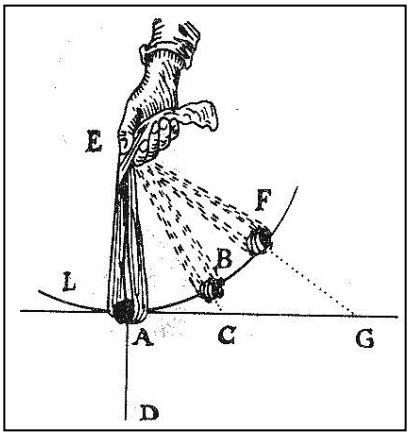
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΧΑΣΑΠΗΣ

Επιμέλεια



8ο Διήμερο Διαλόγου
για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών
16 & 17 Απριλίου 2010

ΤΜΗΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ & ΑΓΩΓΗΣ
ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗ ΗΛΙΚΙΑ
ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΘΗΝΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΧΑΣΑΠΗΣ (Επιμέλεια)

Ηλεκτρονική Έκδοση:
Τμήμα Εκπαίδευσης & Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία
Εθνικό Και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΑΘΗΝΑ, 2010

Η εικόνα του εξωφύλλου:

Διάγραμμα από το έργο του Καρτέσιου, Αρχές Φιλοσοφίας

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Οι φυσικές επιστήμες μελετούν τη φύση, ενώ τα μαθηματικά αφηρημένες δομές. Παρόλα αυτά, πολλές μαθηματικές δομές χρησιμοποιούνται για την περιγραφή των σχέσεων και της αλληλόδρασης φυσικών οντοτήτων. Στις φυσικές επιστήμες τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται ως μέσο για την κατανόηση της φύσης, ενώ στα μαθηματικά οι αφηρημένες έννοιες και οι δομές τους, όπως για παράδειγμα οι αριθμοί, δεν απαιτούν για την ύπαρξη ή την αναγκαιότητα τους φυσικά αντικρίσματα, άρα και έννοιες ή θεωρίες των φυσικών επιστημών. Πολλές φορές, όμως, αφηρημένες δομές οι οποίες επινοήθηκαν και αναπτύχθηκαν ως μαθηματικά αντικείμενα χρησιμοποιούνται μετέπειτα και ενίοτε πολλά χρόνια αργότερα για να περιγράψουν άγνωστα μέχρι τότε φυσικά φαινόμενα.

Τα μαθηματικά, επομένως, δεν μπορεί να θεωρηθούν απλά ως ένα εργαλείο έκφρασης, χειρισμού και οργάνωσης των εννοιών και των θεωριών των φυσικών επιστημών, αφού πολλές φορές καθορίζουν το περιεχόμενο των ίδιων αυτών εννοιών και θεωριών και αντίστοιχα, οι φυσικές επιστήμες δεν μπορεί να θεωρηθούν ως ένα από τα πεδία εφαρμογής των μαθηματικών, τα οποία προσφέρουν προβλήματα προς επίλυση με τη χρήση ήδη αναπτυγμένων μαθηματικών εννοιών και δομών, αφού πολλές φορές καθορίζουν την ανάπτυξη των ίδιων των μαθηματικών.

Οι σχέσεις μαθηματικών και φυσικών επιστημών είναι πολύπλοκες και στην ιστορική τους εξέλιξη - από τον Αρχιμήδη μέχρι τον Αϊνστάιν – μαθηματικές δομές και θεωρίες των φυσικών επιστημών συμπλέκονται παράγοντας αναπάντεχα, πολλές φορές, αποτελέσματα ή και νέες επιστημονικές περιοχές. Στην ελληνική προσχολική και σχολική πραγματικότητα, όμως, αυτές οι πολλαπλές σχέσεις μαθηματικών και φυσικών επιστημών, όχι μόνο δεν αξιοποιούνται δημιουργικά στην ανάπτυξη δραστηριοτήτων μάθησης και διδασκαλίας, αλλά σε πολλές περιπτώσεις μεταβάλλονται εξαιτίας επιλογών των αναλυτικών προγραμμάτων, των σχολικών βιβλίων ή των διδακτικών πρακτικών σε πηγές σύγχυσης.

Η ενημέρωση για τους σχετικούς προβληματισμούς, τις ερευνητικές δραστηριότητες και τις πρωτοβουλίες ερευνητών και εκπαιδευτικών για τη διερεύνηση και την αξιοποίηση των αμοιβαίων και πολύπλευρων σχέσεων των μαθηματικών με τις φυσικές επιστήμες στην προσχολική και τη σχολική πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση αποτέλεσε πρωταρχικό στόχο του 8ου Διημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών με θέμα

«Μαθηματικά και Φυσικές Επιστήμες στην προσχολική και σχολική εκπαίδευση» που οργανώθηκε στις 16 & 17 Απριλίου 2010 από το Τμήμα Εκπαίδευσης & Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία του Εθνικού & Καποδιστριακού Πανεπιστήμιο Αθηνών με την οργανωτική υποστήριξη της Ελληνικής Εταιρείας Ιστορίας, Φιλοσοφίας& Διδακτικής των Επιστημών και του περιοδικού ΚΡΙΤΙΚΗ.

Στην παρούσα έκδοση περιλαμβάνονται τα κείμενα των εισηγήσεων, οι οποίες παρουσιάστηκαν στο Διήμερο αυτό.

Δημήτρης Χασάπης

Αναπληρωτής Καθηγητής Τ.Ε.Α.Π..Η του Ε.Κ.Π.Α.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ Ι

Μαθηματικά και φυσικές επιστήμες: Γενικά ζητήματα και προβληματισμοί

Αριστείδης Μπαλτάς

Τα μαθηματικά και η ιδιαιτερότητα της φυσικής ως επιστήμης 9

Κώστας Στεργιόπουλος

Πώς μπορεί να εξηγηθεί η εφαρμοσιμότητα των Μαθηματικών στη Φυσική; Μια διερεύνηση του προβλήματος 10

Βασίλης Τσελφές

Μαθηματικά και Φυσικές Επιστήμες: Μια προσπάθεια διερεύνησης της κοινής εκπαιδευτικής τους 'μοίρας' ... .11

Δημήτρης Ψύλλος

Διδασκαλία και μάθηση με τα μοντέλα ή για τα μοντέλα στη σχολική εκπαίδευση 28

Δημήτρης Χασάπης

Η γλώσσα των μαθηματικών, η γλώσσα των φυσικών επιστημών, η γλώσσα των εκπαιδευτικών πρακτικών..... 29

Νικόλαος Μπερκέτης

Φυσικές Επιστήμες και η σχέση τους με την ιστορία και την παιδαγωγική των Μαθηματικών 40

ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙ

Μαθηματικά και φυσικές επιστήμες στην εκπαίδευση: Ερευνητικές διαπιστώσεις & Διδακτικές προτάσεις

Κώστας Νικολαντωνάκης

Η εφαρμογή της δραστηριότητας «Η Κούρσα για το 20» σε μαθητές Γ' Τάξης Δημοτικού Σχολείου στο Νομό Πέλλας 56

Κωνσταντίνος Ζαχάρος, Βασίλης Κόμης, Μαρία Δοκιμάκη, Δημήτρης Νικολός

Δραστηριότητες γραμμικής μέτρησης στην προσχολική εκπαίδευση 70

Παναγιώτα Κοταρίνου & Χαρούλα Σταθοπούλου

"Στα χνάρια του Αρχιμήδη...": Ένα διαθεματικό project στο Λύκειο για τη διασύνδεση Μαθηματικών και Φυσικής..... 88

Αγγελική Μητρογιαννοπούλου

«ΒΟΛΕΣ» Σενάριο με το λογισμικό Modellus 104

Στέλιος Ορφανός

Διάγνωση των εμποδίων στην κατανόηση των συναρτήσεων με τη βοήθεια δραστηριοτήτων μοντελοποίησης Κινηματικής 118

Ελβίνα Παντελάκη

Η συγκρότηση της έννοιας του ορίου μέσα από την καθημερινή εμπειρία και την τυπική διδασκαλία των μαθηματικών και της φυσικής 130

Μιχαήλ Μανωλόπουλος & Βασίλειος Μανωλόπουλος

Η Παρουσία της Φυσικής στα Γυμνασιακά Εγχειρίδια των Μαθηματικών... 147

Ολυμπία Γκριμπίζη & Ελένη Σπανοπούλου

Συνάντηση στο πεδίο των εννοιών εκεί που τα μαθηματικά συναντούν τις φυσικές επιστήμες: Ένα παράδειγμα από τα σχολικά εγχειρίδια του Δημοτικού (κύκλος-ταχύτητα-διάστημα-χρόνος)..... 166

Στέλιος Παπακωνσταντίνου

Παίζοντας με τη Φυσική και τα Μαθηματικά : Από το ζυγό της Μαρί Κιουρί ... στην τραμπάλα της Περαίας 188

Ιωάννης θ. Λαζαρίδης & Τριαντάφυλλος Α. Τριανταφυλλίδης

Διδακτικές πρακτικές δυο δασκάλων σε διαθεματικές προσεγγίσεις με βάση τα Μαθηματικά και τα Στοιχεία Φυσικής 199

Χρίστος Μηλιώνης

Η Σχέση Μαθηματικών και Φυσικής στο έργο «Διάλογοι για τα Μαθηματικά» του Alfréd Rényi: Δυνατότητες διδακτικής αξιοποίησης 221

Σταυρουλα Παπανικολαου

Διαβάζοντας για τη σχετικότητα παρέα με τους μαθητές μας 238

ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙΙ

Παρεμβάσεις

Γεράσιμος Μελετίου, Τάσος Πατρώνης & Γιάννης Ρίζος

Η μαθηματική προσομοίωση ως "μαύρο κουτί": Χρήστες των μαθηματικών & ψηφιακά πακέτα σε προβλήματα της φύσης και της κοινωνίας 255

ΕΝΟΤΗΤΑ Ι

Μαθηματικά και φυσικές επιστήμες: Γενικά ζητήματα και προβληματισμοί

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ Η ΙΔΙΑΙΤΕΡΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΩΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Αριστείδης Μπαλτάς

Ε.Μ.Π. Αθήνας

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αρκετοί φιλόσοφοι έχουν παρατηρήσει την ιδιάζουσα (και φαινομενικά μυστηριώδη) σχέση μαθηματικών και φυσικής. Η εργασία θα προσπαθήσει να διατρέξει τις παραμέτρους αυτής της σχέσης, αποσκοπώντας να δείξει ότι αυτή μπορεί να ορίσει την ιδιαιτερότητα της φυσικής, δηλαδή να τη διαχωρίσει από τις άλλες φυσικές επιστήμες. Έτσι το φαινομενικό μυστήριο μπορεί να εκλείψει ενώ παράλληλα μπορούν να αντληθούν γόνιμα συμπεράσματα για κάποιες τουλάχιστον από τις μορφές εξέλιξης που ακολουθούν τόσο τα μαθηματικά όσο και η φυσική.

ΠΩΣ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΕΞΗΓΗΘΕΙ Η ΕΦΑΡΜΟΣΙΜΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ; ΜΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Κώστας Στεργιόπουλος

Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο & Β/θμια Εκπαίδευση

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εργασία διερευνά τις οντολογικές και γνωσιολογικές συνέπειες της δεδομένης εφαρμοσιμότητας των μαθηματικών στις εμπειρικές επιστήμες, και ιδιαίτερα στη φυσική. Μετά από μια ιστορική σκιαγράφηση του προβλήματος στη φιλοσοφία της επιστήμης και τη φιλοσοφία των μαθηματικών, επιχειρείται η ταξινόμηση των ποικίλων απαντήσεων που έχουν προταθεί. Υποστηρίζεται ότι, αν λάβουμε υπ' όψιν το *πώς* εφαρμόζονται τα μαθηματικά στη φυσική, τότε η καντιανή προσέγγιση (ή «κοπερνίκεια επανάσταση») φαίνεται να είναι η πλέον ικανοποιητική πρόταση για τη λύση του προβλήματος.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ: ΜΙΑ ΠΡΟΣΠΑΘΕΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗΣ ΤΗΣ ΚΟΙΝΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΤΟΥΣ 'ΜΟΙΡΑΣ'

Βασίλης Τσελφές

Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στη βιβλιογραφία συναντάμε έναν εκτεταμένο και αρκούντως τεκμηριωμένο κατάλογο ισχυρών σχέσεων, που λειτουργούν μεταξύ των Μαθηματικών (Μ) και των βασικών και εφαρμοσμένων Φυσικών Επιστημών (ΦΕ). Συναντάμε επίσης και έναν (λιγότερο εκτεταμένο) κατάλογο διαφορών ανάμεσα στις παραπάνω 'πειθαρχίες'.

Στη Γενική Εκπαίδευση (ΓΕ) από την άλλη μεριά, συναντάμε, σε παγκόσμιο επίπεδο, μια κοινή 'μοίρα' των Μ και των ΦΕ, ως γνωστικών αντικειμένων: Μ και ΦΕ θεωρούνται ως τα διδακτικά αντικείμενα που προσφέρουν, κατ' εξοχήν, αξιόπιστες γνώσεις· γνώσεις που την ίδια στιγμή και από την ίδια συντριπτική πλειοψηφία ανθρώπων θεωρούνται από ακατανόητες έως αποκρουστικές. Με τον τρόπο αυτό εκτιμώ ότι συμπλέουν στην οικοδόμηση του πλέον απογοητευτικού τεκμηρίου, σχετικά με τα επιτεύγματα της παγκόσμιας μεταπολεμικής εκπαίδευσης. Μιας εκπαίδευσης που από τους κόλπους της 'παράγει' πολίτες που, σε ποσοστά που ξεπερνούν το 80%, εμπιστεύονται (αξιοπιστία των γνώσεων Μ και ΦΕ) τις γνώσεις που δεν κατανοούν ή και αντιπαθούν!

Στην εργασία αυτή θα προσπαθήσω να δείξω ότι το παραπάνω απογοητευτικό εκπαιδευτικό αποτέλεσμα είναι σε ελάχιστο βαθμό προϊόν των κοινών χαρακτηριστικών και των σχέσεων που εμφανίζουν οι 'πειθαρχίες' των Μ και των ΦΕ. Είναι κυρίως προϊόν χαρακτηριστικών των εκπαιδευτικών δομών που εγκαταστάθηκαν και λειτούργησαν αποδοτικά στο πλαίσιο του 'Ψυχρού Πολέμου'. Χαρακτηριστικών που εξακολουθούν να λειτουργούν τις δεκαετίες που ακολούθησαν τη λήξη του, βάζοντας όμως σε ρίσκο τις νεότερες στοχεύσεις της ενοποιημένης χρήσης των Μ, των ΦΕ και της Τεχνολογίας στην κατεύθυνση του 'επιστημονικού και τεχνολογικού γραμματισμού', αν όχι και τις ίδιες τις εκπαιδευτικές δομές.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στη βιβλιογραφία συναντάμε έναν εκτεταμένο και αρκούντως τεκμηριωμένο κατάλογο ισχυρών σχέσεων, που λειτουργούν μεταξύ των Μαθηματικών (Μ) και των βασικών και εφαρμοσμένων Φυσικών Επιστημών (ΦΕ). Συναντάμε επίσης και ένα (λιγότερο εκτεταμένο) κατάλογο διαφορών ανάμεσα στις παραπάνω πειθαρχίες.

Στη Γενική Εκπαίδευση από την άλλη μεριά, συναντάμε, σε παγκόσμιο επίπεδο, μια κοινή 'μοίρα' των Μ και των ΦΕ, ως γνωστικών αντικειμένων: Μ και ΦΕ θεωρούνται ως τα διδακτικά αντικείμενα που προσφέρουν, κατ' εξοχήν, αξιόπιστες γνώσεις· γνώσεις που την ίδια στιγμή και από την ίδια συντριπτική πλειοψηφία ανθρώπων θεωρούνται από δυσνόητες έως αποκρουστικές. Με τον τρόπο αυτό εκτιμώ ότι συμπλέουν στην οικοδόμηση του πλέον απογοητευτικού τεκμηρίου, σχετικά με τα επιτεύγματα της παγκόσμιας μεταπολεμικής υποχρεωτικής εκπαίδευσης (ΥΕ). Μιας εκπαίδευσης που από τους κόλπους της 'παράγονται' πολίτες που, σε ποσοστά που ξεπερνούν το 80%, εμπιστεύονται (αξιοπιστία των γνώσεων Μ και ΦΕ) τις γνώσεις που δεν κατανοούν ή και αντιπαθούν!

Στο κείμενο αυτό θα προσπαθήσω να δείξω ότι το παραπάνω απογοητευτικό εκπαιδευτικό αποτέλεσμα είναι σε ελάχιστο βαθμό προϊόν των κοινών χαρακτηριστικών και των σχέσεων που εμφανίζουν οι 'πειθαρχίες' των Μ και των ΦΕ. Είναι κυρίως προϊόν χαρακτηριστικών των εκπαιδευτικών δομών που εγκαταστάθηκαν και λειτούργησαν αποδοτικά στο πλαίσιο του 'ψυχρού πολέμου'. Χαρακτηριστικών που εξακολουθούν να λειτουργούν τις δεκαετίες που ακολούθησαν τη λήξη του, βάζοντας όμως σε ρίσκο τις νεότερες στοχεύσεις της ενοποιημένης χρήσης των Μ, των ΦΕ και των Τεχνολογιών (Τ) στην κατεύθυνση του 'επιστημονικού και τεχνολογικού γραμματισμού', αν όχι και τις ίδιες τις εκπαιδευτικές δομές.

ΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Τα Μ, οι ΦΕ και οι Τ στις μέρες μας δείχνουν να έχουν ισχυρά συνδεδεμένες διαδρομές στο παγκόσμιο πια κοινωνικό, πολιτικό και οικονομικό 'ανθρώπινο σύμπαν'. Η διαπίστωση αυτή μπορεί να υποστηριχθεί εμπειρικά με δεκάδες τεκμήρια από την εξέλιξη και τη δράση αυτών των πειθαρχιών. Μια τέτοια, όμως, συσσώρευση τεκμηρίων που συνήθως δεν είναι κατηγοριοποιημένα κάτω από τις διαφορετικές ιδέες που τα εντοπίζουν, μάλλον συσκοτίζει παρά να φωτίζει τους συλλογισμούς κάποιου που προσπαθεί να διακρίνει σχέσεις με νόημα.

Για παράδειγμα, διαβάζω στο αμερικανικό ‘project 2061’ (AAAS 1990), που υποστηρίζει ότι «η σχέση μεταξύ Μ και πεδίων των βασικών και εφαρμοσμένων ΦΕ είναι εξαιρετικά ισχυρή»:

> *Η ‘όσμωση’ μεταξύ μαθηματικών και επιστήμης έχει μακρά ιστορία, ιστορία πολλών αιώνων. Η επιστήμη προμηθεύει τα μαθηματικά με ενδιαφέροντα προς διερεύνηση προβλήματα και τα μαθηματικά προμηθεύουν την επιστήμη με ισχυρά εργαλεία για την ανάλυση των δεδομένων της. Συχνά, αφηρημένες δομές που έχουν μελετηθεί από τους μαθηματικούς για δικούς τους λόγους έχουν αποδειχθεί πολύ αργότερα ότι είναι πολύ χρήσιμες για την επιστήμη. Η επιστήμη και τα μαθηματικά προσπαθούν να ανακαλύψουν γενικές δομές και σχέσεις και με αυτή τη λογική αποτελούν μέρος του ίδιου εγχειρήματος.*

Η παραπάνω παράγραφος είναι η πρώτη από μια σειρά παραγράφους που υποστηρίζουν τη συνάφεια Μ, ΦΕ και Τ στο κατεξοχήν εκπαιδευτικό κείμενο του μετα-ψυχροπολεμικού ‘αμερικανικού έθνους’. Στην πρώτη της πρόταση παραπέμπει για την ανάδειξη της εν λόγω συνάφειας στην ιστορία πολλών αιώνων. Μέσα στο πλαίσιο αυτό αποκτούν νόημα τα τεκμήρια που παρουσιάζει συνοπτικά στις δύο επόμενες προτάσεις. Και η καταληκτική πρόταση παρουσιάζει ένα αναλογικό επιχείρημα που μάλλον θεωρεί ότι στηρίζεται σ’ αυτές. Αλλά η τελική πρόταση θα μου επιτρέψετε να θεωρώ ότι είναι έωλη. Γιατί δεν γνωρίζω καμία πειθαρχία που να μη προσπαθεί να ανακαλύψει (μάλλον να κατασκευάσει/ οικοδομήσει) γενικές δομές και σχέσεις, ανεξάρτητα από το αν οι ανακαλύψεις/ κατασκευές της χαίρουν ευρείας αναγνώρισης ή όχι. Και επιπλέον δύσκολα θα με πείσει κάποιος ότι η φιλοσοφία και τα μαθηματικά δεν ήταν μέρος του ίδιου εγχειρήματος στους αρχαιοελληνικούς ή ελληνιστικούς χρόνους· ή ότι η επιστήμη και η ‘φυσική φιλοσοφία’ δεν ήταν μέρος του ίδιου εγχειρήματος την εποχή της ‘επιστημονικής επανάστασης’· ή ότι η αρχαιοελληνική φιλοσοφία αποτελούσε εγχείρημα ανάλογο με τη ‘φυσική φιλοσοφία’ της πρώτης επιστημονικής εποχής· ή ότι η επιστήμη και η φιλοσοφία είναι μέρος του ίδιου εγχειρήματος σήμερα. Γιατί αυτό το θεμελιώδες εκπαιδευτικό κείμενο περιλαμβάνει τέτοια αναλογικά επιχειρήματα; Είναι μέρος ενός ‘μυστικού’, ‘κακόβουλου’ και ‘εφιαλτικού’ σχεδίου; Ή η αλλοτρίωση του παγκόσμιου εκπαιδευτικού χώρου έχει ‘αγγίξει κόκκινο’, τουλάχιστον σε ότι αφορά τις επιστήμες, ώστε αναλογίες σαν κι αυτή να στηρίζουν την αναμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών κρατών όπως η Αμερική;

Ελπίζω να είναι προφανές ότι στο κείμενο αυτό θα προσπαθήσω να υποστηρίξω τη δεύτερη θέση. Η προσπάθεια αυτή θα ακολουθήσει τα εξής βήματα:

1. Ακολουθώντας το μοντέλο του I. Hacking (1992), που αναπαριστά την 'εσωτερική ζωή' των εργαστηριακών επιστημών, θα περιγράψω μια 'επαρκή' κατά την άποψή μου υπόθεση η οποία περιγράφει σημαντικά χαρακτηριστικά της σημερινής σχέσης Μ, ΦΕ και Τ, θεωρώντας ότι η σχέση Μ και ΦΕ θα συσκοτιζόταν αν δεν λάμβανα υπόψη μου το ρόλο των Τεχνολογιών, που στις σημερινές συνθήκες μεσολαβούν τα Μ και τις ΦΕ στο κοινωνικό, πολιτικό και οικονομικό πεδίο.

2. Ακολουθώντας το μοντέλο του Sewell (1992) που αναπαριστά διαλεκτικά τα χαρακτηριστικά και τη δυναμική των κοινωνικών-πολιτισμικών δομών θα περιγράψω αδρά τη δυναμική των σημερινών εκπαιδευτικών δομών της ΥΕ και θα προσπαθήσω να αναδείξω τη σχέση Μ, ΦΕ και Τ όπως αυτή τείνει να διαμορφωθεί κάτω από την πίεση τόσο της δυναμικής των εκπαιδευτικών δομών όσο και των πολιτικά κατευθυνόμενων εκπαιδευτικών μεταρρυθμίσεων που πραγματοποιούνται σε διεθνές επίπεδο από τη δεκαετία του '80 και μετά.

3. Με βάση τα παραπάνω ελπίζω ότι θα καταφέρω να αναδείξω τα αδιέξοδα που δημιουργεί στα υπό μεταρρύθμιση (διάρκειας 30 και χρόνων!) εκπαιδευτικά συστήματα η ασυμβατότητα ανάμεσα στη 'φύση' και τη σχέση Μ και ΦΕ όπως αυτές διαμορφώνονται στο πεδίο άσκησης των πειθαρχιών και όπως οι ίδιες λειτουργούν στον εκπαιδευτικό χώρο. Καταλήγοντας, θα συζητήσω το πρόβλημα αυτό στην κατεύθυνση της ανάδειξης των ανατροπών που προϋποθέτουν οι εναλλακτικές του λύσεις.

ΣΧΕΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ ΩΣ ΠΕΙΘΑΡΧΙΩΝ

Το μοντέλο του I. Hacking (1992) χρησιμοποιεί μια *ταξινομία των οντοτήτων της εργαστηριακής πρακτικής* και μέσω αυτής αναπαριστά τη δραστηριότητα/ 'εσωτερική ζωή' των εργαστηριακών επιστημών· επιστημών που 'κατασκευάζουν' στο εργαστήριο τα κομμάτια του κόσμου που μελετούν. Ο λόγος για τον οποίο επιλέγω το συγκεκριμένο μοντέλο για να αναπαραστήσω τη σχέση Μ, ΦΕ και Τ (ανάμεσα σε αρκετά άλλα εξίσου ολοκληρωμένα φιλοσοφικά/ επιστημολογικά μοντέλα) έχει να κάνει με την κοινωνική/ πολιτική/ οικονομική σημασία αυτής της σχέσης. Συγκεκριμένα, θεωρώ ότι το ενδιαφέρον του μοντέλου για την 'εσωτερική ζωή' των επιστημών που ασχολούνται με την παραγωγή και τη λειτουργία κατασκευασμένων εργαστηριακών κομματιών κόσμου, συνδέει ευθέως τη δραστηριότητα και την παραγωγή τους με τη σημερινή παγκόσμια κοινωνία, παραγωγή και οικονομία. Η σύνδεση αυτή πραγματοποιείται μέσω ακριβώς αυτών των εργαστηριακών κατασκευών που οι τεχνολογίες μετασχηματίζουν σε

'καινοτομίες'. Καινοτομίες που δεν αφορούν προφανώς μόνο τα παραγόμενα και διακινούμενα υλικά τεχνήματα (που αντιμετωπίζονται στο πλαίσιο των κοινωνικών δομών ως μέσα/πόροι) αλλά και τα σχήματα και τις πρακτικές που τα αναπαριστούν και τα διαχειρίζονται.

Χωρίς να μπορώ στο συγκεκριμένο κείμενο να προχωρήσω περισσότερο στη σχετική ανάλυση, εκτιμώ ότι η δυνατότητα διαρκούς παραγωγής 'καινοτομιών' (καινοτομιών χωρίς τέλος), που σύμφωνα με το μοντέλο αποτελεί το κυρίαρχο χαρακτηριστικό της εσωτερικής ζωής των εργαστηριακών επιστημών (όπου παράγονται με το μορφή κομματιών του εργαστηριακού κόσμου), καθιστά τις τελευταίες απαραίτητες για την επιβίωση των οικονομιών της 'διαρκούς ανάπτυξης' και τη 'λογική' τους κυρίαρχη για τις σημερινές κοινωνίες και την εκπαίδευση των πολιτών τους.

Επανερχόμενος στο μοντέλο (δες και Τσελφές 2003), μπορώ σε συντομία να ισχυριστώ ότι στο εσωτερικό της δραστηριότητας των εργαστηριακών επιστημών οι επιστήμονες διαχειρίζονται τρεις σημαντικές κατηγορίες οντοτήτων, οι οποίες αλληλεπιδρούν δυναμικά μεταξύ τους και μπορούν να μετασχηματίζουν η μια την άλλη. Οι οντότητες αυτές είναι:

Α. Οι *ιδέες* οι σχετικές με το φυσικό φαινόμενο που μελετάται. Εδώ μπορούν να ενταχθούν οντότητες όπως τα ερωτήματα, οι θεμελιώδεις πεποιθήσεις και γνώσεις (που χωρίς αυτές δεν νοείται επιστήμη, αλλά και που παράλληλα, επειδή θεωρούνται δεδομένες, δεν αναφέρονται συστηματικά), οι θεωρητικές έννοιες, η συστηματική θεωρία, τα θεωρητικά μοντέλα, οι τοπικές υποθέσεις, τα μοντέλα των συσκευών, κλπ.

Β. Οι *υλικές οντότητες*, όπως το δείγμα, οι πηγές των τροποποιήσεων (συσκευές που επηρεάζουν, μεταβάλλουν ή αλληλεπιδρούν με το δείγμα), οι ανιχνευτές των τροποποιήσεων, τα εργαλεία, οι γεννήτριες των δεδομένων (μπορεί να είναι από τον πειραματιστή μέχρι τα καταγραφικά, τις φωτογραφικές μηχανές ή τα «σκάνερς»), καθώς και τα 'ακατέργαστα δεδομένα' (Hacking 1992, σ.44). Τα τελευταία είναι ότι παράγουν οι γεννήτριες των δεδομένων. Είναι τα ανερμήνευτα σημάδια, τα γραφήματα των μεταβολών με το χρόνο, οι φωτογραφίες, κλπ. Τα δεδομένα κατασκευάζονται στο εργαστήριο. Δεν 'δίνονται' από τη φύση. Είναι η υλική παραγωγή των συσκευών (Ackermann 1985). Υλικές οντότητες και ακατέργαστα δεδομένα δίνουν υπόσταση στο φαινόμενο μέσα στον πραγματικό κόσμο –μέρος του οποίου είναι και ο ίδιος ο επιστήμονας.

Γ. Τα *τεκμήρια* που θεωρούνται ή παρουσιάζονται ως κατάλληλα από τον επιστήμονα και συνυπάρχουν με τον τρόπο κατασκευής τους. Τεκμήρια μπορούν να αποτελούν τα εκτιμημένα δεδομένα (ότι απομένει μετά την εκτίμηση των σφαλμάτων), τα ανηγμένα δεδομένα (ότι απομένει μετά την

αναγωγή ενός μεγάλου αριθμού δεδομένων), τα αναλυμένα δεδομένα (ότι επιλέγεται από τα δεδομένα στη βάση της υπόθεσης ή της ερώτησης), τα προς ερμηνεία δεδομένα (ότι από τα αναλυμένα δεδομένα μπορεί να συνδεθεί με κάποια στοιχεία της συστηματικής θεωρίας) κ.ο.κ.

Οι ιδέες και τα τεκμήρια είναι οντότητες που αναπαριστούν το εργαστηριακό φαινόμενο/ κόσμο. Ταυτόχρονα ερμηνεύουν ή εγκυροποιούν οι μεν τα δε. Είναι οντότητες του γνωστικού κόσμου μέσω των όποιων αναπαρίστανται τα φαινόμενα του υλικού κόσμου. Οι επιστήμονες επικοινωνούν μέσω των ιδεών και των τεκμηρίων όταν συζητούν τις προβλέψεις τους, τις ερμηνείες των φαινομένων ή την εγκυρότητά τους. Εδώ, χρησιμοποιούν την επιστημονική γλώσσα η οποία σε μεγάλο βαθμό είναι συμβολική και κατά κανόνα συγκροτείται από μαθηματικές 'διαλέκτους'. Από την άλλη μεριά, το φαινόμενο σαν μέρος του υλικού κόσμου είναι πάντα παρόν στο εργαστήριο και με ένα διαφορετικό τρόπο. Ο επιστήμονας παρεμβαίνει (Hacking 1995) και κάνει τα πράγματα να 'δουλέψουν' με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, αλλά το 'πραγματικό'/ υλικό μέρος του φαινομένου, που ασφαλώς δεν μπορεί να μιλήσει για τον εαυτό του και δεν 'υποτάσσεται' υποχρεωτικά σε οποιαδήποτε ιδέα ή αναμενόμενο/ επιδιωκόμενο τεκμήριο, μπορεί ταυτόχρονα να έχει πολλές όψεις. Για παράδειγμα το 'κλασικό' μαθηματικό εκκρεμές στην εργαστηριακή υλοποίησή του μπορεί να αποτελεί μια συσκευή ισόχρονων ταλαντώσεων (κατά βούληση αμείωτων ή μειούμενων), μια συσκευή μέτρησης της επιτάχυνσης (και της επιτάχυνσης της βαρύτητας) αλλά και της ταχύτητας βλημάτων, μια μοναδική επί Γης συσκευή που δεν μετέχει στην περιστροφική κίνησή της, ένα πρότυπο χαοτικής κίνησης και πολλά άλλα (δες π.χ. Baker & Blackburn 2005). Οι επιστήμονες επικοινωνούν, επίσης και κατά τη διάρκεια των παρεμβατικών τους δραστηριοτήτων, χρησιμοποιώντας όρους που αναφέρονται σε οντότητες του υλικού κόσμου και σε τρόπους με τους οποίους μπορούν να τις χειριστούν. Στην περίπτωση αυτή, χρησιμοποιούν διαφορετικές 'διαλέκτους' που θα μπορούσαμε να τις αποκαλέσουμε τεχνικές-τεχνολογικές και να τις συνδέσουμε με το χαρακτήρα των τεχνικών-τεχνολογικών δραστηριοτήτων. Οι διάλεκτοι αυτές έχουν μικρή σχέση με τις επιστημονικές-μαθηματικές διαλέκτους και είναι κατά κανόνα ανεξάρτητες από τις επιστημονικές ιδέες που εμπλέκονται με τον εκάστοτε πειραματισμό (Radder 1996). Θεωρώ ότι και μόνο η ύπαρξη αυτών των εργαστηριακών διαλέκτων (που επιτρέπουν σε έναν τεχνίτη/ τεχνικό, ο οποίος δεν γνωρίζει τις θεωρητικές ιδέες, να ολοκληρώσει με απόλυτη επιτυχία ένα επιστημονικό πείραμα, την ίδια στιγμή που ένας επιστήμονας χωρίς τη βοήθεια του τεχνικού δεν μπορεί) φανερώνουν τη σημασία και τη θέση των τεχνικών-τεχνολογικών παρεμβάσεων στο πλαίσιο της επιστημονικής δραστηριότητας.

Έτσι, ο πειραματισμός είναι επιτυχής, όχι όταν οι επιστημονικές *ιδέες* (που κατεξοχήν συνδέονται με τα μαθηματικά) συμφωνούν απλά με τα *τεκμήρια* (τα οποία αναδεικνύονται/ κατασκευάζονται τις περισσότερες φορές και με χρήση των μαθηματικών), αλλά όταν ταιριάξουν μεταξύ τους οι *ιδέες*, η *υλική κατασκευή* (η οποία είναι κατεξοχήν τεχνολογικό προϊόν) και τα *τεκμήρια*. Αυτό μπορεί να γίνει με μια ποικιλία από τρόπους: είτε κατασκευάζοντας τα κατάλληλα τεκμήρια (π.χ. επιλέγοντας μεθόδους διαχείρισης των ακατέργαστων δεδομένων), είτε αλλάζοντας/ μετασχηματίζοντας κάποιες από τις ιδέες, είτε παρεμβαίνοντας στον υλικό κόσμο και κατασκευάζοντας καινούρια κομμάτια του (π.χ. νέες συσκευές μέτρησης που παράγουν διαφορετικού τύπου ακατέργαστα δεδομένα), είτε, τέλος, με κάποιο συνδυασμό των προηγουμένων.

Ως αποτέλεσμα, στην εργαστηριακή πρακτική τα προβλήματα της φιλοσοφικής επαγωγής (οι θεωρίες καθοδηγούνται από την παρατήρηση) και της φιλοσοφικής παραγωγής (οι παρατηρήσεις καθοδηγούνται από τη θεωρία) χάνουν τη σημασία τους. Μεταξύ ιδεών και τεκμηρίων μπορεί κανείς να δημιουργεί σχέσεις χρησιμοποιώντας πότε την επαγωγή (για να επικυρώσει κάποιες ιδέες) και πότε την παραγωγή (για να ερμηνεύσει κάποια τεκμήρια). Αλλά το ουσιαστικό δέσιμο ιδεών και τεκμηρίων γίνεται με την κατασκευή του κατάλληλου κομματιού 'τεχνολογικής υλικής πραγματικότητας'. Επιπλέον, στο εσωτερικό της εργαστηριακής πρακτικής και η Ποππεριανή διάψευση αποκτά διαφορετική σημασία από την φιλοσοφική: Αν ένα τεκμήριο διαψεύδει μια θεωρητική ιδέα, τότε ίσως κάποιος μπορεί, παρεμβαίνοντας στον υλικό κόσμο, να κατασκευάσει μια νέα 'πραγματικότητα' που να του δίνει τα κατάλληλα τεκμήρια κ.ο.κ.

Πάνω απ' όλα όμως το μοντέλο δείχνει ότι οι εργαστηριακές επιστήμες υπάρχουν με το συγκεκριμένο τρόπο εσωτερικής ζωής και θεωρούνται σήμερα οι σημαντικότερες ίσως ανθρώπινες δραστηριότητες, επειδή μπορούν να ισορροπούν ανάμεσα σε αυτούς τους τρεις, εσωτερικά μεταβαλλόμενους και όχι σταθερούς(!) πόλους οντοτήτων. Αυτός ο τρόπος ύπαρξης αποκαθίσταται με τη βοήθεια των Μ και των Τ και οδηγεί στην παραγωγή καινοτόμων κομματιών κόσμου, που αποτελεί το σημερινό ενδιαφέρον σημείο της κοινωνίας γι' αυτές. Μια παραγωγή που από τη φύση της φαίνεται να μπορεί να υλοποιεί καινοτομίες χωρίς τέλος. Μια παραγωγή διαρκώς καινοτόμων προϊόντων που κατακλύζουν τις αγορές με πρωτόγνωρους ρυθμούς οι οποίοι βέβαια είναι αντίστοιχοι των ρυθμών απόσυρσης προϊόντων ανάλογης χρήσης. Μια παραγωγή που τείνει να κατασκευάζει καταναλωτές προϊόντων 'μιας χρήσης' και που έτσι φαίνεται ότι μπορεί να εξασφαλίσει για μεγάλα χρονικά διαστήματα μόνιμα θετικούς δείκτες ανάπτυξης και να συντηρεί το σύστημα που τη διαχειρίζεται. Αυτά, βέβαια,

όχι χωρίς κόστος: η εργαλειακή και εναλλακτική χρήση των επιστημονικών προτάσεων τις έχει μάλλον αποκαθηλώσει από το 'θρόνο' της αλήθειας και οι δυτικές κοινωνίες έχουν βρεθεί για μια ακόμη φορά να αναζητούν στηρίγματα (πέρα από τα επιστημονικά τεκμηριωμένα) για τις αρχές και τις αξίες που θα διατηρήσουν τη συνοχή τους.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, ΟΙ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΟΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΣΤΗΝ ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Στο τμήμα του κειμένου που ακολουθεί θα θεωρώ τις δομές της ΥΕ ως πολιτισμικές-κοινωνικές αναπαραγωγικές δομές (Sewell 1992, Τσελφές & Παρούση 2009, 2010). Θα θεωρώ δηλαδή ότι μέσα απ' αυτές αλλά κυρίως μέσα σ' αυτές (στο εσωτερικό τους), τα δρώντα υποκείμενα/ δράστες (κυρίως εκπαιδευτικοί και μαθητές) επιχειρούν την αναπαραγωγή ενός πλήθους από ετερογενή *σχήματα* και *πρακτικές*, συνδεδεμένα με πολιτισμικές κυρίως υπο-δομές, που οι μαθητές είναι ή θα γίνουν μέλη τους ως δρώντα άτομα στην ενήλικη ζωή τους. Οι πολιτισμικές αυτές υπο-δομές παρουσιάζονται στο χώρο της ΥΕ ως γνωστικά αντικείμενα (Γλώσσα, Μαθηματικά, Φυσικές Επιστήμες, Ιστορία, Λογοτεχνία, Τέχνες, Θρησκεία κλπ), συγκροτημένα στη βάση των ανάλογων *σχημάτων* (έννοιες, θεωρίες κλπ) και *πρακτικών* (δεξιότητες, μέθοδοι κλπ). Σχημάτων και πρακτικών που, στο πλαίσιο του στόχου της αναπαραγωγής τους, παράγονται καθημερινά μέσα στο σχολικό περιβάλλον από τα δρώντα υποκείμενα, μαθητές και δασκάλους (θεωρώ περίπου ως αυτονόητο ότι μετά τη δεκαετία του '60 οι διαδικασίες της διδασκαλίας και κυρίως της μάθησης αντιμετωπίζονται ως διαδικασίες παραγωγής σχημάτων και πρακτικών: διαδικασίες (επ)οικοδόμησης/ κατασκευής).

