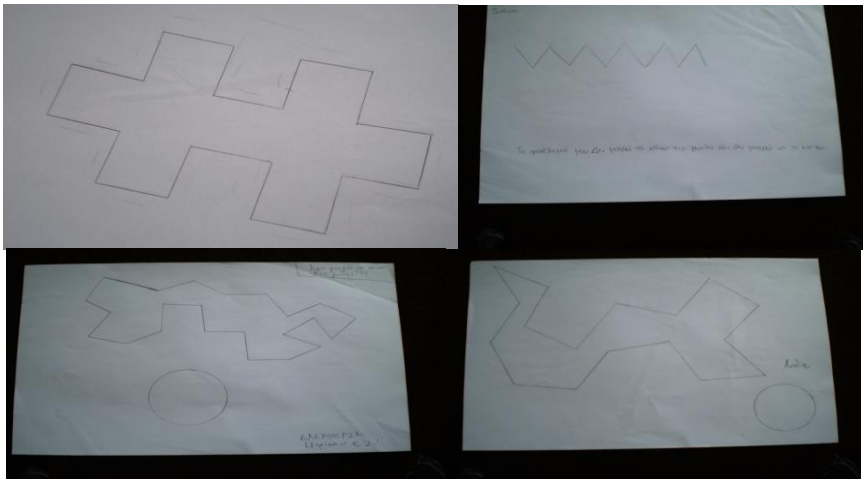
Οι καλλιτέχνες όρισαν σε έναν παγκόσμιο χάρτη τα γεωγραφικά μέρη που ανήκαν στην Αγγλία την εποχή της συγγραφής του βιβλίου.

Στην επόμενη συνάντηση όλη η τάξη συζητήσαμε για το πώς θα μπορούσαμε να σχεδιάσουμε ένα τρίγωνο της μεσαίας τάξης της επιπεδοχώρας. Ο συγγραφέας δίνει τις διαστάσεις σε ίντσες οπότε έγινε σχετική συζήτηση στην τάξη για τις μονάδες μέτρησης και σχεδιάστηκε ο επιπεδοχωρίτης με μονάδα μέτρησης τα εκατοστά,αφού έγινε η σχετική μετατροπή.



Σχεδιάσαμε όλοι μαζί τους στρατιώτες επιπεδοχωρίτες. Μετατροπή από ίντσες σε εκατοστά για να μπορέσουμε να τα σχεδιάσουμε με τους χάρακές μας.

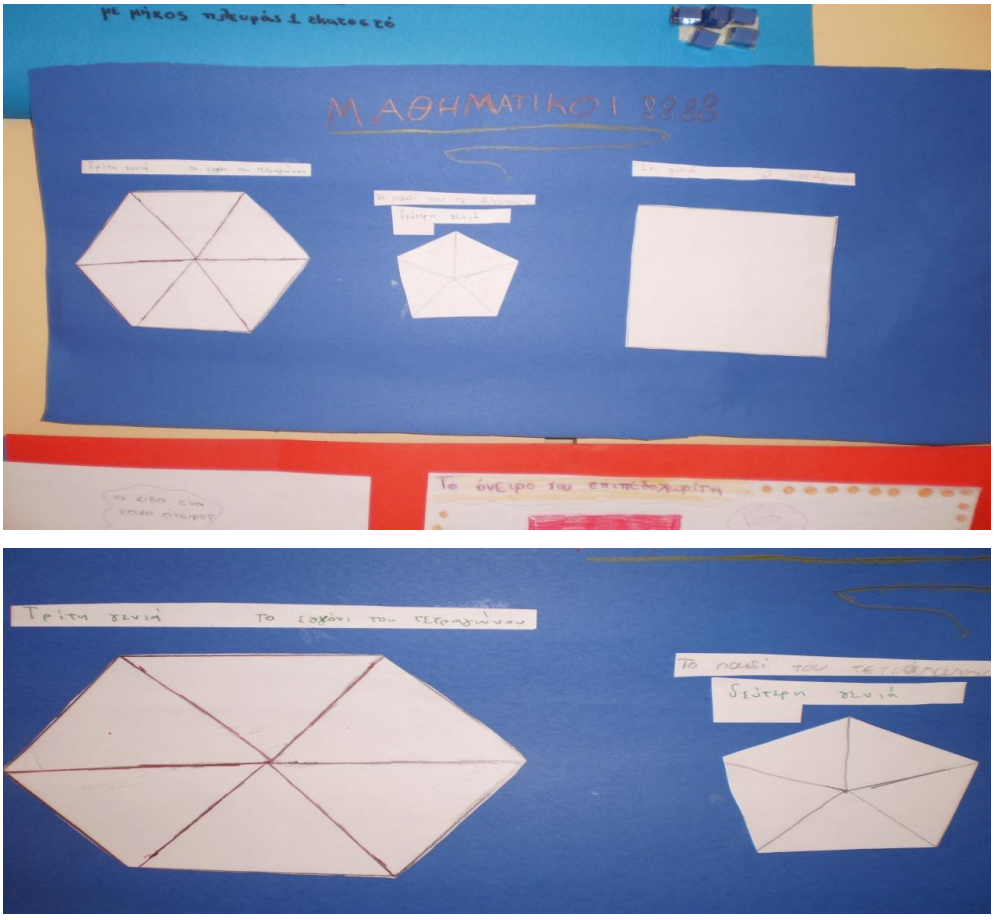
Στην πέμπτη συνάντηση σχεδιάσαμε όλοι μαζί πολύγωνα. Οι μαθητές χωρίστηκαν σε ομάδες ανάλογα με το είδος του πολύγωνου που προσπαθούσαν να σχεδιάσουν(πεντάγωνα, εξάγωνα, εικοσάγωνα). Κατά την εργασία των μαθητών προέκυψε το πρόβλημα πώς θα δημιουργήσουμε κανονικά πολύγωνα.



Στην έκτη συνάντηση σχεδιάσαμε όλοι μαζί κανονικά πολύγωνα με χάρακα και διαβήτη. Ακολούθησε η συνάντηση με θέμα τις διαστάσεις. Διαβάζοντας το σχετικό απόσπασμα από το βιβλίο προσπαθήσαμε στην τάξη να κάνουμε μία συζήτηση με θέμα το πώς βλέπουν οι επιπεδοχωρίτες και πώς αναγνωρίζονται μεταξύ τους. Οι μαθητές προσπάθησαν να αποδώσουν ένα τρισδιάστατο αντικείμενο με ζωγραφική. Χρησιμοποιήσαμε στην τάξη ένα μήλο ως μοντέλο και χρησιμοποιήσαμε τόνους για να αποδώσουμε τους όγκους.

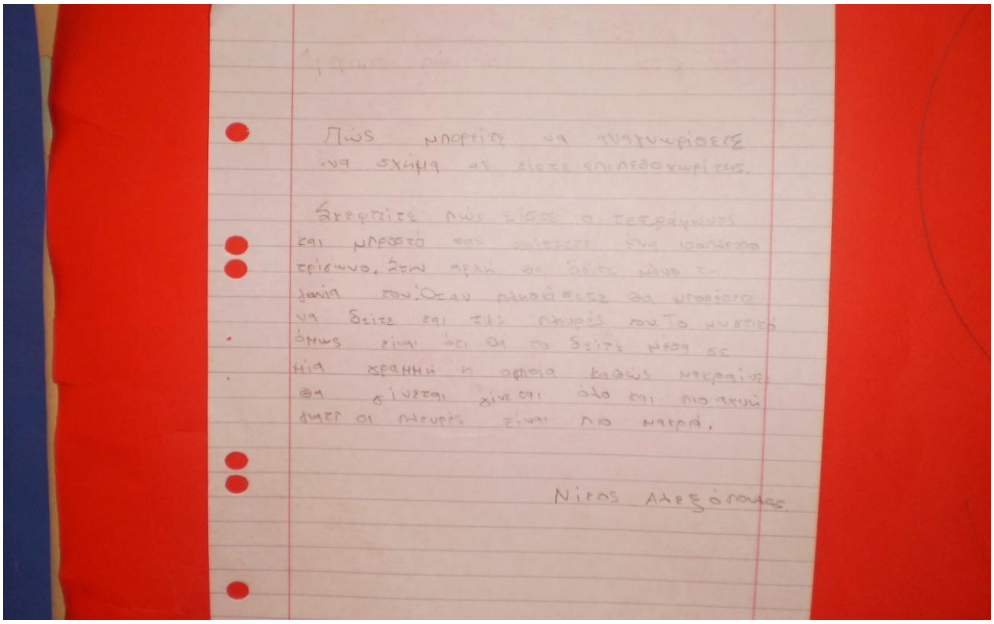
Συνεχίζοντας την ανάγνωση του βιβλίου συζητήσαμε για το «Πώς μπορεί ο τετράγωνος να εξηγήσει την επιπεδοχώρα στο βασιλιά της γραμμοχώρας». Σε συνάρτηση με την εξέλιξη της ιστορίας του βιβλίου οι μαθητές κλήθηκαν να δημιουργήσουν μια συνάντηση ανάμεσα σε ένα πλάσμα που κατοικεί σε δύο διαστάσεις και σε ένα πλάσμα που κατοικεί σε μία διάσταση. Η παρουσίαση των μαθητών έγινε με θεατρικό και όλη η συζήτηση περιστράφηκε γύρω από το ποιες κινήσεις μπορεί να κάνει ένας Επιπεδοχωρίτης και ποιες ένας Γραμμοχωρίτης. Σε επόμενη συνάντηση οι μαθητές χωρίστηκαν σε ομάδες και κατασκεύασαν τα δικά τους πόστερ. Δόθηκε σε κάθε ομάδα συγκεκριμένο θέμα παρουσίασης.

Αφίσα με γραμμή, τετράγωνο, κύβο (καλλιτέχνες)



Αφίσα με τρεις γενεές : τετράγωνο, πεντάγωνο, εξάγωνο

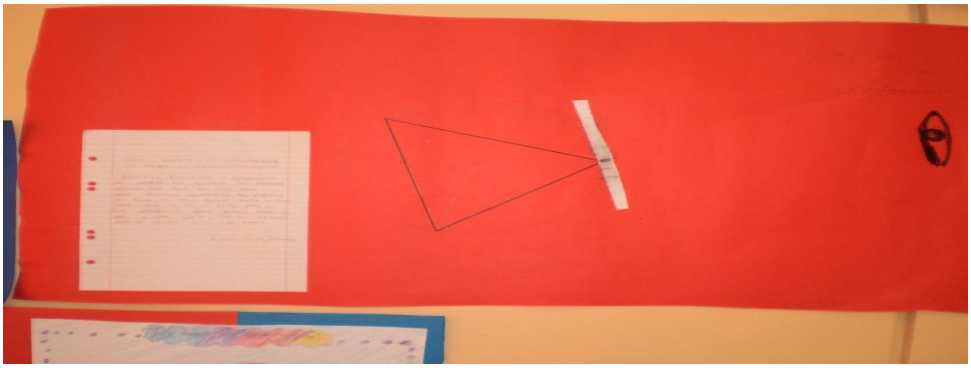
Αφίσα με κόμικς : Το όνειρο του τετράγωνου



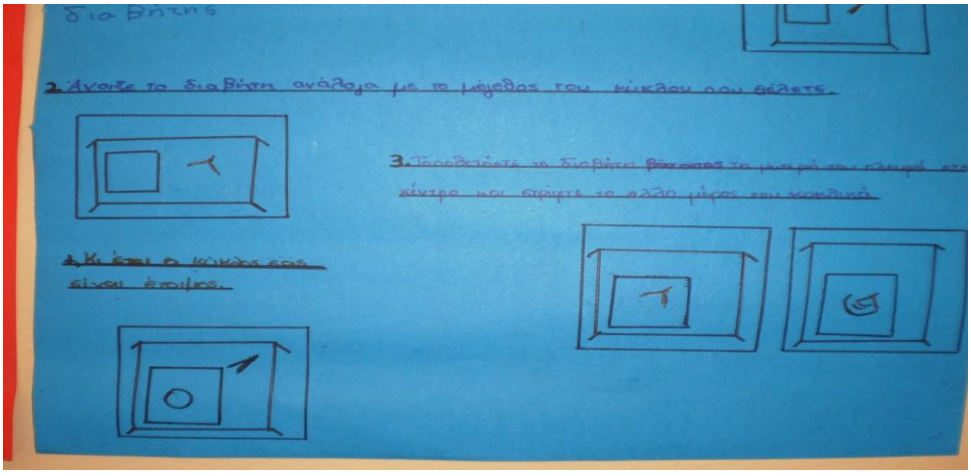
Πώς μπορείτε να αναγνωρίσετε
ένα σχήμα αν είστε επιπεδοχωρίτης.

Σκεφτείτε πώς είστε ο τετράγωνος
και μπροστά σας φαίνεται ένα ισόπλευρο
τρίγωνο. Στην αρχή θα δείτε μόνο τα
γωνία του. Όταν πλησιάσετε θα μπορείτε
να δείτε και τις πλευρές του. Το μυστικό
όμως είναι ότι θα το δείτε μέσα σε
μία χραμμή η οποία καθώς μακραίνει
θα γίνεται γίνεται όλο και πιο αχνή
γιατί οι πλευρές είναι πιο μακρά.

Νίκος Αλεξόπουλος



Αφίσα: πώς βλέπει τους άλλους ένας επιπεδοχωρίτης

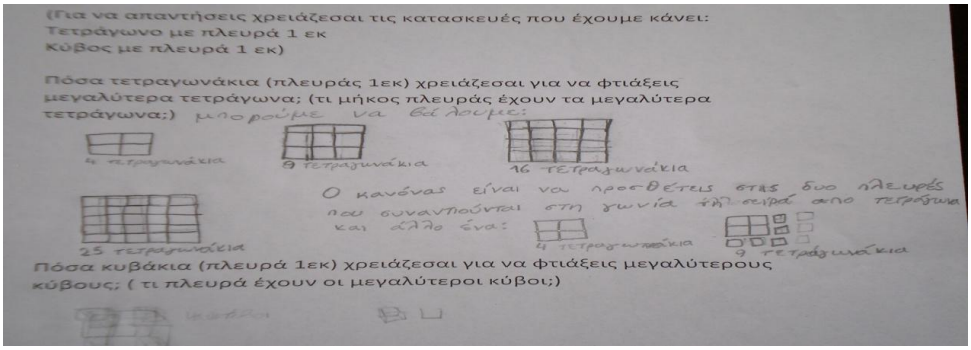


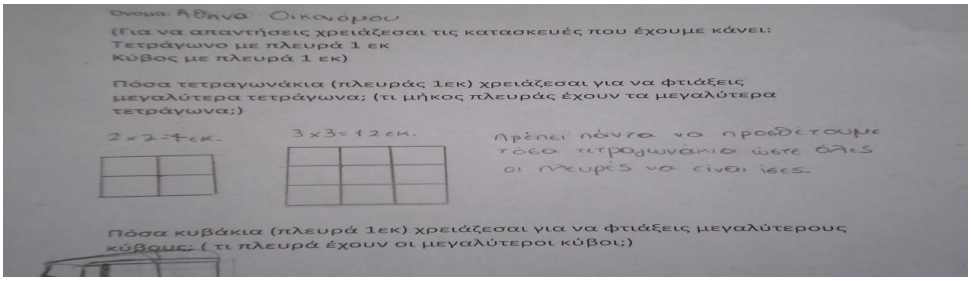
Αφίσα: Φτιάξε το δικό σου κύκλο

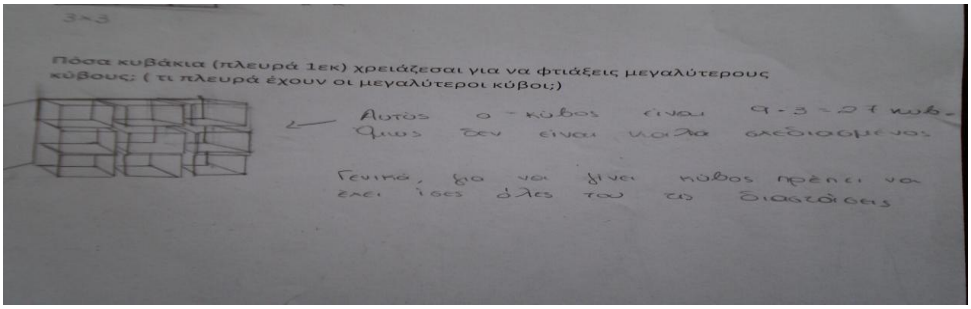
Στην ένατη συνάντηση οι μαθητές ασχολήθηκαν με την κατανόηση της μαθηματικής σκέψης του εγγονού του τετράγωνου όπως παρουσιάζεται μέσα στο βιβλίο.

«Πήρα εννέα Τετράγωνα που το καθένα είχε πλευρά μία ίντσα και τα τοποθέτησα με τέτοιο τρόπο ώστε να κατασκευάσω ένα μεγάλο τετράγωνο με πλευρά τρεις ίντσες. Έτσι απέδειξα στον εγγονό μου ότι μπορεί μεν να αδυνατούμε να δούμε το εσωτερικό ενός Τετραγώνου αλλά μπορούμε να υπολογίσουμε πόσες τετραγωνικές ίντσες περιέχει, υψώνοντας την πλευρά του στο τετράγωνο. Οπότε λοιπόν , κατέληξα, γνωρίζουμε ότι το 3×3, δηλαδή το 9, αναπαριστά τον αριθμό των τετραγωνικών ιντσών που χωρούν σ΄ένα Τετράγωνο με πλευρά μήκους τριών ιντσών»

Προσπαθώντας να κατανοήσουμε τη σκέψη του Τετράγωνου ζητήθηκε από τους μαθητές να εμπλακούν σε δραστηριότητες υπολογισμού κατασκευάζοντας τετράγωνα και κύβους με μήκος πλευράς 1 εκατοστού.







Έχοντας όλες αυτές τις εμπειρίες ζητήθηκε από τους μαθητές στις τελευταίες συναντήσεις να δημιουργήσουν τη δική τους κινηματογραφική διασκευή της Επιπεδοχώρας. Οι μαθητές χωρίστηκαν πάλι σε ομάδες. Κάθε ομάδα είχε ως στόχο να δημιουργήσει ένα ταινιάκι animation. Η πρώτη ομάδα είχε ως στόχο την εικονοποίηση της επίσκεψης του Τετράγωνου στη γραμμοχώρα. Η ομάδα είχε ως αρχική εικόνα την εικόνα που δίνεται στο βιβλίο.

Η δεύτερη ομάδα είχε ως στόχο την οπτικοποίηση της επίσκεψης της σφαίρας, ενός τρισδιάστατου όντος στην Επιπεδοχώρα. Και πάλι τα σκίτσα του βιβλίου υπήρξαν το έναυσμα για τη δουλειά των μαθητών.

Η Τρίτη ομάδα είχε ως στόχο την οπτικοποίηση της σκέψης του Τετράγωνου και του Εγγονού του. Τα παιδιά αυτής της ομάδας χρησιμοποίησαν τα τετράγωνα και τους κύβους που είχε φτιάξει η τάξη σε προηγούμενες δραστηριότητες.
Στην τάξη χρησιμοποιήθηκε για την παραγωγή της ταινίας ψηφιακή φωτογραφική σε ειδικό τρίποδα ώστε τα κάδρα της ταινίας εμψύχωσης να είναι πάντα σταθερά. Επίσης χρησιμοποιήθηκε φορητός υπολογιστής με το πρόγραμμα moviemaker που ήταν συνέχεια συνδεδεμένος με προτζέκτορα ώστε να έχει όλη η τάξη εποπτεία των ενεργειών που ακολουθούνται για την παραγωγή της ταινίας.
Για την παραγωγή της ταινίας εμψύχωσης ακολουθήθηκαν οι κλασικές διαδικασίες παραγωγικής πολυμεσικών προϊόντων (Ohler, 2008). Αφού δημιουργήθηκε η ιστορία της ταινίας από τη διασκευή του βιβλίου, οι μαθητές πέρασαν στην προπαραγωγή της ταινίας. Δημιουργήθηκαν οι ήρωες από χαρτί και πλαστελίνη και οργανώθηκαν τα υλικά που θα χρησιμοποιούνταν ως σκηνικά. Συγκεντρώθηκε ο κατάλληλος ψηφιακός εξοπλισμός στην τάξη και κατανεμήθηκαν ρόλοι στους μαθητές. Κατά την παραγωγή της ταινίας οι ομάδες δημιούργησαν τα βασικά μέρη της ταινίας. Προστέθηκαν οι ήχοι και η ταινία πήρε την πρώτη της μορφή. Στη συνέχεια προχωρήσαμε σε διαδικασίες μετά- παραγωγής (post- production). Προσθέσαμε τίτλους, μεσότιτλους, λάβαμε υπόψη την κριτική που έγινε στην τάξη και κατασκευάσαμε την ταινία στην οριστική της μορφή. Στο τέλος κανονίσαμε την προβολή της ταινίας στη γιορτή του σχολείου για την Παγκόσμια Ημέρα Παιδικού Βιβλίου.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ ΚΑΙ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Η μαθηματική λογοτεχνία φαίνεται να προσφέρει το έδαφος για τη δημιουργία γόνιμων μαθησιακών περιβαλλόντων. Δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να χειριστούν τα μαθηματικά με τέτοιο τρόπο ώστε να αποδίδουν νόημα στις ενέργειες τους με τα μαθηματικά αντικείμενα. Συγκεκριμένα μέσα από το λογοτεχνικό βιβλίο της Επιπεδοχώρας οι μαθητές ξεκινώντας από την προσπάθεια να απεικονίσουν τους κατοίκους αυτής της χώρας των δύο διαστάσεων προβληματίστηκαν ως προς τον τρόπο κατασκευής των γεωμετρικών σχημάτων. Επίσης μέσα από τις περιπέτειες του πρωταγωνιστή προσπάθησαν να φανταστούν χώρους μονοδιάστατους, δισδιάστατους, αλλά και να παρατηρήσουν το δικό μας τρισδιάστατο χώρο.

Η μετέπειτα εξέλιξη όλων των μαθησιακών τους εμπειριών στην παραγωγή αφήγησης φαίνεται να έδωσε την αίσθηση μιας ολοκληρωμένης μαθησιακής διαδρομής. Οι μαθητές χειρίστηκαν τρεις διακριτές γλώσσες τα μαθηματικά, το γραπτό λόγο, τον κινηματογράφο, οργανώνοντας την εμπειρία τους και την

εξέλιξη της σκέψης τους γύρω από δραστηριότητες που είχαν σε κάθε περίπτωση στενή σχέση με τις τέχνες.

Εκτός από το ασφαλές αλλά και επαναδιατυπωμένο συμπέρασμα της θετικής στάσης των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά μετά την ενασχόλησή τους με το βιβλίο της Επιπεδοχώρας, ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι το συγκεκριμένο βιβλίο προσφέρει τη δυνατότητα δημιουργίας δραστηριοτήτων με νόημα για τους μαθητές στο πλαίσιο των ρεαλιστικών μαθηματικών και μακριά από τη μηχανιστική επανάληψη γεωμετρικών ορισμών. Ερωτήσεις και συζητήσεις που έγιναν στην τάξη από τους μαθητές σχετικά με την ύπαρξη και άλλων διαστάσεων ή την πιθανή επίσκεψη στον τρισδιάστατο χώρο όντων τεσσάρων διαστάσεων κρίθηκαν ως ιδιαίτερα θετικές ως προς την έκβαση του εγχειρήματος.

Οι μαθητές μέσα από την εμπλοκή τους με την ψηφιακή αφήγηση μπόρεσαν να συνοψίσουν , να παρουσιάσουν και να συνδυάσουν σε μία ενιαία κοινή αφήγηση τον τρόπο που κατανόησαν το βιβλίο Επιπεδοχώρα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bandura, A (1977) *Social Learning Theory*. Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall

Bauersfeld,H (1995) "*Language games" in the Mathematics Classroom: Their Function and their Effects*. In Cobb& Bauersfeld *The emergence of mathematical meaning.* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers

Bettelheim,B(1995) *Η γοητεία των παραμυθιών*. Μια ψυχαναλυτική προσέγγιση. Εκδόσεις Γλάρος

Blumer, H.(1969) *Sympolic Interactionism: Perspective and Method.* Englewood Cliffs, NJ:Prentice Hall

Bransford,J, Brown,A, Cocking, R(2000) *How people learn.* National Academy Press Washingthon,DC

Bruner,J(2002) *Δημιουργώντας Ιστορίες: Νόμοι, Λογοτεχνία, Ζωή.* (Γ. Κουγιουμουτζάκη, Κ. Πολυδάκη &Τσούρτου, μετάφραση). Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα

Brown &Duguid (1996) *Stolen Knowledge*. In H.McLellan, *Situated Learning Perspectives*. Englewood Cliffs, NJ: Educational Technology Publications pp.47-56

Cobb, P&Yackel, E (1996) *Constructivist, Emergent and Sociocultural Perspectives in the Context of Developmental Research*. Educational Psychologist, 3 (3/4),175-190

Δοξιάδης, Α (2006) Προβάλλοντας τα μαθηματικά στην ψυχή: Η αφήγηση ως εργαλείο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Πρακτικά 6ου Διημέρου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Edwin A. Abbot (1999) *Flatland-A Romance of Many Dimensions- Η Επιπεδοχώρα*. Μετάφραση Φωτεινή Μωράκη. Εκδόσεις Αιώρα

Freudental, H (1991) *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht, The Netherlands:Kluwer

Gravemeijger,K.P.E(1990) *Context Problems and Realistic Mathematics Instuction*. In K.P.E Gravemeijer,M. van den Heuvel-Panhuizen & L.Streefland(Eds.), *Contexts, Free Productions, Tests and Geometry in Realistic Mathematics Education*, Utrecht: OW&OC, pp10-32

Kasman,A (1999) Cryptonomicon-Book Review. *Notices of the AMS.* Volume 46, Number 11.

Lampert, M (1990) *When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical Knowing and teaching*. American Educational Research Journal,27,29-63) *Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms*. In P. Cobb&H. Bauersfeld, *Emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*. Hillsdale, NJ:Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Κολέζα,Ευγενία (2009): *Θεωρία και Πράξη στη διδασκαλία των Μαθηματικών.* Αθήνα: Τόπος

Mehan, H &Wood,H (1975). *The reality of ethnomethodology*. New York: Wille

Μιχαηλίδης, Τ (2007) *Λέσχες ανάγνωσης μαθηματικού βιβλίου: Μια εναλλακτική συμπληρωματική διδακτική πρόταση*. Πρακτικά 6ου Διημέρου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών σελ.15-26. Θεσσαλονίκη: City Publish

Ohler,J (2008) *Digital Storytelling in the classroom*, UK: Corwin Press

Παπαδάτος, Πολίτης (2008) *Λογοτεχνία, Μαθηματικά και Φιλαναγνωσία*. Στο Γκίβαλου, Καλογήρου, Χαλκιαδάκη *Φιλαναγνωσία και Σχολείο* .Εκδόσεις Πατάκης

Parsons,T (1962) *The structure of Social Action*. New York: Free Press

Pea, R.D. (1993). *Practices of distributed intelligence and designs for Education*. In G. Solomon *Distributed Intellingence*. Cambridge University Press

Piaget,J (1967) *Logical operation and the social world*. In *etudes sogiologiques*. Geneva: Librairie Droz

Skinner,B(1974) *About Behaviorism*. New York:Knopf

Von Glasersfeld, E.(1987). *Learning in a constructive activity*. In C.Janvier(Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics* (σελ.3-18). Hillsdale,NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Von Glasersfeld, E.(1982). *Subotizing: The role of figural patterns in the development of numerical concepts*. *Archives de Psychology*, τεύχος 50,σελ. 191-218

Voigt,J (1998) *The culture of the mathematics classroom: Negotiating the mathematical meaning of the empirical phenomena*. In Seeger, Voigt, Waschescio *The Culture of the mathematics Classroom.* Cambridge University Press

Voigt, J (1995) *Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms*. In Cobb, P & Bauersfeld, H (Eds), *Emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures* σελ. 163-201 Hillsdale,NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Vygotsky, L (1994) *The problem of the environment*. In Renė Van der Veer& Jaan Valsiner *The Vygotsky Reader*. Blackwell Publishers

Wenger,E (1987) *Artificial Intelligence and Tutoring Systems: Computational and Cognitive Approaches to the Communication of Knowledge*. San Francisco: Morgan Kaufman Freudental,H.(1973).*Mathematics as an educational task*. Dordercht: D.Reidel Publishing Company

ΔΙΚΤΥΑΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

Θαλής και Φίλοι *http://www.thalesandfriends.org*

Εθνικό Κέντρο Βιβλίου *http://www.ekebi.gr*

sissymich@yahoo.com

[λευκή σελίδα]

ΠΟΥ ΠΑΕΙ, ΠΟΥ ΜΕ ΠΑΕΙ ΑΥΤΟ ΤΟ ΠΟΙΗΜΑ;

Αναστασία Σπανούδη & Κώστας Χατζηκυριάκου

Π.Τ.Δ.Ε. του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Εκκινώντας από το παιδικό ποίημα, Le Rond et l'étoile (Ο κύκλος και τ' αστέρι) του γάλλου ποιητή Robert Desnos (1900-45) παρουσιάζουμε ένα διαθεματικό σχολικό «συμβάν» που γεφυρώνει τη διδασκαλία των μαθηματικών με τη διδασκαλία της ιστορίας και την αισθητική καλλιέργεια.

1. ΠΟΥ ΠΑΕΙ, ΠΟΥ ΜΕ ΠΑΕΙ ΑΥΤΟ ΤΟ ΠΟΙΗΜΑ[1]

είναι ένα από τα ποιήματα της ομότιτλης με αυτό ποιητικής συλλογής του Στέλιου Βαβούρη, τα οποία ανασκαλεύουν την ίδια την πράξη της ποιητικής γραφής. Ο George Polya, στο βιβλίο του, *Η Μαθηματική Ανακάλυψη*[2], πραγματευόμενος την ιδέα της καθολικής μεθόδου του Καρτέσιου, της καθολικής *οριζόντιας μαθηματικοποίησης* ή *μαθηματικής μοντελοποίησης* θα λέγαμε ίσως σήμερα, παρουσιάζει το εξής μικρό και παλαιόθεν γνωστό πρόβλημα: Ένας αγρότης εκτρέφει κότες και κουνέλια. Αυτά έχουν συνολικά 50 κεφάλια και 140 πόδια. Πόσα είναι τα κουνέλια και πόσες οι κότες. Στη συνέχεια ο Polya παρουσιάζει τέσσερις λύσεις και τις συγκρίνει διερευνώντας ως ποιο σημείο *κατακόρυφης μαθηματικοποίησης* μπορεί να μας οδηγήσει καθεμία λύση του προβλήματος. Αν ο Βαβούρης αναρωτιέται πού με πάει αυτό το ποίημα, ο Polya μοιάζει να αναρωτιέται ως που μπορεί να μας πάει αυτό το πρόβλημα.

Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε την απόπειρά μας να διερευνήσουμε ως πού μπορεί να μας πάει ένα ποίημα στον σχεδιασμό και την υλοποίηση μιας ενιαιοποιημένης προσέγγισης στη μάθηση και τη διδασκαλία. Ως πού μπορεί να μας πάει ένα ποίημα τόσο οριζόντια, σε σχέση με το πλάτος της συζητούμενης γνώσης και της ευρύτερης καλλιέργειας του νου και των αισθήσεων όσο και κατακόρυφα, ως προς το βάθος τους.

Πρόκειται για ένα ποίημα που ο γάλλος ποιητής Robert Desnos αφιέρωσε στον γιο του συνθέτη Darius Milhaud και συμπεριλαμβάνεται στη συλλογή του που τιτλοφορείται *La Géometrie de Daniel*[3]. Το ποίημα (σε ελληνική απόδοση Κώστα Χατζηκυριάκου):

Ο κύκλος και τ' αστέρι

Για να σχεδιάσεις ένα αστέρι με πέντε ακτίνες
Ή με έξι ή και με περισσότερες ακόμη
Πρέπει πρώτα να σχεδιάσεις έναν κύκλο
Για να σχεδιάσεις ένα αστέρι με πέντε ακτίνες . . .
Έναν κύκλο!
Αλλά χωρίς καμιά προετοιμασία
Σχεδιάσαμε ένα δένδρο με πολλά κλαδιά

---

[1] Σταύρος Βαβούρης, *ΠΟΥ ΠΑΕΙ, ΠΟΥ ΜΕ ΠΑΕΙ ΑΥΤΟ ΤΟ ΠΟΙΗΜΑ*, σ.34, ΕΡΜΗΣ, Αθήνα, 1985.

[2] George Polya, *Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΚΑΛΥΨΗ*, τ.1, σ. 42-6, (μετ. Σ. Σεργάκης - Γ. Τσαπακίδης), ΕΚΔΟΣΕΙΣ κάτοπτρο, Αθήνα, 2001.

[3] Robert Desnos, *Destinée arbitraire*, σ. 147, Gallimard, 1975.

Κλαδιά που κρύβουν τα αστέρια!
Δένδρα!
Είστε γεμάτα φωλιές και ωδικά πουλιά
Καλυμένα με κλαδιά και φύλλα
Κι ανεβαίνετε ως τ' αστέρια!

Γύρω από το ποίημα αυτό σχεδιάστηκαν δύο διαφορετικά πακέτα δραστηριοτήτων. Το ένα πακέτο απευθύνεται στην έκτη τάξη του δημοτικού σχολείου και το άλλο σε μεγάλες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Το εγχείρημά μας μολονότι εντάσσεται στον προβληματισμό και τους πειραματισμούς της διαθεματικής προσέγγισης[4], διαφοροποιείται στο ότι η ενιαιοποίηση δεν γίνεται με τη μελέτη μιας έννοιας σε διάφορα γνωτικά πεδία ταυτόχρονα, αλλά με το να ακολουθούμε το ποίημα σε διάφορα πεδία της ανθρώπινης γνώσης και δραστηριότητας. Ειδικότερα, το ερώτημα που μας καθοδήγησε στον σχεδιασμό των φύλλων εργασίας ήταν: Τι είδους διδασκαλία και μάθηση μπορούμε να έχουμε ακολουθώντας το ποίημα αυτό στο πεδίο των τεχνών, των μαθηματικών, της ιστορίας;

2. ΟΙ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ.

Για να αναδείξουμε την ανάγνωση ως μία κύρια πρακτική στη διδασκαλία και τη μάθηση, στην πρώτη δραστηριότητα ζητάμε από τα παιδιά να διαβάσουν το ποίημα.

Η δεύτερη δραστηριότητα δίνει τον τίτλο του ποιήματος στη γλώσσα που γράφηκε (Le Rond et l' Étoile) και ζητά πρώτα να την αναγνωρίσουν και δεύτερον να αντιστοιχίσουν τις λέξεις Rond και Étoile με τις αντίστοιχες ελληνικές. Ανοιγόμαστε επομένως στη γλωσσική διάσταση της διδασκαλίας και της μάθησης.

Από τα είκοσι τρία παιδιά του 1ου τμήματος μόνον ένα δεν μπόρεσε να κάνει την αντιστοίχιση και από τα δεκαέξι του 2ου τρία ("δεν ξέρω", κενό, "rond σημαίνει μαθητές").

Σε ένα μεγαλύτερο *πρόζεκτ*, με παιδιά που επιλέγουν γαλλικά στο σχολείο, αυτή η απλή γλωσσική, μεταφραστική άσκηση θα μπορούσε βέβαια να αντικατασταθεί με τη μετάφραση ολόκληρου του ποιήματος.

---

[4] "Με τον όρο 'διαθεματική προσέγγιση' εννοούμε εκείνη τη μορφή διδασκαλίας κατά την οποία από τη μία το περιεχόμενο της διδασκαλίας ενιαιοποιείται και από την άλλη η διδασκαλία είναι εργαστηριακής και ευρηματικής μορφής", Χ. Θεοφιλίδης, *ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ*, σ.11, Εκδόσεις Γρηγόρη, Αθήνα 2002.

Η τρίτη δραστηριότητα δίνει την ημερομηνία γέννησης και την ημερομηνία θανάτου του συγγραφέα και ζητά να υπολογιστεί η ηλικία του. Με τη δραστηριότητα αυτή αγγίζουμε τον ιστορικό χρόνο.

Είκοσι ένα παιδιά του 1ου τμήματος έκαναν αφαίρεση ακεραίων και απάντησαν ότι πέθανε 45 χρονών, ένα απάντησε 45 χρονών και 4 μηνών και ένα επιχειρώντας προφανώς να κάνει αφαίρεση συζυγών προχώρησε στον εξής υπολογισμό:

8	6	1945
9	7	1900
3	9	45

Από τα δεκαέξι παιδιά του 2ου τμήματος εννέα απάντησαν 45 χρονών, με αφαίρεση ακεραίων, ένα δεν απάντησε καθόλου, ενώ οι διάφορες απόπειρες για μεγαλύτερη ακρίβεια έδωσαν λανθασμένα αποτελέσματα. Έτσι, ένα απάντησε "45 χρονών 12 μήνες", δύο απάντησαν 45 χρονών 2 μηνών και 4 ημερών, ένα "45 χρονών 11 μήνες 334 μέρες", ένα "45 χρονών 11 μήνες και 336 μέρες", ένα "45 χρ 541 μήνες 16429 μέρες". Για μιαν ακόμη φορά βλέπουμε την τεχνική να παραγκωνίζει το νόημα, φαινόμενο που η έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση έχει εντοπίσει πολλές φορές κι έχει ονοματίσει ως "αναστολή νοήματος".

Η τέταρτη δραστηριότητα εντάσσει το ποίημα και τον ποιητή του μέσα στο ιστορικό και καλλιτεχνικό πλαίσιο του. Αρχίζει ζητώντας από τα παιδιά να γράψουν μεγάλα ιστορικά γεγονότα που συνέβησαν στη διάρκεια της ζωής του ποιητή και έτσι μας φέρνει στον χώρο της ιστορίας.

Στο 1ο τμήμα τα παιδιά δεν μπορούσαν να απαντήσουν στο ερώτημα αυτό. Στο 2ο τμήμα έξι δεν απάντησαν καθόλου. Ένα έγραψε ότι έγινε "η Επανάσταση του 1821", ένα άλλο ανάμεσα σε σωστές απαντήσεις πρόσθεσε και "το τείχος του Βερολίνου", έξι κατέγραψαν τον δεύτερο και τον πρώτο παγκόσμιο πόλεμο, δύο τη ρίψη της ατομικής βόμβας ("στο Ναγκασάκι", μάλιστα προσδιόρισε το ένα), ένα τον τορπιλισμό της Έλλης και ένα "τον πόλεμο του 1940 με τους Ιταλούς". Ενδιαφέρουσες ήταν οι καταγραφές "η ανακάλυψη του αεροπλάνου" και "ο Ρομπέρ Ντεσνός έχει γράψει ένα γαλλικό ποίημα" που ορθά (αν και στη δεύτερη περίπτωση ίσως από αμηχανία) αναγνωρίζουν τεχνολογικά ή καλλιτεχνικά συμβάντα ως σημαντικά ιστορικά γεγονότα.

Η τέταρτη δραστηριότητα συνεχίζεται ζητώντας από τα παιδιά να εικάσουν που είναι φωτογραφημένος ο ποιητής σε δύο φωτογραφίες εποχής. Η φωτογραφική τέχνη έρχεται να βοηθήσει την κατανόηση του ιστορικού χρόνου.

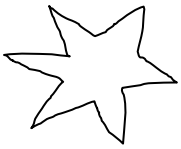
Στο 1ο τμήμα, ένα παιδί δεν απάντησε, τα υπόλοιπα απάντησαν ότι στην αριστερή βρίσκεται σε καφετέρια και στη δεξιά στη φυλακή (με εξαίρεση ένα που έγραψε "στη λαϊκή", ίσως λόγω της στάσης του ποιητή που θυμίζει τη στάση που έχουν συχνά πωλητές και πωλήτριες στις λαϊκές). Στο 2ο τμήμα ένα δεν απάντησε καθόλου, τέσσερα δεν απάντησαν για τη δεξιά φωτογραφία, ένα προφανώς δεν τήρησε τη συμφωνία να μην κοιτά τις παρακάτω σελίδες, και έγραψε ότι είναι σε στρατόπεδο στην Τσεχοσλαβακία, ένα έγραψε στον πόλεμο, ένα άλλο ότι στη φωτογραφία ο ποιητής απεικονίζεται να φτιάχνει ένα βιβλίο και τα υπόλοιπα έγραψαν ότι ο ποιητής είναι στη φυλακή. Αναφορικά με την αριστερή φωτογραφία, εννέα απάντησαν σε εστιατόριο ή καφενείο, ένα σε πανηγύρι, δύο σε συνέδριο, ένα ότι δίνει συνέντευξη, ένα σε «ένα καλό μέρος και πλούσιο», ένα ότι παίρνει το πρωινό του κι ένα ότι είναι σε διαφήμιση (ίσως λόγω του κουτιού Quaker).

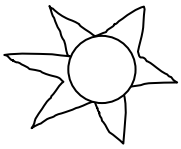
Το πακέτο με τα φύλλα εργασίας συνεχίζεται με α. μια σύντομη βιογραφία του ποιητή, που δίνει και την απάντηση στο ερώτημα των φωτογραφιών, και εν μέρει στο ερώτημα για τα ιστορικά γεγονότα β. μία αναπαραγωγή του περίφημου πίνακα Γκουέρνικα του Πικάσο (που τη γνώριζαν σχεδόν όλα τα παιδιά) γ. μια συντομότατη αναφορά στον σουρεαλισμό ως καλλιτεχνικό κίνημα. Η Γκουέρνικα, σε αντιδιαστολή με ζωγραφιές ρεαλιστικής τεχνοτροπίας που υπήρχαν στην τάξη, χρησίμευσε σαν παράδειγμα σουρεαλιστικής τέχνης.

Η πέμπτη και η έκτη δραστηριότητα μας ξαναγυρίζουν στο ποίημα, και στους πρώτους στίχους του, καθώς ζητάμε από τα παιδιά να σχεδιάσουν ένα αστέρι με έξι ακτίνες. Ο σχεδιασμός είναι μια πρακτική που «πατά» και στον

χώρο των καλών τεχνών και σχετίζεται με την αισθητική καλλιέργεια και στον χώρο των μαθηματικών και σχετίζεται με την απόκτηση γεωμετρικών δεξιοτήτων.

Στο 2ο τμήμα, οκτώ παιδιά σχεδίασαν ένα σκαληνό σχήμα, σαν αυτό που απεικονίζεται αριστερά, ένα ζωγράφισε αστέρι με τέσσερις ακτίνες, τέσσερα σχεδίασαν (μόνον ή και μεταξύ άλλων) το άστρο του Δαυίδ, βάζοντας δύο τρίγωνα το ένα πάνω, και αντεστραμμένο ως προς, στο άλλο (ένα από αυτά το τοποθέτησε μέσα σε κύκλο) κι έξι σχεδίασαν μόνον, ή μεταξύ άλλων, παραλλαγές του σχήματος που απεικονίζεται στα δεξιά.





Η έκτη δραστηριότητα ζητά από τα παιδιά να εικάσουν γιατί το ποίημα λέει ότι για σχεδιάσουμε ένα αστέρι με πέντε ή έξι ακτίνες πρέπει να σχεδιάσεις πρώτα έναν κύκλο.

Στο 2ο τμήμα τρεις δεν απαντούν, εφτά απαντούν με κύρια αναφορά τη συμμετρία ή την ομορφιά ("πιο ίσο", "πιο συμμετρικό", "πιο ωραίο"), ένα γράφει "για να μας μπερδέψει", πέντε απαντούν με κύρια αναφορά την τεχνική, χωρίς ωστόσο να είναι σαφές τι εννοούν.

Στην πέμπτη δραστηριότητα, στο 1ο τμήμα εννέα παιδιά είχαν σχεδιάσει αστέρια σαν το επάνω αριστερά (αλλά μόνον ένα είχε μόνον αυτό το είδος). Με εξαίρεση και ένα που σχεδίασε ένα σαν το δεξί και μόνον, όλα τα υπόλοιπα είχαν και το άστρο του Δαυίδ, οπότε δεν είναι δυνατόν να συμπεράνουμε με ασφάλεια το ποσοστό αυτών που το σχεδίασαν εξαρχής. Πέντε πάντως είχαν το άστρο του Δαυίδ μέσα σε κύκλο.

Στην έκτη δραστηριότητα, στο 1ο τμήμα, δύο δεν απαντούν, δεκατρία απαντούν με κύρια αναφορά την ισότητα των πλευρών ή των ακτίνων ή την ορθότητα της θέσης του αστεριού και τα υπόλοιπα με κύρια αναφορά τη βοήθεια στην κατασκευή που παρέχει ο κύκλος ("γιατί έχει μοίρες" γράφει ένα, "γιατί έχει ακτίνες" γράφει άλλο, "γιατί στον κύκλο μπορείς να σχεδιάσεις οτιδήποτε" γράφει ένα τρίτο, "για να σχεδιάσουμε πιο εύκολα τα δύο τετράγωνα (sic) μέσα στον κύκλο" γράφει ένα τέταρτο, εννοώντας τα δύο τρίγωνα με τα οποία μπορούμε να σχεδιάσουμε το άστρο του Δαυίδ!).

Η έβδομη δραστηριότητα ζητά να σχεδιάσουν ένα ισόπλευρο τρίγωνο και η όγδοη ένα κανονικό εξάγωνο (και στα δύο σχήματα όλες οι πλευρές και όλες οι γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους). Με τις δύο διαδοχικές αυτές

δραστηριότητες σκοπός μας ήταν να δείξουμε τη δυσκολία που έχει ο σχεδιασμός του δεύτερου σε σχέση με τον σχεδιασμό του πρώτου.

Όπως αναμενόταν όλα τα παιδιά κατόρθωσαν να σχεδιάσουν το ισόπλευρο κάνοντας δοκιμές με τον χαράκα τους, ενώ, με εξαίρεση ένα στο 2ο τμήμα (που άρχισε να σχεδιάζει έξι ίσα ισόπλευρα τρίγωνα, με την αριστερή πλευρά του καθενός να ταυτίζεται με τη δεξιά του διαδοχικού του, που συνέλαβε δηλαδή τη σχεδιαστική αρχή για το κανονικό εξάγωνο), τα υπόλοιπα συνειδητοποίησαν ότι δεν ήταν εύκολο να ρυθμίζουν ταυτόχρονα την ισότητα των πλευρών και των γωνιών.

Η ένατη δραστηριότητα καθοδηγεί τα παιδιά στην κατασκευή ενός κανονικού εξαγώνου και κατ' επέκταση ενός κανονικού αστεριού με έξι ακτίνες. Πρόκειται για την ίδια μέθοδο που δίνει και το βιβλίο της έκτης Δημοτικού.

Και στα δύο τμήματα παρουσιάστηκαν τα ίδια προβλήματα. Αν και οι έννοιες και οι όροι που απαιτούνται για την κατασκευή είναι μέρος της ύλης της πέμπτης Δημοτικού, υπήρξαν σημαντικά εμπόδια κατανόησης. π.χ τα παιδιά δυσκολεύτηκαν να κατανοήσουν τί σημαίνει το «πάρε ένα σημείο πάνω στην περιφέρεια» ή «σημείωσε πάνω στην περιφέρεια σημεία που ισαπέχουν». Ακόμη και όταν αυτά εξηγήθηκαν, και στα δύο τμήματα προέκυψε το πρόβλημα τα παιδιά να μην ακολουθούν ευχερώς τις δοσμένες οδηγίες. Χρειάστηκε να υπενθυμήσουμε στα παιδιά τα βασικά χαρακτηριστικά του κύκλου και το τι σημαίνει σημείο επί της περιφέρειας και χορδές με ίσο μήκος για να μπορέσουν να σχεδιάσουν, τελικά τα περισσότερα παιδιά, το κανονικό εξάγωνο και το αστέρι με τις έξι ακτίνες.

Στη συνέχεια του πακέτου, με αφορμή το αστέρι με τις έξι ακτίνες γίνεται αναφορά στον ναζισμό που υποχρέωσε τους Εβραίους να φορούν το κίτρινο άστρο του Δαυίδ και στους Θεσσαλονικείς Εβραίους που εξοντώθηκαν. Ζητείται από τα παιδιά να υπολογίσουν τον αριθμό των επιζώντων Εβραίων της Θεσσαλονίκης, όταν εκτοπίζονται 56000 και το 90% τους εξοντώνεται.

Στο 1ο τμήμα, δεκαπέντε παιδιά απάντησαν σωστά, τρία έγραψαν ότι το 10% του 56000 είναι το 560, δύο απάντησαν 5400, ένα 55990 = (56000 μείον 10), ένα έγραψε μόνον 10%, ένα δεν απάντησε.

Στο 2ο τμήμα, όλα τα παιδιά πλην ενός απάντησαν σωστά (αλλά εδώ είναι πιθανό να συμπληρώθηκε εκ των υστέρων).

Στην ίδια σελίδα του πακέτου υπάρχει η παραπάνω απεικόνιση πίνακα της επιζώσας του στρατοπέδου Helga Weissova-Hoskova. Αυτό αποσκοπεί από τη μια να γίνει συζήτηση γύρω από τα στρατόπεδα συγκέντρωσης, αλλά και να συγκριθεί η ρεαλιστική τεχνοτροπία αυτού του πίνακα με τη σουρεαλιστική της Γκουέρνικα του Πικάσο.

Η τελευταία δραστηριότητα ζητά από τα παιδιά να ζωγραφίσουν την εικόνα που δημιουργήθηκε στον νου τους διαβάζοντας το ποίημα.

Υπήρξε πρόβλημα χρόνου και στα δύο τμήματα. Ορισμένα παιδιά επέλεξαν να μείνουν μέσα στο διάλειμμα για να ζωγραφίσουν, αλλά άλλα ήταν κουρασμένα και ίσως ζωγράφισαν κάπως διαδικαστικά. Στο 2ο τμήμα εφτά παιδιά ζωγράφισαν αστέρια σαν το άστρο του Δαυίδ, ενώ δεν είχαν ζωγραφίσει έτσι το εξάκτινο αστέρι στην 5η δραστηριότητα. Λόγω της αβεβαιότητας της καταγραφής στην 5η δραστηριότητα στο 1ο τμήμα, δεν έχει νόημα η σύγκριση με τις ζωγραφιές, καταγράφουμε μόνον ότι δέκα παιδιά του τμήματος αυτού δεν ζωγράφισαν τίποτα.

Στο 2ο τμήμα, με το τέλος των δραστηριοτήτων έγινε συζήτηση που βιντεοσκοπήθηκε. Τα παιδιά ρωτήθηκαν πώς τους φάνηκε αυτός ο τρόπος διεξαγωγής του μαθήματος και πώς θα περιγράφαν αυτό που κάναμε. Πολλά απάντησαν αμέσως ότι κάναμε μαθηματικά και στο ερώτημα γιατί πιστεύουν κάτι τέτοιο η μία μαθήτρια έδωσε χαρακτηριστικά την απάντηση "αφού είχε ασκήσεις". Ωστόσο η πολύ συχνά δοσμένη απάντηση "κάναμε μαθηματικά" πρέπει να σχετίζεται με το ότι η δασκάλα είχε πει στα παιδιά την προηγούμενη ότι θα επισκεφτεί την τάξη ένας μαθηματικός. Όταν τους αντιτάξαμε ότι ξεκινήσαμε με ένα ποίημα, ότι μιλήσαμε για ιστορία, είδαμε πίνακες, φωτογραφίες και μιλήσαμε για ζωγραφική, πρόσθεσαν "κάναμε και

ιστορία και γλώσσα" κι ένας μαθητής είπε "λίγο απ' όλα". Σε σχέση με τον τρόπο διεξαγωγής του μαθήματος, ορισμένα παιδιά είπαν ότι δεν τους άρεσε το πολύ γράψιμο που χρειαζόταν να κάνουν, και η συζήτηση γύρω από, και οι απαντήσεις στο ερώτημα, τι τα άρεσε και τι όχι, ανάδειξαν έναν στερεοτυπικό σχεδόν διχασμό μεταξύ αγοριών και κοριτσιών, καθώς τα περισσότερα από τα πρώτα που μίλησαν είπαν ότι τους άρεσε το ότι κάναμε μαθηματικά και ότι δεν τους αρέσει "η γλώσσα", ενώ τα κορίτσια είπαν ότι αυτό που δεν τους άρεσε ήταν ότι «κάναμε μαθηματικά».

3. ΟΙ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ.

Το πακέτο με τα φύλλα εργασίας που σχεδιάσαμε για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση το δοκιμάσαμε σε μία ομάδα παιδιών που οιτούν σε πρόγραμμα Διεθνούς Απολυτηρίου και έχουν επιλέξει για τις εξετάσεις τους το μάθημα της Νεοελληνικής Λογοτεχνίας. Η πρώτη δραστηριότητα ζητά πάλι από τα παιδιά να διαβάσουν το ποίημα.

Η δεύτερη δραστηριότητα, κάπως διαγνωστικά, ζητά από τα παιδιά να γράψουν οτιδήποτε γνωρίζουν για τον ποιητή Robert Desnos.

Δύο από τα δεκαοκτώ δεν απάντησαν, ενώ τα υπόλοιπα έγραψαν ότι είναι ποιητής (δύο πρόσθεσαν ότι ίσως είναι και μαθηματικός, αρκετά ότι ήταν ο συγγραφέας του ποιήματος που διάβασαν) και ανέφεραν το πότε έζησε (που δινόταν στο φύλλο εργασίας). Ερμήνευσαν, δηλαδή, το ερώτημα λιγότερο ως ερώτημα γνώσεων και περισσότερο ως λογική πρόκληση.

Η τρίτη δραστηριότητα ζητά να αναφέρουν σημαντικά γεγονότα που συνέβησαν στη διάρκεια της ζωής του ποιητή μεταφέροντας μας πάλι στον ιστορικό χρόνο. Δίπλα στις αναμενόμενες απαντήσεις πρώτος και δεύτερος παγκόσμιος πόλεμος), υπήρχαν δύο «δεν ξέρω», μία αναφορά στο Ολοκαύτωμα, αρκετές αναφορές στο "οικονομικό κραχ" (λόγω προσανατολισμού σπουδών, αλλά και συγκυρίας), αναφορές σε καλλιτεχνικά κινήματα (π.χ. ντανταϊσμός) ή συγγραφείς που έζησαν τότε (π.χ Γούλφ), σε επιστημονικές ή τεχνολογικές εξελίξεις «ανακαλύψεις στον τομέα της πυρηνικής και της κβαντικής φυσικής», αλλά και οι καταγραφές διαφορετικών παιδιών "Ανεξαρτησία Ελληνικού κράτους" και "Πρώτος άνθρωπος στο φεγγάρι (Armstrong)"! Παρατηρούμε και πάλι ότι στα ιστορικά γεγονότα συμπεριλαμβάνουν σημαντικές εξελίξεις στις τέχνες, τις επιστήμες και την τεχνολογία, κι επομένως φαίνεται να έχει σιγά σιγά επικρατήσει μια αντίληψη της ιστορίας που δεν περιορίζεται στην πολιτική ή πολεμική αφήγηση.

Η σύντομη παρουσίαση της ζωής του ποιητή που ακολουθεί κλείνει με το ερώτημα ποιος ήταν ο συγγραφέας του περίφημου σουρεαλιστικού μυθιστορήματος *Nadja*, καθώς στο βιβλίο αυτό περιέχονται και φωτογραφίες του Desnos που τράβηξε ο Man Ray. Το ερώτημα δεν απαντήθηκε.

Η τέταρτη δραστηριότητα ζητά να περιγράψουν εν συντομία τα χαρακτηριστικά του σουρεαλισμού, να αναφέρουν εκπρόσωπους του σε διάφορες τέχνες, να αναφέρουν δύο Έλληνες ποιητές σουρεαλιστές και να γράψουν κάποιους στίχους τους. Υπήρχαν δύο "δεν γνωρίζω". Τα υπόλοιπα παιδιά απάντησαν με ποικίλους βαθμούς επάρκειας, στα πρώτα ερωτήματα, αλλά αξίζει να παρατηρηθεί ότι μόνον τέσσερα ανέφεραν Έλληνες σουρεαλιστές (τους Εμπειρίκο, και Εγγονόπουλο εν προκειμένω) και μόνον ένα ανάφερε την ποιητική συλλογή «Υψικάμινος» του πρώτου. Δεν γνώριζαν κανένα στίχο τους. Κατά τη φιλόλογο καθηγήτρια που παρευρισκόταν, η κουλτούρα της απομνημόνευσης ποιημάτων δεν καλλιεργείται. Σε συζήτηση με τα παιδιά, αρκετά πάντως γνώριζαν καβαφικούς στίχους.

Το πέμπτο ερώτημα ζητά να χαρακτηριστεί η τεχνοτροπία του πίνακα της Helga Weissova-Hoskova που ήδη αναφέραμε, εφτά απάντησαν ρεαλιστικής τεχνοτροπίας, δύο δεν απάντησαν, δύο δεν είδαν προοπτική, και υπήρξαν και οι απαντήσεις "ιμπρεσιονισμός", "φωβισμός" και "σουρεαλισμός".

Μετά από σύντομη αναφορά στο Ολοκαύτωμα και στη μοίρα των 56000 Εβραίων της Θεσσαλονίκης, ακολουθεί το (έκτο) ερώτημα, «γιατί το ποίημα λέει ότι για να σχεδιάσουμε ένα πεντάκτινο ή εξάκτινο αστέρι πρέπει να σχεδιάσουμε έναν κύκλο;» και ακολουθεί η έβδομη δραστηριότητα στην οποία ζητείται από τα παιδιά να σχεδιάσουν ένα κανονικό αστέρι με έξι ακτίνες.

Στο έκτο ερώτημα δεν απάντησαν τρία, και οι υπόλοιπες απαντήσεις κυρίως επιχειρούν να υποστηρίξουν ότι ο σχεδιασμός του κύκλου θα οδηγήσει στην κανονικότητα του αστεριού (λ.χ. "ο κύκλος εξασφαλίζει ότι οι κορυφές των 5 ή 6 ακτίνων απέχουν το ίδιο από το κέντρο του κύκλου, και συνεπώς το κεντρικό σημείο της συμμετρίας του αστεριού"). Ενδιαφέρον είναι όμως το γεγονός ότι, σε αντιδιαστολή με την ίδια ερώτηση στο Δημοτικό, υπάρχουν και προσπάθειες ο στίχος να μην ερμηνευτεί μόνον μαθηματικά. Ιδού μερικές τέτοιες απαντήσεις «ο κύκλος μπορεί να εννοεί την ενότητα των εβραίων της εποχής", ή «ο κύκλος ίσως ως σύβολο ενότητας», ή «για να υπάρχει διαχωρισμός (π.χ. θρησκειών) πρέπει πρώτα να υπάρχει ένα σύνολο (ο κύκλος)» ή «ο κύκλος μπορεί να αναφέρεται και σε έναν κύκλο ανθρώπων, όπως οι εβραίοι», ή «μπορεί να αναφέρεται και στον ήλιο, ο οποίος φωτίζει τα αστέρια και τους δίνει ζωή, αλλά και αναδεικνύει σε συμβολικό επίπεδο την προεργασία»).

Στο έβδομο ερώτημα μόνον οκτώ κατορθώνουν να σχεδιάσουν ένα αστέρι κανονικό ή περίπου τέτοιο. Διαπιστώνεται δυσκολία χρήσης του διαβήτη και σε αυτήν την ηλικία.

Στην επόμενη δραστηριότητα, όπου δίνεται η διαδικασία κατασκευής ενός κανονικού εξαγώνου και τους ζητείται να δουν και να σχεδιάσουν μέσα στο εγγεγραμμένο στον κύκλο εξάγωνο το κανονικό αστέρι με τις έξι ακτίνες, οκτώ παιδιά και πάλι δεν κατορθώνουν να το δουν και να το σχεδιάσουν. Αξίζει να σημειώσουμε ότι το πρόγραμμα που ακολουθούν δεν έχει γεωμετρία στις μαθηματικές επιλογές τους (οπότε ευκλείδεια γεωμετρία άκουσαν τελευταία φορά στην πρώτη λυκείου), ενώ ευκλείδεια γεωμετρία δεν υπάρχει ούτε στα πιο προχωρημένα μαθηματικά που παίρνουν ορισμένα.

Η επόμενη δραστηριότητα αφορά τον περίφημο (και συνάμα διαβόητο) πίνακα του Νταλί, *Το Μυστήριο του Μυστικού Δείπνου* (1955), που ο καμβάς του έχει το σχήμα ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις που ο λόγος τους είναι η χρυσή τομή, $\frac{\mu}{\pi} = \frac{\pi}{\mu - \pi}$. Ζητείται ο υπολογισμός της.

Αρκετά παιδιά, άρχισαν να μετρούν με τον χάρακά τους τις διαστάσεις της δοσμένης απεικόνισης για να κάνουν την αριθμητική διαίρεση. Μόνον τέσσερα αντιμετώπισαν το πρόβλημα αλγεβρικά και κατόρθωσαν να λύσουν τη δευτεροβάθμια, υπολογίζοντας το σωστό αποτέλεσμα.

Στον πίνακα αυτόν, τον Ιησού και τους μαθητές του φαίνεται να τους περιβάλλει ένα στερεό του οποίου οι έδρες είναι κανονικά πεντάγωνα (κι εδώ ξαναβρίσκουμε το αρχικό ποίημα). Το στερεό δεν απεικονίζεται ολόκληρο, οπότε, στην επόμενη δραστηριότητα ζητείται από τα παιδιά να εικάσουν πόσες έδρες έχει και να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Μόνον έξι απάντησαν δώδεκα και κανένα δεν έδωσε επαρκή αιτιολόγηση.

Η δραστηριότητα αυτή μας σκοπό έχει να μας οδηγήσει στο δέκατο τρίτο βιβλίο του Ευκλείδη και στα πλατωνικά στερεά.

Η επόμενη δραστηριότητα ζητά τον σχεδιασμό ενός κανονικού πενταγώνου.

Εδώ η αποτυχία ήταν ολική, αλλά αναμενόμενη, δεδομένου ότι, ήδη από την πολύ ευκολότερη δραστηριότητα του σχεδιασμού του κανονικού εξαγώνου, είχε φανεί ότι τα παιδιά δεν ήταν εξοικειωμένα με την ευκλείδεια γεωμετρία.

Το πακέτο ολοκληρώνεται με την περιγραφή μιας μεθόδου κατασκευής του κανονικού πενταγώνου και του κανονικού αστεριού με πέντε ακτίνες.

Δεν υπήρξε χρόνος να ασχοληθούν τα παιδιά με αυτήν την δραστηριότητα. Εν συντομία παρουσιάστηκε η λύση ώστε να αναδειχθεί η εσωτερική λογική του πακέτου.

Στο ερώτημα του τι κάναμε στο μάθημα αυτό, τα παιδιά απάντησαν με διάφορους τρόπους ότι τους φάνηκε ενδιαφέρον το ότι επιχειρήσαμε να συνδέσουμε διαφορετικούς τομείς της γνώσης («Μου άρεσε ο συσχετισμός λογοτεχνίας με τη ζωγραφική», «Είδαμε ότι τα μαθηματικά υπάρχουν ουσιαστικά στις τέχνες (ζωγραφική και λογοτεχνία) και δεν είναι κάτι διαφορετικό. Μου άρεσε πάρα πολύ το μάθημα αυτό, αν και με τα μαθηματικά και το σχεδιασμό δεν έχω την καλύτερη σχέση», «[Είδαμε] πώς συνδυάζεται η τέχνη με την επιστήμη», «Κάναμε μαθηματικά μέσα από την τέχνη», «[Είδαμε] πώς τα μαθηματικά συνδέονται με τη λογοτεχνία», «Εφαρμογή μαθηματικών στην τέχνη», «Σήμερα προσπαθήσαμε να ερευνήσουμε πώς τα γενικότερα χαρακτηριστικά μιας εποχής μπορούν να οδηγήσουν σε δημιουργία σχέσεων μεταξύ διαφορετικών κλάδων και αντικειμένων», «Πολύ ωραία και εξαιρετικά ενδιαφέρουσα η μετάβαση από την τέχνη και τον υπερρεαλισμό στα μαθηματικά, παρότι δεν με ελκύουν τα μαθηματικά (συνήθως)»). Η καθηγήτρια που με κάλεσε δεν είχε αποκαλύψει σκοπίμως στα παιδιά την ειδικότητά μου. Όταν της ζήτησα να το διερευνήσει την επόμενη ημέρα, κανένα παιδί δεν υποστήριξε ότι είμαι μαθηματικός. Μάλιστα υποστήριξαν ότι το είδος των μαθηματικών που κάναμε θα μπορούσε να τα κάνει ο καθένας, σε αντιδιαστολή –φαντάζομαι- με τις ασκήσεις ανάλυσης για εξετάσεις που βρίθουν τεχνασμάτων και αναπόφευκτα δημιουργούν μιαν ορισμένη παραπλανητική εικόνα του μαθηματικού προβλήματος.

4. ΠΟΥ ΠΗΓΕ, ΩΣ ΠΟΥ ΠΗΓΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΠΟΙΗΜΑ;[5]

Αν μείνουμε στο περιεχόμενο της διδασκαλίας και της μάθησης, είναι φανερό ότι το ποίημα μας οδήγησε στις περιοχές των μαθηματικών, της τέχνης και της ιστορίας που προσδιόρισαν εν μέρει οι συγκεκριμένες δραστηριότητες και, εν μέρει, οι υποκειμενικότητες των διδασκόντων και των διδασκόμενων και η συνάντησή τους κάτω από τις συγκεκριμένες συνθήκες των συγκεκριμένων σχολικών τάξεων, στις οποίες επίσης αυτό μας πήγε. Τι είδαμε όμως εκεί;

Τα αποτελέσματα από τη διαγνωστική χρήση των δραστηριοτήτων[6] που σχεδιάσαμε με βάση την αρχή της ενιαιοποιημένης μάθησης, τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση, δεν θα τα χαρακτηρίζαμε ιδιαίτερα ικανοποιητικά. Σε ποιο βαθμό οφείλεται αυτό στη διάσπαση της γνώσης που οδηγεί σε πρακτικές διδασκαλίας και μάθησης προσκολλημένες σε απομονωμένα γνωστικά πεδία ανά διδακτική ώρα ή διδακτική χρονική ενότητα; Θα βοηθούσε η κατανόηση του όλου στην απόκτηση γνώσεων του επιμέρους, ή θα γινόταν η κατανόηση του όλου ένα ακόμη αυτόνομο διδακτικό πρόβλημα;

Η εν τέλει θετική αποτίμηση των παιδιών μήπως ήταν απλή ευγενική φιλοφρόνηση ή οφειλόταν στο σπάσιμο της μονοτονίας της σχολικής τάξης και ζωής από κάτι που γινόταν εν ώρα μαθήματος, αλλά δεν ήταν το συνηθισμένο μάθημα; Πώς αυτή ή έγνοια για το όλον της γνώσης που χαρακτηρίζει την προσέγγιση της ενιαιοποιημένης γνώσης δεν θα απορροφηθεί από τη σχολική ρουτίνα, αν η προσέγγιση εφαρμοστεί ευρύτερα;

Η κουλτούρα διδασκαλίας και μάθησης που συναντήσαμε τόσο στις τάξεις της πρωτοβάθμιας όσο και στην τάξη της δευτεροβάθμιας χαρακτηριζόταν από τον μειωμένο βαθμό μαθητικής αυτενέργειας και τον υψηλό βαθμό προφορικότητας (άμεση προσφορά απαντήσεων, άμεση αναζήτηση προφορικών διευκρινίσεων από τον διδάσκοντα, περιορισμένη χρήση της γραφής και της κατά μόνας ανάγνωσης). Μπορεί να ευδοκιμήσει η

---

[5] Στ. Βαβούρη, *Πού πήγε, ως πού με πήγε αυτό το ποίημα*, Ερμής, Αθήνα 1993. Συλλογή ποιημάτων που ο ίδιος ο ποιητής επέλεξε από το σύνολο του ποιητικού του έργου.

[6] Κατά την εργασία με τα πακέτα εργασίας μέσα στην τάξη συνειδητοποιήσαμε ότι οι δραστηριότητες τελικά έδιναν περισσότερο βάρος στην απόκτηση γνώσεων και λιγότερο στην αισθητική καλλιέργεια (κάτι που έγινε αντιληπτό στην τάξη της Δευτεροβάθμιας·χαρακτηριστικά ένα παιδί εκεί στο τι κάναμε απάντησε «έλεγχο γνώσεων»).

προσέγγιση της ενιαιοποιημένης διδασκαλίας σε τέτοιο περιβάλλον, ή εξαρχής πρέπει να την αντιληφθούμε και ως εργαλείο υπονόμευσης μιας τέτοιας κουλτούρας;

Σταματώντας εδώ, τον κατάλογο ερωτημάτων και παρατηρήσεων, θα λέγαμε ότι στο ερώτημα, *Πού μας πήγε, λοιπόν αυτό το ποίημα;*, απαντάμε ότι μας πήγε στα διαρκώς ανοικτά ερωτήματα του τί, γιατί και πώς διδάσκουμε.

kxatzkyr@uth.gr

ΛΟΓΟΤΕΧΝΙΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΙΣ ΜΙΚΡΕΣ ΗΛΙΚΙΕΣ: ΠΟΛΥΦΩΝΙΚΕΣ ΑΦΗΓΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΑΔΥΟΜΕΝΕΣ ΔΕΞΙΟΤΗΤΕΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΣΜΟΥ

Χρονάκη Άννα

Αναπλ. Καθηγήτρια ΠΤΠΕ
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Μουντζούρη Γεωργία

Υπ. Διδάκτορας Π.Τ.Π.Ε.
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εισήγηση συζητά τη σχέση λογοτεχνίας-μαθηματικών και τη δυναμική αυτής της σχέσης ως πλαίσιο ανάδυσης μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων στις μικρές ηλικίες μέσω του σχεδιασμού κατάλληλα διαμορφωμένων αφηγηματικών δράσεων. Η δυναμική ενός αναδυόμενου αριθμητισμού εγγράφεται, στο πλαίσιο αυτής της εργασίας, ως μια διαρκή επαν-αφήγηση του λογοτεχνικού κειμένου με στόχο την πλαισιοθέτησή του στο ευρύτερο ιστορικό-πολιτισμικό γίγνεσθαι της εξέλιξης των μαθηματικών ιδεών. Ως εκ τούτου, προτείνει στη βάση της σκέψης του Mikhail Bakhtin και της εμπειρίας μιας πειραματικής εφαρμογής με το παραμύθι της Πελώριας Κολοκύθας σε μια σχολική τάξη, την οπτική ενός σχεδιασμού ως ανοικτή πολυφωνική αφήγηση η οποία ενορχηστρώνει τον συνεχή διάλογο μεταξύ εκφράσεων ιδεών του παρελθόντος και του παρόντος, δικών μας και άλλων, της επιστήμης και των τεχνών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τις τελευταίες δεκαετίες έχει δοθεί έμφαση στη διασύνδεση μαθηματικών με διάφορες μορφές τέχνης στο πλαίσιο συζητήσεων για την ανάγκη αναμόρφωσης των αναλυτικών προγραμμάτων και δημόσιας κατανόησης των μαθηματικών. Αυτό γίνεται τόσο ως η ενσάρκωση μιας διαθεματικής ή/και διεπιστημονικής οπτικής της γνώσης, όσο και ως η αναβίωση του μαθηματικού αντικειμένου ως δημιουργικής και αισθητικής τελειότητας η οποία λειτουργεί εργαλειακά προς την παραγωγή εικαστικών αγαθών (βλ. Chronaki, 1997, 2000, 2008α). Σ' αυτό το πλαίσιο, η σχέση λογοτεχνίας-μαθηματικών κατέχει εξέχουσα θεση καθώς τα τελευταία χρόνια γίνεται ιδιάιτερη προβολή σε μορφές λογοτεχνίας όπως η ποίηση, το μυθιστόρημα, τα έργα επιστημονικής φαντασίας, η εκλαικευμένη ιστορία μαθηματικών, οι βιογραφίες μαθηματικών, τα κόμικς, ο κινηματογράφος, το παιδικό παραμύθι κ.α. Ο Τεύκρος Μιχαηλίδης συζητά την οργάνωση της μαθηματικής λογοτεχνίας σε τρεις κατηγορίες; α) τη διδακτική μυθοπλασία όπου στόχος είναι η εκλαϊκευση της μαθηματικής επιστήμης, β) τη βιωματική λογοτεχνία όπου ο κεντρικός ήρωας είναι μαθηματικός και η δράση του επικεντρώνεται στη σχέση του με τα μαθηματικά και γ) τη δομική μαθηματική λογοτεχνία όπου τα μαθηματικά αποτελούν βασικό στοιχείο της δομής του έργου (βλ. Μιχαηλίδης, 2004).

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι η καταχρηστικά επονομαζόμενη 'μαθηματική λογοτεχνία'[1] δεν είναι σύγχρονη μορφή λογοτεχνίας ή μυθοπλασίας σύμφωνα με τον Μιχαηλίδη. Πέρα από τις πρώιμες καταβολές σε έργα του Αισχύλου, τα μαθηματικά αποτελούν το έναυσμα στην αφηγηματική πλοκή λογοτεχνικών κειμένων όπως τα Ταξίδια του Γκιούλιβερ (1726) του Jonathan Swift, η Αλίκη στη Χώρα των Θαυμάτων (1865) του Lewiss Carroll και η Επιπεδοχώρα (1884) του Edwin Abbot. Στις μέρες μας η 'μαθηματική λογοτεχνία' αναδεικνύεται καταναλωτικό αγαθό υψηλής πολιτιστικής σημασίας, όπου οι 'μαθηματικοί' επικοινωνούν το δυναμικό μιας επιστήμης που αγγίζει την αίγλη των τεχνών, ενώ οι 'άλλοι' μοιάζει να πλησιάζουν το μυστήριο της μαθηματικής γνώσης. Αυτή η διπλή προσέγγιση γίνεται δημοφιλής καθώς συνδέεται άμεσα και υποστηρίζεται από κοινότητες όπως ο όμιλος 'Θαλής και φίλοι' (http://thalesandfriends.org). Η κοινότητα αυτή έχει ξεκινήσει μία σημαντική προσπάθεια δημόσιας κατανόησης (και κατανάλωσης) των μαθηματικών με τη δημιουργία «Λεσχών Ανάγνωσης» όπου βιβλία μαθηματικής λογοτεχνίας διαβάζονται συλλογικά σε μικρές ομάδες σε

[1] Ο Απόστολος Δοξιάδης την αποκαλεί 'φρικαλέα διατύπωση' στο 'Συνέντευξη με τον Απόστολο Δοξιάδη' στους Α. Αραγεώργη και Β. Κιντή. Περιοδικό Cogito, τχ. 4 (2006) 8.

χαλαρή ατμόσφαιρα κουβέντας και καφέ. Μέσα από τις λέσχες αυτές, οι οποίες δραστηριοποιούνται σε όλη τη χώρα, τα μαθηματικά αναδεικνύονται -μεταξύ άλλων- ως βασική παράμετρος κουλτούρας και πολιτισμού, γίνονται γέφυρα μεταξύ επιστημών και τεχνών και εν δυνάμει επιχειρούν την ανασυγκρότηση της ταυτότητας των Μαθηματικών και των σχολικών μαθηματικών. Όπως αναφέρεται στην ιστοσελίδα του Ομίλου Μαθηματικού Προβληματισμού «Θαλής και Φίλοι» τα μαθηματικά[2] '*..έχουν βαθιές διασυνδέσεις όχι μόνο με τις θετικές επιστήμες αλλά και με τους βασικούς πυλώνες του πολιτισμού, δηλαδή τη φιλοσοφία, την ιστορία, τις θετικιστικές επιστήμες, την λογοτεχνία και την τέχνη. Και για αυτόν ακριβώς το λόγο, αυτές οι πτυχές της ανθρώπινης δραστηριότητας μπορούν να εμπλουτισθούν ουσιαστικά από τον διάλογο με τα μαθηματικά'.*

Αυτή η οπτική έχει συμπαρασύρει και την Παιδική Λογοτεχνία η οποία αρχίζει να εμφανίζει έντονη δραστηριοποίηση στο πεδίο της 'μαθηματικής λογοτεχνίας' για τις μικρές ηλικίες. Το ευρύτερο αναγνωστικό κοινό βομβαρδίζεται τα τελευταία χρόνια με εκδόσεις –κυρίως παραμύθι και λογοτεχνικά έργα επιστημονικής φαντασίας- οι οποίες πραγματεύονται μαθηματικές ιδέες και βιογραφίες μαθηματικών. Συχνά, τα έργα αυτά προτείνονται ως υποστηρικτικά εργαλεία στο έργο του εκπαιδευτικού στις μικρές ηλικίες παρέχοντας το κατάλληλο υλικό για αφηγηματική δράση και για επέκταση σε κατάλληλα σχεδιασμένα 'ιστορίες' προβλήματα (βλ. Nunes, 1996). Ο ρόλος της αφήγησης (και ιδιαίτερα της αφήγησης μέσω του παραμυθιού) για την ανάπτυξη γνώσης συζητείται τόσο στο πλαίσιο της πρωτοσχολικής εκπαίδευσης (βλ. Τσιλιμένη, 2007, Παπαρούση, 2007, Γιανικοπούλου, 2002, Σακελαρρίου, 1990) όσο και στο πλαίσιο της πρωτοσχολικής μαθηματικής εκπαίδευσης (βλ. Bruner, 1990, 1996, Nunes, 1996, Borasi et al. 1990, Satariano, 1994, Van Oers, 1997).

Η μαθηματική σκέψη των παιδιών, όπως χαρακτηριστικά μας θυμίζει η Margaret Donaldson (1991), μπορεί ν' αναπτυχθεί μόνο μέσω της ενεργητικής συμμετοχής και του πειραματισμού με δραστηριότητες που έχουν νόημα για τα ίδια τα παιδιά. Ειδικά στις μικρές ηλικίες το παραμύθι εγείρει την φαντασία και την περιέργεια των παιδιών ώστε να ασχοληθούν με την ιστορία και τις σχετικές μαθηματικές έννοιες που ενσωματώνονται στο κείμενο μέσω κατάλληλα διαμορφωμένων δραστηριοτήτων, ενώ παράλληλα χαίρονται τη συμμετοχή στην αφήγηση. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Βασίλης Αναγνωστόπουλος (1994) η 'ώρα του παραμυθιού' συνεχίζει να αποτελεί αδιαπραγμάτευτη καθημερινή δραστηριότητα, τονίζοντας ότι είναι '*η πιο αγαπητή στα παιδιά και την περιμένουν με αδημονία*' (σελ. 50). Πέρα από

[2] http://www.thalesandfriends.org/gr

τη συναισθηματική φόρτιση που προκαλεί η αφήγηση ενός παραμυθιού, το λογοτεχνικό κείμενο διαμεσολαβεί την κατανόηση συγκεκριμένων 'καταστάσεων' (γεγονότων ή ιστοριών προβλημάτων) που συνδέονται με την υπόθεση και τους ήρωες. Αυτό είναι εφικτό καθώς η 'γλώσσα' του λογοτεχνικού κειμένου ενεργεί ως όχημα επικοινωνίας, αναπαράστασης και έκφρασης ιδεών στον προφορικό λόγο (δηλ. προφορικές επεξηγήσεις και εξιστορήσεις, φυσική γλώσσα και ορολογία), στον γραπτό λόγο (δηλ. σημειώσεις και απόπειρες συμβολοποίησης των παιδιών, αναπαραστάσεις, εικονογραφήσεις), αλλά και ως υλικό που μετασχηματίζεται σε κιναισθητικλη δράση όπως χειρονομίες ή/και χρήση φυσικών μεταφορών (δηλ. χρήση χειραπτικών αντικειμένων, δακτύλων, δίειξη).