Και για τις δύο αυτές διαδικασίες, όλοι γνωρίζουν τουλάχιστον εμπειρικά, ότι κινούνται κάτω από την πίεση μιας έντασης/ αντίθεσης μεταξύ αναπαραγωγής και παραγωγής. Ποτέ η παραγωγή ενός μαθητή δεν επαναλαμβάνει ακριβώς το προς αναπαραγωγή· αν το επαναλάβει (φωτοαντιγραφικά), όλοι είναι πεισμένοι ότι ο μαθητής 'αντιγράφει', 'παπαγαλίζει' κ.ο.κ. Ποτέ η παραγωγή ενός εκπαιδευτικού (το 'μάθημά' του) δεν επαναλαμβάνει το προς αναπαραγωγή (για παράδειγμα ότι ακριβώς είναι γραμμένο στα βιβλία)· αν το επαναλαμβάνει ασφαλώς και δεν επαινούμε τον εκπαιδευτικό. Από την άλλη μεριά διδασκαλία και μάθηση χωρίς το στόχο της αναπαραγωγής δεν υφίσταται. Πως διαχειριζόμαστε αυτή την αναπόφευκτη ένταση; Το παραδοσιακό σχολείο στρέφει την ένταση αναπαραγωγής-παραγωγής στην κατεύθυνση της εγκαθίδρυσης ανισοτήτων/ διακρίσεων (Τσελφές & Παρούση 2010): 'Παγώνει' τα σχήματα και τις

πρακτικές, που συγκροτούν τα προς αναπαραγωγή γνωστικά αντικείμενα, μέσα σε κείμενα που αποκαλεί *περιεχόμενα των γνωστικών αντικειμένων* ή *ύλη* και εστιάζει στις 'αποστάσεις' που εμφανίζουν τα παραγόμενα από τους μαθητές σχήματα και πρακτικές από τα 'παγωμένα' (μονοσήμαντα τάχα) περιεχόμενα. Ονομάζει τη διαδικασία της εστίασης στις 'αποστάσεις' αυτές, *αξιολόγηση του μαθητή* και το προϊόν της *βαθμό*. Βαθμό, που είναι αντιστρόφως ανάλογος προς την αξιολογούμενη 'απόσταση'. Με την πρακτική αυτή κατασκευάζει την περίφημη ανισότητα: *καλός* και *κακός* μαθητής. Μια ανισότητα που είναι αδύνατο να μην υπάρχει 'αντικειμενικά' μιας και η ένταση αναπαραγωγής-παραγωγής δεν μπορεί να καταργηθεί. Το βεβαιώνουν όλες οι εκπαιδευτικές έρευνες που θεωρούν αυτονόητο ότι μια 'σωστή' αξιολόγηση στο πλαίσιο του παραπάνω συστήματος δεν μπορεί παρά να έχει ως αποτέλεσμα *βαθμούς* που υπακούν στην κανονική κατανομή Gauss. Μια κατανομή που έχει αναπόφευκτα το 'σωρό' των μαθητών μαζεμένο μέσα στα όρια της τυπικής απόκλισης (πάνω όμως και κάτω από τη μέση τιμή) και τους λίγους 'άριστους' αλλά και 'κακούς', ανεβασμένους στο βάθρο της επιτυχίας ή κατακρημνισμένους στα τάρταρα της αποτυχίας, αντιστοίχως.

Τα γνωστικά αντικείμενα, όμως, υποτίθεται ότι έχουν προκύψει εκτός των εκπαιδευτικών δομών και περιλαμβάνουν σχήματα και πρακτικές κατάλληλες για τη διαχείριση συγκεκριμένων μέσων/ πόρων διαθέσιμων στις πειθαρχίες από τις οποίες έχουν προκύψει τα αντικείμενα. Το 'πάγωμά' τους, μέσω των περιεχομένων-κειμένων τα μετατρέπει σε μέσα αξιολόγησης-κατάταξης των μαθητών. Τους αλλάζει τη φύση και τη λειτουργία· πολύ δε περισσότερο αφού τα κείμενα είναι μέσα που μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει για να παράγει π.χ. σχήματα. Με τον τρόπο αυτό είναι περισσότερο από βέβαιο ότι τα μετασχηματίζει σε *εικονικά* (ως προς τα επιστημονικά) σύνολα σχημάτων και πρακτικών που είναι *ουσιαστικά και αντικειμενικά αποσυνδεδεμένα* από τα *μέσα/ πόρους* που τα σχήματα και οι πρακτικές που περιλαμβάνουν υποτίθεται ότι αναπαριστούν ή καθοδηγούν τη διαχείριση τους!

Με βάση την παραπάνω προσέγγιση, μπορώ να παρατηρήσω ότι: τα μέσα και τα συνδεδεμένα με αυτά σχήματα και πρακτικές που είναι διαθέσιμα στις δομές της ΥΕ είναι εικονικά, κυρίως σε ότι αφορά τα γνωστικά αντικείμενα των ΦΕ, λιγότερο των Μ αλλά όχι υποχρεωτικά των Τ. Στην περίπτωση των ΦΕ, για παράδειγμα, εκπαιδευτικοί και μαθητές δεν έχουν ουσιαστική πρόσβαση στους πόρους/ μέσα που διαχειρίζεται ένας επιστήμονας και όμως υποτίθεται ότι διδάσκουν/ μαθαίνουν επιστήμη. Τις περισσότερες φορές ακόμη και οι εκπαιδευτικοί και οι φοιτητές που τελειώνουν τις προπτυχιακές πανεπιστημιακές σπουδές τους δεν έχουν διαβάσει πρωτότυπα κείμενα, π.χ. από επιστημονικά περιοδικά, και πολύ περισσότερο δεν έχουν γράψει κάτι

που θα μπορούσε να κριθεί ως πρωτότυπο και άρα, καταρχήν, επιστημονικό. Την ίδια στιγμή, τα κείμενα αυτά είναι τα κατεξοχήν μέσα στα οποία πρέπει να έχει λειτουργική πρόσβαση κάποιος για να 'γνωρίζει' κάποια επιστήμη. Αυτό το χαρακτηριστικό της έντασης αναπαραγωγής-παραγωγής, οδηγεί εκπαιδευτικούς και μαθητές στη μάθηση πρακτικών διαχείρισης μιας *εικονικής κατάστασης*· μιας εικονικότητας, που θεωρούμε ότι διευκολύνει τη *μάθηση σχημάτων και πρακτικών κατάλληλων για τη διαχείριση εικονικών επιστημονικών μέσων*: π.χ. κειμένων διδακτικών εγχειριδίων, ασκήσεων, πειραματικών διατάξεων που 'απαντούν' σε ερωτήματα που έχουν μία, μοναδική και γνωστή εκ των προτέρων απάντηση, προκατασκευασμένων λογισμικών πολλαπλής επιλογής με μια όμως, εκ των προτέρων κατασκευασμένη, 'σωστή' επιλογή κ.ο.κ. Το ίδιο περίπου ισχύει και για τα Μ· όχι όμως και για τις Τ. Εδώ τα μονοσήμαντα περιεχόμενα φαίνονται να καταρρέουν, οι δυνατότητες των μαθητών να επεκτείνονται σε μη προκαθορισμένες 'λύσεις', η δημιουργική/ αποκλίνουσα μαθητική δραστηριότητα να μη θεωρείται 'παραλογισμός' και η αξιολόγηση-κατάταξη να δυσκολεύεται να αποτυπώσει 'αποστάσεις'. Γιατί άραγε; Μήπως επειδή ακόμη και στο σχολικό χώρο πολλά από τα μέσα στα οποία έχουν πρόσβαση οι Τ είναι διαθέσιμα στους μαθητές; Μήπως είναι συνακόλουθο αυτής της κατάστασης το γεγονός ότι τα μαθήματα των Τ (όπως και άλλα μαθήματα με μη κειμενοποιημένο περιεχόμενο και πρόσβαση στα μέσα, π.χ. τέχνες, σωματική αγωγή κλπ) δεν χρησιμοποιούνται στις ευρείας κλίμακας αξιολογήσεις-κατατάξεις των μαθητών (όπως οι πανελλήνιες εξετάσεις);

Η συγκεκριμένη διαχείριση των εικονικών εκπαιδευτικών μέσων παράγει όμως σχήματα και πρακτικές που ευνοούν και διαχέουν επιστημολογικές παραδοχές ασύμβατες με τη σημερινή επιστημονική πραγματικότητα. Χαρακτηριστική 'ιδιότητα' των εικονικών μέσων αποτελεί η a priori παραδοχή ότι αυτά δεν είναι πολύσημα αλλά αυστηρά μονοσήμαντα· ένα χαρακτηριστικό που εξυπηρετεί τη δράση πάνω στους ανθρώπινους πόρους των εκπαιδευτικών δομών, μέσω της αξιολόγησης των εκπαιδευομένων και σε βάρος της επιστημονικής φύσης των μέσων. Για παράδειγμα, είναι εξαιρετικά απίθανο να συναντήσει κάποιος ένα επιστημονικό ή και μαθηματικό κείμενο δημοσιευμένο σε επιστημονικό περιοδικό στο οποίο να μην αναφέρονται τα όρια εγκυρότητας των ισχυρισμών του συγγραφέα ή οι αρνητικές/ συμπληρωματικές κρίσεις του σε σχέση με άλλα δημοσιευμένα κείμενα· χαρακτηριστικά που επιτρέπουν, αν δεν επιβάλλουν, μια κριτική διαχείριση αυτών των κειμένων και από τον αναγνώστη τους. Την ίδια στιγμή είναι εξίσου απίθανο να συναντήσει κάποιος κείμενο διδακτικών εγχειριδίων (ακόμη και πανεπιστημιακών) με ανάλογα χαρακτηριστικά, ακόμη και αν τα σχήματα και οι πρακτικές που παρουσιάζει είναι έκδηλα απλοποιημένα (π.χ. η παρουσίαση της νευτώνειας στιγμιαίας ταχύτητας ως μέσης) ή σαφώς

επιλαθευμένα (π.χ. η παρουσίαση των ελεύθερων ηλεκτρονίων των μετάλλων ως ανάλογων προς τα μόρια των ιδανικών αερίων, η παρουσίαση του παραγωγικού συλλογισμού ως ανεξάρτητου από τον επαγωγικό κ.ο.κ.).

Φαίνεται, δηλαδή, ότι οι εκπαιδευτικές δομές της ΥΕ προωθούν πρωτίστως την 'αντικειμενική' αξιολόγηση των εκπαιδευομένων ως κατηγοριοποίηση/ κατάταξή τους, εκμεταλλευόμενες τη μονοσήμαντη, 'παγωμένη' και μη πολύσημη φύση των εικονικών εκπαιδευτικών μέσων, όπου και τα σχήματα που τα αναπαριστούν (έννοιες, μοντέλα κλπ) και οι πρακτικές που τα διαχειρίζονται (μεθοδολογίες) δεν μπορεί παρά να είναι ή 'σωστά' ή 'λάθος'. Η συγκεκριμένη επιλογή φαίνεται να έχει κάποια σχέση με την παράδοση των Μ πειθαρχιών αλλά μάλλον δεν έχει καμία σχέση με τη μάθηση διαχείρισης πραγματικών επιστημονικών μέσων, τα οποία και πολύσημα είναι[1] και οι πρακτικές που επιτρέπουν την παρέμβαση σ' αυτά είναι συνήθως περισσότερο ή λιγότερο κατάλληλες ή ακατάλληλες, παρά 'σωστές' ή 'λάθος'. Η ίδια επιλογή φαίνεται τέλος να μην έχει καμία πιθανότητα να εφαρμοστεί στο πλαίσιο των Τ.

Έτσι, οι εκπαιδευτικοί των ΦΕ στην ΥΕ αλλά πολλές φορές και οι φοιτητές στην προπτυχιακή τους εκπαίδευση, μαθαίνουν *δημιουργικά* να 'κάνουν πειράματα' που πολλές φορές δεν παράγουν το αναμενόμενο φαινόμενο/ αποτέλεσμα/ τεκμήριο και παρ' όλα αυτά μαθαίνουν, εξίσου δημιουργικά, να τα παρουσιάζουν ως εάν το φαινόμενο/ αποτέλεσμα/ τεκμήριο να είναι παρόν (μιλάμε για τη διάσημη στους χώρους των σχολικών τάξεων αποστροφή: *το πείραμα δεν πέτυχε ακριβώς αλλά φταίνε οι συνθήκες* και το εξίσου διάσιμο *μαγείρεμα* στο χώρο των πανεπιστημιακών εργαστηρίων). Οι μαθητές μαθαίνουν να προσποιούνται πειστικά ότι βλέπουν το φαινόμενο/ αποτέλεσμα που δεν παρήχθη από τον εκπαιδευτικό που το επιδεικνύει. Μαθαίνουν να απαγγέλλουν με φωνή που πάλλεται από την αγωνία τις λύσεις των μαθηματικών ασκήσεων (όπως τις έχουν απομνημονεύσει) κάτω από το ενθαρρυντικό βλέμμα των εκπαιδευτικών τους. Μαθαίνουν, δημιουργικά, να προσποιούνται ότι 'προσπαθούν' γενικώς· μαθαίνουν να απαντούν 'σωστά' στις προφορικές ή γραπτές εξετάσεις χωρίς να καταλαβαίνουν ή να πιστεύουν λέξη από όσα λένε ή γράφουν (ακολουθώντας τους διαβόητους στο χώρο της Διδακτικής των ΦΕ 'κανόνες της Φατμέ' (Larson 1995)). Οι εκπαιδευτικοί μαθαίνουν να διευκολύνουν τη λειτουργία των κανόνων της 'Φατμέ' (διατυπώνουν ερωτήσεις που επιδέχονται μονολεκτικές ή και διχοτομικές απαντήσεις, επισημαίνουν τα *sos*, αξιολογούν την 'προσπάθεια' και όχι το

[1] Και μόνο το γεγονός ότι οι επαγγελματικές-επιστημονικές εργαστηριακές δραστηριότητες μπορούν να ολοκληρωθούν με επιτυχία από τεχνικούς που δεν είναι επιστήμονες (π.χ. Radder 1996), βεβαιώνει ότι σε διαφορετικά επιστημονικά πλαίσια τα επιστημονικά σχήματα λειτουργούν διαφοροποιημένα.

αποτέλεσμα κλπ). Οι 'ιδιωτικοί εκπαιδευτικοί (φροντιστές) διδάσκουν ρητά την τέχνη της 'Φατμέ' (πως να λύνετε ασκήσεις και να 'γράφετε καλά' στις εξετάσεις) κ.ο.κ.

Μέχρι τη δεκαετία του '80, στο 'δυτικό κόσμο' η εξυπηρέτηση του εκπαιδευτικού στόχου της παραγωγής επαγγελματιών επιστημόνων καθιέρωσε στην ΥΕ τα περιεχόμενα (κυρίως ΦΕ, λιγότερο Μ και καθόλου Τ) που δίδασκαν ως εισαγωγικά τα πανεπιστημιακά τμήματα της ίδιας εποχής· μια σχετικά εύλογη (αν και απλοϊκή) επιλογή, αν σκεφτούμε ότι θα θέλαμε οι μαθητές να μπορούν να μετασχηματίζουν σχήματα και πρακτικές της καθημερινής τους κουλτούρας σε κατευθύνσεις που θα τους επέτρεπαν να διαχειρίζονται στοιχειωδώς τους επιστημονικούς κώδικες (όχι τα μέσα/πόρους) και με τον τρόπο αυτό να ενταχθούν ευκολότερα στις επιστημονικές δομές (να γίνουν δηλαδή επιστήμονες). Μετά όμως τη δεκαετία του '80, στο παγκοσμιοποιημένο περιβάλλον, η ΥΕ στοχεύει στο μαθηματικό, επιστημονικό και τεχνολογικό γραμματισμό των πολιτών. Επιθυμούμε δηλαδή όλοι οι μαθητές να μπορούν να μετασχηματίζουν τα επιστημονικά σχήματα και πρακτικές (που ασφαλώς δεν γνωρίζουν να χρησιμοποιούν στο επιστημονικό πλαίσιο) με τρόπους που είναι χρήσιμοι στην καθημερινή ζωή (που επιτρέπουν δηλαδή τη διαχείριση μέσων/πόρων διαθέσιμων στις καθημερινές κοινωνικές υπο-δομές). Ένα εγχείρημα που δύσκολα θα ευδοκιμήσει χωρίς ρίξεις (Van Eijck & Roth 2007), δεδομένου ότι οι επιστήμονες που γνωρίζουν τα τρέχοντα επιστημονικά σχήματα και πρακτικές δεν ενδιαφέρονται κατά κανόνα να τα μετασχηματίσουν ώστε να γίνουν χρήσιμα μέσα σε καθημερινά πλαίσια, για τη διαχείριση δηλαδή μέσων/ πόρων διαθέσιμων μέσα στο πλαίσιο καθημερινών υπο-δομών. Έτσι, οι λίγες, αν και αυξανόμενες, δημοσιευμένες εκλαϊκεύσεις έχουν μάλλον στόχο τη 'μυθοποίηση' της δουλειάς που πραγματοποιείται μέσα στις επιστημονικές δομές, παρά το μετασχηματισμό της παραγωγής τους σε χρηστικές καθημερινές κατευθύνσεις. Παράλληλα, οι όποιοι μετασχηματισμοί επιστημονικών σχημάτων και πρακτικών επιχειρούνται από μη ειδικούς αντιμετωπίζονται γενικώς ως παρανοήσεις και θεωρούνται ανεπίτρεπτοι.

Επιπλέον, η σύμφυτη με την πολυσημία φύση των σχημάτων αλλά και των μέσων που είναι διαθέσιμα στις δομές της ΥΕ, πιεζόμενη από τη θεσμική υποχρέωση της μονοσήμαντης αναπαράστασής τους, τα οδηγεί πολλές φορές στον αφανισμό. Από τα εγχειρίδια αφαιρούνται οι επιστημονικές αναπαραστάσεις που θα μπορούσαν ακόμη και ορθολογικά να είναι πολύσημες, γιατί θα μπορούσαν να … 'παρερμηνευτούν'! Από τα εργαστήρια αποσύρονται οι συσκευές που δεν παράγουν τα αναμενόμενα φαινόμενα, γιατί πως θα μπορούσαμε να ερμηνεύσουμε τα μη αναμενόμενα! Στις

εξετάσεις αφορίζονται τα προβλήματα και οι ασκήσεις που η 'μοναδική' τους λύση θα μπορούσε να αμφισβητηθεί! Με τον τρόπο αυτό, επιστημονικές πρακτικές, όπως για παράδειγμα αυτές που πετυχαίνουν να αναδεικνύουν τις κανονικότητες μέσα από έναν επί της ουσίας πολύπλοκο κόσμο που τις 'κρύβει', είναι αδύνατο να αναπτυχθούν. Είναι επίσης αδύνατο να αναπτυχθούν δεξιότητες μετασχηματισμού των επιστημονικών αναπαραστάσεων και πρακτικών που προβάλλονται από τα διδακτικά εγχειρίδια. Μόνο οι προβαλλόμενες με έντονα γράμματα 'περιγραφές sos' αναπαράγονται φωτοαντιγραφικά για χρήση στο χρονικά περιορισμένο διάστημα των εξετάσεων. Και οι μόνοι μετασχηματισμοί που πραγματοποιούνται άρρητα αφορούν τη μάθηση 'κανόνων' για να λυθούν οι ασκήσεις και τα προβλήματα. Γιατί, η ουσιαστική γνώση ενός προς αναπαραγωγή σχήματος ή πρακτικής δεν μπορεί να αξιολογηθεί στην πράξη με τις κλασικές εκπαιδευτικές προσεγγίσεις. Έτσι, η διαδικασία μιας γραπτής εξέτασης/ αξιολόγησης δεν θεωρείται επιτυχημένη αν οι μαθητές μετασχηματίσουν τα προς αναπαραγωγή σχήματα και πρακτικές στην κατεύθυνση της αποκάλυψης των αδυναμιών και των ορίων που υπάρχουν αναπόφευκτα στο προς διαπραγμάτευση ζήτημα[2]. Το αποδεχόμαστε όμως αυτό; Αποδεχόμαστε ως επιτυχή μια ευφάνταστη μάθηση, που το τοπικό αποτέλεσμά της προβάλλει μετασχηματισμένα τα προς αναπαραγωγή σχήματα; Ή τα 'κόβουμε' επειδή απέχουν φωτοαντιγραφικά από τα σχολικά κείμενα;

Έτσι, οι μαθητές δεν αναπαράγουν επιστημονικά σχήματα και πρακτικές. Δεν παράγουν ούτε μετασχηματισμένα σχετικά σχήματα και πρακτικές γιατί αυτό απαγορεύεται. Δεν αναπαράγουν, δηλαδή, τίποτα παλιό ούτε παράγουν κάτι καινούργιο, γιατί τα μέσα που έχουν στη διάθεσή τους δεν επιτρέπεται να τα 'πειράξουν'. Γιατί αν τα 'πείραζαν' θα έπαυαν να είναι μονοσήμαντα, ίσως να συσσωρεύονταν απρόβλεπτα και κυρίως ίσως να συσσωρεύονταν 'στα δικά τους χέρια' και όχι στα χέρια των εκπαιδευτών τους (οι καινοτομίες των οποίων καταρρέουν κάτω από την πίεση του κεντρικού ελέγχου της εργασιακής τους συμπεριφοράς). Σε αυτό το πλαίσιο μαθητές και εκπαιδευτικοί θα μάθουν να παράγουν τις 'καινοτομίες' που απαιτεί το σημερινό κοινωνικό-οικονομικό σύστημα;

[2] Δες για παράδειγμα τις «λύσεις» που προτείνει ο «φοιτητής Bohr» στο ανέκδοτο-πρόβλημα του υπολογισμού του ύψους ενός κτηρίου με τη χρήση ενός μανομέτρου (δημοσιεύεται σε εκατοντάδες σελίδες του διαδικτύου, π.χ. http://podilates.ath.cx/?q=node/625).

ΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΑΔΙΕΞΟΔΑ ΣΤΗΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ, ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟΥ ΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Με βάση όσα αναφέρθηκαν παραπάνω η προοπτική του γραμματισμού που υπόσχονται οι ανά τον κόσμο πραγματοποιούμενες εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις φαίνεται να υπονομεύεται από συνδυασμένες/ συντονισμένες επιστημολογικές και εκπαιδευτικές στρεβλώσεις.

Η περίπτωση των Μ ως γνωστικού εκπαιδευτικού αντικειμένου που τροφοδοτείται με σχήματα και πρακτικές από τη σχετική επαγγελματική πειθαρχία είναι ίσως η πιο δύσκολη περίπτωση. Από τη μια μεριά οι επιστημολογίες και φιλοσοφίες των Μ προσφέρουν (αν δεν κάνω λάθος) αρκετά έγκυρες αναπαραστάσεις μιας αποκλειστικά νοητικής δραστηριότητας που παράγει κατασκευές και λύσεις 'γρίφων', οι οποίοι έχουν νόημα μέσα σε χώρους που δεν μπορούν υποχρεωτικά να αισθητοποιηθούν και αναπαρίστανται με διαλέκτους/ κώδικες που απέχουν σημαντικά από αυτό που θα αποκαλούσαμε 'φυσική γλώσσα'. Από την άλλη μεριά οι αναπαραστάσεις αυτές προσφέρονται για την κατασκευή 'παγωμένων' περιεχομένων που εξυπηρετούν την παράδοση της αξιολογικής κατηγοριοποίησης των μαθητών και απομακρύνουν ενδεχόμενες καθημερινές και δημιουργικές χρήσεις.

Η περίπτωση των ΦΕ είναι πιο ευάλωτη σε στρατηγικές γραμματισμού. Η διάχυση των επιστημών αυτών στην καθημερινότητα και η δημοσιοποίηση της διάχυσης αυτής μέσα από τα ΜΜΕ, έχουν αδυνατίσει επιστημολογικές και φιλοσοφικές αναπαραστάσεις που συνδέουν τις επιστημονικές προτάσεις με την 'αλήθεια' ή και τους 'νόμους της φύσης' και τις έχουν μετατοπίσει στην περιοχή των επιστημονικών 'απόψεων' (δες για παράδειγμα τις δημόσιες συζητήσεις γύρω από τα ζητήματα των σεισμών, της οικολογικής απειλής, των μετεωρολογικών προβλέψεων, των πανδημιών, των επιτευγμάτων της γενετικής κ.ο.κ.). Η εκπαιδευτική παράδοση αρνείται ακόμη να 'ξεπαγώσει' τα περιεχόμενα και να περάσει σε πιο εφαρμοσμένες και δημιουργικές προσεγγίσεις. Ακόμη και στα πιο αποδοτικά, στην κατεύθυνση του γραμματισμού, σημερινά εκπαιδευτικά συστήματα, ακόμη και αν τα περιεχόμενα σ' αυτά περιγράφονται αδρά, ακόμη και αν οι διδακτικές διαδικασίες ανατίθενται σχεδιαστικά στους ίδιους τους εκπαιδευτικούς, ακόμη και αν οι στόχοι της διδασκαλίας δεν είναι κυρίαρχα γνωστικοί, οι επιστημονικές έννοιες και προτάσεις αφήνονται μάλλον στο έλεος της περιστασιακής απλοποίησης και η μαθητική δημιουργικότητα διοχετεύεται στο πεδίο της ενδοσχολικής κοινωνικής δράσης. Η σύνδεση με τα Μ και τις Τ που υποβάλλεται από τη σημερινή φύση της επιστημονικής δραστηριότητας φαίνεται να παραμένει στους προθαλάμους (στις εξαγγελίες) των

εκπαιδευτικών μεταρρυθμίσεων και η δημιουργική διαχείριση αυτής της σχέσης (π.χ. μοντελοποίηση καθημερινών προβλημάτων) μάλλον εξακολουθεί να ανατίθεται στους ειδήμονες.

Οι Τ τέλος, φαίνονται να κατακλύζουν και τους εκπαιδευτικούς χώρους χωρίς να συνδέονται ιδιαίτερα με τα Μ ή τις ΦΕ. Ουσιαστικά, βέβαια, οι Τ εμφανίζονται μόνο με τη μορφή των ΤΠΕ (οι κλασικές Τ παραμένουν αποκλειστικό 'προνόμιο' της συνήθως υποβαθμισμένης τεχνικής εκπαίδευσης), άλλοτε ως γνωστικά αντικείμενα (εδώ η γνώση πιστοποιείται αλλά η πιστοποίηση αν και μπορεί να βαθμολογείται δεν χρησιμοποιείται για την κατάταξη των μαθητών αλλά για την αναγνώριση ή μη της επάρκειάς τους) και άλλοτε με τη μορφή του ενδιάμεσου/ εξυπηρετητή των εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων (εδώ δεν αξιολογούνται οι μαθητές αλλά οι εκπαιδευτικοί ως προς το κατά πόσο χρησιμοποιούν ή όχι τις ΤΠΕ στη διδασκαλία τους).

Η συνολική κατάσταση δείχνει εξαιρετικά πολύπλοκη. Ενώ Μ, ΦΕ και Τ συνδέονται σήμερα ισχυρά μεταξύ τους και μετασχηματίζονται με ευκολία μέσα στις κοινωνικές και οικονομικές τους λειτουργίες, στον εκπαιδευτικό χώρο πιέζονται από σταθεροποιημένες παραδόσεις συντήρησης διακρίσεων και διαχωρίζονται σε 'επιστήμες' (Μ και ΦΕ) και 'τέχνες' (Τ), παίζοντας οι πρώτες το ρόλο των 'Γραφών' και οι δεύτερες το ρόλο των ανθρώπινων παρεμβάσεων.

Τις πολύπλοκες όμως καταστάσεις, κατά την άποψή μου, τις λύνει η πράξη και όχι η επιχειρηματολογία ή οι συζητήσεις. Η πράξη, που ενοποιεί και μετασχηματίζει/ ρυθμίζει αναπόφευκτα όλες τις μορφές 'γνώσης' που χρησιμοποιεί.

Μια θετική, δηλαδή, πρόταση εξόδου από την κρίση, στηριγμένη στο ρεύμα του γραμματισμού θα έλεγε, σε χοντρές γραμμές, ότι οι εκπαιδευτικοί θεσμοί πρέπει να επιτρέψουν ή και να επιβάλλουν μια γενναία *έξοδο του σχολείου στην κοινωνία.* Την πρόσβαση δηλαδή των μαθητών και των εκπαιδευτικών τους στα πραγματικά κοινωνικά μέσα/ πόρους που σχετίζονται με τα γνωστικά αντικείμενα και από όπου θα ήταν δυνατόν να μαθευτούν (παραχθούν) κάποια σχετικά σχήματα και πρακτικές όσο και να αναπτυχθούν δεξιότητες μετασχηματισμού τους. Πιο ειδικά, αυτό θα σήμαινε σημαντικό περιορισμό των περιεχομένων των προγραμμάτων σπουδών (με τη λογική των γνωστικών αντικειμένων) και σύνδεση με ποικιλία τομέων της κοινωνικής ζωής, μέσα από ασθενώς προγραμματισμένες δράσεις εκτός σχολείου. Δράσεις που θα πρέπει να ανεχθούν και να στηρίξουν οι εκτός σχολείου κοινωνικές δομές· να ανεχθούν δηλαδή και να στηρίξουν δραστηριότητες μαθητών και εκπαιδευτικών μέσα στα μαγαζιά, τις

επιχειρήσεις και τους οργανισμούς τους! Από εκεί και μετά τα περιορισμένα περιεχόμενα θα πρέπει να προσεγγίζονται ως συνιστάμενα από ασθενώς ορισμένα σχήματα και πρακτικές, που επιδέχονται μετασχηματισμούς ανάλογα με τα μέσα/ πόρους που αφορά η εφαρμογή τους. Οι μετασχηματισμοί αυτοί, που δεν μπορεί να προβλεφθούν (Ryder 2001), θα αποτελούν και τις μαθησιακές επιτυχίες αν οδηγούν σε αποτελεσματική διαχείριση των μέσων/ πόρων. Διαφορετικά, η *έξοδος στην κοινωνία* θα είναι μια ακόμη εικονική/ υποκριτική δραστηριότητα, όπου οι εκπαιδευτικές δομές θα αλληλεπιδρούν 'δήθεν' με τις εξωτερικές κοινωνικές δομές, χωρίς οι μεν να επηρεάζουν τις δε (χωρίς δηλαδή να αλλάζουν κάποια χαρακτηριστικά και των δύο!). Θα πρέπει επιπλέον το ζήτημα της αξιολόγησης να αντιμετωπίζεται τοπικά (με διαφορετικούς τρόπους σε διαφορετικές περιπτώσεις), να είναι στην απόλυτη δικαιοδοσία των εκπαιδευτικών και να μην καθορίζεται μονοσήμαντα από τους θεσμούς, ως εάν οι θεσμοί (στο πλαίσιο της γενικότερης εικονικότητας/ υποκρισίας) να μην εμπιστεύονται τους λειτουργούς τους. Πρόκειται για μια προσέγγιση που κάποια χαρακτηριστικά της δοκιμάζονται σήμερα στη Φινλανδία, για να αντιμετωπιστούν τα πρώτα σημάδια κόπωσης ενός κατά γενική ομολογία επιτυχημένου εκπαιδευτικού συστήματος. Η προσέγγιση αυτή επιτρέπει την πραγμάτωση της μάθησης/ οικοδόμησης της γνώσης με τη μορφή που προαναφέραμε: απόκτηση της ικανότητας μετασχηματισμού και διασύνδεσης σχημάτων και πρακτικών (ασφαλώς και μαθηματικών και επιστημονικών και τεχνολογικών) για εφαρμογή σε μέσα/ πόρους που είναι διαθέσιμα σε διαφορετικές, τεμνόμενες ή μη, ομόλογες ή μη, δομές.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

AAAS. (1990). *Science for all Americans*. New York: Oxford University Press.

Ackermann, R. (1985). *Data, Instruments and Theory: A Dialectical Approach to Understanding Science.* Princeton: Princeton University Press.

Baker, G. & Blackburn, J. (2005). *The pendulum: a case study in physics*. New York: Oxford University Press.

Hacking, I. (1992). The Self Vindication of the Laboratory Sciences, in A. Pickering (Ed.), *Science as practice and culture*, 29-64, Chicago: The University Chicago Press.

Hacking, I. (1995). *Representing and Intervening.* Cambridge: Cambridge University Press.

Larson, J. (1995). Fatima's rules and other elements of an unintended chemistry curriculum. Paper presented at *The annual meeting of the American Educational Research Association*. San Francisco, CA.

Radder, H. (1996). *In and about the world.* New York: State University Press.

Ryder, J. (2001). Identifying science understanding for functional scientific literacy. *Studies in Science Education*, *36*, 1–42.

Sewell, W. (1992). A Theory of Structure: Duality, Agency, and Transformation. *The American Journal of Sociology*, 98, 1-29.

Τσελφές, Β. (2003). Μια πρόταση για τη διδασκαλία των Εργαστηριακών Φυσικών Επιστημών στηριγμένη στην κατά Ian Hacking προσέγγιση της «εσωτερικής ζωής» τους, στο Κ. Σκορδούλης & Λ. Χαλκιά (Επιμ.), *Η συμβολή της Ιστορίας και της Φιλοσοφίας των Φυσικών Επιστημών στη Διδασκαλία των Φυσικών Επιστημών*, Αθήνα: ΠΤΔΕ, ΕΚΠΑ, 259-271.

Τσελφές, Β. & Παρούση, Α. (2009). Θεατρική αφήγηση επιστημονικών ιδεών: Αφορμή για μια διαλεκτική προσέγγιση της μάθησης, *Κριτική Επιστήμη & Εκπαίδευση*, 9, 33-57.

Τσελφές, Β. & Παρούση, Α. (2010). Η «εικονικότητα» της εκπαιδευτικής πράξης και η περίπτωση της διδασκαλίας-μάθησης των Φυσικών Επιστημών. *Επιστημονική Επετηρίδα*, ΠΤΔΕ, ΠΙ (προς δημοσίευση).

Van Eijck, M. & Roth, W-M. (2007). Keeping the Local Local: Recalibrating the Status of Science and Traditional Ecological Knowledge (TEK) in Education, *Science Education*, 91, 926-947.

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΗ ΜΕ ΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΄Η ΓΙΑ ΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΣΤΗ ΣΧΟΛΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Δημήτρης Ψύλλος

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Πρόσφατα υπάρχει μεγάλο ενδιαφέρον στην επιστημονική και εκπαιδευτική κοινότητα για τη χρήση των μοντέλων και της μοντελοποίησης, ιδιαίτερα με την εφαρμογή των Ψηφιακών Τεχνολογιών, στη διδασκαλία και τη μάθηση των επιστημών. Τα μοντέλα αποτελούν βασικό στοιχείο της αναπαραστασιακής διάστασης της επιστήμης, και είναι ένα κύριο μεθοδολογικό εργαλείο της επιστημονικής έρευνας. Στην ομιλία γίνεται διάκριση μεταξύ των επιστημονικών και διδακτικών μοντέλων και επιχειρείται η ανίχνευση της πολλαπλής λειτουργίας τους στην εκπαιδευτική διαδικασία. Διακρίνεται η μάθηση με τα μοντέλα, η οποία κυριαρχεί έστω και αποσπασματικά στην εκπαίδευση, από τη μάθηση για τη φύση και τη λειτουργία των μοντέλων και ιδιαίτερα την προβλεπτική και ερμηνευτική τους χρήση. Αναφέρονται παραδείγματα από διαγνωστικές έρευνες σε εκπαιδευτικούς και μαθητές.