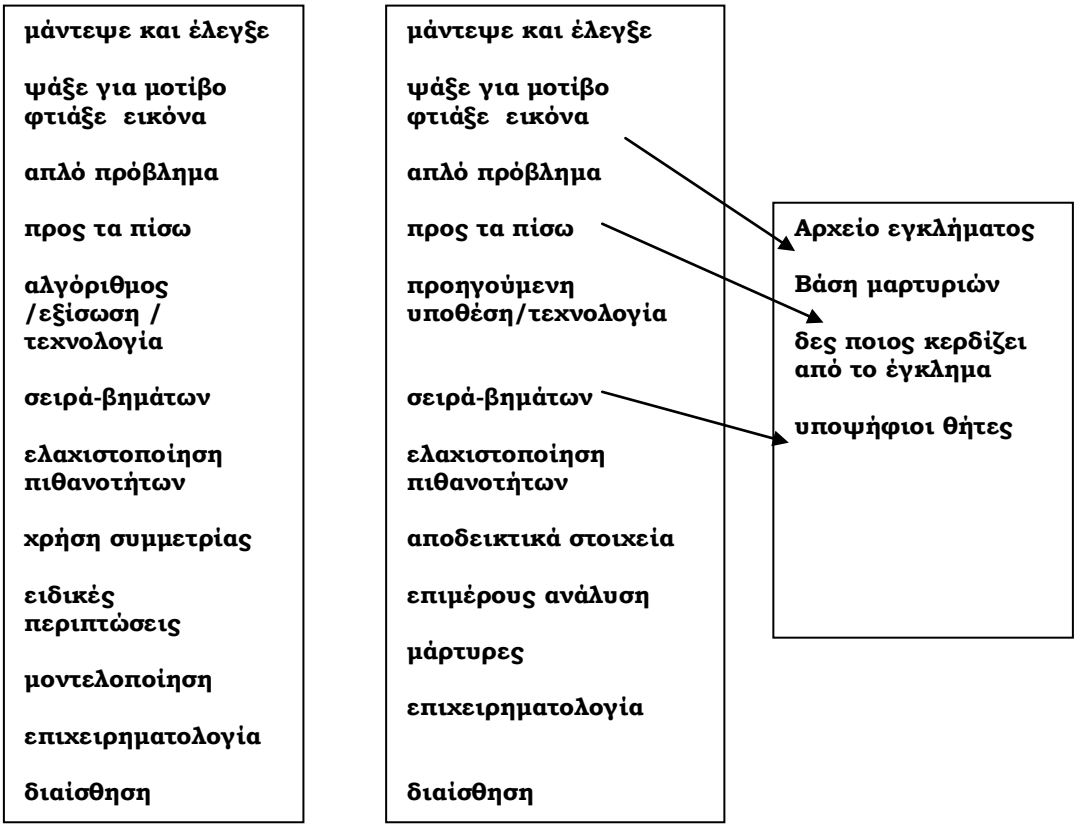
Στο παρόν κείμενο στόχος μας είναι η συζήτηση της σχέσης λογοτεχνίας-μαθηματικών και της αναπλαισίωσής της στη σχολική τάξη ως μιας ανοιχτής διαδικασίας η οποία επιτρέπει να υπερβούμε την οπτική των μαθηματικών ως αυστηρά δομημένης, δυσνόητης και απευθυνόμενης σε λίγους συμβολικής γλώσσας (βλ. Hughes, 1996, Σακονίδης, 2004). Αντίθετα, μέσω της πειραματικής χρήσης ενός παραμυθιού για τα μαθηματικά θα αποπειραθούμε να συζητήσουμε μια εναλλακτική οπτική στη θέαση των μαθηματικών ως δυναμικό μέσο επικοινωνίας, κατανόησης και οργάνωσης πτυχών της καθημερινότητας και των δεδομένων σε συγκεκριμένες καταστάσεις (προβλήματα, δράσεις, γεγονότα) που έχουν νόημα για τα ίδια τα παιδιά. Σ' αυτό το πλαίσιο θα προσπαθήσουμε να μιλήσουμε για το σχεδιασμό της χρήσης του κειμένου ενός παραμυθιού για τα μαθηματικά στις μικρές ηλικίες ως ένα είδος πολυφωνικής αφήγησης

ΛΟΓΟΤΕΧΝΙΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΟΞΥΜΩΡΗ ΣΧΕΣΗ Η ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ;

Ενώ είναι γνωστό ότι το σχίσμα μεταξύ θετικών-ανθρωπιστικών επιστημών είναι μια σύγχρονη κατασκευή η οποία υποστηρίζει τη διαιώνιση διϋσμών μεταξύ επιστήμης-τέχνης, νου-σώματος, προοδευτικού-πρωτόγωνου κλπ (βλ. Chronaki, 2009), το ερώτημα σχετικά με την σχέση που μπορεί να έχει η λογοτεχνία με τα μαθηματικά παραμένει κρίσιμο. Στα πρακτικά παλαιότερου διήμερου, ο Δημήτρης Χασάπης (2007) υποστηρίζει ότι τα «[..] *μαθηματικά και η λογοτεχνία αποτελούν δύο διακριτά διαφορετικές μορφές ανθρώπινης δραστηριότητας, οι οποίες αναπτύσσονται υπό διαφορετικούς όρους και για διαφορετικές ανάγκες, κοινωνικές και ατομικές*» (σελ. 3). Αυτή η προσέγγιση, εστιάζοντας στη στοχοθεσία και στη συγκρότηση των συγκεκριμένων γνωστικλων περιοχών, αναδεικνύει εύστοχα τις διακριτές διαφορές ως προς τη φύση της δραστηριότητας. Ταυτόχρονα όμως τροφοδοτεί

το διαχωρισμό σε 'κουλτούρες' γνωστικών αντικειμένων (βλ. Snow, 1960) οι οποίες σκιαγραφούν αγεφύρωτες και μη-συνδεδεμένες δράσεις. Εντούτοις, η Ευγενία Κολέζα (2007), στον ίδιο τόμο σχολιάζει ότι υπάρχουν και κοινά χαρακτηριστικά, τα οποία επιγραμματικά συνοψίζονται στην αναζήτηση της αισθητικής, στη δημιουργικότητα και στην καλλιέργεια της σκέψης και της φαντασίας (σελ. 33).

Ο Απόστολος Δοξιάδης (2004) αναφερόμενος στο ίδιο ερώτημα διερευνά τους δυνατούς δομικούς ισομορφισμούς που διέπουν τη σχέση μαθηματικών και λογοτεχνίας. Εστιάζοντας στο παράδειγμα 'επίλυση προβλήματος' (κατά George Polya) για τα μαθηματικά και 'αστυνομικό μυθιστόρημα' για τη λογοτεχνία (κατά Edgar Allan Poe) αναλύει τις δράσεις των υποκειμένων δρώντων σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις. Σημειώνει ότι και στις δύο περιπτώσεις το κοινό χαρακτηριστικό είναι οι άνθρωποι-σε-δράση με στόχο να φτάσουν ένα συγκεκριμένο στόχο. Ο στόχος αφορά την επίλυση ενός προβλήματος για τον ήρωα-μαθηματικό και την επίλυση ενός μυστηρίου για τον ήρωα-ντετέκτιβ. Η εστίαση του αφορά στις δράσεις των υποκειμένων στο πλαίσιο της πλοκής της ιστορίας που δυνητικά μπορούν να αφηγηθούν και η οποία σκιαγραφεί το τι έκαναν για να πετύχουν το στόχο τους ή ποιές στρατηγικές χρησιμοποίησαν. Το σχήμα 1 προσπαθεί να αποδώσει εικονικά τις δράσεις των υποκειμένων (ή ανθρώπων-σε-δράση) όπως αναφέρονται στο Doxiadis (2004, σελ. 5-6) υποστηρίζοντας τη σύγκριση μεταξύ τους. Έτσι, οι στρατηγικές κατά τη δράση του μαθηματικού στην υπόθεση-πρόβλημα μπορούν να ειδωθούν σε αντιπαράθεση με τις στρατηγικές κατά τη δράση του ντετέκτιβ στην υπόθεση-μυστήριο. Απώτερος στόχος ενός τέτοιου εγχειρήματος είναι να δοθεί έμφαση στις δομικές ομοιότητες της πορείας-δράσης ως 'ποιητική' διαδικασία. Μια τέτοια οπτική μας επιτρέπει να δούμε τα μαθηματικά τα ίδια ως αφηγηματική δράση καθώς η ίδια η διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος (όπως και η διαδικασία επίλυσης ενός μυστηρίου) αποτελεί αφήγηση.



Σχήμα 1: Μαθηματικός σε πρόβλημα και Ντετέκτιβ σε μυστήριο

Μια τέτοια οπτική μπορεί –υπό προυποθέσεις- να ενέχει την εκδοχή προσέγγισης των μαθηματικών ως από-πλαισιωμένη δράση και να την ρομαντικοποιεί ως μυθική (ή ακόμη και θεϊκή) διαδικασία παραγωγής μαθηματικών κανονικοτήτων, κανόνων και λύσεων. Όμως, ταυτόχρονα, μπορεί –πάλι υπό προυποθέσεις- να ενέχει μια εναλλακτική εκδοχή όπου το μαθηματικό κείμενο μετασχηματίζεται σε αφηγηματική δράση τόσο ως προς τον συγγραφέα όσο και ως προς τον αναγνώστη. Αυτή η δεύτερη εκδοχή είναι εφικτή στο πλαίσιο συζήτησης του λογοτεχνικού κειμένου και του 'κειμένου' γενικότερα μέσω της σκέψης του Mikhael Bakhtin (1981, 1984, 1986).

Ο Mikhael Bakhtin μιλώντας για την ανάλυση του λογοτεχνικού κειμένου υποστηρίζει τη σημασία δημιουργίας ενός 'ανοικτού' κειμένου, το οποίο συγγράφεται με στόχο την αισθητική διάσταση μιας συνειδητά πολυφωνικής και μη-τετελεσμένης εμπειρίας διαλόγου. Συγκεκριμένα, μας ωθεί να δούμε

τη δημιουργία του κειμένου στο χωροχρόνο ως συμβάν το οποίο δεν εγγράφεται σε μια συνεχή και γραμμική πορεία, αλλά εμπλέκει επιμέρους γεγονότα και συμβάντα τα οποία εμπλέκουν ταυτόχρονα την ιστορικότητα ιδεών (ως μνήμη) και την εξέλιξη τους στο παρόν (ως αντίληψη) και στο μέλλον (ως φαντασία). Η χρονικότητα γεγονότων και συμβάντων επιτελείται ανατρεπτικά (ταυτόχρονα ή κυκλικά) αναδεικνύοντας τη δυναμική της μη-γραμμικότητας και της α-συνέχειας του χρόνου στην αφήγηση. Η χωρικότητα αποτελεί τη σκηνή (ή τις σκηνές) για την ανάπτυξη της συνείδησης του ατόμου καθώς εκεί διαπλέκονται δυναμικά αντιφάσεις και συγκροτούνται νοήματα στη βάση συνεχών προσπαθειών επαναφήγησης και συμβολοποίησης γεγονότων και πράξεων. Παράλληλα, ο Bakhtin υποστηρίζει ότι τόσο η συγγραφή όσο και η ανάγνωση ενός κειμένου απαιτεί από τα υποκείμενα (συγγραφείς και αναγνώστες) ενεργοποίηση σε συνεχή διάλογο με το κείμενο ως μια διαρκή διαδικασία αποδόμησης, νοηματοδότησης και ανατροπής επιμέρους κανονικοτήτων. Συνεπής σε μια σχετικιστική κατανόηση της πραγματικότητας θεωρεί ότι η 'τοποθέτηση' απέναντι στο κείμενο διαμορφώνει τόσο την αντίληση του νοήματος του κειμένου όσο και την ταυτότητα και συνειδητότητα του ίδιου του υποκειμένου. Η ανάγνωση ενός πολυφωνικού κειμένου απαιτεί από τον αναγνώστη να αφήσει κατά μέρος την ανάγκη νοηματοδότησης από μια μόνο σκοπιά και αντίθετα να εισέλθει σε μια προσπάθεια πολλαπλής-συνειδητότητας (multi-voiced consciousness). Ο ρόλος του συγγραφέα ή του αφηγητή –αυτού που δίνει μορφή στις ιερές γραφές- είναι να δημιουργήσει ένα χωροχρονικό πλαίσιο το οποίο επιτρέπει στους χαρακτήρες του, ως διακριτές φωνές, να διατηρούν τον έλεγχο της δικής τους λέξης. Η φωνή του συγγραφέα-αφηγητή υποχωρεί διακριτικά καθώς δημιουργεί γύρω από τον ήρωα αυτή την ιδιαίτερα περίπλοκη και υπόδηλη ατμόσφαιρα η οποία τον ωθεί να αποκαλύψει και να επεξηγήσει τον εαυτό του διαλογικά. Η έννοια της διαλογικότητας ενέχει την έννοια μιας 'συμμετρικής' συνάντησης με τον 'άλλο' όπου η συνειδητότητα του 'εαυτού' βρίσκεται σε άμεση σχέση με τη συνειδητότητα του 'άλλου'. Ενέχει, επίσης, την ανάγκη οικοδόμησης 'κενών' τα οποία επιτρέπουν να μακρύνει την δική του τελική λέξη καθώς αλληλεπιδρά με ένταση με την συνειδητότητα του άλλου. Η αλήθεια της αφήγησης είναι η αλήθεια της συνειδητότητας του ίδιου του ήρωα, τονίζει ο Bakhtin υποστηρίζοντας ότι ο χώρος της αφήγησης είναι ο ίδιος ο κοινωνικός χώρος (βλ. Bakhtin, 1981, 1984, 1986).

Έτσι, με την υποστήριξη του Mikhail Bakhtin, θα μπορούσαμε να λάβουμε υπόψη ότι ο ρόλος του εκπαιδευτικού ως χρήστη λογοτεχνικών κειμένων (μαθηματικής λογοτεχνίας, παραμύθι κλπ) εγγράφεται ως συγγραφέας ή/και αφηγητής καθώς το κείμενο πρέπει, αναπόφευκτα, να υποβληθεί σε μια ή περισσότερες επαν-αφηγήσεις με στόχο την ενεργοποίηση του αναγνώστη

προς συγκεκριμένες κατευθύνσεις ανάγνωσης. Σ' αυτό ακριβώς το σημείο είναι πολύ σημαντικό να λάβουμε υπόψη *πρώτου,* την ανάγκη μετακίνησης από το κείμενο ως αντικείμενο στο κείμενο ως αφήγηση, και *δεύτερου* τη σημασία να δούμε το σχεδιασμό της 'συγγραφής' του κειμένου ως πολυφωνική αφήγηση με στόχο τη διαλογικότητα.

ΠΕΛΩΡΙΑ ΚΟΛΟΚΥΘΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΣΧΕΔΙΑΖΟΝΤΑΣ ΜΙΑ ΠΟΛΥΦΩΝΙΚΗ ΑΦΗΓΗΣΗ

Λαμβάνοντας υπόψη τον παραπάνω προβληματισμό αναπτύχθηκε κατά το σχολικό έτος 2006-7 ένα διδακτικό πείραμα (Χρονάκη, 2008β) με στόχο τη διερεύνηση της χρήσης ενός παραμυθιού για την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού με παιδιά ηλικίας 4-6 ετών και την μετάβαση τους σε δεξιότητες όπως η απαρίθμηση, η αρίθμηση, ο γραπτός συμβολισμός, η πρόσθεση μεταξύ μικρών αριθμών και η εφαρμογή του αριθμού σε μικρές ιστορίες προβλήματα (Μουντζούρη, 2007, Χρονάκη και Μουτζούρη, 2009). Προς αυτή την κατεύθυνση βασιστήκαμε στο παραμύθι «Η Πελώρια Κολοκύθα» (βλ. εικόνα 1 και 2) των Αλεξέι Τολστόι και Νιάμ Σάρκυ (2002).

Εικόνα 1. Η Πελώρια Κολοκύθα

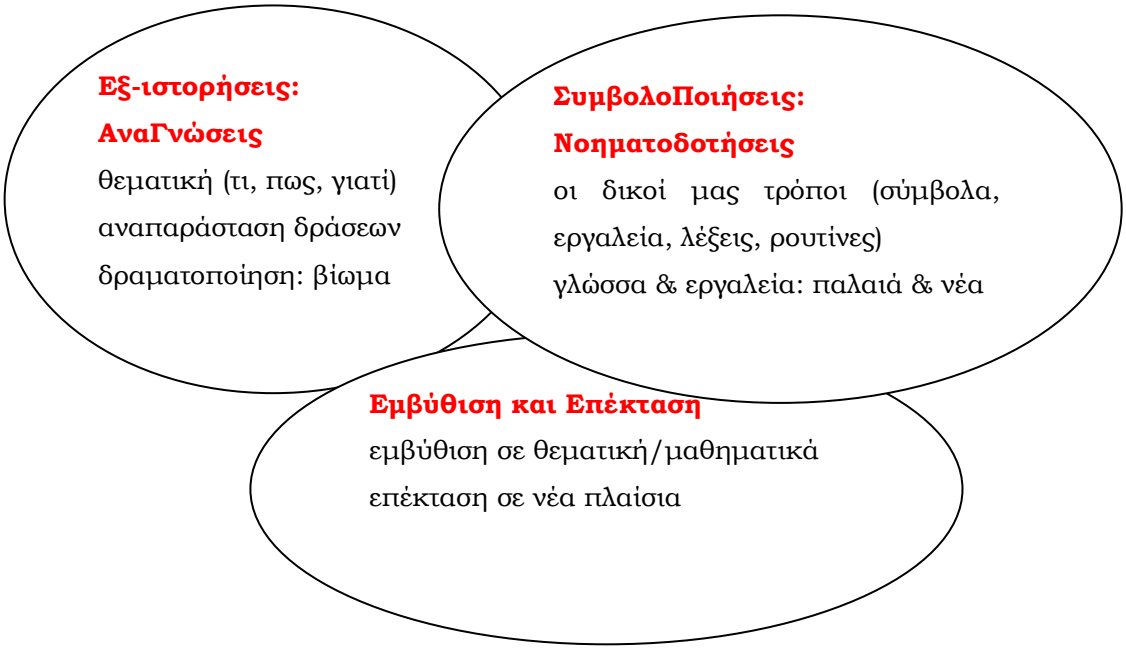
Η μυθοπλαστική αφήγηση στο παραμύθι που επιλέξαμε αναφέρεται σε μία κολοκύθα τεραστίων διαστάσεων που φυτρώνει στο χωράφι ενός αγρότη, του Ιβάν, και της γυναίκας του, της Ναταλίας. Ο Ιβάν προσπαθεί ανεπιτυχώς να την ξεριζώσει. Έτσι, καλεί διαδοχικά σε βοήθεια τα ζώα που έχει στο χωράφι του -μια αγελάδα, δύο γουρουνάκια, τρείς γάτες, τέσσερεις κότες, και το ποντικάκι (βλ. εικόνα 2). Η λύση τελικά θα δοθεί από το μικροσκοπικό ποντίκι.

Εικόνα 2: Η κεντρική σκηνή: Το εγχείρημα του ξεριζώματος της κολοκύθας

Το εν λόγω παραμύθι δεν εστιάζει σε αμιγώς μαθηματικές έννοιες. Θα λέγαμε, μάλιστα, ότι η κεντρική αφήγηση στο παραμύθι είναι αυτή της ευαισθητοποίησης των παιδών στη δύναμη που κρύβουν οι μικροί και φαινομενικά αδύναμοι όπως το μικρό ποντίκι –το οποίο τελικά θα αποδειχθεί ο ήρωας που επιλύει το πρόβλημα του ξεριζώματος της κολοκύθας. Πως λοιπόν τα παιδιά, ή καλύτερα τα παιδιά-μαζί-με-την-εκπαιδευτικό, μπορούν να μεταβούν από αυτή την κεντρική αφήγηση για τον ήρωα-ποντίκι σε αφηγήσεις οι οποίες παραπέμπουν σε δράσεις που σχετίζονται με μαθηματικές δραστηριότητες; Η απάντηση δίδεται μέσα από την ανάγκη επεξεργασίας του ίδιου του κειμένου μαζί με τα παιδιά. Η ανάγκη αυτή, σύμφωνα με τον Mikhail Bakhtin, σημαίνει ότι θα πρέπει ο συγγραφέας/αφηγητής να εμπλέξει τον αναγνώστη στη δημιουργία πολλαπλών αφηγηματικών δράσεων. Έτσι, το να διαβάσουμε μαζί με τα παιδιά το παραμύθι και να φτάσουμε να δραστηριοποιηθούμε στα μαθηματικά σημαίνει ότι το παραμύθι αποτελεί εν δυνάμει πλαίσιο πολλαπλών αφηγήσεων με διαφορετική στοχοθεσία και συνεπώς διαφορετική φωνή. Σημαίνει ακόμη ότι οι αφηγήσεις αυτές δημιουργούνται συνειδητά ως πολυφωνικά κείμενα καθώς δεν υιοθετείται μία μόνο κυρίαρχη φωνή (π.χ. η μυθοπλασία ή η αποδοχή της πλοκής και του ηθικού διδάγματος) η οποία τείνει να αναδύεται στο πλαίσιο μιας πρώτης αφήγησης του κειμένου (π.χ. δυνατοί και αδύναμοι στο εγχείρημα του ξεριζώματος της κολοκύθας).

Αντίθετα, περνάμε στην επαν-αφήγηση και στη διερεύνηση εναλλακτικών διαδρομών μέσα από την κατανόηση του ίδιου του κειμένου με χρήση εργαλείων όπως αυτά των μαθηματικών. Κάτι τέτοιο γίνεται με στόχο την οργάνωση της πληροφορίας που παρέχει το κείμενο και την τακτοποίηση και

κατανόησή της στη βάση αρίθμησης, οπτικής οργάνωσης δεδομένων, απόπειρες γραπτού συμβολισμού κλπ. Μια τέτοια διαδικασία στοχεύει έμμεσα στην εφαρμογή συγκεκριμένων μαθηματικών εργαλείων και στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των παιιδών. Ταυτόχρονα όμως ενέχει, ξανά μέσω της χρήσης των μαθηματικών εργαλείων ως εργαλεία κατανόησης του πλαισίου, το δυναμικό της ανατροπής της ίδιας της πλοκής και του ηθικοπλαστικού της διδάγματος (π.χ. Ο ένας και μικρός ποντικούλης καταφέρνει αυτό που τόσοι άλλοι δεν μπόρεσαν! Πώς γίνεται αυτό;).



Σχήμα 2. Μορφές Αφηγηματικών Δράσεων: παραγωγή πολυφωνικού αφηγήματος

Το σχήμα 2 προσπαθεί να οπτικοποιήσει τις μορφές αφηγηματικών δράσεων και τη συνέργιά τους στην παραγωγή ενός πολυφωνικού αφηγήματος. Οι μορφές αυτές αφορούν; α) εξιστορήσεις και αναγνώσεις του λογοτεχνικού κειμένου, β) συμβολοποιήσεις και νοήματα, και γ) εμβύθιση και επέκταση. Ο σχεδιασμός των δράσεων αυτών θα περιγραφεί στα παρακάτω.

ΕΞΙΣΤΟΡΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΑ-ΓΝΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΛΟΓΟΤΕΧΝΙΚΟΥ ΚΕΙΜΕΝΟΥ

Οι μορφές αφηγηματικών δράσεων που ανήκουν σ'αυτή την κατηγορία αφορούν την κατανόηση της υπόθεσης, της πλοκής και της δράσης των κεντρικών ηρώων στη βάση της εξιστόρησης και ανάγνωσης του παραμυθιού. Οι συγκεκριμένες δράσεις που ενεργοποιήθηκαν αφορούν αρχικά την αναδιήγηση του παραμυθιού από τα παιδιά, την ανοικτή συζήτηση για την πλοκή και τους ήρωες, λεκτικά παιχνίδια, παιχνίδια με χρήση των εικόνων του παραμυθιού, αναπαράσταση μέσω ζωγραφικής (βλ. εικόνα 3).

Εικόνα 3: Εξιστόρηση σε συμμαθήτρια. Η ιστορία σε σειρά. Ζωγραφίζοντας.

Οι αμέσως επόμενες αφηγηματικές δράσεις αφορούν την επαναφήγηση της ιστορίας των ζώων μέσω της κατασκευής μασκών. Η δράση αυτή οδήγησε πρώτον στην αντιμετώπιση των μασκών ως αντικείμενα-δεδομένα προς επεξεργασία (βλ. εικόνα 4), και δεύτερον ως αντικείμενα-σύμβολα για την δραματοποίηση του παραμυθιού (βλ. εικόνα 5).

Εικόνα 4: Μάσκες: Δεδομένα σε Ομάδες. Απαρίθμηση. Δεδομένα σε Πίνακα.

Κατά τη δράση της κατασκευής των μασκών το πρόβλημα που θέτουμε έχει να κάνει με τη μέτρηση των ζώων (ώστε να μην ξεχάσουμε κανένα) και την οργάνωση των δεδομένων μας (μέσω των μασκών) σε ομάδες και σε πίνακα.

Εικόνα 5: Δραματοποίηση: Εμείς τα ζώα και οι καταγραφείς.

Στο πλαίσιο της δραματοποίησης της ιστορίας του παραμυθιού κάποια παιδιά υποδύονται τους καταγραφείς. Η αποστολή τους είναι να καταγράψουν πόσα ζώα έχουμε από το κάθε είδος στο πλαίσιο της δραματοποίησης (δηλ. τα ζώα στην τάξη) και όχι στο πλαίσιο της ιστορίας του παραμυθιού (βλ. εικόνα 6)

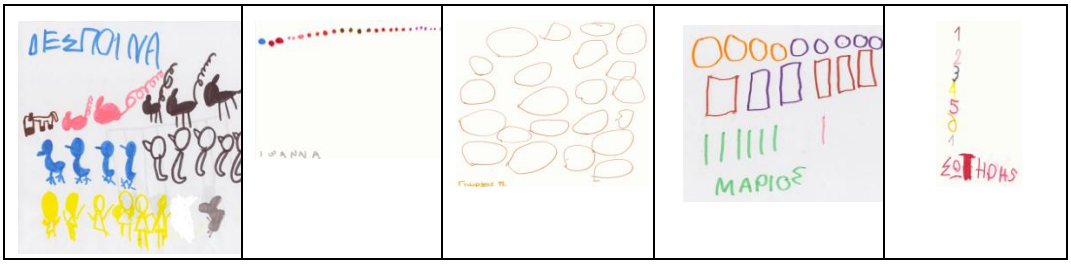
Εικόνα 6: Καταγραφή των 'ζώων' στο πλαίσιο της δρασματοποίησης

ΣΥΜΒΟΛΟ-ΠΟΙΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΝΟΗΜΑΤΟ-ΔΟΤΗΣΕΙΣ

Η δεύτερη ομάδα αφηγηματικών δράσεων εστιάζει συνειδητά σε ιστορίες προβλήματα τα οποία ενώ συνδέονται με τη θεματική του παραμυθιού (π.χ. πόσες μάσκες από το κάθε ζωάκι έχουμε, πόσες είναι οι κότες ή πόσα είναι τα ζώα όλα μαζί) ταυτόχρονα αποτελούν αυτόνομα πλαίσια δραστηριοποίησης των παιδιών όπως φαίνεται στις εικόνες 7, 8 και 9.

Εικόνα 7: Απαρίθμηση. Πληθικότητα. Οργάνωση δεδομένων σε πίνακα.

Εικόνα 8: Πόσες είναι οι κότες;



Εικόνα 9: Πόσα είναι όλα τα ζωάκια μαζί;

Ενώ στην εικόνα 7 η κιναισθητική δράση των παιδιων είναι έντονη, στις εικόνες 8 και 9 βλέπουμε ότι τα παιδιά περνούν στην συμβολική έκφραση ποσοτήτων οι οποίες αναπαριστούν την πληθικότητα των ζώων για τα οποία μιλάει το παραμύθι. Οι απόπειρες συμβολοποίησης των ίδιων των παιδιών δημιουργούν από μόνες τους ποιλυφωνικά κείμενα καθώς τα ίδια επιλέγουν πολύ διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασης και έκφρασης της πληροφορίας.

Εικόνα 10: Πως μετρούσαν οι παππούδες των παππούδων μας;

Η δημοσιοποίηση των ποικίλων αναπαράστασεων των παιδιών γίνεται συνήθως στη βάση της απόρριψης των εικονικών, εικονογραφικών και ιδιοσυγκρασικών (βλ. Hughes, 1996) προς επευφημισμό του συμβολικού. Κάτι τέτοιο όμως μπορεί να ενέχει την πιθανότητα πρώιμης ετικετοποίησης κάποιων προσπαθειών των παιιδών για συμβολισμό του αριθμού ως 'λάθος' και κατ' επέκταση τους αποκλεισμού τους από την σχολική πρακτική των μαθηματικών. Με στόχο την αποδοχή της ανάδυσης αυτών των διαφορετικών τρόπων συμβολοποίησης, επιλέξαμε την εστίαση στην αφήγηση των τρόπων που οι 'παππούδες των παππούδων μας' (ή οι άνθρωποι στα πολύ παλιά χρόνια) χρησιμοποιούσαν για να συμβολίσουν τον αριθμό. Έτσι, δημιουργήθηκαν επιμέρους δράσεις όπου τα παιδιά μπορούσαν να μάθουν για τη χρήση ιστορικο-πολιτισμικών εργαλείων (π.χ. σύμβολα ή/και χαρακιές σε κόκκαλα, τα quipus των Ίνκας ως πρώιμη λογιστική καταγραφή οφελών) και να τα δουν ως μέρος των δικών τους προσωπικών εμπειρίων. Τα παιδιά μπορούσαν να αποδώσουν αξία σε πρακτικές όπως η χρήση των μελών τους σώματος (δάκτυλα), τα βότσαλα, οι κόμποι σε σκοινί, τα σύμβολα όπως οι γραμμές, οι κουκίδες ή τα αποτυπώματα τύπου κύκλου ή τετραγώνου (βλ. εικόνα 10 και εικόνες 8 και 9) ως μέσα υποστήριξης της μνήμης κατά τη διαδικασία καταγραφών. Αυτή η βουτιά στο παρελθόν έδωσε τη δυνατότητα συζήτησης και σύγκρισης των δικών τους διαδικασιών συμβολοποίησης με αυτούς των προγόνων μας (βλ. οντογένεση και φυλογένεση).

ΕΜΒΥΘΙΣΗ ΚΑΙ ΕΠΕΚΤΑΣΗ

Οι δράσεις εξιστόρησης και ανάγνωσης καθώς και οι δράσεις συμβολοποίησης και νοηματοδότησης οδηγούν σε αφηγήσεις οι οποίες αποτελούν ταυτόχρονα δράσεις εμβύθισης και επέκτασης άλλοτε στη θεματική του λογοτεχνικού κειμένου και άλλοτε στις μαθηματικές ιδέες και στην εφαρμογή τους.

Εικόνα 11.Το παραμύθι. Η μάσκα. Το κουστούμι.

Για παράδειγμα, όπως φαίνεται στην εικόνα 11, τα παιδιά εμβυθίζονται στην εξιστόρηση του παραμυθιού σε συμμαθητή τους, στην εικαστική διακόσμηση των μασκών και στην επιλογή υφασμάτων για την δημιουργία ενός κοστουμιού με στόχο την ενσάρκωση ρόλων. Σ' αυτή την περίπτωση το κείμενο μοιάζει να επεκτείνεται προς την εστίαση της θεματικής –χωρίς να μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα παιδιά 'κάνουν' μαθηματικά. Παράλληλα, όπως φαίνεται από την εικόνα 12, τα παιδιά εμβυθίζονται σε εφαρμογές των μαθηματικών εννοιών σε πλαίσια σχετικά με το παραμύθι (π.χ. οργάνωση δεδομένων για τα ζώα σε πίνακα διπλής εισόδου) ή σε πλαίσια σχετικά με παιχνίδια όπως το ντόμινο ή ένα αυτοσχέδιο παιχνίδι 'Κολοκύθας' με ζάρι. Σ' αυτές τις περιπτώσεις η δράση των παιδιών δεν χαρακτηρίζεται από κάποια διαθεματική διάσταση στη γνώση καθώς είναι καθαρά προσανατολισμένα στην εφαρμογή συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων είτε για να παίξουν το παιχνίδι, είτε για να βρουν τη λύση στα επιμέρους ιστορίες' προβλήματα που αναπτύσσονται. Θα μπορούσε κάποιος να πει ότι ενώ αρχικά το παραμύθι ανοίγει το πεδίο μιας διαθεματικής ή/και διεπιστημονικής προσέγγισης καθ' οδόν οριοθετεί την ενέργεια των παιδιών άλλοτε προς την επεξεργασία της θεματικής (π.χ. αφήγηση του παραμυθιού) και άλλοτε προς την επεξεργασία των μαθηματικών.

Εικόνα 12. Ντόμινο. Παιχνίδι με Ζάρι. Πίνακας.

Παρόλο που αυτό είναι θέμα σχεδιασμού και μπορεί ανάλογα να περιοριστεί ή το αντίθετο, τόσο ο ευρύτερος θεματικός άξονας του παραμυθιού όσο και τα μαθηματικά εργαλεία συνοδεύουν σιωπηλά τα παιδιά. Παρατηρήσαμε, ότι σε διάφορες φάσεις αναπτύχθηκαν συζητήσεις μεταξύ παιδιών και νηπιαγωγού σχετικά με ευρύτερα μαθηματικά ζητήματα όπως η σημασία του μηδενός, οι «μεγάλοι» αριθμοί και πως γράφονται, κλπ. Πιστεύουμε ότι κάτι τέτοιο δεν θα συνέβαινε αν δεν υπήρχε η ταυτόχρονη εμβύθιση/επέκταση τόσο στο θεματικό πλαίσιο όσο και στις μαθηματικές ιδέες και εργαλεία.

ΑΝΤΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΩΝ

Η επιστήμη των (σχολικών) μαθηματικών σχετίζεται, μεταξύ άλλων, με τη διερεύνηση και ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού και της εφαρμογής του σε πεδία της άλγεβρας και της γεωμετρίας για την επίλυση σημαντικών προβλημάτων στο χώρο των επιστημών και της τεχνολογίας. Η αναπλαισίωση τους στο αναλυτικό πρόγραμμα (δηλ. σχολικά βιβλία, δραστηριότητες, και μέθοδοι αξιολόγησης) επιτελείται κυρίως στο πλαίσιο 'ψευδο-προβλημάτων' τα οποία μοντελο-ποιούν συγκεκριμένες καταστάσεις καθημερινής ζωής (π.χ. αγοραπωλησία). Σ' αυτό το πλαίσιο τα 'μαθηματικά' έρχονται να υποστηρίξουν από τη μια μεριά την ποσοτική κατανόηση του συγκεκριμένου προβλήματος (δηλ. τι ζητάει, ποια είναι τα δεδομένα, ποιές πράξεις απαιτούνται) και από την άλλη να συμβάλλουν με επιμέρους 'εργαλεία' στην επίλυσή του. Σε τέτοια πλαίσια τα μαθηματικά ενασρκώνοιυν τον 'από μηχανής θεό'. Η καθημερινή υπόσταση του προβλήματος (και η περιπλοκότητα του σε συνθήκες πραγματικής ζωής) γρήγορα ξεχνιέται ή μπαίνει στο περιθώριο και η συγκέντρωση των υποκειμένων (παιδιά και

ενήλικες) εστιάζει στο μαθηματικό περιεχόμενο και στην εφαρμογή του αλγορίθμου.

Παρόλο που οι συνθήκες μιας σχολικής τάξης (και οι απαιτήσεις της πολιτείας για μαζικό αριθμητισμό) απαιτούν την χρήση κατάλληλων 'ψευδο-προβλημάτων' για την εξάσκηση με μαθηματικά εργαλεία, η συνεχής ενασχόληση των παιδιών μόνο με τέτοια προβλήματα περιορίζουν τη δυνατότητα τους να δουν τα μαθηματικά σε σχέση με άλλες επιστήμες αλλά και ως εργαλείο κατανόησης σύνθετων προβλημάτων στην περιπλοκότητα της πραγματικότητας της καθημερινής ζωής. Κάτι τέτοιο βεβαίως δεν μπορεί να διασφαλίζεται με την αντικατάσταση των ψευδο-προβλημάτων από προβλήματα ιστορίες στη βάση χρήσης ενός παραμυθιού όπως η Πελώρια Κολοκύθα ππου είδαμε παραπάνω. Η συσχέτιση των μαθηματικών με την περιπλοκότητα της ζωής (των τεχνών και των επιστημών) γίνεται επιτρεπτή μόνο στο πλαίσιο σχεδιασμού συνεχών επαν-αφηγήσεων της ιστορίας που αναπαριστά ένα παραμύθι και της ανα-βίωσής του από συγγραφείς, αφηγητές και αναγνώστες ως ανοικτό πολυφωνικό κείμενο. Έτσι, παρόλο που η σχέση λογοτεχνίας-μαθηματικών (ή τεχνών-μαθηματικών) κινδυνεύει να ολισθήσει σε άλλο ένα ακόμη 'ψευδο-πρόβλημα' μικρό ή μεγάλο, η δυνητική 'αλήθεια' και το 'ψέμα' των επαν-αφηγήσεων μιας ιστορίας που έχει νόημα για τα παιδιά δημιουργούν το πλαίσιο συγκρότησης της έκφρασης και της επικοινωνίας μαθηματικών ιδεών. Ο Bakhtin μίλησε για τη σημασία των 'συνόρων' ως σημαντικά τοπία ανάπτυξης και καλλιέργειας δημιουργικής σκέψης. Ο ίδιος υποστηρίζει ότι στον ενθουσιασμό μας για εξειδίκευση έχουμε αγνοήσει (σημαντικές) ερωτήσεις σχετικά με την διασύνδεση και αλληλεξάρτηση μεταξύ διαφόρων περιοχών της κουλτούρας, ξεχνώντας ότι η πλέον παραγωγική ζωή του πολιτισμού μας βιώνεται στα σύνορα επιμέρους περιοχών και όχι στις περιοχές που εγκλείονται στην δική τους ειδίκευση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αναγνωστόπουλος, Β.Δ. (1997). *Τέχνη και τεχνική του παραμυθιού.* Αθήνα: Καστανιώτης.

Αναγνωστόπουλος, Β.Δ. (1994). *Γλωσσικό υλικό για το νηπιαγωγείο (Από τη θεωρία στην Πράξη).* Αθήνα: Καστανιώτης.

Bakhtin, M. (1981). *The Dialogic Imagination: Four Essays.* Austin, TX: University of Texas Press.

Bakhtin, M. (1984). *Problems of Dostoevsky's Poetics.* Minneapolis, MN: University of Minnesota Press.

Bakhtin, M. (1986). The Problem of Speech Genres. In C. Emerson & M. Holquist (Eds.), *M.M. Bakhtin: Speech genres and other late essays* (pp. 60-102). Austin, TX: University of Texas Press.

Borasi, R., Sheedy, J. & Siegel, M. (1990). The power of stories in learning mathematics. *Language Arts, 67*(2), 174-189.

Bruner, J.S. (1990). *Acts of meaning.* MA: Harvard University Press.

Bruner, J.S. (1986). .*Actual minds, possible worlds.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Γιαννικοπούλου, Α. (2002). Λογοτεχνία και Μαθηματικά. Στο Καΐλα, Μ., Καλαβάσης, Φ., & Πολεμικός, Ν. (Επιμ.), *Μύθοι, Μαθηματικά, Πολιτισμοί: Αποσιωπημένες σχέσεις στην εκπαίδευση* (σελ. 71-101). Αθήνα: Ατραπός.

Chronaki, A. (2004). Researching the school mathematics culture of "others". Creating a self-other dialogue. In P. Valero & R. Zevenbergen (Eds.), *Researching the Socio-political dimensions of mathematical education. Issues of power in Theory and Methodology* (pp. 145-165). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Chronaki, A. (2000). Teaching maths through theme-based resources: pedagogic style, "theme" and "maths" in lessons. *Educational Studies in Mathematics, 42,* 141-163.

Chronaki, A. (1997). *'Case Studies in the Teaching of Mathematics through the use of Art-Based Activities'*, Unpublished PhD thesis, University of Bath.

Chronaki, A. (2009). *'Mathematics, Technologies, Education: The gender perspective'*. Volos. University of Thessaly Press.

Donaldson, M. (1991). *Η σκέψη των παιδιών* (3η έκδοση). Αθήνα: Gutenberg.

Doxiadis, A. 2004. The Mystery of the Black Kinght's Noetherian Ring: An investigation into the story-mathematics connection with a small detour through chess country. Keynote Address to the Fields Symposium on Online Mathematical Investigation as a Narrative Experience. University of Western Ontario. 11-13 June 2004.

Hughes, M. (1996). *Τα παιδιά και η έννοια των αριθμών. Δυσκολίες στην εκμάθηση των Μαθηματικών* (3η έκδοση). Αθήνα: Gutenberg.

Κολέζα, Ε. (2007). Τα μαθηματικά μέσα από τον καθρέφτη της λογοτεχνίας: Ένα ταξίδι στη χώρα των θαυμάτων. Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.), *Μαθηματικά και Λογοτεχνία. 6ο Διήμερο διαλόγου για τη διδασκαλία των Μαθηματικών* (σελ. 27-47). Θεσσαλονίκη: Ομάδα έρευνας της Μαθηματικής Εκπαίδευσης.

Μηλιώνης, Χ. (2006). *Τα μαθηματικά μέσα από τη λογοτεχνία: Διερεύνηση της άποψης των μαθητών* (σελ. 344-355). Πάτρα: Πρακτικά 23ου Πανελληνίου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.

Μηχαηλίδης, Τ. (2004) Μαθηματικές Μυθοπλασίες- Μια προσπάθεια ταξινομίας στη λογοτεχνία των μαθηματικών. Εφημερίδα *Καθημαερινή (επτά ημέρες). 10-11/4/2004.*.

Μουντζούρη, Γ. (2007). *Η ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων μέσω κειμένων παιδικής λογοτεχνίας: Διερεύνηση του διδακτικού πλαισίου.* Διπλωματική διατριβή. Πάτρα: Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο.

Nunes, T. (1999). Mathematics learning as the Socialization of the mind. *Mind, culture, and activity, 6*(1), 33-52.

Παπαρούση, Μ. (2007). *Η δομή της λογοτεχνικής αφήγησης: Σκέψεις για μια διδακτική αξιοποίηση.* Στο Τ. Τσιλιμένη (Επιμ.), *Αφήγηση και εκπαίδευση. Εισαγωγή στην τέχνη της αφήγησης. Άρθρα και μελετήματα* (σελ. 179-195). Βόλος: Εκδόσεις Εργαστηρίου Λόγου και Πολιτισμού Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

Σακελλαρίου, Χ. (1990). *Ιστορία της παιδικής λογοτεχνίας. Ελληνική και παγκόσμια* (6η έκδοση). Αθήνα: Φιλιππότης.

Σακονίδης, Χ. (2004). *Μαθαίνοντας και διδάσκοντας μαθηματικά.* Εκπαίδευση Μουσουλμανοπαίδων 2002-2004 (ΥΠΕΠΘ, ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ). Αθήνα: ΥΠΕΠΘ.

Satariano, P. (1994). *Story time math time: Math explorations in children's literature.* Palo Alto, CA: Dale Seymour.

Snow, C.P. 1960. The Two Cultures. Cambridge. Cambridge University Press

Τολστόι, Α. & Σάρκυ Ν. (2002). *Η πελώρια κολοκύθα.* Αθήνα: Άμμος.

Τσιλιμένη, Τ. (2007). Εισαγωγή στην Τέχνη της Αφήγησης. Στο Τ. Τσιλιμένη (Επιμ.), *Αφήγηση και εκπαίδευση. Εισαγωγή στην τέχνη της αφήγησης. Άρθρα και μελετήματα* (σελ. 15-74). Βόλος: Εκδόσεις Εργαστηρίου Λόγου και Πολιτισμού Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

Χασάπης, Δ. (2007). Μαθηματικά και Λογοτεχνία: Μια αιτούμενη σύζευξη. Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.), *Μαθηματικά και Λογοτεχνία. 6ο Διήμερο διαλόγου για τη διδασκαλία των Μαθηματικών* (σελ. 3-14). Θεσσαλονίκη: Ομάδα έρευνας της Μαθηματικής Εκπαίδευσης.

Χρονάκη, Α. (2008a). *Βλέμματα, Ομιλίες και Σιωπές. Όψεις της «επικοινωνίας» στο πλαίσιο της έρευνας για τη διδακτική των μαθηματικών* (σελ. 130-171). Βόλος: Πρακτικά 25ου Πανελληνίου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.

Χρονάκη, Α. (2008b). Το «διδακτικό πείραμα»: μελετώντας τη διαδικασία μάθησης και διδασκαλίας. Στο Β. Σβολόπουλος (Επιμ.), *Σύνδεση εκπαιδευτικής έρευνας και πράξης. Η ακαδημαϊκή πλευρά* (σελ. 371-401). Αθήνα: Ατραπός.

Χρονάκη Α. & Μουντζούρη, Γ. (2009). Αφήγηση, αριθμοί και συμβολική δράση: Στιγμές κατανόησης γραπτού συμβολισμού στις μικρές ηλικίες. Στο Φ. Καλαβάσης, Σ. Καφούση, Μ. Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Χ. Σκουμπουρδή & Γ.

Φεσάκης (Επιμ.), *Πρακτικά του 3ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών (ΕΝΕΔΙΜ) με τίτλο: Μαθηματική Εκπαίδευση και Οικογενειακές πρακτικές* (σελ. 425-435). Ρόδος: Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Van Oers, B. (1996). Learning Mathematics as a meaningful activity. In L. Steffe, Nesher, P. Cobb, G. Goldin & B. Greer (Eds.), *Theories of Mathematical Learning* (pp. 91-113). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

chronaki@uth.gr

ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙΙ

Μαθηματικά και Τέχνες στην Εκπαίδευση: Εκπαιδευτικές Προτάσεις & Διδακτικά Εγχειρήματα

[λευκή σελίδα]

«ΤΕΧΝΗ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΜΟΥΣΕΙΟ ΗΡΑΚΛΕΙΔΩΝ

Άρης Μαυρομμάτης

Μαθηματικός, καθηγητής των Εστιών Γνώσης και Επιστημών, Επιστημονικός διευθυντής Εστίας Γνώσης Χαλκίδας

Σοφία Σταθοπούλου

Μαθηματικός, Συντονίστρια Μαθηματικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης Αρσακείων Σχολείων

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο παρόν άρθρο γίνεται η παρουσίαση – πρόταση, μιας *άλλης διδακτικής προσέγγισης των Μαθηματικών εννοιών* που διδάσκονται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση και ειδικότερα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, μέσα σ' ένα *αλληλεπιδραστικό μαθησιακό περιβάλλον*, όπως αυτό που διαμορφώνει η *Τέχνη* της *Ζωγραφικής*. Η μελέτη προτείνεται να γίνει μέσα από 23 ζωγραφικούς πίνακες, εγνωσμένης εικαστικής αξίας, διαφορετικών εποχών, καθώς επίσης διαφορετικού ύφους και τεχνοτροπίας, που κάποιοι από αυτούς - ως κλάση μιας διαμέρισης των 23 αυτών πινάκων- προκαλούν τις αισθήσεις στην αναγνώριση γεωμετρικών μορφών της επίπεδης, αλλά και της στερεάς Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Στη συνέχεια, μέσω των μορφών αυτών επιδιώκεται η δημιουργία των ακόλουθων *νοητικών αναγκών*:

1ο: της αναζήτησης ενός *ακριβούς ορισμού* της έννοιας του *σχήματος*, καθώς επίσης και της διάκρισης της έννοιας αυτής, από εκείνες που στην Ευκλείδεια Γεωμετρία χαρακτηρίζονται ως *πρωταρχικές* έννοιες.

2ο: της *κατασκευασιμότητας* ενός γεωμετρικού σχήματος, αλλά και της ανάγκης χρήσης του *κανόνα* και του *διαβήτη*, ως των μόνων απαραίτητων οργάνων για μια γεωμετρική κατασκευή.

3ο: της *αποδειξιμότητας*, προκειμένου ο ισχυρισμός: το αντίγραφο της κατασκευής είναι ίσο με το αρχετυπικό, να μπορεί με βεβαιότητα να χαρακτηρισθεί αληθής.

Η παρούσα πρόταση απευθύνεται, ως πρόταση επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, με στόχο, μέσω της διαθεματικής προσέγγισης της *Τέχνης της Ζωγραφικής* και της *Επιστήμης των Μαθηματικών*, να προκληθούν ανάγκες βαθύτερων προβληματισμών, που θα τους οδηγήσουν στη διαμόρφωση μιας ολοκληρωμένης εικόνας της *έννοιας της διαθεματικότητας*, στην *ανάπτυξη φιλοσοφικών στοχασμών* και τέλος στην *αναβάθμιση της Μαθηματικής τους Παιδείας*.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ

Η ανάγκη της έκφρασης υποκρύπτει μέσα της τα πρώτα σπέρματα ενός πρώιμου λανθάνοντος φιλοσοφικού στοχασμού και αποτυπώνεται αισθητικά μέσω της Τέχνης. Μολονότι δεν μπορούμε να πούμε πότε άρχισαν οι άνθρωποι να στοχάζονται φιλοσοφικά πάνω στην Τέχνη, διαθέτουμε μερικά στοιχεία για τα στάδια που πρέπει να προηγήθηκαν από την εμφάνιση της αισθητικής με την πλήρη σημασία του όρου (1).

Πρώτα από όλα θα πρέπει να έχει γίνει έστω και πολύ αόριστα, η διάκριση των έργων τέχνης από τα υπόλοιπα πράγματα. Η γενική έννοια «Τέχνη» μπορεί να διαμορφώθηκε αργότερα, αλλά οι άνθρωποι θα πρέπει να δέχονταν ήδη σε εκείνο το πρώτο στάδιο, ότι οι εικονικές απεικονίσεις, οι πρώιμες μουσικές συνθέσεις, οι μύθοι κ. ά., ανήκουν σε ειδικές κατηγορίες, εξαιτίας των τους ή κάποιας ιδιαίτερης αξίας τους. Και αυτό σημαίνει ότι, τουλάχιστον σε ορισμένες περιπτώσεις, τα αντικείμενα τέχνης θα πρέπει να αντιμετωπίζονταν, να περιγράφονταν και να αξιολογούνταν σύμφωνα με ορισμένους τρόπους γνωρισμάτων (2).

Έπειτα ο φιλοσοφικά στοχαζόμενος άνθρωπος, ο οποίος αναζητά αντικείμενα που να κεντρίζουν τη σκέψη του, θα μπορούσε να βρει μια σειρά από φαινόμενα που του προκαλούν θεμελιακές απορίες και θα μπορούσε να αρχίσει να διατυπώνει προτάσεις οι οποίες, χάρη στη γενικότητα και τη διεισδυτικότητα τους, θα μπορούσαν να θεωρηθούν γνήσια φιλοσοφικές (3).

Προτού εμφανιστεί η αισθητική σε μια συγκεκριμένη κουλτούρα δεν είναι απαραίτητο να ξεχωρίζει αυτή η κουλτούρα ορισμένα αντικείμενα ως εξειδικευμένα αισθητικά αντικείμενα, ως αντικείμενα δηλαδή που συνδέονται αποκλειστικά και μόνο με αυτό το ενδιαφέρον. Θα πρέπει όμως να υπάρχει τουλάχιστον κάτι σαν αισθητικό ενδιαφέρον που στρέφεται προς μερικά αντικείμενα και όχι προς άλλα. Και χωρίς αμφιβολία η φιλοσοφία της τέχνης προϋποθέτει ότι ο άνθρωπος έκανε από πολύ νωρίς μια προσπάθεια να ξεδιαλύνει και να διευκρινίσει τη φύση αυτού του ενδιαφέροντος, ρωτώντας τι είναι αυτό που κάνει μερικά αντικείμενα να είναι πολύτιμα με αυτό τον ιδιόμορφο τρόπο και άλλα να μην είναι πολύτιμα (4).

Πολλοί υποστηρίζουν ότι, πίσω από μια φαινομενική ελευθερία μεγάλων εικαστικών έργων τέχνης και πέρα από οποιαδήποτε δεξιοτεχνία, υποκρύπτονται εξειδικευμένες και συγκαλυμμένες μαθηματικές γνώσεις (5).

Η οργάνωση των πλαστικών ιδεών διέπεται από κανόνες που δεν αφορούν αποκλειστικά τις αναγκαιότητες της ζωγραφικής. Οι αρχές της μνημειακής τέχνης επιβάλλονται σε κάθε έργο μεγάλων διαστάσεων, ζωγραφικής, γλυπτικής ή αρχιτεκτονικής. Η επενέργεια του πλαισίου στο περιεχόμενό του, είναι στην αρχή πολύ γενική, αλλά καθοριστική για την οργάνωση της

ζωγραφικής επιφάνειας, επάνω στην οποία «γεννάει» γεωμετρικά σχήματα, μερικές φορές πολύ σύνθετα.

Η εξέλιξη των ιδεών και των μορφών διαμέσου των αιώνων, έπαιξε πολύ μεγάλο ρόλο στη διαμόρφωση αυτής της υπόρρητης σχέσης ανάμεσα στην τέχνη και στα μαθηματικά.

Τον Μεσαίωνα υπήρξε μια γεωμετρία του που είχε τα δικά της εντελώς στοιχεία και που ατόνισαν μαζί με τον πολιτισμό που εκφράστηκε μέσω αυτής. Κατά την περίοδο αυτή οι αρμονικές χαράξεις που κατασκευάζονται με τον διαβήτη, γίνονται όλο και πιο πολύπλοκες και σταδιακά εγκαταλείπονται.

Με την Αναγέννηση παρατηρείται μια στροφή προς την απλότητα που ευνοεί την επικράτηση νέων αισθητικών αντιλήψεων, οι οποίες αποτυπώνονται με την εφαρμογή στις πλαστικές τέχνες, αρμονικών σχέσεων, δανεισμένων από τη μουσική, τη φιλοσοφική ομορφιά των οποίων είχε υμνήσει ήδη ο Πλάτωνας στον Τίμαιο (6). Αυτές οι σχέσεις αφού μελετήθηκαν αρχικά από τους θεωρητικούς, εφαρμόστηκαν από τους αρχιτέκτονες και πολύ σύντομα χρησιμοποιήθηκαν από τους ζωγράφους. Παρ' όλα αυτά οι αισθητικές αντιλήψεις του Μεσαίωνα δεν ξεχάστηκαν. Το έντονο ενδιαφέρον για την Ευκλείδεια Γεωμετρία παραμένει, αλλά οι εφαρμογές της απλοποιούνται και οι καλλιτέχνες στρέφονται στη χρήση κύκλων και κυκλικών τόξων ή της χρυσής τομής.

Τέλος, η πολύ απλή αλλά έντονη επενέργεια του ορθογωνίου σχήματος του πίνακα συνεχίζει να ασκείται ανεξάρτητα από τις προσωπικές προτιμήσεις ή τις διάφορες τεχνοτροπίες. Το ίδιο το γεωμετρικό σχήμα του πλαισίου, δημιουργεί και επιβάλλει μια αρμονική κατανομή του περιεχομένου, η οποία μπορεί να είναι μια απλή διακριτική υπόδειξη ή μια αυστηρή πειθαρχία. Η ζωγραφική δεν περιορίζεται μόνο στην επίπεδη επιφάνεια. Επιχειρεί την κατάκτηση του χώρου, και τα διάφορα στάδια αυτής της κατάκτησης θα εκφραστούν με τη σειρά τους στη σύνθεση: κατάκτηση με τη βοήθεια της γεωμετρίας, η οποία χρησιμοποιεί και τις τρείς διαστάσεις μέσω της φωτοσκίασης. Αυτή η πορεία από το ένα στάδιο στο άλλο οδηγεί σε μια πλαστική της ψευδαίσθησης η οποία υπακούει στους ίδιους νόμους σταθερότητας και βαρύτητας με την πραγματική πλαστική (7).

Όμως αυτοί οι νόμοι της σταθερότητας και της ακρίβειας κάπου θα έπρεπε να αναζητηθούν και οργανωμένοι σε ένα Λογικό Όλον να διατυπωθούν. Αυτό το Λογικό Όλον το προσέφερε η Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Ο Ευκλείδης περιπλανώμενος μέσα στα όρια των αποδεικτικών δυνατοτήτων της νόησης κατόρθωσε να εντοπίσει και να περιγράψει βασικούς χαρακτήρες του διαισθητικού χώρου. Σ' αυτή την περιγραφή κυριαρχεί η λογική

αφαίρεση και η επισήμανση ορίων εφαρμογής του λογικού οργάνου. Κατ' αρχήν επινοούνται υπερβατικά σύμβολα, όπως *το σημείο, η ευθεία και το επίπεδο,* τα οποία αν και ανύπαρκτα για την αίσθηση, του χώρου, μπορούν να γίνουν φορείς βασικών χαρακτηριστικών του, δηλαδή με την βοήθεια τους να διατυπωθούν ιδιότητες του αισθητού χώρου, οι οποίες δεν είναι δυνατόν να προκύψουν σαν αποτέλεσμα των συμπερασμάτων της λογικής. Οι γεωμετρικές σχέσεις και ιδιότητες που διατυπώνονται σαν αξιώματα εκφράζουν σταθερούς χαρακτήρες της συνείδησης, που έχουμε για το χώρο. Τα γεωμετρικά αξιώματα μαζί με αυτά της λογικής θεμελιώνουν την ευκλείδεια γεωμετρία, η οποία είναι νοητική έκφραση του αισθητού χώρου.

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία και η κλασική λογική είναι από τη φύση φτιαγμένες από το ίδιο υλικό. Ενώ για κάθε άλλο χώρο είμαστε υποχρεωμένοι να χρησιμοποιήσουμε υλικό, που μπορεί να είναι ανεξάρτητο από την αίσθηση, αλλά, συμβιβαστό με αυτό της λογικής (τα αξιώματα των αφηρημένων χώρων οφείλουν να μην είναι αντιφατικά) στην περίπτωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας η θεμελίωση της δεν είναι αντιφατική με την ίδια τη φύση της.

Η Ευκλείδεια Γεωμετρική πραγματικότητα, επειδή είναι νοητικό κατασκεύασμα, είναι απαλλαγμένη από όλες τις αδυναμίες της παρατήρησης και του εμπειρισμού. Η νόηση αδέσμευτη από την θολή εικόνα της εμπειρίας, μέσα σ' ένα κόσμο απολύτως καθορισμένων εννοιών με γνωστή και αμετάβλητη δομή αναζητάει, με τη βοήθεια μόνο του λογικού οργάνου, να κατακτήσει ολόκληρο το οικοδόμημα των γεωμετρικών ιδεών.

Κάθε πραγματικότητα που έχει κοινούς χαρακτήρες με τον αισθητό κόσμο μπορεί να βρει αφηρημένο λογικό είδωλο μόνο μέσα σ' ένα Ευκλείδειο χώρο, δηλαδή οι πραγματικότητες που στηρίζονται στην κοινή αίσθηση είναι ευκλείδειες.

Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως, αναζητάμε μέσα από τους πίνακες αυτού του άρθρου, περισσότερο την γένεση των έργων, παρά τα μυστικά της *ωραίας μορφής* τους. Δηλαδή αναζητάμε τις *λογικές εσωτερικές δομές* των έργων παρά τα στοιχεία ενός δεδομένου κανόνα που να αποτελεί κριτήριο αισθητικής αξίας.

Έτσι σε επίπεδο διδακτικής προσέγγισης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας χρησιμοποιούμε την Τέχνη προκειμένου να προκαλέσουμε τις αισθήσεις. Αναζητάμε ερεθίσματα από αντικείμενα, όπως ζωγραφικούς πίνακες, γλυπτά, μουσικά κομμάτια και οτιδήποτε άλλο θα μπορούσε να αποτελέσει δημιούργημα μιας ανάγκης για έκφραση. Μέσα από αυτά τα ερεθίσματα θα προσπαθούμε να δημιουργήσουμε μικρές εμπειρίες, οι οποίες με τη σειρά τους θα γεννήσουν προβληματισμούς και ίσως απαιτητικά «γιατί;». Με τι τρόπο όμως θα απαντήσουμε σε αυτά τα «γιατί;». Αν η απάντηση είναι απλώς

μια περιγραφική αφήγηση αυτών των εμπειριών τότε δεν θα έχουμε κάνει τίποτα περισσότερο από το να διατυπώσουμε την άποψη μας, δηλαδή την γνώμη μας. Η γνώμη όμως έχει χαρακτήρα υποκειμενικό, κάτι που άλλωστε αρμόζει στην Τέχνη.

Θα μπορούσαν οι εμπειρίες αυτές να ελεγχθούν με τρόπο ώστε οι απαντήσεις στα «γιατί;» να έχουν χαρακτήρα αντικειμενικό; Με άλλα λόγια είναι δυνατόν να βρεθεί ένας μηχανισμός ελέγχου της αντικειμενικότητας των εμπειριών μας;

Πράγματι ένας τέτοιος μηχανισμός υπάρχει και είναι ακριβώς αυτός που προσφέρουν τα μαθηματικά (στην προκειμένη περίπτωση η Ευκλείδεια Γεωμετρία), δεδομένου ότι βασίζονται σε αδιαμφισβήτητες αρχές (αξιώματα) που μέσω της λογικής και των αποδείξεων αντικειμενικοποιούν τις ιδιότητες του χώρου και επομένως είναι σε θέση να τις ανακαλύπτουν και να τις εκφράζουν. Η μακροχρόνια προσπάθεια του ανθρώπου να αναπτύξει μαθηματικά ως μέσον για την αντικειμενική προσέγγιση των νόμων που διέπουν τον κόσμο μέσα στον οποίο ζει- και που η τέχνη με εκφραστικό τρόπο απεικονίζει είτε μουσικά, είτε εικαστικά -οδήγησε στην ανακάλυψη νόμων και φαινομένων που δεν γίνονται άμεσα αντιληπτά από τους διαύλους επικοινωνίας που παρέχουν οι αισθήσεις .

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Α. *Δίδεται ο παρακάτω κατάλογος ζωγραφικών πινάκων και διατυπώνεται η ακόλουθη ερώτηση:*

Μπορείτε να ταξινομήσετε τους ακόλουθους πίνακες ;

Εδώ αναζητάται η επιλογή και διατύπωση κριτηρίων.

Μια συνήθης επιλογή κριτηρίων βάσει των οποίων γίνεται η ταξινόμηση είναι η ακόλουθη:

- *Πρόσωπα.*
- *Τοπία.*
- *Καθημερινά αντικείμενα.*
- *Γεωμετρικά αντικείμενα.*

Β. *Στην ομάδα των πινάκων με γεωμετρικά αντικείμενα διατυπώνεται μια νέα ερώτηση:*

Μπορείτε να προβείτε σε μια ταξινόμηση των γεωμετρικών αντικειμένων που επιλέξατε;

Η συνήθης ταξινόμηση είναι η ακόλουθη:

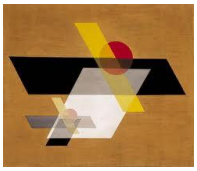
- Ομάδα των *επιπέδων* σχημάτων
- Ομάδα των *στερεών* σχημάτων

Γ. *Ερωτήσεις που διατυπώνονται στην ομάδα των επιπέδων σχημάτων:*

Μπορείτε να *αναπαραστήσετε* τα γεωμετρικά αντικείμενα που βρίσκονται σε κάθε περίπτωση επάνω στον καμβά κάθε πίνακα;

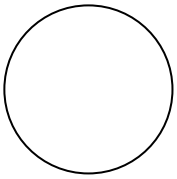
Ενδεικτικό παράδειγμα:

Ζωγραφικός Πίνακας	Εικονιζόμενα αντικείμενα

1. Αν σβήνατε τα αντικείμενα αυτά, θα έπαυαν να υπάρχουν για εσάς; Αν όχι με ποιο τρόπο μπορείτε να μεταφέρετε την πληροφορία των αντικειμένων αυτών σε κάθε περίπτωση;

Ενδεικτικό παράδειγμα:

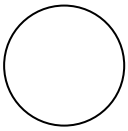
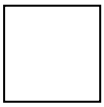
Μορφή αντικειμένου (εικονική αναπαράσταση)	Λεκτική διατύπωση (φυσική γλώσσα)
	

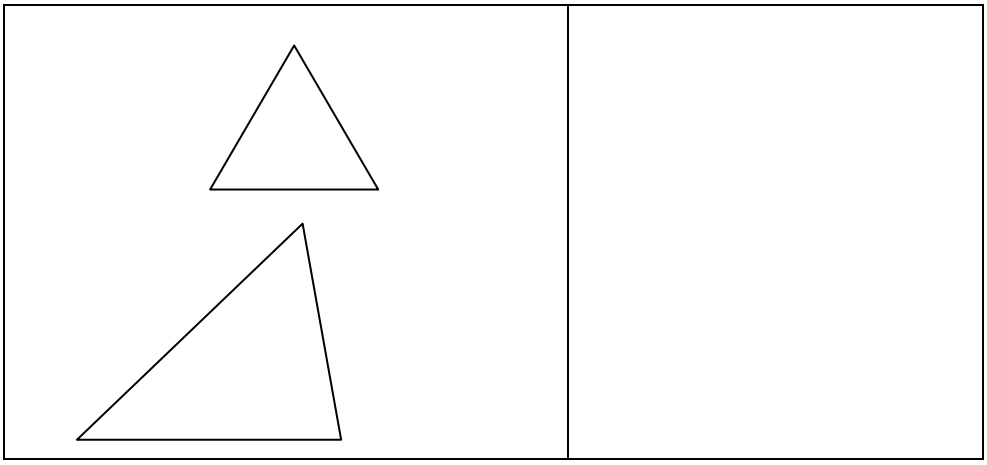
2. Μπορείτε να *ταξινομήσετε τα αντικείμενα σύμφωνα με την ή τις πληροφορίες, οι οποίες συγκροτούν* καθ' ένα από τα παραπάνω αντικείμενα;

Ενδεικτικό παράδειγμα:

Ανοικτά , κλειστά, ευθύγραμμα, καμπυλόγραμμα, κ.λ.π.

3. Στην πρώτη στήλη του πίνακα που ακολουθεί δίνονται κάποια από τα γεωμετρικά αντικείμενα. Μπορείτε στην αντίστοιχη θέση της διπλανής στήλης να *κατασκευάσετε* γεωμετρικά αντικείμενα ίσα με αυτά;

Δεδομένα γεωμετρικά αντικείμενα	Κατασκευαζόμενα γεωμετρικά Αντικείμενα
.	
	
	



4. Μπορείτε να *περιγράψετε* σε κάθε περίπτωση τον *τρόπο με τον οποίο κατασκευάσατε* καθ' ένα από τα παραπάνω γεωμετρικά αντικείμενα;
5. Χρησιμοποιήσατε κάποια *ειδικά εργαλεία* προκειμένου να βοηθηθείτε στις κατασκευές σας;
6. Αν ναι, τότε *περιγράψτε τα εργαλεία* αυτά.
7. Μπορείτε να ισχυριστείτε ότι στην περίπτωση αυτή, *υπάρχουν κάποια ελάχιστα δυνατά εργαλεία* με τα οποία μπορούμε να κάνουμε οποιαδήποτε γεωμετρική κατασκευή;
8. Μπορείτε να *ισχυριστείτε με βεβαιότητα ότι το σχήμα που κατασκευάσατε είναι πράγματι ίσο* με το αντίστοιχο που σας δόθηκε;

Δ. *Μπορούν οι αντίστοιχες ερωτήσεις να διατυπωθούν στην ομάδα των στερεών σχημάτων;*

Ε. *Ερωτήματα βαθύτερης ανάλυσης:*

1. Ποια είναι η αναγκαιότητα του ορισμού μιας Έννοιας;
2. Ποια είναι η αναγκαιότητα της Γεωμετρικής Κατασκευής;
3. Ποια είναι η αναγκαιότητα της Απόδειξης ενός Ισχυρισμού;

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

1ος Παρατήρηση και *ταξινόμηση* των πινάκων.

Στόχος:

- *Ανάπτυξη κριτηρίου.*

2ος Καταγραφή κριτηρίου ή κριτηρίων που αναπτύχθηκαν.

Στόχος:

- *Η ανάδειξη διαφορετικών κριτηρίων (εικαστικά, σημασιολογικά-εννοιολογικά, γεωμετρικά), ως αποτέλεσμα προσωπικών πεποιθήσεων. Υποκειμενικότητα*).

3ος Επιλογή της κλάσης των γεωμετρικών πινάκων και συζήτηση-διάλογος για τον λόγο της επιλογής αυτής.

Στόχοι:

- *Ανάδειξη μέσω του διαλόγου της ανάγκης της αντικειμενικότητας.*
- *Παρατήρηση, ανακάλυψη και καταγραφή γεωμετρικών μορφών.*
- *Ταξινόμηση των μορφών αυτών σε απλές και σε σύνθετες.*
- *Αποσύνθεση των σύνθετων μορφών σε απλές.*
- *Ανάδειξη της ανάγκης ορισμού της έννοιας του σχήματος.*
- *Ανάδειξη της αναγκαιότητας του ορισμού των γεωμετρικών μορφών (ως μετάβαση από το αισθητά παρατηρούμενο «εκτατικό», στο νοητά αντιλαμβανόμενο «εκτασιακό»).*
- *Ανάδειξη της αναγκαιότητας της κατασκευής (ως μετάβαση από το αρχέτυπο στην εικόνα).*
- *Ανάδειξη της αναγκαιότητας των γεωμετρικών οργάνων του κανόνα και του διαβήτη, καθώς επίσης και ότι αυτά είναι τα ελάχιστα δυνατά που απαιτούνται για οποιαδήποτε γεωμετρική κατασκευή (ως κοινών οργάνων κατασκευής γεωμετρικών σχημάτων).*
- *Ανάδειξη της αναγκαιότητας της απόδειξης.*
- *Ανάδειξη της αναγκαιότητας ενός συμφωνημένου και κοινά αποδεκτού αξιωματικού συστήματος, εντός του οποίου θα νομιμοποιείται η απόδειξη μιας γεωμετρικής πρότασης.*

ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΩΝ ΒΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

1ο *Παρατηρήστε* τους ζωγραφικούς πίνακες και *ταξινομήστε* τους.

2ο Επιλέξτε την κλάση αυτών που ονομάσατε γεωμετρικούς πίνακες και προβείτε (αν αυτό είναι δυνατό) σε μια *νέα ταξινόμηση*.

3ο Κατασκευάστε πίνακα δυο στηλών και πλήθους γραμμών τόσων, όσων τα εικονίδια των πινάκων της γεωμετρικής κλάσης. Τοποθετήστε στα κελιά της πρώτης στήλης, τα εικονίδια των πινάκων της γεωμετρικής κλάσης.

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ

4ο Τοποθετήστε αντίστοιχα στα κελιά της δεύτερης στήλης, τα αντικείμενα του κάθε πίνακα τα οποία έκριναν, ότι ο πίνακας είναι γεωμετρικός.

5ο Προβείτε σε μια *νέα ταξινόμηση* του συνολικού πλήθους των αντικειμένων της δεύτερης στήλης του πίνακα.

6ο Κατασκευάστε ένα καινούργιο πίνακα δύο στηλών και πλήθους γραμμών τόσων, όσων οι κλάσεις των αντικειμένων του προηγούμενου βήματος.

ΟΡΙΣΜΟΣ

7ο Απεικονίστε στην πρώτη στήλη εικονίδια των αντιπροσώπων των κλάσεων της ταξινόμησης του 6ου βήματος και στην αντίστοιχη θέση (κελί) της δεύτερης στήλης εκφράστε το *διατυπώνοντας το στην φυσική μας γλώσσα.*

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

8ο Απεικονίστε στην πρώτη στήλη εικονίδια των αντιπροσώπων των κλάσεων της ταξινόμησης του 7ου βήματος και στην αντίστοιχη θέση (κελί) της δεύτερης στήλης, *κατασκευάστε αντικείμενο ίσο με αντίστοιχό του της πρώτης στήλης.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

9ο *Αποδείξτε* ότι το αντικείμενο που κατασκευάσατε είναι ίσο με το αρχετυπικό του.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ.

1. Beardsley C. M., "Aesthetics from Classical Greece to the Present", εκδόσεις Νεφέλη 1989, σελ. 17
2. Atkins J. W. H , "Literary Criticism in Antiquity", Cambridge. University Press, 1934, κεφ. 1,2.
3. Zeller E. , "A History of Greek Philosophy from the Earliest Period of the time of Socrates", London 1881, I, 306-533.
4. Sperduti A. " The Divine Nature of Poetry in Antiquity", Trans, and Proc. Of the American Philol. Assoc. LXXXI (1950) Q 209-240.
5. Bouleau C. "Η κρυφή γεωμετρία των ζωγράφων", Ενωση καθηγητών καλλιτεχνικών μαθημάτων, 2003, σελ. 9.
6. Crocker L. R., " Pythagorean Mathematics and Music", Jour. Aesth. And Art Crit. XXII, London 1964, 189-98.
7. Bouleau C. "Η κρυφή γεωμετρία των ζωγράφων", Ενωση καθηγητών καλλιτεχνικών μαθημάτων, 2003, σελ. 11.

amavromatis@rhodes.aegean.gr

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ «ΤΕΧΝΗ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» ΜΟΥΣΕΙΟ ΗΡΑΚΛΕΙΔΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Αποστόλης Παπανικολάου

Καθηγητής Μαθηματικών Εστιών Γνώσης και Επιστήμης

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το πρόγραμμα «Τέχνη και Μαθηματικά - Γυμνάσιο, Λύκειο» έχει σχεδιασθεί με τη φιλοδοξία να αποτελέσει συμπλήρωμα της διδασκόμενης ύλης των Μαθηματικών της δευτεροβάθμιας παιδείας, στην κατεύθυνση της κοινά επιθυμητής «διαθεματικότητας» από όλους τους ερευνητές της Διδακτικής, διασυνδέοντας τα Μαθηματικά με την Ιστορία της Επιστήμης και της Τέχνης, τη Φιλοσοφία και τα κλασικά γράμματα.

Στην παρούσα δημοσίευση :

α) Παρουσιάζεται το θεωρητικό πλαίσιο της σκοπιμότητας της αναζήτησης της διασύνδεσης της Τέχνης με τα Μαθηματικά αλλά και της επισήμανσης των ειδοποιών διαφορών των δύο αυτών βασικών τομέων πνευματικής δραστηριότητας της ανθρώπινης φύσης με σκοπό τη νομιμοποίηση της εφαρμογής σχετικών δραστηριοτήτων στην υπηρεσία της διδακτικής των Μαθηματικών.

β) Γίνεται μια συνοπτική παράλληλη περιήγηση στην ιστορία αφενός της Τέχνης και αφετέρου των Μαθηματικών, με σκοπό την αναζήτηση των σημείων όπου συναντώνται και αλληλοεπηρεάζονται οι δυο αυτοί τομείς της ανθρώπινης σκέψης και δράσης. Η περιγραφή ευελπιστεί να είναι ένας οδηγός αναφοράς για περαιτέρω διερεύνηση των θεμάτων που θίγονται από τους μαθητές σε συνεργασία με τους καθηγητές τους.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Υπάρχει Σχέση Μαθηματικών και Τέχνης; Επιστήμης και τέχνης γενικότερα;

Τα Μαθηματικά αναμφίβολα έχουν το στοιχείο της αντικειμενικότητας και σχετίζονται με το λογικό τμήμα του ανθρώπου σε αντίθεση με την Τέχνη που έχει το στοιχείο της υποκειμενικότητας και σχετίζεται κυρίως με το συναισθηματικό τμήμα. Άρα καταρχήν φαίνεται μια μεγάλη αγεφύρωτη διαφορά.

Το θέμα της Τέχνης και της σχέσης της με τις αλήθειες των Μαθηματικών και της επιστήμης όπως και πολλά άλλα βέβαια έχει εξετασθεί εκτενέστατα στο Πλατωνικό αλλά και το Αριστοτελικό έργο και όπως σε πολλά παρόμοια ερωτήματα θα ανακαλύψουμε ξανά τον τροχό αν δεν ανατρέξουμε στις αναζητήσεις των γιγάντων της κλασικής περιόδου.

Ο Πλάτων με πάνω από 100 αναφορές του στην Τέχνη, ασχολείται ιδιαίτερα με αυτήν, της ασκεί δριμύτατη κριτική, (με εξαίρεση την αρχιτεκτονική) θεωρώντας την ως απλή μίμηση της μιμήσεως, απεικόνιση και αντίγραφο δηλαδή του αισθητού κόσμου, που με τη σειρά του είναι αντίγραφο και απεικόνιση του νοητού κόσμου των ιδεών. Έτσι θεωρεί ότι είναι τρεις φορές μακριά από την αλήθεια. Η Τέχνη (ως παράγουσα εμπειρικά αντίγραφα και εικασίες) και τα Μαθηματικά ως μέσα αναζήτησης του αγαθού τοποθετούνται αξιολογικά από τον Πλάτωνα σε συγκεκριμένες θέσεις στην περίφημη τετμημένη γραμμή του διαλόγου «Πολιτεία».[1]. Και μπορεί κανείς να συμφωνήσει ή να διαφωνήσει με τις Πλατωνικές θέσεις για τη φύση της αλήθειας των Μαθηματικών προτάσεων σε σύγκριση με τη φύση της αλήθειας ή μη των δημιουργημάτων της Τέχνης. Σίγουρα όμως δεν μπορεί να μην εισέλθει στον προβληματισμό που εισάγει ο Πλάτων, διότι ο προβληματισμός για τις «μιμήσεις» της Τέχνης γενικεύεται και ερευνάται από τον μεγάλο φιλόσοφο για όλες γενικώς τις «μιμήσεις». Και οι μιμήσεις ερμηνευόμενες ως αναπαραστάσεις των εννοιών είναι βασικό εργαλείο της επιστήμης γενικότερα αλλά και της διδακτικής ειδικότερα των Μαθηματικών και των φυσικών επιστημών.

Η Αριστοτελική άποψη είναι σαφώς ευμενέστερη από αυτήν του Πλάτωνα για την Τέχνη, έχοντας σε αυτήν αφιερώσει ένα ολόκληρο βιβλίο (την «Ποιητική») από όπου και ο ορισμός της τραγωδίας «έστι ουν τραγωδία μίμησις πράξεως σπουδαίας και τελείας…κάθαρσις». Η τραγωδία επιφέρει την κάθαρση και όχι τον εκμαυλισμό της ψυχής όπως ισχυρίζεται ο Πλάτων.

Η διελκυστίνδα αυτή που ιστορικά άρχισε με τον Πλάτωνα να θέλει την Τέχνη υπό τον έλεγχο του ορθολογισμού, (όχι όμως ανεξάρτητα όπως μάλλον λαναθασμένα του καταλογίζεται, αλλά σε σχέση με τον παιδευτικό της ρόλο)

υποβόσκει σε κάθε μορφή εκδήλωσης Τέχνης με την έννοια ότι η Τέχνη κάνει πάντα προσπάθειες ανεξαρτοποίησης από τον ορθολογισμό. Η αντίληψη ότι το κυρίαρχο χαρακτηριστικό της κλασικής παράδοσης είναι ότι υπάρχει ένας κανόνας στην τέχνη, ένα πρότυπο που πρέπει να ικανοποιεί το λογικό στην προσπάθειά του να βρει την τελειότητα, διαπότισε την Αναγέννηση και οδήγησε στην ακραία μορφή της, το νεοκλασικισμό, τον οποίο ο Herbert Read [2] χαρακτηρίζει μαζί με το όλο κλίμα του ακαδημαϊσμού, ως μαραμένη και αποξηραμένη τέχνη. Η άποψη ότι η τέχνη είναι ένα ενέργημα πνευματικό μεν αλλά όχι ορθολογιστικό όπως τα μαθηματικά και η επιστήμη γενικότερα είναι κυρίαρχη και σήμερα, στο χώρο των ανθρώπων της τέχνης.

Ας δούμε την άποψη του επιστήμονα Einstein για το θέμα αυτό: «Εκεί που ο κόσμος παύει να είναι η σκηνή για τις προσωπικές ελπίδες και επιθυμίες , εκεί που εμείς σαν ελεύθερα όντα , τον παρατηρούμε με απορία , αναρωτιόμαστε για αυτόν και μελετάμε, εκεί είναι η είσοδος στο βασίλειο της τέχνης και της επιστήμης. Εάν μεταφράσουμε αυτό που νιώσαμε και παρατηρήσαμε με τη γλώσσα της λογικής , τότε κάνουμε επιστήμη , αν το δείξουμε με μορφές των οποίων οι σχέσεις δεν είναι προσιτές στην ενσυνείδητη σκέψη αλλά αναγνωρίζονται με τη διαίσθηση ως μεστές νοήματος τότε κάνουμε τέχνη. Το κοινό στοιχείο και στην τέχνη και στην επιστήμη είναι η αφοσίωση σε κάτι που υπερβαίνει το προσωπικό , που κείται πέρα από την περιοχή της αυθαιρεσίας». [3]

Η δική μας άποψη είναι ότι οποιαδήποτε καλιτεχνική δημιουργία στο χώρο των εικαστικών τεχνών, από τη στιγμή που κάτι απεικονίζεται στο επίπεδο ενός καμβά ή στο χώρο εμπεριέχει αναμφίβολα, συνειδητή η ασυνείδητη χρήση γεωμετρίας και αναλογιών σε φανερή ή λιγότερο φανερή μορφή. Οι αναλογίες στην περίπτωση της ζωγραφικής μπορεί να περιορίζονται σε αναλογία τονισμού ή χρωματισμού.

Οριζόντιες γραμμές σε ένα ζωγραφικό πίνακα προσδίδουν την αίσθηση της ηρεμίας, οι κατακόρυφες την αίσθηση της έντασης ενώ οι καμπύλες «κυματιστές» γραμμές δίνουν την αίσθηση της κίνησης. Οι απλές γεωμετρικές μορφές-σχήματα αποτελούν ούτως ή άλλως βασικά παραστατικά εργαλεία αντίληψης και έκφρασης και με πρωτοπόρους τους ψυχολόγους της μορφής (Gestalt) αποτελούν πλέον αντικείμενο μελέτης της γνωστικής ψυχολογίας. Είναι άκρως ενδιαφέρουσα η αναζήτηση των ελαχίστων εκείνων γεωμετρικών στοιχείων, (geons όπως τα ονομάζει ο Irving Biederman) με τα οποία η ανθρώπινη αντίληψη αντιλαμβάνεται και εκφράζει τις βασικές μορφές του περιβάλλοντος. [4]

Είναι επίσης βέβαιο ότι σε εξπρεσιονιστικές και παραπλήσιες τάσεις της Τέχνης απουσιάζει η ύπαρξη γεωμετρικού υποβάθρου. Σημαντικό όμως παρόλα αυτά μέρος της μοντέρνας Τέχνης με πρωτεργάτες τους Kandinsky, Montrian, Vasarely, Escher κλπ χρησιμοποιεί συνειδητά γεωμετρικά σχήματα στα δημιουργήματά τους.

Μια εικαστική μορφή π.χ. ένα άγαλμα αποτελεί μια παρέμβαση στον αισθητό τρισδιάστατο χώρο, δεν είναι πάντοτε μια μείξη αυστηρών γεωμετρικών στερεών, όμως τα διάφορα μέρη του, συνειδητά η ασυνείδητα εμπεριέχουν μια αναλογία, αυτήν που αρμόζει στην ψυχική στόχευση του καλλιτέχνη. Οι αναλογίες αυτές είχαν και έχουν μια συγκεκριμένη στόχευση, π.χ. στην κλασική εποχή, την απεικόνιση του ιδανικού πολίτη – μαχητή, του καλού καγαθού και βέβαια δεν προυποθέτουν τη γνώση μαθηματικών και Γεωμετρίας αλλά του καλλιτεχνικού ταλέντου.

Από την έκδοση της «Aesthetic Measure» το 1933 από το μεγάλο μαθηματικού Birkhoff (γνωστό για την εισαγωγή της εργοδικής θεωρίας μέτρου), [5] όλο και περισσότερες έρευνες όμως έρχονται στο φως που αναδεικνύουν κρυφές μαθηματικές δομές[1] στα έργα τέχνης και μάλιστα κάποιες από αυτές πλέον συνεπικουρούν στον έλεγχο της γνησιότητας έργων τέχνης και πεποίθησή μας είναι ότι το αισθητικά όμορφο θα είναι κάποτε και μαθηματικά μετρήσιμο.

Αποδεχόμενοι την ανεξαρτησία των ενεργημάτων της τέχνης και της επιστήμης για διδακτικούς και μόνον σκοπούς μπορούμε να αναζητούμε καλλιτεχνήματα (και δεν είναι αξιοκαταφρόνητο το πλήθος τους) στα οποία είναι παραπάνω από φανερή η ύπαρξη γεωμετρικού και γενικότερα μαθηματικού υποβάθρου.

Θεωρούμε υπερβολική την άποψη της ύπαρξης συγκεκριμένου γεωμετρικού υποβάθρου σε μια πληθώρα πινάκων όπως αυτή του Bouleau στο βιβλίο «Η κρυφή γεωμετρία των ζωγράφων», [6] όμως δεν μπορεί να αμφισβητηθεί το συγκεκριμένο γεωμετρικό υπόβαθρο των αναγεννησιακών προοπτικών πινάκων. Επίσης δε θα μπορούσε να αμφισβητηθεί η ύπαρξη γεωμετρικού μοτίβου στα αραβουργήματα, στα δημιουργήματα της Op Art, και σε μια σειρά τεχνοτροπιών και έργων Τέχνης, τα οποία για διδακτικούς λόγους σταχυολογούμε στη συνέχεια του κειμένου.

Η μαθηματική δομή επίσης των μουσικών δημιουργιών είναι πέραν πάσης αμφισβήτησης.

[1] έστω και στατιστικής φύσεως, όπως στο VanGoghProject, SIAM News, Volume 42, Number 4, May 2009

Μια πιο εμπεριστατωμένη μελέτη της αναζήτησης σχέσης των Μαθηματικών με τη Τέχνη μπορεί κανείς να ανατρέξει στο «The Visual Mind II» [7] .

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΔΙΑΣΥΝΔΕΣΗΣ ΤΕΧΝΗΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

1) Γεωμετρική περίοδος της αρχαίας ελληνικής τέχνης (1000-700 π.χ.)

Για την περίοδο αυτή ο ακαδημαϊκός Χρύσανθος Χρήστου [8] παρατηρεί: «Έχουμε Γεωμετρική αφαίρεση, σφιχτοδεμένη και απόλυτα χαλιναγωγημένη σύνθεση, λογική, πνευματικότητα. Η Γεωμετρική τέχνη απομακρύνεται από την απεικόνιση της ορατής πραγματικότητας. Τα διακοσμητικά μοτίβα περιορίζονται αποκλειστικά στα γεωμετρικά σχήματα (ομόκεντροι κύκλοι, ημικύκλια, μαίανδροι ευθείες). Ακόμα και οι ανθρώπινες φιγούρες ή αυτές των ζώων είναι σχηματοποιημένες»

Εικόνα 1 : Αγγείο της Γεωμετρικής εποχής

Η έφεση στη Γεωμετρία από τους διακοσμητές των αγγείων αυτής της εποχής θα πρέπει να συσχετισθεί με το αναμφισβήτητο ιστορικό δεδομένο ότι στο τέλος της Γεωμετρικής εποχής, στα Ελληνικά παράλια της Μικράς Ασίας, η Γεωμετρία αρχίζει να γίνεται αυστηρή θεωρητική επιστήμη. Εισάγεται η έννοια της απόδειξης, μιας έννοιας που διαφοροποίησε τα Ελληνικά Μαθηματικά από αυτά των προγενεστέρων Βαβυλωνίων, Αιγυπτίων κλπ. Ενώ μέχρι τότε τα Μαθηματικά χρησίμευαν απλά στην ταχτοποίηση της

διαίσθησης και της εμπειρίας, με την έννοια της απόδειξης οι Αρχαίοι Έλληνες έκαναν το μεγάλο βήμα. Αμφισβήτησαν τη διαίσθηση και την εμπειρία και συνέλαβαν επιτυχώς ότι η αλήθεια πολλές φορές έρχεται σε σύγκρουση με αυτές.[9] Η διαίσθηση έτσι, είναι μεν ένας χρήσιμος οδηγός της σκέψης αλλά δεν είναι αλάνθαστη και αντίθετα οδηγεί πολλές φορές σε λάθος δρόμο.

2) Πυθαγόρειοι και Τέχνη

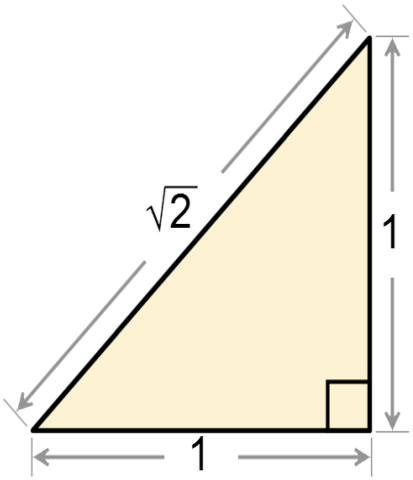
Η επόμενη ιστορική περίοδος όπου τα Μαθηματικά με την τέχνη είναι απόλυτα συνδεδεμένα είναι η περίοδος των Πυθαγορείων στην κάτω Ιταλία. (600 περίπου π.χ.)

Η κοινή αντίληψη για τους Πυθαγόρειους τους θεωρεί σημαντικούς και γνωστούς για το ομώνυμο Πυθαγόρειο θεώρημα. Κι όμως δεν είναι αυτή η μεγάλη συνεισφορά των Πυθαγορείων.

Από τους Πυθαγόρειους ξεκινάει μια μαθηματική αισθητική θεώρηση του σύμπαντος. Πεποίθησή τους είναι ότι τα πάντα στη φύση είναι αρμονικά συνδεδεμένα σε ένα σύστημα αριθμητικών αναλογιών. Μια από τις μεγάλες προσφορές στην ανθρωπότητα είναι η έννοια της μουσικής κλίμακας. Η μουσική , τα ωραία ακούσματα, βασίζονται στη διαδοχή ή συνήχηση ήχων με συγκεκριμένο λόγο συχνοτήτων (μουσικά διαστήματα). Οι Πυθαγόρειοι ανακάλυψαν ότι συνηχούν αρμονικά δύο χορδές όταν έχουν λόγους μηκών αντίστοιχα 2:1, 3:2, 4:3 και 9:8. (Σήμερα αυτό έχει επιβεβαιωθεί από τη Φυσική με την ανάλυση Fourier και τις έρευνες του Helmholtz. Όταν δυο νότες συνηχούν, η αρμονία που παράγεται οφείλεται στην σύμπτωση των αρμονικών τους συνιστωσών και αυτό γίνεται μόνο, όταν ο λόγος συχνοτήτων τους είναι λόγος μικρών φυσικών αριθμών).

Η οκτάβα π.χ. («δια πασών» όπως λεγόταν τότε) είναι το μουσικό διάστημα που προκύπτει από το λόγο 2:1. Αν κρουσθεί δηλ. μια χορδή και ξανακρουσθεί η μισή χορδή αφού δεσμευθεί η υπόλοιπη, οι δύο ήχοι που ακούγονται είναι πανομοιότυποι αλλά σε διαφορετικό ύψος. Το επόμενο διάστημα είναι το 3:2, κατόπιν το 4:3 και έπειτα το 9:8 .

Πεπεισμένοι, ότι όλα είναι αναλογίες φυσικών αριθμών προσπάθησαν να βρουν το λόγο της διαγωνίου δ προς την πλευρά α ενός τετραγώνου αλλά και το λόγο της πλευράς προς τη διαγώνιο ενός κανονικού πενταγώνου που μάλιστα το είχαν και έμβλημά τους. Δηλαδή προσπάθησαν να βρουν ένα τμήμα μ (κοινό μέτρο) ώστε $\delta = \kappa \cdot \mu$ και $\alpha = \lambda \cdot \mu$ (οπότε ο λόγος δ/α θα ήταν ίσος με κ/λ). Οι ιστορικοί μιλάνε για μια από τις μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών και ταυτόχρονα για την πρώτη μεγάλη κρίση στα θεμέλιά τους. [10]

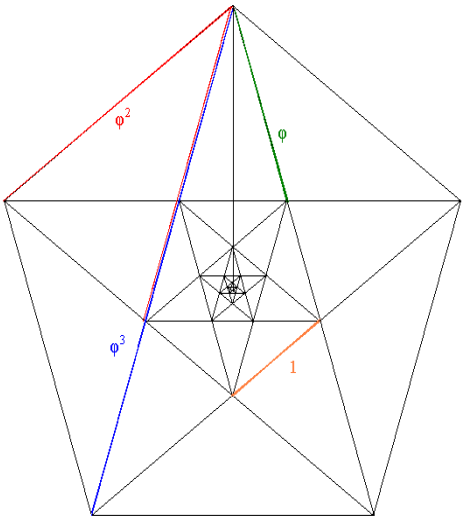


Εικόνα 2

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

Εικόνα 3 : Το συνεχές κλάσμα της $\sqrt{2}$

Οι Πυθαγόρειοι έκαναν πρώτοι τη διαπίστωση ότι τα τμήματα δ και α είναι ασύμμετρα. Δεν είναι δυνατόν να βρεθεί ένα κοινό μέτρο όσο και αν μικραίνει το μ και έτσι ο λόγος δ/α δεν μπορεί να γραφεί ως κλάσμα (λόγος) φυσικών , είναι άρρητος λόγος. Οι Πυθαγόρειοι έτσι ήρθαν αντιμέτωποι με το άπειρο, την επ' άπειρο χωρίς αποτέλεσμα ελάττωση του μ. (Με σημερινή ορολογία τα άπειρα δεκαδικά ψηφία χωρίς καμία περιοδικότητα που προσεγγίζουν έναν άρρητο αριθμό).Κατασκεύασαν όμως ένα σύστημα «ανθυφαιρετικών γνωμόνων» με το οποίο διαπίστωσαν την περιοδικότητα του (με σημερινή ορολογία) συνεχούς κλάσματος που αναπαριστά το λόγο δ/α (τη σημερινή $\sqrt{2}$), και επινόησαν τους πλευρικούς-διαμετρικούς αριθμούς. (Με σημερινούς όρους δύο ισοσυγκλίνουσες ακολουθίες στο $\sqrt{2}$ η μια με έλλειψη και η άλλη με υπερβολή) . Κατόρθωσαν έτσι να καθυποτάξουν αυτήν την απειρία και να φθάσουν στο θαυμαστό επίτευγμα να μπορούν να προσεγγίσουν οσονδήποτε το λόγο διαγώνιος/πλευρά ενός τετραγώνου (το σημερινό $\sqrt{2}$). [11], [12].



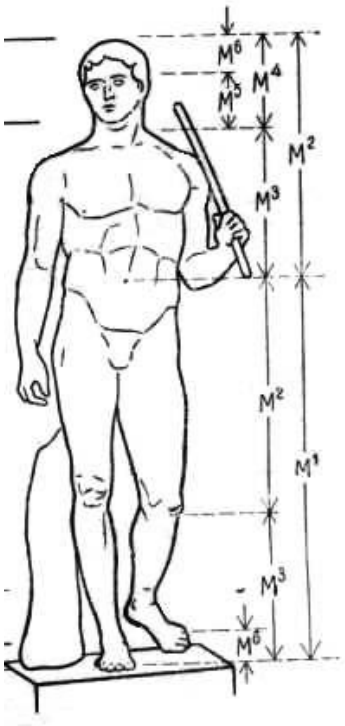
Εικόνα 4 . Η αυτοομοιότητα του κανονικού πενταγώνου

Ένας από τους επηρεασμούς της Τέχνης από αυτές τις αναζητήσεις των Πυθαγορείων είναι ότι σε αυτούς πιστώνεται ιστορικά η πρώτη μελέτη του δεύτερου λόγου που αναφέρθηκε προηγουμένως, αυτού της διαγωνίου προς την πλευρά ενός κανονικού πενταγώνου, του περίφημου αριθμού Φ, της χρυσής τομής. Της πιο αρμονικής διαίρεσης ενός τμήματος σε δύο άνισα τμήματα. Οι Αρχαίοι Έλληνες δεν τον ονόμαζαν ούτε Φ ούτε χρυσή τομή, τον ονόμαζαν διαίρεση σε μέσο και άκρο λόγο, όπως τουλάχιστον εμφανίζεται αργότερα στα «Στοιχεία του Ευκλείδη». Οι Ευρωπαίοι κατά την Αναγέννηση, έκπληκτοι διαπίστωσαν τη γνώση και χρήση του από τους αρχαίους Έλληνες. Τον ονόμασαν θεία αναλογία (divina proportione) και έχουμε πάρα πολλές μαρτυρίες για τη χρήση του στην Αναγέννηση (Luca Paccioli, Davinci κ.α.). Χρυσή τομή τον ονόμασε ο Martin Ohm Γερμανός μαθηματικός, αδερφός του γνωστού φυσικού περίπου το 1835. Φ τον ονόμασε ο Mark Barr Αμερικανός μαθηματικός στις αρχές του 20ου αιώνα προς τιμή του Φειδία από το αρχικό του γράμμα και έκτοτε είναι γνωστός ως «number phi» ή «golden ratio».

Ο μεγάλος Kepler έλεγε ότι δύο είναι τα διαμάντια της Γεωμετρίας, το ένα είναι το Πυθαγόρειο θεώρημα και το άλλο αυτή η διαίρεση σε μέσο και άκρο λόγο.

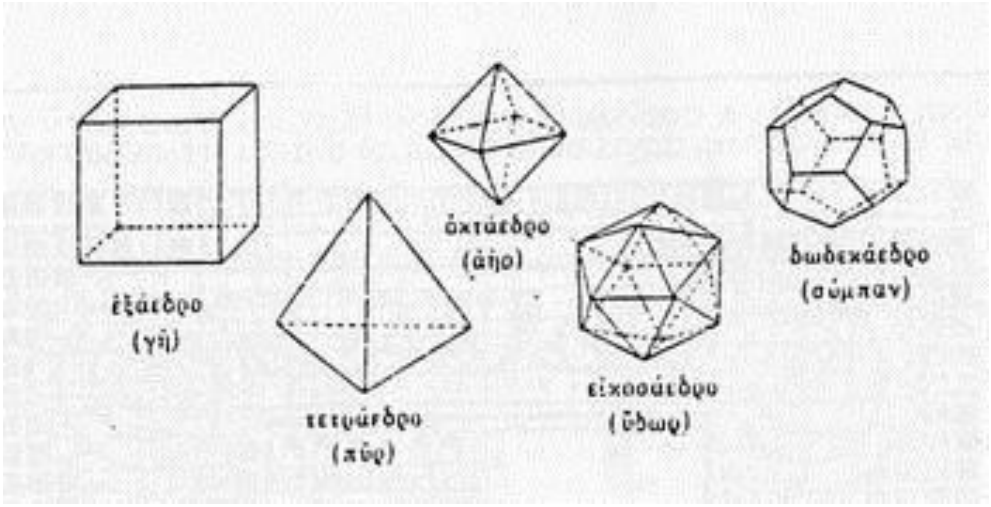
Υπάρχει μεγάλη συζήτηση για τον υπερτονισμό της αισθητικής αξίας της χρυσής τομής , αυτό όμως δεν μειώνει καθόλου την αξία της Πυθαγόρειας αναζήτησης για τις αναλογίες. Γιατί κατόπιν τη σκυτάλη πήραν οι Μαθηματικοί της Ακαδημίας του Πλάτωνος , ο Θεαίτητος και ο μεγάλος Εύδοξος. Ο Εύδοξος και αργότερα ο Αρχιμήδης έθεσαν τις βάσεις για το σύστημα των πραγματικών αριθμών στο οποίο σήμερα βασίζεται όλος ο απειροστικός λογισμός. Πιο συγκεκριμένα ο Εύδοξος στον οποίο αποδίδεται ολόκληρο το 5ο βιβλίο των στοιχείων του Ευκλείδη έδωσε μια επέκταση της έννοιας της αναλογίας, έναν ορισμό που ουσιαστικά ισοδυναμεί με τις τομές που εισήγαγε ο μαθηματικός Dedekind (1831–1916), ως ένα τρόπο κατασκευής των πραγματικών αριθμών από το σύνολο των ρητών.

3) Απογείωση των μαθηματικών - απογείωση της τέχνης - χρυσός αιώνας



Εικόνα 5. Προσπάθεια ανακατασκευής των αναλογιών του κανόνος του Πολύκλειτου στο άγαλμα «Δορυφόρος» (ή «Οπλίτης»)

Τα θαυμαστά έργα του χρυσού αιώνα στην Αθήνα αλλά και την υπόλοιπη Ελλάδα προκαλούν ακόμα και σήμερα το θαυμασμό αλλά και την εξονυχιστική μελέτη των αναλογιών τους. Και αυτή ακριβώς είναι η σχέση όλων όσων εκτέθηκαν προηγουμένως σε σχέση με τις αναλογίες. Η αναντίρρητη πεποίθηση ότι κάθε μέρος ενός οικοδομήματος, μέσα και έξω, ενός γλυπτού, ενός ζωγραφικού πίνακα ή μιας μουσικής σύνθεσης πρέπει να διέπεται από ένα ενιαίο σύστημα μαθηματικών αναλογιών και ότι το επίπεδο τελειότητας έχει σχέση με τον πλούτο του θεωρητικού υποβάθρου της Γεωμετρίας και κυρίως της μελέτης των αναλογιών. Με το άγαλμα «Δορυφόρος», ο Πολύκλειτος, γλύπτης σύγχρονος του Φειδία, δημιούργησε ένα σύστημα ιδανικών αναλογιών, τον «κανόνα», για τη δημιουργία ενός ανθρώπινου γλυπτού, κανόνας που εξακολούθησε να χρησιμοποιείται στη Δύση μέχρι την ύστερη Αναγέννηση.



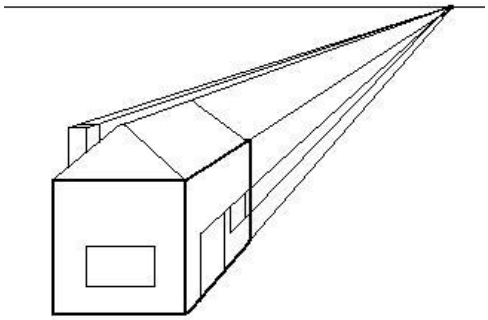
Εικόνα 7. Τα περίφημα 5 Πλατωνικά στερεά

Ο Πλάτων εξ άλλου περιγράφει στο διάλογο «Τίμαιος» τον κόσμο σαν μια σύνθεση γεωμετρικών αρμονικών σωμάτων, των περίφημων 5 Πλατωνικών Στερεών που θα περάσουν και στην Αναγέννηση και θα προκαλέσουν τον προβληματισμό πολλών από τα φωτισμένα πνεύματά της.

Η μεγάλη λοιπόν συνεισφορά των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών στην ανθρωπότητα αλλά και στην τέχνη προκύπτει κυρίως από τη διερεύνηση της έννοιας της αναλογίας, του Μαθηματικού λόγου, και τη σύνδεση της Αισθητικής (ο όρος αισθητική είναι πολύ μεταγενέστερος) με τα Μαθηματικά.

«Η ελληνική γεωμετρία υπήρξε αυτό το αδιάφθορο πρότυπο, πρότυπο που προτείνεται όχι μόνο σε κάθε γνώση που αποβλέπει στην τελειότητα του αλλά και απαράμιλλο πρότυπο των τυπικών χαρακτηριστικών της ευρωπαϊκής νόησης…Αυτές οι κολόνες, αυτά τα κιονόκρανα, αυτά τα επιστύλια, αυτοί οι θριγκοί με τις υποδιαιρέσεις τους, και οι διακοσμήσεις που γέρνουν χωρίς ποτέ να φεύγουν από την θέση τους και την άρμοση τους, με κάνουν να σκέφτομαι εκείνες τις αρθρώσεις της καθαρής επιστήμης, όπως τις είχαν συλλάβει οι Έλληνες, ορισμούς, αξιώματα, προτάσεις, θεωρήματα, συμπεράσματα, πορίσματα, προβλήματα…Δηλαδή ορατή η μηχανή του πνεύματος. (Πωλ Βαλερύ)». [13]

4) Αναγέννηση (1400-1700 περίπου μ.Χ.)



Εικόνα 8. Γεωμετρική Προοπτική

Η ανθρωπότητα ξυπνάει από το λήθαργο αιώνων και δεδομένων ιστορικών ευνοϊκών συνθηκών όπως π.χ. της άλωσης της Κωνσταντινούπολης (που έστειλε πολλούς Έλληνες λογίους στη Δύση-μεταλαμπαδευτές της ελληνικής παιδείας και μαζί τους αρκετά βιβλία της κλασικής Ελλάδας), της εφεύρεσης της τυπογραφίας, της διείσδυσης των Αράβων στην Ευρώπη μέσω της Ισπανίας (οι Άραβες είναι οι μόνοι που τον μεσαίωνα έχουν να επιδείξουν μαθηματικό έργο) αλλά και άλλων παραγόντων, επανεξετάζει προσεκτικά και κριτικά τα κλασικά κείμενα , γνωρίζει τον Πλάτωνα, τον Ευκλείδη, τον Αρχιμήδη και τον Πάππο. Το αποτέλεσμα όλης αυτής της διεργασίας είναι η κατάκτηση της γραμμικής προοπτικής. Μαγεύεται από τις δυνατότητές της και ασχολείται έντονα μαζί της για περίπου τρεις αιώνες με νατουραλιστικές αναπαραστάσεις τοπίων και προσώπων.

Τι είναι όμως γραμμική προοπτική;

Οι καλλιτέχνες εδώ φαίνεται να προηγούνται των Μαθηματικών και να τους υποδεικνύουν δείχνουν νέους δρόμους.[14] Οι παράλληλες (στην πραγματικότητα) ευθείες του βάθους σχηματίζονται συγκλίνουσες σε ένα σημείο, το σημείο φυγής των καλλιτεχνών («επ᾽ άπειρον» σημείο αργότερα για τους Μαθηματικούς).

Δε θα τολμούσε Μαθηματικός να τμήσει, να νοήσει παράλληλες γραμμές που να τέμνονται. Το επτασφράγιστο μυστικό των καλλιτεχνών αναλαμβάνουν να μελετήσουν εντυπωσιασμένοι οι τότε μαθηματικοί και καλλιτέχνες της εποχής , ο Alberti, ο Davinci και αργότερα ο Durer. Η γραμμική προοπτική τίθεται σε μαθηματική βάση για να παραχθούν κατόπιν και άλλες γεωμετρίες, η παραστατική και η προβολική γεωμετρία και αργότερα η ελλειπτική και η υπερβολική γεωμετρία , με διαφορετική έννοια παραλληλίας από αυτήν της ευκλείδειας.

Το μονοσήμαντο και συγκεκριμένο, σίγουρο νόημα των πινάκων της Αναγέννησης , η ευφορία του μπαρόκ και του ροκοκό βρίσκεται σε πλήρη αντιστοιχία με την σιγουριά της αιτιοκρατίας (ντετερμινισμός) του Καρτέσιου και τον απόλυτο χώρο και χρόνο του Νεύτωνα.[15] Δεδομένες αρχικές συνθήκες παράγουν συγκεκριμένα αποτελέσματα. Το σύμπαν θεωρείται μια μηχανή απόλυτα ελεγχόμενη από μαθηματικούς τύπους και κανόνες .Η γλώσσα του Σύμπαντος είναι μαθηματική έλεγε ο Γαλιλαίος.

5. Το πέρασμα απο την Αναγέννηση προς την μοντέρνα τέχνη (1700-1900 μ.χ. περίπου)

Ο Ιμπρεσιονισμός (1874-1900), η τεχνοτροπία που απεικονίζει την άμεση, τη φευγαλέα εντύπωση ενός φυσικού τοπίου ή ενός αντικειμένου, είναι το βαθμιαίο πέρασμα της Τέχνης στο αφηρημένο. Αν και βασικός εκπρόσωπος είναι ο Monet (1840 – 1926) η έρευνά μας επικεντρώνεται κυρίως στον Cézanne (1839 –1906) και τον Van Gogh (1853-1890). Στον Cezanne γιατί είναι αυτός που πρόσθεσε καθαρά γεωμετρικά στοιχεία στον ιμπρεσιονισμό και ουσιαστικά ενέπνευσε την κατοπινή τεχνοτροπία του κυβισμού: «Everything in nature takes its form from the sphere, the cone and the cylinder».

Ο Van Gogh αποτελεί ένα παράδειγμα ασυνείδητης καλλιτεχνικής αναπαράστασης μαθηματικών δομών. Σύμφωνα με σύγχρονη επιστημονική έρευνα δημοσιευμένη στο διαδικτυακό αρχείο arXiv.org (στην οποία ο καθηγητής Φυσικής Jose-Luis Aragon, με ομάδα ερευνητών στο Πανεπιστήμιο του

Μεξικού προσπάθησε να ποσοτικοποιήσει πίνακες σαν τον: «Έναστρη νύχτα») διαπιστώνει ότι οι χαοτικές δίνες που χαρακτηρίζουν αυτόν και παρόμοιους πίνακες ακολουθούν με ακρίβεια τις μαθηματικές περιγραφές των αναταράξεων σε ρευστά υλικά, όπως οι στροβιλισμοί του νερού σε ένα ταραγμένο ρυάκι ή οι πραγματικοί ανεμοστρόβιλοι.[16].

Εικόνα 9: Έναστρη Νύχτα – Van Gogh

6) Μοντέρνα Τέχνη και Γεωμετρία (20ος αιώνας)

Μιλώντας για μοντέρνα Τέχνη εννοούμε την ολοκληρωτική άρνηση της δημιουργίας ρεαλιστικών - νατουραλιστικών αναπαραστάσεων φυσικών τοπίων ή προσώπων. Το εντυπωσιακό είναι, ότι αυτή η τάση προς αφαίρεση, της λεγόμενης «μοντέρνας τέχνης», σε ένα μεγάλο της τμήμα εκφράζεται με μια σημαντική τάση «γεωμετρικοποίησης» της ζωγραφικής, αλλά και την καθιέρωση απλών λιτών γεωμετρικών γραμμών στην Αρχιτεκτονική.

Στις αρχές του εικοστού αιώνα οι κυβιστές (Picasso, Braque) συνεχιστές του ιμπρεσιονιστή Cézanne φέρνουν στο επίκεντρο της τέχνης τα γεωμετρικά σχήματα ως βασικά συστατικά ενός πίνακα λες και είχαν διαβάσει τον

διάλογο «Φίληβος» του Πλάτωνα όπου ο Σωκράτης υποδεικνύει την αισθητική δύναμη της απλότητας των στοιχειωδών γεωμετρικών σχημάτων. [17]

Οι συνεχιστές αυτής της νοοτροπίας της γεωμετρικής αφαίρεσης, με τον Malevich (1878 - 1935), τον Kandisky (1866 – 1944), τον Mondrian, (1872 – 1944) δημιούργησαν νέες τεχνοτροπίες που ονομάστηκαν σταδιακά σουπρεματισμός, κονστρουκτιβισμός, νεοπλαστικισμός.

Χαρακτηριστικό είναι το απόσπασμα από κείμενο του Montrian: «η ομορφιά εκφράζεται πιο καλά από μαθηματική άποψη επομένως είναι η θέση από την οποία το καλλιτεχνικό ταμπεραμέντο του μέλλοντος πρέπει να αναπτυχθεί, η θέση από την οποία το νέο ύφος πρέπει να προκύψει».

Καθώς επίσης και το απόσπασμα από κείμενο του Kandinsky:

«Everything can be portrayed ... as a mathematical formula». Και αυτή είναι μια από τις βασικές θεωρητικές αρχές της σχολής Bauhaus (ο Kandinsky διατέλεσε καθηγητής στη σχολή αυτή) που εισήγαγε στις αρχές του εικοστού αιώνα τη γεωμετρική λειτουργικότητα και την απαλλαγή από τα στολίδια της Αναγέννησης , του μπαρόκ του ροκοκό κλπ. Αυτό που αποκαλείται μοντέρνα αρχιτεκτονική.

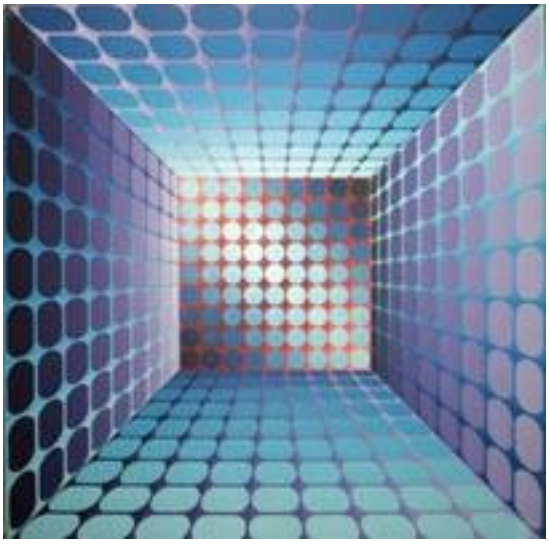
Εικόνα 10. Το χαρακτηριστικό κτήριο της Σχολής Bauhaus

Ο Picasso (1881–1973) είναι ίσως ο γνωστότερος καλλιτέχνης του 20ου αιώνα και αντίστοιχα ο Einstein ο γνωστότερος επιστήμονας. Σύμφωνα με τον Miller [15] όπως ο Αϊνστάιν με τη θεωρία της σχετικότητας ανέτρεψε το απόλυτο του χώρου και του χρόνου στη Φυσική, ο κυβισμός του Picasso και του Braque γκρέμισε από το θρόνο της την προοπτική της Αναγέννησης και την μονοσήμαντη θέαση της πραγματικότητας.

Μπορούμε να θεωρούμε ότι πρόκειται για μια νέα γεωμετρική περίοδο της τέχνης. Παράλληλα οι αναζητήσεις των ψυχολόγων της μορφολογικής ψυχολογίας (Gestalt), οι οποίοι ασχολήθηκαν με τις γεωμετρικές και όχι μόνον αμφισημίες. κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η ανθρώπινη αντίληψη εργάζεται με απλές γεωμετρικές γραμμές , βασικά γεωμετρικά σχήματα αλλά και γενικότερα τις απλούστερες μαθηματικές σχέσεις και δομές. Το σύνολο των αρχών στο οποίο κατέληξαν οι ψυχολόγοι της σχολής Gestalt μάλλον προανήγγειλε τη σημερινή θεωρία των «embodied mathematics», των ενσωματωμένων Μαθηματικών με τα οποία ο άνθρωπος είναι εφοδιασμένος για την ερμηνεία του περιβάλλοντος και της θεωρίας της αποβλεπτικότητας. (Η αντίληψη είναι μία ενεργητική, ερμηνευτική διαδικασία που αποβλέπει στο νόημα και όχι απλώς η παθητική πρόσληψη του εξωτερικού ερεθίσματος). Έτσι έδωσαν ψυχολογικό υπόβαθρο στην εμφάνιση της γεωμετρίας στην μοντέρνα τέχνη και επηρέασαν τεχνοτροπίες όπως της «op-art».

Στο μεσοπόλεμο ο μεγάλος μαθηματικός Gödel (1906-1978) ανατρέπει οριστικά τη βεβαιότητα του θετικισμού και του φορμαλισμού με το περίφημο θεώρημα «της μη πληρότητας». Οι σουρεαλιστές καλλιτέχνες αντίστοιχα δημιουργούν έργα στη βάση της περιφρόνηση της λογικής, στους χώρους του μη λογικού , του ονείρου και της φαντασίωσης. Ο Dali (1904–1989) π.χ. δίνει τη δική του άποψη για την καμπύλωση του χρόνου. Τον καμπυλώνει στο έργο «Αναζητώντας την τέταρτη διάσταση» και τον κάνει βδέλλες πάνω στην υλική και ανθρώπινη ύπαρξη στο έργο του «Melting Clocks».Προσπαθεί επίσης να απεικονίσει την άπιαστη τέταρτη διάσταση αξιοποιώντας το μαθηματικό μοντέλο του «υπερκύβου (tesseract)» ως κύβου τεσσάρων διαστάσεων στο έργο του «Crucifixion (Corpus Hypercubus)».

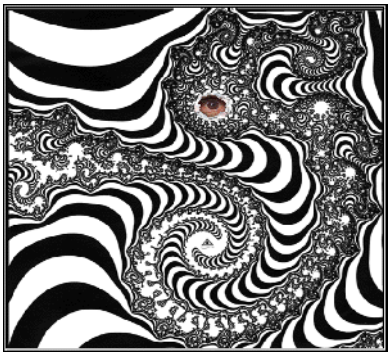
Στη συνέχεια κατά το 1960 με την πρόοδο της Οπτικής και της Βιολογίας σχετικά με τη λειτουργία της όρασης έχουμε την εμφάνιση της οπτικής τέχνης (op art)με κύριο εκπρόσωπο τον Vasarely (1906-1997) και βασική αρχή του να δημιουργεί πίνακες που να κατανοεί όλος ο κόσμος και όχι ένα εξεζητημένο κοινό. Για να γίνει αυτό καθιερώνει ως αλφάβητο της τέχνης τα βασικά γεωμετρικά σχήματα. Το βασικό θεώρημα της Αξονομετρίας και οι αναζητήσεις της μορφολογικής ψυχολογίας αποτελούν κεντρική πηγή έμπνευσης και θέμα αρκετών πινάκων του.



Εικόνα 11 : Victor Vasarely Caldor

7) Η "μαθηματική Τέχνη" των Fractals

Ο όρος fractal εμφανίστηκε το 1975 στο βιβλίο του Γάλλου Μαθηματικού Mandelbrot, «Les objects fractals» και στη Γεωμετρία εμφανίζεται ως ένα σχήμα που χαρακτηρίζεται από αυτοομοιότητα (self-similarity), την ιδιότητα δηλαδή να είναι όμοιο με ένα ή περισσότερα τμήματά του. Η γραφική παράσταση τέτοιων σχημάτων που προκύπτουν με επαναληπτικές διαδικασίες σε κατάλληλη μαθηματική συνάρτηση με τη βοήθεια υπολογιστών οδηγούν συχνά σε εικόνες με ιδιαίτερη αισθητική αξία ώστε αρκετές από αυτές να διεκδικούν τη θεώρησή τους ως έργα τέχνης.



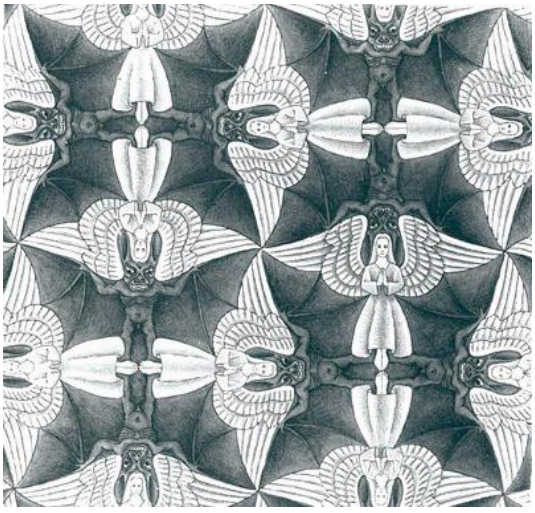
Εικόνα 12

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

Σημαντικό κατάλογο δραστηριοτήτων μπορεί κανείς να ανλήσει από τα έργα του Ολλανδού καλλιτέχνη Escher.

Είναι γνωστό ότι ο Ολλανδός καλλιτέχνης Escher (1898-1972) δεν είχε ιδιαίτερες μαθηματικές γνώσεις. Όμως ο ίδιος έλεγε ότι «διασχίζει συνεχώς το σύνορο μεταξύ Μαθηματικών και Τέχνης» απεικονίζοντας καλλιτεχνικά μαθηματικές έννοιες για τις οποίες ενημερωνόταν από μεγάλους μαθηματικούς της εποχής του (Coxeter, Penrose κ.α.). Έτσι έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον να «ανακαλυφθούν» και μελετηθούν οι μαθηματικές αυτές έννοιες μέσα από τον πλούτο των πινάκων του καλλιτέχνη που για πρώτη φορά εκτέθηκαν και εκτίθενται από καιρού εις καιρόν στην Ελλάδα στο μουσείο Ηρακλειδών.

- Συμμετρία-Γυμνάσιο



Εικόνα 13 : M. C. Escher - Angels and Devils

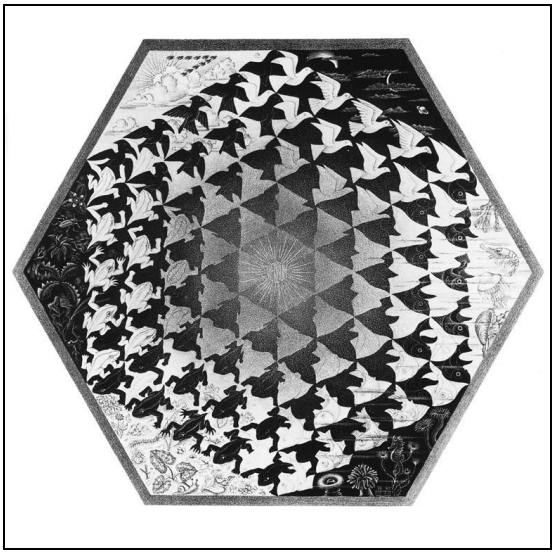
Αναζητούνται ποιοι από τους βασικούς σημειακούς μετασχηματισμούς (μεταφορά, αξονική συμμετρία, στροφή, σύνθεση μεταφοράς και αξονικής συμμετρίας) είναι εμφανείς στον πίνακα αυτό. Επιδεικνύονται ειδικά «video animations» .

Σε φιλοσοφικό επίπεδο τίθεται και συζητείται το ερώτημα πως οι άγγελοι που συμβολίζουν το καλό συνυπάρχουν με τους διαβόλους που συμβολίζουν το

κακό, συσχετιζεται με τη συστοιχία των καλών και κακών των Πυθαγορείων αλλά και το «yin yang».

- Α Λυκείου- Αναλογίες

Μέσα από την άποψη του καλλιτέχνη για τη δημιουργία και εξέλιξη της ζωής που απεικονίζεται στον πίνακα αυτό διερευνάται η διασύνδεση του μαθηματικού λόγου με τις υπόλοιπες σημασίες της λέξης λόγος. (αίτιο, λογική, λεκτική εκφορά). Συσχετίζεται ο πίνακας και με τον Απόλλωνα που στην Αρχαία Ελλάδα θεωρείτο ως θεός του ηλίου και της λογικής.



Εικόνα 14 : M.C. Escher – Verbum

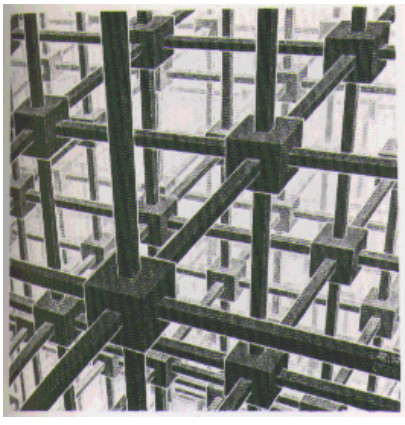
- Β Λυκείου- ομοιότητα

Αυτοομοιότητα είναι η ιδιότητα ενός σχήματος να είναι όμοιο με ένα ή περισσότερα τμήματά του. Υπάρχει τέτοιο τμήμα του πίνακα που επαναλαμβάνεται σε διαφορετική κλίμακα; Ποιά πρακτική αλλά και φιλοσοφική σημασία έχει η διαπίστωση για ένα αντικείμενο ότι έχει την ιδιότητα της αυτοομοιότητας;

Εικόνα 15 : M.C. Escher - Reptiles

- Γ Λυκείου-Οι πραγματικοί αριθμοί

Αριθμήσιμο λέγεται ένα σύνολο όταν μπορούμε σε κάθε στοιχείο του να αντιστοιχίσουμε ένα φυσικό αριθμό. Είναι το σύνολο όλων των κόμβων του πίνακα αριθμήσιμο; Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε κόμβο αυτής της «σκαλωσιάς» από ένα ξεχωριστό φυσικό αριθμό ή δεν φθάνουν οι φυσικοί αριθμοί γι αυτό;



Εικόνα 16 : M.C. Escher - Cubic space division

- Χρήση πινάκων με γεωμετρικές οφθαλμαπάτες για την αναγκαιότητα της μαθηματικής απόδειξης. Συζήτηση για το «φαίνεσθαι και το είναι». Διάκριση νοητού και αισθητού (Πολιτεία Πλάτωνος-τετμημένη γραμμή).
- Σχέση της σημερινής μουσικής κλίμακας της Δυτικής μουσικής με την αντίστοιχη των Πυθαγορείων.
- Χρυσή τομή : α) Γεωμετρική προσέγγιση β) Αριθμητική προσέγγιση μέσω της ακολουθίας Fibonacci. Η χρυσή τομή στις ιδιότητες του κανονικού πενταγώνου.
- Τα Κανονικά (ή Πλατωνικά) πολύεδρα.
- Τα ημικανονικά στερεά του Αρχιμήδη.
- Η Τέχνη ως μίμηση στην «Πολιτεία» του Πλάτωνος ,η κριτική την οποία της ασκεί και η ιεραρχική αξιολόγησή της σε σχέση με τα Μαθηματικά.
- Μεθοδική αναζήτηση του γεωμετρικού προσχεδίου των αναγεννησιακών προοπτικών πινάκων.
- Ο τύπος της μιγαδικής συνάρτησης με τον οποίο ο Mandelbrot δημιούργησε το πρώτο Fractal. Προγράμματα που απεικονίζουν στην οθόνη του υπολογιστή καλλιτεχνικά fractals.
- Τα Μαθηματικά στο έργο του Γιάννη Ξενάκη.
- Κανονική και ημικανονική κάλυψη του επιπέδου και του χώρου. Οι 17 ομάδες συμμετρίας.
- Η αξονομετρική σχεδίαση και η αξιοποίηση από την οπτική τέχνη.
- Υπάρχει αριθμός της πραγματικής ευθείας που μπορεί να χαρακτηρισθεί «επόμενος» του 1; Τι είναι διακριτό και τι συνεχές; Τι σημαίνει τάξεις απείρου; Το σύνολο των ρητών είναι αριθμήσιμο; Το σύνολο των πραγματικών; Τι είναι το απειροστό και ποια η σχέση με το παράδοξο του Ζήνωνα; (πίνακας limit sqare-Escher και παρόμοιοι)
- Συζήτηση για τα θέματα με τα οποία ασχολείται ο κλάδος των Μαθηματικών που λέγεται Τοπολογία και αναζήτηση πινάκων του Escher και άλλων ζωγράφων που σχετίζονται με τέτοια θέματα (Moebius strip, Knots, Swans).
- Το θεώρημα της μη πληρότητας, η αυτοαναφορά και το πρόβλημα της τεχνητής νοημοσύνης. Μπορεί ένας υπολογιστής να λύσει οποιοδήποτε πρόβλημα η μια ορισμένη μόνο κατηγορία προβλημάτων; Ποια προβλήματα δεν μπορεί να λύσει; («drawing hands», «Library» -Escher)

- Το αεικίνητο και το σχετικό θερμοδυναμικό αξίωμα στη Φυσική με αφορμή τον πίνακα του Escher «Waterfull».
- Το μοντέλο υπερβολικής Γεωμετρίας του Poincare (Circle limit-Escher).

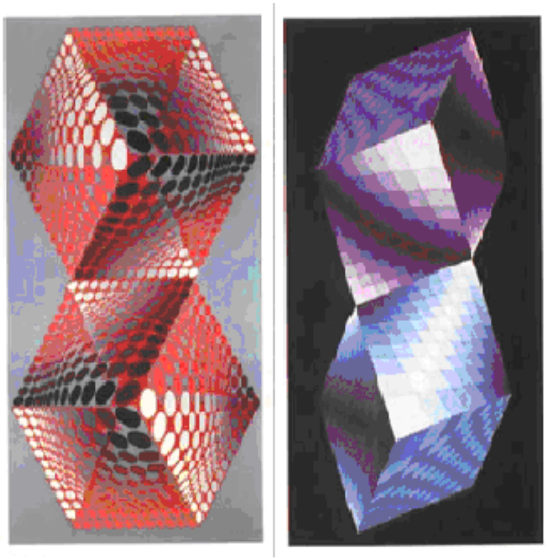
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Η αναγκαιότητα της μαθηματικής απόδειξης με τη βοήθεια της Τέχνης

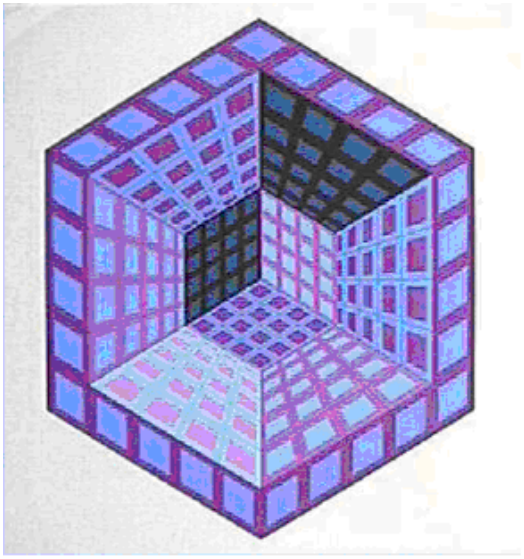
Περίπτωση της Παραλληλίας

Στα παρακάτω παρουσιάζεται μια πρόταση διδασκαλίας για την κατανόηση από τους μαθητές της αναγκαιότητας της μαθηματικής απόδειξης αλλά και της έννοιας της παραλληλίας. Η τεχνοτροπία της «op art»- (οπτικοκινητικής τέχνης) χρησιμοποιεί αρκετά τις λεγόμενες οφθαλμαπάτες (illusions) και τις αμφισημίες (ambiguities) . Οι οφθαλμαπάτες αυτές και οι αμφισημίες συνεπικουρούμενες και από άλλες κατάλληλα επιλεγμένες, όχι κατανάγκην από το χώρο της Τέχνης προκαλούν αμφισβήτηση στην αίσθηση της όρασης και οδηγούν στην αναγκαιότητα της μαθηματικής απόδειξης, ενώ θέτουν σε ένα αυστηρά μαθηματικό πλαίσιο την έννοια της παραλληλίας και διευρύνουν την αντίληψη των μαθητών για την έννοια αυτή.

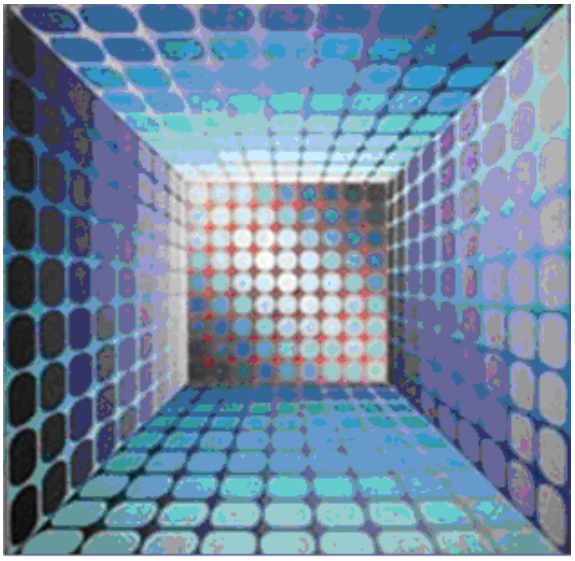
Καλούμε τους μαθητές να παρατητρήσουν με προσοχή μια σειρά τέτοιων πινάκων σαν τους παρακάτω μέσα από αντίγραφα με σκοπό να τους δημιουργήσουμε την αμφισβήτηση στην εμπιστοσύνη προς τις αισθήσεις (κυρίως στην όραση) και να προετοιμάσουμε το έδαφος για την συνειδητοποίηση της ανάγκης να χρησιμοποιήσουν την σκέψη τους.



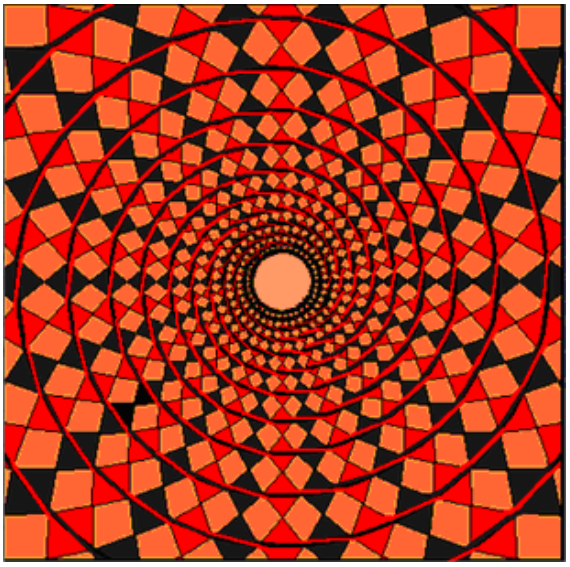
Εικόνα 17: Victor Vasarely



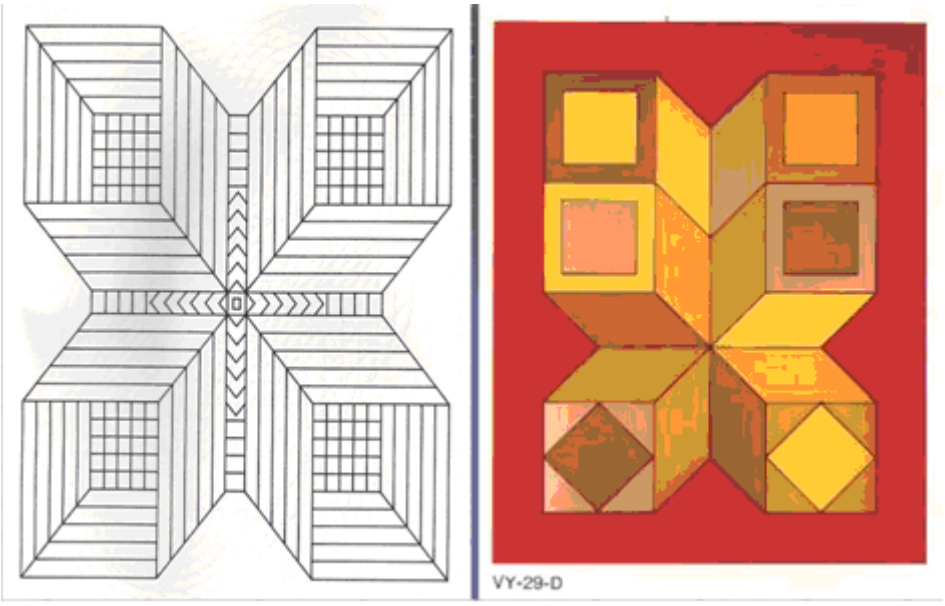
Εικόνα 18: Victor Vasarely



Εικόνα 19: Victor Vasarely



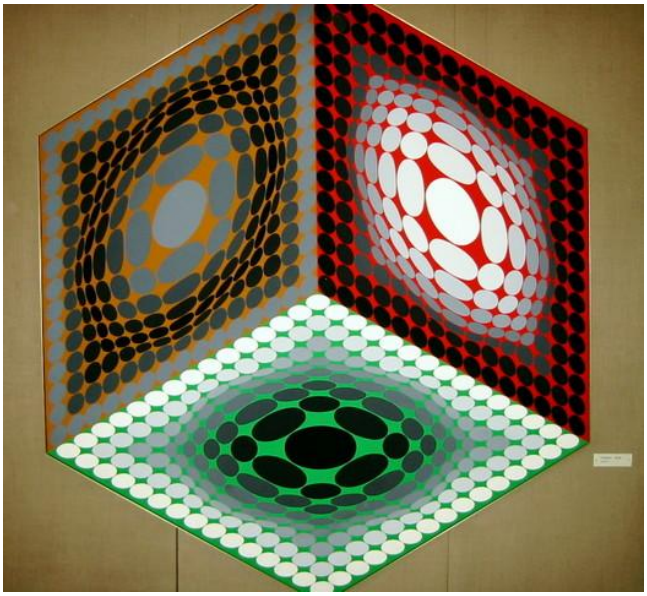
Εικόνα 20: Fraser Spiral



Εικόνα 21: Victor Vasarely

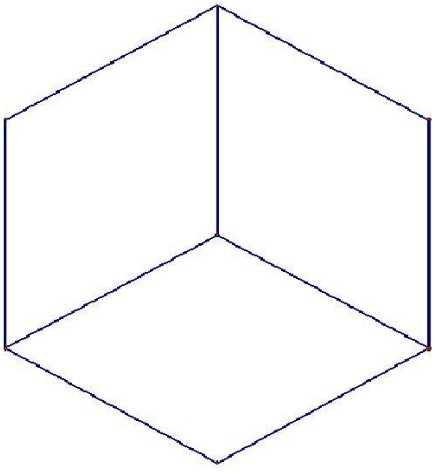
Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι (με λόγια των ίδιων των μαθητών) : βλέπουμε σχήματα που «μπαίνουν προς τα μέσα, αλλά τα ίδια μπορεί και να βγαίνουν προς τα έξω».

Ποιο είναι το αίτιο που η όρασή μας αντιλαμβάνεται έναν «διπλό» κύβο, έναν προς τα μέσα και έναν προς τα έξω» όπως χαρακτηριστικά περιγράφουν οι μαθητές για τον παρακάτω αλλά και τους παραπάνω πίνακες του Victor Vasarely;



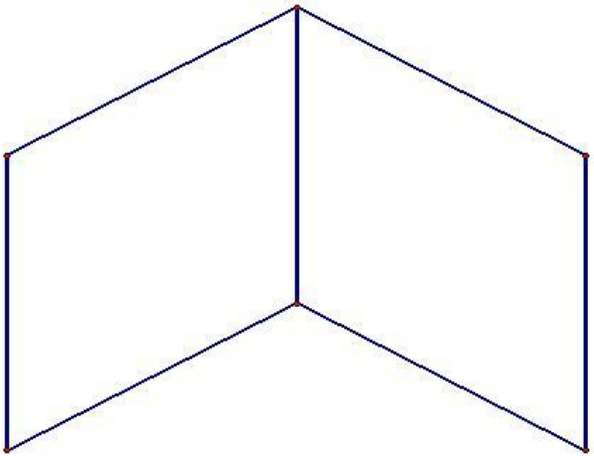
Εικόνα 22

(Ασφαλώς έχει σε αυτό συνεισφέρει η κατάλληλη επεξεργασία των χρωμάτων από τον αριστοτέχνη του είδους Victor Vasarely, το βασικό όμως αίτιο της αμφισημίας είναι το γεωμετρικό υπόβαθρο που έχει χρησιμοποιήσει και φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



Εικόνα 23

Η αμφισημία εξακολουθεί να υπάρχει και μετά την αφαίρεση των 2 κάτω ευθύγραμμων τμημάτων, αλλά ακόμα και άλλων τεσσάρων.



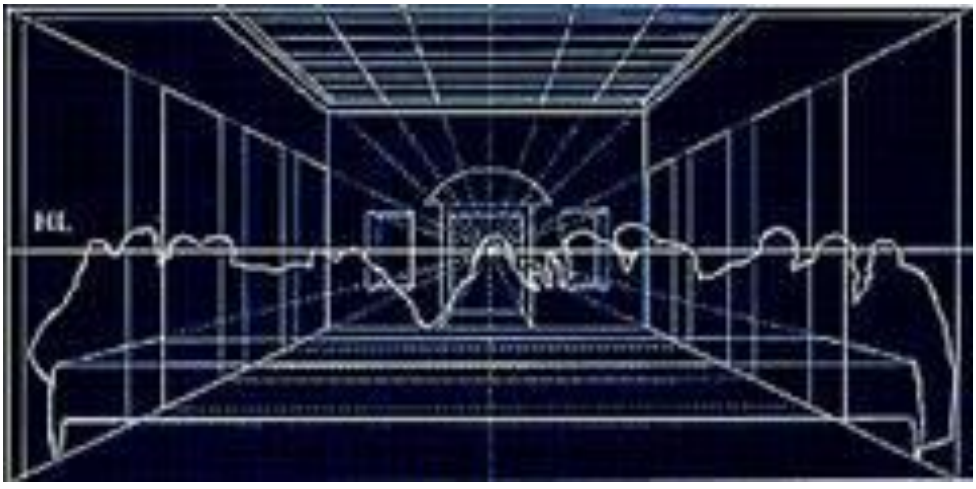
Εικόνα 24

Τελικά η αμφισημία οφείλεται σε τρία ευθύγραμμα τμήματα με κοινή αρχή. Και βέβαια πίσω από την αμφισημία αυτή υπάρχει το βασικό θεώρημα της αξονομετρίας που ήταν ήδη γνωστό την εποχή του γνωστού ζωγράφου : Τρία οποιαδήποτε ευθύγραμμα τμήματα με κοινή αρχή αποτελούν προβολή ενός τρισορθογωνίου συστήματος αξόνων και έτσι δημιουργούν την διπλή αίσθηση χώρου : «μία προς τα μέσα και μια προς τα έξω» όπως χαρακτηριστικά περιγράφουν οι μαθητές. Στη συγκεκριμένη περίπτωση ο ζωγράφος χρησιμοποιεί την με σημερινούς όρους ισομετρική αξονομετρική προβολή.

Προκύπτει έτσι αβίαστα η πεποίθηση ότι κάθε οπτική πρόσληψη χρειάζεται και δεύτερη ανάγνωση, δεύτερη επεξεργασία, που δεν μπορεί παρά να είναι λογική και νοητική.

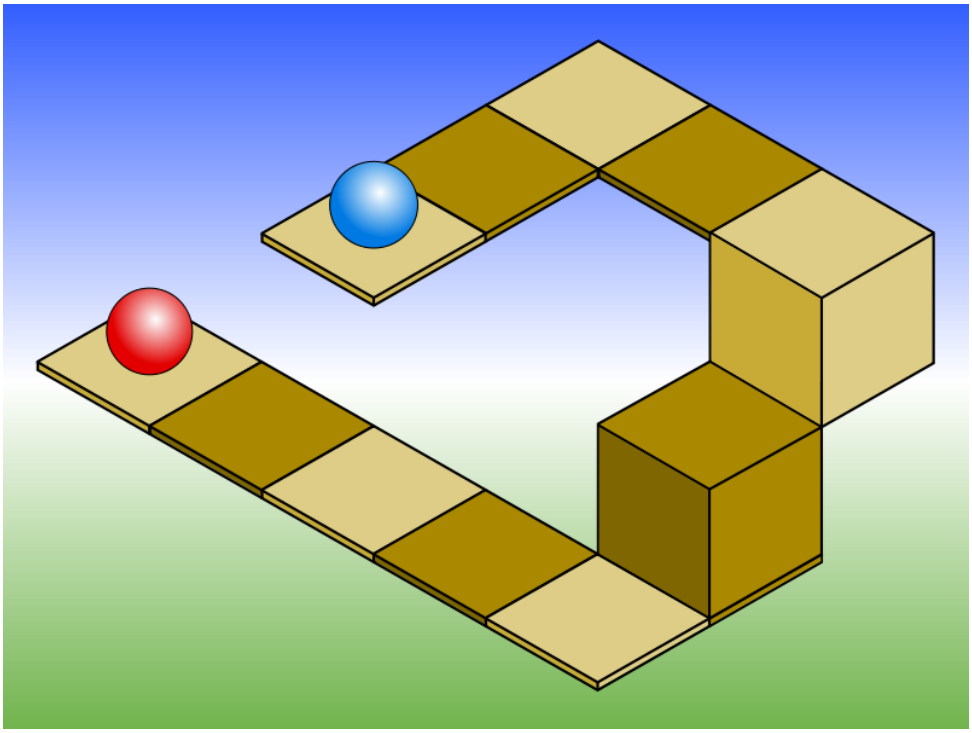
Η διπλή αυτή αίσθηση του χώρου αντιδιαστέλλεται από την «μονή» αίσθηση χώρου, την αίσθηση βάθους που δημιουργείται από την γραμμική προοπτική, μόνο «προς τα μέσα» :

Εικόνα 25 : DaVinci - Last Supper.



Εικόνα 26 : DaVinci - Last Supper, Γεωμετρικό υπόβαθρο.

Η γραμμική προοπτική ακολουθεί τη μη ευκλείδεια αρχή να συντρέχουν οι ευθείες του βάθους σε ένα σημείο (επ' άπειρον σημείο ή σημείο φυγής όπως το ονομάζουν οι καλλιτέχνες).

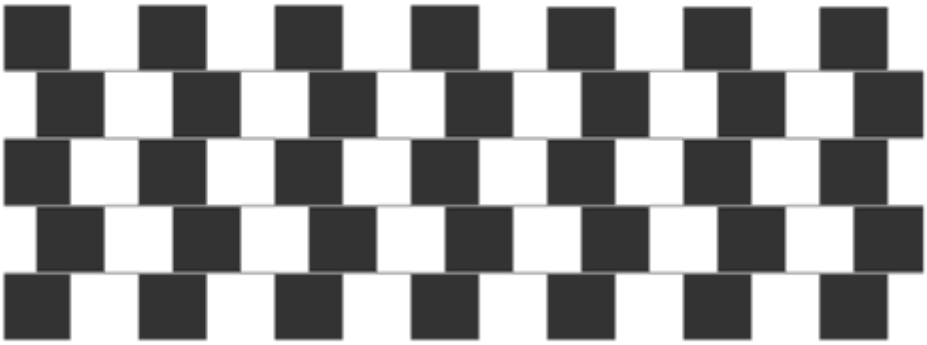


Εικόνα 27 : Οφθαλμαπάτη οφειλόμενη στην αξονομετρική σχεδίαση.

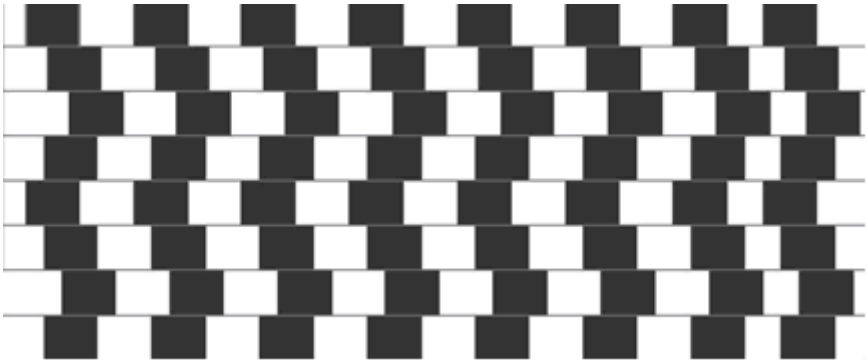
Επίσης σημαντική συνεισφορά στην αμφισβήτηση της οπτικής βεβαιότητας προσφέρει η παρατήρηση της παραπάνω εικόνας (πρόκειται και πάλι για μια από τις οφθαλμαπάτες που δημιουργεί η σχεδίαση με τη βοήθεια της παράλληλης αξονομετρικής προβολής). Στο ερώτημα αν η γαλάζια μπάλλα βρίσκεται ή όχι σε υψηλότερο επίπεδο από την κόκκινη σφαίρα, η συνήθης και φυσική απάντηση είναι ότι οι σφαίρες βρίσκονται στο ίδιο ύψος. Προσεκτική εξέταση όμως του δεξιού μέρους του σχήματος θεωρεί λογικό ότι η γαλάζια σφαίρα πρέπει να ***είναι*** ψηλότερα από την κόκκινη αν και ***φαίνεται*** στο ίδιο ύψος.

Μέσα σε αυτό το κλίμα της αναζήτησης και διαπίστωσης γεωμετρικού υποβάθρου σε σημαντικό μέρος ζωγραφικών πινάκων (αναγέννηση και op-art), παρουσιάζονται στη συνέχεια στους μαθητές μέσω βιντεοπροβολέα ή και σε φωτοαντίγραφα οι παρακάτω εικόνες όπου οι οριζόντιες γραμμές είναι φροντισμένο αλλού να είναι παράλληλες κι αλλού όχι. Τους τίθεται τότε το ερώτημα αν μπορούν με ασφάλεια να ισχυρισθούν αν είναι ή όχι παράλληλες. (Οφθαλμαπάτη CafeWall). Έτσι σταδιακά περνάμε στη Γεωμετρία.

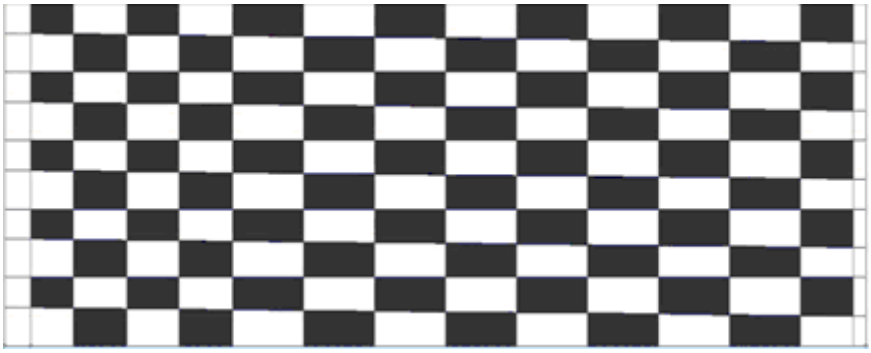
ΕΙΝΑΙ ΟΙ ΕΥΘΕΙΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ;



Εικόνα 28



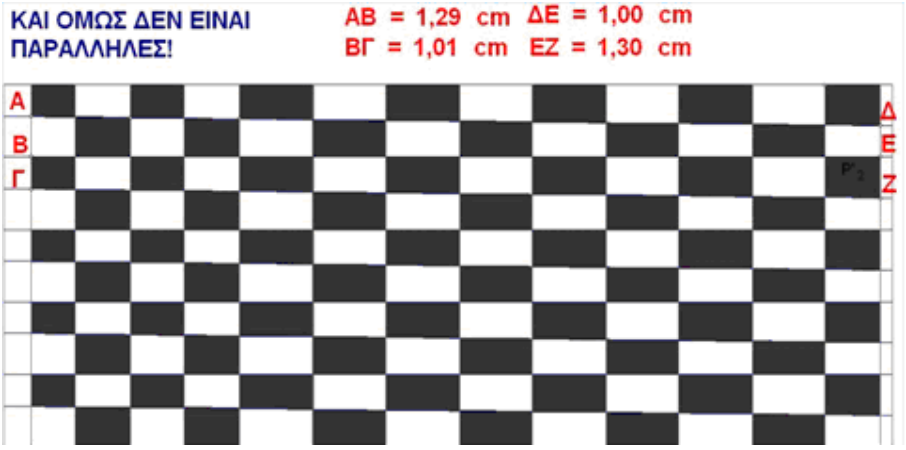
Εικόνα 29



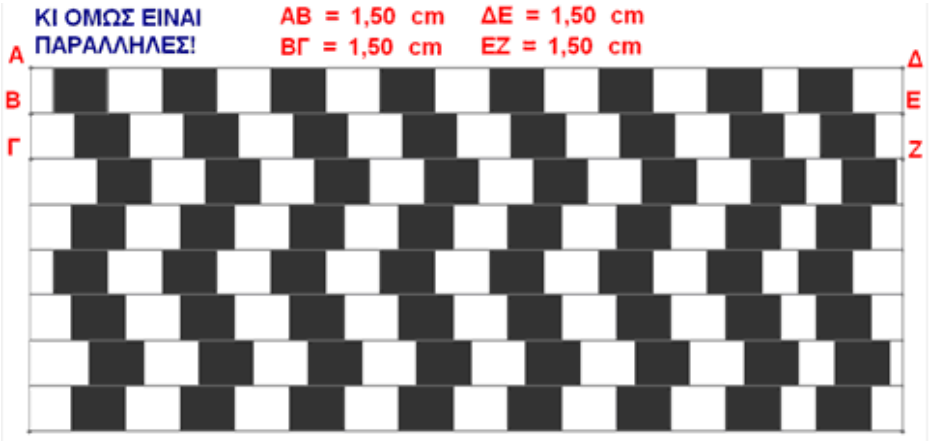
Εικόνα 30

Κατά κανόνα παρατηρείται μια ασυμφωνία στις απόψεις οπότε δημιουργείται μία αβεβαιότητα. Αβεβαιότητα που για τους περισσότερους μαθητές οφείλεται στο ότι προσπαθούν να συμπεράνουν μόνο με τη βοήθεια της όρασης. Στο κλίμα της αβεβαιότητας αυτής τους τονίζεται ότι αυτό που συμπεραίνουν (είτε ότι είναι παράλληλες είτε όχι) δεν είναι η απάντηση στην ερώτηση αν είναι παράλληλες αλλά στο αν τους **φαίνονται** παράλληλες. Κι εδώ γίνεται μια σύντομη αναφορά – συσχέτιση με την τραγωδία «Ελένη» του Ευριπίδη την οποία διδάσκονται στο ελληνικό γυμνάσιο και της οποία το θέμα είναι η φιλοσοφική διάκριση « είναι και φαίνεσθαι».

Στο επόμενο βήμα δίνεται στους μαθητές ένας χάρακας (μερικές φορές το ζητούν και από μόνοι τους κάποιοι από αυτούς) και τους ζητείται μήπως με τη χρήση του έχουν κάποια πειστικότερη απάντηση. Οι μαθητές οδηγούνται φυσιολογικά στην ανάγκη να μετρήσουν τα κατακόρυφα τμήματα (που είναι αδιαμφισβήτητα παράλληλα) μεταξύ των οριζοντίων γραμμών.



Εικόνα 31



Εικόνα 32

Στο σημείο αυτό εάν μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε ένα λογισμικό δυναμικής Γεωμετρίας, όπως το Sketschpad, θα έχουμε τότε τη δυνατότητα ακριβέστερων μετρήσεων από αυτές του χάρακα. Όταν βέβαια τα κατακόρυφα (και δεδομένα παράλληλα) τμήματα μετρούνται ίσα, οι οριζόντιες ευθείες είναι παράλληλες. Έτσι όμως οι μαθητές οδηγούνται στο να εξάγουν το κριτήριο παραλληλίας:

«Αν δύο απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και ίσες ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο».

Ως αποτέλεσμα έχουμε ότι το γνωστικό σχήμα βλέπω και αποφασίζω προσαρμόζεται στο σκέπτομαι και αποφασίζω.

Η διαφορά της δύναμης της νόησης από την αίσθηση γίνεται ολοφάνερη στους μαθητές. Έτσι στο σημείο αυτό μπαίνει το κεφαλαιώδες θέμα της έννοιας της τυπικής μαθηματικής απόδειξης. Οι μαθητές έχουν πλέον πειστεί ότι δεν επαρκεί η όραση για την βεβαιότητα ενός ισχυρισμού και απαιτείται κάποια ανώτερη νοητική διαδικασία.

Εδώ επίσης γίνεται μια ιστορική αναφορά στη διαφοροποίηση των Ελληνικών Μαθηματικών από αυτά των προγενεστέρων Βαβυλωνίων και Αιγυπτίων. Η απόδειξη συνεπάγεται τη μέγιστη ακρίβεια στους υπολογισμούς και την μέγιστη ακρίβεια της πρόβλεψης στα διάφορα φαινόμενα τα οποία μοντελοποιούν και αυτό πρέπει να γίνει σαφές στους μαθητές μέσα από δικές τους δραστηριότητες.

Στη συνέχεια η θεωρητική απόδειξη του κριτηρίου αλλά και η γενικότερη θεωρητική κάλυψη του θέματος της παραλληλίας γίνεται πιο εύκολα και αβίαστα από ότι αν ακολουθούσαμε τον κλασσικό παραγωγικό τρόπο.

Ανάλογα με το διαθέσιμο χρόνο της διδασκαλίας μπορεί και είναι χρήσιμο να δοθούν στους μαθητές οι βασικοί κανόνες της οπτικής αντίληψης όπως αυτοί διατυπώθηκαν αρχικά από τους ψυχολόγους της μορφής (Gestalt) και εμπλουτίσθηκαν αργότερα. Οι μαθητές βλέπουν έτσι στα Μαθηματικά και ένα μεταμαθηματικό τρόπο. Καταλαβαίνουν τη διασύνδεση της Μαθηματικής αντίληψης και σκέψης με τη γενικότερη ανθρώπινη αντίληψη και σκέψη, δεν τη θεωρούν αποκομμένη από τις φυσιολογικές ανθρώπινες λειτουργίες.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η δραστηριότητα με τις αντιληπτικές πλάνες μπορεί να πραγματοποιηθεί στην Α΄ Λυκείου, στην αρχή της σχολικής χρονιάς, ή στην εισαγωγή του κεφαλαίου για τα παραλληλόγραμμα και τα κριτήρια των παραλληλογράμμων, απλά ως έναυσμα για την αναγκαιότητα της εξαγωγής θεωρητικού κριτηρίου.

Οι μαθηματικοί που θα διδάξουν καλό θα είναι να ενημερωθούν στοιχειωδώς για την ιστορία της τέχνης, τις βασικές τεχνοτροπίες ζωγραφικής και κυρίως την ιστορία της γεωμετρικής προοπτικής και βασικά στοιχεία αξονομετρίας. Οπωσδήποτε πρέπει να είναι πεπεισμένοι να αλλάξουν τη στάση τους για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας και να είναι διατεθειμένοι να μη χρησιμοποιούν μόνον τον κλασσικό παραγωγικό τρόπο.

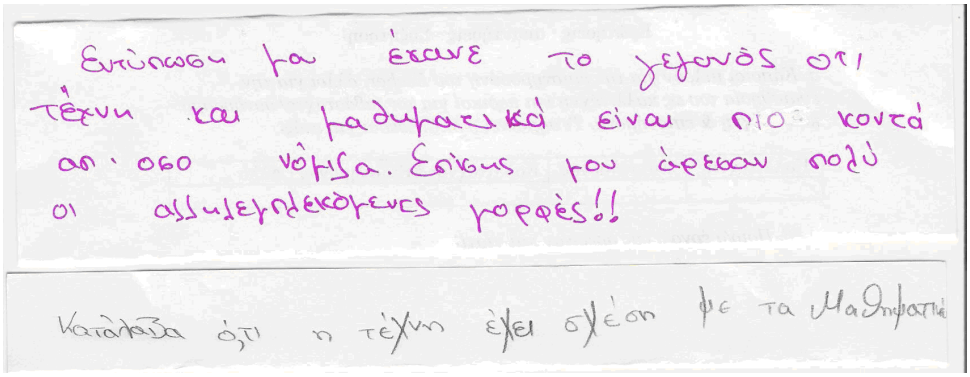
Στην περιγραφόμενη δραστηριότητα οι μαθητές δεν καλούνται απλά να παρακολουθήσουν ανενεργά την παράδοση του καθηγητή ως μια διάλεξη. Ενεργοποιούνται και γίνονται συνυπεύθυνοι στην εξέλιξη της δραστηριότητας και αυτενεργούν ομαδοσυνεργατικά σε ένα περιβάλλον ευγενούς άμιλλας. Έτσι τους δίνεται η ευκαιρία να κατασκευάσουν, να πειραματιστούν αλλά και μετά το τέλος του μαθήματος να αναζητήσουν μόνοι τους (χωριζόμενοι σε ομάδες) πληροφορίες για ένα πλήθος θεμάτων:

- τις τεχνοτροπίες της ζωγραφικής
- τα έργα συγκεκριμένων ζωγράφων
- την επίδραση της Γεωμετρίας στην εξέλιξη της προοπτικής.