Η ΓΛΩΣΣΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, Η ΓΛΩΣΣΑ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ, Η ΓΛΩΣΣΑ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ

Δημήτρης Χασάπης

Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Με αφετηρία τις παραδοχές ότι η γνώση, άρα και η γνώση των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών, δεν είναι ένα σταθερό σύνολο καθιερωμένων συμπερασμάτων αλλά μια δυναμική διαδικασία διαρκώς βελτιούμενων κατανοήσεων της πραγματικότητας, ότι η μάθηση είναι μια γενεσιουργός διαδικασία κατασκευής νοημάτων, η οποία διαμορφώνεται καθοριστικά από την κοινωνική αλληλεπίδραση και ότι η διδασκαλία ως κοινωνικά οργανωμένη δραστηριότητα μάθησης οφείλει να δημιουργεί περιβάλλοντα και να παρέχει εμπειρίες μάθησης, εξετάζεται στην εισήγηση ο ιδιαίτερος ρόλος της γλώσσας των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών, τόσο στην άσκηση των επιστημονικών αυτών πρακτικών, όσο και στην οργάνωση της μάθησης τους στο σχολείο. Τα μαθηματικά και οι φυσικές επιστήμες, παρά τα διακριτά αντικείμενα και τις διαφορετικές πρακτικές έρευνας και τεκμηρίωσης των συμπερασμάτων τους μοιράζονται μια κοινή, υβριδική, γλώσσα, η οποία αποτελεί σύνθεση των λεγόμενων φυσικών γλωσσών με διάφορους κώδικες συμβόλων και κανόνων ερμηνείας τους, πλαισιωμένων από γραφικές και εικονικές παραστάσεις διαφόρων τύπων, όλων αυτών ενταγμένων σε ένα πεδίο εξειδικευμένων δραστηριοτήτων, το οποίο υποστηρίζεται από μια προσιδιάζουσα κατά περίπτωση τεχνολογία. Στην εισήγηση διατυπώνονται προβληματισμοί και προτάσεις για τη μεταφορά όλων αυτών των γραμματισμών των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών και των αντίστοιχων συστημάτων παραγωγής νοημάτων στις καθιερωμένες στο σχολείο εκπαιδευτικές πρακτικές.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Υπό το βάρος μιας παράδοσης, η οποία σηματοδοτείται από την περίφημη ρήση του Γαλιλαίου ότι το βιβλίο της φύσης «*είναι γραμμένο στη γλώσσα των μαθηματικών, και οι χαρακτήρες του είναι τρίγωνα, κύκλοι, και άλλα γεωμετρικά σχήματα, χωρίς τα οποία είναι ανθρωπίνως αδύνατο να καταλάβουμε έστω και μια λέξη από αυτό. χωρίς αυτά περιφέρεται κανείς σε έναν σκοτεινό λαβύρινθο*» (Γαλιλαίος, Il Saggiatore, 1632) ένα μεγάλο μέρος των μαθηματικών και των φυσικών επιστημόνων, αλλά και των αντίστοιχων εκπαιδευτικών, θεωρεί τα μαθηματικά ως «τη γλώσσα» των φυσικών επιστημών. Στη λογική της πεποίθησης αυτής η ανάγνωση του «βιβλίου της φύσης» προϋποθέτει την εκμάθηση της μαθηματικής γλώσσας, χωρίς να απαιτεί μια συγκεκριμένη επιστημολογική οπτική για τις φυσικές επιστήμες, παράλληλα όμως τίθενται πολλά και ουσιώδη ερωτηματικά για τον επιστημονικό χαρακτήρα των μαθηματικών και την εγκυρότητα της μαθηματικής γνώσης.

Αν θεωρήσουμε, όμως, τα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες ως συστήματα παραγωγής νοημάτων για τον υλικό και κοινωνικό κόσμο, την οργάνωση και τη λειτουργία του τότε, παρά τα διαφορετικά αντικείμενα τους και τις διακριτές πρακτικές έρευνας και τεκμηρίωσης των συμπερασμάτων τους, τα δύο αυτά διαφορετικά συστήματα κατανοήσεων της πραγματικότητας μοιράζονται μια κοινή, υβριδική, γλώσσα, η οποία αποτελεί σύνθεση των λεγόμενων φυσικών γλωσσών (όπως ορίζονται στη γλωσσολογία) με διάφορους κώδικες συμβόλων και κανόνων ερμηνείας τους, πλαισιωμένων από γραφικές και εικονικές παραστάσεις διαφόρων τύπων, όλων αυτών ενταγμένων σε σημειωτικά συστήματα τα οποία παρέχονται από τα τεχνολογικά περιβάλλοντα εντός των οποίων ασκούνται οι μαθηματικές και οι επιστημονικές δραστηριότητες (Lemke, 2004).

Η ιδιοποίηση της υβριδικής αυτής γλώσσας και η εξοικείωση με τη χρήση της για την δημιουργία μαθηματικών και επιστημονικών νοημάτων βρίσκεται (από την οπτική της κοινωνικής σημειωτικής η οποία υιοθετείται εδώ), στον πυρήνα της μάθησης των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών και, επομένως, στην προτεραιότητα της θεσμικά οργανωμένης διδασκαλίας τους στο σχολείο.
Για το ζήτημα αυτό έπονται επιλεκτικά και αναπόφευκτα αποσπασματικά σχόλια, τα οποία αιτιολογούν μια διδακτική πρόταση για τα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες του σχολικού προγράμματος.

Η ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΝΟΗΜΑΤΟΣ

Η δημιουργία νοήματος είναι μια υλική διαδικασία και παράλληλα μια κοινωνική σημειωτική πρακτική (Lemke, 1995), η οποία εκτός από τη γλώσσα συνδυάζει - με κριτήρια λειτουργικά - όλα τα πολιτισμικά αναπτυγμένα και κοινωνικά καθιερωμένα, διαθέσιμα, σημειωτικά συστήματα: γλωσσικά, συμβολικά, εικονογραφικά, κινητικά, ηχητικά και γενικότερα πραξιακά.

Η δημιουργία μαθηματικών νοημάτων και νοημάτων των φυσικών επιστημών δεν μπορεί, επομένως, να κατανοηθεί μόνο μέσα από τη χρήση της γλώσσας με τη μορφή γραπτών κειμένων ή και προφορικής ομιλίας, ιδιαίτερα μάλιστα σε συνθήκες μάθησης και διδασκαλίας.

Η γλώσσα δεν είναι ανεξάρτητη από τις υλοποιημένες κοινωνικές πρακτικές της χρήσης της, από τη γραφή και την ομιλία, καθώς και από τα κοινωνικο-πολιτισμικά πλαίσια μέσα στα οποία προσδιορίζονται τα νοήματα της γραφής και της ομιλίας. Από τις παρα-γλωσσικές πράξεις που συνοδεύουν τη γραφή (γραφικοί χαρακτήρες, μορφές γραφής, τυπογραφικά σημάδια) και την ομιλία (φωνήματα, μορφασμοί, χειρονομίες, κινήσεις του σώματος), οι οποίες και τροποποιούν το νόημα μιας λέξης ή μιας ολόκληρης γλωσσικής έκφρασης. Η υλική και κοινωνική πραγματικότητα, επομένως, τόσο σε ατομικό όσο και σε συλλογικό επίπεδο, δεν νοηματοδοτείται μόνο και αποκλειστικά από τη γλώσσα.

Οι πράξεις δημιουργίας νοήματος από τον συνδυασμό γλώσσας, εικόνων, σχεδίων, διαγραμμάτων και συμβόλων προέρχονται από την κοινή υλική βάση των σημειωτικών αυτών μέσων και την αλληλένδετη ανάπτυξη τους μέσα από τη χρήση τους στις ανθρώπινες δραστηριότητες, ενώ σύμφωνα με τον Lemke (1990, 1995) οργανώνονται με επίκεντρο τρεις σημειωτικές λειτουργίες:

1. Μια λειτουργία «παρουσίασης» μιας κατάστασης (ανα-παραστατική στο επίπεδο της γλωσσικής λειτουργίας κατά τον Halliday), η οποία ορίζει την οπτική μιας προσέγγισης, κατασκευάζει ένα θέμα, εκθέτει σχόλια και διατυπώνει αποφάνσεις. Χρησιμοποιεί τα μέσα της γλώσσας, το λεξιλόγιο και τη γραμματική της, για να προσδιορίσει σχέσεις και διαδικασίες, για να ορίσει τους συμμετέχοντες σ' αυτές τις σχέσεις και τις διαδικασίες και για να περιγράψει περιστάσεις (πότε, που, πως, γιατί) εντός των οποίων εμφανίζονται ή εξελίσσονται. Στις εικονογραφικές παραστάσεις αυτή είναι αναπαραστατική λειτουργία τους, η οποία παρουσιάζει τη συνολική εικόνα μιας κατάστασης, με τα επιμέρους στοιχεία της συναρτημένα σε ένα όλο, το οποίο απεικονίζει ένα «συμβάν» ή μια ερμηνεία του.

2. Μια λειτουργία «προσανατολισμού» (δια-προσωπική στο επίπεδο της γλωσσικής λειτουργίας κατά τον Halliday), η οποία ταυτόχρονα με την «παρουσίαση» συγκροτεί μια «θέση» απέναντι στην παρουσιαζόμενη κατάσταση. Θέση, η οποία δηλώνει ερμηνείες, αποδίδει αξιολογικά χαρακτηριστικά, εκθέτει προθέσεις αποδοχής ή απόρριψης, κατασκευάζει μια πραγματική ή ιδεατή σχέση δημιουργού και (πραγματικού ή φανταστικού) ερμηνευτή του νοήματος και γενικότερα τοποθετεί τον δημιουργό του νοήματος και το «κείμενο» (με την έννοια της υλικής πραγμάτωσης του λόγου) στον κοινωνικά προσδιορισμένο χώρο όλων των ενδεχόμενων απόψεων και λόγων για την συγκεκριμένη κατάσταση. Στο επίπεδο της γλώσσας ο «προσανατολισμός» κατασκευάζει τη «λεκτική πράξη» η οποία επιτελείται (πληροφόρηση, ερώτηση, προσταγή) και την κοινωνική σχέση την οποία συνάπτει ο ομιλών με τον (πραγματικό ή φανταστικό) ακροατή του. Η λειτουργία αυτή επιτελείται στο πλαίσιο των ευρύτερων κοινωνικών σχέσεων, οι οποίες υπερβαίνουν κάθε συγκεκριμένο επικοινωνιακό γεγονός ή «κείμενο» σε συνάφεια με άλλες διατυπωμένες απόψεις ή θέσεις. Στις εικονογραφικές παραστάσεις η λειτουργία αυτή τοποθετεί τον παρατηρητή σε μια οπτική θέση και διαμορφώνει έτσι μια σχέση του με την απεικονιζόμενη κατάσταση.

3. Μια «οργανωτική» λειτουργία στη δημιουργία νοήματος (κειμενική στο επίπεδο της γλωσσικής λειτουργίας κατά τον Halliday), η οποία ορίζει το όλο και τα μέρη του στο χώρο της υλικής πραγμάτωσης του λόγου καθώς και στο χώρο της ίδιας της πράξης της δημιουργίας νοήματος. Στο επίπεδο της γλώσσας σημαίνει το συνδυασμό λέξεων για τη διατύπωση φράσεων, το συνδυασμό φράσεων για τη διατύπωση προτάσεων, την αλληλουχία προτάσεων για την διατύπωση ευρύτερων κειμενικών δομών. Στις εικονογραφικές παραστάσεις αυτή είναι συνθετική λειτουργία τους, η οποία οργανώνει την απεικόνιση των μερών σε ένα όλο, χρησιμοποιώντας διάφορες τεχνικές, όπως το χρώμα, την προοπτική, ή το φόντο.

Στη δημιουργία μαθηματικών και επιστημονικών νοημάτων συμπλέκονται και οι τρεις αυτές λειτουργίες για κάθε μια από τις οποίες επιστρατεύονται και χρησιμοποιούνται διάφορα σημειωτικά μέσα το καθένα σε διαφορετικούς, κατά περίπτωση, βαθμούς. Οι διαφορετικοί συνδυασμοί νοημάτων οι οποίοι προκύπτουν από τις διαφορετικές αυτές λειτουργίες συγκροτούν τις «μορφές λόγου» (register) της επιστημονικής κοινότητας των μαθηματικών και των επιστημόνων των διαφόρων κλάδων των φυσικών επιστημών. Με την επισήμανση του Martin (1992) κατά νου, ότι συγκεκριμένοι συνδυασμοί νοημάτων, άρα και συγκεκριμένες μορφές λόγου

έχουν αναπτυχθεί ιστορικά και καθιερωθεί πολιτισμικά από διάφορες κοινότητες πρακτικής.

Τα προηγούμενα σημαίνουν ότι το νόημα κάθε «κειμένου», ως υλικής πραγμάτωσης του λόγου, είναι προϊόν ενός δημιουργικού και ταυτόχρονα ενός συμβατικού συνδυασμού των λειτουργιών της παρουσίασης, του προσανατολισμού και της οργάνωσης κατά τη δημιουργία του. Στην περίπτωση των μαθηματικών και των επιστημονικών «κειμένων» εμπλέκονται καθοριστικά στο δημιουργικό και ταυτόχρονα στο συμβατικό αυτό συνδυασμό και τα γλωσσικά, συμβολικά, εικονογραφικά, τεχνικά σημειωτικά μέσα.

Η ΥΒΡΙΔΙΚΗ ΓΛΩΣΣΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Τα μαθηματικά είναι πρωτίστως, αλλά όχι αποκλειστικά, ένας λόγος για τις νοητικές κατασκευές της ανθρώπινης σκέψης, ενώ οι φυσικές επιστήμες ένας λόγος για τις υλικότητες του κόσμου. Η ανθρώπινη σκέψη και οι υλικότητες του κόσμου, παρά τη διάκριση τους (προϊόν της Καρτεσιανής μας κληρονομιάς) είναι οργανικά συναρτημένες και αμοιβαία αναπτυσσόμενες, ενώ τα μαθηματικά και οι φυσικές επιστήμες ως λόγος, ο οποίος ενοποιεί κοινωνικές σημειωτικές πρακτικές και δραστηριότητες διαφόρων μορφών και τύπων, συσχετίζει τα πολιτισμικά καθιερωμένα αναλυτικά συστήματα δημιουργίας νοημάτων με τις υποκείμενες υλικές διαδικασίες δια των οποίων οι άνθρωποι εντάσσονται και δρουν στο φυσικό και κοινωνικό τους περιβάλλον

Όπως αναλύει ο Lemke (1995), η γλώσσα και όλα τα σημειωτικά συστήματα δημιουργούν νοήματα συνδυάζοντας διαφορές και διατυπώνοντας αναλυτικο-κατηγορικές διακρίσεις, ενώ οι υλικότητες των φυσικών διαδικασιών δημιουργούν νοήματα μέσα από την αλληλόδραση των ανθρώπων με τον κόσμο και τη συμμετοχή τους στην οργάνωση, στη διαχείριση και στον μετασχηματισμό του κόσμου τους. Οι υλικότητες, επομένως, υπερβαίνουν τις αναλυτικές κατηγοριοποιήσεις της γλώσσας, γι' αυτό ο λόγος των φυσικών επιστημών δεν μπορεί να βασιστεί και δεν βασίζεται αποκλειστικά στη γλώσσα. Αξιοποιεί συνδυαστικά όλα τα διαθέσιμα σημειωτικά συστήματα για να εκφράσει όχι μόνο το διακριτό, αλλά και το συνεχές, την ποιότητα αλλά και την ποσότητα, το είδος αλλά και το βαθμό χαρακτηριστικών γνωρισμάτων και μετασχηματισμών των υλικών διαδικασιών, κατασκευάζοντας αντίστοιχα συστήματα δημιουργίας νοημάτων. Αυτή τη σύζευξη ποιοτικών και ποσοτικών νοημάτων, νοημάτων είδους και βαθμού, επιτυγχάνει ο λόγος των μαθηματικών, ο οποίος βασίζεται σε μια ίδια με εκείνη των φυσικών

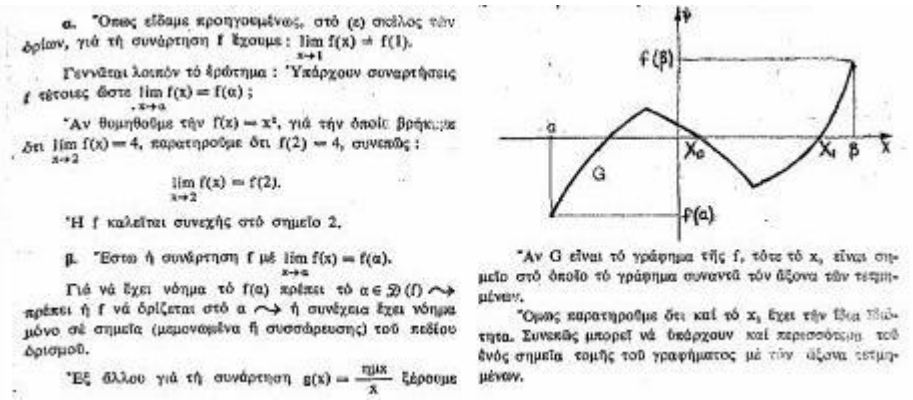
επιστημών υβριδική γλώσσα. Για να ανταποκριθούν σε κάθε αναγκαιότητα, όχι μόνο αναπαράστασης αλλά κυρίως ανάλυσης των αναπαραστάσεων υλικών διαδικασιών, οι οποίες τέθηκαν στο επίκεντρο του ανθρώπινου ενδιαφέροντος, τα μαθηματικά επέκτειναν τις σημασιολογικές τους δυνατότητες εισάγοντας στο λόγο τους νέες κατηγορίες ποιοτήτων και ποσοτήτων (ρητοί αριθμοί, μεταβλητές, συναρτήσεις, όρια, παράγωγοι, τοπολογίες κλπ) οι οποίες καθιστούσαν εφικτή τη δημιουργία νέων μαθηματικών νοημάτων.

Τα μαθηματικά και οι φυσικές επιστήμες αναδύθηκαν από την ανθρώπινη πρακτική δραστηριότητα και στην εξέλιξη τους οργανώθηκαν συστηματικά ως πεδία γνωστικής δραστηριότητας. Η επίλυση πρακτικών προβλημάτων απαίτησε τη δημιουργία και τη χρήση νοημάτων ποιότητας και ποσότητας μέσα από συνδυασμούς γλωσσικά διατυπωμένων εννοιών και σχέσεων, οργάνων μέτρησης και σχεδιασμού καθώς και των πρακτικών χρήσης τους, τεχνικών μέτρησης και υπολογισμών, σχεδίων, διαγραμμάτων και εικόνων, πινάκων και συστημάτων οργάνωσης δεδομένων, ακόμα και χειρονομιών. Μέχρι και τις αρχές του 20ου αιώνα τα μαθηματικά και οι φυσικές επιστήμες αναπτύχθηκαν σε απόλυτη συνάφεια και ανέπτυξαν από κοινού τον υβριδικό τους λόγο. Όλα τα επιστημονικά κείμενα από τις αρχές της επιστημονικής επανάστασης και εξής περιλαμβάνουν διαγράμματα και σχέδια, τα οποία συνδυάζουν γεωμετρικές μορφές και ζωγραφικές παραστάσεις, εξισώσεις οι οποίες περιλαμβάνουν σύμβολα και λεκτικές εκφράσεις, πίνακες οι οποίοι συνδυάζουν αριθμητικά δεδομένα και υπολογιστικούς τύπους, αναλύσεις οι οποίες βασίζονται σε έννοιες, περιγραφές και γλωσσικές μεταφορές.

Τα μαθηματικά και οι φυσικές επιστήμες δεν συγκροτούνται, άρα και δεν αναπαράγονται, μόνο δια της γλώσσας. Οι έννοιες και οι πρακτικές τους είναι από σημειωτική οπτική υβριδικές, είναι ταυτόχρονα γλωσσικές, συμβολικές, εικονογραφικές, πραξιακές. Τα κειμενικά είδη των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών αποτελούν συνθέσεις γλωσσικών εκφράσεων, συμβολικών παραστάσεων, πινάκων, γραφημάτων, σχεδίων, εικόνων, φωτογραφιών και σε κάποιες περιπτώσεις μοναδικά ιδιότυπων απεικονίσεων δια των οποίων οργανώνονται τα λογικά επιχειρήματα, αναλύονται οι πληροφορίες και εκτίθενται τα συμπεράσματα. Η μαθηματική γνώση και η γνώση των φυσικών επιστημών δεν είναι μόνο γνώση εννοιών, μεθόδων και συμπερασμάτων, αλλά ευχέρεια δημιουργίας νοημάτων μέσα από τον συνδυασμό λεκτικά διατυπωμένων εννοιών, μαθηματικών σχέσεων, οπτικών παραστάσεων και χειρο-τεχνικών πράξεων (Lemke, 2004).

Μια ματιά σε ένα τυπικό μαθηματικό άρθρο, στα κείμενα ενός ερευνητικού περιοδικού φυσικών επιστημών, σε ένα σχολικό βιβλίο μαθηματικών,

φυσικής, βιολογίας ή χημείας ή σε μια δικτυακή ιστοσελίδα με μαθηματικό ή επιστημονικό περιεχόμενο πιστοποιεί τον ισχυρισμό αυτό.



α. Όπως είδαμε προηγουμένως, στό (ε) σκέλος τών ὁρίων, γιά τή συνάρτηση f ἔχουμε : $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

Γεννᾶται λοιπόν τό ἐρώτημα : Ὑπάρχουν συναρτήσεις f τέτοιες ὥστε $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$;

Ἂν θυμηθοῦμε τήν $f(x) = x^2$, γιά τήν ὁποία βρήκαμε ὅτι $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$, παρατηροῦμε ὅτι $f(2) = 4$, συνεπῶς :

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2).$$

Ἡ f καλεῖται συνεχής στό σημεῖο 2.

β. Ἔστω ἡ συνάρτηση f μέ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Γιά νά ἔχει νόημα τό f(a) πρέπει τό $a \in \mathcal{D}(f) \rightsquigarrow$ πρέπει ἡ f νά ὁρίζεται στό $a \rightsquigarrow$ ἡ συνέχεια ἔχει νόημα μόνο σέ σημεῖα (μεμονωμένα ἢ συσσώρευσης) τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ.

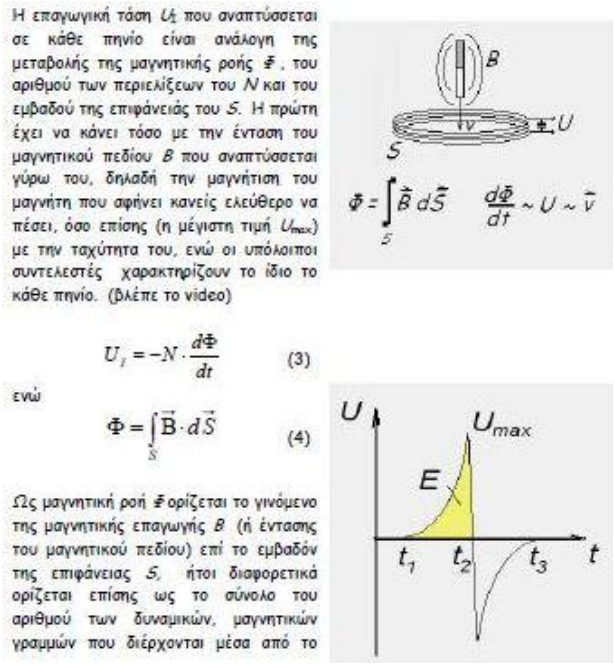
Ἐξ ἄλλου γιά τή συνάρτηση $g(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ ξέρουμε

f(β) f(α) a x_0 x_1 β x G

Ἂν G εἶναι τό γράφημα τῆς f, τότε τό x_0 εἶναι σημεῖο στό ὁποῖο τό γράφημα συναντᾶ τόν ἄξονα τῶν τεταγμένων.

Ὅμως παρατηροῦμε ὅτι καί τό x_1 ἔχει τήν ἴδια ἰδιότητα. Συνεπῶς μπορεῖ νά ὑπάρχουν καί περισσότερα τοῦ ἑνός σημεῖα τομῆς τοῦ γραφήματος μέ τόν ἄξονα τετμημένων.

Απόσπασμα σχολικού βιβλίου μαθηματικών



Η επαγωγική τάση U_i που αναπτύσσεται σε κάθε πηνίο είναι ανάλογη της μεταβολής της μαγνητικής ροής Φ , του αριθμού των περιελίξεων του N και του εμβαδού της επιφάνειάς του S. Η πρώτη έχει να κάνει τόσο με την ένταση του μαγνητικού πεδίου B που αναπτύσσεται γύρω του, δηλαδή την μαγνήτιση του μαγνήτη που σφήνει κανείς ελεύθερο να πέσει, όσο επίσης (η μέγιστη τιμή U_{max}) με την ταχύτητα του, ενώ οι υπόλοιποι συντελεστές χαρακτηρίζουν το ίδιο το κάθε πηνίο. (βλέπε το video)

B S U

$$\Phi = \int_S \vec{B}\, d\vec{S} \qquad \frac{d\Phi}{dt} \sim U \sim \vec{v}$$

$$U_i = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt} \qquad (3)$$

ενώ

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \qquad (4)$$

Ως μαγνητική ροή Φ ορίζεται το γινόμενο της μαγνητικής επαγωγής B (ή έντασης του μαγνητικού πεδίου) επί το εμβαδόν της επιφάνειας S, ήτοι διαφορετικά ορίζεται επίσης ως το σύνολο του αριθμού των δυναμικών, μαγνητικών γραμμών που διέρχονται μέσα από το

U U_{max} E t_1 t_2 t_3 t

Απόσπασμα σχολικού βιβλίου φυσικής

ΜΙΑ ΣΗΜΕΙΩΤΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Παρατηρώντας ένα μάθημα μαθηματικών, φυσικής, χημείας ή βιολογίας σε μια σχολική τάξη μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ο δάσκαλος ή η δασκάλα χρησιμοποιούν ταυτόχρονα ή διαδοχικά όλο το πλήθος των διαθέσιμων και κατάλληλων για την κάθε περίσταση σημειωτικών μέσων. Μιλούν στους μαθητές και στις μαθήτριες της τάξης, χρησιμοποιούν κινήσεις του σώματος τους, χειρονομίες και μορφασμούς για να παρουσιάσουν ή να εξηγήσουν έννοιες και πληροφορίες, γράφουν στον πίνακα λέξεις, σύμβολα, γραφήματα και σχέδια, παραπέμπουν σε συγκεκριμένες σελίδες του ανοιχτού μπροστά στους μαθητές και στις μαθήτριες σχολικού βιβλίου, ζητούν την καταγραφή σημειώσεων ή την εκτέλεση πράξεων στα τετράδια των μαθητών και μαθητριών, οι οποίοι οφείλουν να συνδυάσουν και να ερμηνεύσουν όλα αυτά ταυτόχρονα ή διαδοχικά αλλά σε ελάχιστα χρονικά διαστήματα, και παράλληλα να συνδυάσουν όλα αυτά με τις απαντήσεις των συμμαθητών τους στις ερωτήσεις του δασκάλου ή της δασκάλας και ερμηνεύσουν τα συνήθως χαμηλόφωνα σχόλια του διπλανού συμμαθητή τους.

Η μάθηση σε σχολικά περιβάλλοντα προϋποθέτει, επομένως, τη διαθεσιμότητα και την ευχέρεια σύνθεσης ενός πλήθους διαφορετικών εκφραστικών μέσων και σημειωτικών συστημάτων και τη «μετάφραση» δεδομένων από έναν τρόπο έκφρασης τους σε έναν άλλο: αριθμητικές εκφράσεις σε αλγεβρικές, αλγεβρικές σε γραφικές, γραφικές σε λεκτικές, λεκτικές σε κινητικές κ.ο.κ. Σύνθεση και μετάφραση σημειωτικών τρόπων οι οποίοι οδηγούν στη δημιουργία νοημάτων (Wells, 2000). Χωρίς, βέβαια, να ξεχνούμε ή να παραγνωρίζουμε τις απαιτούμενες τεχνικές δεξιότητες, όπως εκείνες της ανάγνωσης και γραφής ή του χειρισμού οργάνων, αλλά και τις κοινωνικές δεξιότητες, όπως για παράδειγμα της υποβολής ή της απάντησης ερωτήσεων κατά τη διάρκεια ενός σχολικού μαθήματος.

Από μια σημειωτική οπτική, επομένως, η διδασκαλία και η μάθηση των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών στο σχολείο οφείλει να εκκινά από αυτό που σήμερα αποκαλείται μαθηματικός και επιστημονικός γραμματισμός. Την ανάπτυξη, δηλαδή, ικανοτήτων ανάγνωσης και γραφής μαθηματικών και επιστημονικών – πολύ-τροπικών – κειμένων μέσα από την κατανόηση των συμβάσεων, οι οποίες διέπουν τον συνδυασμό λεκτικών διατυπώσεων, συμβολικών εκφράσεων και εικονικών παραστάσεων κάθε τύπου, ώστε προοπτικά να δημιουργούνται οι προϋποθέσεις δημιουργίας των επιδιωκόμενων μαθηματικών και επιστημονικών νοημάτων.

Η διδασκαλία και η μάθηση των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών στο σχολείο οφείλει να ενσωματώνει ως αναπόσπαστο, συστατικό, της στοιχείο, όχι μόνο την ομιλία και τη γραφή, αλλά όλο το εύρος των εκφραστικών στοιχείων και των οπτικών τεχνολογιών, από την παντομίμα και τα κινούμενα σχέδια μέχρι τις εικονικές προσομοιώσεις. Οφείλει, δηλαδή, να προσομοιάζει τις καθιερωμένες «μορφές λόγου» (register) της επιστημονικής κοινότητας των μαθηματικών και των επιστημόνων των διαφόρων κλάδων των φυσικών επιστημών.

Συστατικά στοιχεία μιας τέτοιου τύπου διδασκαλίας μπορεί, ενδεικτικά, να είναι:

- Η «μετάφραση» μαθηματικών και επιστημονικών εκφράσεων από ένα σημειωτικό σύστημα σε ένα άλλο (γλωσσικό, συμβολικό, εικονογραφικό, κινητικό) και η ανάδειξη των δυνατοτήτων τις οποίες προσφέρει, αλλά και των περιορισμών τις οποίες επιβάλλει κάθε τέτοια «μετάφραση».
- Η ένταξη των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών στο πλαίσιο των προβλημάτων και των εφαρμογών, τα οποία ιστορικά υποκίνησαν την ανάπτυξη τους καθώς και σε τυπικά πεδία χρήσης τους στις μέρες μας.
- Η παρουσίαση δραστηριοτήτων σε πραγματικά περιβάλλοντα στις οποίες χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά και οι φυσικές επιστήμες για την επίλυση θεωρητικών και πρακτικών προβλημάτων, η συμμετοχή σε απλές πράξεις των δραστηριοτήτων αυτών και η παρατήρηση χαρακτηριστικών μέσων και προϊόντων των δραστηριοτήτων αυτών (όργανα, συσκευές και μηχανές, βιβλία, περιοδικά και άρθρα κ.α.).

Τα προηγούμενα προϋποθέτουν διαφορετικές από τις καθιερωμένες απαντήσεις στο ερώτημα των στόχων της διδασκαλίας των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών στο σχολείο, διαφορετικές από τις επικρατούσες προσεγγίσεις στη μάθηση και διαφορετικές επιστημολογικές θεωρήσεις των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών.

Διαφορετικές απαντήσεις, προσεγγίσεις και θεωρήσεις σημαίνει:

- Ότι βασικός στόχος της διδασκαλίας των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών στο σχολείο είναι η εισαγωγή των μαθητών και των μαθητριών στις μαθηματικές και επιστημονικές πρακτικές, με τα μέσα και τις τεχνικές που οι πρακτικές αυτές ασκούνται από τους μαθηματικούς και τους επιστήμονες για την επίλυση θεωρητικών και πρακτικών προβλημάτων, η εξοικείωση των μαθητών και των μαθητριών με τον μαθηματικό και τον επιστημονικό λόγο και η διδασκαλία μέσων και τρόπων νοηματοδότησης των φυσικών και των τεχνολογικών φαινομένων, αλλά και των αναπαραστάσεων τους.

- Ότι η προσέγγιση του φαινομένου της μάθησης είναι απαλλαγμένη από την κυριαρχία της νοησιαρχικής λογικής, η οποία θεωρώντας τις έννοιες ως νοητικά αντικείμενα και την κατανόηση τους ως μια απολύτως νοητική διεργασία ανάγει τη μάθηση τους σε μια καθαρά ατομική ψυχολογική λειτουργία, αγνοώντας τα κοινωνικά και πολιτισμικά χαρακτηριστικά της. Μια διαφορετική προσέγγιση βασισμένη στις κοινωνικο-πολιτισμικές θεωρίες του Vygotsky (1997) ή του ύστερου Bruner (1977) για την ανθρώπινη μάθηση επικεντρώνεται στις διαδικασίες νοηματοδότησης του κόσμου μέσα από τη οικειοποίηση πολιτισμικών εργαλείων και πρακτικών και μέσα από τη συμμετοχή σε συγκεκριμένες μορφές ατομικών και κοινωνικών δραστηριοτήτων.
- Ότι οι επιστημολογικές θεωρήσεις των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών είναι απαλλαγμένες από το κυρίαρχο πρότυπο των μαθηματικών ως πεδίων απόλυτης ορθολογικότητας και των φυσικών επιστημών ως μέσων και μεθόδων υπαγορευμένων αποκλειστικά από τις ανάγκες αποκάλυψης των «μυστικών» της φύσης. Σημαίνει κατ' αρχήν θεωρήσεις των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών ως κοινωνικών πρακτικών, οι οποίες υποκείμενες στην ιστορία, στην κοινωνία και στον πολιτισμό του καιρού τους παράγουν θεωρίες για την πρόσληψη και την ερμηνεία φαινομένων, καθώς και για τα μέσα και τις διαδικασίες πρόσληψης και ερμηνείας των φαινομένων. Με ότι αυτές οι θεωρήσεις συνεπάγονται για το καθεστώς των επιστημονικών γνώσεων.

Τα προηγούμενα, βέβαια, συνεπάγονται ένα διαφορετικό από τον καθιερωμένο ρόλο του εκπαιδευτικού, ο οποίος προβάλλοντας τις πρακτικές των μαθηματικών και των επιστημόνων, τα μέσα και τις μεθόδους των πρακτικών αυτών, το λόγο και τη γραφή των επιστημόνων, εισάγει τους μαθητές και τις μαθήτριες τους στα μέσα και στους τρόπους δημιουργίας μαθηματικών και επιστημονικών νοημάτων.

Η υιοθέτηση διαφορετικών από τους καθιερωμένους στόχων διδασκαλίας των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών στο σχολείο, διαφορετικών από τις επικρατούσες προσεγγίσεις στη μάθηση και διαφορετικών επιστημολογικών θεωρήσεων των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών φαντάζει υπό τις παρούσες συνθήκες ανέφικτη. Μπορεί, όμως, να προβάλλεται και στο μέτρο του δυνατού να διεκδικείται.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Bruner J. (1997), *Πράξεις Νοήματος*, Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα.

Halliday, M.A.K. (1978), *Language as Social Semiotic,* Edward Arnold London.

Lemke, J.L. (1990), *Talking science: Language, learning and values*, Ablex Publishing, Norwood, NJ.

Lemke, J.L. (1995), *Textual Politics: Discourse and Social Theory*, Taylor and Francis, London.

Lemke, J.L. (2004), The literacies of science. Στο E. Wendy Saul (Ed.), *Crossing borders in literacy and science instruction: Perspectives on theory and practice*, International Reading Association, Newark, DE, 33-47.

Martin, J.R. (1992). *English Text*, John Benjamins. Philadelphia.

Vygotsky (1997), Νους στην κοινωνία, Gutenberg, Αθήνα.

Wells, G. (2000), Modes of meaning in a science activity, *Linguistics and Education,* 10(3), 307-334.

ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ Η ΣΧΕΣΗ ΤΟΥΣ ΜΕ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΚΑΙ ΤΗΝ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Νικόλαος Μ. Μπερκέτης

Δρ. Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Τμήματος Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να πείσει για την ύπαρξη μιας πολύ στενής σχέσης διδακτικής και παιδαγωγικής μεταξύ Μαθηματικών και Φυσικής. Η παρουσίαση αυτής της εργασίας σ' ένα ακροατήριο κυρίως με Μαθηματικούς θα θεωρούνταν ίσως προπαγάνδα για την Φυσική. Ομοίως σ' ένα ακροατήριο Φυσικών θα θεωρούνταν προπαγάνδα για τα Μαθηματικά. Όμως αυτό θα μπορούσε να θεωρηθεί ως απολογία ενός Μαθηματικού που πέρασε ερευνητικά στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά και διαπίστωσε ότι πολλές φορές τα Μαθηματικά δεν απέχουν και πολύ από τη Θεωρητική Φυσική.

Ιστορική ανασκόπηση : Από γεννήσεως του κόσμου τα Μαθηματικά είναι η γλώσσα που χρησιμοποιεί η Φυσική για να διατυπώσει με σαφήνεια τους νόμους και τα αποτελέσματα. Μαθηματικά και Φυσικές Επιστήμες (Φυσική, Χημεία, Βιολογία) συνδέονται στενά μεταξύ τους από την αρχαιότητα.

Συμβίωση Μαθηματικών και Φυσικής : Η σχέση των Μαθηματικών και της Φυσικής από τη μελέτη της ιστορίας υπήρξε ανέκαθεν στενή , αμφίδρομη και πολυδιάστατη. Ως Μαθηματικά και Φυσική δεν πρέπει να νοούνται μόνο τα αποτελέσματα των δραστηριοτήτων στα Μαθηματικά ή στην Φυσική αντίστοιχα, αλλά όλη η διαδικασία που οδηγεί σε αποτελέσματα.

Παιδαγωγικός και διδακτικός ρόλος των Φυσικών επιστημών στα Μαθηματικά και αντίστροφα : Από παιδαγωγική άποψη, μια ολοκληρωμένη προσέγγιση στη διδασκαλία, στα σημεία στα οποία τα Μαθηματικά και η Φυσική αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, είναι μία βιώσιμη και επιθυμητή επιλογή.

Μια γενετική προσέγγιση παρέχει ένα επαρκές ιστορικό πλαίσιο που μπορεί να ενισχύσει τη διαδικασία μάθησης. Προσέγγιση του πραγματικού κόσμου με Μαθηματικά Μοντέλα (Μοντελοποίηση). Διαφορικές εξισώσεις στην περιγραφή και μελέτη Μαθηματικών Μοντέλων. Τα μοντέλα στοιχειοθετούν ένα βασικό επιστημονικό εργαλείο, πολύ χρήσιμο και στην διδασκαλία των επιστημών.

Παιδαγωγική συνεργασία Μαθηματικών και Φυσικής στην διανυσματική θεωρία. Χρησιμοποίηση των νέων τεχνολογιών στα διδακτικά μοντέλα Μαθηματικών – Φυσικής.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα Μαθηματικά και η Φυσική εξελίχθηκαν και εξελίσσονται μέσα σε καθεστώς διαρκούς αλληλεπίδρασης. Ανάπτυξη Μαθηματικών μεθόδων στην Φυσική, και αντίστροφα, φυσικές έννοιες, τρόποι σκέψης και επιχειρήματα οδηγούν στην ανάπτυξη και κατανόηση νέων Μαθηματικών εννοιών, μεθόδων ή και ολόκληρων πεδίων.

1.1 Ιστορική ανασκόπηση

Η κατάλληλη ενσωμάτωση μιας ιστορικής διάστασης στην διδασκαλία των Μαθηματικών και της Φυσικής, δίνει τη δυνατότητα να γίνει κατανοητός ο εξελικτικός χαρακτήρας των πεδίων αυτών και ως εκ τούτου, να υποβοηθηθεί η σε βάθος η κατανόησή τους.

Η πλατωνική αντίληψη,(Σωτηρόπουλος Παναγιώτης, Ινστιτούτο Πολιτιστικής και Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας), για τα Μαθηματικά επιτρέπει την κατανόηση των θεμελίων της σύγχρονης Φυσικής .

Η στενή σχέση μεταξύ Μαθηματικών και Φυσικής ξεκινάει ήδη από την εποχή του Ευκλείδη και του Αρχιμήδη στον τρίτο αιώνα. Ο Ευκλείδης έγραψε ένα βιβλίο για την οπτική και ο Αρχιμήδης έκανε σημαντικό έργο για την στατική και την υδροστατική. Τα Μαθηματικά διαδραματίζουν στην Φυσική καθοριστικό ρόλο, κατά τις πρώτες δεκαετίες του 17ου αιώνα, με τον Γαλιλαίο.