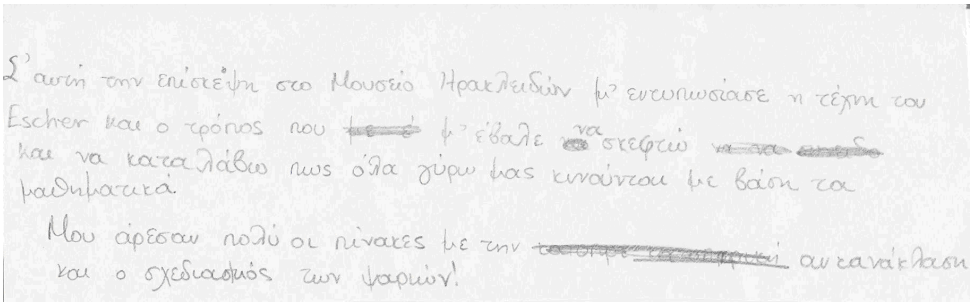
Οι μαθητές έτσι μετατρέπονται από απλοί παρατηρητές και εξεταζόμενοι, σε ενεργούς συμμετέχοντες. Στις ομάδες συνεργάζονται και συναποφασίζουν για την κατανομή των ρόλων.

Οι καθηγητές που έχουν παρακολουθήσει ως συνοδοί τους μαθητές τους στην μορφωτική αυτή δραστηριότητα εκφράζονται γενικώς με θερμά λόγια για την όλη δραστηριότητα και ζητούν υλικό για εφαρμογή της δραστηριότητας στην τάξη τους. Αλλά και τα σχόλια των μαθητών είναι

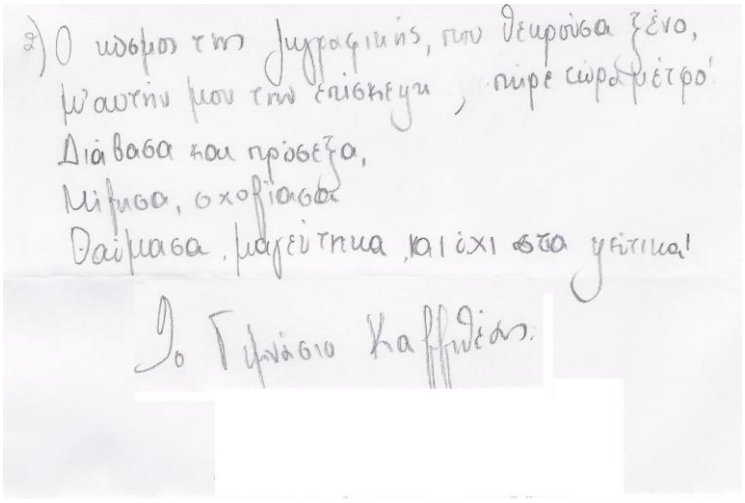
επίσης κολακευτικά και ενθαρρυντικά για τη συνέχιση και ενδυνάμωση της όλης ιδέας. Μερικά παραδείγματα είναι τα ακόλουθα:



Εικόνα 33



Εικόνα 34



Εικόνα 35

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Ο Πλάτων στο διάλογο «Πολιτεία» θεωρεί τουλάχιστον γελοίο να προσπαθήσει κάποιος να μάθει Μαθηματικά μέσα από πίνακες ζωγραφικής. Παίρνοντας μια απόσταση από τον ενστερνισμό της απόλυτης άποψης του μεγάλου φιλοσόφου, που ενέχει και ένα κίνδυνο ιστορικού αναχρονισμού, αλλά και υιοθετώντας ένα μέρος αυτών των επιφυλάξεων, το πρόγραμμα «Τέχνη και Μαθηματικά» δεν φιλοδοξεί να υποκαταστήσει τη διδασκαλία των Μαθηματικών που γίνεται στη σχολική τάξη, αλλά μέσα από το ευχάριστο περιβάλλον της Τέχνης να δημιουργήσει αλλαγή στάσης ως προς τη θεώρηση των Μαθηματικών, επισημαίνοντας τη φιλοσοφική τους διάσταση και τη διείσδυσή τους σε όλους τους τομείς της ανθρώπινης σκέψης και δραστηριότητας.

Θερμές ευχαριστίες στους 5000 περίπου μαθητές και καθηγητές, που με τις επισκέψεις στο μουσείο Ηρακλειδών τα πέντε τελευταία χρόνια, στο πρόγραμμα «Τέχνη και Μαθηματικά», τις ενδιαφέρουσες ερωτήσεις και παρατηρήσεις, εμπλούτισαν και εμπλουτίζουν αυτήν την προσπάθεια ολιστικής προσέγγισης της γνώσης και πνευματικής ανάτασης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

[1] Παπανικολάου Απόστολος, «Η Ανθυφαιρετική ερμηνεία της έξωσης της Ποίησης στο δέκατο βιβλίο της Πολιτείας του Πλάτωνα», Διπλωματική εργασία μεταπτυχιακό Διδακτικής Μαθηματικών, Μαθηματικό Αθήνας 2008, Επίβλεψη Στ. Νεγρεπόντη.

[2] Read Herbert : Η Τέχνη σήμερα - Για τη δημιουργία της μοντέρνας τέχνης, Μετάφραση Δημ. Κούρτοβικ, Εκδόσεις Κάλβος , 1960.

[3] Peitgen H. and Richter P. , «The Beauty of Fractals» Springer-Verlag, Heidelberg, 1986.

[4] Βοσνιάδου, Σ. «Εισαγωγή στην Ψυχολογία» , Gutenberg 2004 σελ. 169, 170.

[5] Birkhoff G. «Aesthetic Measure», Cambridge, Harvard University Press, 1933.

[6] Bouleau Charles, «The Painter's Secret Geometry: A Study of Composition in Art» Harcourt, Brace & World, 1963. (Μετάφραση στα Ελληνικά: Στέλλα Δήμου)

[7] Emmer- The Visual mind II, 2005, MIT Press , Cambridge, Massachusetts London, England.

[8] Χρήστου Χρ. «Εισαγωγή στην Τέχνη Ι» - Σύλλογος προς διάδοσιν ωφελίμων βιβλίων. Αθήνα 1988.

[9] Νεγρεπόντης Σ., Φαρμάκη Β. «Η “παράλογη” αποτελεσματικότητα των Μαθηματικών στις άλλες επιστήμες», Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών.

[10] Howard Eves, «Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών» Τροχαλία 1989.

[11] Negrepontis S., *The foundation of Pythagorean Philosophy (‘everything is number’) on Pythagorean Geometry (‘incommensurability of diameterof square’*), to appear [in Greek].

[12] Νεγρεπόντης, Σ. (2007-2008), Σημειώσεις μεταπτυχιακών μαθημάτων, «Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών» και «Πλάτων και Μαθηματικά», ΠΜΣ Διδακτικής Μαθηματικών, Μαθηματικό Τμήμα Πανεπιστημίου Αθηνών.

[13] Βαλερύ Πωλ. «Η κρίση του πνεύματος» ,Μετάφραση Θανάσης Χατζόπουλος, Εκδόσεις Καστανιώτη 1996. (Τίτλος πρωτοτύπου : Paul Valery's - Crisis of the Mind, 1919)

[14] Andersen Kirsti, The Geometry of an Art-The History of the Mathematical Theory of Perspective from Alberti to Monge. 2007, Springer.

[15] Miller Arthur «Enstein-Picasso» - Εκδόσεις Τραυλός, 2002.

[16] http://arxiv.org/abs/physics/0606246.

[17] Πλάτωνος «Φίληβος» Στίχος 51b.

ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Χρήστου Χρ. «Η ζωγραφική του εικοστού αιώνα» - Θεσσαλονίκη 1977

E.H. Gombrich «Το χρονικό της Τέχνης» - Εκδόσεις Μορφωτικό ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης .

E.H. Gombrich «Τέχνη και ψευδαίσθηση» Εκδόσεις Νεφέλη.

Larousse «Ιστορία της Τέχνης» – Εκδόσεις Βιβλιόραμα

Καντίνσκι «Σημείο, Γραμμή , Επίπεδο» - Εκδόσεις Δωδώνη

Rudolf Arnheim «Τέχνη και οπτική αντίληψη» - Εκδόσεις Θεμέλιο

Χριστίνα Φίλη «Αμφίδρομα» - Εκδόσεις Σμίλη

Laura H. Chapman «Διδακτική της Τέχνης» - Εκδόσεις Νεφέλη

Carsten – Peter Warncke «Picasso» - Εκδόσεις Tachen

Magdalena Holzhey «Vasarely» - Εκδόσεις Tachen

Urlrike Becks –Malorny «Cezanne» - Εκδόσεις Tachen

M.C. Escher «The Graphic World» - Εκδόσεις Tachen

Charles Bouleau- «La Geometrie secrete des peintres» -1963 Editions du Seuil

Hermann Weyl «Συμμετρία» - Εκδόσεις Τροχαλία

Αναπολιτάνος, Δ. Α. «Εισαγωγή στη φιλοσοφία των Μαθηματικών» Εκδόσεις Νεφέλη.

Heath, L, T. (1981). A History of Greek Mathematics. New York: Dover.

Douglas R. Hofstadter : Godel , Escher, Bach. - Penguin books

Πλάτωνος Πολιτεία, Φίληβος.

Janaway C., Images of Excellence, Plato's Critique of the Arts, Clarendon Press, Oxford 1995.

Keuls Eva, Plato and Greek Painting, E.J.Brill, Leiden 1978.

Tate J., "Imitation' in Plato's Republic", Classical Quarterly 1928.

Ανδρόνικος Μ., Ο Πλάτων και η Τέχνη, Νεφέλη, Αθήνα 1986 (1952).

Ζωγραφίδης Γ., Εικαστική Φιλοσοφία, Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα 1998.

Παντελή Ξαγοράρη, Δομές και Μεσότητες στην Τέχνη, Εκδόσεις Παρατηρητής, Θεσσαλονίκη 1996.

Ο καλλιτέχνης και ο μαθηματικός, Amir Aczel , Εκδόσεις Ενάλιος.

Donalson, M. (2001). *Η Σκέψη των Παιδιών* (3η εκδ.) (Α. Καλογιαννίδου και Α. Αρχοντίδου, μετάφραση). Αθήνα: Gutenberg. (Πρωτότυπη έκδοση, 1978).

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.

Goldenberg, P. (1999). Principles, Art, and Craft in curriculum design: the case of connected geometry. *International Journal of Computers for Mathematical learning*, *4*, 191-224.

Heath, L, T. (1981). *A History of Greek Mathematics*. New York: Dover.

Papert, S. (1991). *Νοητικές Θύελες* (Γ. Παπαμιχαήλ και Γ. Κωτσάνης, μετάφραση). Αθήνα: Οδυσσέας. (Πρωτότυπη έκδοση, 1980).

Papyros, Larouse, Brittanica. (1981). *Εγκυκλοπαίδεια*. Αθήνα: Συγγραφέας.

Πλάτων. *Πολιτεία.* Από τον Θησαυρό της Ελληνικής Γλώσσας (T.L.G.). Irvine: University of California.

Senk, S. L. (1989). Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(3), 309-321.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry.* (Final report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geome-try Project). Chicago: University of Chicago, Department of Education. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 220 288).

Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. New York: Academic Press.

apapani@math.uoa.gr

ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ:

ΤΕΧΝΗ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Αποτελέσματα και εμπειρίες στη Γυμνασιακή Εκπαίδευση

Μια Διαδραστική Διδασκαλία από Καθηγητές και Μαθητές της Γ' Γυμνασίου σε μαθητές Β' και Γ' Γυμνασίου

Αϊβάζογλου Αναστασία

Μαθηματικός
Καθηγήτρια Μαθηματικών

Πρεβενιού Κυριακή

Εικαστικός
Καθηγήτρια Καλλιτεχνικών Μαθημάτων

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το κείμενο αυτό περιγράφει ένα Διαθεματικό Εκπαιδευτικό Πρόγραμμα που έγινε σε 240 μαθητές της Β' και Γ' Γυμνασίου από Καθηγητές και Μαθητές της Γ' Γυμνασίου. Περιγράφει τις συνθήκες συλλογής υλικού, τους στόχους, τη θεωρητική βάση και την υλοποίησή της. Στο τέλος περιγράφονται κάποια αποτελέσματα – συμπεράσματα

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η εργασία που ακολουθεί αφορά ένα Διαθεματικό Εκπαιδευτικό Πρόγραμμα που έγινε στο Α' Αρσάκειο - Τοσίτσειο Γυμνάσιο Εκάλης.

Πραγματοποιήθηκε σε 240 μαθητές Β' Γυμνασίου και Γ' Γυμνασίου το σχολικό έτος 2009-2010. Η εφαρμογή ξεκινά με την κατασκευή λογαριθμικών, ισογώνιων σπειρών στο μάθημα των Καλλιτεχνικών και την δημιουργία 'φωτογραφικών κλείστρων'. Η διαδικασία αυτή γίνεται κατά την διάρκεια 4 διδακτικών ωρών και συμμετέχουν όλοι οι μαθητές της Β' και Γ' γυμνασίου. Στην συνέχεια, ζητείται από τους μαθητές της Γ' Γυμνασίου να μαζέψουν πληροφορίες από τον internet και από βιβλία για την χρυσή τομή, το φ, τις σπείρες, για έργα τέχνης που έχουν δημιουργηθεί με την βοήθειά τους, καθώς και για αντικείμενα στην φύση που έχουν μέσα τους αυτές ή και άλλες μαθηματικές έννοιες. Στη συνέχεια, τα παιδιά δημιουργούν μια μικρή ομάδα 4 ατόμων, που παρακολουθούν ιδιαίτερα μαθήματα από τις καθηγήτριές τους, όπου εξηγούνται πιο απλοϊκά οι έννοιες, και βλέπουν την μετάβαση από τους 'τύπους' και τα μαθηματικά προβλήματα στην τέχνη και στην φύση. Στο τέλος, μαζεύονται οι μαθητές της Γ' Γυμνασίου και της Β' Γυμνασίου (σε διαφορετικές χρονικές στιγμές) στο αμφιθέατρο του σχολείου, όπου παρακολουθούν ζωντανά, μια διαδραστική διαθεματική διδασκαλία από τους συμμαθητές τους που συνοδεύεται από την προβολή power point, σε συνδυασμό με τον ζωντανό σχεδιασμό, με την χρήση μαθηματικών, των αντικειμένων. Ταυτοχρόνως γίνεται παρουσίαση και επίλυση μαθηματικών προβλημάτων που οδηγούν και πάλι στον ίδιο στόχο, καθώς λαμβάνει χώρα η επεξήγηση όλων, από την ομάδα των μαθητών.

Οι βασικοί στόχοι αυτής της διαδικασίας είναι :

1. Η προσέγγιση και κατανόηση δύσκολων μαθηματικών εννοιών με την βοήθεια των καλλιτεχνικών.
2. Η κατανόησης της εφαρμογής των Μαθηματικών στην Τέχνη και η άρρηκτη σχέση τους.
3. Η συνεργασία των μαθητών με ομαδοσυνεργατικές μεθόδους και η διαδραστική διδασκαλία των πιο δύσκολων εννοιών από μαθητές, σε μαθητές.
4. Η κατασκευή έργων τέχνης με χρήση μαθηματικών.
5. Η ανακάλυψη του μαθηματικού κώδικα στην δημιουργία κοχυλιών, γαλαξιών κ.α. στην φύση και η αναπαραγωγή τους από σπουδαίους καλλιτέχνες

6. Η εμβάθυνση σε παραμέτρους που απασχολούν την Διδακτική των Μαθηματικών όπως : η υστερόχρονη ερμηνεία και αξιοποίηση έργων των μαθητών από τους ίδιους τους μαθητές, ο ρόλος της κατασκευής των έργων τους, ο ρόλος του μαθητή ως διδάσκοντα, οι γνωστικές διαδικασίες που λαμβάνουν χώρα και άλλα.
7. Η επιμορφωτική λειτουργία για τους διδάσκοντες οι οποίοι διαμορφώνουν στόχους και αξιοποιούν τα γενικά και τα εξατομικευμένα συμπεράσματα.

2.1 Η ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΒΑΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

Μέσα στα πλαίσια της υβριδικής μάθησης και των Διαθεματικών Εκπαιδευτικών Προγραμμάτων που κάθε σχολείο μπορεί να προτείνει, αποφασίσαμε συνδυάζοντας διάφορες εκπαιδευτικά μέσα (Bonk, 2006:4), να προτείνουμε μια εργασία όπου συνδυάζεται η Τέχνη με τα Μαθηματικά.

Ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά του προγράμματος ήταν η δυσκολία στην διδασκαλία κάποιων δύσκολων μαθηματικών εννοιών, που τα παιδιά δεν θα έρθουν σε επαφή μαζί τους κατά την φοίτηση τους στο Γυμνάσιο, αλλά που όμως, υπάρχουν παντού γύρω τους στην καθημερινότητά τους. Για να επιτύχουμε την καλύτερη διδασκαλία αυτών των εννοιών σε 120 παιδιά Β' και Γ' Γυμνασίου κάθε φορά, αποφασίσαμε, να διδάξουμε μια μικρή ομάδα μαθητών, που με την σειρά τους, θα δίδασκαν τους συμμαθητές τους ανάλογα με την κρίση τους και την κατανόηση των εννοιών από την δική τους οπτική πλευρά πλέον, με την συνεχή επίβλεψη των Καθηγητριών. Το όφελος ήταν διπλό: και οι 'διδάσκοντες' μαθητές κατανόησαν εις βάθος τις έννοιες αφού χρειάστηκε να τις διδάξουν (Watson, 2002:161) και τα παιδιά μας έβγαλαν από την δύσκολη θέση να διδάξουμε εμείς με τον φόβο να μην γινόμασταν αντιληπτοί, αφού οι μαθήτριες έφτιαξαν, με την επίβλεψή μας, μια διδασκαλία από παιδιά για παιδιά.

Εν συνεχεία, όλοι οι μαθητές συνεργάστηκαν αρμονικά κατά την διάρκεια των καλλιτεχνικών, βοηθώντας και παροτρύνοντας ο ένας τον άλλον: οι καλοί μαθητές στα μαθηματικά βοηθούσαν τους καλούς μαθητές στα καλλιτεχνικά και αντιστρόφως (diSessa, 1995:72-73), δημιουργώντας έτσι ένα δυναμικό περιβάλλον κατά την ώρα των καλλιτεχνικών (Elliot, 1993:105).

Οι καθηγήτριες εκμεταλλεύτηκαν το Διαθεματικό Πρόγραμμα για να βοηθήσουν τους μαθητές να εξερευνήσουν μια 'αφηρημένη' και 'κωδικοποιημένη' γλώσσα όπως είναι τα μαθηματικά, μέσω της Τέχνης και της Φύσης. Αλλά και η Τέχνη έδειξε τον κοινό παρανομαστή που την ενώνει

με την Φύση και την βοηθά να οργανώνει τα χρώματα και τα σχήματά της: τα μαθηματικά.

Κατά την διάρκεια της παρουσίασης, όλοι οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να συνδυάσουν το δικό τους δημιούργημα με την νέα μαθηματική έννοια, κατασκευάζοντας έτσι μια ενεργή γνώση (Piaget στον Papert, 1993:132). Η εμπειρία αυτή παρακίνησε τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν την εμπειρία τους για να μάθουν και να σκεφτούν αβίαστα την σχέση μεταξύ μαθηματικών και τέχνης με την φύση.

Ειδικότερα, οι 4 μαθήτριες που παρακολούθησαν τα ιδιαίτερα μαθήματα των μαθηματικών και τα παρουσίασαν σε ένα νέο επίπεδο που γινόταν εύκολα κατανοητό από όλους τους συμμαθητές τους, κατάφεραν να αναρριχηθούν στην Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης με την βοήθεια των Καθηγητριών τους. Οι καθηγητές πρέπει να αναγνωρίζουν τους μαθητές που μπορούν να κάνουν γνωστικά βήματα πέρα από της ηλικίας τους και να δημιουργούν τις ικανότητες ανάπτυξης της σκέψης και της ενεργής συμμετοχής καθώς και της συνεργασίας των μαθητών. Όπως χαρακτηριστικά ο Daniels, αναφέρει:

'Το πρώτο σημαντικό ερέθισμα για την διαπαιδαγώγηση των μαθητών [από τα γραπτά του Vygotsky], που λαμβάνουμε, είναι ότι η διδασκαλία πρέπει να είναι εστιασμένη στις δυνατότητες του μαθητή, παρά στο φαινομενικό μόνο επίπεδο των ικανοτήτων του ή της κατανόησης. Το δεύτερο, είναι ότι η διδασκαλία πρέπει να δημιουργεί δυνατότητες για ανάπτυξη, καθώς και ένα είδος ενεργούς συμμετοχής και χαρακτηριστικής συνεργασίας.'

(Daniels, 2004:61)

Το συγκεκριμένο Διαθεματικό Πρόγραμμα έδωσε την ευκαιρία στους μαθητές να δουν την χρήση και την σχέση των μαθηματικών στην καθημερινότητά μας, δίνοντας έτσι πίσω, ένα κομμάτι από την πραγματική λάμψη και σημασία τους. Όπως η Ainley σημειώνει:

'Είναι ευρέως αναγνωρισμένο ότι η κατασκευή του νοήματος των μαθηματικών εμπλέκει πολλά συγγενή στοιχεία από δύο μεγάλες ομάδες. Η διάκριση γίνεται συνήθως μεταξύ της ομάδας των διαδικαστικών στοιχείων και των τεχνικών και με της ομάδας που αφορά τα στοιχεία που βοηθούν στη νοητική και βαθιά κατανόησή τους. […] Προτείνουμε και μια τρίτη ομάδα στοιχείων: αυτά που σχετίζονται με τη χρησιμότητα της κάθε ιδέας, γιατί αυτή η ιδέα είναι πραγματικά χρήσιμη, ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί και πώς. Συμφωνούμε ότι μια πλούσια κατανόηση των μαθηματικών εμπεριέχει στοιχεία και από τις τρεις αυτές ομάδες.'

(Anley & Pratt, 2004:32)

2.2 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το διαθεματικό πρόγραμμα εργαστηριακά βασίστηκε στην Εις Βάθος Προσέγγιση η οποία χωρίζεται σε τέσσερα στάδια : Προκαταρτικό Στάδιο, Στάδιο εμπλουτισμού, Στάδιο Παραγωγής και Στάδιο Παρατήρησης, Αναγνώρισης και Στοχασμού (Εις Βάθος Προσέγγιση - Τρίμη 1996β: 142). *'Αυτά τα στάδια αποτελούν κατά μία έννοια του πυρήνα της Εις Βάθος Προσέγγισης. Εκφράζουν τα βιώματα των μαθητών με το πέρασμα του χρόνου καθώς και τις ευκαιρίες που οι ενήλικες παρέχουν συνειδητά. Η ακολουθία των σταδίων δεν είναι άκαμπτη και καθορίζεται από τις συνθήκες εφαρμογής, από τα ερεθίσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή του. Δεν είναι ξεκομμένα και σε πολλές περιπτώσεις το ένα τίθεται πάνω στο άλλο. Τα παιδιά στηρίζονται στα πράγματα που έχουν μάθει σε κάθε στάδιο καθώς προχωρούν στο επόμενο. Τα όρια ανάμεσα στα στάδια δεν είναι ξεκάθαρα, οι μεταβάσεις είναι συχνά ομαλές και οι παλινδρομήσεις ανάμεσα στα στάδια είναι ρευστές. Όταν οι μαθητές έρθουν αντιμέτωποι με μία άγνωστη έννοια ή ιδέα ή υλικό μπορούν να επανέλθουν σε κάποιο προγενέστερο στάδιο και να αρχίσουν ξανά τη διαδικασία της ανακάλυψης.'*

(Εικαστικές τέχνες και μικρά παιδιά – Ann Epstein - Έλλη Τρίμη, σελ 176-184).

Ακολουθεί το πρώτο μέρος του προγράμματος με τα στάδια και τις προτεινόμενες ασκήσεις που έγιναν από τους μαθητές.

3.1 ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

Ξεκινώντας από το *Προκαταρκτικό Στάδιο* τα παιδιά ήρθαν για πρώτη φορά αντιμέτωπα με κάποιο υλικό ή κάποια καλλιτεχνική έννοια, στην προκειμένη περίπτωση με τις έννοιες της χρυσής τομής, της σπείρας κ.ά. Η εξερεύνηση ξεκίνησε με την εισαγωγική παρουσίαση των μαθηματικών εννοιών μέσα από την ιστορία της τέχνης, από την αρχαιότητα ως τη σύγχρονη τέχνη. Εν συνεχεία περάσαμε στο *Στάδιο του Εμπλουτισμού*. Το Στάδιο αυτό αναφέρεται σε όποια εμπειρία επεκτείνει την περιέργεια του μαθητή, τις γνώσεις του, τις δεξιότητές του καθώς και την ικανότητα αισθητικής αντίληψης μιας καλλιτεχνικής έννοιας. Σε αυτό το Στάδιο οι μαθητές ενημερώθηκαν για αυτές τις έννοιες και από τα δύο μαθήματα, τη χρησιμότητά τους στην καθημερινή ζωή, την ανάγνωσή τους σε έργα τέχνης, είδαν εικόνες και στο τέλος ακούστηκαν γνώμες και απορίες. Έπειτα περάσαμε στο *Στάδιο Παραγωγής* στο Στάδιο της Καλλιτεχνικής Δημιουργίας. Πρόκειται για την αποκορύφωση των εμπειριών που έχουν αποκομίσει από τα στάδια του *Προκαταρκτικού* και του *Εμπλουτισμού* σχετικά με όλα όσα παρουσιάστηκαν

στη σχολική αίθουσα. Ξεκινήσαμε με απλές γεωμετρικές κατασκευές, κατασκευή τριγώνων, διχοτόμηση ευθύγραμμων τμημάτων, κατασκευή ομόκεντρων κύκλων κ.ά ,έτσι ώστε να εξοικειωθούν με τα Γεωμετρικά όργανα (Κανόνας, Τρίγωνα, Διαβήτης). Στη συνέχεια περάσαμε στην κατασκευή ροζέτας, στην κατασκευή σπείρας από ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ισοσκελές τρίγωνο, στην κατασκευή φωτογραφικού κλείστρου (ισογώνια λογαριθμική σπείρα) και τέλος την αρμονική χάραξη έργων τέχνης, βρίσκοντας σχήματα μέσα στα έργα. Στο τέλος, κλείσαμε με την παρουσίαση των έργων τους σε μια μικρή έκθεση στους υπόλοιπους μαθητές της Β΄ και της Γ΄ Γυμνασίου την ημέρα της προβολής παρουσίασης περνώντας και στο τελευταίο *Στάδιο αυτό της Παρατήρησης, Αναγνώρισης και Στοχασμού*. Σε αυτό το Στάδιο ο ρόλος του Καθηγητή είναι ρόλος εμψυχωτή. Βοηθά συνεχώς τους μαθητές να εκφέρουν γνώμη και για το έργο τους και για το έργο των συμμαθητών του. Ως προς την ακρίβεια της εκτέλεσης, την επιλογή του μεγέθους ή ακόμα και των χρωμάτων. Αυτό το Στάδιο είναι πολύ σημαντικό γιατί οι μαθητές αντιλαμβάνονται, συλλογίζονται, μοιράζονται και αξιολογούν κάθε βήμα της διαδικασίας. Ο στοχασμός έγκειται *'στην ουσία της επανάληψης, στο μάτι του μυαλού, στην ανάκληση σημαντικών και δευτερευουσών αποφάσεων, μακριά από την αμεσότητα της εμπειρίας»*

(Susi 1999, Εισαγωγή)

3.2. ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

Συλλογή πληροφοριών από τους μαθητές

Η Καθηγήτρια των Μαθηματικών, ζητά από όσους μαθητές επιθυμούν την συλλογή πληροφοριών από το διαδίκτυο (internet) ή από βιβλία για τις μαθηματικές έννοιες σπείρα, χρυσό αριθμό φ και χρυσή τομή. Έπειτα τους ζητείται να ερευνήσουν μόνοι τους, εμπειρικά και αισθητικά πού πιστεύουν ότι μπορούν να βρουν στην φύση ή σε ανθρώπινες δημιουργίες πλέον, αυτές τις μαθηματικές έννοιες.

Αποτελέσματα έρευνας μαθητών

Οι μαθητές έφεραν μετά από την ερευνά τους:

- σπείρες στην φύση, όπως εικόνες από κοχύλια, γαλαξίες και κυκλώνες, DNA, ιστός αράχνης, έλικες αμπέλου, κέρατα αγριοκάτσικου
- σπείρες στην αρχιτεκτονική όπως το ιωνικό κιονόκρανο που συναντάμε στο Ερέχθειο της Ακρόπολης, ροζέτες από την Παναγία των Παρισίων και σε έργα μεγάλων καλλιτεχνών (Ιττεν, Hundertwasser, Kupka, Vasarely)
- σπείρες στο ανθρώπινο σώμα, όπως τα δακτυλικά αποτυπώματα

- μαίανδροι σε ποτάμια και σε αρχιτεκτονικά δημιουργήματα
- χρυσή τομή και εφαρμογές στην δημιουργία του Παρθενώνα και στις δημιουργίες των Da Vinci, Dali, Michelangelo κ.ά.
- γενικές μαθηματικές πληροφορίες περί χρυσής τομής, ισογώνιων σπείρων, αρχιμήδειο σπείρα, άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας
- γενικές εικαστικές πληροφορίες περί αρμονικών χαράξεων, χρωματισμών σύνθεση και οργάνωση του ζωγραφικού χώρου με την χρυσή τομή

Αξιοποίηση των αποτελεσμάτων της έρευνας των μαθητών από:

την Καθηγήτρια Μαθηματικών

Η ομάδα των μαθητών που θα παρουσιάσουν την εργασία και θα 'διδάξουν' τους μαθητές τους διαδραστικά έχει συγκροτηθεί και η Καθηγήτριά τους ξεκινά τα μαθήματα όπου τους εξηγεί λεπτομερώς τις ακόλουθες μαθηματικές έννοιες.

Τα παιδιά κρατούν σημειώσεις, ξαναρωτούν ό,τι δεν καταλαβαίνουν και δημιουργούν σιγά σιγά μια απλοποιημένη αλλά σωστή παρουσίαση των δύσκολων μαθηματικών εννοιών για τους συμμαθητές τους. Περιλαμβάνεται:

- Τι είναι το φ
  - γιατί ονομάστηκε έτσι,
  - άρρητοι αριθμοί και ανθυφαίρεση,
- Ισογώνιες σπείρες
  - γιατί καλούνται έτσι
  - κατασκευή ναυτίλου από ισοσκελές τρίγωνο και αυτοομοιότητα
  - κατασκευή του χρυσού ορθογωνίου
  - λύση προβλήματος *Τα 4 σκαθάρια που κυνηγιούνται με σταθερή ταχύτητα* και αυτό το πρόβλημα εφαρμοσμένο σε διαφορετικό πλήθος σκαθαριών (3 ή 6). Σύνδεση και με φωτογραφικό κλείστρο
- Αρχιμήδειος σπείρα:
  - Η μεγάλη προσφορά της σε αρχαίες κατασκευές
  - Ο τετραγωνισμός του κύκλου (εισαγωγή άλλων άλυτων προβλημάτων της αρχαιότητας)

3.3 ΤΡΙΤΟ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

Παρουσίαση *των 4 μαθητών στο Αμφιθέατρο, στους συμμαθητές τους*

Οι 4 μαθητές που παρουσίασαν την εργασία στους συμμαθητές τους είχαν στην διάθεσή τους:

- Power point με εικόνες και σχόλια για ό,τι παρουσιάζονταν
- Ταυτόχρονη επεξήγηση με μικρά κείμενα για το τι παρουσιάζεται κάθε στιγμή
- Ζωντανός σχεδιασμός σπειρών με την βοήθεια των μαθηματικών, άμεση επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, επεξήγηση και απλοποιημένη διδασκαλία των μαθηματικών
- Τα έργα των συμμαθητών τους

Η παρουσίαση ξεκίνησε με μια μικρή εισαγωγή για τα συγκοινωνούντα δοχεία μαθηματικών, τέχνης και φύσης. Πρώτα παρουσιάστηκαν γενικές πληροφορίες για το φ, (π.χ. πόσο περίπου είναι, γιατί ονομάστηκε έτσι, η ύπαρξη του στον υπερουράνιο τόπο κατά Πλάτωνα) και που βρίσκεται στην φύση (κοχύλια, λουλούδια, DNA, ιστός αράχνης, δημιουργία γαλαξιών και κυκλώνων, κ.α.) με την παράλληλη προβολή εικόνων και διευκρίνησής τους.

Στη συνέχεια μια από τις 4 μαθήτριες σηκώνεται και σε έναν μεγάλο πίνακα ξεκινά να σχεδιάζει έναν ναυτίλο από ένα ισοσκελές τρίγωνο ενώ παράλληλα μια άλλη συμμαθήτριά της επεξηγεί κάθε βήμα με μαθηματικές σχέσεις (φέρνουμε ύψος ΒΔ, σχηματίζεται νέο τρίγωνο όπου φέρουμε ύψος ΓΕ, κτλ). Τέλος δείχνουν το ιονικό κιονόκρανο από το Ερέχθειο της Ακρόπολης όπου το σχέδιο του ναυτίλου κυριαρχεί.

Έπειτα μια άλλη μαθήτρια, με εναλλαγή, σηκώνεται και λύνει στα παιδιά το πρόβλημα των 4 σκαθαριών που κυνηγιούνται (βλ. παράρτημα) ενώ το εξηγεί και αρχίζει ερωτήσεις για το τι σχήματα θα έβγαιναν αν είχαμε 3 ή 6 σκαθάρια. Στο τέλος παρουσιάζει και αυτές τις εκδοχές δίνοντας τις ισογώνιες σπείρες (φωτογραφικό κλείστρο). Εκεί οι συμμαθητές τους αναγνώρισαν μία από τις εργασίες των καλλιτεχνικών τους που είχαν ήδη εκτελέσει, κατανοώντας το πρόβλημα και την λύση του με τις ισογώνιες σπείρες δοσμένο πλέον από την συμμαθήτριά τους.

Στη συνέχεια παρουσιάστηκε πάλι από μαθήτρια, η κατασκευή ροζέτας με ομόκεντρους κύκλους με πολλαπλάσιες ακτίνες από την πρώτη κτλ. και η εξήγηση της κατασκευής τους. Εδώ, όλοι οι μαθητές είδαν και συνδύασαν την δεύτερη εργασία τους στα καλλιτεχνικά, την ίδια στιγμή που στο power

point προβάλλονταν τα έργα τους. Τέλος, γίνεται παρουσίαση διάσημων ροζετών από την Παναγία των Παρισίων, από τοιχογραφίες της Σαντορίνης και από διάσημους ζωγράφους (Γιόχανς Ίττεν, Hundertwasser)

Μετά, οι μαθήτριες δείχνουν τον γραμμικό μαίανδρο, την κατασκευή του και παράλληλα προβάλλονται διακοσμητικά μοτίβα των Αρχαίων Ελλήνων, ψηφιδωτά και ποτάμια που σχηματίζουν τους μαιάνδρους, εξηγώντας έτσι και την ονομασία τους.

Κατόπιν, σχεδιάζουν στον μεγάλο πίνακα την λύση του προβλήματος, 'τι τροχιά διαγράφει κάποιος που κινείται με ευθύγραμμη ομαλή κίνηση από το κέντρο προς την περιφέρεια ενός κυκλικού δίσκου, καθώς αυτός περιστρέφεται', χαράσσοντας την σπείρα. Εκεί, εξηγούν πολύ απλοϊκά τον τύπο r= α + βθ της Αρχιμήδειου σπείρας, δείχνοντας πρώτη φορά στους συμμαθητές τους τον τετραγωνισμό του κύκλου, εξηγώντας αυτό το πρόβλημα ίσων εμβαδών με την βοήθεια ενός applet που βρήκαν στο internet. Κατόπιν, αναφέρουν την τριχοτόμηση της γωνίας, φτιάχνοντας την με το χέρι μπροστά στους συμμαθητές τους και τέλος συζητούν γιατί αυτά τα προβλήματα έχουν μείνει ως άλυτα προβλήματα της αρχαιότητος.

Εν συνεχεία, εισάγουν τις σπείρες στην αρχιτεκτονική, χρησιμοποιώντας φυσικά τον Παρθενώνα και άλλα αρχιτεκτονικά δημιουργήματα, όπως το Μεγάλο Τζαμί στη Σαμάρα στο Ιράκ, βάζοντας την Ακρόπολη μέσα σε ένα χρυσό παραλληλόγραμμο που σχεδιάζουν εκείνη την στιγμή, εξηγώντας τα βήματα τους, χαράσσοντας και εξηγώντας παράλληλα και τις χρυσές τομές και τις αρμονικές χαράξεις.

Τέλος προβάλουν έργα των Da Vinci, Michelangelo, Raphael, Seurat, Dali κ.ά. στα οποία είναι έντονη η χρήση της χρυσής τομής και γίνεται αμέσως αντιληπτά από τους υπόλοιπους μαθητές. Με αυτό τον τρόπο γίνεται και η σύνδεση της τέχνης με τα μαθηματικά, με το να βλέπουν ταυτόχρονα την εφαρμογή τους στα έργα.

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Το Διαθεματικό αυτό Πρόγραμμα έγινε στα πλαίσια του πρωινού σχολικού προγράμματος των μαθημάτων: Μαθηματικά και Καλλιτεχνικά. Ο χαρακτήρας του ήταν επιμορφωτικός για τους μαθητές, ερευνητικός από τους μαθητές και διδακτικός προς τους μαθητές από μαθητές. Τα παιδιά διασκέδασαν και έμαθαν αβίαστα, αφού έγινε αυθόρμητα από τους μαθητές, με την καθοδήγηση των καθηγητών τους.

- Οι μαθητές μόνοι τους έδειξαν ενδιαφέρον στο κάλεσμα των καθηγητριών τους. Η εργασία ήταν δική τους, που με χαρά υπερασπίστηκαν και παρουσίασαν χωρίς να νιώθουν ότι είναι μάθημα ή υποχρέωση.
- Καθώς περνούσε ο καιρός, οι μαθητές που θα 'δίδασκαν' τους συμμαθητές τους κατανοούσαν όλο και περισσότερο εις βάθος και ρωτούσαν τις καθηγήτριες τους για τα μαθηματικά και τις τέχνες, αφού θα βρίσκονταν στην θέση του 'διδάσκοντα'.
- Έτσι, έπαιρναν τις πληροφορίες και τις μετέτρεπαν σε πληροφορίες κατανοητές προς τις ίδιες τις μαθήτριες και προς τους συμμαθητές τους. Η κατανόηση από τα άλλα παιδιά έγινε απλά και ευχάριστα αφού η παρουσίαση – μάθημα έγινε δοσμένη απλά: από παιδιά για παιδιά.
- Οι συμμαθητές τους ανακάλυψαν ευχάριστα την σύνδεση του μαθηματικού και εικαστικού υπόβαθρου με τα έργα που είχαν ήδη φτιάξει.
- Όλοι οι μαθητές είδαν την καθημερινή σύνδεση της τέχνης και των μαθηματικών με την φύση και ό,τι μας περιβάλλει.
- Οι καθηγήτριες επέβλεπαν και καθοδηγούσαν τις μαθήτριες της παρουσίασης μέχρι το τελικό αποτέλεσμα, διορθώνοντας, επεξηγώντας και βοηθώντας όπου ήταν αναγκαίο για ένα ορθό και ολοκληρωμένο αποτέλεσμα.
- Οι μαθητές έφτιαξαν έργα με μαθηματική ακρίβεια αλλά και εικαστική αξία.
- Ανακάλυψαν ότι μπορούσαν όλοι να δημιουργήσουν το δικό τους έργο.

4. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ainley, J., Pratt, D., Hansen, A. (2004) Connecting engagement and focus in pedagogic Task design. In British Educational Research Journal Vol.32, No. 1, February 2006, (pp.23-38) UK : BERJ Routledge Taylor & Francis Group

Bonk, Curtis J. & Graham, Charles R. (2006) The Handbook of Blended Learning. Global Perspectives, Local Designs. San Francisco: Published by Pfeiffer

Elliot, J. (1991) Action Research For Educational Change, developing teachers and Teaching. Philadelphia: Open University Press, Keynes M.

Chapman, L., (1993), Διδακτική της Τέχνης, Προσεγγίσεις στην Καλλιτεχνική Αγωγή, Νεφέλη, σελ 10-13, 52- 55, 114-136

Combich, E., Το χρονικό της Τέχνης, MIET, σελ 82-84, 292-303, 316-319

Daniels, H. (2004), Vygotsky and Pedagogy. London: RoutledgeFalmer Taylor & Francis Group.

Daucher, H., Seitz, R.(2003)Επιστημονική Επιμέλεια: Σάλλα Τ., Διδακτική των Εικαστικών Τεχνών, Ελληνικά Γράμματα,σελ 139-141, 176-191

diSessa, A. A. (1995) "Collaborating via Boxer". In: Burton L. and Jaworski B. (Eds.), Technology—a Bridge between Teaching and Learning mathematics.(pp. 69-94). Bromley, Kent, UK: Chartwell- Pratt.

diSessa, A. A.(2000), Changing minds: computers, learning and literacy. Cambridge, Mass:MIT Press

Έπστειν Αν., Τρίμη Ελ., (2005), Εικαστικές τέχνες και μικρά παιδιά, Ενισχύοντας τους μικρούς καλλιτέχνες, Τυπωθήτω σελ 158-172, 176-184

Ζαβλανός, Μ., (2003), Διδακτική και Αξιολόγηση, Σταμούλης, σελ 67-73, 226- 229

Μπουλώ, Σ., Η κρυφή γεωμετρία των ζωγράφων, Εσωτερικές Δομές σελ.109,112,147

Μπούρας, Χ.,(1999) Μαθήματα Ιστορίας της Αρχιτεκτονικής, Πρώτος Τόμος, Συμμετρία, σελ 218-233, 235-250

Papert, S. (1993) Mindstorms Children, Computers, and Powerful Ideas.UK :

Harvester Wheatsheaf

Piaget, J., (2000), Επιστημονική Θεώρηση: Σαμαρτζή Σ., Περί Παιδαγωγικής, Β΄ Έκδοση, Ελληνικά Γράμματα, σελ 99-101, 275- 229

Λάββας, Γ., (2002) Επίτομη Ιστορία της Αρχιτεκτονικής, University Studio Press, σελ148-156,158-162

ΟΕΔΒ: Βιβλίο Εικαστικών Β΄ Γυμνασίου σελ 15-16

Βιβλίο Εικαστικών Α΄ Γυμνασίου σελ 35

Βιβλίο Εικαστικών Α΄ Λυκείου σελ 56

Παπαδοπούλου Μ.,(2004), Παίζοντας Τέχνη με παιδιά – Το πρόγραμμα της Έλλης Τρίμη για παιδιά Προσχολικής και Σχολικής ηλικίας, Κυριακίδη σελ 59-76

Σάλλα- Δοκουμετζίδη, Τ.,(1996), Δημιουργική φαντασία και παιδική τέχνη , Εξάντας σελ 155- 169

Watson, A. (2002) "What does it mean to understand something and how do we know it has happened?" In: L. Haggarty (Ed.) Teaching mathematics in secondary schools (p.161 – 175). London: R. Falmer.

anastasia.aivazoglou@gmail.com,

kirkiprev@yahoo.gr

Η ΜΟΥΣΙΚΗ, ΤΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΟΙΟΣ ΒΟΗΘΑΕΙ ΠΟΙΟΝ; ΜΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΝ

Νικόλας Τσαφταρίδης
Τμήμα Εκπαίδευσης & Αγωγής Προσχολική Ηλικία ΕΚΠΑ

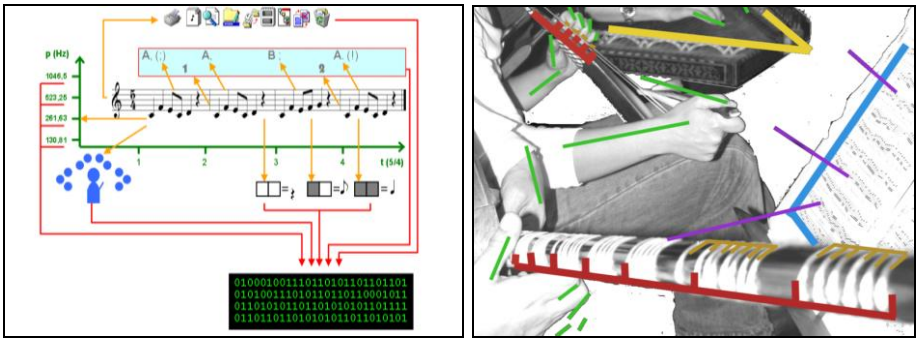
Δημήτρης Σαρρής
Ειδικό Δημοτικό Σχολείο ΕΛΕΠΑΠ Αγρινίου

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία μας εξετάζουμε τις σχέσεις του τριπτύχου «μουσική-παιχνίδι-μαθηματικά», ώστε από γενικά ισχύουσες διαπιστώσεις να συνεισφέρουμε ειδικότερα στη διδακτική πράξη. Αρχικά συζητούμε τις σχέσεις των όρων μέσα από παραδείγματα και στη συνέχεια αναλύουμε μελέτες περίπτωσης, για την κριτική κατανόηση του προβληματισμού μας αλλά και άμεση αξιοποίηση από τον εκπαιδευτικό. Στην πολυδιάστατη σχέση «μουσικής - μαθηματικών», το «παιχνίδι» έρχεται ως ένας «κοινός παρονομαστής», αλλά και ως ένας ξεχωριστός, τρίτος παράγων. Σχεδόν όλες οι σπαζοκεφαλιές, όλα τα παιχνίδια είναι μαθηματικά, άμεσα ή έμμεσα μέσα από την αλγοριθμική, λογική ή ανατρεπτική-της-λογικής διαδικασία που τα υπαγορεύει. Παράλληλα κάθε μουσική «παίζεται», όπως μας υποδηλώνουν πολλές οικείες μας γλώσσες και διάλεκτοι. Ενώ λοιπόν τα όρια μεταξύ μουσικής – μαθηματικών – παιχνιδιού είναι συχνά «δυσδιάκριτα» λόγω των περιχωρήσεων αυτών, είναι πολύ ξεκάθαρες οι διδακτικές δυνατότητες, όταν τα όρια και οι σχέσεις εντοπιστούν εύστοχα. Για το σκοπό αυτό θα επιχειρηθεί να αποσαφηνισθούν οι στόχοι για τους οποίους χρησιμοποιούμε το καθετί από αυτά: γιατί χρησιμοποιούμε μαθηματικά στη μουσική; για διδακτική αξιοποίηση (οι εκπαιδευτικοί) ή για τις ανάγκες έκφρασης (οι δημιουργοί); Είναι δυνατό τα μαθηματικά να γίνουν μια «επίφαση» σοβαρότητας ενός μουσικού έργου; Ένα αντίβαρο «αντικειμενικής» καινοτομίας, έναντι στο «φευγαλέο», αμφίσημο του ήχου; Γιατί χρησιμοποιούμε το παιχνίδι; Επειδή είναι πιο «ευχάριστο» ή πιο δημιουργικό; Είναι το παιχνίδι μια «δεύτερης» ποιότητας έκφραση για τα μαθηματικά και τη μουσική; Και, γιατί χρησιμοποιούμε τη μουσική; γιατί είναι κι αυτή ευχάριστη; Επειδή ως «δευτερεύουσα», συνεισφέρει σε πρωτεύοντες διδακτικούς μας στόχους; Μέσα από δύο παραδείγματα θα προσπαθήσουμε να δώσουμε κάποιες ιδέες στο σύγχρονο εκπαιδευτικό και μελετητή.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ: ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ

Από το τρίπτυχο «μουσική-παιχνίδι-μαθηματικά», η πιο προφανής σχέση είναι ίσως αυτή της μουσικής με τα μαθηματικά (ενδεικτικά: Fauvel κ.α. 2003). Η σχέση αυτή είναι αρκετά εδραιωμένη στη σύγχρονη εκπαίδευση και αξιοποιείται με πολύ προφανή τρόπο. Κλάσματα, γεωμετρικοί σχηματισμοί, μαθηματικές αιτιολογήσεις χρησιμοποιούνται στο μάθημα της μουσικής αλλά και αντιστρόφως: ο έντονα μαθηματικός – ακόμη και «πληροφορικός» (computing) χαρακτήρας της μουσικής θεωρίας (Σαρρής 2005) αποτελεί έρεισμα για την ανάδειξη της φιλοσοφικής, πολιτισμικής διάστασης των αριθμών (εικόνα 1).



Εικόνα 1: ένα τυπικό μουσικό κείμενο αλλά και ένα λαϊκό όργανο συναρτώνται από πολλές μαθηματικές έννοιες. Στην εικόνα αριστερά βλέπουμε περιπτώσεις «πληροφορικής - μαθηματικής κουλτούρας» σε μια απλή παρτιτούρα και δεξιά, αντίστοιχα στοιχείαπου υπογραμμίζονται με χρώματα (αναλογίες, συναρτήσεις, αλγόριθμοι κ.λπ.)

Όπως θα δούμε παρακάτω η σχέση αυτή αποτυπώνεται ως κυρίαρχη στη μουσική δημιουργία του επονομαζόμενου «δυτικού» χώρου. Η επίμονη συγγενοποίηση της μουσικής και των μαθηματικών, είναι ίδιον όχι μόνο της δυτικής καθημερινής κουλτούρας αλλά και της θεσμοποιημένης επιστήμης που τροφοδοτεί το περιεχόμενο της εκπαίδευσης. Αν και είναι αλήθεια ότι μαθηματικοί και αριθμητικοί κανόνες διέπουν τον κόσμο του ήχου, στην πράξη για πολλούς πολιτισμούς διαχρονικά και για πολλές κουλτούρες – ακόμη και σήμερα – η μαθηματική σκέψη δεν είναι ταυτόσημη ή έστω σχετική με τη μουσική δημιουργία. Όργανα κατασκευάζονται χωρίς απόλυτες μετρήσεις (Ανωγειανάκης 1990, Φρονιμόπουλος 2010:52) και μορφολογικά στοιχεία λαϊκών μουσικών δημιουργούνται αδιάφορα ως προς

αυστηρούς κανόνες σαν αυτούς της δυτικής μουσικής. Πολλές φορές μάλιστα ο συσχετισμός μουσικής – μαθηματικών, προέκυψε σχεδόν βίαια, μέσα από ιδιαίτερα συμπλέγματα προσκόλλησης ανθρώπων άλλων πολιτισμών στη δυτική – αποικιοκρατική τότε – κουλτούρα[1]. Επιπλέον στην εκτέλεση ενός έργου Δυτικής μουσικής η αποκωδικοποίηση της εικόνας-παρτιτούρας σε ήχο-μουσική ακολουθεί μια μαθηματική λογική (ακριβής αντιστοιχία του σήματος με τον ήχο) ενώ σε μια μη δυτικής λογικής παρτιτούρα έχουμε μια «μορφή δημιουργικού αυτοσχεδιασμού» (Χαψούλας 2010:56) ακόμα και αν χρησιμοποιούνται δυτικοί τρόποι καταγραφής.

Δεδομένου ότι η ιστορική εμπειρία αποδεικνύει πως η μουσική (ως πράξη) και τα μαθηματικά δεν είναι πάντα «κοντινοί συγγενείς», πώς θα πρέπει να διαχειριστεί τη σχέση αυτή ο εκπαιδευτικός; Κατ' αρχάς υποστηρίζουμε ότι ο συσχετισμός μουσικής και μαθηματικών στη διδακτική πράξη θα πρέπει να είναι μια διαδικασία συνειδητή. Να είναι δηλαδή αποτέλεσμα κριτικής διαχείρισης των γνώσεων και των αναγκών του εκπαιδευτικού. Την κριτική αυτή διάσταση ορίζει εύστοχα ο Baynham (2002:13) ως επίγνωση «ως προς τους κοινωνικούς στόχους και ως προς τίνος τα συμφέροντα υπηρετούνται μέσω αυτών». Η προβολή, για παράδειγμα, της σχέσης μουσικής και μαθηματικών δε θα πρέπει να θεωρείται «ως δεδομένη», αλλά να θεωρείται μια από τις πολλές «επιλογές» της «κατ' εξοχήν διαδικασίας επιλογών, που είναι η εκπαίδευση».[2]

Ο μαθηματικός ίσως θα πρέπει να ξέρει μουσική, αλλά και ο μουσικός μαθηματικά. Όμως επειδή πραγματικά στις γνώσεις τους υπάρχουν κοινοί τόποι, τελικά το ζητούμενο είναι να μπορεί έκαστος να έχει επίγνωση του υλικού που πραγματικά ήδη κατέχει από το συγγενικό του πεδίο (ο μουσικός τα μαθηματικά και ο μαθηματικός τη μουσική) και να τις διαχειρίζεται αποτελεσματικά. Γιατί όμως ισχύει αυτό; Ή καλύτερα, πότε πρέπει να ισχύει αυτό; Μια απάντηση θα μπορούσε να είναι: όποτε διδάσκουμε στα πλαίσια της δυτικής επιστήμης και κουλτούρας. Σε κάθε περίπτωση, η σχέση μουσικής και μαθηματικών ισχύει στη θεωρία αλλά δε μπορεί να θεωρείται a priori δοσμένη στην πράξη. Όμως ακόμη και αυτό το ερώτημα δε θα πρέπει να μπαίνει επιτακτικά, αλλά σαν μια ερώτηση για την τροπή που θα πάρει το «παιχνίδι» της διδασκαλίας. Στην παραδοχή αυτή βρίσκεται η απαρχή της κριτικής αντιμετώπισης της διδακτικής πράξης.

---

[1] Ο Touma (2007) αναφέρεται ενδελεχώς στο φαινόμενο αυτό.

[2] Την άποψη αυτή επισήμανε ήδη από τα μέσα του 20ου αιώνα ο T. Adorno, με την περίφημη «θεωρία της ημιμάθειας».

Στην εργασία μας δίνουμε στο παιχνίδι σημαίνοντα ρόλο στη σχέση αυτή. Τυπικά, η μουσική «παίζεται» και τα μαθηματικά είναι στο παρασκήνιο κάθε παιχνιδιού (ενδεικτικά: Beasley 2006). Δίνοντας στην έννοια του «παιχνιδιού» την ευρύτερη σημασία μιας πράξης που συνδυάζει φαντασία, ευρηματικότητα, κανόνες και γνώση, θα εκμαιεύσουμε από τα χαρακτηριστικά του πρακτικές που αξιοποιούν την κριτική τοποθέτησή μας απέναντι στη σχέση μουσικής και μαθηματικών.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΗΣ ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΚΑΙ Η ΜΟΥΣΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Στην αρχαία Ελλάδα εμφανίζεται μια εμπεριστατωμένη σύνδεση μουσικής και μαθηματικών, με τα θεωρήματα του Πυθαγόρα, όπου καταγράφει πως τα κλάσματα που δημιουργούνται με τη διαδοχή των αριθμών, μας δίνουν και θεμελιώδεις σχέσεις τόσο για τη μουσική όσο και για το σύμπαν ολόκληρο. Οι αριθμοί αυτοί, 1/1, 1/2, 2/3, και 3/4 κατ' αρχάς μας δίνουν τέσσερις «νότες» καίριας σημασίας στην πράξη της μουσικής κατασκευής (την πρώτη, τέταρτη, Πέμπτη και όγδοη νότα μιας «σκάλας»). Τόσο στη Μουσική όσο και τη Φυσική, την Ακουστική και τα Μαθηματικά, οι αναλογίες αυτές παρουσιάζονται με μια σειρά κυματομορφές. Χιλιάδες χρόνια μετά, η ίδια αυτή διάταξη κυματομορφών αποτέλεσε κομμάτι της «θεωρίας των χορδών», που ούτε λίγο ούτε πολύ εξηγούν την απαρχή της ύπαρξης του κόσμου μας.

Στο ενδιάμεσο των παραδειγμάτων αυτών, υπάρχει μονίμως μια συσχέτιση μουσικής και μαθηματικών, που τελικά μπολιάζει την επιστήμη του διαφωτισμού, που γνωρίζουμε και στις μέρες μας. Είναι μια σχέση βαθιά υπαρξιακή, που δεν αφορά μόνο τις δύο αυτές αναδυόμενες «επιστήμες». Βέβαια ενώ ο Πυθαγόρας συνέδεε με τις μαθηματικές του παρατηρήσεις όχι μόνο τους νόμους της μουσικής αλλά και της αστρονομίας, ολόκληρου δηλαδή του σύμπαντος που μας περιβάλλει, χρειάστηκε για ένα μεγάλο διάστημα οι χώροι αυτοί να «αποσυνδεθούν», ενώ η σημερινή «σύνδεσή» τους στη «θεωρία των χορδών», είναι περισσότερο ονομασία εμπνευσμένη από την έννοια της χορδής, παρά μια δήλωση κάποιας καθολικής σύνδεσης του κόσμου της μουσικής με αυτόν των αριθμών (Becker κ.α. 2006).

Στη νεοτερική Ευρώπη η κυριαρχία των αριθμών εξελίχθηκε σε μια κυριαρχία ισότιμη με αυτή των γραμμάτων. Στον όρο «εγγραμματισμός» (Literacy) ήρθε να συμπαρατεθεί ο όρος «numeracy»[3], που δεν έχει ακόμη το δόκιμο ανάλογό του στη γλώσσα μας. Ο σύγχρονος δυτικός κόσμος

[3] Μια διαδικτυακά προσβάσιμη αναφορά στην εμφάνιση του όρου και τις χρήσεις του βρίσκουμε στη wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Numeracy .

ανάγοντας τον αριθμό σε εργαλείο δόμησης της κουλτούρας του – της «εγγράμματης» κουλτούρας του – άφησε τον αριθμό να κυριαρχήσει. Και δεν υπάρχει ίσως πιο απόλυτη «κυριαρχία» από τη στιγμή που ο αριθμός γίνεται «ψηφίο» και ο κόσμος μας «ψηφιακός». Εκεί τα ψηφία είναι μόνο δύο, το 0 και το 1. Όμως αρκούν για την πληροφορική, ώστε αυτή να περιγράψει με αυτά, να αναλύσει και να (ανα)συνθέσει ολόκληρη την πραγματικότητα.

Στην πορεία αυτής της τεχνολογικής «ολοκλήρωσης», η μουσική πορεύτηκε σταθερά στο δυτικό κόσμο, με διαδικασίες «εξ-αρίθμησης», με διαδικασίες δηλαδή όπου η μέτρηση ο υπολογισμός και η μαθηματική απεικόνιση ήταν όλο και πιο πολύ απαραίτητα. Στη μουσική σημειογραφία της Δύσης η χρήση των αριθμών κυριαρχεί. Είτε φανερά, π.χ. με την αρίθμηση των μέτρων, ή τη χρήση κλασματικών αριθμών της αξίας τους, είτε «εσωτερικά», π.χ. με τις χρονικές υποδιαιρέσεις των φθόγγων και τη μέτρηση της ταχύτητας, αντιλαμβάνεται κανείς την «κυριαρχία των αριθμών», στη δυτική μουσική. Σπουδάζοντας, επίσης, συστηματικά θα δει ότι η «κυριαρχία» αυτή οικοδομεί τελικά ακόμη και αυτό το σύστημα επιλογής κάθε χαρακτηριστικού του ήχου, όπως το τονικό ύψος, (π.χ. η βάση των 440 Hz για τη νότα Λα) κάθε έννοια «κλίμακας» (π.χ. η υποδιαίρεση της 8vas σε δώδεκα ίσα μέρη (καθορισμός του ημιτονίου ως 12 ρίζα του 2), κάθε έννοια διάρκειας (π.χ. η χρήση του μετρονόμου στη ρυθμική αγωγή □ =60) κάθε έννοια χροιάς και συνήχησης (π.χ. η αντικατάσταση φθογγόσημων από αριθμούς στις συγχορδίες (στενογραφία για την καταγραφή των συγχορδιών)), κάθε συμβολική και διαδικαστική μουσική λειτουργία (ενδεικτικά αναφέρονται η αρίθμηση των διαστημάτων, η σχέση των διαστημάτων για τον καθορισμό των κλιμάκων, η σχέση των κλιμάκων μεταξύ τους (ο «κύκλος με τις 5ες»), η αρίθμηση των βαθμίδων).

Αυτή η εξέλιξη δε θα ήταν σημαίνουσα αν εκτός από εργαλειακό, δεν αποκτούσε και πολιτισμικό χαρακτήρα. Ειδικά τον 20ο αιώνα μουσικοί όλων των ειδών χρησιμοποίησαν τα μαθηματικά άλλοτε για να δώσουν επιστημονική, εγγράμματη επίφαση και άλλοτε δημιουργώντας ένα ολόκληρο δημιουργικό ρεύμα με επιδράσεις στην μουσική και καλλιτεχνική κουλτούρα. Συνθέτες χρησιμοποίησαν «προχωρημένα» αμιγή θεωρήματα (όπως η σειρά Fibonacci και η χρυσή τομή) ή ακόμη και ολόκληρους αλγόριθμους όπως κατά κανόνα έπραττε ο Ξενάκης. Τα παραδείγματα είναι πολλά τόσο στη λόγια (Music for Strings, Percussion, and Celesta, Μέρος Τρίτο του Béla Bartók), όσο και στην «εμπορική», ή κατ' άλλους «λαϊκή» (popular) μουσική παραγωγή (ενδεικτικά το «Born in the USA» του Springsteen, το «One Way Out» των Allman Brothers κ.α.).

Από μια άλλη οπτική, όπως ήδη αναφέραμε ίσως δεν είναι ακραίο να δούμε ως παράδειγμα «αντίστροφης» προσέγγισης της μουσικότητας μέσω των μαθηματικών, την πλέον σύγχρονη θεωρία που εξηγεί το σύμπαν, δηλαδή τη «θεωρία των χορδών». Οι φυσικοί παραδέχονται ότι πρόκειται για μια «καλλιτεχνική» ερμηνεία του σύμπαντος, ότι δηλαδή εμπνέεται από ένα ζήτημα τέχνης και ειδικότερα μουσικής όπως είναι η χορδή, κάτι που όμως είναι πραγματικότητα για τον κόσμο της φυσικής. Βέβαια είναι γνωστό ότι αυτή η «έμπνευση» δεν εξαντλείται ποτέ, και πολλά καίρια ζητήματα εξήγησης του κόσμου μας μοιάζουμε με ένα ποίημα: «κόκκινοι γίγαντες και άσπροι νάνοι», «big bang», «ρίζες», «αριθμός π». Αυτή είναι μια αμφίδρομη σχέση, όπου πλέον τα μαθηματικά γίνονται μουσική, αλλά με έναν τρόπο περισσότερο άρρητο, μια και συνήθως η αναζήτηση των μαθηματικών γίνεται ξεκινώντας από τη μουσική.

Η ΩΡΑ ΤΗΣ ΠΡΑΞΗΣ: ΤΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ «ΚΟΙΝΟΣ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗΣ»

Το πραγματικό παιχνίδι που αρέσει και ξεκουράζει δημιουργεί ένα νόημα στο νου και το σώμα του παιδιού. Το παιχνίδι δεν είναι πάντα κάτι επιτυχημένο απλά επειδή το ονομάζουμε «παιχνίδι» και το προωθούμε ως χαλάρωση, ξεκούραση διασκέδαση. Γι' αυτό και το παιχνίδι δεν είναι κάτι συγκεκριμένο: είναι αντικείμενα, πρακτικές, ιδέες, τρόποι δράσης, τρόποι ύπαρξης κ.λπ. Το παιχνίδι μπορεί να προσδιορίσει ως έννοια κάθε δραστηριότητα του ανθρώπου και της φύσης: «παιχνίδια πολέμου», «ερωτικό παιχνίδι», «παιχνίδισμα χρωμάτων» ακόμη και «παιχνίδια της ζωής».

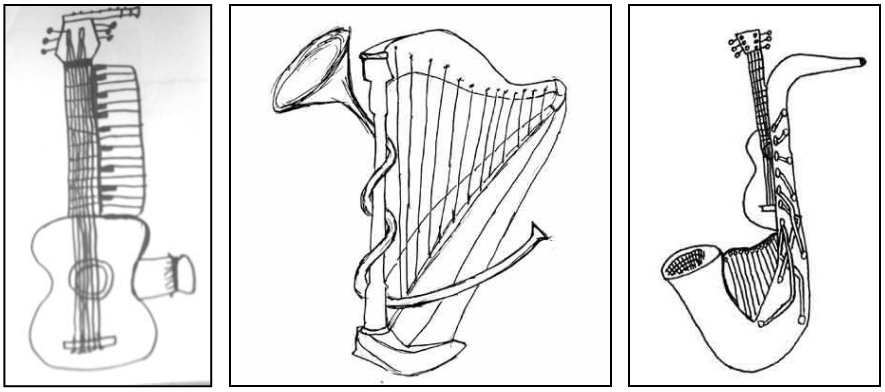
Πολύ κοντά στο παιχνίδι βρίσκεται η έννοια του αυτοσχεδιασμού, και – υπό μία έννοια – η ίδια η εξέλιξη κάθε διδασκαλίας έχει μια έννοια αυτοσχεδιαστικού παιχνιδιού γιατί μόνο έτσι παραμένει διαδραστική και ζωντανή και δεν είναι μια στείρα πραγματοποίηση ενός άκαμπτου σχεδίου μαθήματος. Κατά τον C. Orff «η ιδανική διδασκαλία» μάλιστα είναι αυτή που έχει αυτοσχεδιαστικό χαρακτήρα αν και όχι χωρίς κινδύνους (Τσαφταρίδης 1997:80). Επιπλέον η αυτοσχεδιαστική μουσική δημιουργία «διασώζει τον αγώνα για προσωπική νοηματοδότηση της σχέσης με τη μουσική» (Κανελλόπουλος 2010:122). Από την άλλη, το παιχνίδι ως διδακτικό εργαλείο χρησιμοποιείται κατά κόρον στη διδασκαλία. Σπαζοκεφαλιές, σταυρόλεξα και ερωτήσεις είναι παιχνίδια «τεστ». Ειδικά στη μουσική, το «παιχνίδι» είναι ο κανόνας τόσο για τη μάθηση όσο και για τη δημιουργία των παιδιών. Τα μουσικά και κινητικά παιχνίδια αποτελούν μια μεγάλη πολύ σημαντική ενότητα της διδακτικής της μουσικής. Η ιδιότητα του παιχνιδιού να συνενώνει ως «κοινός παρονομαστής» τη μουσική και τα μαθηματικά μπορεί να μελετηθεί κάτω από συγκεκριμένα παραδείγματα.

Η κατασκευή του μουσικού οργάνου από τα ίδια τα παιδιά μπορεί να αποτελέσει ένα παράδειγμα της διπλής αυτής χρήσης προσέγγισης της μουσικής και των μαθηματικών μέσα από μια διαδικασία παιχνιδιού. Η κατασκευή του μουσικού οργάνου ως εκπαιδευτική διαδικασία δεν είναι μια σημερινή υπόθεση. Τη συναντάμε σε εξω-ευρωπαϊκούς μουσικούς πολιτισμούς αλλά και σε ευρωπαϊκές λαϊκές παραδόσεις. Μια σειρά από μουσικά όργανα – ηχητικά αντικείμενα κατασκευάζονται από τα ίδια τα παιδιά με σκοπό να παίξουν, να κάνουν μουσική ή απλώς να ασχοληθούν με κάτι (Ανωγειανάκης 1990, Καλυβιώτης 2007). Από τις αρχές του 20ου αιώνα η αυτοσχέδια κατασκευή μουσικών οργάνων από τα παιδιά εισάγεται και στην θεσμοθετημένη γενική εκπαίδευση ως ένα επιπλέον κίνητρο δημιουργικής ενασχόλησης με τη μουσική αρχικά στην Αμερική και κατόπιν και στην Ευρώπη (Τσαφταρίδης, 1995). Η διεργασία κατασκευής ξεκινά από το στάδιο εκείνο κατά το οποίο το παιδί είτε θα «σχεδιάσει» στη σκέψη του το μουσικό αυτοσχέδιο όργανο, θα σκεφτεί δηλαδή, πως μπορεί να φτιάξει ένα όργανο είτε θα ενεργοποιήσει τη φαντασία του προς την κατεύθυνση της παραγωγής του ήχου, δηλαδή, δοκιμάζει πως παράγει ήχο ένα αντικείμενο που βρήκε. Μέσω της κατασκευής το παιδί αρχίζει να αντιλαμβάνεται απλές μαθηματικές εφαρμογές εννοιών όπως το μεγαλύτερο - μικρότερο, παχύτερο - λεπτότερο, βαρύτερο, ελαφρύτερο, ίδιο, ίσιο, άνισο κτλ. αλλά και μετρήσεις, συγκρίσεις καθώς και απλές αριθμητικές πράξεις. Επιπλέον η χρήση του κατασκευασμένου μουσικού οργάνου συμπεριλαμβάνει εφαρμογές οι οποίες μπορεί να βασίζονται σε μαθηματικές σχέσεις ή να κάνουν χρήση αριθμητικών εφαρμογών. Η συνειδητή χρήση των μαθηματικών από τη μεριά του δασκάλου δεν χρειάζεται να είναι εμφανής στους μαθητές προκαλώντας συναισθήματα υπεροχής σε όσους μαθητές διαθέτουν «μαθηματική σκέψη» ή αντίθετα συναισθήματα μειονεξίας σε όσους δεν διαθέτουν κάτι τέτοιο.

Το ίδιο θα μπορούσε να ισχύει ακόμη και κατά την ζωγραφική, την απεικόνιση δηλαδή των μουσικών οργάνων. Μια πρακτική που έχει δοκιμαστεί προκειμένου να αξιοποιηθούν τα μουσικά όργανα και γενικότερα τα στοιχεία της μουσικής στην εκπαίδευση, περιλάμβανε το σχεδιασμό «φανταστικών» μουσικών οργάνων, μιας χώρας όπου όλα «παίζουν μουσική» και που την ονομάζουμε «οργανοτοπία»[4]. Εκεί, με την κατάλληλη

[4] Το πρόγραμμα «Οργανοτοπία», που στοχεύει στη μάθηση μέσα από το σχέδιο που βασίζεται στα μουσικά όργανα και τον κόσμο της μουσικής αναπτύσσεται από το 2006 σε εκπαιδευτικούς οργανισμούς και σχολεία. Περισσότερα βρίσκονται στην

προετοιμασία, ο εκπαιδευτικός – που μπορεί να αξιοποιεί και το μάθημα των εικαστικών – προτείνει στα παιδιά φανταστικά σχέδια με μουσικά όργανα και στη συνέχει συζητά μαζί τους γεωμετρικά και στερεοσκοπικά στοιχεία προκειμένου να μιλήσει για στοιχεία γεωμετρίας και μαθηματικών στην πράξη. Αρχικά τους εξηγεί με απλά σχέδια και στη συνέχεια συζητά πάνω στις φανταστικές εικόνες που έχουν κατασκευάσει (εικόνα 2).



Εικόνα 2: Φανταστικές ζωγραφιές ενός «πολυοργάνου», από τη χώρα της «Οργανοτοπίας». Ο μαθητής καλλιεργεί τη φαντασία του και στη συνέχεια συζητά με του εκπαιδευτικό τα γεωμετρικά στοιχεία που κάνουν αληθινό ή όχι το όργανο αυτό, μαθαίνοντας μαθηματικές και γεωμετρικές αρχές της μουσικής .

Είναι προφανές ότι το παιχνίδι της κατασκευής μπορεί να είναι ένα παιχνίδι μουσικής και μαθηματικών στην πράξη αλλά και «επί χάρτου». Το πραγματικό παιχνίδι που αρέσει και ξεκουράζει δημιουργεί ένα νόημα στο νου και το σώμα του παιδιού. Οι προεκτάσεις που μπορούν να δοθούν στο παιχνίδι αυτό περιορίζονται μόνο από τη φαντασία του εκπαιδευτικού.

Η ΩΡΑ ΤΗΣ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ: ΚΛΑΒΕΣ ΚΑΙ ΧΑΡΤΟΦΩΝΟ

Ακολούθως θα δούμε δύο παραδείγματα – μελέτες περίπτωσης – στα οποία θα αναφέρουμε τις συσχετίσεις μουσικής και μαθηματικών μέσα από ένα «διδακτικό παιχνίδι», που προκύπτουν στην παιδαγωγική πράξη.

ηλεκτρονική διεύθυνση http://metasound.gr/organotopia και http://cmc.gr/organotopia.

ΞΥΛΑΚΙΑ (CLAVES)

Στόχος μας είναι να κατασκευάσουμε ένα φαινομενικά απλό ζεύγος από «ξυλάκια», όμοια δηλαδή κυλινδρικά κομμάτια ξύλου που παίζονται με το χέρι ως κρουστά συμβάλλοντας στο ρυθμικό μέρος της μουσικής. Η εμπειρία κατασκευής έχει δείξει ότι τα καλύτερα ηχητικά αποτελέσματα τα έχουμε όταν χρησιμοποιούμε ένα κομμάτι κυλινδρικό ξύλο με διάμετρο γύρω στα 20 χιλ. και με μήκος για το κάθε ξυλάκι γύρω στα 20 εκ.

Η διαδικασία κατασκευής μπορεί να περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα:

- εκτίμηση διαστάσεων (αν ένα κομμάτι ξύλο έχει τις προσδοκώμενες προδιαγραφές)
- μέτρηση (το κάθε ξυλάκι χωριστά σε όλες τις διαστάσεις και ως προς τη γεωμετρία του)
- σύγκριση με πρότυπο ξυλάκι (διαστάσεις, βάρος)
- υπολογισμό των κομματιών από ένα μεγαλύτερο κομμάτι (από ένα σκουπόξυλο πόσοι μαθητές μπορούν να έχουν ένα ζεύγος· τι περισσεύματα έχουμε; - πράξεις διευθέτησης του αρχικού ξύλου για σωστό «κόψιμο»).
- κατανόηση των σημείων κρατήματος κατά τη μουσική πράξη (π.χ. τα 2/3 του ξύλου ελεύθερα μπροστά και το 1/3 πίσω από το σημείο κρατήματος, κρούση στη «μέση» (1/2) του ενός ξύλου κ.λπ.).

Η διαδικασία παιξίματος μπορεί να περιλαμβάνει πολλές εκδοχές «μαθηματικής» οργάνωσης των μουσικών παραλλαγών λόγω της απλότητας του ήχου και του μουσικού ρόλου που παίζουν τα ξυλάκια. Αντιστοιχώντας ένα χτύπημα σε κάθε μέρος της δομικής επαναλαμβανομενης φράσης («μέτρο» στην ορολογία της μουσικής), μπορούμε να ορίσουμε ποια «μέρη» (που αντιστοιχούν σε αριθμούς) και πότε θα παίζει ο εκτελεστής. Έτσι έχουμε: (1-2-3-(4)).

- χτύπημα σε συγκεκριμένα μέρη του μέτρου (σχ. α)
- χτύπημα σε διαφορετικά μέρη του μέτρου (σχ. β)
- χτύπημα σε συγκεκριμένα μέρη του μέτρου αλλά διαφορετική για κάθε ομάδα. Σταματάμε στην τέταρτη επανάληψη (σχ. γ).
- χτύπημα σε συγκεκριμένα μέρη του μέτρου αλλά διαφορετικά μέτρα για κάθε ομάδα. Σταματάμε όταν τα συμπέσουν τα χτυπήματα στα διαφορετικά μέτρα (ελάχιστος κοινός διαιρέτης, σχ. δ).

- προσθήκη και άλλων ομάδων με διαφορετικά μέτρα (σχ. ε).

1-2-3-4 (σχ. α)	**1**-2-**3**-4 (σχ. β)	(**1**-2-3- 4)	**1**-2-3-4 **1**-2-3	**1**-2-3-4 **1**-2-3 **1**-2-3-4-5

- ομαδοποίηση των εσωτερικών μερών μικτού μέτρου με διαφορετικούς τρόπους (π.χ. 2/8 + 3/8 ≠ 3/8 + 2/8)

Εικόνα 3: Κλάβες σε δύο σχετικά όμοιες διαστάσεις

Τόσο η «χειρωνακτική» δραστηριότητα της κατασκευής όσο και η «πνευματική» δραστηριότητα της μουσικής εμπλέκουν την πρακτική εφαρμογή αλλά και την θεωρητική προσέγγιση μαθηματικών διεργασιών. Το επόμενο παράδειγμα συμβάλλει επιπρόσθετα σε αυτή την ιδέα.

ΧΑΡΤΟΦΩΝΟ

Το χαρτόφωνο μοιάζει με το κλασικό «ξυλόφωνο» ή «μεταλλόφωνο» μόνο που είναι κατασκευασμένο από όμοιες κόλλες χαρτί (Α4). Μπορεί να αποτελείται από δύο απλούς τυλιγμένους σωλήνες (έναν για κάθε χέρι) τυλιγμένους με λαστιχάκια ή να είναι ένα σύστημα σωλήνων με δυνατότητα να «κουρδιστούν», αφού το μέγεθός τους μπορεί να ρυθμιστεί με την προσθήκη ενός σωλήνα ακόμη σαν έμβολο» (εικόνα 4).

Εικόνα 4: Δύο σωλήνες που παίζονται με τα χέρια (αριστερά) και ένα «χαρτόφωνο» από ένα σύνολο σωλήνων από χρωματιστό χαρτί.

Όλη η κατασκευή δένεται με λάστιχα. Η κατασκευή αυτή, χωρίς να αναφέρεται ποτέ στους μαθητές, είναι ουσιαστικά μια άσκηση «υποταγής» του απειθάρχητου επίπεδου χαρτιού σε σωλήνες με ίδια διάμετρο, με μαθηματικά ελεγχόμενο μήκος το οποίο μπορεί να δοθεί στους μαθητές: υπολογίζοντας το μήκος του πρώτου σωλήνα δίνονται κλάσματα για τους επόμενους. Πρόκειται για μια «ομοιοστατική» δράση, σύμφωνα με τη θεωρία της πολυσυζητημένης «εντροπίας», όπου από την αταξία, δημιουργούμε την τάξη ενός μουσικού οργάνου, από το θόρυβο, δημιουργούμε μουσική. Τα κλάσματα αυτά ισχύουν για όλα τα μουσικά όργανα και τις χορδές, και είναι τα ίδια με τους παγκόσμιους κανόνες που ισχύουν στη θεωρία των χορδών[5]. Τα παιδιά καλούνται να υπολογίσουν λαστιχάκια, όμοια τυλίγματα, να προσέξουν τη φορά του τυλίγματος κ.λπ. Στη συνέχεια όλη αυτή η μαθηματική κατασκευή παίρνει ηχητική υπόσταση. Τα παιδιά μπορούν να ακούσουν τους σωλήνες και να πειραματιστούν με τα μήκη (τα οποία μπορούν να «χαράσσουν» με στυλό στο χαρτί της κατασκευής) και να ακούσουν τον ήχο των μαθηματικών τους επιλογών. Βέβαια όλος αυτός ο «κόσμος των μουσικών αριθμών» θα μπορούσε με απλή προετοιμασία να χρησιμοποιηθεί από τον εκπαιδευτικό σε πολλά παρόμοια όργανα και όλα τα έγχορδα. Όμως εδώ η αμεσότητα της κατασκευής και μάλιστα με τόσο απρόσμενα και προσιτά υλικά, δίνει την αίσθηση του παιχνιδιού, αλλά και μιας καινοτόμας δραστηριότητας.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΑ: ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ

Όπως είδαμε, η σχέση μαθηματικών και μουσικής είναι μια από τις πλέον αναδεδειγμένες στο χώρο της επιστήμης και της δημιουργίας. Ενώ κατά κανόνα τονίζουμε τα μαθηματικά στοιχεία που ενυπάρχουν στη μουσική, στην πράξη και τα μαθηματικά – ή καλύτερα οι θετικές επιστήμες – εμπνέονται στη νεοτερικότητα από τα διακυβεύματα των τεχνών του ήχου. Σε όλα αυτά το παιχνίδι είναι ο κοινός παρονομαστής που εμπλουτίζει το «επιστημονικό αφήγημα», αλλά και αμβλύνει την ορθολογικότητά του. Το παιχνίδι δεν είναι μια απαξιωτική δραστηριότητα για παιδιά, αλλά ένας δρόμος απελευθέρωσης της σκέψης και της πράξης.

---

[5] Οι λόγοι αυτοί για νότες που η σχέση μεταξύ τους παράγει μια σκάλα όμοια με την πασίγνωστη «μείζονα»: (I) ντο, (II) ρε, (III) μι, (IV) φα, (V) σολ, (VI) λα, (VII) σι, (VIII) ντο, αν η (I) είναι η μονάδα, γίνεται:

I=1, II=8/9, III=4/5 (ακριβώς: 64/81), IV=3/4, V=2/3, VI=3/5 (ακριβώς: 16/27) VII=8/15 (ακριβώς: 128/243), VIII= 1/2.

Τις σχέσεις αυτές ανάμεσα σε μουσική, μαθηματικά και παιχνίδι επιχειρήσαμε να αναδείξουμε με δύο παραδείγματα κατασκευών. Στις κατασκευές αυτές, αν και εντάσσονται στις απλούστερες των εκπαιδευτικών μουσικών κατασκευών, υπάρχουν πολλά στοιχεία μαθηματικών και θετικών επιστημών. Τα στοιχεία αυτά παρεισφρέουν στην εκπαιδευτική διαδικασία χωρίς να επισημαίνεται η θεωρητική σχέση στα παιδιά. Εισέρχονται σαν ένα παιχνίδι στην τάξη, αλλά προσφέρουν στον εκπαιδευτικό όλους εκείνους τους σύνθετους εκπαιδευτικούς στόχους που θα επιθυμούσε. Αναφερθήκαμε έτσι με σχετική συντομία αλλά πληρότητα – πιστεύουμε – σε μια δυνατότητα που ήδη έχει δοκιμαστεί στην εκπαίδευσή μας, αλλά έχει πολλή δυναμική ακόμη για να αναπτυχθεί.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Adorno, T. W. (1990). *Θεωρία της ημιμόρφωσης*. Μτφρ. Αναγνώστου, Λ. Αθήνα: Αλεξάνδρεια.

Ανωγειανάκης, Φ. (1991). Ελληνικά Λαϊκά Μουσικά Όργανα. Αθήνα: Μέλισσα.

Baynham, M. (2002). *Πρακτικές γραμματισμού*. Μτφρ. Αράπογλου, Μ. Αθήνα: Μεταίχμιο.

Beasley, D., J. (2006). *The mathematics of Games. Dover Publications.*

Becker, M. – Becker, M. – Schwarz, J. (2006). *String Theory and M-theory*. Cambridge: Cambridge University Press.

Καλυβιώτης, Α. (2007). Παιχνίδια - Ηχητικά αντικείμενα. Σάμος: Απόπλους.

Κανελλόπουλος, Π. Α. (2010). Σχεδίασμα μιας παιδαγωγικής του ελεύθερου μουσικού αυτοσχεδιασμού. Στο Παναγιώτης Κανελλόπουλος, Νικόλας Τσαφταρίδης (επ.), *Τέχνη στην Εκπαίδευση – Εκπαίδευση στην Τέχνη* .Αθήνα: Νήσος. σσ. 119-146.

Τσαφταρίδης, Ν. (1995). *Αυτοσχέδια μουσικά όργανα – Κατασκευές*. Αθήνα: Edition Orfeus.

Τσαφταρίδης, Ν. (1997). *Μουσική, Κίνηση, Λόγος. Η στοιχειοδομική μουσική στο Παιδαγωγικό Έργο Orff*. Αθήνα: Νήσος.

Fauvel, J. – Flood, R. – Wilson, R. (2003). *Music and Mathematics. From Pythagoras to Fractals*. Oxford: Oxford University Press.

Φρονιμόπουλος, Ν, (2010). *Ο ταμπουράς του Μακρυγιάννη και η οργανοποιίας του Λεωνίδα Γαϊλά*. Αθήνα: Ιστορική και Εθνολογική Εταιρεία της Ελλάδος.

Χαψούλας, Α. (2010). *Εθνομουσικολογία. Ιστορικές και εθνογραφικές διαστάσεις*. Αθήνα: Νήσος.

Σαρρής, Δ. (2005). Πολιτισμική Διάσταση της Πληροφορικής και Λαϊκή Μουσική: Ένα πλαίσιο προβληματισμού. Στο Τζιμογιάννης, Α. *3ο πανελλήνιο συνέδριο. Διδακτική της Πληροφορικής. Πρακτικά Εργασιών*. Κόρινθος: ΕΤΠΕ. <Διαθέσιμο διαδικτυακά στο www.etpe.gr>.

Σαρρής, Δ. (2006). Πνευσίκρουστοι σωλήνες και χαρτόφωνο: μια γνωριμία με τις μουσικές «αναστοχαστικές» κατασκευές. Στο *Μουσική σε πρώτη βαθμίδα.* Αθήνα: Ένωση Εκπαιδευτικών Μουσικής Αγωγής Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης. σ.σ. 79-88.

Touma, H. – H. (2006). *Η μουσική των αράβων.* Μτφρ. Τζωρτζίνης, Β. Θεσσαλονίκη: Εν χορδαίς.

nikotsaf@ecd.uoa.gr

dsarris@sch.gr

ΟΙ ΕΙΚΑΣΤΙΚΕΣ ΤΕΧΝΕΣ ΩΣ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Θεοδώρα Ντόκα

Φοιτήτρια Τμήματος Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στα πλαίσια της κατάλυσης των ορίων ανάμεσα στα γνωστικά αντικείμενα διερευνήθηκε το κατά πόσον η διδασκαλία και η μάθηση της Γεωμετρίας μπορούν να ευεργετηθούν από μια δημιουργική ανάγνωση και μελέτη έργων τέχνης. Μαθητές της Β' δημοτικού διδάχτηκαν τις ενότητες που προβλέπονται από το σχολικό βιβλίο μέσω ζωγραφικών πινάκων, εικονογραφίας αγγείων, λαϊκών μοτίβων αλλά και με την επίσκεψη σε μια έκθεση γλυπτικής και μια έκθεση ζωγραφικής. Στόχος της προσέγγισης αυτής ήταν να αντιμετωπιστούν τα συνηθισμένα προβλήματα που εμποδίζουν την εκμάθηση της Γεωμετρίας και είναι η γενικότερη φοβία για τα μαθηματικά, η έλλειψη συσχετισμού ανάμεσα στη Γεωμετρία και τον πραγματικό κόσμο, η αδυναμία ανάπτυξης της παραγωγικής σκέψης που απαιτείται για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων και η έλλειψη κινήτρων για την εκμάθηση της Γεωμετρίας, ενώ γενικότερα επιδιώκεται η προώθηση της έννοιας της διαθεματικότητας

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στον τομέα της υποχρεωτικής εκπαίδευσης στην Ελλάδα, τα τελευταία χρόνια, γίνεται μια προσπάθεια κατάλυσης των ορίων που υπάρχουν ανάμεσα στα διάφορα γνωστικά αντικείμενα. Στο πλαίσιο αυτό, είχε διερευνηθεί, το σχολικό έτος 2007-2008, κατά πόσον η διδασκαλία και η μάθηση της Γεωμετρίας μπορούν να ευεργετηθούν από μια δημιουργική ανάγνωση και μελέτη έργων Τέχνης. Για τις ανάγκες της έρευνας αυτής είχε σχεδιαστεί μία πρωτότυπη διδακτική προσέγγιση της ύλης της Γεωμετρίας της Β' Δημοτικού μέσω της ενασχόλησης με έργα Τέχνης. Στην παρούσα εργασία επανεξετάζεται το υλικό που είχε προκύψει από αυτές τις διδασκαλίες σε συνδυασμό με τη συγκέντρωση νέων στοιχείων για τη διερεύνηση της επίδρασης που είχε στην ανάπτυξη της δημιουργικής σκέψης των παιδιών αλλά και στην ενασχόλησή τους με τη Γεωμετρία.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ

Ένας πολιτισμός στάσιμος είναι ένας πολιτισμός που καταρρέει. Προκειμένου να παραμείνει σε άνθηση πρέπει να συνεχίσει να παράγει και να δημιουργεί, χρειάζεται νέες ιδέες. Αυτό γίνεται ακόμα πιο αληθινό στις μέρες μας, που δεν μπορούμε να κάνουμε προβλέψεις για το πώς θα είναι η ζωή σε δέκα χρόνια. Επομένως, τα συστήματα εκπαίδευσης θα έπρεπε να εφοδιάσουν τις νέες γενιές για αυτό το αβέβαιο μέλλον με το μόνο εφόδιο που θα τους είναι πραγματικά χρήσιμο: αναπτύσσοντας τη δημιουργική τους σκέψη (Robinson, 2006).

Τα μαθηματικά είναι ένα από τα αντικείμενα που κατέχουν εξέχουσα θέση σε όλα τα αναλυτικά προγράμματα. Άρα, αν δεχτούμε τους παραπάνω ισχυρισμούς, θα ήταν σκόπιμο να βρεθούν μέθοδοι ώστε τα μαθηματικά να ενισχύουν τη δημιουργικότητα των μαθητών. Η Γεωμετρία ενισχύει τη σύνδεση των μαθητών με τα Μαθηματικά (Goldenberg, Cuoco, Mark, 1998). Βελτιώνει την αίσθηση του χώρου και του προσανατολισμού και ενισχύει την απόκτηση μιας πιο σφαιρικής εκτίμησης του κόσμου. Εξασκεί την αναλυτική και τη συνθετική σκέψη, και τα προβλήματά της απαιτούν δημιουργικότητα για την επίλυσή τους. Μέσω της Γεωμετρίας αναπτύσσονται μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων χρήσιμες σε όλους τους κλάδους των Μαθηματικών καθώς και σε πολλούς κλάδους άλλων επιστημών (Van de Walle, 2005).

Ωστόσο, οι διδακτικές προσεγγίσεις των Μαθηματικών και ιδιαίτερα της Γεωμετρίας, που ακολουθούνται σήμερα κάθε άλλο παρά έχουν τα επιθυμητά αποτελέσματα. Οι μαθητές, αν και κατανοούν - στο μεγαλύτερο μέρος τους - τα θεωρήματα και τους τρόπους απόδειξής τους, δεν είναι σε θέση να παράγουν οι ίδιοι αποδείξεις. Έτσι, είναι σε θέση να λύσουν μόνο τα

προβλήματα εκείνα που είναι παρόμοια με κάτι που έχουν ήδη διδαχθεί. «Η παραδοσιακή διδασκαλία δίνει μόνο το τελικό προϊόν της μαθηματικής ανακάλυψης και αποτυγχάνει να προκαλέσει στο μαθητή εκείνες τις διαδικασίες που οδηγούν στη μαθηματική ανακάλυψη»(Πούλος, Θωμαΐδης, 2000). Οι μαθητές γενικά φοβούνται να κάνουν λάθη, καθώς το σχολείο τα έχει σχεδόν ποινικοποιήσει. Αυτός ο φόβος γίνεται ακόμη χειρότερος σε ό,τι έχει σχέση με τα Μαθηματικά, που παρουσιάζονται σαν ένα δυσπρόσιτο επιστημονικό αντικείμενο το οποίο απαιτεί απόλυτη αυστηρότητα. Παρατηρείται επομένως συχνά μία έντονη φοβία για τα Μαθηματικά (Καραγεώργος, 2000). Επιπλέον, η Ευκλείδεια Γεωμετρία, που λόγω της φύσης της ενισχύει τη δημιουργικότητα, ήταν για πολλά χρόνια υποτιμημένη και παραμελούνταν η διδασκαλία της. Όλα τα παραπάνω έχουν σαν αποτέλεσμα οι μαθητές να μην ενδιαφέρονται ιδιαίτερα για τη Γεωμετρία, αφού τη βλέπουν σαν ένα δύσκολο κομμάτι της ύλης στο οποίο οι δάσκαλοι έτσι κι αλλιώς δεν πολυδίνουν σημασία.

Με την προσέγγιση της Γεωμετρίας μέσα από έργα τέχνης ίσως να διορθώνονται εν μέρει μερικά από τα παραπάνω ζητήματα. Οι εναλλακτικές παιδαγωγικές προσεγγίσεις τείνουν να αυξάνουν την αυτοπεποίθηση των μαθητών. Επιπλέον, λόγω της φύσης των καλλιτεχνικών, οι μαθητές έχουν μία μεγαλύτερη αίσθηση ελευθερίας όταν ασχολούνται με τα εικαστικά. Η γεωμετρική ανάλυση έργων τέχνης αλλά και η σύνθεση έργων από γεωμετρικά σχήματα επιτρέπει στους μαθητές να δουν τη Γεωμετρία σαν ένα γνωστικό αντικείμενο με χώρο για πειραματισμό, καταρρίπτοντας την πεποίθηση τους πως στη Γεωμετρία ή ξέρουν κάτι ή δεν το ξέρουν, και αν δεν το ξέρουν θα κάνουν λάθος. Αυτή η διαφορετική αντιμετώπιση είναι εξαιρετικά επιθυμητή, καθώς τα προβλήματα της Γεωμετρίας λύνονται κυρίως με τη μέθοδο δοκιμής και λάθους. Επιπλέον η τέχνη, και ιδίως η αφηρημένη τέχνη, περιέχει ηθελημένες ασάφειες που οι μαθητές δεν θα συναντήσουν ποτέ στα σχολικά μαθηματικά τα οποία παρουσιάζονται σαν κάτι απόλυτο. (Bertonaschi, 2004)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το αρχικό υλικό προέκυψε από έρευνα που πραγματοποιήθηκε με 97 μαθητές που φοιτούσαν στα 4 τμήματα της Β' Δημοτικού ιδιωτικού σχολείου της Αθήνας, το σχολικό έτος 2007-2008, ενώ ένα νέο ερωτηματολόγιο δόθηκε φέτος σε 71 από αυτούς τους μαθητές οι οποίοι σήμερα φοιτούνστην Ε' τάξη () (σχ. έτος 2010-2011). Η επιλογή των έργων τέχνης για την αρχική παρέμβαση είχε γίνει με βασικό κριτήριο τη χρησιμότητά τους στη διδασκαλία της Γεωμετρίας χωρίς να γίνεται αισθητική τους ανάλυση και

χωρίς κάποια υποστήριξη από τη Θεωρία και Ιστορία της Τέχνης. Το υλικό αυτό εξετάστηκε από μια άλλη σκοπιά. Περιελάμβανε πίνακες διαφόρων ζωγράφων στους οποίους διακρίνονταν μόνο τα περιγράμματα και οι μαθητές έπρεπε ανάλογα με τη δραστηριότητα να χρωματίσουν τους πίνακες με διαφορετικούς τρόπους. Για παράδειγμα έπρεπε σε μία δραστηριότητα να σημειώσουν με ένα χρώμα όλα τα τρίγωνα, με άλλο όλα τα τετράγωνα. Εξετάστηκαν μοτίβα που είχαν κατασκευάσει οι μαθητές καθώς και πόλεις που είχαν φτιάξει από γεωμετρικά στερεά με πλαστελίνη. Τέλος, μελετήθηκαν οι ιστορίες που είχαν γράψει οι μαθητές, με πηγή έμπνευσης πίνακες της Σελέστ Πολυχρονιάδη με έντονα γεωμετρικά στοιχεία.

Τρία χρόνια μετά από αυτά τα μαθήματα, οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν σε ένα σχετικό ερωτηματολόγιο (βλ.Παράρτημα). Ο στόχος ήταν να διερευνηθεί κατά πόσον οι μαθητές διατηρούν τη σύνδεση μεταξύ Γεωμετρίας και Εικαστικών και αν επιτρέπουν στους εαυτούς τους να δράσουν με δημιουργικό τρόπο σε αυτά τα πλαίσια. Στο ερωτηματολόγιο αυτό υπήρχε ασπρόμαυρη φωτοτυπία του έργου του Καντίνσκι “Εγκάρσια Γραμμή”. Στην πρώτη ερώτηση, οι μαθητές έπρεπε να απαντήσουν αν έχουν ξαναδεί πίνακα αυτού του ζωγράφου, αν γνωρίζουν τι θα πει εγκάρσια γραμμή και αν μπορούν να φανταστούν για ποιο λόγο ονομάστηκε έτσι αυτός ο πίνακας, ενώ στη δεύτερη ερώτηση έπρεπε να απαντήσουν αν μπορούν να καταλάβουν γιατί το είδος στο οποίο κατατάσσεται ο πίνακας ονομάζεται κυβισμός. Ο πρώτος στόχος αυτών των ερωτήσεων ήταν να διερευνηθεί αν αναγνωρίζουν οι μαθητές τον Καντίνσκι. Ο δεύτερος και σημαντικότερος στόχος ήταν να μελετηθούν οι απαντήσεις/αντιδράσεις των μαθητών σε δύο ερωτήσεις που απαιτούσαν ορισμούς τους οποίους το πιθανότερο ήταν να μην έχουν ξανασυναντήσει. Οι επόμενες 4 ερωτήσεις ήταν πολλαπλής επιλογής και σχετίζονταν με το πόσο θυμούνται οι μαθητές τις παραδόσεις της αρχικής παρέμβασης και τι αίσθηση τους έχουν αφήσει. Στην έβδομη ερώτηση έπρεπε να πουν τι θυμούνταν από την επίσκεψή τους στην έκθεση του Μ. Ναβάρο. Οι μαθητές είναι πιθανόν να θυμούνται την έκθεση αλλά να μην θυμούνται την σύνδεσή της με τη Γεωμετρία. Στόχος αυτής της ερώτησης ήταν να επαληθεύσει τις απαντήσεις στις ερωτήσεις κλειστού τύπου και να δώσει ακόμη μία ένδειξη για τη σύνδεση Γεωμετρίας και Εικαστικών. Οι δύο τελευταίες ερωτήσεις αφορούσαν στη σχέση των μαθητών με τα Μαθηματικά και δεν αναμενόταν να δώσουν κάποιο ουσιαστικό αποτέλεσμα ως προς τη σύνδεση αυτή καθώς οι παράγοντες που έχουν επιδράσει σε αυτή τη σχέση κάθε άλλο παρά περιορίζονται στη διδασκαλία που πραγματοποιήθηκε για ένα μικρό σχετικά χρονικό διάστημα τρία χρόνια πιο πριν. Ο λόγος που προστέθηκαν στο ερωτηματολόγιο ήταν πως θα είχαν αξία σαν αποτελέσματα αν μεγάλο ποσοστό των μαθητών που δεν τους αρέσουν τα Μαθηματικά

δείξουν πως πραγματοποιούν την σύνδεση μεταξύ Γεωμετρίας και εικαστικών.

Για τη διαπίστωση του βαθμού στον οποίο οι μαθητές έχουν προχωρήσει στη σύνδεση της Γεωμετρίας με την Τέχνη, βαθμολογήθηκαν οι απαντήσεις που έδωσαν στις ερωτήσεις τις σχετικές με τη σημασία της εγκάρσιας γραμμής και του κυβισμού με τον παρακάτω τρόπο. Βαθμός 0: Ο μαθητής δεν έχει απαντήσει καθόλου ή έχει απαντήσει πως δεν γνωρίζει, για παράδειγμα "Όταν ήμουν πολύ μικρός είχα δει πίνακά του αλλά τώρα δεν θυμάμαι τίποτα" Βαθμός 1: Ο μαθητής επιχειρεί απάντηση εκτός του πλαισίου της γεωμετρίας. "Γιατί φαίνεται πώς τα αντικείμενα στον πίνακα κάνουν κολοτούμπες και κατρακυλάνε." Βαθμός 2: Η απάντηση περιλαμβάνει γεωμετρικούς όρους αλλά ο ορισμός των εννοιών (εγκάρσια γραμμή και κυβισμός) δεν μοιάζει να είναι ούτε καν διαισθητικά σωστός. "Όχι δεν έχω ξαναδεί πίνακα του Β. Καντίνσκι. Δεν είμαι σίγουρος αλλά νομίζω ότι εγκάρσια γραμμή είναι η γραμμή που διασταυρώνεται με μία άλλη. Νομίζω ότι ονομάστηκε επειδή είναι γεμάτο γραμμές και σχήματα". Βαθμός 3: Ο ορισμός των εννοιών είναι έστω και διαισθητικά σωστός στο πλαίσιο της γεωμετρίας. "Γιατί όλα είναι προς άξονα μία κεντρική γραμμή. Όλα τα γεωμετρικά σχήματα είναι "τοποθετημένα" με βάση μία γραμμή."

Αντίστοιχα, βαθμολογήθηκαν και οι απαντήσεις στις ερωτήσεις κλειστού τύπου ώστε να έχουν εύρος (0-3), με την κενή απάντηση να παίρνει τον βαθμό 0, την απάντηση πολύ ή ναι να παίρνει τον βαθμό 3 και τις υπόλοιπες απαντήσεις να ισοκατανέμονται ενδιάμεσα.

Πραγματοποιήθηκε μια ανάλυση παραγόντων για να διακριθούν τυχόν διαφορετικά προφίλ μαθητών. Επιπλέον, οι απαντήσεις του ερωτηματολογίου αναλύθηκαν, ποσοτικά και ποιοτικά, περιγραφικά για να έχουμε μια ποσοτική εκτίμηση των αποτελεσμάτων.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Από τα αποτελέσματα της πρώτης παρέμβασης (Ντόκα, 2008) γνωρίζουμε ότι αυτή η διδακτική προσέγγιση είχε ως επί το πλείστον θετικά άμεσα αποτελέσματα σχετικά με τη μάθηση της Γεωμετρίας, χωρίς ωστόσο να παρατηρείται κάποια σημαντική απόκτηση γνώσης που να μην επιτυγχάνεται μέσω της παραδοσιακής διδασκαλίας. Οι μαθητές θεωρούσαν τα μαθήματα αυτά σαν παιχνίδι με τα σχήματα και σαν ζωγραφική και ήταν πάντα πρόθυμοι να συμμετάσχουν σε όλες τις δραστηριότητες, κάτι που δεν συνέβαινε συχνά στα Μαθηματικά, σύμφωνα με τους δασκάλους τους. Πολύ συχνά, οι διάφορες δραστηριότητες και ασκήσεις μπορούσαν να έχουν πολλά αποτελέσματα, άλλα περισσότερο και άλλα λιγότερο αναμενόμενα, πάντως

όμως “σωστά”. Για παράδειγμα, όταν συναντούν ένα σχήμα που είναι σαν τμήμα ουράνιου τόξου, το κατατάσσουν άλλοι στα ημικύκλια, άλλοι στα τρίγωνα, άλλοι στα παραλληλόγραμμα και άλλοι σαν ξεχωριστό είδος. Κάθε μία από αυτές τις κατατάξεις είναι λογική με τον δικό της τρόπο. Το σημαντικό όμως είναι ότι οι μαθητές, παρόλο που συζητούσαν μεταξύ τους και γνώριζαν ότι αυτό ήταν μία άσκηση Γεωμετρίας, δεν δίστασαν να δώσουν διαφορετικές απαντήσεις, κάτι που δεν θα έκαναν ποτέ με την παραδοσιακή διδασκαλία αφού εκεί μόνο μία απάντηση είναι σωστή. Ωστόσο, υπήρχαν ασκήσεις στις οποίες οι μαθητές έκαναν λάθη που οφείλονταν κυρίως σε λάθη στην κατανόηση των ορισμών των εννοιών. Αυτά τα λάθη διορθώνονταν κανονικά. Δηλαδή γινόταν ανάλυση και αιτιολόγηση του λάθους στην τάξη, επαναδιατύπωση των ορισμών και στη συνέχεια, χωρίς να δοθεί κάποια σωστή απάντηση από την ερευνήτρια, ο μαθητής που είχε κάνει το λάθος έπρεπε να ξαναλύσει την άσκηση. Μεγάλο πρόβλημα για τη διδασκαλία αποτέλεσε η δυσκολία των μαθητών να κατανοήσουν τον ορισμό της καθετότητας, αφού μπέρδευαν τις κάθετες ευθείες με τις κατακόρυφες. Ωστόσο, οι μαθητές, αδιαφορώντας που δεν είχαν καταλάβει ακριβώς τους ορισμούς, χρωμάτισαν ευθείες και γωνίες άλλοτε με σωστότερα άλλοτε με λιγότερο σωστά κριτήρια ως προς το ζητούμενο της άσκησης. Παρόλα αυτά, δεν σταμάτησαν να προσπαθούν ούτε αποθαρρύνθηκαν από αυτές τις διορθώσεις. Η θετικότερη ένδειξη για την πρόθεση των μαθητών να πειραματιστούν δίνοντας στους γεωμετρικούς όρους την έννοια που θέλουν χωρίς να φοβούνται πως αυτό που κάνουν είναι λάθος ήταν οι ιστορίες. Οι περισσότεροι μαθητές επέλεξαν “γεωμετρικά” θέματα. Ενδεικτικά παρατίθενται δύο από αυτά τα παραμύθια.

“Μια φορά κι έναν καιρό πριν από πολλά χρόνια, ήταν ένας πλανήτης. Σε αυτόν τον πλανήτη ζούσαν άνθρωποι που δεν έμοιαζαν καθόλου με μας. Ας πούμε: άνθρωποι φτιαγμένοι από κύκλους, ρόμβους και τετράγωνα, και γι' αυτό τον πλανήτη τον έλεγαν: πλανήτη της Γεωμετρίας. Ξαφνικά ακούγεται ένα μεγάλο ΑΑΑ. Όλος ο πλανήτης μιλούσε για αυτό. Χάθηκε έλεγαν και ξανάλεγαν. Είχε χαθεί μια κυρία αλλά όχι μια συγκεκριμένη κυρία. Μία κυρία πολύ αγαπητή που την έλεγαν κυρία Τετραγωνουλίτσα. Η κυρία Τετραγωνουλίτσα χάθηκε όταν ήταν τα γενέθλιά της. Μόλις ο ταχυδρόμος ήρθε να τους πει τα νέα αυτοί είχαν φύγει να ψάξουν την κυρία Τετραγωνουλίτσα. Ο ταχυδρόμος έφυγε να ψάξει κι αυτός. Σε μια στιγμή ακούστηκε κι άλλο ένα ΑΑΑ. Ήταν κοντά. Τη βρήκαν. Ήταν κοντά. Έτρεξαν όσο πιο γρήγορα μπορούσαν. Ετρεξαν, έτρεξαν, έτρεξαν ώσπου τη βρήκαν σε ένα δέντρο κρεμασμένη να φωνάζει ΑΑΑ. Την κατέβασαν και τους είπε ένα μεγάλο ευχαριστώ. Το πάρτι έγινε το βράδυ. Ήταν υπέροχα. Πέρασαν όλοι φανταστικά.”

“Το τρίγωνο και οι φίλοι του.

Μια φορά ήταν ένας κακός μάγος που ήθελε να πάρει για βοηθό του το τρίγωνο. Το τρίγωνο προσπαθούσε να του ξεφύγει αλλά δεν τα κατάφερνε. Ξέχασα να σας πω ότι το τρίγωνο δεν ήθελε να γίνει βοηθός του. Μια μέρα τα σχήματα αποφάσισαν να τον βοηθήσουν. Οι κύκλοι έγινα πέτρες και τον χτυπούσαν, τα τρίγωνα έγιναν μυτερά και τα τετράγωνα μαξιλάρια που τον χτυπούσαν. Ο μάγος έκλαιγε από τον πόνο και δεν ξαναπλησίασε το τρίγωνο ποτέ ξανά. Από τότε το τρίγωνο και οι φίλοι του έζησαν αυτοί καλά και εμείς καλύτερα.”

Στην ανάλυση του ερωτηματολογίου δεν χρησιμοποιήθηκαν τελικά οι απαντήσεις στην ερώτηση 7 (επίσκεψης στην έκθεση του Μ. Ναβάρο) που επιχειρούσε να διασταυρώσει τα αποτελέσματα σχετικά με τη σύνδεση μεταξύ Γεωμετρίας και Τέχνης με εκείνα που αφορούσαν τις μεταγνωστικού τύπου εκτιμήσεις των μαθητών (κλειστές ερωτήσεις 3 έως 6). Ο λόγος είναι ότι οι μαθητές είχαν επισκεφθεί με το σχολείο τους, πρόσφατα το Μέγαρο Μουσικής Αθηνών για να “παίξουν” με τα σχήματα και τις σκιές εικαστικών αντικειμένων όπως αυτά προβάλλονταν μέσα από βιντεοπροβολείς. Η επίσκεψη αυτή θεωρήθηκε άμεσα σχετιζόμενη με την Γεωμετρία και επομένως δεν αποκλείεται κάποιοι μαθητές να αναφέρονταν σε αυτή την επίσκεψη.

Οι βαθμολογίες των απαντήσεων στις δύο πρώτες ερωτήσεις δείχνουν ότι οι μαθητές τείνουν σε σημαντικό βαθμό να συνδέουν τη γεωμετρία με έργα τέχνης αυτής της εικαστικής παράδοσης. Οι μέσες τιμές των βαθμολογιών είναι και στις δύο πρώτες ερωτήσεις περίπου 1,30 με τυπική απόκλιση 0,92. Βέβαια οι απαντήσεις αυτές απέχουν σαφώς από το να φανερώνουν και μια ουσιαστική ωρίμανση της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών, όταν αυτοί σκέπτονται εκτός του σχολικού μαθηματικού πλαισίου (οι μέσες τιμές βρίσκονται κοντά στην τιμή 2, που υποδηλώνει ότι οι μαθητές τείνουν να απαντούν χρησιμοποιώντας γεωμετρικούς όρους, αλλά σαφώς μακριά από την τιμή 3, που υποδηλώνει μια απάντηση με συνεκτικό γεωμετρικό περιεχόμενο). Είναι ενδεικτικό ότι ένα σημαντικό ποσοστό μαθητών επέλεξε να μην απαντήσει στις δύο πρώτες ερωτήσεις (17 και 22 στους 71 μαθητές). Από τους υπόλοιπους, ελάχιστοι έδωσαν γεωμετρικά συνεκτικούς ορισμούς των εννοιών (6 και 1 στους 71 αντίστοιχα).

Αντίθετα οι μέσες τιμές των βαθμολογιών στις κλειστές ερωτήσεις μεταγνωστικού τύπου ήταν απροσδόκητα υψηλές με σαφώς μικρότερες τυπικές αποκλίσεις, όπως φαίνονται στον πίνακα 1 που ακολουθεί.

	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση
Θυμάμαι τα μαθήματα	2,25	0,663
Μου άρεσαν τα μαθήματα	2,507	0,555
Σχέση των μαθημάτων με τα Μαθηματικά	2,179	0,571
Σχέση των μαθημάτων με τα Εικαστικά	2,307	0,644
Μου αρέσουν τα Μαθηματικά	2,73	0,501

Πίνακας 1. Μέσες τιμές και τυπικές αποκλίσεις των απαντήσεων στις μεταγνωστικού τύπου ερωτήσεις (ελάχιστο = 0 και μέγιστο = 3).

Όπως, βέβαια, φαίνεται από τα αποτελέσματα της ανάλυσης παραγόντων, η βαθμολογία των μαθητών στις ανοιχτές ερωτήσεις τις σχετικές με τη σημασία της εγκάρσιας γραμμής και του κυβισμού είναι ανεξάρτητη από τις βαθμολογίες που οι ίδιοι δίνουν στις κλειστές ερωτήσεις (αν θυμούνται τα μαθήματα κλπ). Συγκεκριμένα, οι βαθμολογίες στις ανοιχτές ερωτήσεις δημιουργούν μια συνιστώσα (με αυξημένα βάρη της τάξης του 0,78), που μετρά το κατά πόσο οι μαθητές πετυχαίνουν να συνδέσουν το έργο τέχνης του ερωτηματολογίου με τη Γεωμετρία. Οι μάλλον μεταγνωστικού τύπου κλειστές ερωτήσεις, από την άλλη μεριά, δημιουργούν μια δεύτερη ανεξάρτητη συνιστώσα στάσης έναντι των Μαθηματικών, της Τέχνης και της σύνδεσής τους μέσω των μαθημάτων.

	Συνιστώσα	
	1	2
Εγκάρσια γραμμή	0,079	**0,769**
Κυβισμός	0,041	**0,784**
Θυμάμαι τα μαθήματα	**0,607**	0,407
Μου άρεσαν τα μαθήματα	**0,772**	0,162
Σχέση των μαθημάτων με τα Μαθηματικά	**0,776**	-0,100
Σχέση των μαθημάτων με τα Εικαστικά	**0,590**	0,197
Μου αρέσουν τα Μαθηματικά	**0,565**	-0,342

Πίνακας 1. Ανάλυση παραγόντων με περιστροφή μέγιστης μεταβλητότητας. Δικαιολογεί το 54% της μεταβλητότητας (32% για την συνιστώσα 1 και 22% για τη συνιστώσα 2)

Τα αποτελέσματα αυτά, σε συνδυασμό με τις μη αναμενόμενες υψηλές βαθμολογίες των μαθητών στις κλειστές ερωτήσεις εκτίμησης στάσεων (π.χ μέση τιμή 2,73 με μέγιστο το 3, στην ερώτηση αν αρέσουν τα μαθηματικά) δείχνουν μια μάλλον χαμηλή μεταγνωστική ενημερότητα των μαθητών ή και μια τάση να απαντούν στους δασκάλους τους, όταν μπορούν, με τρόπους που προσδοκούν ότι οι τελευταίοι θα εκτιμήσουν. Αντιθέτως οι απαντήσεις στις ανοιχτές ερωτήσεις δεν θα μπορούσαν να αλλοιωθούν με τέτοιο τρόπο και ως εκ τούτου κρίνεται ότι μετρούν αξιόπιστα τη γνωστική ενημερότητα των μαθητών σχετικά με το θέμα υπό μελέτη.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης του ερωτηματολογίου παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον στις δύο πρώτες ερωτήσεις. Ελάχιστοι μαθητές γνώριζαν τι θα πει εγκάρσια γραμμή, όπως ήταν αναμενόμενο. Οι περισσότεροι όμως μαθητές δεν δίστασαν να δώσουν απαντήσεις με βάση τη δική τους ερμηνεία για την εγκάρσια γραμμή: “Ναι έχω ξαναδεί [πίνακα του Β. Καντίνσκι] και εγκάρσια γραμμή σημαίνει κυματιστή ή με καμπούρα. Ο πίνακας ονομάστηκε έτσι γιατί έχει τέτοιες γραμμές” , “ Δεν έχω ξαναδεί πίνακα του Β. Καντίνσκι. Δε γνωρίζω τι είναι εγκάρσια γραμμή. Αλλά θα μπορούσε να είναι μία γραμμή που βοηθάει τις υπόλοιπες για να δημιουργηθεί ένα σχήμα. Άμα είναι εγκάρσια γραμμή αυτό που είπα, ονομάστηκε έτσι γιατί είναι ένας πίνακας που αποτελείται από πολλές γραμμές δημιουργώντας πολλά εντυπωσιακά σχήματα.” Οι περισσότεροι μαθητές γνώριζαν ή “μάντεψαν” πως ο κυβισμός έχει σχέση με την γεωμετρία αν και δεν ήταν σαφές ποια είναι αυτή η σχέση. Και πάλι όμως δεν δίστασαν να απαντήσουν ακόμη και όταν είχαν αμφιβολίες για την ορθότητα της απάντησής τους. Κατά τη συμπλήρωση των ερωτηματολογίων σε όλα τα τμήματα, οι μαθητές ενημερώθηκαν για το ποιος είναι ο σκοπός της έρευνας και για ποιο λόγο την κάνουμε και μετά την συμπλήρωση των ερωτηματολογίων ακολούθησε σχετική συζήτηση.

Συνολικά, μπορούμε να πούμε με σχετική βεβαιότητα πως μπορεί να απαντηθεί θετικά το ερώτημα κατά πόσον, μέσω των έργων τέχνης, διευκολύνεται η διδασκαλία της Γεωμετρίας και προάγεται η παραγωγική σκέψη των μαθητών, αμβλύνεται ο φόβος για τα Μαθηματικά και προωθείται η δημιουργικότητα. Οι μαθητές ενδιαφέρονται για τις δραστηριότητες και είναι πρόθυμοι να πειραματιστούν χωρίς να φοβούνται μήπως τυχόν κάνουν λάθος. Τόσο στην αρχική έρευνα όσο και στο πρόσφατο ερωτηματολόγιο, όταν τους δόθηκε ευκαιρία να αφήσουν ελεύθερη τη φαντασία τους, παρήγαγαν πρωτότυπες ιδέες και ελάχιστοι επέδειξαν δισταγμό ή φόβο για το λάθος, όπως θα συνέβαινε σε μια τυπική τάξη

Μαθηματικών. Τα αποτελέσματα δείχνουν πώς οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να αντιμετωπίσουν δημιουργικά τη Γεωμετρία, αρκεί να τους δοθεί η ευκαιρία.

Από την άλλη μεριά, το σχολικό πλαίσιο, με την εστιασμένη σε διακριτά περιεχόμενα παράδοσή του, δεν φαίνεται κατάλληλο για την προώθηση της παραπάνω λογικής. Όταν οι μαθητές επανέρχονται (μέσω των ερωτήσεων που κάνουν αναφορά σε μαθήματα και γνωστικά αντικείμενα) εντός του σχολικού πλαισίου, ενεργοποιούν τα «τύπου Φατμέ»(Larson, 1995) ανακλαστικά τους και απαντούν με προοπτική να ικανοποιήσουν τις εκτιμώμενες προσδοκίες των εκπαιδευτικών τους, βάζοντας στην άκρη κάθε γνώση και δημιουργική ικανότητα.

Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι το ερώτημα, πώς είναι δυνατόν τέτοιου τύπου διαθεματικές διδακτικές δραστηριότητες να συμπαρασύρουν στην προοπτική τους το συνολικό εκπαιδευτικό πλαίσιο και να μην απορροφηθούν απ' αυτό, παραμένει ανοιχτό.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Ερώτηση 1. *Ο παραπάνω πίνακας λέγεται "Εγκάρσια γραμμή" και είναι ένας πίνακας του Β. Καντίνσκι. Έχεις ξαναδεί πίνακες του Β. Καντίνσκι; Γνωρίζεις τι θα πει εγκάρσια γραμμή; Μπορείς να καταλάβεις γιατί ονομάστηκε έτσι αυτός ο πίνακας;*

Ερώτηση 2. *Αυτός ο πίνακας κατατάσσεται στο είδος ζωγραφικής που λέγεται κυβισμός. Μπορείς να φανταστείς γιατί ονομάστηκε έτσι αυτό το είδος;*

Ερώτηση 3. *Όταν πηγαίνατε στην Δευτέρα δημοτικού παρακολουθήσατε μαθή-*
ματα Γεωμετρίας μέσα από έργα τέχνης. Θυμάσαι αυτά τα μαθήματα;

Ερώτηση 4. *Πόσο σου άρεσαν αυτά τα μαθήματα;*

Ερώτηση 5. *Πόσο σχετικά με τα Μαθηματικά θυμάσαι να ήταν αυτά τα μαθήματα;*

Ερώτηση 6. *Πόσο σχετικά με τα Εικαστικά θυμάσαι να ήταν αυτά τα μαθήματα;*

Ερώτηση 7. *Στα πλαίσια αυτών των μαθημάτων είχατε πάει επίσκεψη στο Μέ-*
γαρο Μουσικής για να δείτε και να παίξετε με το έργο του γλύπτη Μιγκέλ Ναβάρο
"Πόλη κάτω από το φεγγάρι". Τι θυμάσαι από αυτήν την επίσκεψη;

Ερώτηση 8. *Σου αρέσουν τα Μαθηματικά;*

Ερώτηση 9. *Ποιό κομμάτι των μαθηματικών σου αρέσει περισσότερο και γιατί;*

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΊΑ

Bertonaschi, K.: *"A Geometry Treasure Hunt: Uncovering Geometry in Art, Architecture and the Wolrd Around Us",* Askew Elementary School: 2004, σελ. 4

Boardman, J.: *"Η ιστορία των αρχαίων ελληνικών αγγείων"*, εκδ. Πατάκη, Αθήνα: 2006

Châtelet, A., Groslier, B.P.: "*Histoire de l' art",* Larousse, Paris:1990

Clements, D. H., Battista, M. T.: "*Geometry and spatial reasoning*". In D. A. Grouws (Ed.) *The handbook of research on mathematics teaching and learning.*, Macmillan New York: 1992,

Cox, N.: "*Κυβισμός*", εκδ. Καστανιώτη, Αθήνα: 2003

Forgacs, Eva "*Bauhaus. Ιδέες και πραγματικότητα*", Νησίδες. Αθήνα. 1999

Glenn, J.A., "*Children learning geometry. Foundation activities in shape",* Harper and Row publishers, London, 1979

Goldenberg, P.E., Cuoco, A. A, Mark, J., "*A role for Geometry in General Education"* in Lehrer, R. (ed.), Chazan, D. (ed.) *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space,* Lawrence Erlbaum associates, Philadelphia, 1998,

Hannan, A. "Q*uestionnaires in Education Research"* Faculty of Education, University of Plymouth, 2007

Korey, J., "*Successful Interdisciplinary Teaching: making one plus one equal one"*, Dartmouth College, Hanover: σελ.6-7

Larson, J.: "*Fatima's rules and other elements of an unintended chemistry curriculum*". Paper presented at *The annual meeting of the American Educational Research Association*, San Francisco, CA.: 1995

Polya, G.: "*Η Μαθηματική Ανακάλυψη",* Κάτοπτρο, Αθήνα: 2001

Read, Herbert *Η Τέχνη σήμερα. Για τη θεωρία της μοντέρνας Τέχνης*. Κάλβος Αθήνα. 1959

Robinson, K., Sir, "*Schools kill creativity"* Ομιλία στο TED Φεβρουάριος 2006

Schunk, D.H., Pintrich, P.R., Meece, J.L., "*Motivation in education"*, Pearson Education, New Jersey, 2008

Van de Walle, J. A., "*Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: μια εξελικτική διδασκαλία"*, Τυπωθήτω – Γιώργος Δαρδανός, Αθήνα, 2005,

Γιαλούρης, Ν. "*Ελληνική Τέχνη: Αρχαία γλυπτά",* Εκδοτική Αθηνών, Αθήνα, 1994

Καραγεώργος Δ., "*Το πρόβλημα και η επίλυσή του"*, εκδ. Σαββάλας, Αθήνα, 2000, σελ.84-88

Ντόκα Θ. *"Γεωμετρία και ζωγραφική: μια πρόταση για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας στη Β΄ δημοτικού"*, Πρακτικά 8ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικά και Ανθρωπιστικές Επιστήμες, Αθήνα, 2008

Πούλος, Α., Θωμαΐδης Γ., *"Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας"*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2000, σελ.16

ΥΠΕΠΘ-Π.Ι., *"Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών"*, Αθήνα, ΦΕΚ 1366, 1373-1376 τ. Β', 2001

"Ελληνικές Φορεσιές", εκδ. Ιστορική και Εθνολογική Εταιρεία της Ελλάδος, Αθήνα, 1993

"Σελέστ Πολυχρονιάδη 1904-1985", Κατάλογος έκθεσης, εκδ. Γκαλερί Νέες Μορφές, Αθήνα, 2008

uodvraxz@gmail.com

ΟΙ ΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΕΣ ΤΕΧΝΕΣ ΩΣ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πανωρέα Μπάκα

Μαθηματικός MSc, MA – Καθηγήτρια στην Ιδιωτική Εκπαίδευση

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Πολύ συχνά κατά την διδασκαλία των μαθηματικών σε παιδιά μικρής ηλικίας (μαθητές έως 12 ετών) προκύπτει η ανάγκη να εξηγήσω μαθηματικές έννοιες ή να διατηρήσω το ενδιαφέρον των μαθητών ζωντανό παρουσιάζοντας το μάθημα σαν ένα παιχνίδι δράσης στο οποίο ο μαθητής συμμετέχει όχι μόνο πνευματικά, αλλά επίσης συναισθηματικά και σωματικά. Στην εργασία περιγράφεται μία σωματική άσκηση κατανόησης της έννοιας του ελάχιστου κοινού πολλαπλασίου, καθώς και πώς μπορούν κείμενα μαθηματικής λογοτεχνίας και ιστορίας των μαθηματικών να αποτελέσουν εφαλτήριο δημιουργίας μιας χοροθεατρικής εμπειρίας, καλλιεργώντας την φαντασία των μαθητών και φέρνοντάς τους εγγύτερα στην γνώση. Σκοπός της εργασίας είναι α) να παρουσιαστεί αναλυτικά τόσο η σωματική άσκηση, όσο και οι αντιδράσεις των συμμετεχόντων μαθητών, β) να αποτελέσει αφορμή διαλόγου στο κατά πόσο ο χορός και το θέατρο θα μπορούσαν να γίνουν ένα καινούριο εκπαιδευτικό εργαλείο για τους δασκάλους των μαθηματικών.

1. ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Αγαπάνε οι μαθητές μας τα μαθηματικά; Είναι βέβαιο ότι τα μαθηματικά περισσότερο από οποιοδήποτε άλλο μάθημα έχουν τη δύναμη να συνθλίψουν την αυτοπεποίθηση των παιδιών και να τα αποθαρρύνουν από τη μάθηση πολλών και σημαντικών μεθόδων και εργαλείων. Τα περισσότερα παιδιά μισούν τα μαθηματικά. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την απανταχού ύπαρξη ενηλίκων που φοβούνται τα μαθηματικά και τα αποφεύγουν σε όλες τις εκφάνσεις της ζωής τους. Ωστόσο, τα πράγματα θα μπορούσαν να είναι τελείως διαφορετικά και τα μαθηματικά πηγή ευχαρίστησης και αυτοπεποίθησης για τους ανθρώπους. Αναμφισβήτητα, υπάρχουν πολλές καλές μέθοδοι διδασκαλίας των μαθηματικών, αλλά όλη αυτή η γνώση γύρω από αυτές τις θεωρίες συνήθως ανακυκλώνεται μεταξύ ακαδημαϊκών, ερευνητών και επιστημονικών περιοδικών. Είναι λοιπόν απαραίτητο περισσότερο από ποτέ όλη αυτή η εποικοδομητική γνώση γύρω από την διδασκαλία των μαθηματικών να γίνει ευρύτερα γνωστή: σε γονείς που θέλουν να βοηθήσουν τα παιδιά τους, σε δασκάλους και εκπαιδευτικούς όλων των βαθμίδων. Όπως πολύ σωστά επισημαίνει η J. Boaler «Μία από τις πιο επικίνδυνες και οδυνηρές για τα παιδιά αντιλήψεις που μπορεί να υπάρχουν σε μία τάξη μαθηματικών είναι πως το να επιτυγχάνει κάποιος στα μαθηματικά είναι ένδειξη ευφυΐας και πως κάποιοι άνθρωποι μπορούν να καταλάβουν τα μαθηματικά και κάποιοι άλλοι όχι. Υπάρχουν, επίσης, δυστυχώς ακόμα εκπαιδευτικοί που πιστεύουν πως ο ρόλος τους μέσα στην τάξη είναι να ξεχωρίσουν αυτούς που τα καταφέρνουν με τα μαθηματικά από αυτούς που δεν μπορούν. Οι παραπάνω αντιλήψεις είναι απόλυτα λάθος. », (Boaler, 2009, σ. 2). Στις περισσότερες τάξεις μαθηματικών οι μαθητές διδάσκονται τα μαθηματικά συμπιεσμένα σε ένα πολύ συγκεκριμένο και στενό πλαίσιο, το οποίο δεν πλησιάζει καθόλου στα μαθηματικά που μας περιβάλλουν, στα μαθηματικά που χρησιμοποιούμε στην καθημερινή μας ζωή και στα μαθηματικά τα οποία οι ίδιοι οι μαθηματικοί χρησιμοποιούν. Αυτό το στενό πλαίσιο διδασκαλίας που εμπεριέχει την αντιγραφή των μεθόδων που διδάσκει ο δάσκαλος και την ορθή αναπαραγωγή τους ξανά και ξανά, δεν είναι μαθηματικά. Αντιθέτως, όταν αντί αυτών διδάσκονται πραγματικά μαθηματικά (επίλυση προβλημάτων, δημιουργία ιδεών και αναπαραστάσεων, αναζήτηση λύσεων, οικοδόμηση λογικής σκέψης, συζήτηση πάνω σε μεθόδους, βιωματική προσέγγιση της γνώσης και πολλές διαφορετικές προσεγγίσεις στη λύση και στον τρόπο εργασίας), τότε οι επιδόσεις πολλών περισσότερων ανθρώπων θα ήταν καλύτερες στα μαθηματικά. Τα μαθηματικά δεν είναι μια σειρά αφηρημένων υπολογισμών. Η απομάκρυνση, ωστόσο από αυτήν την θεώρηση επιβάλλεται από και επιβάλλει την εισαγωγή στην μαθηματική διδασκαλία πλαισίων περισσότερων υποκειμενικών και προσωπικών, που να βελτιώνουν την ικανότητα των

μαθητών να ερμηνεύουν τί συμβαίνει γύρω τους. Η J. Boaler αναφέρει σε σχέση με την χρήση ρεαλιστικών πλαισίων στη διδασκαλία των μαθηματικών: «Χρησιμοποιώντας σαν πλαίσιο τον πραγματικό κόσμο, το περιβάλλον της τάξης, ή ακόμα και προσωπικές εμπειρίες οι μαθητές μπορούν να αναλύσουν, να ερμηνεύσουν και να κατανοήσουν μαθηματικά προβλήματα και έννοιες. », (Boaler, 1993, σ. 13), ενώ οι S. Hough και S. Gough ενισχύουν την παραπάνω άποψη τονίζοντας πώς η διδασκαλία ρεαλιστικών μαθηματικών μπορεί να αυξήσει την αυτοπεποίθηση των παιδιών και να τα βοηθήσει να καταλάβουν το νόημα των μαθηματικών που κάνουν (Hough & Gough, 2007, σελ. 38). Επιπλέον, η χρήση μαθηματικών μοντέλων είναι αναμφίβολα ο πυρήνας αυτού που σήμερα ονομάζουμε «Ρεαλιστικά Μαθηματικά» (Realistic Mathematics). Ο πρωτοπόρος της διδασκαλίας των ρεαλιστικών μαθηματικών (Realistic Mathematics Education - RME) H. Freudenthal (1968) πίστευε πως «Τα μαθηματικά αποτελούν ένα πεδίο πολύ ξεχωριστό. Η αριθμητική και η γεωμετρία έχουν γεννηθεί από την ίδια την πραγματικότητα.», (Freudenthal, 1968, σελ. 6). Σύμφωνα με τον ίδιο (1971) μία βασική ιδέα στην διδασκαλία των ρεαλιστικών μαθηματικών είναι η θεώρησή τους ως ανθρώπινη δραστηριότητα. Γι' αυτόν μαθηματικά δεν είναι απλά ένα κομμάτι γνώσης, αλλά η δραστηριότητα της έρευνας και της επίλυσης των προβλημάτων και γενικότερα η δραστηριότητα της οργάνωσης μαθηματικών «θεμάτων» στον πραγματικό κόσμο. Την δραστηριότητα αυτή την ονόμασε «μαθηματικοποίηση» (mathematization) και όρισε έμμεσα τα μαθηματικά ως εξής: «Δεν υπάρχουν μαθηματικά χωρίς μαθηματικοποίηση».

Οι παραπάνω αντιλήψεις ενισχύουν επιπλέον την προσωπική μου άποψη, ότι είναι σημαντικό ο δάσκαλος των μαθηματικών να βρίσκει τρόπους να παρουσιάζει τα μαθηματικά όχι σαν ένα απόμακρο και άκαμπτο κομμάτι γνώσης, αλλά σαν ένα μέσο με το οποίο ο μαθητής θα καταλαβαίνει την πραγματικότητα.

2. Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΩΝ ΤΕΧΝΩΝ ΣΤΗΝ ΔΙΑΔΡΑΣΤΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η J. Boaler περιγράφει τα μαθηματικά σαν μία παράσταση, μία διαδικασία ερμηνείας του κόσμου μέσα από τη δράση: «Τα μαθηματικά είναι μία παράσταση, μία ζωντανή δράση, ένας τρόπος να ερμηνεύσουμε τον κόσμο. […] Όσοι χρησιμοποιούν τα μαθηματικά εμπλέκονται σε μαθηματικές παραστάσεις, χρησιμοποιούν τη γλώσσα σε όλες της τις μορφές. […] Οι μαθητές δεν θα πρέπει απλά να αποστηθίζουν μεθόδους που διδάχτηκαν στο παρελθόν. Για να λύνουν προβλήματα είναι ανάγκη να εμπλέκονται, να δρουν, να εκτελούν.» (Boaler, 2009, σ. 30). Η δράση έτσι όπως προτείνεται

από την Boaler παραπάνω είναι κατά την γνώμη μου ο βασικός σύνδεσμος της διδασκαλίας των μαθηματικών με τις παραστατικές τέχνες. Αποτέλεσε για μένα το εφαλτήριο για να θεωρήσω το ίδιο το ανθρώπινο σώμα ως εργαλείο ερμηνείας και κατανόησης μαθηματικής γνώσης. Αφενός τα αδιέξοδα στα οποία οδηγήθηκα συχνά στην προσπάθειά μου να εξηγήσω μαθηματικές έννοιες ή να διατηρήσω το ενδιαφέρον των μαθητών μου (ηλικίας έως 12 ετών) ζωντανό και αφετέρου η ανάγκη των ίδιων των παιδιών να συμμετέχουν στο μάθημα όχι μόνο πνευματικά, αλλά επίσης σωματικά και συναισθηματικά οδήγησε στην παρουσίαση των μαθηματικών σαν ένα παιχνίδι δράσης.

Τον Νοέμβριο του 2009 ξεκίνησε στο στούντιο *Κινητήρας* η δημιουργία μιας ομάδας έρευνας με σκοπό την εξερεύνηση μη συμβατικών μεθόδων δημιουργίας κίνησης στη σκηνή. Με την καθοδήγηση των χορογράφων Α. Γύρα και A. Sanschez – Coldberg , την συνεργασία των χορευτριών Α. Δαλαγγέλη και Μ. Καραβά καθώς και την συμμετοχή εθελοντών ενήλικων μαθητών προχώρησα στην εφαρμογή μιας σειράς ασκήσεων που είχαν ως αποτέλεσμα την δημιουργία κίνησης μέσα από τα μαθηματικά. Η έρευνα – που έλαβε χώρα στην Αθήνα – είχε διάρκεια 7 μηνών (Νοέμβριος 2009 – Ιούνιος 2010) και το αποτέλεσμα σφραγίστηκε με την παρουσίαση μιας χορογραφίας που προέκυψε μέσα από την ερευνητική διαδικασία. Πέραν του καλλιτεχνικού αποτελέσματος η παιδαγωγική διάσταση αυτού του πειράματος είναι σαφής: η συμβιωτική σχέση ανάμεσα στα μαθηματικά και τον χορό μόνο όφελος μπορεί να αποτελέσει για τον μαθητή. Όπως αναφέρουν οι J. Parsley και C. T. Soriano στην πρόσφατη έρευνά τους « Οι χορογράφοι και οι μαθηματικοί μοιάζουν πολύ περισσότερο απ' ότι ο καθένας θα πίστευε αρχικά. Η δημιουργία μιας χορογραφίας και η δόμηση μιας απόδειξης είναι ταξίδια στα οποία τα βήματα της διαδρομής είναι ένα προς ένα διδακτικά και η έμπνευση συχνά εμφανίζεται από αναπάντεχες πηγές.», (Parsley & Soriano, 2009, σελ. 11-12). Οι χορογράφοι ασκούνται ενεργά στην γεωμετρία των τριών διαστάσεων. Πολλά σχήματα οικεία στους μαθηματικούς προκύπτουν ή εμφανίζονται αναπόφευκτα και φυσικά μέσα σε ένα στούντιο χορού κατά τη διάρκεια των προβών. Η προοπτική, οι όψεις των επιφανειών, η ομοιότητα, οι διαστάσεις είναι μόνο μερικές από τις ζωτικής σημασίας έννοιες που χρησιμοποιούν οι χορογράφοι στο πλάσιμο της αισθητικής τους όταν χτίζουν μία παράσταση. Παράλληλα, οι μαθητές χρησιμοποιώντας σε κίνηση το ίδιο τους το σώμα αντιλαμβάνονται μέσω αυτής της δυναμικής κατασκευής πώς ο χορός δανείζεται γνώση από την γεωμετρία, ενώ ο χορευτής συνειδητοποιεί ότι τα γεωμετρικά σχήματα είναι πανταχού παρόντα στο στούντιο.

Παρακάτω περιγράφεται μία σωματική άσκηση κατανόησης της έννοιας του ελάχιστου κοινού πολλαπλασίου καθώς και πώς μπορούν κείμενα μαθηματικής λογοτεχνίας και ιστορίας των μαθηματικών να αποτελέσουν

βάση για τη δημιουργία μιας χοροθεατρικής εμπειρίας. Και οι δύο διαδικασίες συνδέουν τα μαθηματικά με το χοροθέατρο. Στην πρώτη οι μαθητές καλούνται να αντιληφθούν το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο χρησιμοποιώντας σαν μαθηματικό μοντέλο το ίδιο τους το σώμα, αναπόφευκτα κινούνται. Η κίνηση δίνει την απάντηση στο μαθηματικό πρόβλημα και ταυτόχρονα συνθέτει μία χορογραφία, ένα καλλιτεχνικό προϊόν. Στην περίπτωση αυτή η προσέγγιση της απάντηση στο μαθηματικό ερώτημα που τίθεται (εύρεση ελάχιστου κοινού πολλαπλασίου) αποδεικνύει πόσο σημαντική είναι η δημιουργία ενός μαθηματικού πλαισίου δράσης και η ύπαρξη της υποκειμενικότητας στην αντίληψη μίας μεθόδου. Η δεύτερη άσκηση φέρνει τους μαθητές εγγύτερα στην γνώση καλλιεργώντας την φαντασία τους. Και στις δύο περιπτώσεις συμβαίνει αυτό που ο Bishop ονομάζει «πραγματικά (real) σχολικά μαθηματικά, που έχουν προέλθει από την τομή των μαθηματικών με τον πολιτισμό», (Bishop, 1985, σελ. 24).

Πιστεύω πως στο σημείο συνάντησης των μαθηματικών με την τέχνη και τον πολιτισμό βρίσκεται προς έρευνα ένας ολόκληρος κόσμος γεμάτος ενδιαφέρον, καινοτομία, και εμπνευσμένες διαθεματικές προσεγγίσεις τόσο σε θέματα διδασκαλίας όσο και σε θέματα μάθησης των μαθηματικών μέσα και έξω από το σχολείο.

Τέλος, η χρήση των παραστατικών τεχνών σαν εργαλείο μαθηματικής διδασκαλίας θα μπορούσε να εμπλουτίσει και να διευρύνει αυτό που ο D'Ambrosio εννοεί με τον όρο «Εθνομαθηματικά (Ethnomathematics)», δηλαδή «τα μαθηματικά που μπορούν να χρησιμοποιηθούν διεθνώς από όλες τις πολιτιστικά αναγνωρίσιμες ομάδες και από μεμονωμένα άτομα ανεξάρτητα από την χώρα στην οποία ζουν, την γλώσσα που ομιλούν, τους κώδικες και τα σύμβολα επικοινωνίας» (D' Ambrosio, 1985, σελ. 44) και εγώ θα πρόσθετα ανεξάρτητα από την ιστορία, την θρησκεία και τις παραδόσεις κάθε ομάδας ή ατόμου. Θεωρώ τόσο τα μαθηματικά όσο και την τέχνη ως γλώσσες παγκόσμιες που ο συνδυασμός τους μπορεί να γεφυρώσει το κενό μεταξύ του σχολείου και του πραγματικού κόσμου και μόνο ευκολότερη μπορεί να κατασταίσει την μάθηση.

3. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Το πείραμα με τους πρώτους αριθμούς είχε τρία στάδια.

α) Στο πρώτο στάδιο οι εθελοντές μαθητές ήρθαν σε επαφή με το θεωρητικό υπόβαθρο σχετικά με τους πρώτους αριθμούς, με βάση το διαθεματικό ενιαίο πλαίσιο προγράμματος σπουδών του ΥΠΕΠΘ για το μάθημα των μαθηματικών στο δημοτικό. Η μοναδική ιδιότητα που έχει κάθε σύνθετος αριθμός να αναλύεται κατά μοναδικό τρόπο σε πρώτους παράγοντες,

αποτέλεσε έμπνευση για να τους φανταστώ σαν πρόσωπα που κινούνται στο χώρο. Έτσι λοιπόν ζήτησα από την ομάδα ο καθένας να αντιπροσωπεύει ένα πρώτο αριθμό και να προσπαθήσουν κινητικά αλλά αυτοσχεδιαστικά να αποδώσουν το γινόμενο που προκύπτει από την ανάλυση σε πρώτους παράγοντες τυχαίων φυσικών αριθμών. Το γινόμενο αυτό μπορούμε να το θεωρήσουμε σαν την υπογραφή του αριθμού. Τα μέλη της ομάδας όταν τους ζητήθηκε να δημιουργήσουν έναν αριθμό οι κινήσεις που επέλεξαν ήταν περισσότερο στατικές.

β) Στο δεύτερο στάδιο οι μαθητές αυθόρμητα επέλεξαν να κινηθούν στο χώρο. Εδώ, καθώς και στο προηγούμενο στάδιο, αναπόφευκτα προέκυψαν ερωτήματα σε σχέση με το πώς ο καθένας αντιλαμβάνεται την έννοια ενός αριθμού υψωμένου σε κάποια δύναμη και κυρίως πώς θα μπορούσαμε να εκφράσουμε κινητικά την διαφορά ανάμεσα σε έναν φυσικό αριθμό και στον ίδιο φυσικό αριθμό υψωμένο σε μία δύναμη. Φυσικά, στα δύο αυτά στάδια είναι εμφανής η ύπαρξη εγγενών περιορισμών από την αφαιρετική αντίληψη των υπό μελέτη αλγεβρικών εννοιών. Η άσκηση σαν σκοπό είχε την εξοικείωση του μαθητή με την έννοια του πρώτου αριθμού, την καλλιέργεια της φαντασίας του, ώστε να τολμήσει να απελευθερωθεί κινητικά αποδίδοντας αριθμούς και την δημιουργία μιας πρώτης βάσης για την γέννηση ενός καλλιτεχνικού προϊόντος.

γ) Στο τρίτο στάδιο οι μαθητές επέλεξαν να κάνουν τόσες κινήσεις σε πλήθος όσες ο αριθμός τον οποίο αντιπροσώπευαν.

Έστω ότι το άτομο Α αντιπροσωπεύει τον αριθμό 3 και ο Β αντιπροσωπεύει τον 5. Αν ο Α επιλέξει 3 διαφορετικές κινήσεις και ο Β 5, με συνθήκη ότι έχουν την ίδια τελική κίνηση, θα κάνουν την ίδια κίνηση ταυτόχρονα για πρώτη φορά στο γινόμενο τους δηλαδή στο 15. Οι μαθητές έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με την έννοια των πρώτων αριθμών στην 5η δημοτικού. Αυτό που τους ζητείται σε αυτή την ηλικία είναι να βρούνε το ΕΚΠ κάποιων αριθμών. Για να βρει ο μαθητής το ΕΚΠ π.χ. 3 αριθμών αυτό που πρέπει να κάνει είναι ανάλυση σε πρώτους παράγοντες. Το ΕΚΠ προκύπτει από το γινόμενο των πρώτων παραγόντων. Ένα αντιπροσωπευτικό πρόβλημα γι' αυτό το επίπεδο μπορεί να είναι το εξής: ο Α, ο Β και ο Γ ξεκίνησαν πρόβες για την παράσταση που ετοιμάζουν. Ο Α θα κάνει πρόβα κάθε 2 μέρες, ο Β κάθε 3 και ο Γ κάθε 5. Πότε θα κάνουν και οι 3 μαζί πρόβα για πρώτη φορά; Η απάντηση είναι αυτό που μαθαίνουν οι μαθητές ως ΕΚΠ και δεν είναι τίποτα άλλο από το γινόμενο αυτών των 3 πρώτων αριθμών (σε 2x3x5=30 μέρες). Στο στάδιο αυτό – σε αντίθεση με τα δύο προηγούμενα – δεν υπήρξαν εννοιολογικές απλουστεύσεις ή περιορισμοί. Οι κινήσεις του κάθε μαθητή ήταν καθορισμένες σε πλήθος και ακολουθία και η ταύτιση της τελευταίας

κίνησης του καθενός αποτέλεσε μία ευχάριστη έκπληξη για όλους, αφού ήταν η ορατή αναπαράσταση εύρεσης του ΕΚΠ.

Στην δόμηση των ασκήσεων δόθηκε ιδιαίτερη σημασία στην προσέγγιση της απάντησης μέσα από ομαδική συζήτηση. Ως δασκάλα σε αυτές τις ασκήσεις δέχτηκα πολλές ερωτήσεις και προσπάθησα να ανταποκριθώ σε αυτές αξιολογώντας και χρησιμοποιώντας τις ιδέες των συμμετεχόντων μαθητών και διευκολύνοντας την συζήτηση μεταξύ τους. Ο διάλογος που προέκυπτε κάθε φορά βοηθούσε την ομάδα να κατανοήσει βαθύτερα το προς μελέτη πρόβλημα. Δυνητικά, σε μία ομάδα μικρών σε ηλικία μαθητών, ο διάλογος μέσα σε αυτήν την διαδικασία μαθηματικής και καλλιτεχνικής δημιουργίας μπορεί να αποβεί ιδιαίτερα εποικοδομητικός αφού όπως πολύ σωστά αναφέρει ο N. Pratt « ανοίγει νέα πεδία για σκέψη και ενθαρρύνει τα παιδιά να επιχειρηματολογήσουν για την άποψή τους, βοηθάει στο να ανταλλάσουν τα παιδιά τις ιδέες τους και αποτελεί την βάση για την δόμηση μαθηματικού λόγου», (Pratt, 2006, σελ. 36) .

Παράλληλα με τα παραπάνω πειράματα έγινε μία προσπάθεια να έρθει σε επαφή ο μαθητής – καλλιτέχνης με λογοτεχνικά κείμενα μαθηματικού περιεχομένου. Έτσι ιστορίες για τους πυθαγόρειους φίλους αριθμούς, τη ζωή των μεγάλων μαθηματικών από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα, την φιλοσοφία των μαθηματικών αποτέλεσαν πηγή έμπνευσης για την δημιουργία χοροθεατρικών εμπειριών.

Η δημιουργική αυτή διαδικασία δόμησης μίας μαθηματικής λύσης ή προσέγγισης μιας μαθηματικής ιστορίας γέμισε τους συμμετέχοντες με αυτοπεποίθηση και ενθουσιασμό. Ενώ στην αρχή της διαδικασίας ήταν εμφανής η δυσκολία στην θεωρητική κατανόηση του θέματος και συνεπώς η δυσπιστία και η αμφισβήτηση της μεθόδου, αργότερα κατά την διάρκεια των συναντήσεών μας ύστερα από ομαδική δουλειά και διάλογο η συμμετοχή των μαθητών εμπεριείχε την χαρά, την περιέργεια και την ενέργεια που νιώθει κάποιος όταν πρόκειται να συμμετέχει στο αγαπημένο του παιχνίδι ή σε μία πρόβα. Επιπλέον, συμφώνησαν όλοι ότι τα μαθηματικά δεν είναι προνόμιο κάποιας μικρής ομάδας ατόμων, αλλά μπορούν να γίνουν κτήμα του καθενός αρκεί να βρεθεί μία διδακτική μέθοδος που θα βοηθήσει στην κατανόησή τους.

Τέλος αξίζει να αναφερθεί ότι το μοντέλο διδασκαλίας που περιγράφηκε στην εργασία αυτή είναι προφανώς μία δημιουργική πρόταση και όχι η μοναδική προσέγγιση σε τέτοιου είδους προβλήματα. Όπως τονίζει η M. Van Den Heuvel-Panhuizen «Τα μαθηματικά μοντέλα που μπορεί να επινοήσει και να χρησιμοποιήσει ένας δάσκαλος στην τάξη μπορούν να αποκτήσουν σημαντική εκπαιδευτική σημασία και δεν αποτελούν την τελική και μοναδική

λύση ή προσέγγιση ενός προβλήματος, αλλά μία μόνο οπτική σε σχέση με τη διδασκαλία ενός συγκεκριμένου θέματος. » (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003, σελ. 31).

Φωτογραφίες και οπτικοακουστικό υλικό από τις πρόβες, κείμενα και σχεδιαγράμματα του συγγραφέα και της ομάδας υπάρχουν στην ηλεκτρονική διεύθυνση http://amfibioproject.blogspot.com

4. ΧΟΡΟΣ – ΘΕΑΤΡΟ – ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: ΑΝΟΙΧΤΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΜΕΛΛΟΝ

Φυσικά δεν είναι η πρώτη φορά που γίνεται μία προσπάθεια διερεύνησης της σχέσης των μαθηματικών με τον σύγχρονο χορό και το θέατρο. Ήδη προαναφέρθηκε η ομάδα των Jason Parsley (μαθηματικός) και Christina T. Soriano (χορογράφος) οι οποίοι αφιέρωσαν δύο ακαδημαϊκά εξάμηνα στην συγκρότηση διαθεματικών τάξεων (Exploration in Mathematics, Dance Composition) στο Wake Forest University το 2006. Οι μαθηματικοί Sarah Marie Belcastro και Karl Schaffer έχουν μελετήσει αρκετά τις τομές των δύο πεδίων. Μάλιστα παρουσίασαν μέρος των συμπερασμάτων της έρευνάς τους το 2008 στην διεθνή συνάντηση με τίτλο «Joint meetings on dancing mathematics and the mathematics of dance». Η φυσική σύνδεση της γεωμετρίας με το κινούμενο ανθρώπινο σώμα έχει επίσης μελετηθεί από αρκετούς καλλιτέχνες του χώρου με σημαντικότερες τις παρουσίες των: Oscar Schlemmer και Rudolf Laban, τον ιδρυτή της περισσότερο διαδεδομένης μεθόδου διδασκαλίας και σύνθεσης σύγχρονου χορού. Και οι δύο κράτησαν σαν πυρήνα της κίνησής τους γεωμετρικές ιδέες κυρίως σε σχέση με τα στερεά. Όπως αναφέρει ο Laban στο βιβλίο του Choreutics οι βασικές αρχές της διδασκαλίας του εμπεριέχουν γνώση αρχαία από την εποχή του Πυθαγόρα ακόμα. Τέλος, αξιόλογη και πρωτότυπη ήταν η διαδικασία δημιουργίας της θεατρικής παράστασης «A Disappearing Number» της ομάδας *Complicite,* κατά την διάρκεια της οποίας οι ηθοποιοί στις πρόβες διδάχτηκαν μαθηματικά μέσα από κινητικές ασκήσεις.

Η μαθηματική εκπαίδευση είναι απαραίτητη για την ολοκλήρωση και την εξέλιξη αρχικά του ατόμου και επαγωγικά της κοινωνίας. Τα μαθηματικά αποτελούν εικόνα και δείκτη της καθημερινότητας και της πραγματικότητας, συνεπώς ο στόχος της μαθηματικής εκπαίδευσης οφείλει να έχει εκτός από πρακτικούς, μορφωτικούς και πολιτισμικούς στόχους.

Πώς μπορεί η τέχνη να αποτελέσει εργαλείο μάθησης; Πόσο αποδοτική μπορεί να είναι μακροπρόθεσμα μία τέτοια προσέγγιση μετάδοσης της μαθηματικής γνώσης; Πώς ο μαθητής ανταποκρίνεται στην εξερεύνηση της μαθηματικής γνώσης μέσα από το ίδιο του το σώμα; Μπορεί η καλλιτεχνική

δημιουργία να αποτελέσει οδηγό μαθηματικής εκπαίδευσης; Πόσο θα βοηθούσαν τους μαθητές διαθεματικές τάξεις (π.χ. μάθημα χορού & γεωμετρίας, ή θεατρικής αγωγής και άλγεβρας); Κατά πόσο είναι εφικτό να βρουν υποστήριξη και στέγη διαδικασίες σαν και την παραπάνω ώστε να αποτελέσουν παιδαγωγικά πειράματα και εργαλεία απόκτησης καινούριας γνώσης;

Η έρευνα που παρουσιάστηκε στην εργασία ουσιαστικά δείχνει πώς ο μαθητής μπορεί να διδαχθεί μαθηματικά μέσα από την ανθρώπινη κίνηση και πώς ο καλλιτέχνης μπορεί να κατανοήσει την κίνηση του σώματός του μέσα από τα μαθηματικά. Αν και η συγκεκριμένη έρευνα βρίσκεται ακόμα σε πρώιμο στάδιο, τα πρώτα αποτελέσματα αυτού του πειράματος καταδεικνύουν την ανάγκη για νέες και δημιουργικές προσεγγίσεις διδασκαλίας αλλά αυτή τη φορά μέσα στο σχολικό περιβάλλον.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bishop, Alan (1985): "The Social Construction of Meaning: A Significant Development for Mathematics Education". Περιοδικό For the learning of Mathematics, τεύχος 5(1), σελ. 24-28.

Boaler, Jo (1993): "The Role of contexts in the Mathematics Classroom: do they make mathematics more real?" . Περιοδικό For the learning of Mathematics, τεύχος 13(2), σελ. 12-17.

Boaler, Jo (2009): The elephant in the classroom. London: Souvenir Press.

D' Ambrosio, Ubiratan (1985): "Ethnomathematics and its Place in the History and Pedagogy of Mathematics". Περιοδικό For the learning of Mathematics, τεύχος 5(1), σελ. 44-48.

Freudenthal, Hans (1968): "How to teach Mathematics so as to Be Useful". Περιοδικό Educational Studies in Mathematics, τεύχος 1, σελ. 3-8.

Freudenthal, Hans (1971): "Geometry between the devil and the deep sea". Περιοδικό Educational Studies in Mathematics, τεύχος 3, σελ. 413-435.

Hough, Sue, Gough, Steve (2007): "Realistic Mathematics Education". Περιοδικό Mathematics Teaching, τεύχος 203, σελ. 34-38.

Laban, Rudolf (1966): Choreutics. Norwitch: Macdonald and Evans Ltd.

Parsley, Jason, Soriano, Christina Tsoules (2009): "Understanding geometry in the Dance Studio". Περιοδικό Journal of Mathematics and the Arts, τεύχος 3, σελ. 11-18.

Pratt, Nick (2006): Interactive Maths Teaching in the Primary School. London: Paul Chapman Publishing

Pratt, Nick (2006): Interactive Maths Teaching in the Primary School. London: Paul Chapman Publishing.

Van Den Heuvel-Panhuizen, Marja (2003): "The Didactical Use of Models in Realistic Mathematics Education: An Example from a Longitudinal Trajectory on Percentage". Περιοδικό Educational Studies in Mathematics, τεύχος 54, σελ. 9-35.

panorea.baka@gmail.com

ΕΙΚΑΣΤΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ. ΜΙΑ ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Δημήτρης Γιαννόπουλος
Μαθηματικός, M.Ed.

Πάτροκλος Καζάζης
Μαθηματικός

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία θα παρουσιάσουμε (α) στοιχεία για τα σύγχρονα μαθησιακά περιβάλλοντα και τη διαθεματική προσέγγιση της γνώσης, (β) απόψεις για την σύνδεση των μαθηματικών και της τέχνης στη εκπαιδευτική πραγματικότητα, (γ) δραστηριότητες που συνδέουν τα μαθηματικά, την τέχνη του οριγκάμι και κιριγκάμι και τις αναπαραστάσεις παρόμοιων σχημάτων στην οθόνη ηλεκτρονικού υπολογιστή με τη βοήθεια προγράμματος δυναμικής γεωμετρίας, (δ) μαθησιακούς, παιδαγωγικούς και κοινωνικούς-πολιτιστικούς στόχους των διδακτικών ενεργειών καθώς και (ε) συμπεράσματα από δραστηριότητες που έχουν ήδη γίνει σε προηγούμενη σχολική χρονιά καθώς και από την μέχρι τώρα πορεία των δραστηριοτήτων τη χρονιά που διανύουμε.

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

Η ανάγκη για ανανέωση των εκπαιδευτικών λειτουργιών του σχολείου, των προγραμμάτων σπουδών, της μαθησιακής διαδικασίας, της αξιολόγησης και η προσαρμογή αυτών στη σύγχρονη πραγματικότητα, είναι αντικείμενο έρευνας και συζητήσεων τα τελευταία χρόνια από τους ειδικούς της εκπαίδευσης (Φλουρής, 2002, Κολέζα, 2009). Πρόσφατα μάλιστα αναθερμάνθηκε το ενδιαφέρον για μία νέα αλλαγή των προγραμμάτων σπουδών της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, καθώς το χρονοδιάγραμμα για τη συζήτηση και την εφαρμογή τους παρουσιάζεται στον ημερήσιο τύπο (Ελευθεροτυπία, 16-1-2011, 2-2-2011). Βέβαιο είναι ότι η μετάβαση από το παραδοσιακό σχολικό σύστημα σε ένα σύγχρονο μαθησιακό και διδακτικό περιβάλλον, απαιτεί την αναθεώρηση πολλών πρακτικών που αφορούν στην προέλευση, το περιεχόμενο και τη μορφή οργάνωσης των σχολικών προγραμμάτων και των διδακτικών προσεγγίσεων (Ματσαγγούρας, 2002). Τα αποτελέσματα των συζητήσεων και των προβληματισμών της προηγούμενης δεκαετίας εκφράσθηκαν αρχικά, από την εισήγηση του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου (Π.Ι.) για την αλλαγή της φιλοσοφίας του εκπαιδευτικού συστήματος και αποτυπώθηκαν το 2003 από τη δημιουργία του Διαθεματικού Ενιαίου Πλαισίου Προγραμμάτων Σπουδών (ΔΕΠΠΣ) του Υπουργείου Παιδείας. Αναφέρθηκε τότε μία διαπιστωμένη αναγκαιότητα του εκσυγχρονισμού της μαθησιακής και διδακτικής διαδικασίας με βάση τις νέες επιστημολογικές, παιδαγωγικές και κοινωνικές αντιλήψεις και την προσαρμογή αρχών της διαθεματικής προσέγγισης της γνώσης, στη διαρκώς μεταβαλλόμενη σύγχρονη Ελληνική πραγματικότητα (Αλαχιώτης, 2002, Ματσαγγούρας, 2002). Το πλαίσιο αυτό αναθεωρείται και εξελίσσεται στις μέρες μας, χωρίς να έχουμε ακόμη την τελική πρόταση και μορφή των νέων προγραμμάτων αλλά μόνο σκέψεις και προτάσεις για την πιλοτική εφαρμογή τους τη νέα χρονιά στον ημερήσιο έντυπο και ηλεκτρονικό τύπο (Ελευθεροτυπία 2-2-2011, Ημερησία 20-1-2011).