Μετά τον Γαλιλαίο πολλοί αξιόλογοι μαθηματικοί έχουν προσφέρει στην Φυσική όπως ο Descartes, Fermat, Leibniz, οι αδελφοί Bernoulli τον 17ο αιώνα. Euler, D' Alembert και Lagrange τον 18ο αιώνα. Laplace, Cauchy, Causs , και Riemman στο 19ο αιώνα. Poincare[1] και von Neumann στον 20ο αιώνα. Newton με εξαίρετη συνεισφορά τόσο στα Μαθηματικά όσο και στη Φυσική.

Η Ιστορική αναδρομή από την επιστημονική πορεία του Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή (1873-1950) που είχε καθηγητές τους Μαθηματικούς Frobenius, schwarz , Schmidt, Hilbert, klein, Minkowski και τον φυσικό Max Planck, καθώς και την επιστημονική πορεία του Albert Einstein (1879-1955) θέτουν το πρόβλημα αν η φυσική γνώση εξαρτάται από τη μαθηματική γνώση, όπως φάνηκε να πίστεψαν οι φορμαλιστές των Μαθηματικών, ή αντίθετα η μαθηματική γνώση εξαρτάται από τη φυσική γνώση. Τα τελευταία

[1] *Ο* Επιστήμονας δεν μελετά τη φύση επειδή αυτό είναι χρήσιμο. Την μελετά γιατί αυτό τον ευχαριστεί. Και τον ευχαριστεί διότι η φύση είναι όμορφη. Εάν η φύση δεν ήταν όμορφη, τότε δεν θα άξιζε τον κόπο να τη γνωρίσουμε. Και αν δεν άξιζε τον κόπο να τη γνωρίσουμε, τότε δεν θα άξιζε να ζούμε.

χρόνια τα όρια μεταξύ Φυσικής και Μαθηματικών έχουν καταστεί δυσδιάκριτα, όπως ιδίως φαίνεται σε όσους ασχολούνται με τις πιο προχωρημένες έρευνες της βασικής Φυσικής (π.χ. θεωρίες χορδών).

1.2 Συμβίωση Μαθηματικών και Φυσικής

Το ζητούμενο είναι πώς αντιλαμβανόμαστε από την δημιουργία του κόσμου το περιβάλλον και αυτή η αντίληψη του περιβάλλοντος πώς επιδρά στην γνώση. Τον πρωταρχικό ρόλο σε αυτή την αντίληψη και μελέτη του περιβάλλοντος έχει η σχέση των Μαθηματικών με την Φυσική και το αντίστροφο.

Η παρουσία των Μαθηματικών στην εξήγηση των φαινομένων της φύσης είναι κυρίαρχη. Αυτή η συμβίωση Φυσικής και Μαθηματικών, ανέκαθεν ήταν ένα θαύμα αφενός της "Φύσης" που ερευνά η Επιστήμη, αφετέρου στο ζήτημα της ανεξαρτησίας ή, ακριβέστερα, τις αλληλεξαρτήσεις των δύο μερών .

Με την βοήθεια της Μαθηματικής Ανάλυσης , της Γεωμετρίας και των Μαθηματικών τύπων έγινε εφικτή η περιγραφή και εξήγηση των φυσικών φαινομένων, π.χ ο Newton κατόρθωσε να αποδείξει το νόμο της παγκόσμιας έλξης, που διέπει τις κινήσεις των ουράνιων σωμάτων.

Είναι γεγονός ότι τα Μαθηματικά δεν αποτελούν μόνο γλώσσα αλλά τρόπο σκέψης. Αλλά μολονότι ο τρόπος σκέψης των Μαθηματικών μπορεί να είναι χρήσιμος αρκετές φορές στη Φυσική και ο τρόπος σκέψης της Φυσικής στα Μαθηματικά, οι δύο δεν ταυτίζονται.

2. Ο ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟΣ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ

2.1 Μαθηματικά Μοντέλα και Διδακτική πράξη

Ο κύριος σκοπός της Επιστήμης είναι η κατανόηση της φύσης, (με την πλατειά της έννοια), μέσα στην οποία ζούμε. Μία από τις επιστήμες που μελετούν τη φύση είναι και τα Μαθηματικά.

Επειδή τα περισσότερα φαινόμενα είναι πολύπλοκα, είναι πρακτικά αδύνατο να θεμελιωθούν και να περιγραφούν πλήρως με μαθηματικό τρόπο. Γι' αυτό προσπαθούμε να προσεγγίσουμε την πραγματικότητα με ***Μαθηματικά Μοντέλα*** (***Μοντελοποίηση***), κάνοντας ορισμένες υποθέσεις που απλοποιούν τα φαινόμενα και τους νόμους που τα διέπουν. Από τη μία

πλευρά βρίσκεται το συγκεκριμένο φυσικό πρόβλημα και από την άλλη πλευρά η μαθηματική του έκφραση που αποτελεί μία εξιδανίκευση του φαινομένου που προσπαθούμε να περιγράψουμε.

Σκοπός της μοντελοποίησης είναι η διερεύνηση, η ερμηνεία , η περιγραφή και η πρόβλεψη ενός φαινομένου ή συστήματος ή διαδικασίας του πραγματικού κόσμου,(Schecker H.,1966:1-8). Τα σύγχρονα Μαθηματικά Μοντέλα ενσωματώνουν μεγάλο αριθμό παραμετροποιήσεων των φυσικών και χημικών διεργασιών που λαμβάνουν χώρα στην φύση. Κατά τη δημιουργία του μοντέλου γίνεται επιλεκτική μεταφορά των χαρακτηριστικών του πραγματικού κόσμου στον ιδεατό κόσμο του μοντέλου,(Φεσάκης Γ.,Δημητρακοπούλου Α., Καλαβάσης Φ.,2001:673-688).

Μέσω της μοντελοποίησης , πραγματοποιείται ένας επαναληπτικός κύκλος μετασχηματισμού(διαδικασία ανακύκλωσης) που ξεκινά από του πραγματικό κόσμο, οδηγείται στον μαθηματικό κόσμο και καταλήγει πάλι στον πραγματικό κόσμο. Η διαδικασία αυτή ανακύκλωσης είναι ***επαναληπτική*** και ***προσαρμοστική***.

Η μαθηματική αυτή αναπαράσταση του προβλήματος δεν αποτελεί παρά μία προσέγγιση της πραγματικότητας που βασίζεται σε σειρά παραδοχών που απλουστεύουν το φαινόμενο και ελαχιστοποιούν τη δράση των διαφόρων παραμέτρων. Το μαθηματικό αυτό κατασκεύασμα, αν και προσέγγιση, δεν πρέπει να αποκλίνει των βασικών απαιτήσεων της εξέλιξης ενός φυσικού φαινομένου που είναι η ύπαρξη μιας και μόνης λύσης και η συνεχή εξάρτηση της από την επίδραση του περιβάλλοντος και του παρελθόντος. Αν οι απαιτήσεις αυτές πληρούνται τότε λέμε ότι *το πρόβλημα είναι καλά τοποθετημένο,*(Δάσιος Γ.,1977:44-56).

Η παιδαγωγική- διδακτική διαδικασία , η οποία πραγματοποιείται για την δημιουργία ενός Μαθηματικού Μοντέλου που προκύπτει από την παρατήρηση του φυσικού κόσμου, μπορεί να οριοθετηθεί σε ***τρία επίπεδα δράσης - έρευνας*** :

- ***<u>Πρώτο Επίπεδο</u>***: στο οποίο ορίζονται οι συσχετίσεις μεταξύ των φυσικών παραμέτρων που χαρακτηρίζουν το φυσικό πρόβλημα, συγκεκριμένα:

a. Διαμόρφωση της φυσικής πραγματικότητας – Παρατήρηση του φαινομένου.

b. Πείραμα (μελέτη του φαινομένου αφαιρώντας ή προσθέτοντας άλλα φαινόμενα ή παράγοντες).

c. Διατύπωση υπόθεσης και ερμηνεία.

d. Σύνδεση με γενικότερα φαινόμενα.

e. Φυσική διατύπωση και νόμοι του φαινομένου.

- ***Δεύτερο Επίπεδο***: στο επίπεδο αυτό ξεκινά μοντελοποίηση με το σχεδιασμό και υλοποίηση του Μαθηματικού μοντέλου, συγκεκριμένα :

f. Μαθηματική προσέγγιση .

g. Μαθηματικές φόρμες (μαθηματικό μοντέλο)

Η δημιουργία του Μαθηματικού μοντέλου απαιτεί μεγάλη επιδεξιότητα και εμπειρία, και γίνεται με μια μαθηματικοποίηση των αντίστοιχων φυσικών νόμων. Αφού ποσοτικοποιηθούν τουλάχιστον τα φυσικά μεγέθη εκείνα που κρίνονται απαραίτητα για την καλύτερη περιγραφή του φυσικού προβλήματος , ακολουθεί το στάδιο της επιλογής των εξισώσεων και επειδή συνήθως περιέχουν ρυθμούς μεταβολής ενός μεγέθους , του ποσοτικά αγνώστου, εκφράζονται με παραγώγους του άγνωστου αυτού μεγέθους. Η θεωρητική αυτή μοντελοποίηση γίνεται με τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (Σ.Δ.Ε) ή με τις μερικές διαφορικές εξισώσεις (Μ.Δ.Ε) ή με συστήματα διαφορικών εξισώσεων μέσα από τις αρχές διατηρήσεως των φυσικών μεγεθών, των νόμων των φυσικών φαινομένων και της διανυσματικής ανάλυσης (κυρίως των τύπων Gauss και Stokes).

h. Εύρεση των περιορισμών της λύσης και καθορισμός του χώρου των συναρτήσεων μέσα στο οποίο πρέπει να αναζητήσουμε τη λύση.

i. Καθορισμός του χώρου συναρτήσεων μέσα στο οποίο μεταβάλλονται τα δυνατά δεδομένα των μετρήσεων.

j. Εύρεση των βοηθητικών συνθηκών (δεδομένα του Caushy συναρτήσεις πηγής, συνοριακές συνθήκες) για τον καθορισμό του συνόλου των δεδομένων.

Η Μ.Δ.Ε , η Σ.Δ.Ε ή το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που δημιουργείται συνοδεύονται πάντα από βοηθητικές συνθήκες που προσφέρουν τις απαιτούμενες πληροφορίες για την εξέταση της ιστορίας (*αρχικές συνθήκες*) και του περιβάλλοντος (*συνοριακές συνθήκες*) στην εξέλιξη του φαινομένου.

- ***Τρίτο Επίπεδο***: στο οποίο γίνεται επεξεργασία του Μαθηματικού μοντέλου, συγκεκριμένα:

k. Αναζήτηση Μαθηματικών λύσεων. Ανάπτυξη Μαθηματικών τεχνικών , λύση του Μαθηματικού προβλήματος.

l. Έλεγχος του μονοσήμαντου της λύσης με την εξασφάλιση της ύπαρξης του αντιστρόφου τελεστή του προβλήματος.

m. Έλεγχος της ύπαρξης λύσης με την εξασφάλιση ολόκληρου του χώρου των δεδομένων σαν πεδίο ορισμού του αντίστροφου τελεστή του προβλήματος.

n. Έλεγχος της συνεχούς εξάρτησης της λύσης από τα δεδομένα με την εξασφάλιση φράγματος για τον αντίστροφο τελεστή του προβλήματος.

o. Επεξεργασία των λύσεων και ερμηνεία τους στον πραγματικό κόσμο.

p. Έλεγχος αποτελεσμάτων .

q. Προσομοίωση των συμπερασμάτων και ανατροφοδότηση του μοντέλου.

r. Προβλέψεις και σύγκριση με την φυσική πραγματικότητα.

Φυσικά τα παραπάνω επίπεδα απέχουν πολύ από το να είναι εύκολα βήματα και στις περισσότερες περιπτώσεις ακολουθούν μια μεγάλη σειρά πολλαπλών αναμορφώσεων μέχρι να πάρουν τελική μορφή. Σε ορισμένα προβλήματα η χρονική διάρκεια αυτών των αναμορφώσεων ξεπέρασε τον ένα αιώνα και σε άλλα πολύ περισσότερο. Προφανώς Μαθηματικά Μοντέλα έχουμε και από άλλες εφαρμογές των Μαθηματικών πέρα από τη χρήση διαφορικών εξισώσεων ή διαφορικών συστημάτων, όπως εφαρμογές από Γραμμική άλγεβρα, Διανυσματικό λογισμό, Διαφορική Γεωμετρία, Θεωρία συνόλων κ.λ.π. .

2.2 Μαθηματική μοντέλα και Η/Υ στην διδακτική πράξη για την Μέση Εκπαίδευση

Είναι αναγκαίο πλέον στα σύγχρονα Μαθηματικά και στην σύγχρονη διδασκαλία των Μαθηματικών να περάσουμε τα Μαθηματικά Μοντέλα και των συσχετισμό των εφαρμοσμένων Μαθηματικών με τις Φυσικές επιστήμες και τη χρήση Η/Υ,(Κρητικός Γ.,2009), καθώς και με άλλους κλάδους Επιστημών. Το πρόβλημα βρίσκεται στο να δείξουμε στο σχολείο με πειστικό τρόπο , ότι είναι δυνατόν με τη βοήθεια των "σύγχρονων Μαθηματικών" να δημιουργήσουμε *Μαθηματικά Μοντέλα* καταστάσεων και πραγματικών διαδικασιών, και μάλιστα όχι μόνο καλύτερα, αλλά και με λογικά συνεπέστερο και απλούστερο τρόπο απ' ότι με τα παραδοσιακά Μαθηματικά. Μόνο κάτω απ' αυτήν την προϋπόθεση θα είναι σε θέση οι μεθοδολόγοι των Μαθηματικών να προλάβουν τη διακρινόμενη αντίδραση των υπερασπιστών της "πρακτικής" διδασκαλίας ενάντια στις

πραγματοποιούμενες μεταβολές των προγραμμάτων διδασκαλίας των Μαθηματικών στα σχολεία.

Η κατανόηση του φυσικού κόσμου γίνεται όταν τα φαινόμενα, τα συστήματα, ή οι διαδικασίες μοντελοποιούνται. Σχετικές έρευνες,([6],[7],[9],[12]), δείχνουν ότι η μοντελοποίηση στις Φυσικές Επιστήμες αναδεικνύει τις μαθησιακές δυσκολίες και ενισχύει τη μάθηση, ειδικά όταν οι μαθητές είναι δημιουργοί των μοντέλων και όχι απλώς διαχειριστές έτοιμων μοντέλων. Οι μαθητές, μέσω της άσκησης σε δραστηριότητες μοντελοποίησης, ανακαλύπτουν απλούς φυσικούς νόμους και ερμηνεύουν πολύπλοκα φαινόμενα, (Φεσάκης Γ.,Δημητρακοπούλου Α., Καλαβάσης Φ.,2001:673-688).

Παρά το γεγονός ότι η σπουδαιότητα της μοντελοποίησης είναι κοινά αποδεκτή από τους εκπαιδευτικούς ελάχιστοι την αξιοποιούν ως μαθησιακή δραστηριότητα,(Harison A.,2001:401-435).

Τα επίπεδα μοντελοποίησης της παραγράφου (3.1) για την Μέση εκπαίδευση πρέπει να τα περιορίσουμε στα εξής βήματα ,(Κλαουδάτος Ν.,1966 :52):

1. Διαδικασία της ανάπτυξης του μοντέλου της πραγματικής κατάστασης.
2. Μαθηματικοποίηση.
3. Επεξεργασία του μαθηματικού μοντέλου.
4. Ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

όπου ο μαθητής στη διδακτική πορεία αυτών των βημάτων μοντελοποίησης έχει την δυνατότητα να προβεί στις εξής δεξιότητες ως προς την ικανότητα ,(Κλαουδάτος Ν.,1966: 54):

Δημιουργία Μεταβλητών , επισήμανσης των παραγόντων που σχετίζονται με το πρόβλημα.

Επιλογή Μεταβλητών , διάκρισης των πιο σημαντικών από τους προηγούμενους παράγοντες.

Εξειδίκευση ερωτήσεων , αναγνώρισης των κρίσιμων ερωτήσεων σε ένα μη- καλώς ορισμένο πραγματικό πρόβλημα.

Δημιουργία σχέσεων , δημιουργίας σχέσεων ανάμεσα στους παράγοντες του προβλήματος.

Επιλογή σχέσεων , επιλογής των κατάλληλων σχέσεων από όλες όσες μπορούμε να δημιουργήσουμε.

Ο εκπαιδευτικός που θέλει να σχεδιάσει δραστηριότητες μοντελοποίησης

για τον εμπλουτισμό της διδακτικής του μεθοδολογίας θα πρέπει ως ένα βαθμό να είναι εξοικειωμένος με ένα τουλάχιστον περιβάλλον μοντελοποίησης κατάλληλο για το σχετικό γνωστικό αντικείμενο και να έχει πανεπιστημιακή εμπειρία στον τομέα αυτό, πράγμα που λείπει στους περισσότερους Εκπαιδευτικούς.

Οι δραστηριότητες μοντελοποίησης στην διδακτική πράξη των Μαθηματικών και της Φυσικής θα πρέπει παράλληλα να αξιοποιήσουν λογισμικά μοντέλα με χρήση των Η/Υ, ,(Φεσάκης Γ.,Δημητρακοπούλου Α., Καλαβάσης Φ.,2001:673-688),σε προβλήματα που:

1. Απαιτούν μεγάλο όγκο υπολογισμών για την πρακτική τους εφαρμογή.
2. Θέλουμε οι μαθητές να έχουν προσιτή υπολογιστική αναπαράσταση, π.χ στον Απειροστικό λογισμό, Διανυσματικό λογισμό, Φυσική και κίνηση, Γεωμετρία.
3. Πρέπει να αντιληφθούν τον χώρο, (Στερεομετρία , κεφάλαιο της Γεωμετρίας που δυστυχώς έχει υποβαθμιστεί στο Λύκειο με καταστροφικές συνέπειες αντίληψης πολλών εννοιών στο Πανεπιστήμιο και Πολυτεχνείο).
4. Απαιτείται σύγκριση και γραφικές παραστάσεις.

Σκέψεις.....Η προσωπική μου εμπειρία ως Εφαρμοσμένος Μαθηματικός, είναι όποιο θέμα στα Μαθηματικά διδάχτηκε μέσα από μοντελοποίηση με ή χωρίς χρήση Η/Υ, *έγινε αντιληπτό και συγχρόνως είχα την αίσθηση ότι έγινε αντιληπτό από το ακροατήριο τι μπορούν να κάνουν τα Μαθηματικά.*

Εδώ προκύπτει το ερώτημα : Ποιος θέλει να μάθει κάτι αν δεν έχει ιδέα για τι πράγμα είναι χρήσιμο; Αυτό συμβαίνει μόνο με εμάς τους Μαθηματικούς, να δουλεύουμε αφηρημένα με την ελπίδα ότι κάποτε αυτά θα βρουν εφαρμογή. Άρα υπάρχει άμεση ανάγκη να βοηθήσουμε τους μαθητές μας να κατανοήσουν τα Μαθηματικά , *δίνοντας στα Μαθηματικά πλαίσιο και σημασία.* Οι Φυσικές Επιστήμες και οι Η/Υ είναι άμεσα συνδεδεμένα με τα Μαθηματικά και προσφέρονται για να δώσουμε στους μαθητές μας ένα μαθηματικό πλαίσιο, ώστε να αγαπηθούν από όλους τα Μαθηματικά και να μην είναι ένα μάθημα στο Δημοτικό, Γυμνάσιο και Λύκειο με τα μεγαλύτερα προβλήματα κατανόησης και αγάπης από τους μαθητές/τριες.

2.3 Διανύσματα και Φυσική

Η ιστορία των διανυσμάτων έχει στενή σχέση με την ιστορική εξέλιξη της Διανυσματικής Ανάλυσης και Αναλυτικής Γεωμετρίας. Η ιστορική αφετηρία, είτε στο πλαίσιο της Γεωμετρίας, είτε της Φυσικής, είναι η ανάπτυξη ενός λογισμού με ευθείες. Μέσα από την ιστορία των Μαθηματικών έχουμε την προσπάθεια της μετάβασης από το σύνολο των πραγματικών αριθμών με τις πράξεις τους σε ένα καινούργιο σύνολο Μαθηματικών αντικειμένων που είναι τα διανύσματα, ενώ μέσα από την ιστορία της Φυσικής έχουμε την αναζήτηση Μαθηματικών οντοτήτων και πράξεων για την παράσταση όψεων της Φυσικής πραγματικότητας. Αυτές οι δύο τάσεις συνέκλιναν τον 19ο αιώνα , με τη δημιουργία και ανάπτυξη των διανυσματικών μεγεθών.

Οι προσπάθειες πρόσθεσης ευθειών οδήγησε στο στοιχειώδη διανυσματικό λογισμό με πρότυπα ιστορικά και εν τέλει κατάλληλα αλλά και απαραίτητα διδακτικά παραδείγματα , για γυμνάσιο και λύκειο, τις μετατοπίσεις, τις δυνάμεις και τις ταχύτητες.

Η προσπάθεια πολλαπλασιασμού ευθειών στο επίπεδο σχετίζεται και επέδρασε σημαντικά στη γεωμετρική ερμηνεία των μιγαδικών αριθμών και την σύνδεση της με τις στροφές στο επίπεδο, θέμα που μπορεί διδακτικά να ενταχθεί και στο πλαίσιο της Αναλυτικής Γεωμετρίας στο Λύκειο. Οι μιγαδικοί αριθμοί αποτελούν πλούσιο παράδειγμα που τονίζει ιδιαίτερα την ιστορικά στενή σχέση Μαθηματικών και Φυσικής, και ταυτόχρονα από διδακτικής πλευράς καθιστά σαφή τη συχνά εμφανιζόμενη ανάγκη ορισμένα θέματα να προσεγγιστούν στο πλαίσιο των Μαθηματικών και Φυσικής.

2.3.1 Δυσκολίες και παρανοήσεις μαθητών και μαθητριών σε σχέση με τα διανύσματα και ορισμένα διανυσματικά μεγέθη της Φυσικής.

Η έννοια του διανύσματος διδάσκεται στους περισσότερους μαθητές κατά τη φοίτηση τους στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, στο μάθημα της Φυσικής ή των Μαθηματικών, (Γαγάσης Α.,1955:141-183)

Η έρευνα στον χώρο της διδακτικής των διανυσμάτων δείχνει ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τη σημασία και τη χρήση των διανυσμάτων στα Μαθηματικά. Ειδικότερα οι μαθητές από μαθηματικής πλευράς :

- Δυσκολεύονται στην κατανόηση του ορισμού της έννοιας του διανύσματος από φυσικής και μαθηματικής δομής.
- Θεωρούν ότι ευθύγραμμο τμήμα και διάνυσμα είναι το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο.

- Δεν υπάρχει σαφή αντίληψη των σπουδαστών στις έννοιες ολισθαίνοντος, ελεύθερου, και εφαρμοστού διανύσματος.
- Δυσκολεύονται να αντιληφθούν όλα εκείνα τα στοιχεία τα οποία χαρακτηρίζουν ένα διάνυσμα (διεύθυνση , φορά, μέτρο).
- Έχουν σύγχυση μεταξύ διεύθυνσης και φορά του διανύσματος.
- Δυσκολεύονται στην κατανόηση της διαφοράς ανάμεσα σε ένα διανυσματικό και ένα αριθμητικό μέγεθος , π.χ συνιστώσες διανύσματος , δηλαδή ανάλυση ενός διανύσματος στις συνιστώσες του με επιλογή αξόνων, και τη συνισταμένη διανυσμάτων.
- Δεν αντιλαμβάνονται εύκολα την πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων στην αναλυτική γεωμετρία, είτε συγχέουν την πρόσθεση ή την αφαίρεση των διανυσμάτων με την πρόσθεση ή την αφαίρεση των μέτρων των διανυσμάτων , είτε με την πρόσθεση ή την αφαίρεση ευθειών, δηλαδή φέρνουν τα διανύσματα πάνω στην ίδια ευθεία για να εκτελέσουν την πράξη πρόσθεσης ή αφαίρεσης των διανυσμάτων.
- Παρουσιάζουν πρόβλημα αντίληψης από την πρόσθεση διαδοχικών διανυσμάτων σε πρόσθεση διανυσμάτων με κοινή αρχή και να εφαρμόσουν τον νόμο του παραλληλογράμμου, καθώς και την χρήση του νόμου του παραλληλογράμμου στην σύνθεση δυνάμεων στην Φυσική.
- Δυσκολεύονται να εξοικειωθούν με την έννοια της προβολής διανύσματος πάνω σε ευθεία.

Ενώ από φυσικής πλευράς η μη σωστή χρησιμοποίηση των διανυσμάτων και η μη σωστή σύνδεση των διανυσμάτων και των διανυσματικών φυσικών εννοιών , δημιουργούν προβλήματα στους μαθητές ως προς την κατανόηση των εννοιών : δύναμη και κίνηση, μετατόπιση, ταχύτητα και επιτάχυνση, με αποτέλεσμα να υπάρχουν οι εξής λανθασμένες απόψεις στους μαθητές:

- Ότι όπου και όταν υπάρχει κίνηση υπάρχει μια δύναμη στην κατεύθυνση της κίνησης.
- Όχι κίνηση συνεπάγεται και όχι δύναμη.
- Σύγχυση ως προς τη χρονική διάρκεια της επίδρασης μιας δύναμης.
- Ότι τα βαρύτερα σώματα πέφτουν γρηγορότερα από τα ελαφρότερα.
- Ότι στο κενό δεν ασκούνται δυνάμεις.

2.3.2 Παιδαγωγική συνεργασία Μαθηματικών και Φυσικής στην διανυσματική θεωρία.

Επειδή ο σύγχρονος τρόπος εισαγωγής της έννοιας του διανύσματος είναι αποσπασματικός μέσω των σχολικών βιβλίων της Φυσικής και όχι των Μαθηματικών, το αποτέλεσμα είναι οι γνώσεις των μαθητών πάνω στην διανυσματική θεωρία να είναι ελλιπείς και προβληματικές. Τα αποτελέσματα αυτής της ανακολουθίας της Φυσικής ως προς τα Μαθηματικά έχει ως συνέπεια όλα τα παραπάνω που αναφέραμε.

Για να υπάρχει μία σωστή αντιμετώπιση ως προς την διδασκαλία της διανυσματικής θεωρίας , έχουμε να προτείνουμε:

1. Να σταματήσει η μη συνεργασία και η ανακολουθία των προγραμμάτων διδασκαλίας Φυσικής και Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.
2. Να υπάρχει άμεση και συνεχή συνεργασία Μαθηματικών και Φυσικών σε κάθε σχολική μονάδα ως προς την διδασκαλία της έννοιας του διανύσματος και όχι μόνο.
3. Να παρουσιάσουμε τη Γεωμετρία με κίνηση. Το αποτέλεσμα θα είναι η εισαγωγή του διανύσματος στη διδασκαλία να φανεί στα μάτια των μαθητών όχι ως ένα αυθαίρετο μαθηματικό κατασκεύασμα, αλλά ως μία " φυσική " έννοια, της οποίας η καταγωγή υπάρχει στις φυσικές κινήσεις.
4. Να γίνει εισαγωγή του Η/Υ στην τάξη διδασκαλίας, ,(Φεσάκης Γ.,Δημητρακοπούλου Α., Καλαβάσης Φ.,2001:673-688).

Οι γενικοί διδακτικοί και μαθησιακοί στόχοι στη χρήση του λογισμικού, ως προς την έννοια του διανύσματος , είναι:

- Να δει την κίνηση στη Γεωμετρία ο μαθητής, ώστε να συμβάλει στην ανάπτυξη μιας πιο θετικής στάσης των μαθητών σε σχέση με τις Φυσικές Επιστήμες.
- Να βοηθήσει το μαθητή μέσα από τη χρήση του λογισμικού να εξοικειωθεί με την γεωμετρική εικόνα του διανύσματος, και τις ιδιότητες των διανυσμάτων.
- Να αναπτύξει ο μαθητής ικανότητες να χρησιμοποιεί τα διανύσματα για να επιλύει προβλήματα και να εξηγεί φαινόμενα με την κατάλληλη χρησιμοποίηση των βασικών εννοιών και νόμων της Φυσικής και των Μαθηματικών.

- Να συνδέσει τα διανύσματα και τις διανυσματικές φυσικές έννοιες με φαινόμενα της καθημερινής ζωής, μέσα από επιλεγμένα προβλήματα και δραστηριότητες, έτσι ώστε να αποκτήσει λειτουργική γνώση.

Κλείνοντας θα ήθελα να πω ότι ο καθένας από εμάς θα πίστευε στην δύναμη της Αναλυτικής Γεωμετρίας , αμέσως μόλις συνειδητοποιούσε πως αν θερμαίνεται από την ηλεκτρική θερμάστρα που έχει απέναντι του , το οφείλει στις κωνικές τομές.

3.ΕΚΣΥΓΧΡΟΝΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΤΟ ΣΥΓΧΡΟΝΟ ΣΧΟΛΕΙΟ

Η εναρμόνιση των Μαθηματικών και της Φυσικής στην Εκπαίδευση έχει μακρά ιστορία στην οποία καταγράφονται επιτυχίες και αποτυχίες. Προσβλέποντας στο μέλλον, είναι απαραίτητο να διαμορφώσουμε σήμερα το σχολικό μάθημα στα Μαθηματικά και στα αντίστοιχα σχολικά βιβλία έτσι, ώστε οι μαθητές να είναι προετοιμασμένοι να κατανοήσουν τις καινούργιες εξελίξεις στα εφαρμοσμένα Μαθηματικά. Οι σύγχρονες μέθοδοι στην κατασκευή Μαθηματικών εννοιών οδηγούν ουσιαστικά στο να αντιμετωπίζονται τα προβλήματα από τους πιο διαφορετικούς τομείς των εφαρμογών λογικά ορθότερα και συγχρόνως πιο απλά. Αν όμως δεν ακολουθηθούν με συνέπεια αυτές οι μέθοδοι μέχρι τέλος, τότε δυσκολεύουν την πρόσβαση στις εφαρμογές.

Ο "εκσυγχρονισμός" του μαθήματος των Μαθηματικών στο σχολείο γίνεται στην πράξη συχνά δυστυχώς χωρίς οργανωμένη επαφή με το μάθημα της Φυσικής. Ο βαθμός εναρμόνισης των δύο μαθημάτων μπορεί να τεκμηριωθεί με έρευνα στο επίπεδο των σκοπών της εκπαίδευσης στα δύο αυτά μαθήματα, στο επίπεδο των Αναλυτικών Προγραμμάτων, στο επίπεδο της διδακτικής των μαθημάτων και στο επίπεδο των σχολικών βιβλίων,(Βλάχος Γ., Καρανίκας Γ. και Κόκοτας, 1993). Τα τελευταία αποτελούν κατά την γνώμη μου το πλέον κατάλληλο υλικό για ένα σύγχρονο σχολείο, όπου οι μεταρρυθμίσεις της Μαθηματικής παιδείας θα πρέπει να είναι απόλυτα σε συγχρονισμό με τις μεταρρυθμίσεις των Φυσικών Επιστημών καθώς και των Κοινωνικών Επιστημών.

Για τον "εκσυγχρονισμό" των Μαθηματικών και των Φυσικών Επιστημών που θα συντελέσει στην απόκτηση γνώσεων , την ανάπτυξη της ερευνητικής σκέψης και της επιστημονικής προσέγγισης προβλημάτων, τη λογική σκέψη και την κριτική ερμηνεία, την εργαστηριακή άσκηση και την παρατήρηση ,

τα οποία συμβάλλουν μακροπρόθεσμα στη διαμόρφωση των στάσεων και των ενδιαφερόντων των εκπαιδευτικών και σπουδαστών, προτείνω:

Προτάσεις

- Να είναι συνεχής η έρευνα, από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, για την εναρμόνιση των Μαθηματικών και της Φυσικής, στα επίπεδα: περιεχομένου , διδακτικής πράξης , μαθησιακού αποτελέσματος και κοινωνικής παιδείας, ώστε :
    1. Να υπάρχουν κίνητρα μάθησης: από διδασκαλία και σχολικά βιβλία.
    2. Να εντοπίζονται οι μαθησιακές δυσκολίες του κάθε μαθήματος, ώστε να διερευνηθούν για την επίλυση τους, με στόχο την εναρμόνιση των μαθημάτων σε όλα τα επίπεδα και σε επίπεδο διδακτικής προσέγγισης.
    3. Να σταματήσει να υπάρχει η ελλιπής καθώς και η εσφαλμένη χρήση της " γλώσσας" των Μαθηματικών στη Φυσική. Το πρόβλημα της γλώσσας στη Φυσική και στα Μαθηματικά δεν πρέπει να αντιμετωπίζεται έξω από το γενικότερο πρόβλημα της γλωσσικής επάρκειας και δεν πρέπει να αγνοούνται η ύπαρξη του και οι ιδιαιτερότητές του.
    4. Η απόκλιση μεταξύ των σκοπών των μαθημάτων δεν πρέπει να τα "στεγανοποιεί" σε επίπεδο περιεχομένου και μαθησιακού αποτελέσματος, αλλά οι κοινοί στόχοι να τα διαπερνούν.
    5. Στα Μαθηματικά της φύσης και της ζωής να επιδιώκεται να οδηγούνται οι μαθητές να ανακαλύπτουν μόνοι τους , και να κινούνται από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο και ξανά στο συγκεκριμένο, μέσα από κατασκευή και επεξεργασία Μαθηματικών μοντέλων.
    6. Να φανεί η χρησιμότητα των Μαθηματικών και της Φυσικής , ανεξάρτητα ή σε αλληλεξάρτηση, στην καθημερινή ζωή.
- Τα ευρήματα της συνεχούς αυτής έρευνας να γνωστοποιούνται, για επεξεργασία και λήψη αποφάσεων, στους συντάκτες των αναλυτικών και ωρολόγιων προγραμμάτων, στους Σχολικούς συμβούλους ειδικότητας και στους διδάσκοντες.
- Να διερευνηθεί κατά πόσο αξιοποιούνται από τους καθηγητές των Μαθηματικών ο μεγάλος αριθμός εφαρμογών και ασκήσεων που έχουν σχέση με το φυσικό πρόβλημα.

- Τα προβλήματα και οι ασκήσεις της Φυσικής να γίνουν περισσότερο απαιτητικά σε μαθηματική μοντελοποίηση από σωστή επιλογή και κλιμάκωση της δυσκολίας τους.
- Να αξιοποιηθούν οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές στη διδασκαλία , χρησιμοποιώντας αντίστοιχα εκπαιδευτικά προγράμματα πάνω στην Φυσική και στα Μαθηματικά. Οι μαθητές που τα χρησιμοποιούν , χωρίς περιορισμούς χρόνου-χώρου, έχουν ένα εργαλείο πειραματισμού που μετατρέπει τα, από τη φύση τους, αφηρημένα Μαθηματικά αντικείμενα σε συγκεκριμένα μοντέλα. Ενώ, οι εκπαιδευτικοί διαθέτουν ένα δυναμικό εργαλείο, που χωρίς να επηρεάζει, βοηθά στην επίτευξη των στόχων της διδασκαλίας, δίνοντας τους τη δυνατότητα να λειτουργήσουν ως οργανωτές της διδασκαλίας, καθοδηγητές της διαδικασίας και ισότιμα συμμετέχοντες μαζί με τους μαθητές.
- Οι νέες τεχνολογίες θα πρέπει να οργανωθούν από πολιτεία και διδάσκοντες ώστε να προάγουν την εναρμόνιση μεταξύ των δυο μαθημάτων σε όλα τα επίπεδα και όχι να αποτελέσουν μια νέα διάσταση στο πρόβλημα.
- Η βασική εκπαίδευση των μελλοντικών Δασκάλων και Καθηγητών Φυσικής και Μαθηματικών, όπως και η μετεκπαίδευση/επιμόρφωση τους, πρέπει να διδάσκει πρώτα σε αυτούς την εναρμόνιση των δύο μαθημάτων, ώστε να μπορούν να την μεταφέρουν στις τάξεις με την βοήθεια των σχολικών βιβλίων.

5.ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1]. Βλάχος Γ., Καρανίκας Γ. και Κόκκοτας Π., (1993) : *Το Μαθηματικό περιεχόμενο της Φυσικής και τα Μαθηματικά όπως καταγράφονται στα σχολικά Βιβλία Γυμνασίου – Λυκείου. Μία κριτική θεώρηση* .10ο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, Ε.Μ.Ε, Καλαμάτα.

[2].Γαγάσης Α., (1995): *Διδακτική των Μαθηματικών . Θεωρία – Πράξη.* Θεσσαλονίκη.

[3].Δάσιος Γ., (1977): *Καλά τοποθετημένα Προβλήματα της Μαθηματικής Φυσικής*. Μαθηματική Επιθεώρηση, Τεύχος 8, σελ. 44-56.

[4].Κλαουδάτος Ν., (1966):*Σημειώσεις του Μαθήματος << Διδακτική των Μαθηματικών>>*, Ε.Κ.Π.Α.

[5].Κρητικός Γ., (2009): *Η έννοια του Επιπέδου Μοντελοποίησης με χρήση ΤΠΕ στη Διδασκαλία των Φυσικών Επιστημών*. 1ο Εκπαιδευτικό Συνέδριο " Ένταξη και χρήση των ΤΠΕ στην Εκπαιδευτική Διαδικασία", Βόλος.

[6].Κρητικός Γ., Δημητρακοπούλου Α.,(2007): *Συνεργατικές Διερευνητικές Δραστηριότητες Μοντελοποίησης με Χρήση του Λογισμικού MODELLING SPACE: Δημιουργία Αφηρημένων- Γενικευμένων Μοντέλων Κινηματικής*. Πρακτικά 4ου Πανελλήνιου Συνεδρίου των Εκπαιδευτικών για τις ΤΠΕ *" Αξιοποίηση των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στη Διδακτική Πράξη "*. Σύρος Μάιος 4-6, εκδ. Νέων τεχνολογιών, Τόμος Β, σελ. 306-316.

[7].Orfanos S. & Dimitracopoulou A., "*Technology based Modeling Activities and their Contribution to Learning Concepts and Concepts' Relation in Physics*", Proceedings of II International Conference on multimedia ICT's in Education "Advances in Technology-based Education Toward a Knowledge-based Society",

[8].Ορφανός Σ. και Δημητρακοπούλου Α. , (2003): *Φύλλα δραστηριοτήτων μοντελοποίησης στην Κινηματική υποστηριζόμενα από το εκπαιδευτικό λογισμικό Δημιουργός Μοντέλων* . Πρακτικά 2ου Πανελληνίου Συνεδρίου των Εκπαιδευτικών για τις ΤΠΕ "*Αξιοποίηση των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στη Διδακτική Πράξη*", Σύρος, Μάιος 9-11, εκδ. Νέων Τεχνολογιών, Τόμος Α, σελ. 555-567.