Το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων περιγράφει και καθορίζει το πλαίσιο των ποικίλων παιδαγωγικών δραστηριοτήτων που οφείλουν να αναπτυχθούν στα σχολεία για την επίτευξη συγκεκριμένων στόχων. Συγκεκριμένα στο πλαίσιο αυτό, ως στόχοι αναφέρονται τα νέα διδακτικά μοντέλα να γίνονται περισσότερο μαθητοκεντρικά, να αποτυπώνουν τη σχέση της επιστήμης ή της τέχνης με την καθημερινή ζωή, να παρουσιάζουν στοιχεία του κοινωνικού και πολιτισμικού περιβάλλοντος, να αναπτύσσουν δεξιότητες συνεργασίας και επικοινωνίας και εστιάζουν περισσότερο στην κατανόηση και τη σκέψη, την οργάνωση και την τεκμηρίωση των γνώσεων, παρά στη στείρα απομνημόνευση και την απλή εξάσκηση (ΥΠΕΠΘ, ΠΙ). Με την εμπλοκή των μαθητών σε διαδικασίες ελέγχου, αναστοχασμού και

ερμηνείας και με τη διαθεματική προσέγγιση της γνώσης, την κατά το δυνατόν οριζόντια διασύνδεση των διδακτικών αντικειμένων, η μαθησιακή διαδικασία προσανατολίζεται προς μια ολιστική προσέγγιση της γνώσης, την ανάδειξη ουσιωδών δεξιοτήτων, στάσεων και αξιών, στοιχεία απαραίτητα της εκπαιδευτικής διαδικασίας στη σύγχρονη πραγματικότητα, με σκοπό την πολύπλευρη γνώση του μαθητή και την προετοιμασία του για μία επιτυχή κοινωνική ένταξη (Αλαχιώτης, 2002). Σύμφωνα με τη Χιονίδου (2002) το ΔΕΠΠΣ των μαθηματικών, βασισμένο στα σύγχρονα κονστρουκτιβιστικά μοντέλα δημιουργίας προγραμμάτων, συμπλήρωσε και ανέπτυξε το προηγούμενο πρόγραμμα σπουδών, με τις διαθεματικές προσεγγίσεις και την ολιστική συστημική προσέγγιση στη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών. Στις νέες συζητήσεις για τα προγράμματα σπουδών των Μαθηματικών, υποβαθμίζεται μεν ο κεντρικός ρόλος της Διαθεματικότητας, προτείνονται όμως πλούσιες διερευνητικές δραστηριότητες που δημιουργούν συνδέσεις ανάμεσα στα Μαθηματικά και τους άλλους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας όπως αυτές παρουσιάστηκαν στις εργασίες της ημερίδας με τίτλο «Προγράμματα Σπουδών Μαθηματικών Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης: Αναζητώντας στόχους και περιεχόμενο» την Παρασκευή 28 Ιανουαρίου 2011 στο Πανεπιστήμιο Αθηνών. Η ημερίδα οργανώθηκε από τα Διοικητικά Συμβούλια της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών και της Επιστημονικής Ένωσης για τη Διδακτική των Μαθηματικών (ΕΠΕΔΙΜ) και μέρος των εισηγήσεων υπάρχουν στην ιστοσελίδα της ΕΠΕΔΙΜ.

ΣΥΓΧΡΟΝΟ ΜΑΘΗΣΙΑΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

Για τη διαμόρφωση ενός σύγχρονου μαθησιακού περιβάλλοντος, με βάση τις αρχές των σύγχρονων θεωριών μάθησης, θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη εσωτερικοί και εξωτερικοί παράγοντες, που επηρεάζουν τους μηχανισμούς μάθησης, όπως είναι για παράδειγμα τα γνωστικά χαρακτηριστικά, η προϋπάρχουσα γνώση, τα συναισθήματα και τα κίνητρα, οι προσωπικοί στόχοι των μαθητών, η οργάνωση και παρουσίαση του γνωστικού αντικειμένου, η χρήση ή μη υπολογιστών και γενικότερα τεχνολογίας, οι επικοινωνιακές ικανότητες και οι πεποιθήσεις του δασκάλου, καθώς και οι κοινωνικοί και πολιτισμικοί παράγοντες (Κολέζα, 2000, Φιλίππου 2001). Επιπλέον, βασικό ρόλο στη διαμόρφωση αυτή παίζουν οι ψυχολογικές αρχές της μάθησης στα πλαίσια της εκπαίδευσης. Μεταξύ των αρχών αυτών, τρεις αναγνωρίζονται ευρέως ως βάση πάνω στην οποία οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να σχεδιάζουν περιβάλλοντα μάθησης για το σημερινό σχολείο: (α) η ενθάρρυνση των παιδιών στην ενεργητική συμμετοχή κατά την διαδικασία της μάθηση, (β) η συνεργασία μεταξύ των μαθητών στη βάση της κοινωνικής

αλληλεπίδρασης και (γ) η χρησιμοποίηση δραστηριοτήτων που έχουν νόημα για τους μαθητές (Βοσνιάδου, 2001).

Ειδικότερα για τα Μαθηματικά της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, με βάση τις νέες τάσεις της διδακτικής των Μαθηματικών, θεωρείται αναγκαίο να τονισθεί ότι αυτά είναι μία ανθρώπινη δραστηριότητα συνδεμένη με την επίλυση προβλημάτων της καθημερινότητας και οφείλουν να βοηθούν τους σημερινούς μαθητές να λύνουν προβλήματα με μία μορφή λογικής προσέγγισης και κριτικής θεώρησής τους (Χιονίδου, 2002, Κολέζα, 2009). Αντλώντας επιπλέον στοιχεία από τη θεωρία της ενεργητικής κατασκευής της γνώσης, κρίνεται αναγκαίο οι μαθητές να μαθαίνουν Μαθηματικά δίνοντας νόημα σε μαθηματικά αντικείμενα, κατασκευάζοντας ενεργητικά τη νέα γνώση από εμπειρίες και προϋπάρχουσα γνώση (NCTM, 2000, Κολέζα, 2000), καθώς και από δραστηριότητες ενταγμένες σε πλαίσια που είναι οικεία στους μαθητές και τα οποία έχουν νόημα μέσα στο πολιτισμικό και κοινωνικό τους περιβάλλον (Σκούρας, 2002). Με την θεώρηση αυτή, ο ρόλος του εκπαιδευτικού αλλάζει και ο εκπαιδευτικός μετατρέπεται από *αναμεταδότης* ή πομπός πληροφοριών και «γνώσης» με την κιμωλία και τον πίνακα, σε *διευκολυντή* των μαθητών, παρέχοντας τους επιπλέον εργαλεία αναζήτησης και κατασκευής της γνώσης (Χιονίδου, 2002) και *συντονιστή* των εργαλείων αυτών όπως για παράδειγμα του ηλεκτρονικού υπολογιστή, καθώς η χρήση της τεχνολογίας αποτελεί σήμερα βασικό συστατικό για τη διδακτική και τη μαθησιακή διαδικασία (NCTM 2000). Όλα αυτά έρχονται σε συμφωνία με την άποψη ότι οι πραγματικές εμπειρίες των μαθητών είναι σημαντικές για την νοητική τους ανάπτυξη και τις δεξιότητες που αποκτούν στο σχολείο (Resnick, 1987) καθώς επίσης και ότι η σχέση των παιδιών (και των ενηλίκων) με τον κόσμο είναι ενεργητική και επομένως αυτά, συμμετέχουν ενεργητικά σε δραστηριότητες, με σκοπό να ερμηνεύσουν νοητικά τον κόσμο, να τον καταλάβουν και να τον αναπαραστήσουν στον εαυτό τους χτίζοντας με την ερμηνεία αυτή, ένα μοντέλο του κόσμου (Donaldson, 1995).

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΤΕΧΝΗ

Ένας τομέας στον οποίο κανείς μπορεί να διακρίνει και να ανακαλύψει πολλά στοιχεία Μαθηματικών διαχρονικά είναι η τέχνη. Από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα οι σχέσεις και οι επιρροές μεταξύ των μαθηματικών και της τέχνης υπάρχουν σε κάθε χρονική περίοδο και σε κάθε ανεπτυγμένο πολιτισμό. Η ιστορία αποδεικνύει πειστικά ότι, η ανάδειξη μαθηματικών υψηλού επιπέδου προϋποθέτει μια εξαιρετική πολιτισμική προετοιμασία της κοινωνίας χωρίς κατ' ανάγκη να ισχύει το αντίστροφο (Flato, 1993).

Ειδικότερα ο Στράντζαλος (2010α, σελ. 90) ισχυρίζεται ότι *«η Γεωμετρία φαίνεται να είναι ο μοναδικός τομέας της ανθρώπινης δημιουργίας που «άλλαξε Παράδειγμα», δηλαδή άλλαξε πλαίσιο και μεθόδους ακριβώς και μόνο στις τρεις «συνολικές πολιτισμικές αιχμές» της ιστορίας της ανθρωπότητας»*. Παραδείγματα ανάδειξης μαθηματικών σε ένα υψηλό επίπεδο πολιτισμικής δημιουργίας υπάρχουν πολλά. Αναφέρουμε ενδεικτικά ύπαρξη τέτοιων σχέσεων στην τέχνη των Αιγυπτίων, των αρχαίων Ελλήνων, την εποχή της Αναγέννησης, την αισθητική τάση του κυβισμού, τη σχολή του Μπαουχάουζ καθώς και σύγχρονα ρεύματα όπως για παράδειγμα το ρεύμα Math Art το οποίο παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στις μέρες μας (Σίγουρος, 2005). Τα τελευταία χρόνια, η σχέση των μαθηματικών και της τέχνης γίνεται αντικείμενο μελέτης και ενασχόλησης πολλών επιστημόνων και καλλιτεχνών αποτέλεσμα της οποίας είναι η εμφάνιση καινούριων εικαστικών δημιουργιών με τη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών, μαθηματικών προγραμμάτων και νέων τεχνολογιών και παράλληλα παρουσιάζονται στοιχεία για τη παιδαγωγική αξία της σύνδεσης αυτής. Ειδικότερα η Γεωμετρία ως πολιτισμικό αγαθό και ως διδακτικό αντικείμενο, σε ενότητες όπως η εισαγωγή των γεωμετρικών μετασχηματισμών, στο πλαίσιο των ολιστικών θεωρήσεων, μπορεί να αναδείξει την ιστορικά τεκμηριωμένη αλληλεπίδραση Μαθηματικών και Τέχνης (Στράντζαλος, 2010β). Στοιχεία που αποτυπώνουν την σύνδεση και την αλληλεπίδραση των Μαθηματικών και της Τέχνης, καθώς και πλήθος προβληματισμών, εργασιών, μελετών και δημιουργιών, βρίσκει κανείς εύκολα στο διαδίκτυο, σε βιβλία και σε άρθρα περιοδικών. Για παράδειγμα το ρεύμα που προαναφέραμε με το όνομα Math Art (www.math-art.net/), το ετήσιο συνέδριο Bridges (http://www.bridgesmathart.org/), το περιοδικό Mathematics and the Arts (http://www.tandf.co.uk/journals/titles/17513472.asp).

ΟΡΙΓΚΑΜΙ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Μία από τις προσιτές μορφές τέχνης στους μαθητές του γυμνασίου είναι η χαρτοδιπλωτική-origami και χαρτοκοπτική-kirigami, όπου με το δίπλωμα ενός χαρτιού και με τομές σε αυτό προκύπτει αναπαράσταση διαφόρων μορφών. Οι τέχνες αυτές αποτελούν για τους Ιάπωνες, μορφές παραδοσιακής τέχνης και έκφρασης για περισσότερο από 2000 χρόνια και το σημερινό εκπαιδευτικό τους σύστημα αναφέρεται συχνά σε δραστηριότητες που τα περιέχουν. Τα μαθηματικά θέματα που μπορεί κανείς να αναφέρει και να διαπραγματευτεί με τους μαθητές του, με αφορμή το δίπλωμα χαρτιού καλύπτουν ένα μεγάλο εύρος. Κάποια από αυτά μπορούν να γίνουν δραστηριότητες των Μαθηματικών που διδάσκονται στο Γυμνάσιο ή το Λύκειο με εφαρμογές Γεωμετρίας και Τριγωνομετρίας (Haga, 2002, Kinsey,

Moore, 2002), ενώ κάποια άλλα αναφέρονται σε κλάδους μαθηματικών διαφορετικούς από αυτούς που ασχολούνται τα μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. (Alperin, 2000, Hull, 2002). Επιπλέον σήμερα υπάρχει η τάση για την ανάπτυξη ειδικών εντολών σε νέα μαθηματικά λογισμικά που αφορούν σε δίπλωμα χαρτιού και τις γεωμετρικές ιδιότητες που συνδέονται με αυτό, όπως για παράδειγμα το ελεύθερο λογισμικό Tabula το οποίο βρίσκεται στην ιστοσελίδα http://numeracyworks.com./Site/Details.html και αναπτύσσει ο καθηγητής David Hartmann καθώς και λογισμικό που αναπαριστά στην οθόνη του υπολογιστή το δίπλωμα ενός χαρτιού για την κατασκευή ενός οριγκάμι (Szinger, 2002)

Η ιδέα μας, αφορά στην ανάδειξη σχέσεων και συνδέσεων μεταξύ μαθηματικών αντικειμένων και των ιδιοτήτων τους, προσιτών σε μαθητές γυμνασίου, που προκύπτουν από το δίπλωμα ενός χαρτιού και των τεχνών origami και kirigami με απλές αλλά και σύνθετες κατασκευές. Συμπληρώνεται από την προσπάθεια για αποτύπωση από τους μαθητές, σχημάτων που παρουσιάζονται κατά τη διάρκεια της δημιουργίας κάποιων μορφών origami και kirigami, στην οθόνη του υπολογιστή με το πρόγραμμα δυναμικής γεωμετρίας Geogebra. Το δίπλωμα του χαρτιού χρησιμοποιείται ήδη από το σχολικό βιβλίο (Βανδουλάκης, κ.ά., 2010) για την κατασκευή της διχοτόμου γωνίας (σελ. 167), την κατασκευή ορθής γωνίας (σελ. 171) και για τη συμμετρία ως προς άξονα (σελ. 204). Εμείς προτείνουμε δραστηριότητες για τη συμμετρία ως προς άξονα, συμμετρία ως προς σημείο και για την ανάδειξη των ιδιοτήτων των τετραπλεύρων δηλαδή για τις παραγράφους του δέυτερου και τρίτου κεφαλαίου του δευτέρου μέρους του σχολικού βιβλίου (Βανδουλάκης, κ.ά., 2010). Το πρόγραμμα Geogebra είναι ένα ελεύθερο λογισμικό δυναμικής Γεωμετρίας το οποίο αναπτύσσεται από μια κοινότητα επιστημόνων και βρίσκει γενικότερη αποδοχή στο χώρο των εκπαιδευτικών για τα Μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Η ιδέα αυτή νομίζουμε ότι μπορεί να ενταχθεί σε ένα περιβάλλον με τα γενικά χαρακτηριστικά του Διαθεματικού Πλαισίου όπως αυτά έχουν ήδη περιγραφεί και είναι σύμφωνη με τους ειδικούς σκοπούς της μαθηματικής εκπαίδευσης στο Γυμνάσιο. Σύμφωνα με το ΔΕΠΠΣ για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο, τα Μαθηματικά σκοπό έχουν, να ασκούν τους μαθητές στη μεθοδική σκέψη, την ανάλυση, την αφαίρεση, τη γενίκευση και την εφαρμογή, να τους ωθούν να αναπτύσσουν την παρατηρητικότητα, την προσοχή, τη δύναμη αυτοσυγκέντρωσης, την επιμονή, την πρωτοβουλία, τη δημιουργική φαντασία, την ελεύθερη σκέψη, και παράλληλα, να καλλιεργούν την αίσθηση της αρμονίας, της τάξης και του ωραίου και να διεγείρουν το κριτικό πνεύμα. Προτείνονται δε από το πρόγραμμα σπουδών

για το σκοπό αυτό, ο πολιτισμός και η τέχνη ως θεμελιώδεις έννοιες διαθεματικής προσέγγισης. Παράλληλα όμως ως ειδικοί σκοποί αναφέρονται, η ανάδειξη της εφαρμοσιμότητας και πρακτικής χρήσης των Μαθηματικών από την αρχαιότητα ως τις μέρες μας καθώς και η καλλιέργεια θετικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά. (ΥΠΕΠΘ-ΠΙ, 2003). Παράλληλα η εισαγωγή μίας πολυπολιτισμικής δραστηριότητας, παρουσιάζει πλεονεκτήματα αφού οι μαθητές μαθαίνουν να εκτιμούν και να σέβονται τη συνεισφορά άλλων πολιτισμών και ενημερώνονται για το ρόλο των Μαθηματικών σε όλες τις κοινωνίες (Κολέζα, 2009). Κατά συνέπεια, με μια σειρά από ενέργειες οι οποίες θα διαμορφώσουν ένα οικείο πολιτισμικό περιβάλλον και θα εντάξουν σε αυτό στοιχεία μαθηματικών που θα έχουν νόημα για τα παιδιά, πιστεύουμε ότι ενθαρρύνουμε και κατευθύνουμε τους μαθητές να αναζητήσουν και να ανακαλύψουν συνδέσεις τέχνης και μαθηματικών, να διαμορφώσουν μία θετική στάση απέναντι στις πνευματικές δραστηριότητες, συμμετέχοντας ενεργά στη διαδικασία της μάθησης, ανακαλύπτοντας με τον τρόπο αυτό «*γέφυρα για τη σύνδεση των Μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο*» (Σκούρας, 2002, σ. 105).

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΤΟΧΟΙ

Οι δραστηριότητες που προτείνουμε αναφέρονται σε δύο πεδία. Το πρώτο αφορά στη συμμετρία σχημάτων ως προς άξονα και ως προς σημείο ενώ το δεύτερο αφορά στις ιδιότητες των παραλληλογράμμων και τετραπλεύρων. Στόχοι των δραστηριοτήτων είναι οι μαθητές να αναγνωρίσουν και να κατασκευάσουν γεωμετρικά σχήματα με τη δίπλωση του χαρτιού, με τα γεωμετρικά τους όργανα και με τη χρήση του λογισμικού, να εμπλακούν στη διαδικασία της εικασίας, της διερεύνησης, της γενίκευσης και του συμπεράσματος, να αντιστοιχίσουν και να χρησιμοποιήσουν συγκεκριμένες γεωμετρικές σχέσεις, να πάρουν πρωτοβουλίες, να συνδέσουν εικόνες και αντικείμενα σε πραγματικό, πολιτισμικό και τεχνολογικό περιβάλλον. Επιπλέον στόχοι της διαδικασίας είναι, οι μαθητές να έχουν προσωπικές εμπειρίες, να αναπτύξουν ικανότητες διαπραγμάτευσης, διαλόγου, συνεργασίας, και επικοινωνίας στην ομάδα και θετικές στάσεις απέναντι στα Μαθηματικά.

Συγκεκριμένα οι δραστηριότητες της πρώτης φάσης έχουν ως στόχο οι μαθητές να αναγνωρίσουν τις απαιτούμενες ιδιότητες δύο συμμετρικών σχημάτων (σημείου, ευθύγραμμου τμήματος, τριγώνου κλπ) ως προς άξονα και ως προς σημείο με πρακτικό τρόπο διπλώματος ενός χαρτιού και στη συνέχεια να κατασκευάσουν απλά συμμετρικά σχήματα με τα γεωμετρικά όργανα και τις εντολές του προγράμματος, να κατασκευάσουν σχήματα

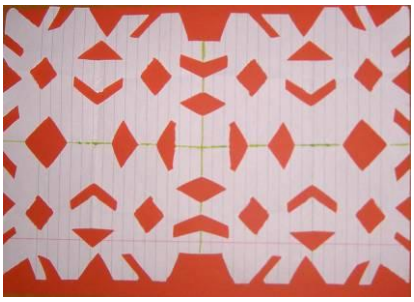
παρόμοια με τα κιριγκάμι του χαρτιού, να συνδυάσουν δημιουργίες του χαρτιού με σχήματα στην οθόνη του υπολογιστή, να αναζητήσουν στοιχεία για τις δύο Ιαπωνικές τέχνες και να τα παρουσιάσουν, να συνεργαστούν αρμονικά στα πλαίσια εργασιών σε ομάδες. Οι δραστηριότητες της δεύτερης φάσης έχουν ως στόχο οι μαθητές να συμπεράνουν τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων μέσα από διαδικασία εικασίας και επαλήθευσης. Οι μαθητές με τις δραστηριότητες αυτές, θα κατασκευάσουν γεωμετρικά σχήματα, όπως τρίγωνα, παραλληλόγραμμα, ρόμβους, τετράπλευρα και τετράγωνα, τόσο στο χαρτί με δίπλωμα και τομές όσο και στον υπολογιστή κάνοντας χρήση του λογισμικού. Θα αναγνωρίσουν τους άξονες συμμετρίας, το κέντρο συμμετρίας, θα συμπεράνουν βασικές ιδιότητες των σχημάτων αυτών (ισότητα πλευρών και γωνιών, καθετότητα τμημάτων, πλευρών, διαγωνίων κλπ) και θα τις επαληθεύσουν με μετρήσεις στον υπολογιστή. Τέλος θα γίνει προσπάθεια ώστε να δημιουργήσουν κάποιες απλές καλλιτεχνικές κατασκευές οριγκάμι και παρόμοιες μορφές στην οθόνη του υπολογιστή με τη βοήθεια του προγράμματος δυναμικής γεωμετρίας. Ενδεικτικές μορφές οριγκάμι παρουσιάζονται στο δεύτερο φύλλο εργασίας του Παραρτήματος.

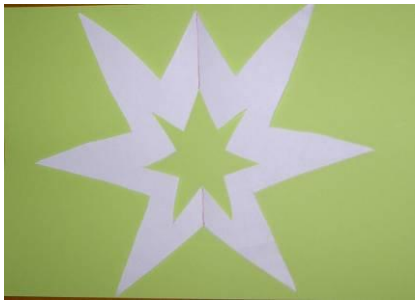
ΠΟΡΕΙΑ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

Η πρώτη φάση αφορά σε δραστηριότητες που συνδέονται με την έννοια της συμμετρίας. Το πρώτο στάδιο της σειράς των δραστηριοτήτων ήταν η δημιουργία κάποιων γνωστών κατασκευών οριγκάμι και κιριγκαμι, ο προβληματισμός και η συζήτηση για τα σχήματα που παρουσιάζονται στα διάφορα στάδια της κατασκευής, η αναγνώριση ιδιοτήτων της συμμετρίας, η αποτύπωση γνωστών εννοιών και ιδιοτήτων καθώς και η αναζήτηση και παρουσίαση πληροφοριών για τις δύο αυτές τέχνες από τους μαθητές. Στη φάση αυτή έγινε ένα εισαγωγικό μάθημα σχετικό με τη χρήση του λογισμικού Geogebra, στην τάξη, με χρήση οθόνης τοίχου και ένα βασικό υπολογιστή, όπου παρουσιάστηκαν οι βασικές λειτουργίες και εντολές του προγράμματος. Παράλληλα τα παιδιά συνέλλεξαν και παρουσίασαν ενδιαφέροντα στοιχεία για τις δύο αυτές Ιαπωνικές τέχνες, την ευρύτητα των εφαρμογών τους σε αρχιτεκτονική, ιατρική, τέχνη κλπ πραγματοποιώντας με αυτόν τον τρόπο μία μικρή επαφή με ένα νέο πολιτισμικό περιβάλλον. Τα στοιχεία των εργασιών προέκυψαν από μία αναζήτηση των παιδιών στον παγκόσμιο ιστό όπου πολλές και ποικίλες πληροφορίες, προσιτές στο επίπεδο τους υπάρχουν σε πολλές ιστοσελίδες, για παράδειγμα στις σελίδες: http://library.thinkquest.org/5402/history.html και http://www.greece-japan.com/origami.htm. Ενδιαφέρουσα εμπειρία για τους μαθητές αποτελεί μία εκπαιδευτική επίσκεψη στην Ιαπωνική Πρεσβεία όπου ειδικοί

παρουσιάζουν στα παιδιά την ιστορία των τεχνών αυτών και μια σειρά από πληροφορίες και δημιουργίες.

Στη συνέχεια οι μαθητές οργανωμένοι σε ομάδες έφτιαξαν δικές τους κατασκευές σε χαρτί Α4 ή τετράγωνο, διπλώνοντας το και κάνοντας τομές σε διάφορα σχήματα, τις παρουσίασαν σε χρωματιστό χαρτί φόντου και μιλήσαμε για το «νέο» σχήμα που έχει δημιουργηθεί, αναφέραμε τις έννοιες άξονας συμμετρίας, σχήμα συμμετρικό ως προς άξονα και συμμετρικά σχήματα ως προς άξονα και παρατηρήσαμε ότι χαρτί που έχει διπλωθεί περισσότερες από δύο φορές δημιουργεί συμμετρικά σχήματα αλλά δεν είναι κάθε δίπλωση άξονας συμμετρίας. Οι μαθητές σημείωσαν όλους τους άξονες συμμετρίας κάθε κατασκευής τους.



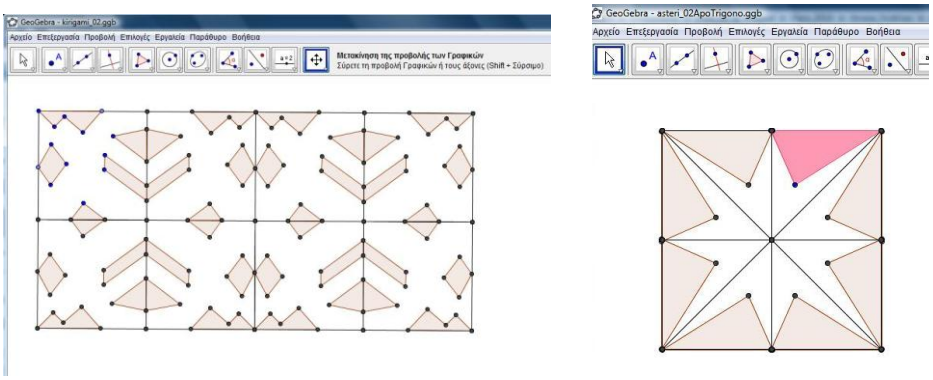


Σχήμα 1. Κατασκευές κιριγκάμι των μαθητών στο χαρτί.

Στο δεύτερο στάδιο της φάσης αυτής, οι μαθητές δουλεύοντας με φύλλο εργασίας (Παράρτημα, φύλλο εργασίας 1) ανά δύο, διπλώνοντας πρώτα ένα φύλλο Α4 και ύστερα με παρόμοιο σχήμα στην οθόνη του υπολογιστή (στο αρχείο SymA.ggb), ασχολήθηκαν με το συμμετρικό ενός σημείου ως προς άξονα, τις βασικές ιδιότητες της συμμετρίας και του τμήματος που ενώνει τα δύο σημεία καθώς και τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάζεται το συμμετρικό ενός σημείου ως προς άξονα. Έκαναν εικασίες, επιβεβαίωσαν συλλογισμούς, χειρίστηκαν δυναμικά τα νέα σχήματα συμπεραίνοντας την διατήρηση της ιδιότητας του συμμετρικού σχήματος και προσπάθησαν να επαληθεύσουν τη διατυπωμένη ιδιότητα από τη χάρτινη κατασκευή. Στη συνέχεια έφτιαξαν με τα γεωμετρικά όργανα το συμμετρικό ενός σημείου κάνοντας χρήση μόνο των μεθόδων που προέκυψαν στη διερεύνηση και των ιδιοτήτων που αποδεχθήκαμε ως βασικές. Στις επόμενες συναντήσεις παρουσιάσαμε την κατασκευή συμμετρικών σχημάτων στην οθόνη του υπολογιστή του ευθύγραμμου τμήματος, της ημιευθείας, της ευθείας, του κύκλου και του τριγώνου, χρησιμοποιώντας την ενσωματωμένη εντολή του προγράμματος για κάθε σημείο του σχήματος με παράλληλη κατασκευή των σχημάτων αυτών με τα γεωμετρικά όργανα στον πίνακα και στο τετράδιο. Το πρόγραμμα της

δυναμικής γεωμετρίας μας έδωσε την ευκαιρία να παρουσιάσουμε στην οθόνη του υπολογιστή και το συμμετρικό ενός πολύπλοκου σχήματος σε πολύ λίγο χρόνο. Στη συνέχεια κατασκευάσαμε ένα τετράγωνο με την εντολή του κανονικού πολυγώνου και με δύο διαδοχικές συμμετρίες δημιουργήσαμε στην οθόνη του υπολογιστή παρόμοιο σχήμα με αυτό που είχαν κατασκευάσει οι μαθητές με τη δίπλωση του τετράγωνου χαρτιού. Κατασκευάσαμε στη συνέχεια ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο καθώς και τετράγωνο με χρήση των βασικών ιδιοτήτων των σχημάτων οι οποίες είναι γνωστές από τις τάξεις του δημοτικού και με τομές και σχηματισμούς δημιούργησαν τα παιδιά νέα μοτίβα παρόμοια με τα χάρτινα κιριγκάμι.

Τέλος στην πρώτη φάση των δραστηριοτήτων, δημιουργήθηκαν σχήματα αστεριών με διπλώσεις ενός χαρτιού και τέθηκε το ερώτημα πως πρέπει να είναι οι διπλώσεις και οι τομές ώστε να υπάρξει τελικά αστέρι με 3 ή 4 ή περισσότερες ακτίνες. Στο ερώτημα αυτό η βοήθεια από το πρόγραμμα του υπολογιστή ήταν μεγάλη γιατί υπήρχε η δυνατότητα για δοκιμές και αναίρεση ενεργειών δηλαδή «τομών».



Σχήμα 2: Εργασίες των μαθητών σε περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας

Η δεύτερη φάση αφορά σε δραστηριότητες που συνδέονται με τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων και προτείνουμε να γίνει μετά τη διδασκαλία των τετραπλεύρων της παραγράφου Β.3.3.. Στη φάση αυτή οι μαθητές αφού έχουν γνωρίσει τα βασικά σχήματα, θα πειραματιστούν και θα οδηγηθούν στην ανακάλυψη ιδιοτήτων του ορθογωνίου, του ρόμβου και του τετραγώνου με τη βοήθεια φύλλου εργασίας (Παράρτημα, φύλλο εργασίας 2). Για παράδειγμα σε διπλωμένο δύο φορές χαρτί θα κάνουν μία τομή στην κεντρική εσωτερική γωνία και θα παρατηρήσουν το σχήμα που δημιουργεί η τομή όταν το χαρτί ξεδιπλωθεί. Θα πειραματιστούν με το είδος της τομής ώστε να γίνει το σχήμα αυτό ρόμβος ή τετράγωνο. Στη συνέχεια σε άλλο χαρτί

κάνοντας δύο κάθετες τομές θα ανακαλύψουν τις ιδιότητες του ορθογωνίου και του τετραγώνου συνδέοντας και διακρίνοντας στο τέλος τα τρία αυτά τετράπλευρα και τις ιδιότητές τους. Επιπλέον τα παιδιά θα κατασκευάσουν στην οθόνη του υπολογιστή παρόμοια σχήματα με μεταβλητές «τομές» στα αρχεία romvos.ggb και orthog.ggb, θα τα χειριστούν δυναμικά, θα κάνουν μετρήσεις και με αυτόν τον τρόπο θα επαληθεύσουν τις αρχικές εικασίες καταλήγοντας σε ιδιότητες. Επιπλέον δραστηριότητα θα είναι η κατασκευή παραλληλογράμμου και ισοσκελούς τραπεζίου με τη βοήθεια του λογισμικού και των ιδιοτήτων των σχημάτων που θα αναφερθούν.

Στη φάση αυτή οι μαθητές να κατασκευάσουν απλές μορφές origami με χαρτί, ξεκινώντας από ένα τετράγωνο ή ορθογώνιο. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των τετραπλεύρων που έχουν αναφερθεί και της συμμετρίας των σχημάτων θα προσπαθήσουν να αποτυπώσουν στον υπολογιστή παρόμοιες μορφές για απλά σχήματα.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα συμπεράσματα που έχουμε από την πρώτη φάση υλοποίησης είναι πολύ θετικά τόσο για την κατανόηση των εννοιών των Μαθηματικών όσο και την ομαδική και ατομική εργασία των μαθητών σε ένα πολιτισμικό πλαίσιο που συνδέεται με τα Μαθηματικά. Οι δραστηριότητες άρεσαν και κινητοποίησαν τα παιδιά, τους βοήθησαν στη δημιουργία ερωτημάτων και απαντήσεων καθώς και στην ανάδειξη απλών σχέσεων της Τέχνης και των Μαθηματικών. Επιπλέον τα παιδιά ενθουσιάστηκαν με τη χρήση του υπολογιστή, με την προβολή των πολύπλοκων σχημάτων στην οθόνη καθώς με την πληθώρα των αποτελεσμάτων. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα παιδιά εξοικειώθηκαν άμεσα με τις εντολές του προγράμματος, σχεδίασαν με άνεση τα γεωμετρικά σχήματα, χρησιμοποίησαν τα κατάλληλα εργαλεία για κάθε ιδιότητα και δημιούργησαν σύντομα εντυπωσιακά σχήματα.

Συγκεκριμένα στις δραστηριότητες της πρώτης φάσης τα παιδιά χρησιμοποίησαν πολλούς τρόπους για να ελέγξουν τη συμμετρία δύο σημείων, για παράδειγμα τη δίπλωση και την προβολή στο φως κλπ, αναγνώρισαν την ιδιότητα των συμμετρικών σημείων ως προς τον άξονα δηλαδή το γεγονός ότι ο άξονας συμμετρίας πρέπει να τέμνει το τμήμα που ενώνει τα σημεία στο μέσο υπό ορθή γωνία, αλλά υπήρχε μία δυσκολία στην πλήρη και ακριβή διατύπωση του συμπεράσματος αυτού. Κάτι τέτοιο μπορεί να πει κανείς ότι είναι χαρακτηριστικό της ηλικίας τους και του γεγονότος ότι τα παιδιά βρίσκονται στο πρώτο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης της αναγνώρισης, όπως αυτό περιγράφεται στη θεωρία Van Hiele, δηλαδή της αναγνώρισης των σχημάτων ως ολότητες. Στη φάση αυτή μεταβαίνουν στο

δεύτερο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης με χαρακτηριστικά τη δυνατότητα ανάλυσης και περιγραφής των ιδιοτήτων των σχημάτων, το οποίο απαιτεί και την ανάπτυξη μίας κατάλληλης γλώσσας (Τζίφας, κ.ά., 2005). Η αναπαράσταση των σχημάτων στην οθόνη του υπολογιστή, ο δυναμικός χειρισμός και η μεταβολή τους με τη βοήθεια του λογισμικού, έδωσαν την ευκαιρία στα παιδιά να δουν στην πράξη ειδικές περιπτώσεις, να διατυπώσουν και να ελέγξουν εικασίες, να διατυπώσουν γενικεύσεις και να εξάγουν συμπεράσματα. Παράλληλα υπήρξε το ερέθισμα και το ενδιαφέρον από τους μαθητές για τη δημιουργία μορφών και σχημάτων που απεικόνιζαν σχήματα παρόμοια με τις χάρτινες κατασκευές κιριγκάμι που προηγήθηκαν και παράλληλα αναδείχθηκε η ευκολία, η ευελιξία και η κίνηση και η δυναμική ως προς το αποτέλεσμα που μας παρέχει η χρήση των νέων τεχνολογιών.

Η δεύτερη φάση δεν έχει υλοποιηθεί ακόμη στη τρέχουσα σχολική χρονιά. Με τον προγραμματισμό της ύλης οι δραστηριότητες αυτές πρόκειται να γίνουν τον μήνα Μάρτιο. Περιμένουμε όμως τα παιδιά να ανταποκριθούν θετικά όπως έγινε και κατά την πραγματοποίηση της πρώτης φάσης με παρόμοιες δραστηριότητες. Σε αντίστοιχες δραστηριότητες που συμμετείχαν μαθητές Γυμνασίου πριν από δύο χρόνια αξίζει να αναφερθεί ότι, υπήρξαν μαθητές οι οποίοι παρόλο που στη διδασκαλία των μαθηματικών με τον παραδοσιακό τρόπο δηλαδή, τον πίνακα και το τετράδιο, παρουσίαζαν μειωμένη ανταπόκριση και μεγάλη δυσκολία, έδειξαν ιδιαίτερη προθυμία και ικανοποιητική επίδοση κατά την κατασκευή εικαστικών κατασκευών και τη δημιουργία αντικειμένων με τη βοήθεια του ηλεκτρονικού υπολογιστή (Γιαννόπουλος, Γώγου, 2009). Έχουμε παρατηρήσει ότι η σύνδεση των μαθηματικών με την τέχνη και ιδιαίτερα οι δραστηριότητες με σχήματα στο χαρτί και τον υπολογιστή, κινητοποιούν τους μαθητές και τους διευκολύνουν στην κατανόηση των εννοιών, την αναγνώριση των ιδιοτήτων των σχημάτων και στην εξαγωγή των συμπερασμάτων με τη μορφή γενικεύσεων και ιδιοτήτων. Υπάρχει έτσι μία καθολική συμμετοχή των μαθητών στις διδακτική διαδικασία και με τη συνεργασία των μαθητών κατά την διάρκεια ομαδικών εργασιών δημιουργείται ένα κλίμα επικοινωνίας και διαλόγου, ευνοϊκό για ανταλλαγή απόψεων και προβληματισμών. Παράλληλα, από την ενασχόληση των μαθητών με την τέχνη με αφορμή τα μαθηματικά, την παρουσίαση πολιτισμικών στοιχείων και την επίσκεψη σε χώρους πολιτισμού, προάγεται η αισθητική και πολιτιστική καλλιέργεια καθώς και επικοινωνία με κουλτούρες άλλων πολιτισμών.

Σε κάθε περίπτωση, η εμπλοκή των μαθητών με δραστηριότητες που μελετούν σχέσεις μεταξύ μαθηματικών και άλλων επιστημών, αναδεικνύοντας τις πολλές οπτικές γωνίες και επιστημονικές πλευρές ενός θέματος, επιτυγχάνει την καλλιέργεια αντίστοιχων δεξιοτήτων, δημιουργεί θετικές στάσεις για τα Μαθηματικά και συμβάλλει στη διαμόρφωση πολύπλευρης προσωπικότητας. Πιστεύουμε ότι η προσέγγιση αυτή σε συνδυασμό με τη χρήση των νέων τεχνολογιών και τη συμμετοχή των μαθητών σε εκπαιδευτικά προγράμματα Τέχνης και Μαθηματικών μπορεί να αποτελέσει μια διαθεματική παρουσίαση εννοιών σε μικρές τάξεις του Γυμνασίου για το σχολείο του μέλλοντος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αλαχιώτης Σταμάτης, (2002): «*Για ένα σύγχρονο εκπαιδευτικό σύστημα*». Περιοδικό *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων, 7. σελ.7-18,* Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Βανδουλάκης Ιωάννης, Καλλιγάς Χαράλαμπος, Μαρκάκης Νικηφόρος, Φερεντίνος Σπύρος, (2010):Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου. Αθήνα, Έκδοση ΟΑΕΔΒ.

Βοσνιάδου Στέλλα, (2001): Πως μαθαίνουν οι μαθητές, Διεθνές Γραφείο Εκπαίδευσης της UNESCO, ανακτήθηκε 20/06/2009 από τον παγκόσμιο ιστό: http://www.ibe.unesco.org/fileadmin/user_upload/archive/publications/EducationalPracticesSeriesPdf/prac07gr.pdf

Γιαννόπουλος Δημήτριος, Γώγου Άρτεμις, (2009): «*Μια διαθεματική προσέγγιση εικαστικών κατασκευών και των γεωμετρικών τους ιδιοτήτων με τη βοήθεια λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας*». Πρακτικά 26ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας Ε.Μ.Ε. σελ. 825-832. Θεσσαλονίκη.

Κολέζα Ευγενία (2000): *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*. Αθήνα, Εκδόσεις Leader Books.

Κολέζα Ευγενία (2009): *Θεωρία και Πράξη στη Διδασκαλία των Μαθηματικών*. Αθήνα, Εκδόσεις Τόπος.

Ματσαγγούρας Ηλίας (2002): «*Διεπιστημονικότητα, διαθεματικότητα και ενιαιοποίηση στα νέα προγράμματα σπουδών: Τρόποι οργάνωσης της σχολικής γνώσης*», Περιοδικό *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων,* τεύχος 7. σελ.19-36.

Σίγουρος Ιωάννης (2005). «*Το καλλιτεχνικό ρεύμα της Math Art. Εφαρμογές στη σχολική τάξη*». Περιοδικό *Εικαστική παιδεία,* τεύχος 21, σελ.97-101.

Σκούρας Αθανάσιος (2002): «*Εμπλουτίζοντας τη διδασκαλία των μαθηματικών με διαθεματικές προσεγγίσεις*». Περιοδικό *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων,* τεύχος 7. σελ.101-110.

Στράντζαλος Χρόνης (2010α): *«Πολιτισμική εξέλιξη και εξέλιξη της Γεωμετρίας».* Στη συλλογή *Η γεωμετρία και η Διδακτική της στη Σύγχρουη Εκπαίδευση*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη, σελ. 89-103.

Στράντζαλος Χρόνης (2010β): *«Η Γεωμετρία ως πολιτισμικό αγαθό και ως διδακτικό αντικείμενο στο Λύκειο».* Στη συλλογή: *Η γεωμετρία και η Διδακτική της στη Σύγχρουη Εκπαίδευση*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη, σελ. 169-180.

Τζίφας Νικόλαος, Γιαννόπουλος Δημήτριος, Βαρβιτσιώτης Δημήτρης, (2005): «*Μια έρευνα για την αποτύπωση των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης σύμφωνα με τη θεωρία επιπέδων van Hiele's.*» Πρακτικά 22ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας Ε.Μ.Ε. σελ. 721-733. Λαμία.

ΥΠΕΠΘ-ΠΙ (2003): (ΔΕΠΠΣ) *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών* (ΦΕΚ 303Β/13-03-2003) Αθήνα, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, ανακτήθηκε 20/06/2009 από τον παγκόσμιο ιστό: http://www.pi-schools.gr/programs/depps/

Φιλίππου Γιώργος, Χρίστου Κωνσταντίνου (2001). *Συναισθηματικοί Παράγοντες και Μάθηση των Μαθηματικών*. Αθήνα, Εκδόσεις Ατραπός.

Φλουρής Γεώργιος (2002): «*Αναζητώντας ένα νέο πλαίσιο διαμόρφωσης αρχών σχολικής μάθησης και διδασκαλίας: Επιπτώσεις στην εκπαιδευτική έρευνα*». Πρακτικά: *Πρακτικά επιμορφωτικού σεμιναρίου,* Αθήνα, Εκδόσεις *ΚΕΕ.*

Χιονίδου - Μοσκοφόγλου Μαρία (2002): «*Το Διαθεματικό Εννιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (ΔΕΠΠΣ) των Μαθηματικών στην Υποχρεωτική εκπαίδευση*». Περιοδικό *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων,* τεύχος 7. σελ.80-100.

Alperin Roger C. (2000): «*A mathematical theory of origami construction and numbers*». Περιοδικό *New York Journal of Mathematics,* τεύχος 6, σελ. 119-133.

Donaldson Margaret (1995). *Η σκέψη των παιδιών*. Αθήνα, Εκδόσεις Gutenberg.

Flato Moshe (1993). *Η ισχύς των Μαθηματικών*. Επιμέλεια Κυπριανίδης Τάσος. Αθήνα, Εκδόσεις Κάτοπτρο

Haga Kazuo (2002): «*Fold Paper and Enjoy Math: Origamics*». Στη συλλογή των πρακτικών Origami3 Third International Meeting of Origami Science, Math, and Education, Hull Thomas, editor.

Hull Thomas C. (2002): «*The Combinatorics of Flat Folds: A Survey*». Στη συλλογή των πρακτικών Origami3 Third International Meeting of Origami Science, Math, and Education, Hull Thomas, editor.

Kinsey Christine L., Moore Teresa E. (2002): *Symmetry, Shape, and Space An Introduction to Mathematics Through Geometry*. Emeryville CA, Key College Publishing

Resnick Lauren B. (1987): *«Learning in school and out»*. Περιοδικό *Educational Researcher,* τεύχος 16, σελ. 13-20.

Szinger John (2002): «*The Foldinator Modeler and Document Generator*» Στη συλλογή των πρακτικών Origami[3] Third International Meeting of Origami Science, Math, and Education, Hull Thomas, editor.

N.C.T.M. (2000): *The learning Principle*, retrieved 15/08/2009 from World Wide Web: *http://standardstrial.nctm.org/document/chapter2/learn.htm*

dimgiann@yahoo.com

kazpatr@gmail.com

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Φύλλο εργασίας 1 Ενότητα Β.2.1

1. Διπλώστε ένα φύλλο χαρτί Α4 στη μέση.

   Σχεδιάστε ένα σημείο Α στην μία περιοχή του χαρτιού και βρείτε το συμμετρικό του ως προς την ευθεία που δημιουργεί το τσάκισμα του χαρτιού. Ονομάστε το Α΄

   Γιατί τα σημεία Α και Α΄ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία της δίπλωσης;

   .....

2. Σχεδιάστε ένα άλλο σημείο Β και χωρίς να διπλώστε το χαρτί, μαντέψτε το συμμετρικό του σημείου Β ως προς την ευθεία δίπλωσης, το οποίο θα ονομάσετε Β΄.

   Πως μπορούμε να ελέγξουμε αν είναι συμμετρικά αυτά τα δύο σημεία;

   .....

3. Αν απομακρύνουμε το σημείο Β από την ευθεία του διπλώματος, τι πρέπει να συμβεί στο Β΄ ώστε να είναι πάλι συμμετρικό του Β;

   .....

4. Τι συμπέρασμα μπορείτε να γράψετε για δύο σημεία συμμετρικά ως προς την ευθεία της δίπλωσης;

   .....

5. Ενώστε τα σημεία Β και Β΄ με ένα ευθύγραμμο τμήμα. Τι συμπέρασμα μπορείτε να γράψετε για τα δύο συμμετρικά ως προς την ευθεία της δίπλωσης σημεία Β και Β΄ και το ευθύγραμμο τμήμα ΒΒ΄;

   .....

6. Ανοίξτε το αρχείο *SymA.*

7. Υπάρχει ένα σημείο Α μία ευθεία ε και ένα σημείο Α΄.

   - Ψάχνουμε ένα τρόπο για να βρούμε με ακρίβεια το συμμετρικό του ως προς την ευθεία ε. Μαντέψτε μία θέση για το Α΄, συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ε.

- Μετακινήστε τα δύο σημεία σε διάφορες θέσεις, ώστε να είναι πάντα συμμετρικά ως προς την ευθεία ε.
- Τι νομίζετε ότι πρέπει να μετρήσετε για να έχετε κάποιες πληροφορίες για τη συμμετρία των δύο σημείων;

.....

8. Σχεδιάστε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΑ΄. Ποια ιδιότητα νομίζετε ότι έχει το τμήμα όταν τα σημεία είναι συμμετρικά;

.....

Ελέγξτε την με τις εντολές του προγράμματος.

9. Με την συγκεκριμένη εντολή σχεδιάστε το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ε. Ονομάστε το Β. Συμπίπτει με το σημείο που είχατε μαντέψει; .....
Γιατί;.....

10. Σχεδιάστε τώρα το τμήμα που έχει άκρα τα δύο συμμετρικά σημεία Α και Β. Μετακινήστε το σημείο Α σε διάφορες θέσεις. Τι παρατηρείτε για το τμήμα ΑΒ;

.....

11. Σημειώστε με Ο το σημείο τομής του τμήματος με την ευθεία ε. Μετρήστε τις αποστάσεις του Ο από τα δύο σημεία Α και Β. Μετακινήστε το σημείο Α σε διάφορες θέσεις. Τι συμπέρασμα προκύπτει για τα μήκη ΟΑ και ΟΒ;

.....

Τι συμβαίνει όταν το Α είναι πάνω στη ευθεία ε;
.....

12. Ποιο είναι το μέτρο της γωνίας που σχηματίζει το τμήμα ΑΒ με την ευθεία ε;

.....

13. Πως θα πρέπει τελικά να σχεδιαστεί το Α΄ ώστε να είναι συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ε, χωρίς να χρειάζεται να το επαληθεύσουμε με δίπλωση του χαρτιού ή την εντολή του προγράμματος;

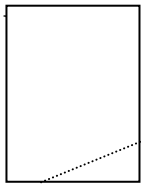
.....

14. Σχεδιάστε δύο συμμετρικά σημεία στο αρχικό χαρτί σας με τη χρήση των γεωμετρικών οργάνων.

Φύλλο εργασίας 2 Ενότητα Β.3.4

1η ώρα

1. Διπλώστε ένα φύλλο χαρτί Α4 στη μέση δύο φορές και κάνετε στην κεντρική γωνία όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Ξεδιπλώστε το χαρτί και σημειώστε τι σχήμα προέκυψε:

Σχήμα : .....

Κολλήστε το κομμένο χαρτί στο χαρτί του φόντου και ονομάστε τις κορυφές του.

2. Εντοπίστε και σχεδιάστε στο χαρτί του φόντου τους άξονες συμμετρίας του εσωτερικού σχήματος καθώς και τις ισότητες των στοιχείων του.

3. Ανοίξτε το αρχείο romvos.ggb

Σχεδιάστε με τα εργαλεία του προγράμματος το προηγούμενο σχήμα.

Μετακινήστε τα άκρα της «τομής», μετρήστε γωνίες και τμήματα του σχήματος που προέκυψε στο κέντρο.

Τι συμπέρασμα βγάζετε; .....

Ποια ιδιότητα έχουν οι διαγώνιες του ρόμβου; .....

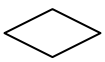
Έχετε κάποιο επιπλέον συμπεράσματα για το ρόμβο;

Συμπέρασμα: για τον ρόμβο προκύπτουν οι ιδιότητες:

4. Τι θα συνέβαινε αν με την αρχική «τομή» το τρίγωνο ήταν ισοσκελές;

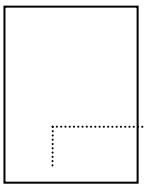
Πόσο είναι το μέτρο κάθε γωνίας του τετραπλεύρου; Αν χρειάζεται μετρήστε τη. .....

Συμπέρασμα:.....

	Κοινές ιδιότητες	Μη κοινές ιδιότητες
Ρόμβος 		
Τετράγωνο		

2η ώρα

1. Διπλώστε ένα φύλλο χαρτί Α4 στη μέση δύο φορές, κάνετε δύο κάθετες τομές στην κεντρική γωνία όπως φαίνεται στο σχήμα.



Ξεδιπλώστε το χαρτί και σημειώστε αν αναγνωρίζετε το σχήμα που προέκυψε. Σχήμα: ……

Κολλήστε το στο χαρτί του φόντου και ονομάστε τις κορυφές του εσωτερικού σχήματος.

2. Σημειώστε στο χαρτί του φόντου τους άξονες συμμετρίας του εσωτερικού σχήματος καθώς και τις ισότητες και τα χαρακτηριστικά των στοιχείων του νέου σχήματος.

Συμπέρασμα: σχήμα ……

Ιδιότητες: …… ……

3. Ανοίξτε το αρχείο orthog.ggb

Σχεδιάστε με τα εργαλεία του προγράμματος το προηγούμενο σχήμα των «τομών» και μετακινήστε τις τομές αυτές σε διάφορες θέσεις. Επιβεβαιώστε τα προηγούμενα συμπεράσματά σας για το ορθογώνιο που προέκυψε στο κέντρο της κατασκευής.

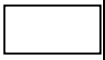
Υπάρχουν άξονες συμμετρίας στο σχήμα; Αν ναι πόσοι;

Πως πρέπει να σχηματιστούν οι δύο τομές ώστε το τελικό σχήμα στο κέντρο να είναι τετράγωνο; ……

Ποια επιπλέον ιδιότητα πρέπει να έχει το ορθογώνιο για να γίνει τετράγωνο;

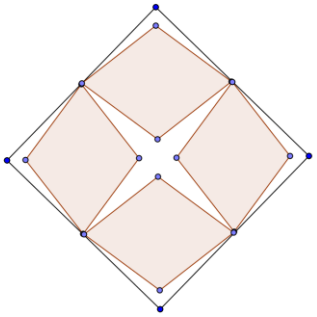
Πόσους άξονες συμμετρίας έχει το σχήμα τότε;……

Συμπέρασμα:

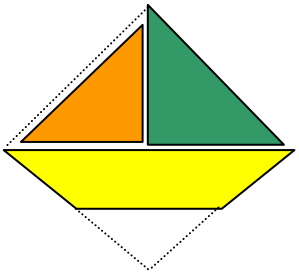
	Κοινές ιδιότητες	**Μη κοινές ιδιότητες**
Ρόμβος		
Ορθογώνιο 		
Τετράγωνο		

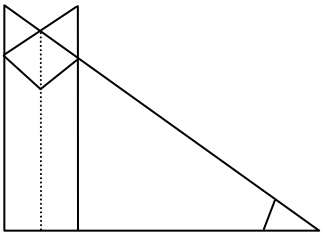
Επεκτάσεις για την 3η ώρα

1. Μπορούμε να κόψουμε κατάλληλο σχήμα σε διπλωμένο χαρτί ώστε στη μέση να σχηματιστεί (α) παραλληλόγραμμο (β) τραπέζιο;
2. Πως μπορούμε από ένα τρίγωνο ΑΒΓ να κατασκευάσουμε ένα παραλληλόγραμμο; Δοκιμάστε σε ένα νέο φύλλο Geogebra.
3. Με πόσες διπλώσεις και κόψιμο ποιού σχήματος μπορούμε να δημιουργήσουμε το παρακάτω σχήμα;



4. Προσπαθήστε να κατασκευάσετε τα επόμενα σχήματα οριγκάμι σε ένα νέο φύλλο Geogebra ξεκινώντας από το βασικό ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο ή το τετράγωνο με συμμετρίες και τομές.





ΧΡΗΣΗ ΛΟΓΙΣΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΚΙΝΟΥΜΕΝΩΝ ΣΧΕΔΙΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ

Βασίλης Τσίτσος & Χαρούλα Σταθοπούλου

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Παιδαγωγικό Τμήμα Ειδικής Αγωγής

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε μια προσπάθεια να κάνουμε ορατή την επικοινωνία ανάμεσα σε μαθηματικά και τέχνη και να ενθαρρύνουμε τους μαθητές να αναπτύξουν τη δημιουργικότητά τους, τους εμπλέξαμε στη διαδικασία δημιουργίας κινουμένων σχεδίων. Οι μαθητές —εργαζόμενοι σε κοινότητες πρακτικής— κατασκεύασαν κινούμενα σχέδια χρησιμοποιώντας δυο διαφορετικής φύσης εκπαιδευτικά λογισμικά. Στην παρουσίαση αυτή φωτίζονται τόσο η σχεδιαστική πρόθεση του εκπαιδευτικού- ερευνητή όσον αφορά στους μαθηματικούς στόχους, όσο και οι περιορισμοί που θέτουν τα περιβάλλοντα σχεδιασμού, ως συμβολικά συστήματα, για την υλοποίηση των κινούμενων σχεδίων.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η δραστηριότητα της σχεδίασης παρατηρείται σε κάθε κουλτούρα και αφορά στα αντικείμενα, τα τεχνουργήματα (artifacts) και την τεχνολογία που δημιουργούνται για διάφορες ανάγκες της ομάδας —όχι πάντα πρακτικές— ενώ είναι πάντα συνάρτηση και των διαθεσίμων υλικών (Bishop, 1988). Συχνά η διαδικασία σχεδίασης και η κατασκευή που τεχνουργήματος που εξυπηρετεί το σχεδιασμό αναπτύσσονται αμοιβαία.

Η διερεύνηση του ρόλου των εργαλείων— αλλά και η μετατροπή τους— όταν χρησιμοποιούνται για την εκτέλεση συγκεκριμένων δραστηριοτήτων αποτελεί σήμερα μια σημαντική ερευνητική περιοχή τόσο στον τομέα των ΤΠΕ όσο και της διδακτικής των μαθηματικών.

Στην παρούσα εργασία διερευνούμε τον τρόπο με τον οποίο μαθητές, με τη διαμεσολάβηση του εκπαιδευτικού, χρησιμοποιούν και μετασχηματίζουν τα διαθέσιμα εργαλεία με σκοπό τη δημιουργία κινουμένου σχεδίου. Φωτίζουμε τη διαφορετική διαχείριση του ίδιου προβλήματος από διαφορετικές κοινότητες μαθητών.

Οι κοινότητες στις οποίες αναφερόμαστε είναι μια κοινότητα μαθητών Α' και Β ' Γυμνασίου που δραστηριοποιείται στο πλαίσιο περιβαλλοντικού προγράμματος και λειτουργεί ως μια κοινότητα μάθησης/πρακτικής (Wenger, 1998), καθώς και μια σχολική τάξη Β' Λυκείου. Οι μαθητές χρησιμοποιώντας δυο διαφορετικής φύσης λογισμικά, το ένα δυναμικής γεωμετρίας (Geometer Sketspand) και το άλλο συμβολικής έκφρασης (Microworld pro) δημιούργησαν κινούμενα σχέδια. Η αλληλεπιδραστική διαδικασία —συνεργατικό πλαίσιο διδασκαλίας— καθώς και η χρήση των συγκεκριμένων λογισμικών διαμόρφωσαν συνθήκες σκαλωσιάς (scaffolding) για τη μάθηση συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών. Ταυτόχρονα έγιναν φανεροί και οι περιορισμοί που συνδέονται με τη φύση και τα χαρακτηριστικά κάθε λογισμικού αναδεικνύοντας το διαμεσολαβητικό ρόλο του εργαλείου στην κατασκευή μαθηματικής γνώσης και τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες ένα εργαλείο μετατρέπεται σε όργανο —εργαλειακή γένεση (instrumental genesis)— για κάθε άτομο ξεχωριστά αλλά και για την ομάδα.

2. ΟΙ ΔΥΟ ΚΟΥΛΤΟΥΡΕΣ: ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΗ

Ο Snow στη διάλεξή του το 1959 με θέμα «οι δυο κουλτούρες», αντιπαραθέτοντας την κουλτούρα της επιστήμης και της λογοτεχνίας, ανέδειξε τη διάσταση ανάμεσα στον επιστημονικό λόγο και το λόγο της τέχνης και των γραμμάτων.

Όπως παρατηρεί ο Stepahn Collini (Snow, 1995, σ.13), στην εισαγωγή για τη δημοσίευση της παραπάνω διάλεξης, ο προβληματισμός γύρω από το διαχωρισμό ανάμεσα στις «δυο κουλτούρες» ουσιαστικά ανάγεται στο 19ο αιώνα, αν και από την *ελληνική αυγή της δυτικής σκέψης* εμφανίζονται ως διακριτά πεδία στην ανθρώπινη γνώση. Επίσης αναφέρεται στο γεγονός ότι αρκετοί στοχαστές έχουν εκφράσει την αγωνία τους για τους κινδύνους που προκύπτουν όταν μια γνωστική περιοχή τείνει να γίνει είτε απειλητικά κυρίαρχη είτε εντελώς απροσπέλαστη.

Ο Snow (1995, 169), μεταγενέστερα, αναστοχαζόμενος πάνω στο αρχικό κείμενο της διάλεξης μιλάει για την ανάγκη επικοινωνίας αυτών των δύο πεδίων εστιάζοντας ταυτόχρονα στον ευρύτερο κοινωνικό ρόλο και των δυο πεδίων: της επιστήμης και της τέχνης. «*….με λίγη καλή τύχη, θα μπορέσουμε να εκπαιδεύσουμε τα καλύτερα μυαλά μας, ώστε να μην αγνοούν τη φαντασιακή εμπειρία, τόσο στις τέχνες όσο και στις επιστήμες, να μην αγνοούν ούτε τις χάρες της εφαρμοσμένης επιστήμης και τα ιάσιμα δεινά των περισσοτέρων συναυθρώπων τους ούτε τις ευθύνες, τις οποίες, από τη στιγμή που θα τις συνειδητοποιήσουν δε θα μπορέσουν να τις αρνηθούν*». Στο κλείσιμο του στοχασμού του, δηλαδή, επισημαίνει τη σημασία της αλληλοτροφοδότησης των δυο πεδίων ώστε να αλληλοπληροφορούνται αλλά και να πληροφορούν και μια κοινωνική συνείδηση.

3. ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΤΗΤΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΤΕΧΝΗ

Σήμερα ο ρόλος της τέχνης στη μαθηματική εκπαίδευση, και κυρίως πώς η τέχνη, σε διάφορες εκφράσεις της, πληροφορεί τη διδασκαλία/μάθηση των μαθηματικών, έχει γίνει συνείδηση σε ένα μεγάλο μέρος της επιστημονικής κοινότητας όπως αποτυπώνεται σε μια σειρά σχετικών ερευνών[1].

Η παρουσίαση μαθηματικών εννοιών μέσα σε ένα διεπιστημονικό[2] πλαίσιο φαίνεται να είναι ένας φυσικός τρόπος προσέγγισης των μαθηματικών καθώς μεταξύ άλλων (Καλαβάσης, 2008):

- Οι μαθηματικές έννοιες ή τεχνικές έχουν διεπιστημονική προέλευση
- Τα μαθηματικά αλληλεπιδρούν με τις άλλες επιστήμες
- Είναι διεπιστημονική η φύση της ανθρώπινης νοημοσύνης και της διαδικασίας μάθησης

1 Βλ. σ αυτά τα πρακτικά την εργασία: Κοταρίνου, Σταθοπούλου, 'ένα πανόραμα από τις έρευνες για την αξιοποίηση των τεχνών στη διδασκαλία των Μαθηματικών'.

2 Δε θα εμπλακούμε για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας στο διάλογο ανάμεσα σε διαθεματικότητα και διεπιστημονικότητα, μια συζήτηση ανοιχτή στην κοινότητα που ξεπερνάει όμως τους στόχους της παρούσας εργασίας.

- Ευνοείται η βιωσιμότητα της μάθησης των σχολικών μαθηματικών.

Στη συζήτηση σχετικά με το τι συνιστά τέχνη δε φαίνεται να υπάρχει κοινή παραδοχή, όπως παρατηρεί ο Gomrich (1950) Η λέξη "τέχνη" σημαίνει πολύ διαφορετικά πράγματα σε διαφορετικούς καιρούς και τόπους: δεν υπάρχει τέχνη με Τ κεφαλαίο υπάρχουν μόνο καλλιτέχνες (Gomrich, 1950). Η περιπλοκότητα αυξάνεται όταν προσπαθήσουμε να μιλήσουμε για τη σχέση μεταξύ μαθηματικών και τέχνης και μάλιστα με στόχο την εξυπηρέτηση διδακτικών και μαθησιακών αναγκών.

Θα μπορούσαμε να αναφέρουμε εδώ, ενδεικτικά, κάποιες εκδοχές αλληλεπίδρασης μαθηματικών και τέχνης:

- Τα μαθηματικά ως υποστηρικτικό εργαλείο τέχνης. Π.χ. πώς οι μαθηματικοί κανόνες της προοπτικής στην Αναγέννηση εξυπηρετούν την απαγορευμένη τρισδιάστατη σχεδίαση.
- Τα μαθηματικά ως δομικό-εννοιολογικό στοιχείο έργων τέχνης. Π.χ. η περίπτωση του πίνακα του Dali, "ο Εσταυρωμένος" όπου στο έργο του χρησιμοποιεί την έννοια της 4ης διάστασης ενταγμένη με ένα λειτουργικό τρόπο.
- Τα μαθηματικά ως εννοιολογικό και διαδικαστικό στοιχείο στην τέχνη. Μια σειρά μελετών έχουν δει από αυτή τη σκοπιά το έργο του Escher.
- Η τέχνη σαν εργαλείο ανακάλυψης μαθηματικών εννοιών. Π.χ. το μονόχορδο του Πυθαγόρα.

Στον τρόπο ενσωμάτωσης τώρα της τέχνης, κυρίως εικαστικής, στη διδασκαλία θα μπορούσαμε να αναφέρουμε τις παρακάτω εκδοχές:

- Η τέχνη ως εφόρμηση για τη διδασκαλία των μαθηματικών (Ψάχνοντας για Pattern)
- Αποκωδικοποίηση έργων τέχνης που ενσωματώνουν μαθηματικές δομές με ταυτόχρονη ανασκευή των εικόνων σε ψηφιακό (απτικό) περιβάλλον (π.χ. Σχεδιάζοντας εικόνες του Escher ή του *Vasarely*)
- Λειτουργική σύνδεση μαθηματικών δομών με έργα τέχνης. Για παράδειγμα (αρμονικά συζυγή σημεία - χρυσή τομή στην κατασκευή του Παρθενώνα)

Στη συγκεκριμένη εργασία αυτό που παρουσιάζεται ίσως ως καινοτομία είναι ότι εκλαμβάνουμε αυτή καθαυτή την παραγωγή μαθηματικών εννοιών ως τέχνη. Βλέπουμε την κατασκευή των κινουμένων σχεδίων από τους μαθητές ως τέχνη και έκφραση δημιουργικότητας με την έννοια ότι οι μαθητές με τεχνικές αντίστοιχες ενός καλλιτέχνη κατασκευάζουν τη γνώση τους. Γίνονται

δημιουργικοί, γίνονται καλλιτέχνες με την έννοια ότι χρησιμοποιούν εργαλεία και υλικά τα οποία τροποποιούνται και μεταποιούνται με σκοπό την υπέρβαση της πραγματικότητας —μια διαφορετική αναπαράσταση της πραγματικότητας.

Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές και ο εκπαιδευτικός στο συγκεκριμένο πλαίσιο: χρησιμοποιούν εργαλεία, "συμμορφώνονται" (*instrumentation.*) με τους περιορισμούς των εργαλείων και συνάμα τα τροποποιούν *(instrumentalisation),* τα μεταποιούν (αλλάζοντας τις συμβολικές αντιστοιχίσεις) με σκοπό να υπερβούν την πραγματικότητα (ανθρώπινο βάδισμα-εναλλαγή εικόνων) παρουσιάζοντας έτσι μια "δική τους ματιά" που πολλές φορές το προϊόν τους γίνεται ορατό (boundary object) και διαμοιράζεται στα άλλα μέλη της κοινότητας.

4. ΤΕΧΝΟΥΡΓΗΜΑΤΑ (ARTIFACTS) ΚΑΙ ΕΡΓΑΛΕΙΑ (INSTRUMENTS)

Όπως αναφέρεται στη βιβλιογραφία (Artigue, 2010, σ. 1171; Guin, Ruthven, & Touches, 2004) οι ερευνητές γίνονται όλο και πιο ευαίσθητοι γύρω από τις εργαλειακές προσεγγίσεις (*instrumental approaches)* (Verillon and Rabardel, 1995) για τη μαθηματική εκπαίδευση, δηλαδή, τη διαδικασία της εργαλειοποίησης (*instrumentalisation)* και της εργαλειακής χρήσης (*instrumentation),* η οποία μετασχηματίζει ένα τεχνούργημα (artefact) σε εργαλείο (*instrument)* μαθηματικής εργασίας. Αυτή η προσέγγιση συνδυάζει τα θεωρητικά πλαίσια των Piaget και Vygotsky.

Η εργαλειακή προσέγγιση βασίζεται στη διάκριση μεταξύ του τεχνουργήματος και του εργαλείου. Ο όρος *artefact* περιγράφει ένα ανθρώπινο τεχνούργημα είτε υλικό είτε συμβολικό. Ο όρος instrument περιγράφει μια μεικτή οντότητα τεχνουργηματικού τύπου με στοιχεία τα οποία περιγράφονται ως σχήματα χρήσης (*utilization schemes)* (Trouche, 2005) και δηλώνουν τη λειτουργική αξία του εργαλείου για το άτομο. Αυτά τα σχήματα αφορούν στις στρατηγικές που αναπτύσσονται από το άτομο με σκοπό να φέρει σε πέρας ένα συγκεκριμένο έργο, με το συγκεκριμένο εργαλείο. Τα σχήματα χρήσης σχηματίζονται σταδιακά με τη χρήση του τεχνουργήματος. Έτσι το εργαλείο είναι μια διανοητική κατασκευή του ατόμου και έχει ψυχολογική υπόσταση. Η διαδικασία μετατροπής ενός τεχνουργήματος σε εργαλείο είναι αυτό που ονομάζεται εργαλειακή γένεση (*instrumental genesis).* Αυτή η μετατροπή σχηματοποιείται από δυο αλληλοσχετιζόμενες διαδικασίες: αυτή της εργαλειακής χρήσης (*instrumentation),* (όπου το τεχνούργημα διαμορφώνει την δραστηριότητα του χρήστη) και της εργαλειοποίησης (*instrumentalisation*) (το τεχνούργημα διαμορφώνεται από την δραστηριότητα του χρήστη).

Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας της εργαλειακής γένεσης ο ρόλος του εκπαιδευτικού αποδεικνύεται πρωταρχικής σημασίας. Ο Trouche (2004) εισάγει τον όρο εργαλειακή ενορχήστρωση (*instrumental orchestration)*, για να περιγράψει το πως ο εκπαιδευτικός διαχειρίζεται τα ατομικά εργαλεία με στόχο να υποστηρίξει τη συλλογική διαδικασία μάθησης.

Ο Trouche ορίζει την εργαλειακή ενορχήστρωση (instrumental orchestration) ως σκόπιμη και συστηματική διαδικασία με στόχο να οργανωθούν τα διάφορα αντικείμενα τα οποία είναι διαθέσιμα για ένα συγκεκριμένο έργο. Αναφέρεται σε δυο τρόπους οργάνωσης και τους ονομάζει διδακτική μορφοποίηση (*didactic configuration)* και τρόπο αξιοποίησης (*exploitation mode)*. Ο πρώτος αφορά στην επιλογή και τη διάταξη των αντικειμένων για το έργο, ενώ ο δεύτερος αναφέρεται στις αποφάσεις που λαμβάνονται από το δάσκαλο για το πώς τα ευρήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίτευξη των μαθησιακών στόχων. Ο Drijvers και οι συνεργάτες του (2010) εισάγουν ένα τρίτο τρόπο οργάνωσης, που τον ονομάζουν διδακτική επιτέλεση (*didactical performance)*, προκειμένου να τονιστούν οι ad hoc αποφάσεις που λαμβάνονται κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Σύμφωνα με αυτήν την άποψη η εργαλειακή ενορχήστρωση αποσκοπεί στην εργαλειακή γένεση που αφορά τους μαθητές, αλλά ταυτόχρονα προκαλεί και εργαλειακή γένεση για τον εκπαιδευτικό/ ερευνητή τόσο κατά τη διαδικασία της σκόπιμης προετοιμασίας για την διδακτική παρέμβαση, όσο και κατά τη διάρκεια που εξελίσσεται αυτή.

5. ΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Τα ερευνητικά δεδομένα που παρουσιάζονται σ' αυτή την εργασία, προέκυψαν από έρευνα σε μια κοινότητα μαθητών Α΄ και Β΄ Γυμνασίου, καθώς και από μια σειρά πειραματικών διδασκαλιών σε μαθητές Β΄ Λυκείου.

Το κεντρικό ερευνητικό ερώτημα αφορούσε στη μελέτη μεταβάσεων ανάμεσα σε μικρο-πλαίσια μαθηματικών πρακτικών. Τα μικρο-πλαίσια καθορίστηκαν από τη χρήση διαφορετικών εκπαιδευτικών λογισμικών και απτικού υλικού. Η έρευνα καταδεικνύει την παραγωγική αλληλεπίδραση εργαλείων τα οποία χρησιμοποιούνται για την επίτευξη συγκεκριμένων έργων. Ταυτόχρονα προσφέρει ένα πλαίσιο παρατήρησης της μεταφοράς γνώσης και δεξιοτήτων από το ένα μικρο-πλαίσιο στο άλλο.

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο περιβαλλοντικού προγράμματος με τίτλο "*Περιβαλλοντικές Διαδρομές μέσα από τα Μαθηματικά και την Τεχνολογία*" όπου συμμετείχαν 24 μαθητές, 13 της Α΄ Γυμνασίου και 14 της Β΄ Γυμνασίου, δύο εκπαιδευτικοί και ο ερευνητής με ρόλο συμμετοχικού

παρατηρητή. Οι συναντήσεις πραγματοποιούνταν στην αίθουσα υπολογιστών και είχαν διάρκεια δυο ώρες κάθε εβδομάδα για ένα σχολικό έτος.

Οι πέντε πειραματικές διδασκαλίες πραγματοποιήθηκαν σε αίθουσα υπολογιστών εντός του ωρολογίου προγράμματος στο μάθημα των μαθηματικών κατεύθυνση Β΄ Λυκείου σε 15 μαθητές. Η ερευνητική πρόθεση ήταν να παρατηρήσουμε αν η εισαγωγή εργαλείων σε μια τάξη Λυκείου στη προκειμένη περίπτωση, εργαλείου δυναμικής γεωμετρίας, θα μπορούσε να ενθαρρύνει τους μαθητές να αλλάξουν την εικόνα τους για τη φύση των μαθηματικών. Να δουν, δηλαδή, τα μαθηματικά όχι απλώς ως ένα σύνολο ορισμών -τύπων και σχέσεων αλλά να τα ενσωματώσουν σε διάφορες όψεις της εμπειρίας τους.

Σ΄ αυτό το άρθρο παρουσιάζουμε μέρος των ερευνητικών δεδομένων τόσο από την έρευνα, όσο και τις πειραματικές διδασκαλίες που αφορούν στο σχεδιασμό κινουμένου σχεδίου.

Η παρέμβαση στις δυο διαφορετικές κοινότητες βασίστηκε στη θεωρία του constructionism όπου θεωρεί ότι η μάθηση προκύπτει μέσα από την κατασκευή, (learning-by-making) (Halel &Papert, 1991). Μεθοδολογικά, χρησιμοποιήθηκαν εθνογραφικές τεχνικές, καθώς και τεχνικές του διδακτικού πειράματος (Chronaki, 2008).

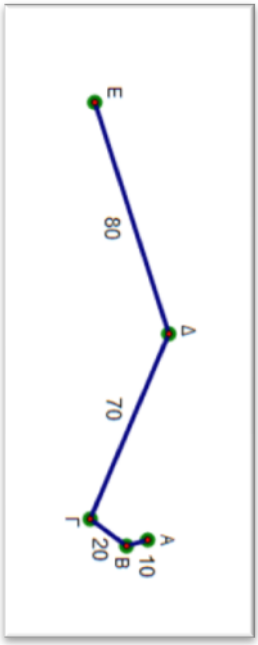
6. ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΠΕΙΣΟΔΙΩΝ

Στη συνέχεια περιγράφονται ενδεικτικά επεισόδια που σχετίζονται τόσο με τα χρησιμοποιούμενα εργαλεία όσο και με τις κοινότητες που τα χρησιμοποιούν με στόχο να φωτίσουν πτυχές της εργαλειακής γένεσης.

Α΄ Κοινότητα: Μαθητές Α΄και Β΄ Γυμνασίου

Στόχος του αρχικού σχεδιασμού ήταν οι μαθητές να πραγματοποιήσουν τη μοντελοποίηση του ανθρώπινου βαδίσματος με τη χρήση εκπαιδευτικών λογισμικών και να αναδειχθεί έτσι ο τρόπος με τον οποίο αυτοί αντιλαμβάνονται μαθηματικές έννοιες σχετικές με τη μέτρηση, την αναλογία, την σμίκρυνση και τη μεγέθυνση.

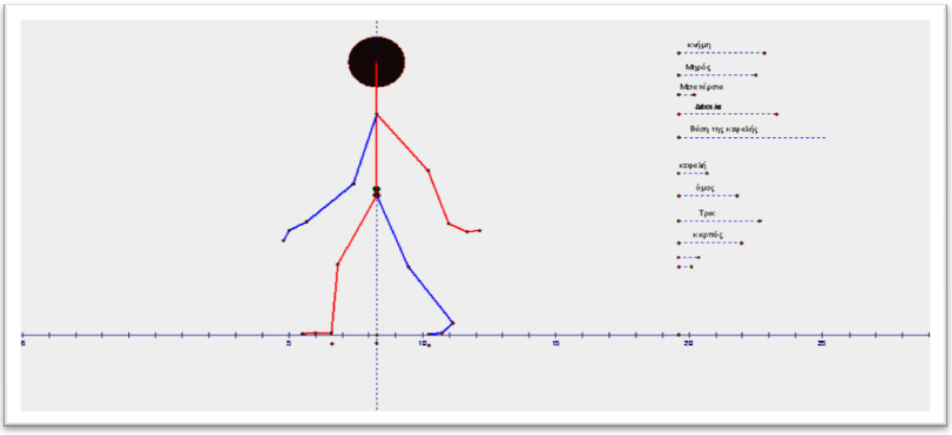
α. Συλλογή δεδομένων και αρχικός σχεδιασμός



Στην δραστηριότητα αυτή οι μαθητές εμπλέκονται στη διαδικασία καταγραφής των δεδομένων που είναι απαραίτητα για την προσομοίωση. Για το σκοπό αυτό προτείνεται στις ομάδες των μαθητών να σχεδιάσουν με μολύβι και χαρτί ή να αποτυπώσουν σε ψηφιακό μέσο ένα ανθρώπινο πόδι βασιζόμενοι στις δικές τους διαστάσεις. Στη συνέχεια η κάθε ομάδα απευθυνόμενη στην τάξη ανακοινώνει το αποτέλεσμα του σχεδιασμού. Από τη συζήτηση στο πλαίσιο της τάξης και τη δική μας διαμεσολάβηση τέθηκαν θέματα που αφορούσαν στη μελέτη των θέσεων τόσο των κομβικών σημείων των αρθρώσεων όσο και των μελών του άκρου. Στην παραπάνω παρουσιάζουμε μια αποτύπωση του άκρου από μαθητές Β' Γυμνασίου. Τα σημεία Ε, Δ, Γ, Β αντιστοιχούν στις αρθρώσεις του ισχίου, του γόνατου, στην ποδοκνημική άρθρωση, καθώς και στην άρθρωση που ενώνει τα μετατάρσια με τα δάκτυλα. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΔ, ΔΓ, ΓΒ, ΒΑ αντιστοιχούν στα οστά του Μηρού, της Κνήμης τα Μετατάρσια και τα Δάκτυλα. Σε αυτά τα οστά αντιστοιχούν 80,70, 20, 10 μονάδες μέτρησης μήκους.

β. Σχεδιασμός πειραματικού μοντέλου σε περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας

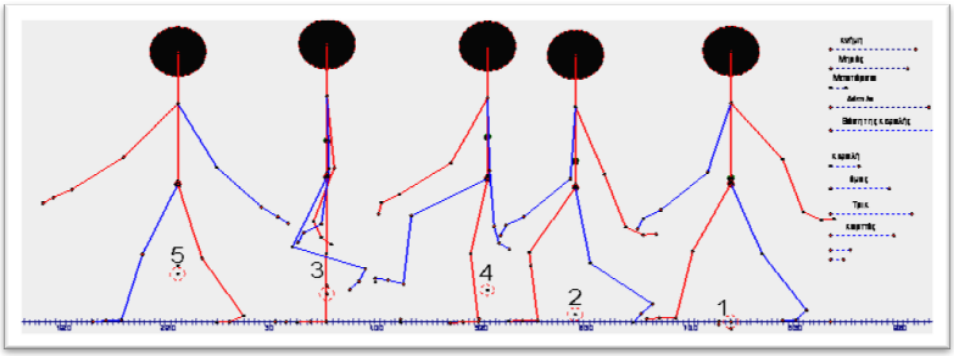
Η δυσκολία υλοποίησης από τους μαθητές σχεδίων που να λαμβάνουν υπόψη όλα τα μέλη του ανθρώπινου σώματος, τα οποία συμμετέχουν στη διαδικασία του βαδίσματος, έγινε αφορμή για το σχεδιασμό ενός πειραματικού παραμετρικού μικρόκοσμου που φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Στο μικρόκοσμο αυτό ενθαρρύναμε τους μαθητές να προσαρμόζουν τις μετρήσεις τους.



Είχαν την ευκαιρία να μεταβάλλουν δυναμικά τις αρθρώσεις των μελών, καθώς και τα μήκη τους, ώστε να έχουν τη δυνατότητα να σχεδιάσουν τις επιθυμητές αναλογίες καθώς και να τοποθετήσουν τα ανθρώπινα μέλη σε κατάλληλες θέσεις ώστε να προκύπτει μια χαρακτηριστική στάση από τη διαδικασία του βαδίσματος.

γ. Σχεδιάζοντας στάσεις που να οπτικοποιούν στιγμιότυπα της κίνησης του ανθρώπινου σώματος

Στη συνέχεια έγινε φανερή η ανάγκη δημιουργίας κατάλληλων διαφορετικών στάσεων που όταν προβάλλονται διαδοχικά να δίνουν την αίσθηση της κίνησης.Η τροφοδότηση του μικρόκοσμου με στοιχεία που προέκυπταν απο τους πειραματισμούς των μαθητών, οι οποίοι παρατηρούσαν το βάδισμα των συμμαθητών τους, καθώς και η κατάλληλη χωροθέτηση των μελών είχε σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία πέντε διαφορετικών στάσεων, χαρακτηρηστικών του ανθρώπινου βαδίσματος, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.



δ. Συγχρονισμός των στάσεων

Το υλικό που συνδημιουργήθηκε απο τους μαθητές με τη διαμεσολάβηση των εκπαιδευτικων συζητήθηκε και μοιράστηκε στην κοινότητα με σκοπό να συγχρονιστούν με κατάλληλο τρόπο τα παραπάνω στιγμιότυπα ώστε να αποδίδουν σωστά την κίνηση του ανθρώπινου σώματος. Οι μαθητές εργάστηκαν κατά τη διάρκεια τριών συναντήσεων με το λογισμικό Microworld pro και προέκυψαν δυο διαφορετικοί τρόποι αντιμετώπισης του προβλήματος.

Α' περίπτωση

Παραθέτουμε ένα αρχείο εργασίας που προέκυψε από μια ομάδα τριών μαθητών της Β' τάξης. Οι μαθητές εργάστηκαν μόνοι τους για μια διδακτική ώρα. Στην επόμενη συνάντηση το προϊόν τους έγινε αντικείμενο συζήτησης με αποτέλεσμα να διαμορφωθεί στη μορφή που περιγράφουμε. Οι μαθητές αντλώντας δεδομένα από τον πειραματικό μικρόκοσμο σχεδίασαν τρεις διαφορετικές στάσεις με τη χρήση μιας χελώνας όπως φαίνονται στις παρακάτω εικόνες. Καθώς η χελώνα μετατοπίζεται αφήνει ένα ίχνος. Με κατάλληλες εντολές δημιουργήθηκαν αυτές οι τρείς τεθλασμένες γραμμές. Στη συνέχεια με την εκτέλεση του προγράμματος "κίνηση" οι τρεις αυτές στάσεις εμφανίζονται διαδοχικά και συνεχώς δίνοντας την αίσθηση του βαδίσματος.

Στάση1 Στάση2 Στάση3

Η Κάθε στάση, καθώς και η διαδοχική προβολή των στάσεων, δημιουργήθηκαν με τη σύνταξη τεσσάρων διαφορετικών διαδικασιών χρησιμοποιώντας τη γλώσσα προγραμματισμού Logo. Παρακάτω παρατίθενται οι τέσσερεις διαδικασίες.

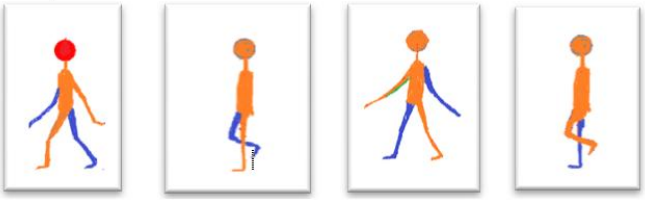
Σταση1	Σταση2	Σταση3	κινηση
για σταση1 x1, στκ αρ 90 μπ 10 δε 80 μπ 20 δε 65 μπ 70 αρ 30 μπ 80 δε 130 μπ 80 μπ 70 αρ 70 μπ 30 αρ 90 τέλος	για σταση2 x1, στκ δε 20 μπ 30 δε 30 μπ 70 αρ 15 μπ 80 δε 121 μπ 80 δε 25 μπ 70 αρ 90 μπ 30 τέλος	για σταση3 πι 30 αρ 90 μπ 150 δε 145 μπ 80 δε 110 μπ 70 αρ 60 μπ 30 τέλος	για κινηση x1, σταση1 δε 5 στα αρ 90 μπ 170 δε 90 περιμενε 4 σβήσε σταση2 περιμενε 4 σβήσε σταση3 περιμενε 4 πι 30 δε 60 πι 70 αρ 110 πι 80 αρ 145 πι 150 δε 90 μπ 30 αρ 91 σβήσε κινηση τελος

Η ανάγκη να σμικρύνουν τα στιγμιότυπα ώστε να παρατηρούν περισσότερους βηματισμούς στο πλαίσιο της οθόνης οδήγησε τους μαθητές να μετατρέψουν τις διαδικασίες σε παραμετρικές. Ενδιαφέρον παρουσίασαν οι διαφορετικοί τρόποι προσέγγισης των μαθητών για την επίτευξη των αυξομειώσεων. Η δική μας διαμεσολάβηση επικεντρώθηκε στο να εισάγουμε την έννοια της μεταβλητής και να υποστηρίξουμε τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν στις διαδικασίες όσο το δυνατόν λιγότερες μεταβλητές. Ένας τέτοιος προσανατολισμός οδήγησε τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν έννοιες σχετικές με τα ανάλογα ποσά, τις κλίμακες και τους τελεστές.

Β΄ περίπτωση

```
για κινηση
θέσεΣχήμα 14
περίμενε 5
μπ 70
θέσεΣχήμα 8
περίμενε 5
μπ 50
θέσεΣχήμα 7
περίμενε 5
μπ 50
θέσεΣχήμα 15
περίμενε 5
μπ 50
κινηση
τέλος
```

Δύο ομάδες εργασίας Α΄ Γυμνασίου βάσισαν τη σύνθεση του κινουμένου σχεδίου στις φιγούρες που σχεδιάστηκαν στον πειραματικό μικρόκοσμο. Με μεταφορά των εικόνων στο λογισμικό της ζωγραφικής και με κατάλληλη επεξεργασία οδήγησαν τις εικόνες στο περιβάλλον του λογισμικού Microword pro. Μετά από πολλούς



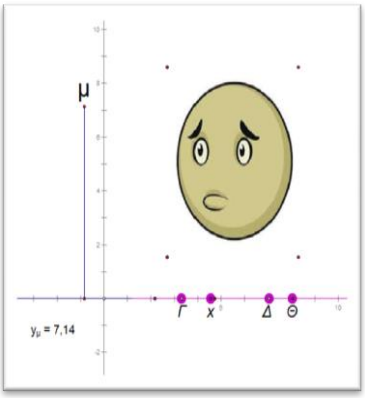
πειραματισμούς και έναν έντονο διάλογο σχετικά με τις τεχνικές που πρότειναν για την επίτευξη της κίνησης οδηγήθηκαν στην σύνταξη της διαδικασίας *'κίνηση'*. Το ενδιαφέρον στο διάλογο που αναδύθηκε ήταν η απαίτηση ενός μαθητή να χρησιμοποιήσει για την μεταφορά των εικόνων *'εντολές θέσης'* βασισμένες στο σύστημα συντεταγμένων που θα του επέτρεπαν να τοποθετήσει με ακρίβεια τις εικόνες σε επιθυμητή θέση, ενώ δυο μαθητές υποστήριζαν ότι μπορούν με μεγαλύτερη ευκολία να προσαρμόσουν τη ακριβή ροή των εικόνων με δοκιμαστικές μετακινήσεις.

Β΄ Κοινότητα: Μαθητές Β΄ Λυκείου

Στο πλαίσιο πειραματικών διδασκαλιών μαθητές της Β΄ τάξης Λυκείου δραστηριοποιούνται σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας με στόχο το σχεδιασμό μικρόκοσμου που α υποστηρίζει τη διαδοχική αλλαγή των εικόνων με σκοπό να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο κινουμένου σχεδίου. Οι προσπάθειές τους συζητούνται σε επίπεδο τάξης και τελικά οδηγούνται στη λύση του προβλήματος με αλγεβρικό-γεωμετρικό τρόπο. Ως παράδειγμα παρουσιάζουμε την εναλλαγή των τριών εικόνων όπως φαίνεται παρακάτω.

Εικ. 1 Εικ. 2 Εικ.3

Η πραγματοποίηση αυτής της αλλαγής συνδέεται με τη θέση ενός σημείου Χ σε σχέση με τρία συγγραμμικά σημεία Γ, Δ, Θ. Όταν το σημείο Χ βρίσκεται ανάμεσα από τα σημεία Γ, Δ εμφανίζεται η "εικόνα 1", όταν το σημείο Χ βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία Δ, Θ τότε εμφανίζεται η εικόνα 2, ενώ όταν τη σημείο Χ βρίσκεται δεξιά από το σημείο Θ επανεμφανίζεται η "εικόνα 1" δίνοντας την αίσθηση ότι το προσωπάκι ανοιγοκλείνει το μάτι.



Η λογική αυτής της δραστηριότητας έγινε αφορμή να γίνει εισαγωγή των κλαδικών συναρτήσεων καθώς και να υλοποιηθεί με αλγεβρικό-γεωμετρικό τρόπο η λογική εντολή if .

7. ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Για την έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση αλλά και τη διδασκαλία είναι σημαντικός στόχος η βελτίωση των εμπειριών αυτών που μαθαίνουν και αυτών που διδάσκουν μαθηματικά. Φαίνεται η συνύπαρξη μαθηματικών και τέχνης να προσφέρει στους μαθητές κατά την εκπαιδευτική διαδικασία, σε πολλαπλά επίπεδα. Ο John Keats στο "Ode on a Grecian urn,' αναδεικνύει την έκταση στην οποία επιστήμες και τέχνη συνυφαίνονται στην ανθρώπινη ψυχή (Presmeg, 2009).

Χρησιμοποιώντας εκφράσεις της τέχνης, όπως εδώ την κατασκευή κινουμένων σχεδίων, οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να πραγματευτούν μαθηματικές έννοιες και παράλληλα να αναπτύξουν και άλλες δεξιότητες, πέραν των μαθηματικών. Επιπλέον είχαν τη δυνατότητα να επαναδιαπραγματευτούν την εικόνα τους για τη φύση των μαθηματικών και τη σύνδεση τους με άλλα πεδία.

Σε αντίθεση με μια τυπική διδασκαλία των μαθηματικών, στηριγμένη σε ένα αυστηρό αναλυτικό πρόγραμμα οι μαθητές ανέπτυξαν τη δημιουργικότητά τους, θεωρώντας τη δημιουργικότητα ως *'την αλληλεπίδραση ανάμεσα σε στάσεις, διαδικασίες και περιβάλλον μέσω της οποίας ένα άτομο ή ομάδα παράγει ένα αντιληπτό προϊόν που είναι και νέο και χρήσιμο για ένα κοινωνικό πλαίσιο'* (Plucker et al, 2004, σ. 90).

Οι δυο κοινότητες μαθητών, εργαζόμενοι σε διαφορετικά ερευνητικά πλαίσια ενεπλάκησαν και δημιούργησαν κινούμενο σχέδιο συνδέοντας τέχνη και μαθηματικά. Τα χρησιμοποιούμενα εργαλεία και η διαμεσολάβηση του

εκπαιδευτικού φαίνεται να είχαν επίσης ένα σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη των μαθηματικών νοημάτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Artigue, M, Bardini, C. (2010). New didactical phenomena prompted by TI_Nspire specificities – The mathematical component of the instrumentation process. In: Durand-Guerrier, V. et. al. (Eds.). *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for* Research *in Mathematics Education CERME6*, pp.1171-1180. France: Lyon

Bishop, A.J.(1988) *Mathematical enculturation: a cultural perspective on mathematics education.* Dordrecht, Holland: Kluwer

Chronaki, A. (2008). *The teaching experiment*. Studying learning and teaching process in B. Svolopoulos. (Ed.), *Connection of educational research and practice*, Athens: Atrapos

Drijvers, P., Doorman, M., Boon. P, Van Gisbergen, S. (2010). Instrumental orchestration: Theory and Practice. In: Durand-Guerrier, V. et. al. (Eds.).*Proceedings of the |Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME6* ,pp.1349-1359. France: Lyon

Guin, D. Ruthven, K. and Trouche, L. (Eds.) (2004). *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument*. New York: Springer.

Halel, I. & Papert, S. (1991). *Costructionism: Research reports and essays*. Ablex Publishing Corporation, Norwood, New Jersey.

Καλαβάσης, Φ. (2008). Μαθηματική εκπαίδευση και διεπιστημονικότητα, Στρογγυλό τραπέζι, 25ο συνέδριο Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, Νοέμβρης 2008, Βόλος.

Plucker, J. A., Beghetto, R. A., & Dow, G. T. (2004). Why isn't creativity more important to educational psychologists? Potential, pitfalls, and future directions in creativity research.Educational Psychologists, 39, 83–96.

Presmeg, N. (2009).*Mathematics education research embracing arts and sciences,* ZDM Mathematics Education.

Snow,P. (1995). *The Two Cultures,* Cambridge University Press.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9, 281-307.

Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculators environments. In D. Guin, K. Ruthven & L. (Eds), *The*

didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument (pp. 137-162). New York NY: Springer.

Verillon, P. & Rabardel, P. (1995). Cognition and artefacts: A contribution to the study of thought in relation to instrument activity. *European Journal of Psychology in Education,* 9(3), 77–101.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning, and identity*, Cambridge University Press.

vtsitsos@sch.gr

hastath@uth.gr

[λευκή σελίδα]

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΓΡΑΦΙΣΤΙΚΗ ΣΤΑ LOGOS ΤΩΝ ΠΟΔΟΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΟΜΑΔΩΝ

Ηλίας Μιχαηλίδης
Msc Πολιτισμικές Σπουδές

Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης
Επίκουρος Καθηγητής ΠΔΜ

Ιφιγένεια Βαμβακίδου
Αναπληρώτρια Καθηγήτρια ΠΔΜ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στα μαθηματικά, το σχήμα παίζει πρωταγωνιστικό ρόλο. Από τα πιο απλά όπως το τρίγωνο, η σφαίρα και ο μαίανδρος μέχρι και τα πιο πολύπλοκα, τα γεωμετρικά σχήματα ασκούν μια γοητεία στο ανθρώπινο πνεύμα. Από την αρχαιότητα η μελέτη της γεωμετρίας συνδέθηκε με όλες σχεδόν τις εκδηλώσεις του ανθρώπινου πολιτισμού. Τον 20ό αιώνα ο Κυβισμός ως επαναστατική τεχνοτροπία κυριάρχησαν στην ιστορία της τέχνης. Στην πραγματεία του Kandinsky «*Concerning the Spiritual in Art*» (1977) καταγράφονται οι θεωρίες και οι ιδέες, που υποστηρίζουν την τάση του προς το αφηρημένο. Η εργασία του αυτή μαζί με κάποιες άλλες όπως τα βιβλία του «*Essays über Kunst und Künstler*» (1986) και «*Point and Line to Plane*» (1979) τον καθιστούν από τους σημαντικούς θεωρητικούς της τέχνης. Σαράντα περίπου χρόνια μετά το θάνατο του Kandinsky, ο Benoît B. Mandelbrojt παρουσίασε άλλους αναπάντεχους «μαθηματικούς καλλιτέχνες». Στο βιβλίο «*The Fractal Geometry of Nature*» που εκδόθηκε το 1982 έχει συγκεντρώσει ένα πλήθος εκπληκτικών σχημάτων, που δημιουργήθηκαν από ηλεκτρονικούς υπολογιστές ακολουθώντας μια απλή επαναληπτική διαδικασία. Στο πλαίσιο των σχέσεων των μαθηματικών με την τέχνη θα αναλύσουμε σημειωτικά τα logos εφαρμόζοντας το υπόδειγμα του Barthes και τις αναλύσεις του Kandinsky. Το ερευνητικό υλικό αποτελείται από 42 λογότυπα Ευρωπαϊκών ομάδων ποδοσφαίρου. Σε αυτά βρίσκουμε κύκλους, σφαιροειδή τρίγωνα, ρόμβους, παραλληλόγραμμα, τρίγωνα και ωοειδή σχήματα. Πιο συγκεκριμένα ο κύκλος εμφανίζεται ως κυρίαρχο σχήμα 18

φορές, το σφαιροειδές τρίγωνο 11, ο ρόμβος 5, το παραλληλόγραμμο 4 ενώ το τρίγωνο και το ωοειδές σχήμα από 2 φορές αντίστοιχα.

ΤΟ ΠΟΔΟΣΦΑΙΡΟ ΩΣ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΕΡΕΥΝΑΣ

Οι περισσότερες συστηματικές έρευνες για το ποδόσφαιρο στο πεδίο των κοινωνικών επιστημών, ξεκινούν από το 1960 και μετά και αφορούν κυρίως σε θέματα κανονισμού του παιχνιδιού, σε προπονητικά θέματα και σε ζητήματα βίας μέσα στο γήπεδο (Greenfield & Osborn στο Brown, 1998, σελ. 235-248). Διαφορετικές έρευνες στην Ευρώπη, αναλύουν στο πεδίο των πολιτισμικών και πολιτικών σπουδών, τον χώρο που προσφέρει το λαϊκό άθλημα του ποδοσφαίρου για την ανάδειξη ρατσιστικής συμπεριφοράς, όπως την ρατσιστική συμπεριφορά των λευκών οπαδών κατά την διάρκεια των αγώνων (βλ. στο Brown, 1998, σελ. 71-76). Σε έρευνες επίσης για τα όρια του ποδοσφαίρου, την κανονικότητα και την τοπικότητα των φιλάθλων, αναζητούνται *μέσα από τα συνθήματα και τις εικόνες,* η κατασκευή των ταυτοτήτων, όπως για παράδειγμα για τους μετανάστες Ιρλανδούς στην Αγγλία (Free, στο Brown 1998, σελ. 219-232, Cronin 1998, Cronin & Mayall, 1998).

Στη δική μας περίπτωση στο πεδίο των πολιτισμικών σπουδών (Williams {1960}, 2001) αναζητούμε σε πρωτογενές υλικό τις συναρτήσεις και εξαρτήσεις ανάμεσα στη γεωμετρία, όπως αυτή ορίστηκε στην αρχαιότητα με τη νεότερη και σύγχρονη (1954-2011) χρήση και εφαρμογή της στη γραφιστική-τέχνη των logos των ευρωπαϊκών αθλητικών ομάδων, οι οποίες μετέχουν επίσημα στο UEFA.

Το υλικό αποτελούν 42 λογότυπα Ευρωπαϊκών ομάδων ποδοσφαίρου. Έχουν επιλεγεί ομάδες, που συμμετείχαν στις φάσεις των ομίλων του Champions League από το 1992 μέχρι σήμερα και παρουσιάζουν στα λογότυπα τη χρήση γεωμετρικών σχημάτων (UEFA, Statistics Handbook, 2009-2010). Τα logos - εικόνες αποτελούν σημεία, που χρησιμοποιούνται στον επίσημο «λόγο» των σωματείων κατά την συμμέτοχη τους στις διεθνείς διοργανώσεις της UEFA.

Οι τεχνικές-μέθοδοι, που ακολουθούμε αφορούν στη σημειωτική (Barthes, 1957) και στην εικαστική ανάλυση (Kandinsky, 1980). Η μονάδα ανάλυσης όπως ορίζεται στη σημειωτική ανάλυση μας οδηγεί στις θεματικές:

1. Ονομασία Ομάδος
2. Χώρα Προέλευσης
3. Γεωγραφικός Προσδιορισμός
4. Έτος Ίδρυσης
5. Χρονολογικός Προσδιορισμός
6. Τοπικότητα
7. Γεωμετρικά Σχήματα

8. Γλωσσικό Υλικό
9. Τρόπος Γραφής
10. Θεματική Γλωσσικού
11. Σύμβολο
12. Genre (Οπτικό)
13. Κατηγορίες Συμβόλων
14. Προέλευση Χρωμάτων
15. Χρώματα
16. Στάση – Κίνηση
17. Σενάριο
18. Χώρος Εξωτερικός – Εσωτερικός
19. Άνω – Κάτω Θέση

Από αυτές μας ενδιαφέρουν τα γεωμετρικά σχήματα. Σε ένα σημειωτικό σύνταγμα η σημασία μιας μονάδας καθορίζεται από το πώς αλληλοδρά με τις άλλες, ενώ σε ένα υπόδειγμα καθορίζεται από το πώς διακρίνεται από τις άλλες (O' Sullivan et al., 1994, σελ. 315).

Το σύνολο των λογότυπων-συμβόλων, που συλλέξαμε/ταξινομήσαμε και δομήσαμε σε αρχείο αποτελεί ΣΗΜΕΙΟ, γιατί σύμφωνα με τη σημειωτική (Belting κ.α., 1995, σελ. 328-335), τα σημεία είναι φορείς πληροφοριών (σημαντική), καθορίζονται από έναν σκοπό (πραγματιστική), αναγνωρίζονται από την εμφάνισή τους (συντακτική). Προαπαιτείται ένας πομπός και μια ομάδα από δέκτες. Τα σημεία είναι πολύσημα και η σημασία που κάθε φορά τους αποδίδεται, αναδεικνύεται από το κοινωνικό πλαίσιο στο οποίο εντάσσονται.

Τα σχήματα που εντοπίζουμε στο υλικό-logos αφορούν σε γραμμές, καμπύλες, τετράγωνα, κύκλους και σε σύμβολα-σημαίνοντα και σημαινόμενα πολέμου, ασπίδας-θυρεού και εθνικών προσδιορισμών, σημαίας.

Το αυθαίρετο των σημείων-logos βρίσκεται πίσω από την πρόθεση της ερμηνείας τους και τη σημασία του πλαισίου αναφοράς. Ο εξοπλισμός στην οπλομαχία περιελάμβανε από την αρχαιότητα σ' όλη την Ευρώπη την μεταλλική ασπίδα και το δερμάτινο ή σιδερένιο θώρακα.

Η ασπίδα-θυρεός ως αντικείμενο υλικής κουλτούρας ταξινομείται στον αρχαίο οπλισμό και ορίζεται ως φορητός δίσκος με ανθεκτικότητα, αλλά και μέγεθος, ώστε να προστατεύει τον πολεμιστή από τα χτυπήματα των αντιπάλων. Ως προς το μέγεθος, τα υλικά κατασκευής αλλά και το σχήμα της, η ασπίδα παρουσίαζε σχετικά μεγάλη ποικιλία από τα ομηρικά έπη, που ήταν μεγάλη για να καλύπτει όλο το σώμα του πολεμιστή, με ένα ή περισσότερα στρώματα

από δέρμα βοδιού και επικάλυψη από μέταλλο (στο http://www.tmth.edu.gr/aet/index.html[1].

Εικόνα 2, βλ. *www.tmth.edu.gr/aet/thematic.../p455.html* [2]

Παραδείγματα Ασπίδων σε Logos

Εφαρμόζοντας την ανάλυση του W. Kandinsky (1980), ο οποίος αναζήτησε μια εφαρμόσιμη μέθοδο στην επιστήμη της τέχνης οδηγούμαστε στο έργο «*Σημείο, Γραμμή, Επίπεδο*», όπου μελετά τις υλικές εκδηλώσεις του σημείου τόσο στη φύση, αλλά και στις τέχνες (αρχιτεκτονική, χορό, μουσική, γραφικές τέχνες).

---

[1] Η ασπίδα του Αίαντα είχε επτά στρώματα από δέρμα βοδιού και το όγδοο από μέταλλο, ενώ του Αχιλλέα ήταν από πέντε αλλεπάλληλες πλάκες μετάλλου.

[2] βλ. στο Το έργο "Τεκμηρίωση, ανάπτυξη ψηφιακής συλλογής και δημιουργία μίας θεματικής πύλης (κόμβου) πληροφόρησης και ανταλλαγής απόψεων με θέμα την Αρχαία Ελληνική Τεχνολογία" έχει ενταχθεί στο Ε.Π. Κοινωνία της Πληροφορίας, συγχρηματοδοτείται από την Ε.Ε. και το Ελληνικό Δημόσιο και υλοποιείται από το Κέντρο Διάδοσης Επιστημών & Μουσείο Τεχνολογίας, www.tmth.edu.gr/aet/thematic.../p455.html

Η γραμμή εξετάζεται από τον Kandisky (1980) ως γεωμετρικό στοιχείο και μετά σε σχέση με την υλική επιφάνεια (σελ. 9). Η γραμμή θεωρείται δευτερεύον στοιχείο εφόσον προέρχεται από το σημείο.

Οι ευθείες γραμμές ορίζονται ως ψυχρές οριζόντιες, θερμές κατακόρυφες, θερμές-ψυχρές διαγώνιες και οι πλάγιες ως παρέκκλιση των διαγωνίων παρουσιάζουν ίδιες αντιηχήσεις. Η ευθεία γραμμή διατηρεί χαλαρές σχέσεις με το επίπεδο. Η πιο δυνατή αντήχηση παράγεται από μια οριζόντια και μια κάθετη πάνω στο επίπεδο. Παρακολουθώντας την φιλοσοφική και αισθητική σκέψη του Kandinsky οδηγούμαστε στην ανάλυση γεωμετρικών στοιχείων στις γραφικές τέχνες και ειδικότερα στα logos που συλλέξαμε. Το σημείο ορίζεται ως διάσταση και φόρμα, ως μια ορισμένη μονάδα που σε περιπτώσεις συνδυασμού με το βασικό επίπεδο είναι ένα επαρκές εκφραστικό μέσο. «Το σημείο είναι η πιο λακωνική πρόσκαιρη φόρμα» γράφει ο Kandisky (ibidem, σελ. 31).

Ο ίδιος ο Kandinsky χρησιμοποιεί το παράδειγμα των γραφικών τεχνών, γιατί όπως υποστηρίζει «σ' έναν ειδικό χώρο των πλαστικών τεχνών, στις γραφικές τέχνες, οι αυτόνομες δυνάμεις του σημείου εμφανίζονται καθαρότατα...οι κύριες γραφικές μέθοδοι είναι η χαλκογραφία, η ξυλογραφία και η λιθογραφία. Στη χαλκογραφία η μικρή μαύρη στιγμή αποκτιέται με ευκολία, ενώ μια μεγάλη άσπρη τελεία χρειάζεται προσπάθεια» (ibidem, σελ. 39).

Η γεωμετρική γραμμή ορίζεται ως αόρατο όν, ως ίχνος κινούμενου σημείου και ως παράγωγό του, ως μετάβαση από το στατικό προς την κίνηση. Η ευθεία γραμμή αποτελεί την πιο λακωνική φόρμα των ατέλειωτων δυνατοτήτων κίνησης (ibidem, σελ. 47). Τα στοιχεία της ζωγραφικής-γραφιστικής είναι αποτελέσματα της κίνησης κι έτσι έχουμε την «ένταση και την κατεύθυνση».

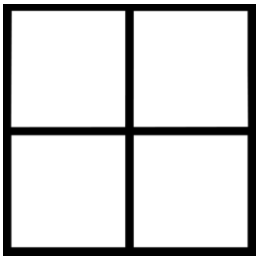
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Διαβάζοντας τις εικόνες- logos ως γραφιστικά και γεωμετρικά σχήματα εντοπίζουμε τρία είδη γραμμών : α) την οριζόντια (το ψυχρό και το επιπεδικό είναι οι βασικές αντιηχήσεις αυτής της γραμμής), β) την κατακόρυφη γραμμή, όπου το ύψος αντικαθιστά την επιπεδικότητα και το θερμό παίρνει τη θέση του ψυχρού, γ) η διαγώνια, που σχηματικά τη βλέπουμε σε μια γωνία ταυτόσημη στη μια και στην άλλη από τις προηγούμενες γραμμές, πρόκειται για τη λακωνική φόρμα των ατελείωτων ψυχρών-θερμών κινήσεων (ibidem, σελ. 48).

Στο πεδίο αυτής της αισθητικής-εικονογραφικής ανάλυσης ο Kandisky προτείνει την εξίσωση ανάμεσα στη γραφική και ζωγραφική φόρμα: ευθείες γραμμές αντιστοιχούν σε βασικά χρώματα, όπως η οριζόντια στο μαύρο, η

κατακόρυφη στο άσπρο, η διαγώνια στο κόκκινο (γκρι, πράσινο), η ελεύθερη ευθεία στο κίτρινο, μπλε (ibidem, σελ. 53).

Η πρώτη γραμμική έκφραση, σύνθεση αποτελείται από ένα τετράγωνο μοιρασμένο σε τέσσερα τετράγωνα και ορίζεται ως η απλούστερη φόρμα διαίρεσης ενός σχηματικού επιπέδου.



Εικόνα 3

Ειδικότερα στα 42 logos (στο σύνολο 119) εντοπίζουμε κύκλους, σφαιροειδή τρίγωνα, ρόμβους, παραλληλόγραμμα, τρίγωνα και ωοειδή σχήματα. Ο κύκλος ήταν μαζί με τη σφαίρα τα σημαντικότερα γεωμετρικά αντικείμενα στο πλαίσιο του αρχαίου ελληνικού μαθηματικού πολιτισμού. Ο κύκλος ήταν η καμπύλη που επιλέχθηκε για να περιγράψει την κίνηση των πλανητών γύρω από τη Γη στο Αριστοτελικό-Πτολεμαϊκό μοντέλο. Τα σφαιροειδή τρίγωνα είναι αντικείμενα της πρώτης μη ευκλείδειας γεωμετρίας, της σφαιρικής (Θεοδόσιος, Μενέλαος). Οι ρόμβοι, τα παραλληλόγραμμα και τα τρίγωνα μελετούνται διεξοδικά στην πραγματεία τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Τα ωοειδή σχήματα θα τα χαρακτηρίζαμε ότι είναι σαν τις ελλείψεις που είναι μέρος της οικογένειας των κωνικών τομών μαζί με την υπερβολή και την παραβολή και μελετήθηκαν διεξοδικά από τον Απολλώνιο τον Περγαίο στην πραγματεία του τα *Κωνικά*. Τα έργα του Ευκλείδη, του Απολλώνιου και και οι εργασίες στη γεωμετρία της σφαίρας συνεχίστηκαν στο πλαίσιο της Αραβικής μαθηματικής παράδοσης και μεταβιβάστηκαν στην Ευρώπη διαμορφώνοντας την νεώτερη Ευρωπαϊκή μαθηματική παράδοση. Συγκεκριμένα ο κύκλος εμφανίζεται ως κυρίαρχο σχήμα 18 φορές, το σφαιροειδές τρίγωνο 11, ο ρόμβος 5, το παραλληλόγραμμο 4, ενώ το τρίγωνο και το ωοειδές σχήμα από 2 φορές αντίστοιχα.

Ανεξάρτητα από την εθνική προέλευση, επιλέγεται ο κύκλος ως σύμβολο ενότητας.

Οι ομάδες – πομποί των εικονομηνυμάτων εσωκλείουν στους κύκλους των λογοτύπων, σύμβολα που σημαίνουν τοπικότητα και κατασκευάζουν κάθε φορά την ιδιαίτερη ταυτότητα, που τους διακρίνει από τις υπόλοιπες ομάδες.

Στην ίδια λογική το σφαιροειδές τρίγωνο, που προσομοιάζει σε ασπίδα, εμφανίζεται ως πολεμικό σημαίνον να περικλείει σύμβολα τοπικότητας.

Τα τρίγωνα, τα παραλληλόγραμμα και τα ωοειδή σχήματα λειτουργούν με τον ίδιο τρόπο, ενώ όποιο λογότυπο δεν κυριαρχείται από την παρουσία του κύκλου προσομοιάζει σε θυρεό ή ασπίδα σημαίνοντας ταυτότητες εξουσίας και πολέμου, όπως η σημασία τους αυτή προσδιορίστηκε από τη χρήση ανάλογων μορφών-συμβόλων στο Ευρωπαϊκό-Βασιλικό-Ολιγαρχικό παρελθόν.

Οι ομάδες που χρησιμοποιούν τον Ρόμβο στο λογότυπο, επιλέγουν αυθαίρετα-αθλητικά-γραφιστικά σύμβολα για να κατασκευάσουν την ιδιαίτερη ποδοσφαιρική ταυτότητα.

Σε ό,τι αφορά στη συνάρτηση ανάμεσα στη χώρα προέλευσης και την επιλογή των σχημάτων κάθε φορά δεν προκύπτει κάποιος συσχετισμός. Όλες οι χώρες χρησιμοποιούν κατά σειρά περισσότερο τους Κύκλους, στη συνέχεια τα Σφαιροειδή Τρίγωνα, τα Παραλληλόγραμμα, τα Ωοειδή σχήματα και λιγότερο τους Ρόμβους.

Ο κύκλος, προέρχεται από τις καμπύλες γραμμές «ως επίθεση και υποταγμένη κατάφαση» (ibidem, σελ. 61). Όταν δύο δυνάμεις δρουν ταυτόχρονα πάνω σ' ένα σημείο, έτσι ώστε η μία να είναι συνεχής και επικρατούσα, τότε παράγεται μια καμπύλη γραμμή. Όσο η ευθεία αρνείται το επίπεδο, τόσο η καμπύλη έχει την υπόσταση του επιπέδου.

Στη σχεδιαστική ο κύκλος είναι ένα επίπεδο, ενώ το σπιράλ είναι μια γραμμή, αλλά η γεωμετρία δεν διακρίνει αυτή τη σημαντική διαφορά, γιατί παρόμοια ορίζει τον κύκλο και την έλλειψη, την καμπύλη σαν τόπο σημείων και άλλες επίπεδες μορφές σαν καμπύλες γραμμές. Ο χαρακτηρισμός «καμπύλη γραμμή» δεν συμφωνεί με τη γεωμετρική ορολογία «που βάσει τύπων πρέπει να εκτελέσει ταξινομήσεις (παραβολές, υπερβολές) άσχετες τελείως με τη ζωγραφική» σημειώνει ο Kandinsky (ibidem, σελ. 65).

Το επιστημολογικό ενδιαφέρον, που εντοπίζουμε στην μεθοδολογική πρόταση του Kandinsky αφορά στις συναρτήσεις-αντιστοιχίσεις, που προτείνει ανάμεσα στα τρία ζωγραφικά στοιχεία, που πρακτικά συγχέονται, αλλά στη θεωρία διακρίνονται: «γραμμή-επίπεδο-χρώμα, όπου ευθεία γραμμή-τρίγωνο-κίτρινο, καμπύλη γραμμή-κύκλος-μπλε, οπότε προκύπτουν τρία στοιχειώδη ζεύγη απ' αρχής αντίθετα» (ibidem, σελ. 66-67).

Εικόνα 4

Όσον αφορά για τη θέση στη σχεδιαστική επιφάνεια, όπου τοποθετούνται τα logos ο Kandinsky, όπως οι περισσότεροι εικονογράφοι ερμηνεύει τη θέση στην επιφάνεια ως «το επάνω, που φέρνει στο μυαλό την ιδέα μιας μεγαλύτερης ευλυγισίας, μια αίσθηση ελαφράδας, ανάβασης και τελικά ελευθερίας και κάθε μια από αυτές τις συγγενικές ιδιότητες, παράγει από μόνη της μια ιδιαίτερη αντήχηση», η ευλυγισία (ελαφράδα, ελευθερία) αρνιέται την πυκνότητα και το «κάτω ενεργεί αντίθετα ως πυκνότητα, βαρύτητα, συστολή» (ibidem, σελ. 94-95).

Ο Arnheim στις αναλύσεις του εντοπίζει το «ιδεώδες» της σύνθεσης στο άνω μέρος του σχεδίου, ενώ στο κάτω μέρος δίνονται τα πραγματικά εξειδικευμένα στοιχεία της σύνθεσης. Στην εκκλησιαστική τέχνη επίσης οι συνθέσεις περιλαμβάνουν δύο διακριτές περιοχές, όπου στο κάτω μέρος της σύνθεσης απεικονίζεται η γήινη πραγματικότητα των θνητών, ενώ στο άνω μέρος, που συμβολίζει τον παράδεισο, η ψυχή και οι άγγελοι.

Για τη δυτική κουλτούρα, σύμφωνα με τους κοινωνικούς σημειωτιστές Kress και van Leeuwen, (1976, 1996) το σχετικό πληροφοριακό σύστημα προέρχεται από το κοινωνικό και συνδέεται με άλλα πολιτισμικά συστήματα, όπως πρακτικά, φιλοσοφικά και θρησκευτικά.

Ο οριζόντιος (συνταγματικός) άξονας είναι της εξέλιξης της «σημείωσης», ενώ ο κάθετος (παραδειγματικός) ως το αποτέλεσμα της «σημείωσης» είναι η μιμητική αναπαράσταση της κυρίαρχης κουλτούρας. Η συμπλοκή των αξόνων και της κεντρικής σύνθεσης συμβαίνει στο κέντρο, το οποίο ακόμη και όταν παραμένει κενό, θεωρείται δεδομένη η σημασία του[3].

Στις εικόνες-logos σημαντικά στοιχεία είναι το μέγεθος, το σχήμα, το βάθος και η προοπτική, οι αντιθέσεις των χρωμάτων ή του φωτισμού, ενώ στην τέχνη

[3] Στα περιοδικά και τις εφημερίδες το κέντρο δρα ως «μεσολαβητής», που κάνει τα μέρη να έρχονται κοντά. Στις εικόνες σημαντικά στοιχεία είναι το μέγεθος, το σχήμα, το βάθος και η προοπτική, οι αντιθέσεις των χρωμάτων ή του φωτισμού στην τέχνη σημαντικότερος είναι ο ρόλος της σύνθεσης, δηλαδή οι αισθητικοί και μορφικοί όροι (ισορροπία και αρμονία ή ανατροπές της «φυσικής» σειράς και τάξης).

σημαντικότερος είναι ο ρόλος της σύνθεσης, δηλαδή οι αισθητικοί και μορφικοί όροι (ισορροπία και αρμονία ή ανατροπές της «φυσικής» σειράς και τάξης).

Στα logos η ασπίδα-θυρεός, η σημαία-τοπικό έμβλημα της πόλης και της χώρας τοποθετείται στον πυρήνα-κέντρο της εικόνας ως βασική πληροφορία-μήνυμα.

Αλλά επίσης και αριστερά ως δεδομένη-γνωστή πληροφορία[4].

Η πληροφοριακή αξία του κάθετου άξονα (πάνω – κάτω) αφορά στο α) πάνω ως ιδεατό, εξέχον, σημαντικό, στο β) κάτω ως πρακτικό, ρεαλιστικό, πληροφοριακό, υποστηρικτικό, «γήινο». Μερικές φορές δημιουργείται μια αίσθηση αντίθεσης, γιατί πάνω βρίσκεται αυτό που θα μπορούσε να είμαστε (συναισθηματική έλκυση ή «αγκίστρωση» κατά τον Barthes) και κάτω το πληροφοριακό μέρος. Η συμπλοκή οριζόντιου και κάθετου άξονα αποδίδει την αίσθηση της διπλής αντίθεσης ως δεδομένο vs νέο, ιδεατό vs ρεαλιστικό.

Η πληροφοριακή αξία του κέντρου και του περιθωρίου σημαίνει την «κεντρική σύνθεση», που παίζει σημαντικότερο ρόλο σε παλιότερους πολιτισμούς (εικόνα του παντοκράτορα στις βυζαντινές εκκλησίες) ή σε ανατολικούς (ιεραρχία, αρμονία, συνέχεια).

---

[4] Η πληροφοριακή αξία του οριζόντιου άξονα (αριστερά – δεξιά) σημαίνει ότι α) αριστερά τοποθετούνται τα δεδομένα, γνωστά, β) δεξιά οι νέες πληροφορίες, το θέμα, το μήνυμα.

Διαβάζοντας τις γραμμικές συνθέσεις από αριστερά προς τα δεξιά, από πάνω προς τα κάτω παρατηρούμε ότι η γραμμική (συνταγματική) ανάγνωση συνδέεται με τη γραμμική αντίληψη για την εξέλιξη (πρόοδο) και αποτελεί βασικό στοιχείο του δυτικού πολιτισμού. Στις μη γραμμικές συνθέσεις, δηλαδή στις κυκλικές, διαγώνιες και σπειροειδείς, η κυκλική ανάγνωση συνδέεται με την ιδέα της συνεχούς επανάληψης ή και του «φαύλου κύκλου», ενώ η σπειροειδής δηλώνει κίνηση από τα πιο χαμηλά προς τα υψηλότερα νοήματα ή την πρόοδο του χρόνου.

Τα σύμβολα, δίνουν νόημα στα logos: μερικά, κυρίως εθνικά, πολιτικά, θρησκευτικά ή τοπικά έχουν εμφανή σημασία, όπως το λιοντάρι, η αρκούδα, ο δικέφαλος αετός, το τριφύλλι, η αρχαιοελληνική μορφή.

Μερικά σύμβολα είναι διαχρονικά και μπορεί να ισχύουν για όλη την Ευρώπη ή γενικότερα το δυτικό κόσμο, όπως το δάφνινο στεφάνι ως νίκη, τιμή, υψηλή επίδοση, ο σταυρός ως εκκλησία, θρησκεία, η pieta ως καθολική εκκλησία, τα σπαθιά-κανόνια-όπλα ως πόλεμος, οι σημαίες ως εθνικότητα, οι κορώνες ως βασιλεία, ο στεφανωμένος έφηβος ως ολυμπισμός, αθλητικό πνεύμα, οι εικόνες εργατών-εργασίας ως σοσιαλισμός, η μπάλα ως αθλητισμός, ποδόσφαιρο, το πλοίο ως πολιτεία. Ωστόσο ορισμένα παλιότερα σύμβολα δεν χρησιμοποιούνται σε σύγχρονες εικόνες.

Όσον αφορά στην οπτική γωνία διαβάζουμε γεωμετρικά

την α) οριζόντια – ευθεία ως «εμπλοκή» (involvement), δηλαδή ό,τι βλέπουμε είναι μέρος του κόσμου μας,

την β) πλάγια ως «απόσπαση» (detachment), δηλαδή ό,τι βλέπουμε δεν αποτελεί μέρος του κόσμου μας,

την γ) αναπαράσταση από την οπίσθια όψη (back view) ως πολύπλοκη και πολύσημη (συνήθως οι εξηγήσεις είναι ψυχολογικού ή ψυχαναλυτικού χαρακτήρα).

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΙΣΤΟΡΙΑ

Όσον αφορά στην εποχή αναφοράς των συμβόλων-λογοτύπων σε συνάρτηση με την Ιστορία των Μαθηματικών-Γεωμετρίας οδηγούμαστε στην περίοδο της ελληνικής ευκλείδειας και μετευκλείδειας εποχής κατά την οποία πραγματοποιούνται ολοκληρωμένες μελέτες για την γεωμετρία του τριγώνου, του κύκλου, του παραλληλογράμμου, του ρόμβου και των ελλείψεων (ωοειδών) σχημάτων. Τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη και τα *Κωνικά* του Απολλωνίου μας δίνουν τις γεωμετρικές ιδιότητες των παραπάνω επίπεδων σχημάτων. Όσον αφορά τα σφαιροειδή τρίγωνα ή θυρεούς στο πλαίσιο της

αρχαιοελληνικής γεωμετρικής παράδοσης αναπτύσσεται η γεωμετρία της σφαίρας με τον Θεοδόσιο και τον Μενέλαο. Τις πρωτότυπες αυτές μελέτες τις επέκτειναν άραβες μαθηματικοί και σε αρκετές περιπτώσεις μόνον οι αραβικές αποδόσεις διασώθηκαν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Η εποχή αναφοράς των logos- συμβόλων είναι ο Μεσαίωνας της ευρωπαϊκής ιστορίας όσον αφορά στον τοπολογικό προσδιορισμό των ομάδων και των χωρών προέλευσης, αλλά οι επιδράσεις στην ιστορία της γεωμετρίας από τις αράβικες ορίζουσες, τη σφαιρική γεωμετρία από την εποχή των Θεοδοσίου και Μενελάου

Όπως φαίνεται η ιστορία των αρχαίων χρόνων στο πεδίο της γεωμετρικής σκέψης έχει σοβαρές επιδράσεις και στην νεότερη ιστορία των ευρωπαϊκών ομάδων, οι οποίες ιδρύονται από τα τέλη του 19ου (Rangers, έτος ίδρυσης 1873), ενώ σε ελάχιστα logos συναντούμε σύγχρονα γραφιστικά μοντέλα, όπως στην ομάδα του Αμβούργου.

Στα logos εντοπίζουμε α) την ισχύ και διαμαρτυρία στις εικόνες ιδεών – σύμβολα ως μεταφορά αφηρημένων ιδεών σε ορατές και συγκεκριμένες εικόνες, όπως π.χ. πλοίο ως πολιτεία, ο καπετάνιος πλοίου ως κυβερνήτης, το άλογο και ο αναβάτης ως διακυβέρνηση, Β) εικόνες μεμονωμένων θρησκευτικών-προσώπων ως μεγαλόπρεπες εικόνες κυβερνητών με θριαμβευτικό ή υπεροπτικό ύφος, προσαρμογές και αλλαγές της εξουσιαστικής εικόνας (π.χ. σήμερα έμφαση στο νεανικό σφρίγος και το πνεύμα του αθλητισμού), διαχείριση εικόνας (συνέχεια εικόνας),

Όσον αφορά στη «δράση» της εικόνας και στο «βλέμμα» της εντοπίζουμε το απευθείας κοίταγμα από την πλευρά της εικόνας ως αίτημα, ζήτηση όπως στο παράδειγμα του Αγίου στο λογότυπο της Anderlecht (εικόνες “face to face”)

και το β) έμμεσο/πλάγιο κοίταγμα ως προσφορά όπως ο Έφηβος στο λογότυπου του Ολυμπιακού.

Στα logos που παρουσιάζουμε τα σχήματα, που φαίνεται να επιβάλλονται στους θεατές- φιλάθλους σε γεωμετρικό-σημειωτικό-εικονογραφικό πεδίο αφορούν στα πολυγωνικά-πολύπλοκα σχήματα, όπου οι γωνίες αυξάνουν, γίνονται αμβλείες μέχρι την ολοκληρωτική εξαφάνισή τους, όπου το επίπεδο γίνεται κύκλος (Kandinsky, σελ. 113).

Στο σύνολο του υλικού εντοπίζουμε τα τρία πρωταρχικά επίπεδα ως τρίγωνο-τετράγωνο-κύκλος, τα οποία «προκύπτουν φυσιολογικά από μια υπό όρους κίνηση του σημείου» (ibidem, σελ. 114).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arnheim, Rudolf (1969): *Visual thinking*. Berkeley: University of California Press.

Arnheim, Rudolf (2009): *The Power of the Center: A Study of Composition in the Visual Arts*. University of California Press.

Barthes, Roland (1957): *Mythologies*. Paris: Éditions du Seuil.

Brown, Adam (1998): *Fanatics! Power, Identity and Fandom in Football*. London and New York: Routledge.

Carnibella, Givanni, Fox, Anne, Fox, Cate, McCann, Joe, Marsh, James, Marsh Peter (1996): *Football violence in Europe*. Oxford: SIRC

Cronin, Mike (1999): *Sport and Nationalism in Ireland: Gaelic Games, Soccer and Irish Identity Since 1884*. Dublin: Four Courts Press.

Cronin, Mike, Mayall David (eds) (1998): *Sporting Nationalisms: Identity, Ethnicity, Immigration, and Assimilation*. London: Routledge.

Fiske, John. (1982): *Introduction to Communication Studies*. London: Routledge

Fowler, Will (2000): *Η εξέλιξη των όπλων και των μεθόδων πολέμου μέσα στους αιώνες*. Μεταφρ. Πετροπούλου, Ειρήνη. Αθήνα: Ίριδα

Kandinsky, Wassily (1980): *Σημείο, Γραμμή, Επίπεδο*. Μεταφρ. Έφη Μαλάκη-Σταθάκη. Αθήνα: Δωδώνη.

Kress, Gunther (1976): *Structuralism and Popular Culture*: In C W E Bigley (Ed.): *Approaches to Popular Culture*. London: Edward Arnold.

Kress, Gunther, Van Leeuwen Theo (1996): *Reading Images: The Grammar of Visual Design*. London: Routledge.

Livingston, Alan, Livingston Isabella (1992): *Encyclopedia of Graphic Design and Designers*. London: Thames and Hudson.

O'Sullivan, Tim, Hartley, John, Saunders, Danny, Montgomery, Martin, Fiske John (1994): *Key Concepts in Communication and Cultural Studies*. London: Routledge.

Snodgrass, Antony (2003). *Τα επιθετικά και αμυντικά όπλα των Αρχαίων Ελλήνων*. Μεταφρ. Σταματοπούλου, Βασιλική. Θεσσαλονίκη: University Studio Press

Thwaites, Tony, Lloyd, Davis, Mules Warwick (1994): *Tools for Cultural Studies: An Introduction. South Melbourne*: Macmillan

UEFA (2010). *UEFA CHAMPIONS LEAGUE, Competition Guide, Statistics Handbook 2009/2010*. Nyon: UEFA.

Williams, Raymond (1960): *Culture and Society, 1780-1950*. New York: Anchor Books, Doubleday & Company Inc.

Williams, Raymond (1961, 2001): *The Long Revolution*. Ontario: Encore Editions from Broadview Press.

Κέντρο Διάδοσης Επιστημών & Μουσείο Τεχνολογίας, www.tmth.edu.gr/aet/thematic.../p455.html (προσπελάστηκε: 28/2/2011)

Κυριαζόπουλος, Σπυρίδων (1974): *Τα όπλα της Ευρώπης*. Ιδιωτική Έκδοση, Εκδόσεις Φιλοσοφικού Σπουδαστηρίου Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

elmicha217@hotmail.com

nikolantonakis@noesis.edu.gr

ibambak@uowm.gr

Η ΑΥΤΟΡΡΥΘΜΙΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: Ο ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ ΘΕΑΤΡΙΚΟΥ ΠΑΙΧΝΙΔΙΟΥ

Πέτρος Χαβιάρης

Διδάκτορας του Πανεπιστημίου Αιγαίου

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας ερευνητικής εργασίας αποτελεί η διερεύνηση των ευκαιριών που προσφέρει το θεατρικό παιχνίδι για αναστοχασμό των μαθητών πάνω στη συνεργασία τους στα Μαθηματικά. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε μια Ε΄ τάξη ενός δημόσιου Δημοτικού Σχολείου το 2004 και αποτελεί μέρος ευρύτερου ερευνητικού προγράμματος που είχε σκοπό τη μελέτη των τροποποιήσεων που επιχειρούσαν οι μαθητές στην κοινωνική τους αλληλεπίδραση στη σχολική τάξη των Μαθηματικών. Οι μαθητές εργάζονταν σε ζευγάρια, παρατηρούσαν τις βιντεοσκοπημένες συνεργασίες τους και παρουσίαζαν σε όλη την τάξη δρώμενα βασισμένα στις εμπειρίες τους από τη μαθηματική τους δραστηριότητα. Παρουσιάζονται και αναλύονται τα κείμενα των δρώμενων των μαθητών σε δύο επίπεδα: α) στο *μεταδιαλογικό,* όπου οι μαθητές σε ζευγάρια επιχειρούσαν να σχεδιάσουν τα δρώμενά τους και συζητούσαν πάνω στις εμπειρίες τους από τη συνεργασία τους στα Μαθηματικά και β) στο *συλλογικό*, όπου όλοι οι μαθητές συζητούσαν πάνω στα δρώμενα που παρουσιάστηκαν στην τάξη. Το θεατρικό παιχνίδι φαίνεται να είναι ένα πρόσφορο περιβάλλον για τον αναστοχασμό των μαθητών πάνω στη συνεργασία τους στα Μαθηματικά καθώς έδωσε ευκαιρίες στους μαθητές να σκεφτούν πάνω σε σημαντικά θέματα της μαθηματικής συζήτησης στην τάξη, όπως τις δυσκολίες και τα συναισθήματα των συνομιλητών τους, να αξιολογήσουν την εξέλιξη της συνεργασίας τους στα Μαθηματικά και να συζητήσουν κρίσιμα θέματα όπως η διαχείριση των λαθών και η αναγκαιότητα της τεκμηρίωσης μιας πρότασης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σήμερα είναι κοινά αποδεκτό από τους ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών ότι η βελτίωση της μαθηματικής εκπαίδευσης συνδέεται ισχυρά με τη δημιουργία μαθησιακών περιβαλλόντων τα οποία ενισχύουν την απόκτηση συνείδησης από τους μαθητές των ενεργειών τους και την ανάπτυξη από τους ίδιους διαδικασιών αυτορρύθμισης κατά τη μαθηματική τους δραστηριότητα. Οι παραπάνω διαδικασίες αναπτύσσονται σε πλαίσια της κοινωνικής τους ζωής: στην τάξη, στην ομάδα εργασίας, στην οικογένεια όπου οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των συμμετεχόντων σ' αυτή αποτελούν το πεδίο διαμόρφωσής τους. Τα μέλη αυτών των μικρο-κοινοτήτων μάθησης των Μαθηματικών συμμετέχουν στις αλληλεπιδράσεις με βάση τις αντιλήψεις που έχει διαμορφώσει ο καθένας τους για τη μαθηματική του ταυτότητα, για τη φύση των Μαθηματικών και της μάθησής τους, και για τη μαθηματική ταυτότητα των άλλων συμμετεχόντων (συμμαθητές, εκπαιδευτικός, μέλη της οικογένειας) (Voigt,1995).

Ωστόσο, σύμφωνα με τον Καλαβάση (2007, σελ. 14-15), το παιδί αναπτύσσεται στο εκάστοτε συμβατικό πλαίσιο των διαπροσωπικών του σχέσεων και των σχέσεων μεταξύ των συστημάτων στα οποία ανήκει (πόλη, σχολείο, τάξη, ομάδα φίλων, οικογένεια) τις οποίες σχέσεις εσωτερικεύει καθώς ενδύεται συγκεκριμένους ρόλους. Στην περίπτωση του ρόλου «μαθητής των Μαθηματικών» το παιδί εσωτερικεύει σχέσεις που διαμορφώνονται τόσο στο σχολικό όσο και στο ευρύτερο κοινωνικό του περιβάλλον και σχετίζονται με μαθηματικές δραστηριότητες (τυπικές και άτυπες) (Kafoussi, 2006). Το πώς ο μαθητής των Μαθηματικών δρα σε μια σχέση και το πώς αναπαριστά (εσωτερικεύει) κάθε έργο μιας σχέσης συνδέεται με τις διαδικασίες αυτορρύθμισής του οι οποίες τις περισσότερες φορές και κυρίως στις μικρές ηλικίες γίνονται ασυνείδητα περιορίζοντας διαδικασίες αυτο-ελέγχου (Zimmerman, 1995).

Το θεατρικό παιχνίδι σαν παιχνίδι ρόλων αποτελεί ένα ευέλικτο μαθησιακό περιβάλλον καθώς χρησιμοποιείται τόσο στη θεατρική αγωγή των παιδιών όσο και σε βιωματικές προσεγγίσεις της διδασκαλίας πολλών γνωστικών αντικειμένων στο σχολείο. Το στοιχείο που κάνει το θεατρικό παιχνίδι ένα πρόσφορο περιβάλλον αναστοχασμού είναι η «μετα-θετική» του ιδιότητα καθώς οι συμμετέχοντες μαθητές θέτουν τις εμπειρίες και τις σχέσεις τους σε μια νέα πραγματικότητα (δρώμενο) αναστοχαζόμενοι πάνω σ' αυτές (Andersen, 2004).

Στην παρούσα εργασία διερευνώνται οι ευκαιρίες για αναστοχασμό που προσέφερε η συμμετοχή των μαθητών των Μαθηματικών μιας Ε' τάξης του Δημοτικού Σχολείου σε θεατρικά παιχνίδια που αναπτύχθηκαν με βάση τις εμπειρίες από τη συνεργασία τους σε μικρές ομάδες στα Μαθηματικά.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ο αναστοχασμός και η αυτορρύθμιση των μαθητών κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών

Ένας βασικός προσανατολισμός στην έρευνα για τη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών είναι η μελέτη της ανάπτυξης μεταγνωστικών διαδικασιών των μαθητών κατά τη μαθηματική τους δραστηριότητα. Η συγκεκριμένη ερευνητική κατεύθυνση είναι συνέπεια της έμφασης που έχει δοθεί στο ρόλο της απόκτησης συνείδησης από τους ίδιους τους μαθητές των ενεργειών τους καθώς μαθαίνουν Μαθηματικά και των διαδικασιών αυτορρύθμισής τους (Kilpatrick,1985). Η ανάπτυξη από τους μαθητές μεταγνωστικών διαδικασιών όπως: η αυτοαξιολόγηση, η αξιολόγηση της σκέψης του άλλου, η οργάνωση ενός σχεδίου δράσης, η επιλογή στρατηγικών και ο έλεγχος της προόδου των ενεργειών του από τον ίδιο το μαθητή έχουν θετικές συνέπειες στη μάθηση των Μαθηματικών (Mokos et al., 2009).

Ωστόσο, η ανάπτυξη των παραπάνω διαδικασιών συντελείται σε κοινωνικά περιβάλλοντα όπου η αλληλεπίδραση μεταξύ των συμμετεχόντων σ' αυτά επηρεάζεται από τη σχέση μεταξύ των γνώσεών τους, των απόψεών για τον εαυτό τους και τους άλλους και των συναισθημάτων τους. Η μελέτη, επομένως, του τρόπου απόκτησης συνείδησης και των διαδικασιών αυτορρύθμισης των συμμετεχόντων σχετίζεται με τη μελέτη της ανάπτυξης των συζητήσεων μεταξύ των μαθητών μιας ομάδας. Οι διάλογοι που αναπτύσσονται κατά την ενασχόληση με τα Μαθηματικά φέρουν τις σχέσεις αυτές καθώς εξαρτώνται από αυτές. Ο αναστοχασμός των συμμετεχόντων πάνω στους διαλόγους τους στα Μαθηματικά (μεταδιαλογικός) επιτρέπει την αποκάλυψη των σχέσεων, τον εντοπισμό δυσκολιών κατά την επικοινωνία στα Μαθηματικά και τον προσδιορισμό δράσεων για τη βελτίωσή της. (Χαβιάρης, 2006).

Αρκετές έρευνες στις οποίες μελετάται η μεταγνωστική συμπεριφορά των μαθητών των Μαθηματικών έχουν αναπτυχθεί σε συνεργατικά περιβάλλοντα μάθησης. Βασικά συμπεράσματα των ερευνών αυτών είναι:

- Η ανάπτυξη μεταγνωστικών διαδικασιών στο μαθητή σχετίζεται με την ανάπτυξη μεταγνωστικών συζητήσεων μεταξύ των μαθητών μιας ομάδας (Kramarski et al, 2002).

- Η συνεργατική διδασκαλία που εστιάζεται σε μεταγνωστικές διαδικασίες έχει θετική επίδραση στη μάθηση των Μαθηματικών. Οι διαδικασίες αυτές αναπτύσσονται μέσα από τις αλληλεπιδράσεις των συμμετεχόντων, καθώς ο ένας προσφέρει τη σκέψη του στον άλλο για αξιολόγηση και καθώς ο ένας δρα ως κριτής της σκέψης του άλλου (Goos et al.,2002; Dekker et.al,2006).
- Σημαντικό ρόλο για την ανάπτυξη παραγωγικών συνεργασιών στα Μαθηματικά διαδραματίζει η παγίωση συγκεκριμένων συμπεριφορών από τους συμμετέχοντες κατά τη συνεργασία τους στα Μαθηματικά. Η αποδοχή αυτών των συμπεριφορών από τα μέλη της ομάδας διαμορφώνει σχέσεις και διακριτούς ρόλους (π.χ. του μαθητή των Μαθηματικών ως βοηθού και του μαθητή των Μαθηματικών ως βοηθούμενου) οι οποίοι μεταβάλλονται δύσκολα και αποτελούν εμπόδιο για την ανάπτυξη μιας παραγωγικής συνεργασίας στα Μαθηματικά. (Good et al. 1992).

Η αναστοχαστική λειτουργία του Θεατρικού παιχνιδιού

Η έρευνα για το ρόλο του θεατρικού παιχνιδιού στην εκπαιδευτική διαδικασία έχει αναπτυχθεί κυρίως την τελευταία εικοσαετία γύρω από τη διερεύνηση των δυνατοτήτων του στην αισθητική αγωγή των παιδιών και τη συμβολή του στη μάθηση και τη διδασκαλία άλλων γνωστικών αντικειμένων. Στην παρούσα εργασία θα αναφερθούμε σε έρευνες που αφορούν στη χρήση του θεατρικού παιχνιδιού στη διδασκαλία άλλων γνωστικών περιοχών και ιδιαίτερα των Μαθηματικών. Προς αυτή την κατεύθυνση, οι ερευνητικές εργασίες αφορούν στην οικοδόμηση εννοιών και την ανάπτυξη στάσεων και αντιλήψεων καθώς και στην αναστοχαστική-μεταγνωστική λειτουργία του θεατρικού παιχνιδιού (Chaviaris & Kafoussi, 2010).

Στην πρώτη κατηγορία οι μελέτες εστιάζουν στο κατά πόσο και πώς το θεατρικό παιχνίδι μπορεί να βοηθήσει στη μάθηση και στη διδασκαλία μιας έννοιας. Οι περισσότερες εργασίες αφορούν στη βιωματική διδασκαλία της λογοτεχνίας, της μητρικής γλώσσας, των ξένων γλωσσών καθώς και της Ιστορίας (Fleming, 2004 ; Goalen,1996). Ωστόσο, τελευταία έχουν αναπτυχθεί εργασίες που αφορούν και γνωστικά αντικείμενα των θετικών επιστημών. Τα πλεονεκτήματα της διδασκαλίας μέσω θεατρικού παιχνιδιού όπως αυτά καταγράφονται στις παραπάνω έρευνες αφορούν:

- στην πειραματική- διερευνητική του διάσταση,
- στην ανάπτυξη φαντασίας που επιτρέπει την παραγωγή διαφορετικών ή εναλλακτικών λύσεων σε ένα πρόβλημα,

- στην ανάπτυξη αναπαραστάσεων μέσω της αναλογικής μάθησης (learning through metaphor) (McNaughton, 2004).

Οι έρευνες για τη χρήση του θεατρικού παιχνιδιού στη διδασκαλία των Μαθηματικών είναι περιορισμένες και αφορούν κυρίως τη διδασκαλία της γεωμετρίας. Για παράδειγμα, σε ένα διδακτικό πείραμα που πραγματοποιήθηκε σε μαθητές ηλικίας 13 ετών διαπιστώθηκε ότι η διδασκαλία που στηρίχθηκε στο θεατρικό παιχνίδι είχε θετική επίδραση στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών με βάση τα επίπεδα Van Hiele, επέτρεψε να βιώσουν οι μαθητές ποικίλες καταστάσεις που σχετίζονταν με τις γεωμετρικές έννοιες που διδάχτηκαν και να αλλάξουν στάσεις για το συγκεκριμένο μάθημα (Duatepe, 2005). Πιο πρόσφατα, σε ένα διαθεματικό πρόγραμμα το οποίο ανάμεσα σε άλλες δραστηριότητες περιελάμβανε και δραστηριότητες βασισμένες σε τεχνικές Δράματος, μαθητές Λυκείου σε ένα συνεργατικό πλαίσιο πραγματεύτηκαν γεωμετρικές έννοιες και παράλληλα συνειδητοποίησαν τη σύνδεση των Μαθηματικών με την αντίστοιχη τοπική κουλτούρα (Σταθοπούλου κ.α., 2010).

Στη δεύτερη κατηγορία οι ερευνητικές εργασίες επιχειρούν να μελετήσουν τη μεταγνωστική λειτουργία του θεατρικού παιχνιδιού. Προς αυτή την κατεύθυνση, έχουν αναπτυχθεί εργασίες που χρησιμοποιούν το θεατρικό παιχνίδι ως περιβάλλον αναστοχασμού τόσο των μαθητών όσο και των εκπαιδευτικών. Για παράδειγμα, ο Johnson (2002) μελέτησε το ρόλο του θεατρικού παιχνιδιού για τη δημιουργία ευκαιριών για αναστοχασμό των μαθητών πάνω στις ενέργειες των ρόλων που υποδύονταν κατά τα δρώμενά τους με θέμα ένα ιστορικό γεγονός (ο αποικισμός στην Αμερική στα μέσα του 18^{ου} αιώνα). Οι Breen & Hannula (2003) χρησιμοποίησαν το θεατρικό παιχνίδι ως περιβάλλον αναστοχασμού για ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών σχετικά με την ποικιλία των ερμηνειών που έδιναν κατά την ανάλυση ερευνητικών δεδομένων από τη διδασκαλία σε μια σχολική τάξη.

Σύμφωνα με τον Bolton (1995), το θεατρικό παιχνίδι επιτρέπει το συλλογικό αλλά και τον ατομικό στοχασμό πάνω σε μια εμπειρία καθώς η εμπειρία από μόνη της δεν είναι ούτε παραγωγική ούτε μη παραγωγική, ο τρόπος στον οποίο κάποιος στοχάζεται πάνω σ' αυτή την κάνει σημαντική. Οι μαθητές μέσα από ρόλους ωφελούνται όχι μόνο λόγω της εμπλοκής τους σε ρεαλιστικά προβλήματα, αλλά κυρίως μέσω της εργασίας και της σκέψης τους πάνω σε ρεαλιστικούς ρόλους. Το να σκέφτονται και να δρουν σαν να είναι κάποιος άλλος κινητοποιεί διαδικασίες αναστοχασμού πάνω στις δικές τους σκέψεις και ενέργειες Andersen (2002).

Συνδέοντας τις παραπάνω επισημάνσεις οδηγηθήκαμε στα εξής ερωτήματα: Είναι το θεατρικό παιχνίδι πρόσφορο περιβάλλον για να αναπαριστούν οι μαθητές σε ρόλους τις προσωπικές τους μαθηματικές εμπειρίες; Ποιες ευκαιρίες για αυτορρύθμιση της μαθηματικής τους δραστηριότητας έχουν οι μαθητές καθώς αναπαριστούν σε ρόλους προηγούμενες μαθηματικές τους εμπειρίες;

ΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε μια Ε΄ τάξη ενός δημόσιου Δημοτικού Σχολείου το 2004 είχε διάρκεια περίπου 6 μήνες και αποτελεί μέρος ευρύτερου ερευνητικού προγράμματος που είχε σκοπό τη μελέτη των τροποποιήσεων που επιχειρούσαν οι μαθητές στην κοινωνική τους αλληλεπίδραση στη σχολική τάξη των Μαθηματικών (Χαβιάρης 2006). Στην τάξη αυτή φοιτούσαν 18 μαθητές από τους οποίους 9 ήταν κορίτσια και 9 αγόρια. Οι 13 μαθητές ήταν ελληνικής καταγωγής και οι 5 άλλης καταγωγής (2 από την Αλβανία, 2 από την Ουκρανία και 1 από τη Σριλάνκα). Η επιλογή των μελών κάθε ομάδας (2 ατόμων) έγινε με κριτήριο τις διαφοροποιήσεις ή μη που παρουσίαζαν οι μαθητές της συγκεκριμένης τάξης τόσο στις ήδη διαμορφωμένες απόψεις τους για το ρόλο της συνεργασίας στη μαθηματική δραστηριότητα (όπως αυτές καταγράφηκαν σε ημιδομημένες συνεντεύξεις) όσο και στις ικανότητές τους στα Μαθηματικά. Ο συνδυασμός μαθητών με ίδια ή διαφορετικά χαρακτηριστικά επέτρεψε τη δημιουργία διαφορετικών περιπτώσεων- ομάδων της έρευνας.

Οργάνωση των ομάδων

κριτήρια	σύμβολα
Αρνητικές απόψεις για το ρόλο της συνεργασίας στα Μαθηματικά	Α
Θετικές απόψεις για το ρόλο της συνεργασίας στα Μαθηματικά	Θ
Τα καταφέρνει στα Μαθηματικά	1
Τα καταφέρνει στα Μαθηματικά αλλά μερικές φορές με βοήθεια	2
Τα καταφέρνει στα Μαθηματικά μόνο με βοήθεια	3

Πίνακας 1.

Οι πέντε διαφορετικές περιπτώσεις ομάδων μαθητών που προέκυψαν στη συγκεκριμένη τάξη παρουσιάζονται στον πίνακα 2.

Το προφίλ των ομάδων

περίπτωση	προφίλ ομάδας	πλήθος ομάδων
1η	Α1 - Θ2	3
2η	Α1 - Α2	1
3η	Α2 - Α2	1
4η	Θ1 - Α3	1
5η	Θ2 - Θ2	3

Πίνακας 2.

Οι μαθητές κάθε μικρής ομάδας συνεργάζονταν 4 φορές την εβδομάδα στη διδασκαλία των Μαθηματικών που πραγματοποιούσε η δασκάλα της τάξης. Οι διδασκαλίες των Μαθηματικών αφορούσαν την ενότητα των κλασμάτων.

Μία φορά την εβδομάδα οι ομάδες των μαθητών παρατηρούσαν, παρουσία του ερευνητή, μία μαγνητοσκοπημένη συνεργασία τους, την αξιολογούσαν, συζητούσαν για θέματα που αφορούσαν τη μαθηματική τους δραστηριότητα και έθεταν στόχους για τη βελτίωσή της (Chaviaris et al., 2007). Επιπλέον, σχεδίαζαν και παρουσίαζαν στην τάξη παιχνίδια ρόλων βασισμένα στις εμπειρίες τους από τη συνεργασία τους στα Μαθηματικά. Τα παιχνίδια ρόλων βιντεοσκοπούνταν. Στο τέλος του προγράμματος οι μαθητές συμμετείχαν σε συνεντεύξεις με σκοπό την καταγραφή των απόψεών τους για το ρόλο της συνεργασίας στη μαθηματική τους δραστηριότητα.

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται και αναλύονται τα κείμενα των δρώμενων των μαθητών σε δύο επίπεδα: α) στο *μεταδιαλογικό,* όπου οι μαθητές σε ζευγάρια επιχειρούσαν να σχεδιάσουν τα δρώμενά τους και συζητούσαν πάνω στις εμπειρίες τους από τη συνεργασία τους στα Μαθηματικά και β) στο *συλλογικό*, όπου όλοι οι μαθητές συζητούσαν πάνω στα δρώμενα που παρουσιάστηκαν στην τάξη (πίνακας 3).

Ανάλυση των παιχνιδιών ρόλων

Μεταδιαλογικό επίπεδο	- ποιους ρόλους επέλεγε να παίξει ο μαθητής κάθε ομάδας - ποια ήταν η σχέση ανάμεσα στα σενάρια που κατασκεύαζαν οι μαθητές και στις εμπειρίες τους από τη συνεργασία τους στα Μαθηματικά
Συλλογικό επίπεδο	- ποια σχόλια έκαναν για το ρόλο τους οι συμμετέχοντες στο παιχνίδι ρόλων μετά από την παρουσίασή του - ποια σχόλια έκαναν οι άλλοι μαθητές της τάξης μετά την παρουσίαση ενός παιχνιδιού ρόλων

Πίνακας 3.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

- Κατά την αρχική συνέντευξη με τους μαθητές της συγκεκριμένης τάξης καταγράφηκαν οι απόψεις τους για το ρόλο της συνεργασίας στα Μαθηματικά οι οποίες είχαν τα παρακάτω χαρακτηριστικά:
- Η επιθυμία των μαθητών να συνεργαστούν στα μαθηματικά επηρεαζόταν από τις ικανότητές τους. Οι μαθητές με μέτρια και χαμηλή επίδοση στα μαθηματικά επιθυμούσαν περισσότερο να συνεργαστούν με κάποιο συμμαθητή τους προσδοκώντας τη βοήθεια που μπορεί να τους προσφερόταν. Αντίθετα οι μαθητές με υψηλή επίδοση επιθυμούσαν να εργάζονται μόνοι τους ή να ζητούν βοήθεια από το δάσκαλο σε περίπτωση που τη χρειαστούν.
- Οι περισσότεροι μαθητές πίστευαν ότι η μαθηματική γνώση αποκτιέται με ατομική προσπάθεια.
- Οι περισσότεροι μαθητές πίστευαν ότι η ύπαρξη διαφορετικών ιδεών κατά την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος δημιουργεί δυσκολίες στην κατανόηση των μαθηματικών.
- Οι περισσότεροι μαθητές θεωρούσαν ότι η παρουσίαση της σκέψης τους στο συμμαθητή τους δεν προστατεύει την αυτοεικόνα τους.

Παρακάτω παρουσιάζουμε τις ευκαιρίες για αναστοχασμό και αυτορρύθμιση που είχαν οι μαθητές σχεδιάζοντας, παίζοντας και συζητώντας πάνω στα παιχνίδια ρόλων που αφορούσαν εμπειρίες τους από τη συνεργασία τους στα Μαθηματικά:

Α) Σε μεταδιαλογικό επίπεδο οι μαθητές είχαν ευκαιρίες όπως:

- *Να σκεφτούν πάνω στις δυσκολίες και τα συναισθήματα που βίωνε ο συμμαθητής τους κατά τη διάρκεια της συνεργασίας τους στα Μαθηματικά.*

Για παράδειγμα, σε μια περίπτωση ομάδας (Α1-Θ2) η Σταυρούλα, μια «καλή» μαθήτρια στα Μαθηματικά συνεργαζόταν με την Αλεξία η οποία χρειαζόταν συνήθως βοήθεια για να ολοκληρώσει τη δραστηριότητά της. Σε ένα παιχνίδι ρόλων οι μαθήτριες επέλεξαν να αναπαραστήσουν αντίθετους ρόλους από αυτούς που βίωναν στη συνεργασία τους. Η Σταυρούλα δικαιολόγησε την επιλογή της λέγοντας: «*Θέλω να μάθω πώς νιώθει η Αλεξία όταν μου ζητά να της δείξω το πρόβλημα*»

- *Να σκεφτούν και να εκφράσουν τα συναισθήματα που τους προκαλούσαν κάποιες ενέργειες των συμμαθητών τους.*

Οι μαθητές σε αρκετά παιχνίδια αναπαράστησαν συναισθήματα όπως της ικανοποίησης ή της δυσαρέσκειας που προκαλούσε η αποδοχή ή απόρριψη χωρίς επιχειρήματα μιας συνεισφοράς στη λύση ενός μαθηματικού προβλήματος.

- *Να αξιολογήσουν την εξέλιξη της συνεργασίας τους στα Μαθηματικά.*

Το παρακάτω σενάριο παιχνιδιού ρόλων είναι αντιπροσωπευτικό μιας τέτοιας ευκαιρίας. Ο Παύλος και ο Νίκος (περίπτωση ομάδας Α1-Θ2) αποφάσισαν να αναπαραστήσουν τρεις διαφορετικές στιγμές από την εξέλιξη της συνεργασίας τους:

Σκηνή 1η

[1]Ν: (*διαβάζει ένα πρόβλημα*) Η Εύη τράβηξε τα 7/12 του φιλμ και ο Νικήτας τα 4/12 του φιλμ. Τα παιδιά συζητούσαν για το ποιος τράβηξε τις περισσότερες φωτογραφίες και αν τους περίσσεψε φιλμ για να τραβήξουν κι άλλες φωτογραφίες. Ποιο παιδί τράβηξε περισσότερο; Πόσο περισσότερο;

(τα παιδιά παρέμειναν σιωπηρά για λίγο κοιτάζοντας το καθένα το βιβλίο του)

[2]Π:Το βρήκες;

[3]Ν:Το βρήκα.

[4]Π & Ν (μαζί): Κύριε! Κύριε! (σηκώνοντας το χέρι)

Σκηνή 2η

[5]Π: (*διαβάζει ένα πρόβλημα*) Σε μια άλλη εκδρομή η Εύη τράβηξε τα 2/4 του φιλμ και ο Νικήτας τα 2/6 του φιλμ. Ποιο παιδί τράβηξε περισσότερο; Πόσο περισσότερο;

…(παρέμειναν για λίγο σκεφτικοί)

[6]Ν: Εγώ πιστεύω πως τους περίσσεψε 1/6. Εσύ;

[7]Π: Κι εγώ το ίδιο 2/12.

[8] Π & Ν (μαζί): Κύριε! Κύριε! (σηκώνοντας το χέρι).

Σκηνή 3η

[9]Ν: (*διαβάζει ένα πρόβλημα*) Ο Γιάννης και η Μαρία έβαφαν τους απέναντι τοίχους του δωματίου τους που ήταν ίσοι. Γιάννης: «*Σε πέρασα έβαψα τα 2/3 του τοίχου*». Μαρία: «*Εγώ σε πέρασα, έβαψα τα 5/6 του τοίχου*». Ποιος έχει δίκιο;

[10]Π: Τι λες;

[11]Ν: Να ζωγραφίσουμε τους τοίχους και να τους χωρίσουμε.

[12]Π: Το 5/6 είναι μεγαλύτερο. Φαίνεται.

[13]Ν: Σωστά, άλλος τρόπος;

[14]Π: Το 2/3 είναι σαν 4/6

[15]Ν: Το 4/6 είναι πιο μικρό.

[16]Π: Να το πούμε στην τάξη; (σηκώνουν τα χέρια τους ταυτόχρονα).

Οι δυο μαθητές μέσα από το παιχνίδι ρόλων φαίνεται να έχουν αποκτήσει συνείδηση των διαφορετικών φάσεων ανάπτυξης της συνεργασίας τους και να είναι ικανοί να εντοπίζουν ρυθμίσεις στην αλληλεπίδρασή τους στα Μαθηματικά. Αρχικά, όπως παρουσίασαν στο δρώμενό τους δε συζητούσαν καθόλου, στη συνέχεια η συζήτησή τους αφορούσε μόνο στο αποτέλεσμα της δραστηριότητας ενώ στο τέλος η συζήτησή τους αναπτύχθηκε γύρω από στρατηγικές επίλυσης του προβλήματος και στην από κοινού ευθύνη ολοκλήρωσης της μαθηματικής τους δραστηριότητας.

- *Να εστιάσουν σε κρίσιμες στιγμές της μαθηματικής τους συζήτησης*

Σε δύο σενάρια οι μαθητές επέλεξαν να παρουσιάσουν στους συμμαθητές τους πώς διαχειρίστηκαν κρίσιμες στιγμές στη μαθηματική τους συζήτηση όπως ένα λάθος ή την λήψη μιας απόφασης χωρίς την αιτιολόγησή της.

Β) Σε συλλογικό επίπεδο το θεατρικό παιχνίδι μέσα από τη μορφή των παιχνιδιών ρόλων έδωσε στους μαθητές τις παρακάτω ευκαιρίες για αναστοχασμό και αυτορρύθμιση:

- *Να αξιολογήσουν τη συμπεριφορά των μαθητών-ρόλων και να τις συγκρίνουν με τις δικές τους εμπειρίες από τη συνεργασία τους στα Μαθηματικά.*
- *Να συνδέσουν συγκεκριμένες ενέργειες της μαθηματικής τους δραστηριότητας με τη δημιουργία συγκεκριμένων συναισθημάτων*
- *Να απενοχοποιήσουν συμπεριφορές για τις οποίες έχουν αλλάξει γνώμη*

Για παράδειγμα, μετά την παρουσίαση ενός παιχνιδιού ρόλων αναπτύχθηκε στην τάξη η παρακάτω συζήτηση:

[1]Ερ: Θέλετε να μας μιλήσετε για του ρόλους σας;

[2]Π: Πιστεύω πως ήταν εγωιστικός ο ρόλος γιατί δε σκεφτόταν το διπλανό του.

[3]Ν: Ένιωθα νευριασμένος γιατί του ζητούσα τη βοήθειά του και αυτός ήθελε να το πει μόνο στον κύριο.

[4]Ερ: Ωραία, ποιος θέλει να μιλήσει για τη συνεργασία που μας έδειξαν τα παιδιά;

[5]Μ1: Έπρεπε να του πει για το λάθος στο πρόβλημα, να καταλάβει. Τον έκανε να στενοχωρηθεί.

[6]Μ2: Ωραία παίξανε τα παιδιά, εγώ δε θα ήθελα να ήμουν όπως ο Νίκος στο θέατρο.