[9].Ορφανός Σ.,(2005): *Δραστηριότητες μοντελοποίησης για τη διδασκαλία της Φυσικής, με αξιοποίηση τεχνολογικών περιβαλλόντων μάθησης*. Διδακτορική διατριβή, Πανεπιστήμιο Αιγαίου- ΤΕΠΑΕΣ.

[10].Σωτηρόπουλος Παναγιώτης : *Τα Μαθηματικά ως γλώσσα της φύσης : Η Πλατωνική θέση και οι νεώτερες εκδοχές της*. Ινστιτούτο Πολιτιστικής και Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας.

[11].Τζανάκης Κωνσταντίνος : *Η διδακτική αξιοποίηση της Ιστορικά πολύπλευρης και στενής σχέσης Μαθηματικών και Φυσικής : Μερικά παραδείγματα για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση*. Π.Τ.Δ.Ε Πανεπιστημίου Κρήτης.

[12].Φεσάκης Γ., Δημητρακοπούλου Α, Καλαβάσης Φ.,(2001): *Δραστηριότητες Μοντελοποίησης με χρήση Η/Υ στη Β΄Θμια Εκπαίδευση : Διερεύνηση και Πειραματική Εφαρμογή σε Μαθητές Γ΄Λυκείου*. Πρακτικά Πανελλήνιου Συνέδριου με διεθνή συμμετοχή "Νέες τεχνολογίες στην Εκπαίδευση και Εξ' Αποστάσεως Εκπαίδευση". Μακράκης Β. (επιμ.), Ατραπός, σελ. 673-688.

[13].Harrison A., (2001): *How do teachers and textbook writers model scientific ideas for students;*" Research in Science Education, Netherlands: Springer, Vol. 31, No 3, pp. 401-435.

[14].Schecker H. ,(1966): *Modeling Physics : System Dynamics in Physics Education*". Creative Learning Exchange, Newsletter, Vole 2, pp. 1-8.

ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙ

Μαθηματικά και φυσικές επιστήμες στην εκπαίδευση:

Ερευνητικές διαπιστώσεις & Διδακτικές προτάσεις

Η ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ «Η ΚΟΥΡΣΑ ΓΙΑ ΤΟ 20» ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ ΣΤΟ ΝΟΜΟ ΠΕΛΛΑΣ

Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης

Π.Τ.Δ.Ε., Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εισήγηση παρουσιάζει τη διδακτική δράση στα μαθηματικά κάνοντας χρήση της δραστηριότητας, «Η κούρσα για το 20», η οποία βρίσκεται στον πυρήνα της θεωρίας των διδακτικών καταστάσεων του G. Brousseau. Εστιάζει στην περιγραφή στοιχείων των δράσεων μαθητών/τριών καθώς και της εκπαιδευτικού μιας Γ' τάξης Δημοτικού σχολείου από τον νομό Πέλλας. Στην εφαρμογή της κούρσας για το 20 γίνεται χρήση σεναρίου-φάσεων, το οποίο χωρίζεται σε 4 σκηνές, που συνδέονται με τις καταστάσεις δράσης, διατύπωσης και επικύρωσης (εξαιρείται η κατάσταση θεσμοθέτησης ή επισημοποίησης) της θεωρίας διδακτικών καταστάσεων ενώ ταυτόχρονα αναλύονται τα αποτελέσματα της δράσης της δασκάλας και των μαθητών/τριών.

Τα παιδιά ενθουσιάστηκαν, ήταν πρόθυμα και συνεργάστηκαν μεταξύ τους πολύ καλά.
Τους άρεσε πολύ, που έπαιζαν το παιχνίδι με κάθε ευκαιρία προφορικά, το έμαθαν στα αδέρφια τους, τους φίλους και τους γονείς τους.

Σχόλιο της δασκάλας

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η θεωρία των διδακτικών καταστάσεων (Brousseau, 1998; Γαγάτσης, 1991) εκφράζει και εξετάζει, τις συνθήκες γένεσης των μαθηματικών γνώσεων που διαμορφώνονται ανάμεσα σε έναν διδάσκοντα και έναν διδασκόμενο. Σε αυτή διακρίνουμε ένα κοινωνικού χαρακτήρα σχέδιο που αποσκοπεί στην εκμάθηση μιας γνώσης από το διδασκόμενο.

Η θεωρία των διδακτικών καταστάσεων αποτελεί μια λίστα συνθηκών που πρέπει να ικανοποιηθούν για να καλυτερεύσουμε τις δυνατότητες του μαθητή να ανταπεξέλθει στην επίλυση ενός προβλήματος.

Διακρίνει στη μαθηματική δραστηριότητα διάφορα στάδια διαλεκτικής αλληλεπίδρασης του υποκειμένου με το πρόβλημα και το κοινωνικό περιβάλλον (τάξη), στα οποία αντιστοιχούν διάφοροι τύποι καταστάσεων.

- Καταστάσεις δράσης, που ευνοούν την ανάπτυξη των αντιλήψεων των μαθητών εφόσον είναι σχετικές με μια ενέργεια.

- Καταστάσεις διατύπωσης, που ευνοούν την προσπάθεια για ρητή περιγραφή ή ανακοίνωση προς τους άλλους των αντιλήψεων ή των αποφάσεων του υποκειμένου.

- Καταστάσεις επικύρωσης, που απαιτούν από το μαθητή να θεμελιώσει, να αποδείξει τους ισχυρισμούς του και να εκφράσει σαφώς τις σχέσεις της διαδικασίας που χρησιμοποιεί για την επίλυση του προβλήματος.

- Καταστάσεις θεσμοθέτησης ή επισημοποίησης, που αποσκοπούν στο να δώσουν το χαρακτήρα καθιερωμένης γνώσης, δηλαδή γνώσης αποδεκτής από την πολιτιστική κοινότητα, σε ορισμένες από τις προσωπικές γνώσεις που χρησιμοποιήθηκαν κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων των μαθητών.

Η διδακτική δράση (Sensevy & al., 2000) περιλαμβάνει σημαντικές διαστάσεις (ορισμού, ρύθμισης, ανάθεσης, επισημοποίησης) οι οποίες επιτρέπουν στο(η)ν εκπαιδευτικό την εγκαθίδρυση και τη διατήρηση μιας διδακτικής σχέσης, η οποία ενώνει, με τρόπο τριαδικό, έναν καθηγητή, τους μαθητές και ένα γνωστικό αντικείμενο. Θεωρούμε ότι η δράση του/της

εκπαιδευτικού είναι θεμελιακά σχεσιακή, και περιλαμβάνει τεχνική οργάνωση και συνεργατική επικοινωνία.

Η επικοινωνία είναι παντού πυκνή στην διδακτική, και δεν υπάρχει διδακτική δράση όπου ο δημιουργός της να μην αξιολογεί με όρους επικοινωνίας. Αυτή η διαδικασία επικοινωνίας αποτελεί την συνθήκη και το γεγονός μιας άλλης διαδικασίας, την συνεργασία καθηγητή – μαθητών, η οποία είναι ιδιαίτερα σημαντική στην εκμάθηση μαθηματικών και άλλων εννοιών.

Η/ο εκπαιδευτικός οφείλει να δράσει, στον πυρήνα του διδακτικού συστήματος, για να δημιουργήσει:

1. τους τόπους του καθηγητή και του μαθητή
2. τους χρόνους διδασκαλίας και εκμάθησης
3. τα αντικείμενα των περιβαλλόντων των καταστάσεων και την οργάνωση των σχέσεων ως προς αυτά τα αντικείμενα

Η κούρσα για το 20 αποτελεί ένα παράδειγμα (Brousseau, 1998; Comiti & al. 1995; Κολέζα, 2009) το οποίο βρίσκεται στον πυρήνα των παραπάνω και αναδεικνύει τον ρόλο των τρόπων διδασκαλίας, που κάνουν ζωντανή την δραστηριότητα της εκπαιδευτικού. Τα ερωτήματα που μας απασχολούν είναι: Ποιες ήταν οι δράσεις της εκπαιδευτικού; Ποια ήταν τα αποτελέσματα των δράσεων των μαθητών/τριών;

Στο πλαίσιο της επεξεργασίας των ερωτημάτων θα περιγράψουμε τον τρόπο χειρισμού μιας δασκάλας Δημοτικού σχολείου από τον Νομό Πέλλας. Θα εξετάσουμε κάποιες από τις διδακτικές τεχνικές που παράχθηκαν από την εκπαιδευτικό, τις εκφωνήσεις της εκπαιδευτικού και των μαθητών και τους τρόπους εκτέλεσης. Εστιάζουμε δηλ. την προσοχή μας στις προσπάθειες της εκπαιδευτικού και στις παραγωγές των μαθητών/τριών.

ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Αυτό το άρθρο στηρίχθηκε στην προσπάθεια που έκανε σε διάρκεια δύο διδακτικών ωρών με την δραστηριότητα «Η κούρσα για το 20» (Brousseau, 1998) μια δασκάλα της Γ' Τάξης του Δημοτικού σχολείου της Πέλλας, η οποία είχε διδαχθεί, με την μέθοδ της προσομοίωσης, την δραστηριότητα κατά τη διάρκεια σεμιναρίου στο πλαίσιο του προγράμματος εξομοίωσης εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Η παρέμβασή της στηρίζεται σε προκατασκευασμένο σενάριο το οποίο περιλαμβάνει 4 σημαντικές φάσεις-σκηνές. Η παρέμβαση βιντεοσκοπήθηκε και στην συνέχεια έγινε καταγραφή των διαλόγων της εκπαιδευτικού και των μαθητών/τριών.

Κανόνες της δραστηριότητας

Η εκπαιδευτικός ξεκινά απευθυνόμενη προς την τάξη λέγοντας ότι «θα παίξουμε ένα παιχνίδι». Στην συνέχεια εξηγεί τους κανόνες του παιχνιδιού. Το παιχνίδι θέτει αντιμέτωπους δύο αντίπαλους οι οποίοι πρέπει να έχουν στην διάθεσή τους ένα φύλλο χαρτιού και δύο διαφορετικά χρώματα στυλό. Ο πρώτος σημειώνει στο κοινό φύλλο χαρτιού έναν από τους αριθμούς 1 ή 2, μικρότερο του 3 (για παράδειγμα λέει 2), ο δεύτερος προσθέτει σε αυτόν τον αριθμό 1 ή 2, οπότε φτιάχνει με την πρόσθεση ένα νέο αριθμό (για παράδειγμα προσθέτει 2 στο 2, και σημειώνει 4), ο επόμενος συνεχίζει προσθέτοντας 1 ή 2 στον αριθμό που έχει φτιαχτεί κ.λπ. Αυτός που θα γράψει πρώτος τον αριθμό 20 κερδίζει. Δοκιμάστε ορισμένες παρτίδες (4 παρτίδες) και προσπαθήστε να βρείτε έναν κανόνα (μια τεχνική, μια στρατηγική) ο οποίος σας επιτρέπει να κερδίζετε πάντα, για οποιαδήποτε κίνηση του αντιπάλου.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Το παιχνίδι θέτει αντιμέτωπους δύο αντίπαλους, ο πρώτος σημειώνει σε ένα κοινό φύλλο χαρτιού τον φυσικό αριθμό X_1, κατώτερο του 3, ο δεύτερος προσθέτει τον αριθμό Ψ_1, ο οποίος διαμορφώνεται προσθέτοντας 1 ή 2 στον X_1, ο επόμενος σημειώνει τον φυσικό X_2, ο οποίος διαμορφώνεται προσθέτοντας 1 ή 2 στον Ψ_1 κ.λπ. Αυτός που θα γράψει 20 κερδίζει. Η σειρά των αριθμών ώστε να κερδίσουμε σίγουρα είναι 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20. Ένας τρόπος για μοντελοποίηση του παιχνιδιού είναι ο ακόλουθος. Έστω ένας αριθμός ν τον οποίο προσπαθούμε να φθάσουμε (στο παράδειγμα είναι ν=20) και έστω π ο επόμενος του μεγαλύτερου αριθμού που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στα αθροίσματα (στην περίπτωση μας π =2+1=3). Μια κερδοφόρα στρατηγική συνίσταται για τον πρώτο παίκτη που μπορεί να ρυθμίσει τη σειρά (Xi), να σημειώσει 17. Ο άλλος παίκτης μπορεί να σημειώσει μόνον 1 ή 2 άρα δεν βρίσκεται σε θέση να σημειώσει 20. Διαμορφώνουμε ένα μοντέλο του παιχνιδιού που δίνει τη λίστα των ισοδύναμων παιχνιδιών $\nu = \pi\kappa+\rho$, δηλ. $20 = 3\kappa+2$. Αυτό δείχνει ότι η κούρσα για το 20 ισοδυναμεί με την κούρσα για το 2, και το παιχνίδι παίζεται σε κ=6 βήματα, και ο πρώτος παίκτης κερδίζει ονομάζοντας όλα τα ισοδύναμα παιχνίδια. Ο Brousseau έχει δείξει με ποιόν τρόπο οι έρευνες στην μηχανική της κούρσας για το 20 επέτρεψαν να αναδυθούν οι διδακτικές συνθήκες υπό τις οποίες εμφανίζονται τα θεωρήματα που έχουν την μορφή «το 17 κερδίζει, η κούρσα για το 20 ισοδυναμεί με την κούρσα για το 17 ή το 14 κερδίζει κ.λπ. (Sensevy & al., 2000).

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Σκηνή 1

Η δασκάλα εξηγεί του κανόνες της δραστηριότητας και ξεκινάει μια παρτίδα στον πίνακα με έναν μαθητή. Πριν τελειώσει η παρτίδα (δείχνε μόνον τα 2-3 πρώτα βήματα) δίνει την θέση της σ' έναν άλλο μαθητή, και τα δυο παιδιά τελειώνουν το παιχνίδι.

Σκηνή 2

Τα παιδιά δοκιμάζουν την δραστηριότητα σε ομάδες των δύο. Παίζουν περισσότερες από μία παρτίδες (4 παρτίδες). Οι αριθμοί που παίζονται γράφονται σ' ένα χαρτί, ο κάθε παίχτης χρησιμοποιεί την ίδια στήλη στο κοινό φύλλο χαρτιού.

Σκηνή 3

Η τάξη χωρίζεται σε δύο αντίπαλες ομάδες. Η δραστηριότητα εξελίσσεται στον πίνακα ανάμεσα σε δύο παίχτες οι οποίοι επιλέχτηκαν κάθε φορά στην τύχη από την δασκάλα. Πριν από κάθε παρτίδα δίνεται ένας χρόνος για την ανταλλαγή συμβουλών στα πλαίσια κάθε ομάδας. Οι αντίπαλες ομάδες παίζουν περισσότερες από μια παρτίδες. Οι παίχτες επιλέγονται κάθε φορά, αλλά μετά τον χρόνο της ανταλλαγής συμβουλών.

Σκηνή 4

Η δασκάλα ζητάει από τους μαθητές/τριες να εκφωνήσουν τις προτάσεις, (θεωρήματα, εικασίες) «ανακαλύψεις» που τους επέτρεψαν να κερδίσουν. Η κάθε πρόταση εξετάζεται από το σύνολο της τάξης, γίνεται αποδεκτή ως αληθής ή απορρίπτεται ως ψευδής, με χρήση επιχειρημάτων. Όλες οι ανακαλύψεις σημειώνονται στην δεξιά μεριά του πίνακα και στην αριστερή μεριά του ομαδοποιούνται μόνον οι αποδεκτές από την τάξη «ανακαλύψεις» (Comiti & al. 1995).

ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΣΚΗΝΕΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Στο πλαίσιο της σκηνής 1 η δασκάλα αρχίζει ένα παιχνίδι μ' έναν μαθητή με σκοπό να κατανοηθούν οι κανόνες του παιχνιδιού. Η δασκάλα βοηθάει με την παρουσία της τους μαθητές να αναδράσουν και εξασφαλίζει κατά την διάρκεια των σκηνών 2 και 3 τον σεβασμό των κανόνων του παιχνιδιού. Σε αυτή την σκηνή η δασκάλα δείχνει με ποιόν τρόπο θέλει να γράφουν οι μαθητές σε μια κοινή στήλη τους αριθμούς και τους διευκρινίζει ότι πρέπει

να γράφουν τους αριθμούς που προσθέτουν καθώς και το αποτέλεσμα της πρόσθεσης.

Στο πλαίσιο της σκηνής 2 οι μαθητές παίζουν ανά δύο, ο ένας ενάντια στον άλλο. Ο κάθε μαθητής βρίσκεται μπροστά σ' ένα περιβάλλον, την σειρά των αριθμών που παίχτηκαν μέχρι εκείνη την στιγμή. Απ' την στιγμή που ο αντίπαλος του έπαιξε, πρέπει να πάρει μια απόφαση και να δράσει στο περιβάλλον προτείνοντας με την σειρά του έναν αριθμό. Σκοπός είναι να κερδίσει. Στην διάρκεια κάποιων λεπτών, η παρτίδα στέφθηκε με νίκη ή χάθηκε. Η βασική διαδικασία είναι να μπορείς να εκτελείς προσθέσεις 1 ή 2 σε αριθμούς μικρότερους του 20. Με την επανάληψη των παρτίδων το παιδί αναπτύσσει στρατηγικές, δηλ. λόγους για τους οποίους επιλέγει να παίξει έναν αριθμό παρά έναν άλλο. Ο μαθητής κατασκευάζει μια αναπαράσταση της κατάστασης που την χρησιμοποιεί σαν μοντέλο για να μπορεί να παίρνει αποφάσεις. Το περιβάλλον αποτελείται σε κάθε παρτίδα από την σειρά των αριθμών οι οποίοι παίχτηκαν από τους αντιπάλους σημειωμένοι με διαφορετικό χρώμα στυλό, αλλά επίσης και από το σύνολο των παρτίδων.

Σε αυτή την σκηνή οι συνθήκες περιλαμβάνουν την ύπαρξη μιας ανεπαρκούς βασικής διαδικασίας. Ζητάμε από τους μαθητές να αναδράσουν με το περιβάλλον και να επαναλάβουν το παιχνίδι με στόχο να κατακτήσουν εκείνη τη γνώση (κανόνα, τεχνική, στρατηγική) ώστε να περάσουν απ' την βασική στρατηγική στην άριστη. Πέρασμα αποτελεί η μείωση ή/και η εξάλειψη της αβεβαιότητας του μαθητή για τις επιλογές που πρέπει να κάνει. Ο μαθητής εκφράζει τις επιλογές και τις αποφάσεις του μέσω των δράσεων του στο περιβάλλον. Ανάδραση θεωρείται η επίδραση του περιβάλλοντος στον μαθητή, η οποία γίνεται αντιληπτή από τον μαθητή ως επιβράβευση ή απόρριψη σχετική με την δράση του και του επιτρέπει να διορθώνει την δράση του, να δεχτεί ή να απορρίψει μια υπόθεση και να επιλέξει μεταξύ περισσοτέρων λύσεων. Η εν λόγω σκηνή αποτελεί μια τυπική κατάσταση δράσης.

Η σκηνή 3 αποτελείται από δύο φάσεις Α και Β. Στην φάση Α, ο μαθητής-παίχτης βρίσκεται στον πίνακα και παίζει το παιχνίδι, βρίσκεται δηλ. σε μια κατάσταση δράσης. Οι υπόλοιποι μαθητές που δεν βρίσκονται στον πίνακα συλλέγουν όλες τις πληροφορίες κοιτάζοντας τους αριθμούς που γράφουν οι δύο μαθητές στον πίνακα, αλλά δεν μπορούν ούτε να αντιδράσουν, ούτε να συμμετέχουν.

Στην φάση Β, οι μαθητές συζητούν στο πλαίσιο κάθε ομάδας. Το περιβάλλον αποτελείται από το σύνολο των παρτίδων και από την τελευταία παρτίδα, η οποία είναι σημειωμένη στον πίνακα. Για να κερδίσουν δεν αρκεί να ξέρει ένας μαθητής να παίζει, να έχει δηλ. ένα μοντέλο ασαφές αλλά πρέπει να

εξηγήσει και να πείσει επιχειρηματολογώντας τους συμπαίχτες του για τις στρατηγικές που προτείνει, πρέπει δηλ. να μοντελοποιήσει αυτές τις στρατηγικές. Η σαφής μοντελοποίηση των γνώσεων αποτελεί εμπόδιο γιατί κανένας μαθητής δεν είναι σίγουρος ότι θα επιλεγεί για να παίξει μια παρτίδα στον πίνακα. Οι μαθητές βρίσκονται σε θέσεις ασύμμετρες σε σχέση με την δράση. Το περιβάλλον είναι πιο σύνθετο. Αποτελείται και από τους συμπαίχτες, οι οποίοι είναι οι αποδέκτες των μοντελοποιήσεων, καθώς και από το παιχνίδι των δύο παιχτών. Σε μια τέτοια κατάσταση αυτό που μετράει είναι ο πληροφοριακός χαρακτήρας των προτάσεων και όχι η αξία της αλήθειας τους. Σε αυτό το πλαίσιο οι φάσεις επικύρωσης εμφανίζονται ως μέσο για την δράση.

Σε αυτή την σκηνή επιθυμούμε και προκαλούμε επικοινωνίες ανάμεσα στους μαθητές που συνεργάζονται αφού είναι μέλη της ίδιας ομάδας. Οι μαθητές βρίσκονται σε καταστάσεις ανάδρασης 1) με το περιβάλλον για δράση και 2) με τον αποδέκτη του μηνύματος. Ο μαθητής αλληλεπιδρά με το περιβάλλον δρώντας δηλ. στέλνοντας ένα μήνυμα το οποίο θα προσπαθήσει ν' αλλάξει την αβεβαιότητα του αποδέκτη και γενικά την κατάσταση του περιβάλλοντος. Σε αυτή την σκηνή οι μαθητές (εκτός εκείνων που επιλέγονται κάθε φορά στον πίνακα) μπορεί να δράσουν μόνον μέσω της επικοινωνίας. Αυτή η κατάσταση έχει τα χαρακτηριστικά μιας κατάστασης διατύπωσης.

Γενική θεώρηση στην φάση που περιγράφουμε παρακάτω είναι ότι «Κάνω μαθηματικά δεν σημαίνει μόνον δέχομαι, μαθαίνω και εκπέμπω σωστά μαθηματικά μηνύματα. Διατυπώνω ένα θεώρημα δεν σημαίνει να δώσω μια πληροφορία, αλλά αυτό που αποφαινόμαστε είναι αληθές μέσα σ' ένα σύστημα». Πιστεύουμε ότι το να κάνεις μαθηματικά είναι πρώτα απ' όλα μια κοινωνική δραστηριότητα και όχι μόνο ατομική. Το πέρασμα από την φυσική σκέψη στην χρήση μιας λογικής σκέψης όπως αυτή των μαθηματικών συλλογισμών συνοδεύεται από κατασκευές και απορρίψεις, από χρήση των διαφορετικών μέσων απόδειξης.

Στην σκηνή 4, ο μαθητής κάνει διακηρύξεις, οι οποίες εξετάζονται απ' τους συνομιλητές, που μπορούν όμως να αρνηθούν μια λογική που την θεωρούν λανθασμένη και στην συνέχεια να αποδείξουν με την σειρά τους. Ο κίνδυνος αυτής της σκηνής, όπως και της προηγούμενης (στην Β φάση) βρίσκεται στην τοποθέτηση κανόνων διαλόγου που αποτελεί μια έννοια παρά-μαθηματική.

Σε αυτή την σκηνή οι συνθήκες συνίστανται από επικοινωνίες μεταξύ μαθητών οι οποίοι προτείνουν και αντιτίθενται. Οι μαθητές βρίσκονται σε σύμμετρες θέσεις σε σχέση (α) με τα μέσα δράσης στο περιβάλλον, (β) τις πληροφορίες και (γ) τους κανόνες του διαλόγου. Οι μαθητές βρίσκονται σε ανάδραση με 1) το περιβάλλον για δράση και 2) με την άποψη του συνομιλητή. Οι μαθητές

αλληλεπιδρούν με το περιβάλλον και τα ανταλλασσόμενα μηνύματα είναι θεωρήματα και αποδείξεις. Αυτή η κατάσταση έχει τα χαρακτηριστικά μιας κατάστασης επικύρωσης (Comiti &al., 1995, 1997).

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΡΑΣΗΣ ΤΗΣ ΔΑΣΚΑΛΑΣ

Σε αυτή την ενότητα ας παρακολουθήσουμε ενδεικτικά σημεία της δράσης της εκπαιδευτικού ανά σκηνή. Στην σκηνή 1 τίθενται ερωτήσεις οι οποίες επιτρέπουν στην δασκάλα να κάνει ρητά κατανοητό ότι: «να σημειώνεται τον ενδιάμεσο αριθμό 2 ή 1 καθώς και το αποτέλεσμα κάνοντας την πρόσθεση στην ίδια στήλη». Με αυτόν τον τρόπο διευκρινίζει, τον τρόπο που η ίδια επιθυμεί να ακολουθήσουν. Με αυτόν τον τρόπο τους δίνει μια τεχνική «σημειώνεται τον ενδιάμεσο αριθμό που προστίθεται». Στην συνέχεια η εκπαιδευτικός προσθέτει ότι «αυτός ο τρόπος δεν είναι μοναδικός, αλλά θεωρώ ότι είναι ο πιο κατάλληλος διότι θα σας βοηθήσει να βλέπετε, στο τέλος της κάθε παρτίδας, κάθε φορά ποιος αριθμός προστέθηκε και τι έκανε αυτός που κέρδισε την παρτίδα αλλά και αυτός που έχασε». Τους δίνει λοιπόν κάποιες αξιολογικές οδηγίες σχετικά με τον τρόπο συμμετοχής τους, ώστε να επανέρχονται κάθε φορά στην παρατήρηση και την ανάλυση της κάθε παρτίδας με στόχο που έχει εκφράσει ρητά την κατασκευή της κερδοφόρας στρατηγικής. Με όλα τα παραπάνω ορίζει την δομή του παιχνιδιού.

Στην σκηνή 2, η εκπαιδευτικός επανέλαβε την φράση «τι πρέπει να κάνετε ώστε να κερδίζετε εσείς κάθε φορά την παρτίδα» καθώς και μετά τις πρώτες προσπάθειες των διαφορετικών ομάδων «τι συνέβη και κέρδισες τώρα εσύ;» ή σε άλλη ομάδα «τι κάνεις εσύ ώστε να έχεις κερδίσει και τις τρεις φορές;» τους παροτρύνει να αναγνωρίζουν τι κάνουν όταν το κάνουν. Με την φράση που την απευθύνει στην κάθε ομάδα χωριστά αλλά και συνολικά προς την τάξη «τι στρατηγική είναι αναγκαίο (μαθηματικά) να ακολουθήσεις ώστε να κερδίζεις πάντα;» τους επαναλαμβάνει την αρχική γενική οδηγία. Παρατηρούμε σε αυτό το σημείο με ποιόν τρόπο η εκπαιδευτικός ρυθμίζει την κατάσταση όπου η δράση της έχει ως τελικό σκοπό την παραγωγή από τους μαθητές μιας κερδοφόρας στρατηγικής, ακόμη και αν αυτή την στιγμή αυτός ο σκοπός είναι αρκετά μακρινός. Πολλές φορές η δουλειά του εκπαιδευτικού συνίσταται στο να περιγράψει και να δώσει να αναγνωρίσουν οι μαθητές τις δράσεις τους κάνοντας χρήση των τεχνικών αναγνώρισης – ανακατασκευής των κατάλληλων ενδείξεων που χαρακτηρίζουν τη δράσης τους.

Στην ίδια σκηνή η φράση προς τις ομάδες «Είναι πάντα ο ίδιος που κερδίζει; Μήπως βρίσκουμε κάποια πράγματα;». Σε αυτό το σημείο έχουμε μια

διδακτική τεχνική όπου η εκπαιδευτικός οργανώνει την αντιπαράθεση των εκφωνήσεων των μαθητών και την προσαρμογή τους (Sensevy & al., 2000). Από την επιτυχία της εξαρτάται ο μετασχηματισμός του περιβάλλοντος (Comiti & Grenier, 1997). Ένα σημαντικό μέρος της δράσης της εκπαιδευτικού συνίσταται, σε ένα κατασκευαστικό συμβόλαιο, να διαχύει τις εκφωνήσεις και να διασφαλίζει την μεταχείρισή και την συζήτησή τους στην τάξη. Στην περίπτωση της κούρσας για το 20 είμαστε μπροστά στην αναγνώριση της ανάγκης («βρίσκουμε λοιπόν πράγματα») που φαίνεται να διαμορφώνει όχι μόνο το μαθηματικό και επιστημολογικό σχέδιο της εκπαιδευτικού αλλά επίσης και ένα διδακτικό μέσο «αν βρίσκονται πράγματα» αυτό σημαίνει για τους μαθητές ότι η αναγνώρισή τους είναι ικανή να τους οδηγήσει στο να κερδίζουν. Αναγνωρίζουμε λοιπόν την θεμελιώδη λειτουργία της κατασκευής ενός διαλόγου (εκπαιδευτικός, μαθητής, τάξη).

Στην σκηνή 3, η φράση «θέλω να σας προτείνω να παίξετε ομάδα ενάντια σε ομάδα» αποτελεί ορισμό του καθήκοντος ανά ομάδα, ενώ ταυτόχρονα τους δίνει τον απαραίτητο χώρο. Με την διατύπωση «ανταλλάξτε τους κανόνες σας και προσπαθήστε να πείσετε τους συμμαθητές και συμμαθήτριες που βρίσκονται στην ομάδα σας να την δεχτούν ως την καλύτερη και αυτή που κερδίζει» αναθέτει στους μαθητές να κάνουν χρήση διαλόγου και να καταθέσουν στην ομάδα τον κανόνα τους επιχειρηματολογώντας ώστε να πείσουν τους υπόλοιπους.

Στην σκηνή 4, συχνά η εκπαιδευτικός θέτει μια ερώτηση, μεταξύ των εκφωνήσεων των μαθητών («νικάει όποιος αρχίσει πρώτος», «νικάει όποιος φτάσει πρώτος στο 17, 14 και 11», «πρέπει να γράφουμε πάντα τους μονούς αριθμούς, πρέπει να γράφουμε πάντα τους ζυγούς αριθμούς, «πρέπει να γράφουμε πάντα τον άλλο αριθμό από αυτόν που έγραψε ο αντίπαλός μας), «μπορεί όλα να είναι σωστά;». Οι εκφωνήσεις των μαθητών είναι κατάλληλες από το γεγονός ότι μπορούν να κάνουν να εξελιχθεί η τάξη στο σύνολό της, ως συλλογικά σκεφτόμενη μονάδα. Η ανακοίνωσή της «μπορούμε τώρα να συγκρίνουμε τις απόψεις που σημειώσαμε στον πίνακα» θέτει παράλληλα τις παραγωγές των μαθητών. «Ακούστε τον άλλο και μελετήστε την δήλωσή του». Η εκπαιδευτικός προσκαλεί τους μαθητές της να ακούσουν και να μελετήσουν. Διαμορφώνει συνθήκες αντιπαράθεσης και διαλόγου. Η εκπαιδευτικός ενδιαφέρεται για αυτό που κάνουν οι μαθητές, τους ακούει και αυτό όχι γιατί περιμένει μια ακριβή απάντηση σε κάτι που ρώτησε (κλασσική λειτουργία του εκπαιδευτικού στο διδακτικό συμβόλαιο) αλλά διότι είναι ικανοί να πουν και να συμμετέχουν στη διαμάχη. Η συζήτηση αυτή μπορεί να οδηγήσει πιο κοντά στην πραγματική κερδοφόρα θεωρία

Σε αυτή την σκηνή επίσης, η ερώτησή της «Λοιπόν, πιστεύεις ότι είναι αυτό;» αναζητά επιβεβαίωση και παρακινεί τον μαθητή να κατασκευάσει μια λογική επιχειρηματολογία.

Η φράση που επαναλαμβάνει συχνά «Δεν ξέρω, πρέπει να δούμε …» κάνει μια δήλωση άγνοιας η οποία ταυτόχρονα αποτελεί παρακίνηση για έρευνα.

Η ανάθεση αποτελεί διαδικασία, μέσω της οποίας η εκπαιδευτικός εκφράζει μια μορφή συμμετρίας με τον μαθητή στην διδακτική εργασία, αποτελεί είσοδο σε ερευνητική εργασία και με αυτό τον τρόπο νομιμοποιεί την άγνοια του μαθητή και τον παρακινεί να επενδύσει στην έρευνα (Sensevy & al., 2000).

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΡΑΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ

Η Γ' Τάξη του Δημοτικού Σχολείου Πέλλας είχε συνολικά 20 παιδιά, 10 αγόρια και 10 κορίτσια. Η δραστηριότητα είχε διάρκεια 2 διδακτικές ώρες με γραπτές παρτίδες

Ακολουθήθηκε το προτεινόμενο σενάριο (βλέπε σελίδα 4-5) χωρίς παρέκκλιση.

Αποτελέσματα παρτίδων

Σκηνή 1.

Όπως σημειώσαμε και στο προτεινόμενο σενάριο ξεκινάει η δασκάλα με έναν μαθητή και μετά από τα 3 πρώτα βήματα δίνει την θέση της σε μια μαθήτρια. Οι αριθμοί μπαίνουν τυχαία από τα παιδιά και η δασκάλα σημειώνει αριθμούς (μέχρι ένα σημείο) χωρίς να δείχνει την κερδοφόρα στρατηγική. Άλλωστε ο στόχος της είναι να δείξει με ποιόν τρόπο επιθυμεί να γράφουν οι μαθητές τους αριθμούς.

Σκηνή 2.

1η παρτίδα στο χαρτί. Οι αριθμοί μπαίνουν τυχαία, με γρήγορο ρυθμό και χωρίς πολύ σκέψη από όλες τις ομάδες.

2η παρτίδα στο χαρτί. Τρεις (3) στις δέκα (10) ομάδες μόλις φτάσουν στο 14 αρχίζουν να σκέφτονται, Τέσσερεις (4) στις δέκα (10) σταματούν στο 10 και σκέφτονται ενώ τρεις (3) στις δέκα (10) συνεχίζουν να εκτελούν την παρτίδα με τυχαίους αριθμούς.

3η παρτίδα στο χαρτί. Δύο (2) στις δέκα (10) ομάδες ανακαλύπτουν το 17 ως αριθμό κλειδί, πέντε (5) στις δέκα (10) σταματούν στο 16 και σκέφτονται γεγονός που δείχνει ότι είναι προς την ανακάλυψη ενώ τρεις (3) στις δέκα

(10) συνεχίζουν τυχαία. Η δασκάλα σε αυτό το σημείο θέτει τις ερωτήσεις που αναλύουμε στην προηγούμενη ενότητα, χωρίς να αποκαλύπτει την κερδοφόρα στρατηγική.

4η παρτίδα στο χαρτί. Ακόμα τρεις (3) στις δέκα (10) ανακαλύπτουν το 17 (σύνολο πέντε (5) στις δέκα (10)). Από τις προηγούμενες δύο (2) στις δέκα (10) που ανακάλυψαν το 17, ανακαλύπτουν το 14 και το 11 ως αριθμό κλειδί. Δύο (2) ομάδες στις δέκα (10) προβληματίζονται γύρω στο 15, 16, δύο (2) στις δέκα (10) σταματούν μετά το 11, 12 και σκέφτονται, μία (1) στις δέκα (10) συνεχίζει τυχαία

Σκηνή 3.

5η *παρτίδα στον πίνακα* (οι μαθητές/τριες χωρίζονται σε 2 ομάδες των 10)

Μία (1) στις δύο (2) ομάδες έχει στρατηγική, τα παιδιά ξέρουν τους αριθμούς κλειδιά αλλά ο μαθητής που εκπροσωπεί την ομάδα δεν έχει κατανοήσει καλά τι πρέπει να κάνει, γεγονός που δείχνει ότι η πρώτη επικοινωνία στο πλαίσιο της ομάδας δεν λειτούργησε ώστε να πειστούν όλα τα μέλη της για μια κερδοφόρα στρατηγική. Στο πλαίσιο των ομάδων τίθενται θεωρήματα του τύπου «Το 17 κερδίζει γιατί κοιτάξτε (δείχνοντας τις παρτίδες του και εξηγώντας)», «Το 14 κερδίζει (δείχνοντας τις παρτίδες του και εξηγώντας)», «Το 11, 14, 17 κερδίζει (δείχνοντας τις παρτίδες του και εξηγώντας)», «Βάζω πάντα το αντίθετο από αυτό που βάζει ο άλλος», «γράφω πάντα τους ζυγούς αριθμούς», «βάζω πάντα τους μονούς αριθμούς», «σκεφτόμαστε μετά από το 10», «ξεκίνα πρώτος», «αυτός που ξεκινά δεύτερος κερδίζει» κ.λπ.

6η παρτίδα στον πίνακα.

Μετά την επικοινωνία στο πλαίσιο της κάθε ομάδας δύο (2) μαθητές (1 από κάθε ομάδα τυχαία) πηγαίνουν στον πίνακα και εκτελούν την παρτίδα. 1 στις 2 κερδίζει άνετα με την αλλαγή παιδιού στον πίνακα. Η μαθήτρια που κέρδισε έγραψε τους 11, 14, 17 και 20 γεγονός που δείχνει ότι ακολούθησε κάποιες από τις ανακοινώσεις στο πλαίσιο της ομάδας της..

7η παρτίδα στον πίνακα, Δύο (2) στις δύο (2) κατανόησαν τη στρατηγική για τη νίκη, προσπαθώντας να φτάσουν τους αριθμούς 11, 14, 17.

Σκηνή 4.

Οι μαθητές/τριες καταθέτουν τις απόψεις τους οι οποίες σημειώνονται στη δεξιά μεριά του πίνακα από την εκπαιδευτικό. Τα θεωρήματα που καταθέτουν είναι:

Νικάει όποιος αρχίσει πρώτος.

Νικάει όποιος φτάσει πρώτος στο 17, 14 και 11.

Μετά το 10 πρέπει να σκεφτόμαστε καλά τι αριθμό θα προσθέσουμε.

Πρέπει να γράφουμε πάντα τους μονούς αριθμούς.

Πρέπει να γράφουμε πάντα τους ζυγούς αριθμούς.

Πρέπει να γράφουμε πάντα τον άλλο αριθμό από αυτόν που έγραψε ο αντίπαλός μας.

Οι μαθητές κατάθεσαν αυτά τα θεωρήματα, τα οποία τέθηκαν σε ανοικτό διάλογο στην τάξη και κατατέθηκαν ενδιαφέροντα επιχειρήματα που οδήγησαν όλα τα παιδιά να αποδεχθούν την σειρά των αριθμών 11, 14 και 17. Τα επιχειρήματα των μαθητών ήταν οι παρτίδες που είχαν στο χαρτί τους από την σκηνή 2 καθώς και οι παρτίδες στον πίνακα από την σκηνή 3. Ο λόγος τους είχε σημαντικά στοιχεία μαθηματικής ανάλυσης της δραστηριότητας. Ενδεικτικά σημειώνουμε «αν γράψω 17 τότε η Χριστίνα αν βάλει 1 γράφει 18 και εγώ βάζω 2 και γράφω το 20 ενώ αν γράψω 17 και η Χριστίνα γράψει 19 τότε βάζω 1 δηλ. 20», «αν γράψω 16 ο Βασίλης γράφει 1 δηλ. 17 και μετά αν βάλει 2 δηλ. 19 τότε εγώ γράφω 1 και το 20», «σε αυτή την παρτίδα (δείχνει το φύλλο χαρτιού) έγραψα 14 και ο Κώστας έβαλε 2 δηλ. έγραψε 16 εγώ έβαλα 1 δηλ. 17 …» κ.λπ. Η κατάσταση είναι θερμή, οι μαθητές/τριες θέλουν να καταθέσουν τον κανόνα τους και να επιχειρηματολογήσουν. Η δασκάλα είναι βέβαια αναγκασμένη, λόγω του χρόνου, να κλείσει την συζήτηση και την ανταλλαγή απόψεων και να δώσει αυτή την λύση του προβλήματος δηλ. την κερδοφόρα στρατηγική που είναι 2, 5, 8, 11, 14, 17 και 20 εξηγνώντας επεκτείνοντας επιχειρήματα των μαθητών και μαθητριών την μαθηματική ανάλυση και πέραν του 11 δείχνοντας αναλογικά τι γίνεται για το 8, το 5 και το 2..

ΑΝΤΙ ΕΠΙΛΟΓΟΥ

Η εργασία του εκπαιδευτικού συνίσταται στο να διαμορφώσει το πλαίσιο μιας κατάστασης. Για παράδειγμα στην περίπτωση της κούρσας για το 20 η εκπαιδευτικός λέει «θα παίξουμε ένα παιχνίδι» και προσπαθεί να διαμορφώσει-ορίσει τους κανόνες του παιχνιδιού. Καθώς οι μαθητές έχουν ενταχθεί σε ένα είδος δραστηριότητας, καθώς παίζουν το παιχνίδι που προτείνεται από την εκπαιδευτικό, αυτή ρυθμίζει τις σχέσεις, που οι μαθητές διαμορφώνουν στην κατάσταση. Αυτό που περιγράφεται με την ρύθμιση αφορά τις συμπεριφορές που παράγει η/ο εκπαιδευτικός με στόχο να οδηγήσει τον μαθητή να διαμορφώσει τις κερδοφόρες στρατηγικές, γεγονός

που θα επιτρέψει στην κοινότητα να αναπτύξει σημασίες που θα δώσουν την δυνατότητα μιας κοινής δράσης.

Η εκπαιδευτικός οφείλει να κάνει έτσι ώστε οι μαθητές να αναλάβουν την ευθύνη να «παίξουν το παιχνίδι» και να ασχοληθούν με την προτεινόμενη δραστηριότητα. Για παράδειγμα πολλές φορές οι μαθητές ζητούν από την εκπαιδευτικό να δείξει ένα μέρος της παρτίδας ζητώντας να διερευνήσουν στη συνέχεια μόνοι τους τις στρατηγικές που το παιχνίδι επιτρέπει. Το στοίχημα δεν είναι να μπορείς να παίζεις το παιχνίδι σύμφωνα με τους κανόνες αλλά να μπορείς να κερδίζεις απέναντι στους αντιπάλους. Η τάξη θεάται ως δομή ικανή να περάσει στην παραγωγή γνώσης μετά την ανάθεση των καθηκόντων από τον/την εκπαιδευτικό. Στα παραπάνω διακρίνουμε 3 είδη των διδακτικών καταστάσεων. Αυτά τα 3 είδη χαρακτηρίζονται απ' τις διαφορετικές χρήσεις της μαθηματικής γνώσης ως μέσο ελέγχου της δράσης, επικοινωνίας και απόδειξης ή επικύρωσης.

Η επισημοποίηση, στην οποία κάνουμε μια μικρή αναφορά, θεωρείται γενικά ως μια θεμελιώδης διάσταση της παραγωγικής εργασίας μιας τάξης, μιας ομάδας κ.λπ.. Η/ο εκπαιδευτικός και οι μαθητές δομούνται ως συλλογικότητα σκέψης για την παραγωγή γνώσης και επιτρέπουν ταυτόχρονα να αξιολογήσουν αυτή την παραγωγή. Προσδιορίζουν τους τρόπους εκτέλεσης, και η δομή που διαμορφώνουν αναγνωρίζει την νομιμότητά τους. Κάνοντας αυτό παράγουν ένα θεσμό που βασίζεται στην αξιολόγηση των τρόπων εκτέλεσης, των υποκειμένων (εκπαιδευτικός, μαθητές). Κατά αυτό τον τρόπο, στην κούρσα για το 20, τα διαφορετικά θεωρήματα, τα οποία διατυπώνονται μέσα στο περιβάλλον εργασίας μέσω των διαδοχικών μικρό-αξιολογήσεων, αλλάζουν το περιβάλλον ως ανταγωνιστικό σύστημα. Από τη στιγμή που γνωρίζουμε ότι το 17 είναι κερδοφόρο, η δράση δεν γίνεται πλέον με τον ίδιο τρόπο και όλα τελειώνουν οδηγώντας την τάξη στην ανάπτυξη της κερδοφόρας αριθμό-σειράς. Η κατηγορία της επισημοποίησης επιτρέπει να ομαδοποιηθούν αυτές της επικύρωσης και της διατύπωσης ως συστήματα διαδικασιών που επιτρέπουν στον καθηγητή και στους μαθητές, με διαφορετικές εντάσεις, να πουν την αλήθεια (Sensevy & al., 2000).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Brousseau, G., (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Γαγάτσης, Α., (1991). *Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών*. Εκδ. Αφοί Κυριακίδη.

Comiti, C. & Grenier, D., (1997), Régulations didactiques et changements de contrats, *Recherches en didactique des mathématiques*, 17 (3), pp. 81-102.

Comiti, C., Grenier, D., Margolinas, C., (1995), Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques. In Arsac, G., Gréa, J., Grenier, D., Tiberghien, A., *Différents types de savoirs et leur articulation* (pp. 93-127), Grenoble : La Pensée Sauvage.

Κολέζα, Ε., (2009). *Θεωρία και Πράξη στη Διδασκαλία των Μαθηματικών*. Εκδ. Τόπος.

Sensevy, G., Mercier, A., Schubauer-Leoni, M-L., (2000). Vers un modèle de l'action didactique du Professeur a propos de la course à 20, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 20, no 3, pp. 263-304.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Κωνσταντίνος Ζαχάρος, Βασίλης Κόμης, Μαρία Δοκιμάκη, Δημήτρης Νικολός

Τμήμα Επιστημών της Εκπαίδευσης και της Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία
Πανεπιστήμιο Πατρών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Είναι εφικτή η ανάπτυξη δραστηριοτήτων μέτρησης του μήκους στην προσχολική εκπαίδευση; Αυτό είναι το βασικό ερευνητικό ερώτημα που θα μας απασχολήσει στην παρούσα έρευνα. Αναλυτικότερα, σκοπός της έρευνάς μας είναι, μέσω κατάλληλα σχεδιασμένων δραστηριοτήτων, να διευκολυνθούν παιδιά προσχολικής εκπαίδευσης στην αποσταθεροποίηση των διαισθητικών κανόνων που χρησιμοποιούν όταν κάνουν συγκρίσεις μηκών, εισάγοντας πρακτικές μέτρησης του μήκους.

Ο σχεδιασμός της έρευνας βασίζεται σε μια πειραματική μέθοδο με τρεις φάσεις: Στην πρώτη φάση (προ-τεστ) οι μαθητές αξιολογούνται σε έργα σχετικά με τη σύγκριση και μέτρηση του μήκους. Στη δεύτερη φάση οι μαθητές συμμετέχουν σε διδασκαλία που περιέχει την ανάπτυξη πρακτικών μέτρησης του μήκους. Είκοσι τέσσερεις μαθητές προσχολικής εκπαίδευσης μοιράστηκαν σε δύο πειραματικές ομάδες και κάθε ομάδα σε δυάδες μαθητών, που συμμετείχαν σε δύο διαφορετικές πειραματικές διδασκαλίες: Η μια διδασκαλία έγινε σε «συμβατικό» περιβάλλον, ενώ η άλλη με τη χρήση computers. Τέλος, η τρίτη φάση ανάπτυξης της πειραματικής μας μεθόδου (μετα-τέστ) μας δίνει τη δυνατότητα να αξιολογήσουμε την επίδραση της διδασκαλίας στην ανάπτυξη της ικανότητας των νηπίων της έρευνάς μας στη μέτρηση του μήκους.

Η αξιολόγηση των ευρημάτων της έρευνας, έδειξε τη συνεισφορά της διδασκαλίας και στις δύο πειραματικές ομάδες μαθητών. Επιπλέον, αναδείχτηκε η δυνατότητα των μαθητών της προσχολικής εκπαίδευσης να χειρίζονται επιτυχώς προβλήματα μέτρησης του μήκους.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το αναλυτικό πρόγραμμα στην ελληνική Προσχολική Εκπαίδευση προτείνει την ανάπτυξη διδακτικών πρακτικών που ενισχύουν την επιστημονική σκέψη των μικρών μαθητών, μέσω διαδικασιών ελέγχου και επαλήθευσης υποθέσεων, επεξεργασίας και παρουσίασης δεδομένων, επιλογής ή κατασκευής από τα ίδια τα παιδιά κατάλληλων εργαλείων για την επίλυση προβλημάτων, διατύπωσης ερωτημάτων με σκοπό την ενίσχυση του ενδιαφέροντος των παιδιών για επιστημονικά θέματα κ.α. Στους στόχους του αναλυτικού προγράμματος συμπεριλαμβάνεται επίσης, η εξοικείωση των μαθητών με διαδικασίες μέτρησης γεωμετρικών μεγεθών, όπως είναι η μέτρηση του μήκους και η ανάπτυξη της ικανότητάς τους να εκτιμούν μήκη χρησιμοποιώντας κατά προτίμηση μη συμβατικές μονάδες μέτρησης.

Παρά το γεγονός ότι οι διαδικασίες μέτρησης σε ένα τελικό στάδιο πρόσκτησής τους φαντάζουν εύκολες, για τους μικρούς μαθητές είναι μια σύνθετη νοητική διεργασία. Μια επιτυχής μέτρηση προϋποθέτει την ικανότητα χρήσης μεταβατικών συλλογισμών, την αντιστοίχηση αριθμών με συνεχή μεγέθη, όπως είναι το μήκος και την εξοικείωση στη χρήση της μονάδας μέτρησης (Clements, & Stephan, 2004, Clements, & Samara, 2009, Piaget, κ.ά., 1960).

Οι διαδικασίες μέτρησης γεωμετρικών μεγεθών αποκτούν νόημα για τα παιδιά μέσω της ανάδειξης των ιδιαίτερων εννοιολογικών χαρακτηριστικών που συνθέτουν κάθε μια περίπτωση μέτρησης. Αφορμές για ενασχόληση με τη μέτρηση του μήκους αντλούνται από το φυσικό ή ανθρωπογενές περιβάλλον. Στην κατεύθυνση αυτή ο ρόλος κατάλληλα σχεδιασμένων δραστηριοτήτων μπορεί να είναι σημαντικός για την ενεργοποίηση ψυχολογικών και παιδαγωγικών παραμέτρων που θα υποκινούν το ενδιαφέρον του παιδιού για την ενασχόλησή του με επιστημονικές έννοιες, όπως οι μετρήσεις μεγεθών. Σε ένα τέτοιο πλαίσιο διδασκαλίας, το παιδί οδηγείται στην κατάκτηση ενός λειτουργικού ορισμού των επιστημονικών εννοιών και στην εξοικείωσή του με άγνωστες έννοιες και νοήματα (Davydov, 1999, Leontev, 1978, Van Oers, 1996, Vygotsky, 1978).

ΜΟΝΆΔΕΣ ΚΑΙ ΕΡΓΑΛΕΊΑ ΜΈΤΡΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΉΚΟΥΣ

Η διαδικασία μέτρησης μπορεί να πάρει διάφορες μορφές, ενώ ο βαθμός δυσκολίας κάθε φορά ποικίλει. Σε μια πρώτη, εισαγωγική μορφή, απαιτούνται άμεσες συγκρίσεις των μετρούμενων μεγεθών. Οι συγκρίσεις αυτές μπορεί να γίνουν είτε με την τοποθέτηση του ενός μεγέθους δίπλα στο άλλο και την αντιστοίχηση των άκρων τους, είτε με την επικάλυψη του ενός με το άλλο, είτε τέλος, με αισθητηριακούς, μέσω της όρασης, τρόπους. Στην

τελευταία περίπτωση μια επιτυχής σύγκριση, σύμφωνα με τον J. Piaget, προϋποθέτει την οικοδόμηση της διατήρησης (conservation) του μήκους. Η έννοια της διατήρησης του μήκους, όπως περιγράφεται στη θεωρία του Piaget και των συνεργατών του (Piaget, et al. 1960), δηλώνει την ικανότητα νοητικής αποδέσμευσης του παιδιού από τη συσχέτιση του μήκους ενός αντικειμένου, με τις θέσεις που αυτό καταλαμβάνει στο χώρο.

Σε μια δεύτερη, συνθετότερη περίπτωση μέτρησης, απαιτούνται νοητικές λειτουργίες που βασίζονται σε μεταβατικούς συλλογισμούς. Στην περίπτωση αυτή οι διαδικασίες μέτρησης είναι έμμεσες με τη μεσολάβηση κατάλληλων μονάδων ή εργαλείων μέτρησης.

Οι έμμεσες διαδικασίες σύγκρισης και οι μετρήσεις μεγεθών, που θα αποτελέσουν και το αντικείμενο της εργασίας αυτής, προϋποθέτουν την εισαγωγή ενός κοινού διαμεσολαβητή, όπως στην περίπτωση του χάρακα στη σύγκριση δύο μηκών (Boulton-Lewis, κ.ά., 1996, Barrett, κ.ά., 2003, Nunes, κ.ά., 1993). Οι έμμεσες συγκρίσεις βασίζονται σε μεταβατικούς συλλογισμούς που γίνονται με το συνδυασμό δύο επιμέρους συγκρίσεων. Ας δούμε μια σχηματική απλή μορφή έμμεσης σύγκρισης στην περίπτωση που συγκρίνονται οι ποσότητες Α και Γ. Εδώ εισάγεται ένα εργαλείο μέτρησης Μ, που διαμεσολαβεί στη σύγκριση. *Πρώτο βήμα σύγκρισης*: Α=Μ. *Δεύτερο βήμα*: Μ=Γ. Ο μεταβατικός συλλογισμός μας οδηγεί στο συμπέρασμα: Α=Γ. Έρευνες σχετικά με την οικειοποίηση μεταβατικών συλλογισμών, όπως οι προηγούμενοι, δείχνουν ότι παιδιά 5 και 6 ετών γενικά ανταποκρίνονται με μεγάλο βαθμό επιτυχίας (Nunes & Bryant, 1996).

Ένα επόμενο σημαντικό βήμα για την έμμεση μέτρηση είναι η εισαγωγή της μονάδας μέτρησης. Η πρόσκτηση της μονάδας μέτρησης προσδίδει τεράστιες δυνατότητες στην ανάπτυξη της ικανότητας μέτρησης (Nunes & Bryant, 1996). Ενώ οι μεταβατικοί συλλογισμοί είναι μια αναγκαία προϋπόθεση για μια επιτυχή μέτρηση, με τη χρήση της μονάδας μέτρησης μπορούμε να έχουμε ποσοτική αποτύπωση του μετρούμενου μεγέθους (Stephan, κ.ά., 2001).

Οι πρακτικές μέτρησης στην προσχολική και πρώτη σχολική βαθμίδα θεωρούνται αποτελεσματικές όταν οι μονάδες μέτρησης είναι αντίστοιχες με τα μεγέθη που μετρούν (Nunes, κ.ά., 1993, Zacharos, 2006). Για παράδειγμα, στη μέτρηση του μήκους η μονάδα μέτρησης είναι μονοδιάστατο μέγεθος, στη μέτρηση του εμβαδού ενδείκνυνται δισδιάστατες μονάδες, όπως τετράγωνα, ορθογώνια κ.λπ., ενώ για τη χωρητικότητα προκρίνονται μονάδες που έχουν ιδιότητες αντίστοιχες με αυτές των τρισδιάστατων αντικειμένων.

Το πλαίσιο εντός του οποίου αναπτύσσεται μια δραστηριότητα αποτελεί έναν ουσιώδη παράγοντα για διασφάλιση της συμμετοχής των παιδιών και την

επιτυχή έκβασή της. Σε ένα τέτοιο πλαίσιο διδασκαλίας, το παιδί οδηγείται στην κατάκτηση ενός λειτουργικού ορισμού των επιστημονικών εννοιών και στην εξοικείωσή του με άγνωστες έννοιες και νοήματα (Davydov, 1999, Engestrom, 1999, Leontev, 1978, Van Oers, 1996, Vygotsky, 1978).

Σύμφωνα με τον V. Davydov (1999) *η δραστηριότητα* (activity) είναι ένας ειδικός τύπος έκφρασης της ανθρώπινης κοινωνικής συμπεριφοράς με σκοπό την εμπρόθετη αλλαγή της κοινωνικής και φυσικής πραγματικότητας (σελ. 39). Η δραστηριότητα στη θεμελιώδη της μορφή έχει τα χαρακτηριστικά της πρακτικής και αισθητηριακής δραστηριότητας με την οποία οι άνθρωποι έρχονται σε επαφή με τα αντικείμενα του κόσμου που τους περιβάλλει, σε αλληλεπίδραση με τα οποία συγκροτούν τη σκέψη τους (Leontiev, 1978). Η θεωρία της δραστηριότητας (activity theory) υπογραμμίζει το ρόλο του κοινωνικού πλαισίου εντός του οποίου αυτή αναπτύσσεται και δίνει ιδιαίτερη έμφαση στη συνεισφορά της κοινωνικής αλληλεπίδρασης στην ανάπτυξη της νοημοσύνης, καθώς και στην οικοδόμηση της επιστημονικής γνώσης (Leontiev, 1978, Louria, 1976, Vygotsky, 1978).

Ο Vygotsky (1978) ισχυρίζεται ότι η ανάπτυξη της ατομικής συνείδησης προϋποθέτει την ανάπτυξη της ανθρώπινης δραστηριότητας σε ένα πλαίσιο κοινωνικών ανταλλαγών, όπου το υποκείμενο οικειοποιείται το συσσωρευμένο πνευματικό πλούτο της κοινωνίας. Υπογραμμίζει ιδιαίτερα το ρόλο που διαδραματίζει το «εργαλείο» (tool) στην ανάπτυξη της ανθρώπινης δραστηριότητας καθώς έχει την ιδιότητα να «απορροφά» την ανθρώπινη εμπειρία και επίσης, διαμεσολαβεί τόσο μεταξύ της δραστηριότητας και των πραγμάτων, όσο και μεταξύ της δραστηριότητας και των άλλων ανθρώπων. Ειδικότερα στην περίπτωση συγκρότησης των επιστημονικών εννοιών, ενώ αρχικά στο παιδί η δράση επικρατεί της έννοιας, στη συνέχεια αυτή η δομή αντιστρέφεται: η έννοια κυριαρχεί της δράσης και η δράση υποτάσσεται στο νόημα που εμπεριέχει κάθε έννοια.

Ο προσανατολισμός των μαθητών στα θέματα που ο εκπαιδευτικός επιθυμεί, δεν οδηγείται αυτόματα με την επίδραση του εκπαιδευτικού υλικού. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού υλικού μέσα στη διαδικασία της διδασκαλίας προσδιορίζεται από τη συγκεκριμένη δραστηριότητα, που προσδίδει στο εν λόγω υλικό συγκεκριμένο περιεχόμενο. Η ενασχόληση με διαδικασίες μέτρησης γεωμετρικών μεγεθών επιδιώκει να οδηγήσει σε μορφές μαθηματικοποίησης που σχετίζονται με τη μέτρηση, την επινόηση μεθόδων μέτρησης, καθώς και την απόκτηση των επιθυμητών γενικεύσεων. Η ψυχολογική λειτουργία του εκπαιδευτικού υλικού συνίσταται στο ρόλο του στηρίγματος και του υποστρώματος των εσωτερικών νοητικών πράξεων του παιδιού (Leontiev, 1978).

Σκοπός της έρευνας που στοιχεία της θα παρουσιαστούν εδώ είναι

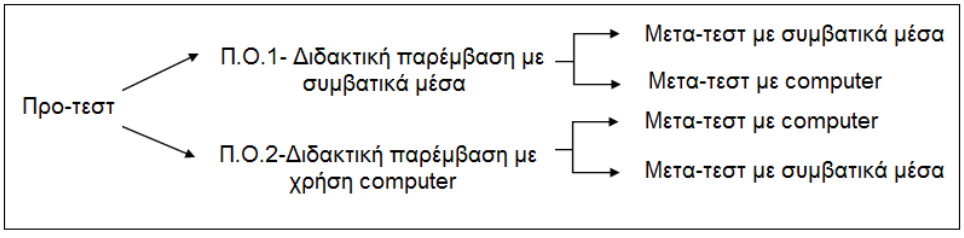
- να διερευνήσει τη δυνατότητα διδασκαλίας της μέτρησης του μήκους σε μαθητές προσχολικής εκπαίδευσης,
- να εισάγει πρακτικές μέτρησης του μήκους, που διευκολύνουν στην αποσταθεροποίηση λανθασμένων αισθητηριακών, μέσω της όρασης, προσεγγίσεων που χρησιμοποιούνται από τους μικρούς μαθητές στις συγκρίσεις μηκών.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Ο σχεδιασμός

Στο σχεδιασμό της έρευνας χρησιμοποιήθηκε μια πειραματική μέθοδο με τρία στάδια: το προ-τεστ, τη διδασκαλία και το μετά-τεστ (Cohen, κ.ά., 2000). Συγκεκριμένα, σημειώθηκαν οι επιδόσεις και οι ακολουθούμενες στρατηγικές δύο πειραματικών ομάδων μαθητών (E.G.1 και E.G.2), που συμμετείχαν σε διδασκαλία με δραστηριότητες σχετικές με τη μέτρηση του μήκους.

Αρχικά αξιολογήθηκαν οι ικανότητες των μαθητών σε έργα μέτρησης του μήκους. Στη συνέχεια υποβλήθηκαν σε ένα πειραματικό πρόγραμμα διδασκαλίας, με δύο διαφορετικές καταστάσεις διδασκαλίας: Στη μία κατάσταση οι συμμετέχοντες μαθητές, που αποτελούν την πρώτη πειραματική ομάδα (Π.Ο.1), συμμετέχουν σε διδασκαλία σε συμβατικό περιβάλλον («συμβατικό» θεωρείται το περιβάλλον όπου δεν χρησιμοποιούνται computers). Στη δεύτερη κατάσταση οι μαθητές συγκροτούν τη δεύτερη πειραματική ομάδα (Π.Ο.2) και η διδασκαλία γίνεται με τη χρήση computers. Τέλος, ο πειραματικός σχεδιασμός ολοκληρώνεται με το μετα-τεστ που αξιολογεί τις γνωστικές διαφορές των μαθητών που συμμετείχαν στη διδασκαλία. Μια διαγραμματική παρουσίαση του ερευνητικού σχεδίου παρουσιάζεται στο σχήμα 1.



Σχήμα 1: Ο πειραματικός σχεδιασμός

Οι φάσεις αξιολόγησης του γνωστικού επιπέδου των παιδιών, υλοποιήθηκαν ως ατομικές συνεδρίες (κλινική μέθοδος) μεταξύ του παιδιού και του πειραματιστή. Οι διδακτικές παρεμβάσεις πραγματοποιήθηκαν με ομάδες των δύο παιδιών, που δημιουργήθηκαν μετά την διαδικασία του προ-τεστ. Η επιλογή της ομάδας δύο ατόμων έγινε για να καταγραφούν οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των συμμετεχόντων. Επιπλέον, ο μικρός αριθμός της ομάδας δίνει τη δυνατότητα σε όλα τα παιδιά να χειριστούν το υλικό και τα εργαλεία μέτρησης, διασφαλίζει την ομοιογένεια στις συνθήκες αλληλεπίδρασης των παιδιών με το υλικό και τον ερευνητή και δίνει τη δυνατότητα στον διδάσκοντα-ερευνητή να παρακολουθεί τη διαδικασία.

Κάθε παιδί συμμετείχε συνολικά σε τέσσερις συνεδρίες με τον πειραματιστή. Στην πρώτη συνάντηση υλοποιήθηκε το προ-τεστ, στη δεύτερη έχουμε τη φάση της διδακτικής παρέμβασης, στη τρίτη υλοποιήθηκε το μετά-τεστ με τη χρήση της ίδιας μεθόδου με αυτήν της διδασκαλίας και στην τέταρτη συνάντηση πραγματοποιήθηκε το μετά-τεστ με την αντίθετη μέθοδο απ' αυτή που είχε χρησιμοποιηθεί στη τρίτη συνάντηση. Δύο μέρες μετά την υλοποίηση του προ-τεστ, πραγματοποιήθηκε η φάση της διδασκαλίας και μετά από μία βδομάδα από τη φάση της διδασκαλίας πραγματοποιήθηκαν οι δύο φάσεις του μετά-τεστ με διαφορά δύο ημερών μεταξύ τους.

Η συλλογή των δεδομένων έγινε με τη βοήθεια βιντεοσκόπησης και των τριών φάσεων. Ειδικότερα στη περίπτωση της διδακτικής παρέμβασης και του μετά-τεστ με τη χρήση Η/Υ χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα Camtasia που παρέχει τη δυνατότητα καταγραφής των κινήσεων που γίνεται στο υπολογιστικό περιβάλλον και μέσω της κάμερας του υπολογιστή, των αντιδράσεων των παιδιών κατά την εκτέλεση των έργων. Παράλληλα, χρησιμοποιήθηκαν ειδικά σχεδιασμένα πρωτόκολλα, όπου σημειώθηκαν οι επιλογές και οι απαντήσεις των παιδιών κατά τη διάρκεια όλων των φάσεων της έρευνας. Τα πρωτόκολλα σχεδιάστηκαν έτσι ώστε να ακολουθούν βήμα-βήμα τις προσχεδιασμένες οδηγίες και ερωτήσεις. Τα πρωτόκολλα συμπληρώθηκαν με την ανάλυση του βιντεοσκοπημένου υλικού.

Το δείγμα

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε μήνα Μάιο ώστε τα νήπια να έχουν εξοικειωθεί πλήρως με το περιβάλλον του σχολείου.

Στις πειραματικές ομάδες που έλαβαν μέρος στην έρευνα, συμμετείχαν 24 νήπια, με μέσο όρο ηλικίας 5 ετών και 8 μηνών περίπου, που προέρχονταν από δύο ολοήμερα τμήματα ενός δημόσιου νηπιαγωγείου επαρχιακής πόλης. Οι μαθητές του δείγματος μετά το προ-τεστ μοιράστηκαν με κριτήριο το επίπεδο επίδοσης, ώστε να είναι όσο το δυνατόν ομοιογενείς, σε δύο ισάριθμες πειραματικές ομάδες, δημιουργώντας δώδεκα δυάδες.

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε κατά στη διάρκεια των μαθημάτων σε ιδιαίτερο χώρο του Νηπιαγωγείου, ώστε να αποφευχθεί η απόσπαση της προσοχής των υποκειμένων της έρευνας από εξωτερικούς παράγοντες.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ. ΤΑ ΕΡΓΑ

Στην παρουσίασή μας εδώ θα περιοριστούμε σε έργα της διδακτικής παρέμβασης και ο σχολιασμός που θα ακολουθήσει θα αφορά στα έργα αυτά.

Σε κάθε μια από τις δύο πειραματικές ομάδες εφαρμόστηκε ένα πρόγραμμα διδασκαλίας που περιλάμβανε ίδια έργα για κάθε πειραματική ομάδα εκτός από τις διαφοροποιήσεις οι οποίες έχουν σχέση με το περιβάλλον διδασκαλίας (συμβατικό ή computer).

Τα έργα που θα παρουσιαστούν εδώ διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες:

Πρώτη κατηγορία έργων: Εδώ ζητείται η μέτρηση ευθυγράμμων διαδρομών. Στο πρώτο έργο (σχ. 2a), οι αρχές και τα πέρατα της διαδρομής είναι διαφορετικά στα δύο μήκη, ενώ η μια διαδρομή είναι χωρισμένη σε ίσα διαστήματα.

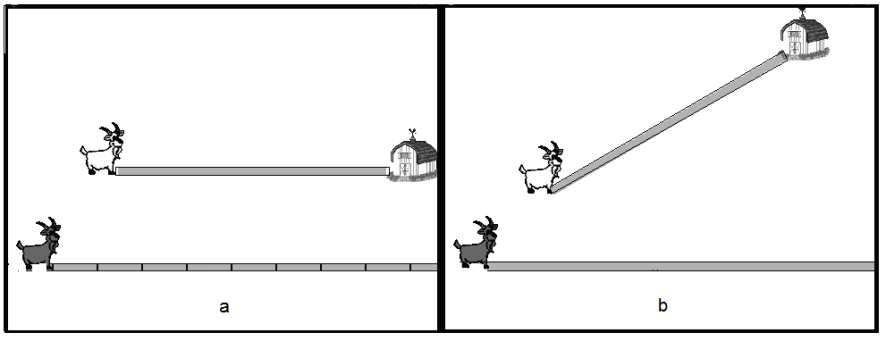
Σκοπός του συγκεκριμένου έργου είναι η αποσταθεροποίηση των λανθασμένων αντιλήψεων των παιδιών που βασίζονται σε αισθητηριακές, μέσω της όρασης, προσεγγίσεων και η εισαγωγή σε πρακτικές μέτρησης.

Σύμφωνα με το σενάριο, το γκρι κατσικάκι της δεύτερης διαδρομής πρέπει να περπατήσει ακριβώς όσο και το άσπρο και εκεί να τοποθετηθεί το σπίτι του (το ίδιο προβλέπει και το δεύτερο έργο-σχ. 2b).

Ο χωρισμός της δεύτερης διαδρομής σε ίσα διαστήματα έγινε με πρόθεση να καθοδηγήσει τα παιδιά σε πρακτικές μέτρησης. Στις περιπτώσεις που τα παιδιά δε δίνουν απαντήσεις βασισμένες στη μέτρηση, προτρέπονται να χρησιμοποιήσουν ισομήκεις ράβδους-μονάδες που τους δίνονται. Στην περίπτωση των συμβατικών έργων οι μονάδες είναι επιμήκεις ταινίες, ενώ στην περίπτωση χρήσης υπολογιστή, είναι επιμήκεις ράβδοι που μπορεί να «συρθούν» με τη χρήση του ποντικιού.

Όταν ολοκληρωθεί η διαδικασία της μέτρησης και τοποθετηθεί το σπιτάκι του γκρι κατσικιού στο σημείο που επιλέγει το παιδί, ρωτάμε: «Αυτοί οι δρόμοι είναι το ίδιο μεγάλοι; Τα δυο ζώα θα περπατήσουν το ίδιο ή κάποιο θα περπατήσει περισσότερο για να πάει σπίτι του;». Αν υπάρξει αποδοχή της ισότητας ζητείται αιτιολόγηση της απάντησης: «Πως ξέρουμε ότι οι δρόμοι είναι το ίδιο μεγάλοι;».

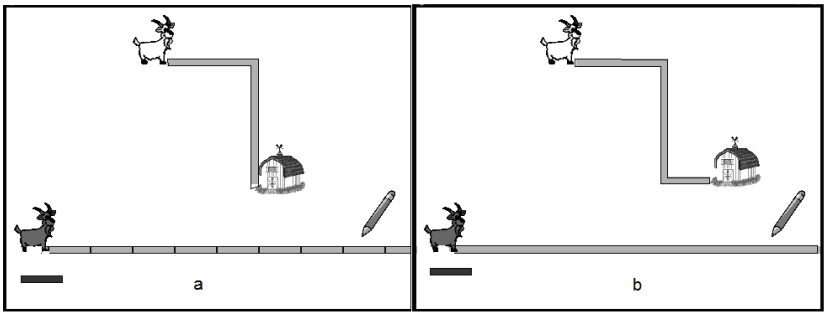
Στο δεύτερο έργο (σχ. 2b) καμία διαδρομή δεν είναι χωρισμένη, ώστε οι μαθητές να αναγκαστούν να εισάγουν διαδικασίες μέτρησης. Επιπλέον οι διαδρομές έχουν διαφορετικές διευθύνσεις. Τα συγκεκριμένα έργα είναι εισαγωγικά σε διαδικασίες μέτρησης του μήκους και η χρήση ενός μέτρου μέτρησης διευκολύνεται από το ευθύγραμμο σχήμα των διαδρομών, καθώς και τον επαρκή αριθμό μονάδων που δίνονται για να καλυφτούν οι αποστάσεις.



Σχήμα 2. Τα έργα της πρώτης κατηγορίας προβλημάτων.

Δεύτερη κατηγορία έργων. Στη δεύτερη κατηγορία, οι διαδρομές είναι τεθλασμένες γραμμές (σχ. 3a και 3b). Τα δύο έργα της κατηγορίας αυτής διαφέρουν από τα έργα της πρώτης κατηγορίας σε δύο σημεία: Αρχικά στη σύγκριση μιας ευθύγραμμης με μια τεθλασμένη γραμμή που έχουν ίσα μήκη και δεύτερον στον τρόπο χρήσης του εργαλείου μέτρησης.

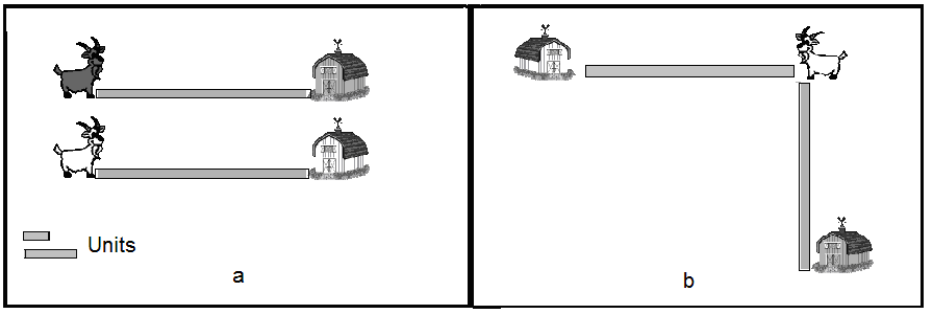
Εδώ δίνεται μόνο μία μονάδα μέτρησης και ένα μολύβι και συνεπώς η μέτρηση μπορεί να γίνει μόνο με την επαναλαμβανόμενη χρήση της μονάδας. Και στην περίπτωση των έργων αυτών στις δεύτερες διαδρομές πρέπει να τοποθετηθούν τα σπίτια έτσι ώστε τα γκρι κατσικάκια να διανύσουν ίσες διαδρομές με τα λευκά.



Σχήμα 3: Τα έργα της δεύτερης κατηγορίας προβλημάτων.

Τρίτη κατηγορία έργων: Σ' αυτή την περίπτωση οι διαδρομές μετρώνται με διαφορετικές μονάδες μήκους (η μια είναι διπλάσια της άλλης). Στο πρώτο έργο της κατηγορίας αυτής (σχ. 4a) οι μαθητές συγκρίνουν ίσες διαδρομές χρησιμοποιώντας όμως διαφορετικές μονάδες μέτρησης σε κάθε διαδρομή. Το δεύτερο έργο (σχ. 4b) είναι παρόμοιο με το πρώτο, όμως εδώ οι διαδρομές έχουν διαφορετικό προσανατολισμό.

Με το συγκεκριμένο σχεδιασμό των έργων θέλουμε τα παιδιά να κατανοήσουν ότι διαφορετικού μήκους εργαλεία μέτρησης δίνουν διαφορετικά αριθμητικά αποτελέσματα.



Σχήμα 4: Τα έργα της τρίτης κατηγορίας προβλημάτων.

Υλικά

Στα έργα στο συμβατικό περιβάλλον: Δόθηκαν μακέτες με δυο ομοιώματα ζώων (άσπρο και γκρι κατσικάκι), γκρι χάρτινες λωρίδες που παριστάνουν τους δρόμους που πρέπει να διανύσουν τα ζώα και ομοιώματα σπιτιών που είναι οι κατοικίες τους. Τέλος, δόθηκαν λωρίδες δύο διαφορετικών μεγεθών (με αναλογία 1:2) για να χρησιμοποιηθούν ως

μονάδες μέτρησης. Οι μετρήσεις των διαδρομών δίνουν σε όλες τις περιπτώσεις ακεραίους αριθμούς.

Στα έργα με τη χρήση computer: Χρησιμοποιήθηκε το εκπαιδευτικό λογισμικό Scratch, με ειδικά διαμορφωμένο πλαίσιο εργασίας για τις ανάγκες της διδασκαλίας. Το περιβάλλον του υπολογιστή είναι παρόμοιο μ' αυτό που υπάρχει στα συμβατικά έργα. Στα έργα της δεύτερης κατηγορίας ως εργαλείο μέτρησης δίνεται μία μόνο ράβδος-μέτρο και ένα μολύβι που αφήνει το ίχνος του στις επαναλαμβανόμενες χρήσεις της μονάδας. Σε όλα τα υπόλοιπα έργα υπάρχει επαρκής αριθμός ράβδων για τη μέτρηση των διαδρομών. Για να χρησιμοποιηθεί η μονάδα μέτρησης τα παιδιά πρέπει να κάνουν κλικ με το ποντίκι στο αντίστοιχο εικονίδιο και στη συνέχεια κρατώντας πατημένο το αριστερό κουμπί στο ποντίκι να σύρουν τη ράβδο-μονάδα στο σημείο της διαδρομής που θέλουν. Με αυτό τον τρόπο τοποθετούν όλες τις ράβδους μέχρι να καλύψουν τη διαδρομή.

Τα παιδιά εξοικειώθηκαν στη χρήση του υπολογιστή και ειδικότερα στη χρήση του ποντικιού, σε ένα πρόγραμμα που περιλάμβανε δύο δεκαπεντάλεπτες συναντήσεις με δραστηριότητες ζωγραφικής. Από το σύνολο των παιδιών μόνο πέντε είχαν προηγούμενη εμπειρία στη χρήση υπολογιστή από το σπίτι τους. Μας ενδιαφέρει τα παιδιά να είναι ικανά να επιλέγουν αντικείμενο στην οθόνη και με αριστερό κλικ επάνω του να το σύρουν. Στην περίπτωση επιλογής της μονάδας μέτρησης, να μπορούν να σύρουν τη μονάδα πάνω στη διαδρομή, όσες φορές αυτό είναι αναγκαίο.