[7]Μ3: Κι εγώ το ίδιο, αν ήμουν ο Παύλος θα το βοηθούσα.

[8[Π: (απευθύνεται στο μαθητή Μ3) Κι εμένα δε μου άρεσε που δεν του είπε, αλλά αυτό ήταν θέατρο.

Οι αναφορές τόσο των μαθητών της ομάδας που παρουσίασε το δρώμενο όσο και των άλλων μαθητών σχετίζονται με την αξιολόγηση τόσο των ενεργειών των μαθητών- ρόλων, όσο και των συναισθημάτων που προκάλεσαν οι ενέργειες αυτές. Συγκεκριμένα, οι περισσότεροι μαθητές που πήραν μέρος στη συζήτηση αναφέρθηκαν στις αρνητικές συνέπειες για τη συνεργασία στα μαθηματικά που είχε η συμπεριφορά του παιδιού που παρίστανε ο Παύλος[2,3,5]. Επιπλέον, κάποιοι μαθητές σχολίασαν τη συγκεκριμένη συμπεριφορά προβάλλοντάς την στον εαυτό τους[6,7]. Αξίζει, επίσης, να σημειώσουμε την αναφορά του Παύλου στη λειτουργία του θεατρικού παιχνιδιού για την απενοχοποίηση συμπεριφορών που προκαλούν αρνητικά συναισθήματα σε έναν μαθητή κατά τη μαθηματική του δραστηριότητα στην τάξη[8].

Στο τέλος του προγράμματος οι απόψεις των μαθητών για το ρόλο της συνεργασίας στα Μαθηματικά είχαν αλλάξει. Οι περισσότεροι μαθητές δήλωσαν ότι η συνεργασία με τους συμμαθητές τους βοηθά τη δική τους μαθηματική δραστηριότητα. Σημαντική διαφοροποίηση υπήρξε στην άποψη που είχαν πολλοί μαθητές για το εμπόδιο που προκαλούν οι διαφορετικές ιδέες για τη λύση ενός προβλήματος. Μετά το πρόγραμμα θεωρούσαν ότι η ύπαρξη πολλών και διαφορετικών ιδεών βοηθά στην ανάπτυξη της μαθηματικής συζήτησης και στην εύρεση σωστών κοινά αποδεκτών λύσεων σε ένα πρόβλημα.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Το θεατρικό παιχνίδι φαίνεται να είναι ένα πρόσφορο περιβάλλον για τον αναστοχασμό των μαθητών πάνω στη συνεργασία τους στα Μαθηματικά καθώς έδωσε ευκαιρίες στους μαθητές να σκεφτούν πάνω σε σημαντικά θέματα της μαθηματικής συζήτησης στην τάξη, όπως τις δυσκολίες και τα συναισθήματα των συνομιλητών τους, να αξιολογήσουν την εξέλιξη της συνεργασίας τους στα Μαθηματικά και να συζητήσουν κρίσιμα θέματα όπως η διαχείριση των λαθών και η αναγκαιότητα της τεκμηρίωσης μιας πρότασης. Επιπλέον, μπορεί να δώσει την ευκαιρία στους μαθητές να βιώσουν την αναγκαιότητα αλλαγής του τρόπου που συνεργάζονται στα Μαθηματικά μέσα από διαδικασίες αυτοαξιολόγησης των ενεργειών τους και αξιολόγησης των ενεργειών των συμμαθητών τους.

Το συγκεκριμένο μαθησιακό περιβάλλον μελετήθηκε στα πλαίσια ερευνητικού προγράμματος με σκοπό την ανάδειξη των δυνατοτήτων του στον αναστοχασμό των μαθητών πάνω στη συνεργασία τους στα μαθηματικά. Η αξιοποίηση του παιχνιδιού ρόλων καθώς και άλλων μορφών του θεατρικού παιχνιδιού σε διδακτικές πρακτικές και η ενσωμάτωσή του στη διδασκαλία διαφορετικών τάξεων του Δημοτικού Σχολείου χρειάζεται περαιτέρω διερεύνηση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Andersen, C. (2002): Thinking as and thinking about: Cognition and metacognition in drama in education. In B. Rasmussen and A. L. Ostern (Eds.), *Playing betwixt and between: The IDEA dialogues 2001* (pp. 265-270). Landslaget, Drama i Skolen, Oslo.

Andersen, C. (2004): Learning in "as-if" worlds: Cognition in drama in education. *Theory into Practice*, *43*(4), 281-286.

Bolton, G. (1995): Afterword: Drama as research. In P. Taylor (Ed.), *Researching Drama and Arts Education* (pp. 187- 194). London: The Falmer Press.

Breen, C., & Hannula, M. S. (2003): Exploring alternative interpretations of classroom data. *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *Vol.1*, (pp.174). Honolulu, USA.

Chaviaris, P., Kafoussi, S., & Kalavassis, F. (2007): Pupils' meta-discursive reflection on mathematics: A case study. *Teaching Mathematics and Computer Science, 5*(1), 147-169.

Chaviaris, P. & Kafoussi, S. (2010): Developing students' collaboration in a mathematics classroom through dramatic activities. *International Electronic Journal of Mathematics Education,* 5(2), 92-111.

Dekker, R., Elshout, M., & Wood, T. (2006): How children regulate their own collaborative learning. *Educational Studies in Mathematics, 62*, 57-79.

Duatepe, A. (2005): The effects of drama-based instruction on seventh grade students' geometry achievement, van Hiele geometry thinking levels, attitudes toward mathematics and geometry. *Research in Drama Education, 10*(1), 65-66.

Fleming, M., Merell, C., & Tymms, P. (2004): The impact of drama on pupils' language, mathematics, and attitude in two primary schools. *Research in Drama Education*, *9*(2), 177-197.

Goalen, P. (1996): Educational drama and children's historical writing: process and product. *The Curriculum Journal*, 7(1), 75-91.

Good,T, Mulryan,C. & McCaslin,M. (1992): Grouping for instruction in Mathematics: A call for programmatic research on small-group processes. In D.A.Grows(Ed..*), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, p.p.165-196, MacMillan.NY.

Goos, M., Galbraith, P., & Renshaw, P. (2002): Socially mediated metacognition: Creating collaborative zones of proximal development in small group problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 49,* 193-223.

Johnson, C. (2002): Drama and metacognition. *Early Child Development and Care*, *172,* 595-602.

Καλαβάσης, Φ. (2007): Ορισμένες αρχικές επισημάνσεις για την έννοια του σχεδιασμού εκπαιδευτικών μονάδων. Στο Φ. Καλαβάσης & Α. Κοντάκος (Επιμ.) *Θέματα Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού* (σ. 15-28). Ατραπός.

Kafoussi, S. (2006): Parents' and students' interaction in mathematics: designing home mathematical activities. *Proceedings of CIEAEM 58,* "Changes in society: A challenge for Mathematics Education", 209-214. Czech Republic.

Kilpatrick, J. (1985): Reflection and recursion. *Educational Studies in Mathematics*. 16, 1-26.

Kramarski, B., Mevarech, Z. R., & Arami, M. (2002): The effects of metacognitive instruction on solving mathematical authentic tasks. *Educational Studies in Mathematics, 49,* 225-250.

McNaughton, M.J. (2004): Educational drama in the teaching of education for sustainability. *Environmental Education Research*, 10(2),139-155.

Mokos, E., Chaviaris, P. & Kafoussi S. (2009) : Metacognitive skills and different kinds of mathematical problems at fourth grade. *Proceedings of CIEAEM61, 172-177.* Montreal, Canada.

Σταθοπούλου, Χ., Κοταρίνου, Π. & Χαβιάρης, Π. (2010): Εθνομαθητικές Ιδέες, Τεχνικές του Δράματος και Webquest: Καινοτόμες Προσεγγίσεις στη Διδασκαλία

της Γεωμετρίας στο Λύκειο. *Πρακτικά 27ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, (σ. 971-982)

Voigt, J. (1995): Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in Classroom Cultures* (pp.163-201). LEA.

Χαβιάρης, Π. (2006): *Τύποι κοινωνικομαθηματικής αλληλεπίδρασης στη σχολική τάξη των μαθηματικών: η παρατήρηση μαγνητοσκοπημένης συνεργασίας και το παιχνίδι ρόλων ως περιβάλλοντα αναστοχασμού*. Αδημοσίευτη διδακτορική διατριβή. Παν/μιο Αιγαίου.

Zimmerman, B. J. (1995): Self-regulation involves more than metacognition: A social cognitive perspective. *Educational Psychologist, 30*, 217–221.

chaviaris@rhodes.aegean.gr

ΘΕΑΤΡΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ

Αντιγόνη Παρούση
Επίκουρη Καθηγήτρια ΤΕΑΠΗ-ΕΚΠΑ

Βασίλης Τσελφές
Καθηγητής ΤΕΑΠΗ-ΕΚΠΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία παρουσιάζεται ο σχεδιασμός, η εφαρμογή και τα αποτελέσματα από μια σειρά μαθημάτων θεατρικής έκφρασης, με τεχνικές κουκλοθέατρου, σε φοιτητές του Τμήματος Εκπαίδευσης και Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία του Πανεπιστημίου Αθηνών. Στα μαθήματα αυτά οι φοιτητές κλήθηκαν να οργανωθούν σε ομάδες και να παράγουν μια μικρή θεατρική σπουδή όπου ήρωας θα ήταν ένα γεωμετρικό σχήμα, για παράδειγμα, ένα τρίγωνο.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι φοιτητές αξιοποιούν απλές γεωμετρικές ιδέες (π.χ. σχέσεις ομοιότητας ή ισότητας) και κατασκευάζουν με αυτές αφηγηματικά «προβλήματα» στα οποία δίνουν συνδυασμένες «κοινωνικές» και «μαθηματικές» λύσεις. Επιπλέον, η πίεση για μια θεατρικά επαρκή παράσταση (δραματουργικά, σημειωτικά και αισθητικά) τους υποχρεώνει να αναζητούν και πολλές φορές να οικοδομούν πιο σύνθετες ή και μετασχηματισμένες γεωμετρικές ιδέες, τη μαθηματική ταυτότητα των οποίων, τελικά, δεν φαίνεται να αναγνωρίζουν, τουλάχιστον ρητά.

ΤΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Η μελέτη αυτή ξεκίνησε και εξελίχθηκε στο πλαίσιο μαθημάτων εισαγωγής στο κουκλοθέατρο, που απευθύνονται σε πρωτοετείς φοιτητές και φοιτήτριες, μελλοντικούς/ές εκπαιδευτικούς παιδιών προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας (πρόκειται για 2 φοιτητές και 220 φοιτήτριες που από 'δω και πέρα θα αναφέρονται στο κείμενο ως φοιτήτριες). Τα μαθήματα αυτά είχαν στόχο την καταρχήν *μύηση* στη θεατρική τέχνη, μέσα από τα «υλικά» που έχουν συσσωρευτεί από την άσκηση της τέχνης του κουκλοθέατρου, από καλλιτέχνες και μη, στο πλαίσιο διαφορετικών πολιτισμών και σε χρονικά διαστήματα που αγγίζουν τα όρια της έναρξης του ιστορικού χρόνου και φτάνουν μέχρι τις μέρες μας.

Στις εκπαιδευτικές της διαστάσεις, αυτή η *μύηση* έχει την έννοια μιας άσκησης (με παιδαγωγικούς στόχους) στην *αναπαραγωγή* κάποιων θεμελιωδών χαρακτηριστικών της θεατρικής έκφρασης, μέσω τοπικών μικρών *παραγωγών* των εκπαιδευομένων (Τσελφές, Παρούση & Βαρσάμου, 2009). Αυτό της δίνει τη διάσταση μιας δημιουργικής δραστηριότητας (παραγωγή θεατρικών σπουδών από ομάδες φοιτητριών) κάτω από την πίεση της παράδοσης και της θεωρίας που συνοδεύει την τέχνη του κουκλοθέατρου στη σημερινή της εκδοχή.

Η συγκεκριμένη άσκηση δεν αντιμετωπίζεται σαν να μυεί τις φοιτήτριες απλά σε κάποια τεχνική του κουκλοθεάτρου (π.χ. θέατρο σκιών, μαριονέτα, μαύρο θέατρο κλπ) στο περιορισμένο από την πρωτοσχολική εκπαίδευση πλαίσιο. Κάθε τεχνική συγκροτεί με τον τρόπο της μια ολοκληρωμένη θεατρική τέχνη και ως εκ τούτου μια γνωριμία μαζί της δεν μπορεί παρά να προσεγγίζει συνολικά τη *θεατρική παραγωγή*, πιέζοντας τις φοιτήτριες να αναπαράγουν με επιτυχία τουλάχιστον την ισορροπία του δραματουργικού, του σημειωτικού και του αισθητικού της σκέλους. Η ισορροπία αυτή φαίνεται να προστατεύει από μόνη της την παιδαγωγική αποτελεσματικότητα του μηνύματος/ ιδέας, που εκπέμπει η θεατρική παραγωγή. Θεωρούμε, δηλαδή, ότι η θεατρική ποιότητα προστατεύει κατά κάποιον τρόπο τα διδακτικά και παιδαγωγικά μηνύματα από τον εκφυλισμό του διδακτισμού και της σχολικής ρουτίνας. Μια παιδαγωγικά αφελής ιδέα, που στηρίζεται, για παράδειγμα, στα γνωστά στο χώρο της προσχολικής εκπαίδευσης κλισέ, δεν μπορεί να συνυπάρξει με μια καλή θεατρική αναπαράστασή της. Μια αφελής ιδέα είναι εξαιρετικά απίθανο να τροφοδοτήσει ένα αφηγηματικά ικανοποιητικό σενάριο γιατί τα κλισέ συνυπάρχουν με προβλέψιμες εξελίξεις που καταστρέφουν την «όρεξη για αφήγηση» (Norris et al., 2005)˙ και μια περιγραφική αναπαράσταση αναμενόμενων γεγονότων δεν μπορεί να σωθεί ούτε από τη σημειωτική επάρκεια ούτε από την αισθητική των θεατρικών

κατασκευών. Αντίστροφα, κάθε προσπάθεια θετικής στήριξής της αναμένεται ότι μάλλον θα αποδιοργάνωνε την ισορροπία της θεατρικής παραγωγής.

Επιπλέον, το γεγονός ότι η διαδικασία των θεατρικών εργαστηρίων στηρίζεται στην προώθηση της δημιουργικότητας των φοιτητριών, φαίνεται να έχει καλά μαθησιακά αποτελέσματα (δες π.χ. Tselfes & Paroussi, 2009). Η έμφαση στη δημιουργικότητα επιτρέπει την εμφάνιση και τη λειτουργία πλήθους διαφορετικών κινήτρων, αυξάνει διαρκώς τη συναισθηματική εμπλοκή των υποκειμένων, καθώς εξελίσσεται η θεατρική τους παραγωγή, δημιουργεί χώρο για την ουσιαστική συμμετοχή στη λήψη αποφάσεων και στη διαμόρφωση του χρονοδιαγράμματος της εργασίας ενώ, τέλος, υποχρεώνει τις φοιτήτριες να αναλάβουν μεγάλο μέρος της ευθύνης για το τελικό αποτέλεσμα (Pintrich, Marx & Boyle, 1993). Στην πράξη, οι παράγοντες αυτοί και τα καλά αποτελέσματα, δείχνουν να επαναλαμβάνονται τόσο όταν το μάθημα δίνει έμφαση μόνο στη θεατρική του πλευρά (Παρούση, 2007, 2008) όσο και όταν συνδυάζεται με άλλα γνωστικά αντικείμενα από την περιοχή των τεχνών, όπως με την κατασκευή μουσικών οργάνων (Παρούση, 2005) ή άλλων επιστημών της εκπαίδευσης, όπως με τη διδακτική της φυσικής (Paroussi & Tselfes, 2007, 2008).

Η τελευταία διαπίστωση επιτρέπει την οικοδόμηση κάποιων υποθέσεων που αναπαριστούν με θετικό τρόπο τη δυνατότητα σύνδεσης των μαθημάτων εισαγωγής στο κουκλοθέατρο και με το αντικείμενο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Η δυνατότητα αυτή ενισχύεται από τη ρεαλιστική προσέγγιση της μαθηματικής εκπαίδευσης (Realistic Mathematics Education). Η εκπαίδευση αυτή στοχεύει, καταρχήν, στην οικοδόμηση μιας μορφής προσωπικής μαθηματικής γνώσης από τους μαθητές, οι οποίοι καλούνται να δώσουν νόημα σε προβλήματα του «πραγματικού κόσμου» (Freudenthal, 1978, Treffers, 1987)· μια συνθήκη που επιτρέπει στους μαθητές να «ξανα-ανακαλύψουν» τις μαθηματικές ιδέες (Freudenthal, 1991), αν όχι και να τις μετασχηματίσουν. Το κρίσιμο βέβαια σημείο της διδακτικής σύνδεσης των μαθηματικών ιδεών με τη θεατρική έκφραση βρίσκεται, κατά την άποψή μας, στο τι εννοούμε με τον όρο «πραγματικό». Εάν το «πραγματικό» υπάρχει με τον τρόπο που το αναπαριστά το γνωστικό μας σύστημα και είναι αδύνατον να προσεγγιστεί «αντικειμενικά» και έξω απ' αυτό, τότε ο «κόσμος» μιας θεατρικής παράστασης μπορεί με ευκολία να θεωρηθεί ως ένας «πραγματικός κόσμος»· ιδιαίτερα, όταν αυτός οικοδομείται από τη σκέψη των μικρών παιδιών. Στην κατεύθυνση αυτή, ισχυρότατο επιχείρημα αποτελεί το γεγονός ότι η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση γεννήθηκε στην Ολλανδία, όπου σύμφωνα με την επισήμανση της van den Heuvel-Panhuizen (1998) το «φαντάζομαι» μεταφράζεται ως «zich realiseren»· μια λέξη που προσεγγίζει το «φανταστικό» ως κάτι που είναι «πραγματικό στο μυαλό μου». Ως εκ τούτου

ο φανταστικός κόσμος μιας θεατρικής αφήγησης, όπως άλλωστε και ο φανταστικός κόσμος των «επίσημων» μαθηματικών οντοτήτων, δομών και σχέσεων, είναι κατάλληλος ως πλαίσιο για την οικοδόμηση των προβλημάτων της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης.

Με βάση τα παραπάνω, ο σχεδιασμός της συγκεκριμένης σειράς μαθημάτων εισαγωγής στο κουκλοθέατρο στηρίχθηκε στις ακόλουθες υποθέσεις:

Η θεατρική έκφραση, ως παιδαγωγική τεχνική, μπορεί να ωφεληθεί από την εμπλοκή αφηρημένων μαθηματικών οντοτήτων στα διάφορα στάδια της ανάπτυξής της. Μπορεί συγκεκριμένα να ωφεληθεί σε αφηγηματικό/ δραματουργικό επίπεδο, όπου η χρήση μαθηματικών οντοτήτων στο σενάριο υποχρεώνει τις φοιτήτριες-δημιουργούς να πρωτοτυπήσουν και να απομακρυνθούν από τα αφηγηματικά κλισέ «για παιδιά». Μπορεί να ωφεληθεί σε σημειωτικό επίπεδο, όπου οι απλές γεωμετρικές μορφές για να μπορέσουν να διερμηνεύσουν τα διάφορα θεατρικά σημεία του σεναρίου υποχρεώνουν τις φοιτήτριες να κατανοήσουν τη σημασία της κίνησης στη θεατρική έκφραση και να ασκηθούν σ' αυτή. Μπορεί, τέλος, να ωφεληθεί και στο επίπεδο της αισθητικής, όπου ο απλός εικαστικός σχεδιασμός (design) των γεωμετρικών μορφών απαλλάσσει τη θεατρική εικόνα από το «φόρτωμα» που προκαλούν τα «στολίδια» και ωθεί προς συνθέσεις «καθαρών» θεατρικών εικόνων συντονισμένων με την κίνηση και τον ήχο.

Η μαθηματική εκπαίδευση, από την άλλη μεριά, μπορεί να ωφεληθεί κυρίως στη ρεαλιστική εκδοχή της από το γεγονός ότι όταν οι μαθηματικές (γεωμετρικές στην περίπτωση) οντότητες εμπλακούν σε μια θεατρική αφήγηση, οι δημιουργοί της αφήγησης είναι υποχρεωμένοι να κατασκευάσουν με αυτές «προβληματικές» καταστάσεις (προϋπόθεση μιας επαρκούς αφήγησης) αλλά και να τις «λύσουν», δηλαδή να τις αντιμετωπίσουν με κάποιο τρόπο, για να μπορέσουν να οδηγήσουν την αφήγηση στην «έξοδο». Στην προσπάθεια αυτή υποχρεώνονται να χρησιμοποιήσουν μαθηματικές ιδέες (οντότητες, ιδιότητες, σχέσεις) και να μάθουν απ' αυτές ή γι' αυτές. Ιδιαίτερα ενδιαφέρον θεωρούμε το γεγονός ότι η συγκεκριμένη συνθήκη υποχρεώνει τις φοιτήτριες να κατασκευάσουν και το πρόβλημα που θα λύσουν, κάτι που η ρεαλιστική προσέγγιση της μαθηματικής εκπαίδευσης φαίνεται να δυσκολεύεται γενικά να διαχειριστεί. Τέλος, εκτιμούμε ότι η παραπάνω προσέγγιση μπορεί να συνεισφέρει στο διάλογο για την εκπαίδευση εκπαιδευτικών στις κατευθύνσεις που η ρεαλιστική προσέγγιση υποδεικνύει˙ ένα ζήτημα που παρουσιάζει σημαντικές δυσκολίες εξαιτίας της μακράς εκπαιδευτικής παράδοσης της διδασκαλίας των μαθηματικών με μηχανιστικές ή στρουκτουραλιστικές προσεγγίσεις (Wubbels, Korthagen & Broekman, 1997).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το μάθημα της εισαγωγής στο κουκλοθέατρο αποτελεί ένα από τα βασικά μαθήματα θεατρικής έκφρασης που προσφέρονται στο Τμήμα ΕΑΠΗ και το παρακολουθούν κατά κανόνα περισσότερες από 200 πρωτοετείς φοιτήτριες, στο χειμερινό εξάμηνο. Τη φετινή χρονιά, μετά από μια σύντομη εισαγωγή στις τεχνικές του κουκλοθέατρου (κυρίως κούκλες και μαύρο θέατρο), οι φοιτήτριες χωρίστηκαν σε ομάδες των 3 έως 5 ατόμων και ανέλαβαν να οικοδομήσουν μια θεατρική σπουδή διάρκειας 5 έως 10 λεπτών, στην οποία τα γεωμετρικά σχήματα θα έπρεπε να παίζουν κεντρικούς ρόλους. Στις φοιτήτριες παρουσιάστηκε ένα σχετικό παράδειγμα αφήγησης από το βιβλίο του Shel Silverstein «*Το κομμάτι που λείπει συναντά το μεγάλο Ο*» (μια «περιπέτεια» ενός περίπου τριγωνικού σχήματος που ψάχνει να βρει από πού λείπει), έγινε μια υπόδειξη να ψάξουν το ΔΕΠΠΣ του νηπιαγωγείου (ΥΠΕΠΘ, 2002) για να δουν τι περίπου μαθαίνουν από τα γεωμετρικά σχήματα τα νήπια και δεν δόθηκε καμία άλλη πληροφορία σχετική με τα μαθηματικά ή τη διδασκαλία τους. Μετά από 10 τρίωρα μαθήματα, στα οποία οι ομάδες με την επίβλεψη της διδάσκουσας δοκίμασαν διάφορες εκδοχές σεναρίων, τεχνικών, κατασκευών και παιξίματος, ολοκληρώθηκαν και παρουσιάστηκαν στο κοινό των συμφοιτητριών 47 θεατρικές σπουδές από ένα σύνολο 222 φοιτητριών. Οι σπουδές αυτές βιντεοσκοπήθηκαν και τα φιλμάκια, μαζί με ένα ερωτηματολόγιο αξιολόγησης του μαθήματος που απάντησαν οι φοιτήτριες, αποτέλεσαν τα δεδομένα της έρευνάς μας.

Η ανάλυση των δεδομένων εστίασε στις μαθηματικές οντότητες που εμφανίστηκαν στις σπουδές. Συγκεκριμένα, από τις μαγνητοσκοπήσεις των παραστάσεων εντοπίστηκαν τα μαθηματικά στοιχεία των σχημάτων που χρησιμοποιήθηκαν στο σενάριο, αλλά και στην παράσταση για να αποδοθούν οι χαρακτήρες και τα γεγονότα, άλλοτε κάτω από την πίεση σημειωτικών αναγκών και άλλοτε αισθητικών προτιμήσεων των φοιτητριών. Για παράδειγμα, σε μια σπουδή όπου το σενάριο πρόβαλε ζητήματα διακρίσεων η γεωμετρική σχέση της ομοιότητας έπαιζε κυρίαρχο ρόλο˙ η γρήγορη κίνηση μιας φυγής έμοιαζε παιχνίδι για έναν κύκλο που μπορούσε να κυλήσει χωρίς να μετατοπίζει το κέντρο βάρους του πάνω στην κατακόρυφο αλλά φαινόταν βασανιστική για ένα τρίγωνο που «ανέβαινε» στις κορυφές του και «έσκαγε» με τις πλευρές του σε κάθε του «βήμα»˙ η συμμετρία αποφάσιζε για την «ομορφιά» ενός ισόπλευρου τριγώνου και την «ασκήμια» ενός σκαληνού κ.ο.κ.

Τα ερωτηματολόγια, πέρα από στοιχεία που αφορούσαν αμιγώς το θεατρικό σκέλος των μαθημάτων, κινήθηκαν βασικά στην κατεύθυνση που υποδεικνύει η θεωρία των Fishbein & Ajzen (2010), για τους παράγοντες που επηρεάζουν την προδιάθεση των φοιτητριών να ασχοληθούν με θεατρικές

δραστηριότητες αυτής της μορφής. Έτσι, κατέγραψαν τις εκτιμήσεις των φοιτητριών για το αν έμαθαν κάτι από τα μαθηματικά που δεν το γνώριζαν ήδη· κατέγραψαν τις εκτιμήσεις τους για το τι θα κέρδιζαν μικροί μαθητές αν έβλεπαν την παράσταση της σπουδής, καθώς και το τι κέρδισαν και τι έχασαν οι ίδιες προσωπικά από τη συμμετοχή τους σ' αυτή τη δραστηριότητα· κατέγραψαν τις εκτιμήσεις των φοιτητριών για τους τρόπους με τους οποίους τα μαθηματικά συνδέθηκαν με τη θεατρική τους κατασκευή και τέλος «μέτρησαν» με τέσσερεις κλειστές ερωτήσεις κλίμακας Likert την εξάρτηση της πρόθεσης τους να εμπλακούν ξανά, ως εκπαιδευτικοί, με τέτοιου τύπου δραστηριότητες, από τη στάση που διαμόρφωσαν, από την εκτίμησή τους για την κοινωνική νόρμα που προτρέπει ή αποτρέπει την εμπλοκή των εκπαιδευτικών με τέτοιες δραστηριότητες, καθώς και από την εκτίμησή τους για το βαθμό στον οποίο είναι ικανές να τις ελέγχουν (Ajzen, 2005).

Τα αποτελέσματα από την ανάλυση των μαγνητοσκοπημένων σπουδών και τις απαντήσεις των ανοικτών ερωτήσεων προέκυψαν με ελεύθερες κατηγοριοποιήσεις (category based analysis), που πραγματοποίησαν ανεξάρτητα οι δύο ερευνητές και προσάρμοσαν σε κοινούς πίνακες εκ των υστέρων (με ικανοποιητική συμφωνία που κάλυπτε ποσοστά από 75% έως 95%). Τα αποτελέσματα από τις απαντήσεις στα κλειστά ερωτήματα αναλύθηκαν (σύμφωνα με το μοντέλο των Fishbein & Ajzen) με γραμμική παλινδρόμηση, που αποκαλύπτει τα βάρη με τα οποία συμμετέχουν η στάση έναντι της εμπλοκής, η εκτίμηση της κοινωνικής νόρμας και η εκτίμηση ελέγχου της εμπλοκής, στην πρόθεση επαν-εμπλοκής των φοιτητριών με ανάλογες δραστηριότητες.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Από τις βιντεοσκοπήσεις των παραστάσεων που παρουσίασαν οι ομάδες των φοιτητριών προκύπτουν τέσσερις βασικές κατηγορίες συνδέσεων των θεατρικών σπουδών με μαθηματικές ιδέες/ οντότητες.

Συγκεκριμένα, φαίνεται το 21,3% των ομάδων να χρησιμοποιεί την ιδέα της *ισότητας/ ανισότητας ανάμεσα στα σχήματα* στη δομή των σεναρίων. Εδώ, το κυρίαρχο μοτίβο προκύπτει κατ' αναλογία με την αφήγηση του Silverstein: κάποιο ή κάποια σχήματα «αναζητούν τη θέση τους στον κόσμο» και τη βρίσκουν όταν συναντούν έναν ίσο με αυτά «χώρο» σε κάποια φυσική οντότητα (π.χ. το χώρο του παραθύρου σε ένα σπίτι, ένα σχήμα πάνω σε έναν πίνακα μοντέρνας ζωγραφικής κλπ). Σημειωτικά, η ανισότητα φαίνεται να είναι πιο εύχρηστη, μιας και μπορεί να σημαίνει με ευκολία το δυνατότερο, το ιεραρχικά ανώτερο κλπ (π.χ. το μεγάλο τετράγωνο είναι το πιο δυνατό,

είναι ο πατέρας στην οικογένεια, ο βασιλιάς κ.ο.κ.). Δευτερευόντως, συναντάμε την ιδέα της ισότητας να παρεμβαίνει στο χτίσιμο των χαρακτήρων, συνδεδεμένη από την πλευρά των μαθηματικών με τη συμμετρία και από την πλευρά της αισθητικής των θεατρικών σπουδών, με την ομορφιά (π.χ. ένα τρίγωνο ή ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με ίσες όλες τις πλευρές είναι το πιο «όμορφο»).

Σαφώς μεγαλύτερο ποσοστό ομάδων, 59,6%, φαίνεται να χρησιμοποιεί την ιδέα της *ομοιότητας*. Εδώ, συμπεριλαμβάνουμε και τις περιπτώσεις των σπουδών που προσεγγίζουν την ομοιότητα με τη λογική του «ίδιου»· μια κατηγορία που ίσως έχει μεγαλύτερη σχέση με την αναγνώριση των σχημάτων παρά με τις αναλογίες ή τις ισότητες κάποιων χαρακτηριστικών τους. Οι φοιτήτριες, όμως, φαίνεται να διαχειρίζονται το «ίδιο-διαφορετικό» περισσότερο με κριτήρια ομοιότητας παρά με γενικότερα γεωμετρικά κριτήρια. Για παράδειγμα, δύο ισόπλευρα ή δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι «ίδια» αλλά διαφορετικά από ένα σκαληνό. Η ιδέα της ομοιότητας συμβάλλει συνήθως ως κεντρική στη δομή των σεναρίων, προβάλλεται ως ανάλογη με την ιδέα της κοινωνικής «ομοιότητας/ ισοδυναμίας» και οδηγεί σε αφηγήσεις ζητημάτων κοινωνικού αποκλεισμού, διαφοροποίησης ή ένταξης (π.χ. το τρίγωνο στη χώρα των τετραγώνων, το σκαληνό «παιδί» μιας «οικογένειας» ισοσκελών τριγώνων κλπ). Στις σπουδές αυτές, όπως είναι αναμενόμενο, η ιδέα της ομοιότητας χρησιμοποιείται ευρύτατα και στο σημειωτικό επίπεδο: η εμφάνιση ενός σχήματος σημαίνει από μόνη της και το ρόλο του στη δυναμική της αφήγησης.

Ένα εξίσου μεγάλο ποσοστό θεατρικών σπουδών, 53,2%, χρησιμοποιεί *επιμέρους ιδιότητες* των γεωμετρικών σχημάτων (π.χ. την ισότητα δύο πλευρών τους, έναν κοινό άξονα συμμετρίας κλπ) για να δημιουργήσει σενάρια με έμφαση στις μεταξύ τους σχέσεις. Εδώ, η θεατρική ιδέα προβάλλει κατά κανόνα τα πλεονεκτήματα της συνύπαρξης/ συνεργασίας/ ολοκλήρωσης. Π.χ. συνδυασμοί διάφορων σχημάτων πετυχαίνουν να «χτίσουν» ένα σπίτι ή ένα αυτοκίνητο, να ζωγραφίσουν έναν πίνακα, να φτιάξουν έναν χαρταετό και να πετάξουν κλπ. Στις περιπτώσεις αυτές, πέρα από το ρόλο που φαίνεται να παίζει η γεωμετρική σχέση των εμφανιζόμενων σχημάτων, η αισθητική και η σημειωτική των συνδυασμών αποδεικνύεται αποφασιστική για τη θεατρική ποιότητα των σπουδών: ο συνδυασμός των σχημάτων πρέπει να σημαίνει επαρκώς τη νέα δομή και ταυτόχρονα να προκαλεί κάποιου είδους ένταση στο θεατή (π.χ. να προκαλεί την έκπληξη για το πώς κάποια σχήματα μπορούν να «φτιάχνουν» ένα σπίτι, το γέλιο για το «πώς είναι έτσι» αυτό το σπίτι κλπ).

Ένα μικρότερο ποσοστό σπουδών, 34%, φαίνεται να χρησιμοποιεί τις *ιδιότητες/ χαρακτηριστικά των σχημάτων*, που επιτρέπουν σε αντικείμενα του φυσικού κόσμου που τα αντιπροσωπεύουν να εκτελούν μια σειρά από τις λειτουργίες τους. Για παράδειγμα, ο κύκλος κυλάει και έτσι τρέχει με ευκολία πάνω σε επίπεδες επιφάνειες, αλλά συναντά δυσκολίες όταν το έδαφος γίνεται ανώμαλο· εδώ, το τρίγωνο μπορεί να σκαρφαλώνει χρησιμοποιώντας τις κορυφές του κλπ. Σε λίγες από τις περιπτώσεις αυτές, τα «λειτουργικά» γεωμετρικά χαρακτηριστικά των σχημάτων εμφανίζονται να παίζουν ρόλο στη θεατρική αφήγηση (η κυκλική σύντροφος ενός τρίγωνου οδηγού γκρινιάζει επίμονα για τις μεγάλες ταχύτητες του σπορ αυτοκινήτου με το οποίο ταξιδεύουν. Η γκρίνια κορυφώνεται όταν τους πιάνει λάστιχο. Μετά από λίγη σκέψη, ο οδηγός βάζει τη σύντροφό του στη θέση του κατεστραμμένου ελαστικού…). Στις περισσότερες περιπτώσεις, η χρήση των «λειτουργικών» χαρακτηριστικών αφορά την αισθητική της παράστασης, όπου η κίνηση των σχημάτων γίνεται με βάση τα χαρακτηριστικά αυτά: το τρίγωνο ή το τετράγωνο, σε αντίθεση με τον κύκλο, ανεβοκατεβαίνουν καθώς «κυλούν» με συνοδεία κατάλληλων ήχων, οι ρόμβοι και τα εξάγωνα πετούν σαν χαρταετοί κ.ο.κ.

Τέλος, σε μια θεατρική σπουδή η ομάδα των φοιτητριών χρησιμοποίησε την ιδέα της *διάστασης* των σχημάτων για να δομήσει την αφήγησή της. Ο κύβος, ήρωας της παράστασης, θέλει να γνωρίσει το χώρο των δύο διαστάσεων· αυτό-τεμαχίζεται και περνάει τα τετράγωνα μέλη του εκεί όπου δεν μπορεί να υπάρχει ως ένα. Αξίζει επίσης να αναφέρουμε και μια φιλόδοξη προσπάθεια, η οποία τελικά ναυάγησε. Μια ομάδα φοιτητριών αποφάσισε να παρουσιάσει έναν θεατρικό «κόσμο» στον οποίο τα μαθηματικά δεν έχουν θέση. Δεν μπόρεσαν όμως να επινοήσουν κάποια σύνθεση θεατρικής αφήγησης, όπου η απουσία των γεωμετρικών δομών θα δημιουργούσε μια προβληματική κατάσταση. Δεν μπόρεσαν καν να φανταστούν το πώς θα μπορούσε να σηματοδοτηθεί μια γεωμετρική απουσία. Ίσως αυτό το «πρόβλημα» να είναι κατάλληλο μόνο για μαθηματικούς. Η εμπειρία πάντως έδειξε ότι μια τέτοια φιλόδοξη ιδέα, που στην πράξη άρχισε να φαντάζει ως αδιέξοδη, μάλλον δεν θα έπρεπε να την αφήσουμε να εξελιχθεί στο εκπαιδευτικό πλαίσιο. Καθώς το εξάμηνο έφτανε στο τέλος του, οι φοιτήτριες αυτής της ομάδας, παρά την εξαντλητική διανοητική τους προσπάθεια, βρέθηκαν στρεσαρισμένες και απογοητευμένες να προσπαθούν να σώσουν «εκ των ενόντων» τη θεατρική τους σπουδή (στην οποία τελικά άλλαξαν την κεντρική ιδέα).

Οι παραπάνω γενικές κατηγορίες μαθηματικών ιδεών που φαίνεται να χρησιμοποιήθηκαν στις θεατρικές σπουδές δεν είναι αμοιβαία αποκλειόμενες· περισσότερες από μία εμφανίστηκαν στις ίδιες παραστάσεις. Ένας έλεγχος, μάλιστα, για πιθανές συσχετίσεις έδειξε ότι στις σπουδές όπου

κυριάρχησαν συνδυασμοί σχημάτων, δεν χρησιμοποιήθηκε η ιδέα της ομοιότητας (x^2 = 8,497, p = 0,004) και εκεί όπου κυριάρχησαν τα λειτουργικά χαρακτηριστικά των σχημάτων, δεν χρησιμοποιήθηκε η ιδέα της ισότητας (x^2 = 3,270, p = 0,071). Οι αρνητικές αυτές συσχετίσεις μάλλον μπορούν να δικαιολογηθούν γεωμετρικά. Ο συνδυασμός των σχημάτων για τη δημιουργία ενός νέου σχήματος δύσκολα μπορεί να πραγματοποιηθεί με όρους ομοιότητας. Και οι λειτουργίες των σχημάτων μάλλον καθορίζονται από τις σχέσεις κάποιων ιδιαίτερων χαρακτηριστικών τους με το περιβάλλον παρά από σχέσεις που περιλαμβάνουν τα σχήματα ως «όλο».

Τα παραπάνω αποτελέσματα, σε μεγάλο ποσοστό, δεν φαίνεται να είναι συνειδητές μαθηματικές επιλογές των φοιτητριών. Αυτό υποδηλώνεται από τις απαντήσεις τους στο ερώτημα «*ποια στοιχεία του σεναρίου σας αναφέρονται στα μαθηματικά;*». Εδώ εμφανίστηκαν τρεις κατηγορίες απαντήσεων: Η πολυπληθέστερη, 85,9%, αναφέρεται γενικόλογα στα σχήματα (π.χ. «στην παράσταση εμφανίζεται το τρίγωνο, το τετράγωνο, ο κύκλος», «φάνηκαν τα σχήματα των ηρώων» κλπ). Ένα ποσοστό 28,2% αναφέρεται στο ότι πραγματοποιήθηκαν συνδυασμοί σχημάτων και, τέλος, ένα ποσοστό 12,7% αναφέρεται στα χαρακτηριστικά των σχημάτων που τους επέτρεψαν να πραγματοποιήσουν κάποιες λειτουργίες (όπως π.χ. κινήσεις, ισορροπίες κλπ). Τα ποσοστά των δύο τελευταίων κατηγοριών, συγκρινόμενα με τα ποσοστά των αντίστοιχων κατηγοριών που εντοπίστηκαν από τους ερευνητές στις παραστάσεις των θεατρικών σπουδών, δείχνουν ότι σημαντικός αριθμός φοιτητριών δεν δήλωσε στις απαντήσεις του στοιχεία μαθηματικών που χρησιμοποίησε· γεγονός που ενισχύει την υπόθεση ότι μέρος των μαθηματικών χαρακτηριστικών, σχέσεων και ιδιοτήτων που χρησιμοποιηθήκαν επινοήθηκαν για θεατρική χρήση χωρίς να συνδεθούν υποχρεωτικά με γνώσεις των φοιτητριών από τα σχολικά τους μαθηματικά.

Την υπόθεση αυτή ενισχύουν και οι απαντήσεις των φοιτητριών στην ερώτηση «*μάθατε κάτι για τα μαθηματικά χαρακτηριστικά των σχημάτων που δεν γνωρίζατε ήδη; Αν ναι, να αναφέρετε σύντομα τι καινούργιο μάθατε*».

Εδώ, το 83,1% των φοιτητριών απαντά ότι δεν έμαθε τίποτα καινούργιο. Το 16,9% που απαντά ότι έμαθε, δηλώνει ως νέα γνώση μαθηματικά «γεγονότα» όπως: «δύο ισόπλευρα τρίγωνα σχηματίζουν ένα ρόμβο», «δεν μπορείς να παρουσιάζεις τη σφαίρα ως κύκλο, γιατί η πρώτη έχει όγκο», «χωρίς τις ρόδες που έχουν κυκλικό σχήμα δεν θα μπορούσε να κινηθεί κανένα μεταφορικό μέσο», «η σφαίρα διαφέρει από τον κύκλο· επειδή όμως είναι στρογγυλή πίστευα ότι είναι ίδια», «τα σχήματα συνδέονται μεταξύ τους», «κάποια σχήματα στέκονται και κάποια άλλα όχι», «ο ρόμβος είναι διαφορετικός από το τετράγωνο» κλπ. Οι απαντήσεις αυτές, από ένα μικρό αλλά όχι ασήμαντο αριθμό φοιτητριών (37 φοιτήτριες), που κατά τεκμήριο είναι επιτυχημένες

απόφοιτες του Λυκείου (έχουν μόλις περάσει με εξετάσεις στο ΤΕΑΠΗ), δείχνουν ότι τουλάχιστον ο λειτουργικός μαθηματικός γραμματισμός δεν είναι το «φόρτε» της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Την ίδια όμως στιγμή δείχνουν ότι το θεατρικό πλαίσιο μπορεί να λειτουργήσει ως χώρος παραγωγής πρωτογενών μαθηματικών ιδεών ή έστω να συντελέσει στην εκ νέου «ανακάλυψη» ή τροποποίησή τους, σύμφωνα με την προσέγγιση της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης.

Από εκεί και μετά, οι φοιτήτριες φαίνεται να εκτιμούν το μαθηματικό σκέλος της θεατρικής παραγωγής τους. Στην ερώτηση «*τι πιστεύετε ότι θα κέρδιζαν τα παιδιά αν έβλεπαν την παράστασή σας;*», όλες σχεδόν (ποσοστό 97,2%) απαντούν ότι τα παιδιά θα μάθαιναν κάτι από τα μαθηματικά των σχημάτων (από τα ίδια τα σχήματα μέχρι το να λύνουν προβλήματα!). Αντίθετα τα οφέλη που θα αποκόμιζαν τα παιδιά από την ίδια παράσταση, τα συνδεδεμένα με το θεατρικό γεγονός (π.χ. θα διασκέδαζαν, θα διδάσκονταν από το μήνυμα της παράστασης κλπ), τα εκτιμά μόνο το 31% των φοιτητριών. Αυτή η διαφορά δεν μπορεί να ερμηνευτεί από την υπόθεση ότι οι φοιτήτριες υποτιμούν τη θεατρική ποιότητα της δουλειάς τους (οι απαντήσεις που έδωσαν για να σχολιάσουν τα θεατρικά χαρακτηριστικά της το αποκλείουν) και υπερεκτιμούν τα μαθηματικά της στοιχεία. Η διαφορά μάλλον προκύπτει από τη γενικότερη αντίληψη των πρωτοετών φοιτητριών για την εκπαίδευση: τα παιδιά έρχονται σχολείο για να μάθουν˙ κέρδος τους είναι ότι μαθαίνουν˙ και τα μαθηματικά είναι γνωστικό αντικείμενο! Από μια θεατρική παράσταση τι να μάθει κανείς;

Η αντίληψη αυτή, ευτυχώς, φαίνεται να αλλάζει όταν σκέφτονται τους εαυτούς τους. Στην ερώτηση «*τι νομίζετε ότι κερδίσατε εσείς οι ίδιες δουλεύοντας για να ανεβάσετε την παράσταση;*», το 59% αναφέρεται σε κέρδη που συνδέονται με τη συνεργασία στην ομαδική δουλειά («ήταν η πρώτη φορά!», «μάθαμε να ακούμε τον άλλο», «μάθαμε να υποστηρίζουμε την άποψή μας», «επιτέλους κάποιοι πήραν στα σοβαρά τη φαντασία μας» κλπ). Το 67,6% δηλώνει ότι έμαθε πράγματα για το θέατρο που είτε δεν τα φανταζόταν, είτε τα υποτιμούσε. Και μόνο το 16,9% δηλώνει ότι έμαθε και κάτι άλλο πέρα από το θέατρο και τους τρόπους συνεργασίας (π.χ. και μαθηματικά).

Ένα μικρό ποσοστό, βέβαια, επέκτεινε τη στερεότυπη αντίληψη για την εκπαίδευση και στις δικές του σπουδές. Στο ερώτημα «*τι πιστεύετε ότι χάσατε εσείς οι ίδιες δουλεύοντας για να ανεβάσετε την παράσταση;*», ένα ποσοστό 18,3% εκτιμά ότι έχασε χρόνο, κυρίως από το διάβασμά του για τα άλλα μαθήματα, μιας και η δουλειά σε ομάδες είναι τελικά χρονοβόρα.

Τέλος, στις κλειστές ερωτήσεις τύπου Likert που, σύμφωνα με το μοντέλο των Fishbein & Ajzen (2010), εκτιμούν:

α) πόσο πιθανό ή απίθανο θεωρούν οι φοιτήτριες να κατασκευάσουν και να παρουσιάσουν στα παιδιά της τάξης τους μια τέτοια παράσταση όταν θα δουλέψουν στο σχολείο (πρόθεση εμπλοκής),

β) πόσο θετικά ή αρνητικά εκτιμούν ότι εκφράστηκαν για τη συγκεκριμένη δραστηριότητα σημαντικοί γι' αυτές άνθρωποι, με τους οποίους συζήτησαν τη δουλειά τους (κοινωνική νόρμα),

γ) πόσο κερδισμένες ή χαμένες νομίζουν ότι βγήκαν απ' αυτή την εμπειρία (στάση) και

δ) πόσο καλά ή κακά εκτιμούν ότι κατάφεραν να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις αυτής της δουλειάς (εκτίμηση ελέγχου εμπλοκής),

οι βαθμολογίες των απαντήσεων κυμαίνονται σε υψηλά επίπεδα, όπως φαίνεται στον πίνακα 1, που ακολουθεί (εδώ, οι φοιτήτριες επέλεγαν μια θέση πάνω σε μια πενταβάθμια κλίμακα, με μέγιστο = 5 και ελάχιστο = 1).

	Μέση τιμή	**Τυπική απόκλιση**
Πρόθεση εμπλοκής (BI)	4,56	0,581
Υποκειμενική νόρμα (SN)	4,54	0,582
Στάση (AB)	4,70	0,490
Εκτίμηση ελέγχου εμπλοκής (PBC)	4,23	0,540

Πίνακας 1.

Η γραμμική παλινδρόμηση που, σύμφωνα με το μοντέλο των Fishbein & Ajzen, προσδιορίζει σε ποιο βαθμό η υποκειμενική νόρμα, η στάση και η εκτίμηση ελέγχου της εμπλοκής επηρεάζουν την πρόθεση εμπλοκής, μας λέει ότι ο σημαντικότερος παράγοντας για τις φοιτήτριες είναι η στάση (όπως φαίνεται στον Πίνακα 2).

Από τον πίνακα 2 φαίνεται ότι ο παράγοντας της στάσης συμβάλλει στην παλινδρόμηση με διπλάσιο περίπου βάρος απ' αυτό με το οποίο συμβάλλουν οι άλλοι δύο παράγοντες. Ένα αποτέλεσμα αντίθετο με αυτό που συναντά κανείς σε επαγγελματίες εκπαιδευτικούς (π.χ. Μπέμπη, Τζουγκράκη, & Τσελφές, 2004), των οποίων η δουλειά κρίνεται από συναδέλφους,

προϊσταμένους και παιδιά και έτσι έχουν νιώσει το βάρος τις ιεραρχίας και του καλού αποτελέσματος στην πράξη.

Ανεξάρτητες μεταβλητές	Τυποποιημένο βάρος	t	Σημαντικότητα
Υποκειμενική νόρμα (SN)	0,223	1,764	0,082
Στάση (AB)	0,510	3,717	0,000
Εκτίμηση ελέγχου εμπλοκής (PBC)	0,261	2,256	0,027

Πίνακας 2. Γραμμική παλινδρόμηση που περνάει από την αρχή των αξόνων και ερμηνεύει το 98% της μεταβλητότητας, με εξαρτημένη μεταβλητή την Πρόθεση εμπλοκής

Το αποτέλεσμα αυτό, πάντως, συγκροτεί ένα ισχυρό τεκμήριο για το ότι οι φοιτήτριες και καλά πέρασαν στο μάθημα και εκτιμούν ότι κέρδισαν πολλά πράγματα απ' αυτό.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, από την πλευρά του θεάτρου και, ασφαλώς, του κουκλοθεάτρου, υπάρχουν τρεις θεωρητικές παραδόσεις, που εστιάζουν σε τρεις σχετιζόμενες και σημαντικές όψεις/ διαστάσεις της θεατρικότητας. Με βάση αυτές τις τρεις όψεις θα προχωρήσουμε στη συζήτηση των αποτελεσμάτων μας.

Α) Κάθε θεατρική παραγωγή προσεγγίζεται με βάση τη δραματουργική της διάσταση. Η δραματουργία εστιάζει στη μυθοπλασία του θεάματος. «Αποκαθιστά τη μυθοπλαστική υπόσταση και το επίπεδο πραγματικότητας των δραματικών προσώπων και πράξεων, εικονίζει το δραματικό σύμπαν... αποφασίζει τι θα παρουσιαστεί στο κοινό ως πραγματικό» (Pavis, 2006, σ.113). Στην περίπτωση των μαθημάτων ενδιαφερόμαστε ιδιαίτερα για την αρτιότητα της αφηγηματικής δομής του μύθου, που συγκροτεί την πραγματικότητα του «δραματικού σύμπαντος» που παράγουν οι φοιτήτριες. Και η αρτιότητα αυτή δεν είναι αυτονόητη, τουλάχιστον για τις πρωτοετείς φοιτήτριες, σε καμία από τις εκδοχές της (λογοτεχνική, θεατρική, κινηματογραφική κλπ). Για να διευκολυνθεί η εκπαιδευτική πράξη χρησιμοποιούμε μια σειρά από κριτήρια καλής αφήγησης, με σχετικά ευέλικτο και χαλαρό τρόπο. Για παράδειγμα, τείνουμε να απαιτούμε η αφήγηση να προβάλει μια κεντρική ιδέα˙ η παράθεση των γεγονότων να μην

είναι γραμμική (τα επόμενα γεγονότα να μην είναι προβλέψιμα με βάση τα προηγούμενα)· με τον τρόπο αυτό προκαλείται το ενδιαφέρον και η «όρεξη για αφήγηση» από την πλευρά του θεατή, την ίδια στιγμή που τα μη αναμενόμενα γεγονότα δεν διασπούν την ενότητά και προβάλλουν την κεντρική ιδέα, ενώ το τέλος (λύση) της αφήγησης και μόνον αυτό, δίνει ουσιαστικά νόημα στη διαδοχή των γεγονότων που έχουν προηγηθεί (Norris et al., 2005, Lodge, 1986) κ.ο.κ.

Η απαίτηση να χρησιμοποιηθούν από τις φοιτήτριες γεωμετρικά στοιχεία στη θεατρική αφήγηση φάνηκε να είναι απολύτως μη αναμενόμενη. Και είναι γεγονός ότι κάτι τέτοιο αποτελεί μάλλον την εξαίρεση στους χώρους των παραστατικών και αφηγηματικών τεχνών. Ελάχιστα θεατρικά έργα (π.χ. *το άπειρο* των John Barrow και Luca Ronconi) ή λογοτεχνικά κείμενα (π.χ. *η επιπεδόχωρα* του Edwin Abbot) γνωρίζουμε να χρησιμοποιούν με επιτυχία μαθηματικές ιδέες (όχι βιογραφίες επιστημόνων/ μαθηματικών) στις αφηγήσεις τους. Εδώ δεν συμπεριλαμβάνουμε παιδικά κείμενα που ακολουθούν τα κλισέ των «αφηγήσεων για παιδιά» και υποτίθεται ότι επιχειρούν να διδάξουν μαθηματικό ή και επιστημονικό περιεχόμενο.

Τα πράγματα άλλαξαν από τη στιγμή που παρουσιάστηκε στο μάθημα το παράδειγμα του «*μεγάλου Ο*». Η επίδραση του παραδείγματος αυτού ήταν διπλή. Από τη μια μεριά απελευθέρωσε της φοιτήτριες (αυτό που τους ζητούσαμε μπορούσε να γίνει!) αλλά από την άλλη καθοδήγησε κατ' αναλογία μεγάλο αριθμό θεατρικών σπουδών στη χρήση των ιδεών της ισότητας και της ομοιότητας (ο ήρωας προσπαθούσε κάπου να ταιριάξει: είτε σε έναν *ίσο* χώρο είτε σε μια κοινότητα *ομοίων*). Παρόλα αυτά θεωρούμε επιτυχία του μαθήματος το γεγονός ότι το παράδειγμα καθοδήγησε αφηγηματικά/ δραματουργικά, κυρίως μέσω της ιδέας του «ταιριάσματος» (που δεν είναι υποχρεωτικά μαθηματική) και λιγότερο μέσω της ισότητας ή ομοιότητας. Για παράδειγμα, οι φοιτήτριες δημιούργησαν την ιδέα του συνδυασμού των σχημάτων για να προωθήσουν την ιδέα του ταιριάσματος, σε μεγάλα ποσοστά. Η ιδέα αυτή εμφάνισε διάφορες δημιουργικές μαθηματικές εκδοχές πέρα από τη συχνότερα εμφανιζόμενη: αυτή όπου δύο ή περισσότερα σχήματα ενώνονταν για να δημιουργήσουν ένα νέο, μεγαλύτερης «αξίας» σχήμα. Για παράδειγμα, μια ομάδα φοιτητριών προσπάθησε να λύσει το πρόβλημα μιας οικογένειας τριγώνων που είχε στο σπίτι της μόνο ένα κρεβάτι. Μετά από μια σειρά δοκιμές ο τρίγωνος πατέρας με την τρίγωνη μητέρα και τις δύο τρίγωνες κόρες βρήκαν έναν τρόπο να βολευτούν. Όμως το τρίτο παιδί της οικογένειας, όταν ήρθε στον κόσμο, ξανάφερε το πρόβλημα στην επιφάνεια: ήταν ένα τετράγωνο αγόρι!

Τα σενάρια έθεταν κατά κανόνα ένα πρόβλημα που διέθετε γεωμετρικά χαρακτηριστικά αλλά παρέπεμπε σε κάποιας μορφής κοινωνικό ή προσωπικό ανθρώπινο πρόβλημα. Η λύση, το σημαντικότερο ίσως μέρος της θεατρικής αφήγησης, έπρεπε αφενός να στέλνει ένα μήνυμα (την κεντρική ιδέα της σπουδής) και αφετέρου να αποτελεί με κάποιο τρόπο και λύση του γεωμετρικού προβλήματος. Η δεύτερη αυτή απαίτηση δεν υλοποιήθηκε πάντα με επιτυχία. Η αποτυχία, πλην λίγων εξαιρέσεων, αποτέλεσε κανόνα στις περιπτώσεις όπου το αρχικό πρόβλημα είχε στηθεί με βάση την ομοιότητα και κατ' αναλογία προς κοινωνικά προβλήματα διακρίσεων. Εδώ οι λύσεις, αν και στηρίζονταν στην ομοιότητα, δεν είχαν ευρήματα σαν κι αυτά που συναντάμε στο *Ασχημόπαπο*· στηρίζονταν στην «τύχη» και παρέπεμπαν ευθέως στα κλισέ που προσπαθούσαμε να αποφύγουμε (όπως «το καλό» πάντα νικάει). Το γεγονός αυτό δεν θεωρούμε ότι έχει μαθηματικές ρίζες. Τα κοινωνικά προβλήματα διακρίσεων, ενώ φαίνεται να έχουν ωριμάσει ως προβλήματα, τουλάχιστον στον εκπαιδευτικό χώρο στον οποίο έχουμε μια καλύτερη εποπτεία, δεν φαίνεται να έχουν ωριμάσει και ως λύσεις· ο «από μηχανής θεός» που αναμένεται σε κοινωνικό επίπεδο να παρέμβει για τη λύση τους φαίνεται ότι ανέλαβε δράση και στις περιπτώσεις των θεατρικών σπουδών που αναφέραμε.

Β) Η σημειωτική προσέγγιση της θεατρικής δημιουργίας εστιάζει στον τρόπο παραγωγής των σημείων. Στην περίπτωσή μας επιλέξαμε να καθοδηγήσουμε τις φοιτήτριες μέσω της σχετικής θεωρητικής προσέγγισης του Peirce (1964) που αντιμετωπίζει το σημείο ως δεσμό ανάμεσα στο *αντιπροσωπεύου* (σημαίνον κατά Saussure), το *διερμηνεύου* (σημαινόμενο κατά Saussure) και το *αναφερόμενο* (καταδηλούμενη από το σημείο πραγματικότητα εντός της οποίας το αντιπροσωπεύον σημαίνει πράγματι το διερμηνεύον). Και αυτό γιατί αποδεχόμαστε την πολυσημία των μέσων που λειτουργούν στο «δραματικό σύμπαν». Έτσι, για παράδειγμα, για να διερμηνεύει ένα τρίγωνο τη μια φορά έναν πατέρα και την άλλη έναν περιπλανώμενο ταξιδιώτη απαιτείται η κατασκευή δύο διαφορετικών αναφερόμενων (πλαισίων) που θα μπορούν να «μεταφέρουν» τη διάκριση στο θεατή. Η διάκριση βέβαια μπορεί να λυθεί και χωρίς την κατασκευή ενός κατάλληλου αναφερόμενου. Η κλασικότερη προσέγγιση στους χώρους του παιδικού θεάτρου (προσέγγιση που γνώριζαν από την εμπειρία τους και οι φοιτήτριές μας) πραγματοποιείται με τη διαφοροποίηση του αντιπροσωπεύοντος: τη μια φορά ζωγραφίζουμε πάνω στο τρίγωνο ένα πρόσωπο που παραπέμπει στον πατέρα και την άλλη ζωγραφίζουμε χαρακτηριστικά ταξιδιώτη. Η λύση αυτή, πέρα από το ότι καταστρέφει την «τρίγωνη προσωπικότητα» της θεατρικής οντότητας (ο ήρωάς μας δεν είναι πια πατέρας μιας οικογένειας τριγώνων, είναι μάλλον πατέρας μιας οικογένειας ανθρώπων με σωματικές δυσμορφίες), καταστρέφει και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του τριγώνου (π.χ. μειώνει τις συμμετρίες, αφού

το ζωγραφισμένο τρίγωνο δεν μπορεί πια να ισορροπεί στηριγμένο πάνω σε οποιαδήποτε πλευρά του)˙ καταστρέφει και την αισθητική της συνολικής παραγωγής που, όπως θα δούμε παρακάτω, στηρίζεται στην αρμονική σύνδεση του εικαστικού σχεδιασμού, της κίνησης και του ήχου και όχι στην κακότεχνη αποτύπωση στοιχείων της καθημερινής «πραγματικότητας» πάνω στις θεατρικές κατασκευές. Έτσι, οι ομάδες των φοιτητριών πιέστηκαν να δημιουργήσουν λαμβάνοντας σοβαρά υπόψη το γεγονός ότι η απουσία αναφερόμενου (θεατρικής πραγματικότητας εντός της οποίας και εξαιτίας της οποίας σημαίνουν/ διερμηνεύουν κάτι οι θεατρικές οντότητες) οδηγεί σε παραστάσεις κλισέ με μειωμένη αισθητική.

Οι πιέσεις αυτές δεν απέδωσαν γενικά, ίσως γιατί η δυσμενής αναλογία μιας διδάσκουσας προς 47 ομάδες (222 φοιτήτριες και φοιτητές) περιόριζε τις δυνατότητες διαρκούς ελέγχου. Αρκετές ομάδες διαχειρίστηκαν τις τελικές σπουδές τους στις κατευθύνσεις που κακοποιούν το θέατρο (και το κουκλοθέατρο) για να το κάνουν παιδικό. Κάποιες όμως πέτυχαν. Για παράδειγμα, μια φοιτήτρια από μια ομάδα, ξαπλωμένη στη σκηνή και σκεπασμένη με ένα γαλάζιο ύφασμα δημιουργούσε με τις κινήσεις της κυματισμούς που με τη συνοδεία του κατάλληλου ήχου δεν άφηναν καμιά αμφιβολία για το ότι τρίγωνο που κινιόταν πάνω και «μέσα» της ήταν ψάρι.

Σε ό,τι αφορά την επίδραση της σημειωτικής προσέγγισης των θεατρικών σπουδών πάνω στους τρόπους διαχείρισης των μαθηματικών οντοτήτων, οι απ' ευθείας επιρροές ήταν λίγες. Ήταν όμως σημαντικές και πολλές οι μεταβολές που προκάλεσε η πίεση για σωστή σημειωτική διαχείριση πάνω στη διαχείριση των μαθηματικών οντοτήτων, τόσο στο επίπεδο της δραματουργίας/ σεναρίου, όσο και σ' αυτό της αισθητικής.

Γ) Η αισθητική πλευρά μιας θεατρικής σπουδής εστιάζει στις «πηγές της ηδονής» που αφορούν τόσο την παραγωγή όσο και την πρόσληψη του θεάματος. Αναλογικά, στο χώρο της εκπαίδευσης τα ζητήματα αισθητικής προσπαθούν να αντιμετωπίσουν το μάλλον ασαφές αλλά εξαιρετικά σημαντικό ερώτημα: πώς είναι δυνατόν όσα «ωραία» πράγματα συγκινούν και ευχαριστούν έναν εκπαιδευτικό να αναπαρασταθούν έτσι ώστε να συγκινούν και να ευχαριστούν και τον αμύητο θεατή-μαθητή. Η θεατρική παράδοση και θεωρία λέει ότι το καλό αισθητικό αποτέλεσμα (που σχετίζεται και με ό,τι στο θέατρο αποκαλούν «ρυθμό», «χτίσιμο του χαρακτήρα» κλπ), στην περίπτωση του κουκλοθέατρου, προκύπτει από την αρμονική *σύνδεση* του εικαστικού σχεδιασμού των κατασκευών, της κίνησής τους και του ήχου (Tillis, 1992) και ασφαλώς όχι από την ασύνδετη παρουσίαση πρόχειρα σχεδιασμένων αντικειμένων, που κινούνται ή μεταβάλλονται ανεξέλεγκτα, συνοδευόμενα από ένα μονότονο περιγραφικό λόγο (όπως, για παράδειγμα,

είναι πολλές από τις καθημερινές διδακτικές παρουσιάσεις των εκπαιδευτικών στα σχολεία).

Στο μάθημα έγινε προσπάθεια να πεισθούν οι φοιτήτριες ότι αυτό που παράγει ένα αισθητικά καλό θεατρικό αποτέλεσμα είναι πράγματι ο συνδυασμός εικαστικού σχεδιασμού, κίνησης και ήχου και όχι χωριστά καθένα από αυτά τα χαρακτηριστικά· πρέπει ο συνδυασμός να παραπέμπει σε πλαίσια γνωστών μορφών ζωής και όχι το καθένα από τα στοιχεία του. Ένα θυμωμένο τρίγωνο δεν αρκεί να «βάζει τις φωνές»· ο συνδυασμός της στάσης/κίνησης του «σώματός» του με τον ήχο (ομιλία, μουσική κλπ) θα το μετατρέψουν σε μια αισθητικά αποδεκτή θυμωμένη προσωπικότητα, συμβατή με κάποια γνωστή από την καθημερινότητα «μορφή ζωής». Η δουλειά αυτή γίνεται στο πλαίσιο του παιξίματος, όπου και λειτούργησαν πάλι τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά, σε διάφορα επίπεδα.

Στο επίπεδο του εικαστικού σχεδιασμού προέκυψε το ζήτημα της διαφοροποίησης των σχημάτων με όγκο από τα επίπεδα σχήματα. Η τεχνική της κούκλας δεν φαινόταν να μπορεί να διαχειριστεί εύκολα επίπεδες κατασκευές. Εδώ τα σχήματα των κατασκευών ωθούνταν στην κατεύθυνση των στερεών σχημάτων, μιας και τα στερεά σώματα στέκονται και στερεώνονται ευκολότερα και με τον τρόπο αυτόν βοηθούν στο παίξιμο. Οι φοιτήτριες, από την άλλη μεριά, δεν φάνηκε να έχουν κανένα πρόβλημα να κατασκευάζουν κύβους, σφαίρες ή τριγωνικά πρίσματα και να ισχυρίζονται ότι παρουσιάζουν τετράγωνα, κύκλους ή τρίγωνα. Στις συζητήσεις που ξεκίνησαν, πολλές φοιτήτριες φάνηκε να παραξενεύονται που η διδάσκουσα επέμενε ότι «δεν είναι το ίδιο πράγμα». Ο τρόπος που οι φοιτήτριες πείστηκαν ήταν θεατρικός: ένας κύβος-κούκλα έχει πολύ περισσότερες όψεις και τρόπους κίνησης από ότι ένα τετράγωνο-κούκλα. Έτσι προέκυψαν και οι πολλές δηλώσεις φοιτητριών στα ερωτηματολόγια, ότι έμαθαν πως στα μαθηματικά «άλλο είναι η σφαίρα, άλλο ο κύκλος· κι ας είναι και τα δυο κυκλικά· άλλα πράγματα μπορείς να κάνεις με το ένα και άλλα με το άλλο». Παρόλα αυτά, σε αρκετές σπουδές που εξελίχθηκαν με την τεχνική της κούκλας, οι φοιτήτριες επέμειναν να κατασκευάζουν στερεά σώματα ως αντιπροσωπεύοντα των επίπεδων σχημάτων. Όσο για το τι βλέπει ο θεατής, επειδή η πανίσχυρη δικαιολογία «*για παιδιά είναι! Τι θα καταλάβουν;*» δέχτηκε σφοδρή κριτική, οι φοιτήτριες φρόντισαν την κίνηση και τη στάση των στερεών σχημάτων έτσι ώστε αυτά να προβάλουν σταθερά τη μια μόνο όψη τους προς το κοινό.

Η τεχνική του μαύρου θεάτρου από την άλλη μεριά μπορεί να λειτουργήσει προβάλλοντας τα επίπεδα σχήματα ακριβώς ως επίπεδα, είτε σ' αυτά θέλουμε να συμπεριλάβουμε και τον επίπεδο χώρο που περικλείουν οι πλευρές, είτε επιθυμούμε αναφορά μόνο στις γραμμές των πλευρών. Στην

τεχνική αυτή, ό,τι θέλουμε να φαίνεται το βάφουμε με χρώματα που επανεκπέμπουν τις υπεριώδεις ακτινοβολίες του «black light» και ό,τι δεν θέλουμε, το βάφουμε μαύρο. Εδώ εμφανίστηκαν να παίζουν με άνεση μέχρι και οι γραμμές: μια ομάδα από ευθύγραμμα τμήματα και κύκλους έφτιαχνε στο χώρο διάφορα γεωμετρικά σχήματα. Η «στραβή» γραμμή της παρέας δεν μπορούσε όμως να ταιριάξει σε κανένα απ' αυτά. Μέχρι τη στιγμή που βρέθηκε να ακουμπά με τη μια άκρη της έναν μικρό κύκλο. Ένα «χαρούμενο» 6 εμφανίστηκε στο κέντρο της σκηνής που ακολουθώντας τη διθυραμβική μουσική υπόκρουση μετατρεπόταν σε 9 και πάλι σε 6 κ.ο.κ.

Η άσκηση στην κίνηση, από την άλλη μεριά, έφερε στο προσκήνιο τα λειτουργικά χαρακτηριστικά των γεωμετρικών σχημάτων που, με τη σειρά τους, έθεσαν και έλυσαν προβλήματα συμμετρίας ή ισορροπίας (πώς στέκεται ένα τρίγωνο, πώς περπατά κλπ), μετασχημάτισαν αρκετά αρχικά σενάρια και εμπλούτισαν με μαθηματικές ιδέες τις θεατρικές σπουδές. Αγώνες δρόμου, κυνηγητά, αναρριχήσεις βρήκαν τη θέση τους στις αφηγήσεις, βελτιώνοντας κυρίως την αισθητική των παραστάσεων, όταν και όπου δέθηκαν καλά με τη μουσική.

Εκτιμώντας συνολικά τις παραγωγές των φοιτητριών μπορούμε να πούμε ότι το εγχείρημα της σύνδεσής τους με μαθηματικές ιδέες πέτυχε. Η βασική ιδέα της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης, που στην περίπτωσή μας τη διαβάζουμε ως «αφήστε τους όποιους εκπαιδευόμενους να κάνουν κάποια πραγματική δουλειά χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά», φαίνεται να τις απάλλαξε από το άγχος του λάθους και να απογείωσε τη δημιουργικότητά τους. Αρκετές μάλιστα φοιτήτριες, ίσως για πρώτη φορά στη ζωή τους, τόλμησαν να διαχειριστούν δημιουργικά μαθηματικές ιδέες. Από την καθαρά θεατρική πλευρά δεν μπορούμε πάλι να πούμε ότι κάποια σπουδή άγγιξε στο σύνολό της την τελειότητα. Καμία όμως δεν απέτυχε και σε όλες τις πλευρές της. Κάποιες θεατρικές αφηγήσεις ήταν ευρηματικές, κάποια παιξίματα άγγιζαν την αρτιότητα, κάποιες θεατρικές «πραγματικότητες» ήταν υποβλητικές. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να υποθέτουμε ότι αν υπήρχε περισσότερος διαθέσιμος χρόνος οι ελλείψεις θα μπορούσαν να δουλευτούν και οι τελικές παραστάσεις θα έβγαιναν πιο ολοκληρωμένες.

Την υπόθεση αυτή έρχονται να επιβεβαιώσουν και τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την κατά Fishbein & Ajzen θεώρηση της δραστηριότητας. Τα υψηλά ποσοστά των δηλώσεων ότι οι φοιτήτριες κέρδισαν από τη μεταξύ τους συνεργασία και από την εμπλοκή τους με τη θεατρική παραγωγή, οι υψηλές βαθμολογίες στην πρόθεσή τους να εμπλακούν ξανά με τέτοιου είδους δραστηριότητες, οι υψηλές βαθμολογίες της θετικής τους στάσης απέναντι σ' αυτές, ακόμη και η υψηλή τους αυτοεκτίμηση για το

αποτέλεσμα, αποτελούν τεκμήρια που μας βεβαιώνουν ότι οι φοιτήτριες άντεχαν και σε περισσότερη δουλειά.

Θετική τέλος ένδειξη θεωρούμε και το γεγονός ότι στις μεταξύ των φοιτητριών συζητήσεις επανέρχονταν από διάφορες μεριές παράπονα για τα σχόλια που εισέπρατταν οι δηλώσεις τους στα νεανικά «chat rooms» και «blogs», οι σχετικές με το πόση δουλειά έχουν να κάνουν για την παράσταση του κουκλοθέατρου: «*Τους είπα ότι δεν μπορώ, γιατί κάνουμε πρόβες για το κουκλοθέατρο και με κορόιδεψαν. Που να 'ξεραν πόση δουλειά έχει… μήπως εγώ ήξερα;*».

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ajzen, I. (2005): *Attitudes, personality, and behavior* (2nd. Edition). England: Open University Press / McGraw- Hill.

Fishbein, M. & Ajzen, I. (2010): *Predicting and changing behavior: The reasoned action approach*. New York: Psychology Press (Taylor & Francis).

Freudenthal, H. (1978): *Weeding and Sowing. Preface of a Science of Mathematics Education.* Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1991): *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer.

Lodge, D. (1986): Narration with words. In *Images and understanding* (editors H. Barlow, C. Blakemore, & M. Weston-Smith). Cambridge: Cambridge University Press, p. 141-153.

Μπεμπή, Ε., Τζουγκράκη, Χ., & Τσελφές, Β. (2004): Πεποιθήσεις εκπαιδευτικών του Γυμνασίου από τις οποίες εξαρτούν την πρόθεσή τους να εφαρμόσουν εργαστηριακή διδασκαλία της Χημείας. Στο «*Φυσικές Επιστήμες Διδασκαλία, Μάθηση και Εκπαίδευση*», Πρακτικά του 4ου Πανελλήνιου συνεδρίου για τη Διδακτική των Φυσικών Επιστημών και τις Νέες Τεχνολογίες (επιμέλεια Β.Τσελφές, Π. Καριώτογλου και Μ. Πατσαδάκης). Αθήνα: ΤΕΑΠΗ -ΕΚΠΑ, σελ.450-457.

Norris, S., Guilbert, S., Smith, M., Hakimelahi, L. & Phillips, L. (2005): A theoretical framework for narrative explanation in science. *Science Education*, 89, p.535-563.

Παρούση, Α. (2005): Συνδυαστική διδασκαλία εμψύχωσης και κατασκευής μουσικών οργάνων. Παρουσιάστηκε στο *1ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μουσικής Αγωγής για την Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση*, Αθήνα.

Παρούση, Α. (2007): Διδάσκοντας τη γλώσσα των χεριών στην τέχνη του κουκλοθέατρου. Στα *Πρακτικά 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου ΟΜΕΡ*. Πάτρα: ΟΜΕΡ, ΤΕΕΑΠΗ, ΠΠ, σελ.316-325.

Παρούση, Α. (2008): Το σώμα μου σκηνή: Όταν η εκπαιδευτική έρευνα και πράξη ταυτίζονται, στο *Σύνδεση εκπαιδευτικής έρευνας και πράξης. Η ακαδημαϊκή πλευρά* (επιμέλεια Β. Σβολόπουλος). Αθήνα: Ατραπός, σελ.227-248.

Paroussi, A. & Tselfes, V. (2007): Crossing Cultural Borders between Science and Shadow Theatre: the Case of Light (Part II). In *Planting Trees of Drama with Global Vision in Local Knowledge: IDEA 2007 Dialogues* (Editors J. Shu & Ph. Chan), Hong Kong: IDEA Publications, p.450-465.

Paroussi, A. & Tselfes, V. (2008): Shadow Theatre and Physics in Early Childhood Teachers' Education. *Education and Theatre* (Special Edition), 9, 83-94.

Pavis, P. (2006): *Λεξικό του Θεάτρου*. Αθήνα: Gutenberg.

Peirce, C. (1964): *Collected papers* (Editors C. Hartshorne & P. Weiss). Cambridge: Belkan Press.

Pintrich, P., Marx, R., & Boyle, R. (1993): Beyond cold conceptual change: The role of motivational beliefs and classroom contextual factors in the process of conceptual change. *Review of Educational Research, 63,* p.167-200.

Silverstein, S. (1998): *Το κομμάτι που λείπει συναντά το μεγάλο Ο* (Μετάφραση Άννα Μαρία Στεφάν). Αθήνα: Δωρικός.

Tillis, S. (1992): *Toward an aesthetics of the puppet*. New York: Greenwood Press.

Treffers, A. (1987): *'Three Dimensions', A Model of Goals and Theory Description in Mathematics Instruction - TheWiskobas Project*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Τσελφές, Β., Παρούση, Α. και Βαρσάμου, Α. (2009): Η εκπαιδευτική αναπαραγωγή, η «εικονικότητα» της σχολικής επιστήμης και η «θεατρικότητα» της διδακτικής-μαθησιακής διαδικασίας. Στα *Πρακτικά 6ου Πανελληνίου Συνεδρίου Διδακτικής των Φυσικών επιστημών και Νέων Τεχνολογιών στην Εκπαίδευση - Οι πολλαπλές προσεγγίσεις της διδασκαλίας και της μάθησης των Φυσικών Επιστημών* (Επιμέλεια Π. Καριώτογλου, Α. Σπύρτου και Α. Ζουπίδης). Φλώρινα: ΠΤΝ-ΠΔΜ, σελ.861-869.

Tselfes, V. & Paroussi, A. (2009): Science and Theatre Education: A Cross-disciplinary Approach of Scientific Ideas Addressed to Student Teachers of Early Childhood Education. *Science & Education*, 18, p.115-1134.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (1998): NORMA-lecture in Kristiansand, Norway, Freudenthal Institute, http://www.fi.uu.nl/en/rme

Wubbels, T., Korthagen, F. & Broekman, H. (1997): Preparing teachers for Realistic Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics* 32, p.1–28.

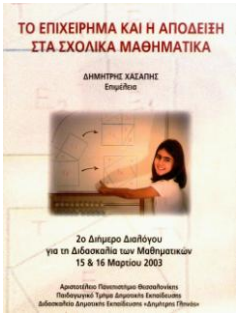
ΥΠΕΠΘ, (2002): *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών* (ΣΕΠΠΣ). Αθήνα.

aparous@ecd.uoa.gr,

tselfesv@ecd.uoa.gr

Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΩΣ ΜΕΣΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ ΚΑΙ ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Πρακτικά 1ου Διημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών
Θεσσαλονίκη, 2002
Σχήμα 17x24, σελ. 175
ISBN 960-312-085-5



ΤΟ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑ ΚΑΙ Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

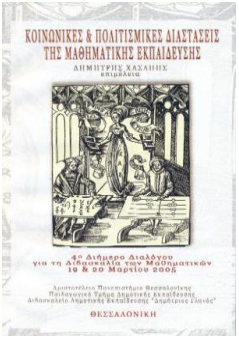
Πρακτικά 2ου Διημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Θεσσαλονίκη, 2003,
Σχήμα 17x24, σελ. 250
ISBN 960-312-115-0

ΕΙΚΟΝΑ, ΣΧΗΜΑ ΚΑΙ ΛΟΓΟΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πρακτικά 3ου Διημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών

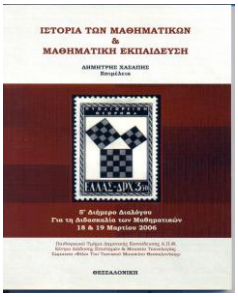
Θεσσαλονίκη, 2004
Σχήμα 17x24, σελ. 185
ISBN 960-87530-8-2



ΚΟΙΝΩΝΙΚΕΣ & ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΕΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Πρακτικά 4ου Διημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Θεσσαλονίκη, 2005
Σχήμα 16x24.5, σελ. 208
ISBN 960-88333-5-3



ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

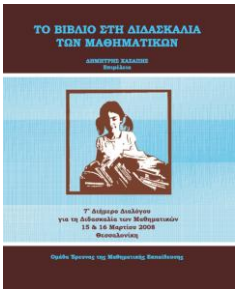
Πρακτικά 5ου Διημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Θεσσαλονίκη, 2006
Σχήμα 17x24, σελ. 220

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΛΟΓΟΤΕΧΝΙΑ

Πρακτικά 6ου Διημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών

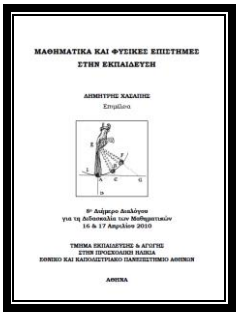
Θεσσαλονίκη, 2007
Σχήμα 17x24, σελ. 315



ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πρακτικά 7ου Διημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Θεσσαλονίκη, 2008
Σχήμα 17x24, σελ. 367



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Πρακτικά 8ου Διημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Αθήνα, 2010
Έκδοση CD-ROM
Σχήμα 17x24, σελ. 256