Η περιγραφή των έργων, οι οδηγίες και οι διευκρινίσεις είναι ανάλογες με αυτές που δίνονται στην πρώτη διδακτική παρέμβαση.

Η διδασκαλία κάθε δυάδας μαθητών είχε διάρκεια 50 περίπου λεπτών.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στην ανάλυση των δεδομένων που θα παρουσιαστούν εδώ περιοριζόμαστε σε ευρήματα που προέκυψαν από τη διδασκαλία. Αναλυτικότερα, θα μας απασχολήσει η ικανότητα των μαθητών να ανταποκριθούν στα έργα μέτρησης που τους τέθηκαν, οι ακολουθούμενες στρατηγικές στη σύγκριση μηκών, καθώς και η βελτίωση των πρακτικών μέτρησης στη διάρκεια της διδασκαλίας. Επίσης θα παρακολουθήσουμε μορφές αλληλεπίδρασης των νηπίων μεταξύ τους και των νηπίων με την εκπαιδευτικό.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΑΠΟ ΤΙΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΙΣ

Πρώτη πειραματική ομάδα (Σε συμβατικό περιβάλλον)

Πρώτη κατηγορία έργων: Στο πρώτο έργο της κατηγορίας αυτής (σχ. 2a) παρατηρούμε ότι τα περισσότερα ζεύγη μαθητών είτε δεν πρότειναν λύσεις για την επίλυση του έργου, είτε οι προτάσεις τους ήταν λανθασμένες, όπως η τοποθέτηση του σπιτιού στο τέλος της διαδρομής ή η τοποθέτησή του στον κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το σπίτι της πρώτης διαδρομής. Μόνο μια ομάδα επιλέγει τη διαδικασία της μέτρησης, ενώ οι υπόλοιπες, μετά από παρότρυνση της ερευνήτριας. Ο μαθητής μιας ομάδας εκφράζει τη δυσπιστία του για την ορθότητα της λύσης που προτείνεται από την ερευνήτρια λόγω της διαφορετικής τοποθέτησης των διαδρομών στο χώρο. Επαναλαμβάνει μόνος του τη διαδικασία μέτρησης και τελικά τροποποιεί την αρχική του εκτίμηση που βασίζεται σε αντιληπτικά δεδομένα.

Στο δεύτερο έργο της ίδιας κατηγορίας, τα παιδιά αναζητούν εξ αρχής μόνα τους μονάδες μέτρησης και μετρούν τις διαδρομές.

Δεύτερη κατηγορία έργων: Εδώ οι δύο αρχικές διαδρομές και των δύο έργων είναι τεθλασμένες και σχηματίζουν ορθές γωνίες, ενώ δίνεται μια μόνο ράβδος-μέτρο, καθώς και ένα μολύβι για να σημειώνονται τα αποτελέσματα της μέτρησης (σχ. 3). Το μεγαλύτερο πρόβλημα που αντιμετωπίζουν τα υποκείμενα εδώ, είναι η χρήση της μοναδικής μονάδας και πως θα συνεχίσουν τη διαδικασία μετά την τοποθέτησή της πάνω στο δρόμο. Συχνά διευκολύνονται από τις υποδείξεις των συμμαθητών της ομάδας (για παράδειγμα: «Βάλτο έτσι, όπως σ' αυτή τη γραμμή (δείχνει τη διαδρομή με τις διακεκομμένες γραμμές)») ή από τις παρεμβάσεις της ερευνήτριας, που υποδεικνύει την επανατοποθέτηση της μονάδας και τη σημείωση κάθε φορά του πέρατος. Από τις έξι ομάδες μαθητών, μόνο δύο υλοποίησαν τη μέτρηση μόνοι τους χωρίς υποδείξεις από την ερευνήτρια.

Στο δεύτερο έργο της ίδιας κατηγορίας επαναλαμβάνονται με επιτυχία οι πρακτικές μέτρησης του πρώτου έργου. Η αλληλεπίδραση μεταξύ των μελών κάθε ομάδας συνεισφέρει ουσιαστικά στις περιπτώσεις δυσκολιών ή λανθασμένων χειρισμών. Για παράδειγμα, στην περίπτωση ενός υποκειμένου που διστάζει και σταματάει τη μέτρηση της δεύτερης διαδρομής όταν φτάνει στον ίδιο κατακόρυφο άξονα με το πέρας της πρώτης διαδρομής, ο συμμαθητής του υπενθυμίζει το αποτέλεσμα της προηγούμενης μέτρησης και η μέτρηση ολοκληρώνεται σωστά.

Τρίτη κατηγορία έργων: Το νέο στοιχείο που εισάγεται στην κατηγορία αυτών των έργων είναι οι δύο διαφορετικές μονάδες μέτρησης, όπου η μια είναι διπλάσια της άλλης (σχ. 4). Στο πρώτο έργο επισημαίνεται η ισότητα των διαδρομών και η διαφορά των μονάδων. Εδώ, σύμφωνα με το σενάριο,

θέλουμε να πλακοστρώσουμε τις δύο διαδρομές με τις μονάδες (τα «πλακάκια»). Τα παιδιά καλούνται να βρουν την αναλογία των μονάδων («πόσα μικρά πλακάκια μας κάνουν ένα μεγάλο;») και στη συνέχεια να εκτιμήσουν ποια διαδρομή θα χρειαστεί περισσότερα πλακάκια, όταν η μια διαδρομή πλακοστρώνεται με τις μεγάλες μονάδες ενώ η άλλη με τις μικρές. Όταν ολοκληρώνεται η διαδικασία της πλακόστρωσης τα παιδιά ερωτώνται αν οι διαδρομές εξακολουθούν να είναι ίσες, ώστε να δούμε αν τροποποιήθηκε η άποψή τους σχετικά με την ισότητα των δρόμων. Τέλος ζητήσαμε να μας πουν πόσα από τα πλακάκια που χρησιμοποιήθηκαν στη μια διαδρομή, θα χρειαστούν για να καλύψουν την άλλη. Στόχος μας είναι η ανάδειξη της σημασίας χρήσης μιας σταθερής μονάδας σε κάθε συγκεκριμένη μέτρηση.

Στο σενάριο του δεύτερου έργου τα παιδιά καλούνται να βοηθήσουν το κατσικάκι να βρει το κοντινότερο σπίτι. Δίνονται στις ομάδες οι ράβδοι-μονάδες των δύο διαφορετικών μηκών, ίδιες μ' αυτές του προηγούμενου έργου και προτρέπονται να μετρήσουν χρησιμοποιώντας διαφορετική μονάδα για κάθε διαδρομή. Όταν τελειώσει η μέτρηση ερωτώνται για το μήκος των δύο διαδρομών και ζητείται να αιτιολογήσουν. Σε περίπτωση λανθασμένης απάντησης καλούνται να χρησιμοποιήσουν τις ράβδους που έχουν χρησιμοποιήσει στον ένα δρόμο για τη μέτρηση του άλλου και αντίστροφα. Επαναλαμβάνεται η ερώτηση για το μήκος των διαδρομών και ζητείται αιτιολόγηση.

Στα δύο έργα της κατηγορίας αυτής και ειδικότερα στο πρώτο, η χρήση των διαφορετικών μονάδων και η διαφορετική αριθμητική έκφραση του μήκους, αποσταθεροποιεί την αρχική βεβαιότητα των παιδιών για την ισότητα των διαδρομών. Οι παρεμβάσεις όμως της νηπιαγωγού διευκολύνουν στην κατανόηση του ρόλου χρήσης μιας σταθερής μονάδας μέτρησης. Ας παρακολουθήσουμε ένα χαρακτηριστικό απόσπασμα διαλόγου με μια ομάδα παιδιών (απόσπασμα διαλόγου 1):

> *Ε (Ερευνήτρια):* Σε ποια διαδρομή θα χρησιμοποιήσουμε περισσότερα πλακάκια;
>
> *Πρώτο νήπιο:* Αυτή (δείχνει τη διαδρομή που θα χρησιμοποιηθεί η μικρότερη μονάδα).
>
> *Ε:* Γιατί;
>
> *Πρώτο νήπιο:* Γιατί αυτά (οι μικρές μονάδες) είναι μικρά.
>
> Το νήπιο επικαλύπτει την απόσταση και διαπιστώνει ότι χρησιμοποιήθηκαν οκτώ μονάδες.

Ε: Πόσα τέτοια πλακάκια (μεγάλες μονάδες) θα χρειαστούμε για να μετρήσουμε τον άλλο δρόμο;

Πρώτο νήπιο: Τα ίδια

Δεύτερο νήπιο: Τέσσερα.

Ε: Πόσα μικρά πλακάκια θα χρειαστούμε για να πλακοστρώσουμε τον άλλο δρόμο;

Δεύτερο νήπιο: Οχτώ.

Απόσπασμα διαλόγου 1: Η χρήση διαφορετικών μονάδων μέτρησης

Αρχικά, μετά από σχετική παρέμβαση της ερευνήτριας, ένα νήπιο παρατηρεί ότι η «μεγάλη (μονάδα) είναι ίση με δύο μικρές».

Τα διαφορετικά αριθμητικά αποτελέσματα που προκύπτουν από τη μέτρηση με διαφορετικές μονάδες στο δεύτερο έργο, επηρεάζουν την κρίση των μαθητών, θεωρώντας μεγαλύτερη τη διαδρομή που μετρήθηκε με τη μικρότερη μονάδα. Η επισήμανση της διαφοράς στις μονάδες δεν φάνηκε ικανή να τροποποιήσει την αρχική αντίληψη των παιδιών που συσχετίζουν το αριθμητικό αποτέλεσμα με το μήκος. Μόνο η μέτρηση των μηκών με την ίδια μονάδα δείχνει να διευκολύνει τα παιδιά να κατανοήσουν το ρόλο της σταθερής μονάδας στη σύγκριση μηκών.

Δεύτερη πειραματική ομάδα (Χρήση computers)

Πρώτη κατηγορία έργων: Στο πρώτο έργο της κατηγορίας αυτής, κανένα υποκείμενο δε χρησιμοποιεί διαδικασίες μέτρησης. Τα παιδιά συνήθως προτείνουν είτε την αλλαγή θέσης σε ένα από τα δύο ζωάκια, έτσι ώστε τα αφετηριακά σημεία να βρίσκονται στον ίδιο κατακόρυφο άξονα, είτε προτείνουν τη μετατόπιση του πέρατος των διαδρομών, είτε τέλος, δείχνουν ένα τυχαίο σημείο πάνω στη διαδρομή. Όλες οι ομάδες μόνο μετά από υποδείξεις της νηπιαγωγού χρησιμοποίησαν διαδικασίες μέτρησης. Μόνο ένα υποκείμενο χρησιμοποίησε από την αρχή πρακτικές μέτρησης για την επίλυση του προβλήματος. Στο δεύτερο έργο οι μαθητές χρησιμοποίησαν πρακτικές μέτρησης, εξοικειωμένοι με τις αντίστοιχες πρακτικές του πρώτου έργου.

Δεύτερη κατηγορία έργων: Στο πρώτο έργο της δεύτερης κατηγορίας επισημαίνονται στους μαθητές οι διαφορές στα υλικά που προσφέρονται (μία μόνο ράβδος-μονάδα και μολύβι). Συχνά στο πρώτο έργο απαιτείται

καθοδήγηση για τη χρήση της ράβδου και του μολυβιού. Για παράδειγμα ο μαθητής μιας ομάδας αναρωτιέται για τη χρήση του μολυβιού. Στη συνέχεια το ίδιο υποκείμενο προτείνει στο συνεργάτη του να τοποθετήσει τη ράβδο στο σωστό σημείο της διαδρομής για τη μέτρηση και να πατήσει το μολύβι. Πράγματι, το μολύβι αφήνει ίχνος και το νήπιο τοποθετεί ξανά τη ράβδο σωστά αλλά την αποσύρει χωρίς αυτή τη φορά να πατήσει το μολύβι. Όταν αντιλαμβάνεται την παράλειψη επαναλαμβάνει τη διαδικασία και σχολιάζει: «Χρειαζόμαστε γραμμούλες». Όταν τελειώσει η διαδικασία της σήμανσης της διαδρομής τα νήπια επισημαίνουν ότι δε χρειάζεται να μετρήσουν τη δεύτερη διαδρομή, απαριθμούν τις μονάδες και τοποθετούν το σπίτι στο σωστό σημείο.

Η υλοποίηση της μέτρησης στο δεύτερο έργο είναι ευκολότερη για τα παιδιά. Ας παρακολουθήσουμε τη διαδικασία μέτρησης μιας ομάδας παιδιών και τη συνεισφορά της αλληλεπίδρασης στην επιτυχή αντιμετώπιση του έργου (απόσπασμα διαλόγου 2):

> *Πρώτο υποκείμενο*: Βάζουμε εδώ (βάζει τη ράβδο στην αρχή του δρόμου), πατάμε το μολύβι, το βγάζουμε (βγάζει τη ράβδο). Μετράω πόσα είναι (οι ενδείξεις των μονάδων) για να περπατήσει το κατσικάκι.
>
> Το ίδιο υποκείμενο καθοδηγεί τη συνεργάτιδά του για τη μέτρηση της άλλης διαδρομής:
>
> *Πρώτο υποκείμενο:* Το βάζουμε (τη μονάδα) εκεί που ξεκινάει το κατσικάκι… Σωστά το έβαλες. Πάτα το μολύβι τώρα, τώρα βγάλτο (τη μονάδα).
>
> Το δεύτερο υποκείμενο δε τοποθετεί τη ράβδο ακριβώς μετά το ίχνος και το πρώτο παρεμβαίνει:
>
> *Πρώτο υποκείμενο:* Εκεί πρέπει να το βάλεις (υποδεικνύει τη σωστή θέση).
>
> Όταν το δεύτερο υποκείμενο μετράει λανθασμένα οχτώ μονάδες, το πρώτο παρεμβαίνει και διορθώνει:
>
> *Πρώτο* υποκείμενο: Οχτώ μέτρησε η Α… Θέλουμε έξι».
>
> Τελικά τοποθετούν το σπίτι στο σωστό σημείο.

Απόσπασμα διαλόγου 2: Μορφές αλληλεπίδρασης

Τρίτη κατηγορία έργων: Στα έργα της τρίτης κατηγορίας, τα παιδιά δε δυσκολεύονται να απαντήσουν στις ερωτήσεις του πρώτου έργου που ουσιαστικά στοχεύουν στην εξοικείωσή τους με τις διαφορετικές μονάδες μέτρησης. Προβλήματα υπάρχουν στην αποδοχή της ισότητας των διαδρομών στο δεύτερο έργο, όπου η χρήση των διαφορετικών μονάδων δίνει διαφορετικά αποτελέσματα. Θα καταγράψουμε στη συνέχεια ένα ενδεικτικό παράδειγμα από τις προσπάθειες μιας ομάδας στο δεύτερο έργο (απόσπασμα διαλόγου 3):

Τα υποκείμενα μιας ομάδας δεν αποδέχονται την ισότητα των δρόμων:

Πρώτο νήπιο: Εμένα είναι τέσσερα κομμάτια και της Ε…(του άλλου νηπίου) οχτώ.

Δεύτερο νήπιο: Ναι (συμφωνεί με το πρώτο), αυτός ο δρόμος είναι μεγαλύτερος, θέλει οκτώ.

Η ερευνήτρια προσπαθεί να εστιάσει την προσοχή των παιδιών στη διαφορά των μονάδων και στο μήκος τους.

Ε: Πόσα μεγάλα πλακάκια θα χρειαστούμε για το δρόμο αυτό (δείχνει το δρόμο με την διαφορετική πλακόστρωση);

Τα νήπια χρησιμοποιούν τις μεγάλες ράβδους για την πλακόστρωση του δρόμου και διαπιστώνουν ότι χρησιμοποιούν τέσσερεις ράβδους. Η ερευνήτρια επανέρχεται στην ερώτησή της για το μήκος των δρόμων.

Πρώτο νήπιο: Είναι το ίδιο μεγάλοι.

Ε: Γιατί;

Πρώτο νήπιο: Μέτρησα και είναι και οι δυο ίδιοι…Άμα τα μικρά κομμάτια ήτανε ολόκληρα θα ήτανε τέσσερα».

Απόσπασμα διαλόγου 3: Μέτρηση με διαφορετικές μονάδες

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Από την εξέλιξη της διδασκαλίας προέκυψε ότι τα παιδιά συχνά επηρεάζονται στην κρίση τους από τον τρόπο παρουσίασης των μηκών. Επιπλέον η αριθμητική έκφραση του μήκους, που δεν προσμετρά το μέγεθος της μονάδας, λειτουργεί σαν εμπόδιο στη μέτρηση. Η διδακτική προσπάθεια, μέσω των προτεινόμενων έργων, επιδίωξε να ανασκευάσει τις λανθασμένες αντιλήψεις των παιδιών που προέρχονται είτε από αισθητηριακά μέσω της όρασης ερεθίσματα, είτε από τη χρήση διαφορετικών μονάδων μέτρησης. Η εξοικείωση με τις πρακτικές μέτρησης φαίνεται ότι συνεισφέρουν στην τροποποίηση των λανθασμένων αντιλήψεων των παιδιών. Επιπλέον, ο τρόπος επιλογής των ομάδων αποδείχτηκε λειτουργικός αφού η συνεργασία στην επίλυση των έργων δραστηριοποίησε νοητικά τους συμμετέχοντες και διευκόλυνε ιδιαίτερα τα υποκείμενα που υστερούσαν γνωστικά στην εξέλιξή τους.

Η ανάλυση των δεδομένων που προέκυψαν από τη διδασκαλία στις δύο πειραματικές καταστάσεις δείχνει ότι το συγκεκριμένο μαθηματικό αντικείμενο μπορεί να διδαχθεί εξ ίσου αποτελεσματικά χρησιμοποιώντας και τα δύο περιβάλλοντα, είτε ξεχωριστά, είτε συμπληρωματικά. Η κατανόηση της χρήσης του εργαλείου μέτρησης του μήκους από τα παιδιά της προσχολικής εκπαίδευσης για την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος μέτρησης και η αποδοχή των ποσοτικών αποτελεσμάτων της μέτρησης ως κριτήριο σύγκρισης μηκών, σημαίνουν την αποδοχή της «λογικής» που ενσωματώνει το συγκεκριμένο εργαλείο. Το γεγονός αυτό διευκολύνει τους μαθητές να αμφισβητήσουν τα αποτελέσματα αισθητηριακών, μέσω της όρασης, προσεγγίσεων αξιολόγησης του μήκους. Εν τούτοις στο μετά-τεστ υπήρξαν περιπτώσεις υποκείμενων που δεν εφάρμοσαν πρακτικές μέτρησης με την ίδια συχνότητα, όπως στη διδασκαλία. Η περιορισμένη χρήση της νέας γνώσης, που σχετίζεται με τη μέτρηση του μήκους, σε ένα ευρύ φάσμα διδακτικών καταστάσεων, δηλώνει, μάλλον, ότι η συγκεκριμένη γνώση έχει αποσπασματικό χαρακτήρα και δεν έχει συγκροτηθεί ακόμα στα πλαίσια ενός εννοιολογικού πεδίου (Vergnaud, 1991) ως ένα νέο και μόνιμο γνωστικό σχήμα.

Γενικά, οι στρατηγικές αντιμετώπισης των έργων του μετα-τεστ από τα παιδιά, καθώς και η χρησιμοποιούμενη επιχειρηματολογία εμφανίζουν ποιοτικές διαφοροποιήσεις. Η ανάλυση αυτών των συμπεριφορών των νηπίων σε καθεμιά από τις προηγούμενες καταστάσεις, δείχνει το βαθμό που τα νήπια κατανοούν τη σημασία των διαδικασιών μέτρησης και κυρίως πότε αυτές γίνονται ανταγωνιστικά εργαλεία σκέψης, έναντι των διαισθητικών κανόνων εκτίμησης του μήκους. Το γεγονός αυτό αποτελεί μια ισχυρή ένδειξη ότι,

τροφοδοτώντας τους μαθητές με κατάλληλες διδακτικές καταστάσεις, μπορούν να κατανοήσουν βασικές πτυχές της γραμμικής μέτρησης.

Οι δραστηριότητες που προτάθηκαν στη διδασκαλία και των δύο πειραματικών ομάδων, φάνηκαν ενδιαφέρουσες στα παιδιά, που ανταποκρίθηκαν σε όλες τις μορφές των έργων. Η διδακτική προσέγγιση μέσω των διδακτικών καταστάσεων επίλυσης προβλημάτων, διευκόλυνε στην ενεργητική στάση των μαθητών για τη μάθηση, προσδίνοντας νόημα στις πρακτικές μέτρησης και προβάλλοντας τη λειτουργικότητά τους. Επίσης, από τα εμπειρικά δεδομένα κρίνουμε ότι η διδακτική παρέμβαση διευκόλυνε τα νήπια στην αποσταθεροποίηση κάποιων κυρίαρχων νοητικών προτύπων που συχνά οδηγούν σε λάθη, ενισχύοντας επιστημονικές πρακτικές. Τέλος, η αλληλεπίδραση μεταξύ των υποκειμένων, όπως καταφαίνονται στους ενδεικτικούς διαλόγους που παραθέσαμε, είναι ενισχυτική της προσπάθειας των μαθητών να αντιμετωπίσουν τα συγκεκριμένα προβλήματα.

Συμπερασματικά, τα παιδιά της προσχολικής εκπαίδευσης πρέπει να ενθαρρύνονται να εμπλέκονται σε έργα μέτρησης, αφού όπως παρατηρείται μπορούν να ανταποκριθούν. Το αναλυτικό πρόγραμμα διδασκαλίας μαθηματικών στην Προσχολική Εκπαίδευση, ενώ, όπως εισαγωγικά παρατηρήσαμε, προβλέπει εξοικείωση των μαθητών με πρακτικές μέτρησης γεωμετρικών μεγεθών, εν τούτοις στη διδασκαλία δεν αναπτύσσονται ανάλογες δραστηριότητες και όταν αυτές γίνονται, δεν τις συνέχει μια λογική ανάπτυξης της συγκεκριμένης μαθηματικής γνώσης.

Με την παρούσα έρευνα θέλουμε ακριβώς να υπογραμμίσουμε την ανάγκη εμπλουτισμού της μαθηματικής εκπαίδευσης στην ελληνική Προσχολική Εκπαίδευση με ένα συνεκτικό πρόγραμμα διδασκαλίας σχετικό με τις διαδικασίες μέτρησης γεωμετρικών μεγεθών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΊΑ

Barrett, Jeffrey E., Jones Gr. Thornton C. Dickson S. (2003). Understanding Children's Developing Strategies and Concepts for Length. *In the Learning and Teaching Measurement*, 2003 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), edit by Clements, Douglas H., Bright, G. pp. 16-30.

Boulton-Lewis, Gillian M., Wilss Lynn A., Mutch Sue L. (1996). An analysis of young Children's Strategies and Use of Devices for Length Measurement. *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 15, pp. 329-347.

Clements, D.H., & Samara, J. (2009). *Learning and Teaching Early Math. The Learning Trajectories* Approach. London-New York: Routledge.

Clements, D.H., & Stephan, M. (2004). Measurement in Pre-K to Grade 2 Mathematics. In D.H. Clements & J. Sarama (Eds.), *Engaging, Young Children in Mathematics. Standards for Early Childhood Mathematics Education* (pp. 299-317). Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Mahwah, New Jersey, London.

Cohen, L., Manion, L. and Morrison, K. (2000). *Research Methods in Education* (5th ed.). Routledge, London-New York.

Davydov, V. (1999). The content and unsolved problems of activity theory. In *Perspectives on activity theory*, ed. Y., Engeström, R. Miettinem, R.-L. Punamäki, 39-52. Cambridge University Press.

Engeström, Y. (1999). Activity theory and individual and social transformation. In *Perspectives on activity theory,* eds. Y., Engeström, R. Miettinem and R.-L. Punamäki, 19-38. Cambridge University Press.

Leontev, A. N. (1978). *Activity, Consciousness, and Personality*. N.J: Prentice-Hall Englewood Cliffs.

Nunes, T., & Bryant, P. (1996). *Children Doing Mathematics*. Blackwell Publishers, UK.

Nunes , T., Light, P. & Mason, J. (1993). "Tools for thought: the Measurement of Length and Area". *Learning and Instruction*, vol. 3, pp 39-54.

Van Oers, B. (1996). Are you sure? Stimulating Mathematical Thinking During Young Children's Play. *European Early Childhood Research Journal* 4, no. 1: 71-87.

Piaget, J., Inhelder, B, & Szeminska, A. (1960). *"The child's conception of geometry"*. Routledge and Kegan Paul, London

Stephan, M. Cobb, P., Gravemeijer, K. & Estes, B. (2001). "The role of Tools in Supporting Student's Development of Measuring Conceptions". In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.) *The Roles of Representation in School Mathematics* (pp. 63-76), National Council of Teachers of Mathematics, 2001 Yearbook, Reston, Virginia.

Vergnaud, G. (1991). La théorie de chams conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 10, no. 23, pp. 133-170.

Vygotsky, L. (1978). "Mind and Society. *The Development of Higher Psychological Process"*. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Zacharos, K. (2006), "Prevailing Educational Practices of Area Measurement and Students' Failure". *Journal of Mathematics Behavior*, vol. 25, no. 3, pp. 224-239.

‘ΣΤΑ ΧΝΆΡΙΑ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΉΔΗ…’
ΕΝΑ ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΟ PROJECT ΣΤΟ ΛΥΚΕΙΟ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΑΣΥΝΔΕΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΗΣ.

Παναγιώτα Κοταρίνου *Υπ. Διδάκτωρ Παν. Θεσσαλίας*

Χαρούλα Σταθοπούλου *Επίκ. Καθηγήτρια Παν. Θεσσαλίας*

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ανάμεσα στα μαθηματικά και τη Φυσική, όπως αναδεικνύεται ιστορικά, υπάρχει μια στενότατη αλληλεπίδραση, η οποία δεν προβάλλεται στην Ελληνική σχολική πραγματικότητα. Τα αναλυτικά προγράμματα δε δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να διαπιστώσουν ότι η ερευνητική δραστηριότητα στον ένα χώρο, συχνά έχει ως κίνητρο ερωτήματα ή/και προβλήματα από τον άλλο. Η γενικότερη έλλειψη συνύπαρξης και επικοινωνίας μαθηματικών και φυσικής στα προγράμματα σπουδών έχει διαπιστωθεί ότι προκαλεί μία πληθώρα από προβλήματα στη διδασκαλία και των δυο γνωστικών αντικειμένων. Σε μια προσπάθεια διασύνδεσης των δύο αυτών γνωστικών αντικειμένων πραγματοποιήσαμε ένα project με μαθητές Α΄ Λυκείου, με στόχο αφ’ ενός να γνωρίσουν οι μαθητές την ευρετική μέθοδο του Αρχιμήδη και αφ’ ετέρου να χρησιμοποιήσουν και οι ίδιοι νόμους και επιχειρήματα από τη Φυσική για να επιλύσουν μαθηματικά προβλήματα και να αποδείξουν προτάσεις στα μαθηματικά.
Γενικότερος στόχος ήταν οι μαθητές μέσα από συγκεκριμένες δραστηριότητες να ασκηθούν στην εναλλαγή ‘πλαισίου’ επίλυσης ενός προβλήματος μεταξύ Φυσικής και Μαθηματικών και να αντιληφθούν έτσι την αλληλοσύνδεσή τους. Στην εισήγησή μας θα παρουσιάσουμε αναλυτικά την εφαρμογή του καθώς και μια αξιολόγηση των αποτελεσμάτων από τις διδακτικές δραστηριότητες

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ- ΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η ιστορία των Μαθηματικών αναδεικνύει την στενότατη και αμφίδρομη αλληλοσυσχέτιση Μαθηματικών και Φυσικής, μέσα από την ιστορική τους εξέλιξη (Tzanakis, 1999; Tzanakis & Thomaidis, 2000; Tzanakis, 2000). Με τη μελέτη της ιστορίας μπορεί να γίνει αντιληπτό ότι κανένα επιστημονικό πεδίο δεν αναπτύσσεται αυτόνομα και ανεξάρτητα από τα άλλα, και ότι η ερευνητική δραστηριότητα σε ένα πεδίο, συχνά έχει ως κίνητρο ερωτήματα ή προβλήματα από άλλο/α (Tzanakis, 1998). Επίσης παραδείγματα από την ιστορία της Φυσικής αναδεικνύουν μια ακόμα διάσταση της αλληλεπίδρασης των δύο επιστημών: ο τρόπος με τον οποίο διατυπώνουμε τις ερωτήσεις μας για το φυσικό κόσμο και ο οποίος επηρεάζει και καθορίζει τις απαντήσεις μας, είναι προϊόν συνδιαμόρφωσης φυσικών και μαθηματικών περιορισμών (Γιαμαλίδου, 2006).

Σε αντίθεση με αυτήν την εικόνα, της διασύνδεσης Φυσικής και Μαθηματικών που υπαγορεύεται από την ιστορία των δύο επιστημών, είναι η εικόνα που κυριαρχεί στο σχολείο και αναδεικνύεται από τα αναλυτικά προγράμματα. Στο σχολείο οι μαθητές στο μάθημα των Μαθηματικών αντιλαμβάνονται τη Φυσική ως ένα πεδίο εφαρμογής των μαθηματικών εργαλείων και μεθόδων για την επίλυση προβλημάτων Φυσικής. Και ενώ στο μάθημα της Φυσικής συναντούν συνεχώς μαθηματικές έννοιες και δομές, ελάχιστες φορές τους δίνεται η ευκαιρία να δουν με ποιον τρόπο τα Μαθηματικά βοήθησαν να ορισθούν έννοιες της Φυσικής ή πώς η Φυσική βοήθησε στην ανάδυση νέων μαθηματικών αντικειμένων, μεθόδων ή θεωριών ή στην επιλυση προβλημάτων Μαθηματικών. Όπως αναφέρουν οι Γεωργόπουλος και Κολέζα (2007) η έλλειψη συνύπαρξης μαθηματικών και φυσικής στα προγράμματα σπουδών έχει ως συνέπεια μία πληθώρα από διδακτικά προβλήματα, όπως δυσκολία εφαρμογής και χειρισμού των θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών στην επίλυση σύνθετων προβλημάτων φυσικής, η οποία σχετίζεται με την κατανόηση των μαθηματικών αυτών εννοιών όταν εφαρμόζονται στο πλαίσιο της Φυσικής.

Στη βιβλιογραφία συναντάμε μελέτες στις οποίες οι πολλαπλές σχέσεις μαθηματικών και φυσικών επιστημών αξιοποιούνται δημιουργικά στην ανάπτυξη δραστηριοτήτων μάθησης και διδασκαλίας. Μεταξύ αυτών συγκαταλέγονται οι έρευνες που αξιοποιούν 'γενετικές στιγμές' στη διδασκαλία των Μαθηματικών **(**Farmaki & Paschos, 2007, Τζανάκης, 1998). Παράδειγμα αυτής της μορφής, αποτελεί η έρευνα που αξιοποιεί διδακτικά "γενετικές ιδέες" του Oresme που αφορούν στην κίνηση, με σκοπό τη δημιουργία μαθηματικών μοντέλων για τη λύση προβλημάτων ευθύγραμμης κίνησης (Πάσχος, 2009).

Άλλοι ερευνητές προτείνουν τη διδακτική αξιοποίηση εννοιών και νόμων της Φυσικής για την επίλυση προβλημάτων ή την ερμηνεία θεωρημάτων στα Μαθηματικά. Ως παραδείγματα αναφέρουμε την παρατήρηση και μελέτη του φαινομένου της σκιάς για την επίλυση προβλημάτων Γεωμετρίας[1] ή τη θεώρηση της παραγώγου ως στιγμιαίας ταχύτητας για την ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού (Hanna & Jahnke,1999), την αξιοποίηση της 'αρχής του Ήρωνα' -της ανάκλασης του φωτός- για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων ''ελαχίστου'' (Στράντζαλος, 1999) ή τέλος τη χρήση της μηχανικής για την απόδειξη του Πυθαγόρειου θεωρήματος και του νόμου των ημιτόνων και συνημιτόνων (Tokieda, 1998).

Χαρακτηριστικό ιστορικό παράδειγμα αυτής της μεθόδου αποτελεί η χρήση από τον Αρχιμήδη επιχειρημάτων από τη Μηχανική για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων όπως ο υπολογισμός όγκων και επιφανειών. Με τη μέθοδο αυτή του Αρχιμήδη, με τη χρήση δηλ. της συνθήκης ισορροπίας στερεού σώματος, συναντάμε στη βιβλιογραφία πολλά παραδείγματα επίλυσης γνωστών γεωμετρικών προβλημάτων και θεωρημάτων όπως του θεωρήματος Varignon[2] της κατασκευής του σημείου Fermat[3] ενός τριγώνου, (Hanna & Jahnke, 1999) το θεώρημα των διαμέσων ενός τριγώνου (Hanna & Jahnke, 2002b). Στις αποδείξεις αυτές θεωρούμε ότι έχουμε προσαρτήσει στις κορυφές των σχημάτων βάρη συνδεδεμένα με άκαμπτες, αβαρείς ράβδους και ότι όλο το σύστημα έχει ένα κέντρο βάρους το οποίο χρειάζεται να το προσδιορίσουμε. Ζωτικό ρόλο παίζει η αρχή της φυσικής ότι το κέντρο βάρους είναι μοναδικό, το οποίο και αντιμετωπίζεται ως αξίωμα ή θεώρημα των Μαθηματικών.

Οι Hanna & Jahnke (2000a; 2002b) θεωρούν ότι η αξιοποίηση επιχειρημάτων από τη Φυσική για την απόδειξη θεωρημάτων στα μαθηματικά, συμβάλει στη διαισθητική κατανόηση των μαθηματικών νόμων, στην εύρεση μιας πιο 'κομψής' απόδειξης, στη δημιουργία 'ολιστικής' εκδοχής μιας απόδειξης καθώς και στη γενίκευση μαθηματικών προτάσεων. Μπορεί επίσης να φανερώσει τα απαραίτητα στοιχεία μιας περίπλοκης μαθηματικής δομής και να υποδείξει τη σχέση ενός θεωρήματος με άλλες περιοχές των Μαθηματικών ή άλλων επιστημονικών πεδίων .

---

[1] Η Burtolini-Bussi (1998) αναφέρει προβλήματα τέτοιας μορφής των Boero et al.

[2] Το θεώρημα αυτό είναι η γνωστή πρόταση: Τα μέσα των πλευρών ενός τετραπλεύρου σχηματίζουν ένα παραλληλόγραμμο. Μια πλήρης απόδειξη με επιχειρήματα από τη φυσική , με τη χρήση του νόμου των μοχλών, περιλαμβάνεται στο άρθρο των Hanna & Jahnke (2002), Another approach to proof.

[3] Το σημείο Fermat ενός τριγώνου ΑΒΓ, είναι το σημείο για το οποίο το άθροισμα των αποστάσεων του από τις κορυφές του τριγώνου γίνεται ελάχιστο.

Η προσέγγιση αυτή κίνησε το ενδιαφέρον μαθηματικών όπως ο Polya, για την εφαρμογή της στη διδασκαλία των μαθηματικών στις σχολικές τάξεις. Όμως, παρά το ενδιαφέρον των μαθηματικών, δεν έχουν διερευνηθεί επαρκώς όπως επισημαίνουν οι Hanna & Jahnke (1999), οι δυνατότητες μιας τέτοιας προσέγγισης, επειδή δεν έχουν εφαρμοστεί στην τάξη με οργανωμένο τρόπο και σε μεγάλη έκταση.

Με αυτή την οπτική σχεδιάστηκε το project 'Στα χνάρια του Αρχιμήδη…', το οποίο πραγματοποιήθηκε στο 2ο Λύκειο Ιλίου με μαθητές Α΄Λυκείου. Μέσα από το συγκεκριμένο project οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να έρθουν σε επαφή με το έργο του Αρχιμήδη του μεγαλύτερου μαθηματικού της αρχαιότητας. Ένας από τους βασικούς γνωστικούς μας στόχους ήταν να γνωρίσουν οι μαθητές την ευρετική μέθοδο του Αρχιμήδη και να χρησιμοποιήσουν και οι ίδιοι νόμους και επιχειρήματα από τη Φυσική για να επιλύσουν μαθηματικά προβλήματα και να αποδείξουν προτάσεις στα μαθηματικά.

Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν αναλυτικά οι διδασκαλίες και οι δραστηριότητες που πραγματοποιήθηκαν και προτείνονται ως παραδείγματα σύνδεσης Μαθηματικών και Φυσικής.

2. ΤΟ PROJECT 'ΣΤΑ ΧΝΑΡΙΑ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ…'

Μεθοδολογία

Το project αυτό πραγματοποιήθηκε το σχ. έτος 2005-6 σε 21 μαθητές ενός τμήματος Α Λυκείου, στο 2ο Λύκειο Ιλίου. Αποτελεί ενότητα του μεγαλύτερου διαθεματικού project "Ελληνιστική Αλεξάνδρεια: ο Φάρος της Γνώσης" (Κοταρίνου, 2007b) το οποίο πραγματοποιήθηκε με αφορμή το ανέβασμα της θεατρικής ταράστασης 'Μια πανέμορφη ιστορία: Η μέτρηση της γης από τον Ερατοσθένη' (Κοταρίνου, 2007a; Κοταρίνου κ.α., 2008) και είχε στόχο μέσα από μια διαθεματική προσέγγιση τα παιδιά να γνωρίσουν με ένα συνολικό τρόπο τον Ελληνιστικό κόσμο.

Στο μάθημα των Μαθηματικών επιλέξαμε μεταξύ άλλων να πραγματευθούμε και θέματα που είχαν σχέση με τον Αρχιμήδη, στον οποίο γίνονταν αρκετές αναφορές στο θεατρικό έργο. Με στόχο να γνωρίσουν οι μαθητές τη 'Μηχανική μέθοδο' του Αρχιμήδη και για να αξιοποιήσουν και τα ίδια αρχές της Φυσικής στα Μαθηματικά πραγματοποιήσαμε μια σειρά από διδασκαλίες και δραστηριότητες σε 5 διδακτικές περιόδους. Πιο συγκεκριμένα οι δραστηριότητες κινήθηκαν σε δύο άξονες 'Χρησιμοποιώντας αρχές της Φυσικής στα Μαθηματικά' και 'Χρησιμοποιώντας τη Γεωμετρία για τη λύση προβλήματος Φυσικής'

Διδακτικές ενότητες

1)*"Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένην έφοδος"* Συνδιδασκαλία με την εκπαιδευτικό των Αρχαίων Ελληνικών

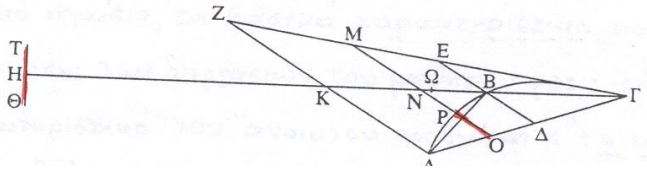
Κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών παρουσιάζεται μια αυστηρά αξιωματική οργάνωση ενός μαθηματικού πεδίου με συχνό αποτέλεσμα, την απόκρυψη των κινήτρων, προβλημάτων και ερωτημάτων και μεθόδων που οδήγησαν στην ανακάλυψη και ανάπτυξη του πεδίου αυτού και την εύρεση και απόδειξη των σχετικών θεωρημάτων. Στην επιστολή του Αρχιμήδη "Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένην έφοδος" –το γνωστό μας Παλίμψηστο- αναφέρεται η ευρετική μέθοδος του Αρχιμήδη με την οποία ανακάλυψε πολλά από τα γνωστά Θεωρήματα στη Γεωμετρία. Μέσω της "μηχανικής μεθόδου" ο Αρχιμήδης, με τη βοήθεια του 'νόμου ισορροπίας των μοχλών' υπολόγισε το εμβαδό τμήματος παραβολής, ξεπερνώντας έτσι όλες τις δυσκολίες της μη ύπαρξης οριακών μεθόδων.

Για να γνωρίσουν οι μαθητές τη 'Μέθοδο' του Αρχιμήδη, πραγματοποιήθηκε συνδιδασκαλία με την εκπαιδευτικό των Αρχαίων Ελληνικών, κατά την οποία μεταφράστηκε μέρος της επιστολής "Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένην έφοδος" του Αρχιμήδη προς τον Ερατοσθένη. Το παραπάνω απόσπασμα περιέχεται σε ένα γράμμα του Αρχιμήδη προς τον Ερατοσθένη, που ζούσε στην Αλεξάνδρεια, και στο οποίο του εξηγούσε τη μηχανική μέθοδο της ισορροπίας που ακολουθούσε για να ανακαλύψει πολλά από τα θεωρήματά του. Το γράμμα αυτό, χαμένο μέχρι το 1906, βρέθηκε σε μορφή παλίμψηστου από τον J.L. Heiberg.

Από τα παιδιά ζητήθηκε να προσδιορίσουν το περιεχόμενο της Μηχανικής που διδάσκονται στη Φυσική ενώ έγινε αναφορά στην έννοια που έδινε ο Αρχιμήδης στη Μηχανική. Διαβάστηκε και αναλύθηκε το 1ο αίτημα από το βιβλίο του "Περί ισορροπιών" καθώς και το θεμελιώδες θεώρημα σύμφωνα με το οποίο «δύο μεγέθη, είτε σύμμετρα είτε ασύμμετρα, ισορροπούν σε αποστάσεις αντιστρόφως ανάλογες των μεγεθών» (Heath, 2001). Τους ζητήθηκε να διατυπώσουν τη συνθήκη ισορροπίας στερεού σώματος και να λύσουν απλά προβλήματα με μοχλούς.

Στη συνέχεια η μαθηματικός της τάξης εξήγησε σε γενικές γραμμές στα παιδιά, τη μέθοδο του Αρχιμήδη για τον υπολογισμό του παραβολικού τμήματος. Τους εξήγησε δηλ. ότι ο Αρχιμήδης για να βρει το νόμο αυτό ισορρόπησε το άγνωστο εμβαδό του παραβολικού τμήματος, με το γνωστό

εμβαδόν του τριγώνου, οπότε η θέση του υπομοχλίου καθόρισε και τη σχέση των μεγεθών τους[4].



Στους μαθητές τονίστηκε ότι ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε τη Μηχανική ως ευρετική μέθοδο και στη συνέχεια έκανε έλεγχο των συμπερασμάτων του, με αυστηρή μαθηματικά απόδειξη.

2) *Ευθείες τριγώνου που διέρχονται από το ίδιο σημείο*

Για να δουν οι μαθητές πώς μπορεί να λυθεί ένα μαθηματικό πρόβλημα με αρχές της φυσικής και πιο ειδικά με τη συνθήκη ισορροπίας στερεού σώματος πραγματοποιήθηκε δραστηριότητα μέσα στην τάξη με την καθοδήγηση της εκπαιδευτικού για την εύρεση και απόδειξη της συνθήκης του θεωρήματος Ceva[5].

Ο Giovanni Ceva (1648-1734) στο έργο του 'De Lineis rectis se invicem secantibus statica constructio' (κατασκευή συντρεχουσών ευθειών, μέσω της στατικής) μελέτησε την εφαρμογή των θεωριών του κέντρου βάρους στην απόδειξη γεωμετρικών θεωρημάτων (Loria, 1972). Ο ίδιος, αντί της καθιερωμένης αντιμετώπισης των γεωμετρικών κατασκευών με κανόνα και διαβήτη, πρότεινε την 'αντικατάσταση των ευθειών με βάρη'. Το θεώρημα που φέρει το όνομά του μας δίνει τη συνθήκη σύμφωνα με την οποία τρεις εσωτερικές ευθείες του τριγώνου (ευθείες που συνδέουν μία κορυφή ενός τριγώνου με ένα σημείο της απέναντι πλευράς) τέμνονται στο ίδιο σημείο. Ως εφαρμογές του νόμου αυτού προκύπτουν τα θεωρήματα για το σημείο τομής των διχοτόμων, διαμέσων και υψών ενός τριγώνου.

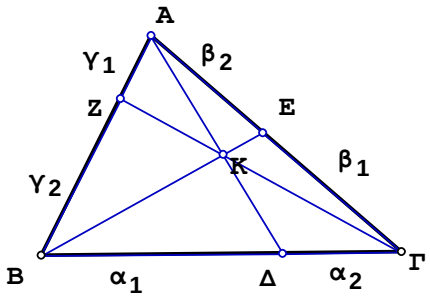
Το θεώρημα του Ceva μας δηλώνει ότι αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι συντρέχουσες οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ ΓΖ ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι τα

---

[4] Ο Αρχιμήδης χωρίς να αναφερθεί σε ροπές, στην πραγματικότητα υποθέτει ότι το άθροισμα των ροπών κάθε σωματιδίου του σχήματος, ισούται με τη ροπή ολόκληρου του σχήματος

[5] Για τη δραστηριότητα αυτή βασιστήκαμε στις παραδόσεις στο μεταπτυχιακό τμήμα διδακτικής και μεθοδολογίας των Μαθηματικών του Μαθηματικού τμήματος, του ΕΣΠΑ καθηγητή Στράντζαλου (1999). Μία απόδειξη επίσης του θεωρήματος Ceva με αρχές της μηχανικής μπορεί κανείς να βρει και στο άρθρο των Hanna & Jahnke (2002a).

ευθύγραμμα τμήματα α_1, α_2, β_1, β_2, , γ_1 , γ_2 να πληρούν τη συνθήκη $\alpha_1\beta_1\gamma_1 = \alpha_2\beta_2\gamma_2$



Για να ανακαλύψουν οι μαθητές τη συνθήκη τους ζητήσαμε να υποθέσουν ότι στο τρίγωνο ΑΒΓ οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ ΓΖ είναι άκαμπτες, αβαρείς ράβδοι που διέρχονται από το σημείο Κ και επίσης ότι έχουν τοποθετηθεί στις κορυφές του τριγώνου Α,Β,Γ τα αντίστοιχα βάρη β_A, β_B και β_Γ ώστε το κέντρο βάρους να είναι το Κ.

Στο φύλλο εργασίας[6] δόθηκε ο νόμος ισορροπίας των μοχλών[7] και επίσης τονίστηκε

στους μαθητές ότι σε οποιοδήποτε σύστημα μαζών

1. Το κέντρο κέντρο βάρους είναι μοναδικό και

2. Το κέντρο βάρους ενός συστήματος παραμένει αμετάβλητο, αν στο σύστημα αντικαταστήσω δύο βάρη από ένα άλλο ίσο με το άθροισμά τους, το οποίο θα εφαρμοστεί στο κέντρο βάρους των δύο μαζών.

Η βασική ιδέα για να προσδιοριστεί η ζητούμενη σχέση είναι να προσδιορισθούν τα βάρη ώστε το κέντρο βάρους των β_A, β_B και β_Γ να είναι το σημείο Κ**.** Για να γίνει αυτό το κ.β. του τριγώνου θα πρέπει να βρίσκεται στην ΓΖ, αφού το κ.β. του ΑΒ είναι στο Ζ (1). Για τον ίδιο λόγο εφόσον το κ. β. του ΒΓ είναι στο Δ (2) το κ. β. του τριγώνου θα πρέπει να βρίσκεται στην ΑΔ. Επομένως το κ. β. πρέπει να είναι το σημείο τομής τους, το Κ. Άρα το κ. β. του ΑΓ (3) το είναι το Ε .

[6] Όλα τα φύλλα εργασίας των δρστηριοτήτων παρατίθενται στο παράρτημα

[7] αν στα άκρα ενός μοχλού εφαρμοστούν δύο βάρη και το σύστημα ισορροπεί, οι μοχλοβραχίονες (οι αποστάσεις των βαρών από το υπομόχλιο) είναι αντιστρόφως ανάλογοι των βαρών

Από την σχέση (1) έχουμε $\frac{\beta_A}{\beta_B}=\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$, από τη σχέση (2) έχουμε $\frac{\beta_B}{\beta_\Gamma}=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ και από τη σχέση (3) έχουμε $\frac{\beta_B}{\beta_A}=\frac{\beta_2}{\beta_1}$. Πολλαπλασιάζοντας τις τρεις σχέσεις κατά μέλη έχουμε

$$\frac{\beta_A}{\beta_B}\cdot\frac{\beta_B}{\beta_\Gamma}\cdot\frac{\beta_\Gamma}{\beta_A}=\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\cdot\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\cdot\frac{\beta_2}{\beta_1} \quad \Leftrightarrow 1=\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\cdot\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\cdot\frac{\beta_2}{\beta_1} \quad \Leftrightarrow \gamma_2\cdot\beta_2\cdot\alpha_{2=}\gamma_1\cdot\beta_1\cdot\alpha_1$$

Θεώρημα Ceva

Αφού ολοκληρώθηκε το ερώτημα αυτό, δόθηκε ως εργασία για το σπίτι το αντίστροφο του θεωρήματος καθώς και το τελευταίο ερώτημα του φύλλου εργασίας, το οποίο ζητούσε από τα παιδιά να αποδείξουν ότι οι διάμεσοι του τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Το αντίστροφο.

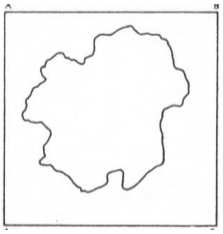
Αν σε ένα τρίγωνο φέρω από τις κορυφές του, τις ευθείες ΑΔ , ΒΕ και ΓΖ αντίστοιχα και ισχύει $\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\cdot\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\cdot\frac{\beta_2}{\beta_1}=1$, τότε οι ευθείες μου συντρέχουν.

Πράγματι αν επιλέξω τα βάρη β_A, β_B και β_Γ έτσι ώστε να ισχύει το κ.β. του ΑΒ να είναι στο Ζ, και το κ. β. του ΒΓ να είναι στο Δ, ισχύουν $\frac{\beta_A}{\beta_B}=\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\kappa\alpha\iota\frac{\beta_B}{\beta_\Gamma}=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ και το κ. β. του τριγώνου βρίσκεται στην τομή Κ των ΓΖ και ΑΔ. Από αυτές τις σχέσεις και την υπόθεση, ισχύει $\frac{\beta_A}{\beta_\Gamma}=\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\cdot\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\frac{\beta_1}{\beta_2}$ δηλ. ισχύουν οι συνθήκες ισορροπίας για την ΑΓ και το κ.β. της είναι το Ε. Άρα και το κ. β. το Κ θα πρέπει να βρίσκεται στην ΒΕ και επομένως οι ευθείες συντρέχουν.

3) *Εύρεση εμβαδού ακανόνιστου σχήματος*

Και η επόμενη δραστηριότητα δόθηκε στους μαθητές για να δοκιμάσουν να κάνουν μια αλλαγή πλαισίου και να λύσουν μαθηματικό πρόβλημα με αρχές της φυσικής.

Τους ζητήθηκε να μετρήσουν άμεσα ή έμμεσα το εμβαδόν του ακανόνιστου σχήματος που είναι σχεδιασμένο στο πλαίσιο ΑΒΓΔ; (βλέπε στο παρακάτω σχήμα).



Παραθέτουμε δυο δυνατές απαντήσεις:

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του ακανόνιστου σχήματος με έμμεσο τρόπο μπορούμε να ζυγίσουμε αρχικά ολόκληρο το πλαίσιο ΑΒΓΔ και να μετρήσουμε το εμβαδόν του. Στη συνέχεια κόβουμε το σχήμα από το πλαίσιο και το ζυγίζουμε. Ο λόγος των βαρών ισούται με το λόγο των εμβαδών.

Το ίδιο εμβαδόν μπορούμε να το υπολογίσουμε μετρώντας τον αριθμό των τετραγωνιδίων που περιέχονται στην ακανόνιστη επιφάνεια.

4) *Χρησιμοποιώντας τη Γεωμετρία για τη λύση προβλήματος Φυσικής*

Αφού αντιμετωπίσαμε επίλυση προβλημάτων Μαθηματικών μέσα από ένα πλαίσιο Φυσικής θελήσαμε να δούμε και την αντίστροφη περίπτωση, δηλ. προβλήματα Φυσικής που επιλύονται με τη βοήθεια νόμων που συνδέουν μεγέθη της Φυσικής με μεγέθη που παραδοσιακά θεωρούνται ότι ανήκουν στο πεδίο των Μαθηματικών. Η αφορμή δόθηκε με την ανάγνωση στην τάξη του φανταστικού διαλόγου για τις εφαρμογές των μαθηματικών, ανάμεσα στον Τύραννο Ιέρωνα και στον Αρχιμήδη, τον οποίο έγραψε ο Ούγγρος μαθηματικός Α. Renyi. Η δραστηριότητα αφορούσε ένα πρόβλημα ισορροπίας στερεών που αναφέρονταν στον παραπάνω διάλογο και των οποίων τον όγκο είχε υπολογίσει ο Αρχιμήδης.

Αφού εντοπίσαμε με τα παιδιά από το βιβλίο τους της γεωμετρίας στο κεφάλαιο της Στερεομετρίας τους τύπους του όγκου της σφαίρας, του κώνου και του κυλίνδρου τους δώσαμε ως εργασία στο σπίτι την παρακάτω δραστηριότητα από το βιβλίο Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου των Θωμαΐδη κ.α.

Υποθέτουμε ότι έχουμε αντικείμενα σε σχήμα κυλίνδρου (ύψους R και ακτίνας βάσης R), κώνου (ύψους R και ακτίνας βάσης R) και ημισφαιρίου (ακτίνας R), τα οποία είναι κατασκευασμένα από το ίδιο ομογενές συμπαγές υλικό. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός των αντικειμένων του κάθε είδους, ο

οποίος απαιτείται για να ισορροπήσει σε μια ζυγαριά ο ελάχιστος αριθμός αντικειμένων ενός άλλου είδους;

Για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος ισορροπίας τα παιδιά θα έπρεπε να εργαστούν σε ένα πλαίσιο Γεωμετρίας, αφού συνδέσουν τη μάζα των στερεών με τους όγκους τους, μέσω της πυκνότητας. Η λύση που προτείνεται από τους συγγραφείς, στο βιβλίο του καθηγητή (σελ. 123) είναι η εξής: Αφού τα αντικείμενα είναι κατασκευασμένα από το ίδιο ομογενές υλικό, σημαίνει ότι έχουν την ίδια πυκνότητα, άρα σύμφωνα με τον τύπο d=m/V ο οποίος συνδέει την πυκνότητα, μάζα και όγκο ενός στερεού, προκύπτει ότι ο λόγος του όγκου των δύο αντικειμένων ισούται με το λόγο των μαζών τους.

3. Αξιολόγηση

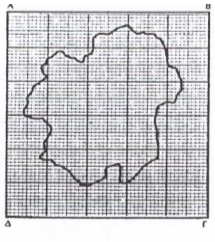
Η μεγαλύτερη δυσκολία που αντιμετώπισαν οι μαθητές κατά την επίλυση των διαφόρων προβλημάτων και αποδείξεων ήταν στη μετάβαση από το ένα 'πλαίσιο' επίλυσης στο άλλο, καθώς οι μαθητές συνηθίζουν να σκέφτονται ένα μαθηματικό πρόβλημα μόνο σε ένα μαθηματικό πλαίσιο.

Πιο συγκεκριμένα διαπιστώσαμε δυσκολίες των μαθητών κατά την απόδειξη του θεωρήματος Ceva. Δε μπόρεσαν να αποδείξουν το αντίστροφο αλλά ούτε και το θεώρημα των διαμέσων. Δε μπόρεσαν να το επιλύσουν ούτε σε πλαίσιο Μαθηματικών ούτε σε πλαίσιο Φυσικής. Δεν το αντιμετώπισαν δηλ. ούτε ως εφαρμογή του θεωρήματος Ceva, ούτε το αντιμετώπισαν με τον ίδιο τρόπο που τους υποδείξαμε για τη επίλυση του θεωρήματος Ceva (να θεωρήσουν ότι εφαρμόζουμε στις κορυφές του τριγώνου ίσα βάρη). Θεωρούμε ότι ίσως θα έπρεπε να αφιερωθεί περισσότερος χρόνος στην ενότητα της Φυσικής που αναφέρεται στην ισορροπία ενός σώματος καθώς και να γίνει πειραματικής επαλήθευση του νόμου των μοχλών.

Κυρίως θα έπρεπε με τη βοήθεια μιας πειραματικής διάταξης, να εντοπίσουν το κ.β. ενός τριγώνου στο οποίο έχουμε κρεμάσει αρχικά ίσα βάρη στις κορυφές του και μετά άνισα βάρη. Μέσω πειράματος επίσης θα μπορούσαν να διαπιστώσουν ότι το κ.β. του τριγώνου δε μεταβάλλεται αν αντικαταστήσουμε τα δύο βάρη των κορυφών με το άθροισμά τους, το οποίο θα εφαρμοστεί στο κ.β. των δύο μαζών. Με τον τρόπο αυτό θα ήταν ευκολότερο για τους μαθητές να κατανοήσουν τη βασική ιδέα επίλυσης του θεωρήματος.

Για την εύρεση του εμβαδού του ακανόνιστου σχήματος όλα τα παιδιά και τις δύο σχολικές χρονιές επέλεξαν να χρησιμοποιήσουν μιλλιμιτρέ χαρτί ή να δημιουργήσουν ένα πλέγμα από τετράγωνα και να μετρήσουν τον αριθμό των

τετραγωνιδίων που περιέχονται στην ακανόνιστη επιφάνεια. Σε ορισμένες περιπτώσεις επέλεξαν να χωρίσουν το ακανόνιστο σχήμα σε άλλα γνωστά σχήματα, τρίγωνα ή τετράγωνα των οποίων γνώριζαν να υπολογίζουν το εμβαδόν.



Στο πρόβλημα ισορροπίας των στερεών οι μαθητές οδηγήθηκαν σε Γεωμετρική επίλυση του προβλήματος, δηλ. στον προσδιορισμό της σχέσης των μαζών από τη σχέση των όγκων, επειδή το πρόβλημα δόθηκε στα παιδιά την ώρα της Γεωμετρίας. Το γεγονός αυτό τους παρέπεμψε αυτόματα σε Γεωμετρική επίλυση του προβλήματος χωρίς να σκεφτούν εναλλακτικά ότι θα μπορούσαν να οδηγηθούν σε αυτή τη λύση μέσω της πυκνότητας των στερεών.

4. Συμπεράσματα

Παρουσιάστηκε ένα παράδειγμα διαθεματικότητας με έμφαση στη σύνδεση εννοιών και πρακτικών από το πεδίο των μαθηματικών και της φυσικής. Με τις δραστηριότητες που αναφέραμε αναλυτικά προσπαθήσαμε να αναδείξουμε μία από τις πολλαπλές σχέσεις μαθηματικών και φυσικών επιστημών· σχέσεις υποβαθμισμένες στο σχολικό πλαίσιο παρότι αποτελούν κλάδους οι οποίοι ιστορικά αποδεδειγμένα έχουν αναπτυχθεί παράλληλα. Οι μαθητές ενεπλάκησαν σε δραστηριότητες οι οποίες από τη μια συνδέονταν με το ένα γνωστικό αντικείμενο και από την άλλη αντλούσαν από τις σχέσεις ανάμεσα στα δυο αντικείμενα. Καθοδηγούμενοι από τους εκπαιδευτικούς κατά τη διάρκεια πραγμάτευσης των δραστηριοτήτων ήρθαν σε επαφή με καλές 'πρακτικές' για να επιλύσουν προβλήματα σε διαφορετικά πλαίσια.

Οι μαθητές απόκτησαν επίγνωση της δυνατότητας μετάβασης από το ένα πλαίσιο στο άλλο και είχαν την ευκαιρία να αναστοχαστούν πάνω σ αυτές τις διαδικασίες. Κατάφεραν, έστω και με δυσκολίες, να οικοδομήσουν σχέσεις ανάμεσα στα δυο αντικείμενα, παρά τις όποιες δυσκολίες, και παράλληλα να σχηματίζουν έννοιες και να αποκτούν δεξιότητες σε καθένα χωριστά. Φάνηκε οι μαθητές από κοινού με τους εκπαιδευτικούς τουλάχιστον σε ένα πρώτο επίπεδο να συνειδητοποιούν τέτοιες σχέσεις και να αναστοχάζονται πάνω σ

αυτές. Επίσης είχαν την εμπειρία από τη μια να 'κάνουν' μαθηματικά όχι για αυτά καθαυτά —όπως συμβαίνει συνήθως—και από την άλλη να αναγνωρίζουν την αξία τους ως ενός εργαλείου για την κατανόηση φυσικών φαινομένων. Η συνειδητοποίηση μιας νέας εικόνας για τα μαθηματικά θεωρούμε ότι συμβάλει στη δυνατότητα διεύρυνσης της μαθηματικής ικανότητας των μαθητών, στη σύνδεση μαθηματικών και φυσικής αλλά και γενικότερα στο ρόλο των μαθηματικών τόσο σε άλλα επιστημονικά πεδία όσο και σε δραστηριότητες καθημερινής ζωής.

Τέλος θεωρούμε ότι για να ξεπεραστούν οι όποιες δυσκολίες εντοπίστηκαν κατά τη διαδιακία μετάβασης από ένα πλαίσιο σε άλλο θα έπρεπε να δίνονται από τις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου τέτοιου είδους δραστηριότητες οι οποίες θα συνοδεύονται με πειραματική επαλήθευση: Απλούστερες αρχικά με αυξανόμενο βαθμό δυσκολίας αργότερα. Θα είχε ενδιαφέρον να ερευνήσουμε την επίδραση μιας τέτοιας παιδαγωγικής προσέγγισης σε μαθητές Λυκείου οι οποίοι θα είχαν εμπειρία τέτοιων δραστηριοτήτων και στις προηγούμενες βαθμίδες εκπαίδευσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Γεωργόπουλος, Κ., Κολέζα, Ε. (2007). Διδακτικά προβλήματα από τη μη συνύπαρξη μαθηματικών και φυσικής στο πρόγραμμα σπουδών, *4η Συνάντηση Αθηνών Ζητήματα Επιστήμης: Ιστορία, Φιλοσοφία και Διδακτική*, 28-30 Σεπτεμβρίου.

Γιαμαλίδου, Μ. (2006). Μαθηματικά και Φυσική- Ιστορία και Διδακτική: Double Date ή Menage a Quatre? Δ. Χασάπης (επιμ.) *5ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών, Ιστορία των μαθηματικών και Μαθηματική εκπαίδευση,*Θεσσαλονίκη 18 και 19 Μαρτίου.

Burtolini-Bussi, M. (1998). Joint activity in mathenmatics classrooms: A Vygotskian analysis in Seeger et al (Eds.) *The culture of Mathematics classroom,* Cambridge University Press.

Hanna, G. and Jahnke H. (2002a). Arguments from Physics in Mathematical Proofs: an Educational Perspective, *For the Learning of Mathematics,* v22, n3, pp 38-45.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (2002b). Another approach to proof: Arguments from physics. *International reviews on mathematical education, ZDM,* 1/02, 1-8.

Hanna, G., & Jahnke, H.N. (1999). Using Arguments from Physics to promote Understanding of mathematical proofs, in O. Zaslavsky (Ed.) Proceedings of PME 23, V3, 73-80, Haifa, Israel.

Κοταρίνου, Π., Σταθοπούλου Χ. (2009α) "Ο άνθρωπος που μετρούσε την άμμο": ένα διαθεματικό project για μια ενοποιητική διδασκαλία διαφορετικών γνωστικών αντικειμένων στο Λύκειο, *3ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών*

Διδακτικής Μαθηματικών, Ρόδος, 29-31 Οκτωβρίου 2009, σελ.331-341.

Kotarinou, P., Stathopoulou Ch. (2009β). Integrating 10th grade curriculum through "Mathematical Literature", *INTERNATIONAL CONGRESS OF COMPARATIVE LITERATURE AND THE TEACHING OF LITERATURE AND LANGUAGE, WE SPEAK THE SAME CULTURE,* Gazi Universit, April 29-May 1, 2009 Ankara – TURKIYE, σελ. 91.

Κοταρίνου, Π., Κουτλή Δ., Χρυσανθάκη- Αποστολοπούλου, Ν. (2008). "The impact of dramatic arts on the teaching of mathematics in the secondary education" εισήγηση στην 6η Διεθνή Συνδιάσκεψη για το θέατρο στην εκπαίδευση: *''Θέατρο και εκπαίδευση στο κέντρο της σκηνής''* του Πανελληνίου Δικτύου για το Θέατρο στην Εκπαίδευση, Αθήνα 27-30 Μαρτίου 2008.

Κοταρίνου, Π. (2007a). "Η λογοτεχνία και οι δραματικές τέχνες στη διδασκαλία της Γεωμετρίας στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση" εισήγηση στο 6ο Διήμερο Διαλόγου για τη διδασκαλία των μαθηματικών *''Μαθηματικά και Λογοτεχνία''* που διοργανώθηκε από την Ομάδα έρευνας της Μαθηματικής Εκπαίδευσης του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη 17-18 Μαρτίου 2006.

Κοταρίνου, Π.. Κουτλή Δ., Χρυσανθάκη- Αποστολοπούλου, Ν. (2007b). "Η συμβολή των Δραματικών τεχνών στη διδασκαλία των Μαθηματικών και την ανάπτυξη διεπιστημονικού project στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση" εισήγηση στο 1ο Πανελλήνιο Συνέδριο του Πανελληνίου Συλλόγου Μεταπτυχιακών Καθηγητών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης "*Για μια σύγχρονη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση''* (Ε.Κ.Π.Α. 22 Απριλίου 2007)

Πάσχος, Θ. (2009). Σχεδιασμός διδακτικών δραστηριοτήτων εισαγωγής σε έννοιες της Ανάλυσης αξιοποιώντας την ιστορία των Μαθηματικών, στο *Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών,* Επιστημονική Ένωση για τη διδακτική των Μαθηματικών, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Loria, G. (1972). *Ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, τόμος δεύτερος.

Στράντζαλος, Χ. (1999). *Θέματα ειδικής διδακτικής Ι*- Εαρινό εξάμηνο 1999.

Tokieda, Tadashi (1998) Mechanical Ideas in Geometry*, merican Mathematical Monthly,* 105(8), 697-703.

Tzanakis, C. (2000). Presenting the relation between Mathematics and Physics on the basis of their History: a Genetic Approach, in Victor Katz (ed.) *Using History to teach Mathematics,* pp.111-120, Mathematical association of America, Washington DC.

Tzanakis, C., Thomaidis, Y. (2000). Integrating the close historical development of Mathematics and Physics in Mathematics Education: Some methodological and Epistemological remarks, *For the Learning of Mathematics,* 20, 1, March 2000.

Tzanakis, C. (1999). Unfolding interrelations between Mathematics and Physics, in the presantation motivated by History: two examples, *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology,* 30(1), pp 103-118.

Τζανάκης , Κ. (1998). Όροι και προυποθέσεις ενός εποικοδομητικού ρόλου της ιστορίας των Μαθηματικών στην κατανόηση και στη διδασκαλία τους, *Ερευνητική Διάσταση,* 3, ΕΜΕ Παράρτημα Κεντρικής Μακεδονίας της ΕΜΕ.

Farmaki, V., Paschos, Th. (2007). Emploing genetic 'moments' in the history of mathematics in classroom activities, *Educational Studies in Mathematics,* pp. 83-106.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

Brading, M. (1997). *Mathematics from History, The Greeks,* 4 Learning, Warwick.

Bunt, L. N. H., Jones, P. S., Bedient, J. D., (1981). *Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών Μαθηματικών,*Αθήνα, Πνευματικός,.

Eves, H. (1989). *Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών-Διάλεξη 9, Ο στοχαστής και ο κακοποιός.* Αθήνα, Τροχαλία,

Θωμαίδης. Ι., Ξένος, Θ., Παντελίδης, Γ., Πούλος, Α., Στάμου, Γ. (1999). Ευκλείδεια *Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου*, ΟΕΔΒ.

Θωμαίδης. Ι., Ξένος, Θ., Παντελίδης, Γ., Πούλος, Α., Στάμου, Γ. (1999). Ευκλείδεια *Γεωμετρία, Βιβλίο του καθηγητή Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου*, ΟΕΔ.

Heath, T. (2001). *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών,* Κέντρο Έρευνας, Επιστήμης και Εκπαίδευσης, Αθήνα.

Kubinová, M., Steli˙ková, N. (2003). Pupils' Projects in School Mathematics. In KUBI˙NOVA˙, Marie and Littler, Graham (Eds). *Empowering Mathematics Teachers for the Improvement of School Mathematics*. Praga:PedF UK, pp.93-121, ISBN: 80-7290-145-1.

Mankiewicz, Richard. *Ιστορία των Μαθηματικών*, Αθήνα, Αλεξάνδρεια, 2002, σελ. 101.

Νικολαΐδου Ε., Φράγκου Μ. (2006), *Αρχιμήδης το θεϊκό μυαλό,* Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα.

Renyi, A. (1979). *Διάλογοι για τα Μαθηματικά,* Διογένης, Αθήνα.

Stein, S. (1999). *Archimedes what did he do besides cry EUREKA?* , Mathematical Association of America, Washington D.C.

Σταμάτη, Σ. (1974). *Αρχιμήδους άπαντα* Αθήνα, Τεχνικό Επιμελητήριο Ελλάδος.

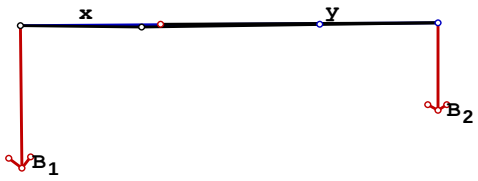
Στράντζαλου, Χ. (1999). *Θέματα ειδικής διδακτικής Ι-* Εαρινό εξάμηνο.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1

Συντρέχουσες ευθείες στο τρίγωνο

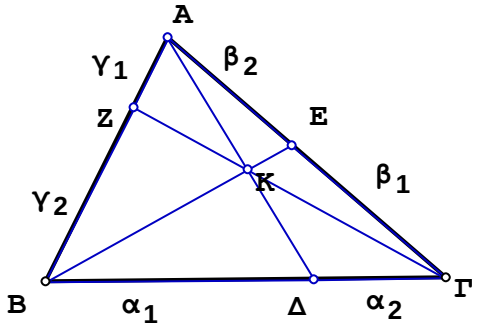
Στην πραγματεία του «Περί επιπέδων Ισορροπιών» ο Αρχιμήδης παρουσιάζει τις βασικές αρχές της Μηχανικής. Εκεί διατυπώνει και αποδεικνύει το θεμελιώδες θεώρημα, σύμφωνα με το οποίο δύο μεγέθη, είτε σύμμετρα είτε ασύμμετρα, ισορροπούν σε αποστάσεις αντιστρόφως ανάλογες των μεγεθών. Όπως ήδη γνωρίζουμε ο Αρχιμήδης με τη βοήθεια του παραπάνω νόμου ισορροπίας των μοχλών μπόρεσε να υπολογίσει το εμβαδό τμήματος παραβολής. Ισορρόπισε δηλ αυτό το άγνωστο εμβαδό με ένα γνωστό, οπότε η θέση του υπομόχλιου καθόρισε και τη σχέση των μεγεθών τους.



'Αρχή' ισορροπίας των μοχλών

B_1 x = B_2 y

Θα δούμε τώρα πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον παραπάνω νόμο της Φυσικής για να βρούμε **πότε τρεις ευθείες που διέρχονται από τις κορυφές ενός τριγώνου τέμνονται στο ίδιο σημείο.**



Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ και οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ ΓΖ διέρχονται από το σημείο Κ. Τοποθετώ στα σημεία Α, Β, Γ τα αντίστοιχα βάρη β_A,β_B και β_Γ. Τα βάρη μου είναι τέτοια ώστε ώστε το κέντρο βάρους να είναι το Κ.

Ποια είναι τότε η συνθήκη που πληρούν τα ευθύγραμμα τμήματα α_1,α_2, β_1, β_2, γ_1 , γ_2;

……

Ισχύει και το αντίστροφο;

……

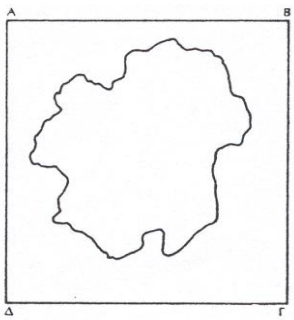
Οι διάμεσοι του τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

……

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2

Μετρώντας Εμβαδόν

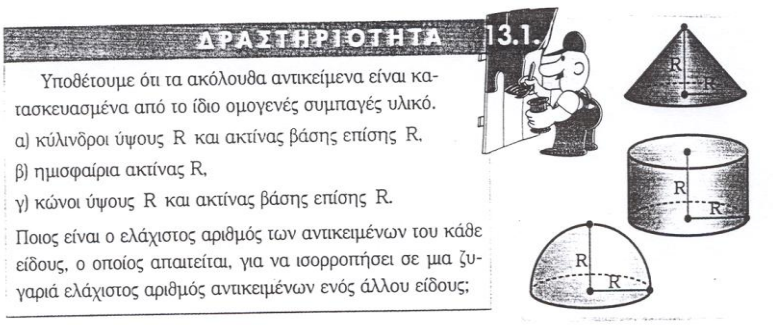
Πώς μπορώ να μετρήσω άμεσα ή έμμεσα το εμβαδόν του ακανόνιστου σχήματος που είναι σχεδιασμένο στο πλαίσιο ΑΒΓΔ;



……

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 3

Ισορροπία γεωμετρικών στερεών σε ζυγαριά



«ΒΟΛΕΣ»
ΣΕΝΑΡΙΟ ΜΕ ΤΟ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ MODELLUS

Αγγελική Μητρογιαννοπούλου

Δρ., Σχολική Σύμβουλος Μαθηματικών Α΄ Αθήνας
Επιμορφώτρια Β΄ Επιπέδου

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το σενάριο που αναπτύσσεται στη συνέχεια βασίζεται σε μία άσκηση που αποτελεί ένα πρόβλημα - θέμα από την καθημερινή πραγματικότητα. Εντάσσεται στη Άλγεβρα, αλλά προσφέρεται και για διεπιστημονική προσέγγιση με το μάθημα της Φυσικής. Επίσης υπάρχει δυνατότητα επέκτασής του στο Λύκειο.
Το κείμενο που ακολουθεί περιλαμβάνει το σκεπτικό και το θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο βασίζεται το σενάριο με την ανάλυση των απαιτούμενων φάσεων υλοποίησής του και φυσικά τις οδηγίες για τον καθηγητή (Σχέδιο Διδασκαλίας) και το Φύλλο Εργασίας του μαθητή .
Επίσης γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στην παιδαγωγική αξία του λογισμικού Modellus, αναφορικά με τη σημασία του και την αξιοποίησή του στη διδακτική διαδικασία των Μαθηματικών γενικά, αλλά και ειδικότερα στο θέμα των βολών.
Επιπλέον στο Σχέδιο Διδασκαλίας αναφέρονται με συνοπτικό τρόπο για διευκόλυνση του εκπαιδευτικού και τα εξής: Σκοπός, Στόχοι, Απαιτούμενες γνώσεις μαθητών, Αξιολόγηση ως προς τη διαπίστωση της μάθησης

ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Πρόκειται για μία εργασία που βασίζεται στην αντιμετώπιση, μέσα από πειραματισμό και εφαρμογή διαφόρων εναλλακτικών περιπτώσεων, συγκεκριμένων ασκήσεων του σχολικού εγχειριδίου, λίγο διαφοροποιημένων, οι οποίες ανταποκρίνονται σε πραγματικές συνθήκες, οικείες στους μαθητές.

Εντάσσεται στην *Άλγεβρα* και συγκεκριμένα στην ενότητα της παραβολής. Θα μπορούσε επίσης να εφαρμοστεί και στην Α΄ Λυκείου εμπλουτισμένο με αντίστοιχες ασκήσεις .

ΣΚΕΠΤΙΚΟ ΤΩΝ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

Ήδη από τον τρόπο παρουσίασης του πρώτου προβλήματος στο Φύλλο Εργασίας των μαθητών προκαλείται το ενδιαφέρον τους, διότι φαίνεται μία άμεση εφαρμογή των μαθηματικών στην πραγματική ζωή. Αυτό το γεγονός από μόνο του είναι μία **καινοτομία**, η οποία ενισχύεται από τη δυνατότητα διεπιστημονικής εμπλοκής με το μάθημα της Φυσικής.

Αυτή ακριβώς η δυνατότητα αποδίδει μία **προστιθέμενη αξία** στις δραστηριότητες του εν λόγω σεναρίου. Επιπλέον η δυνατότητα συνεργασίας μεταξύ των μαθητών, δεδομένου ότι δουλεύουν σε μικρές ομάδες, προσφέρει μία άλλη διάσταση στη διδασκαλία. Οι μαθητές μπορούν να συνεργαστούν και να πειραματιστούν με τη βοήθεια των ερωτημάτων στο σχετικό φύλλο εργασίας.

Έτσι επιτυγχάνεται ενεργητική, βιωματική μάθηση με προσωπικό νόημα για το μαθητή, συνεργατική μάθηση σε μικρές ομάδες, παιδαγωγική και συμβουλευτική καθοδήγηση εκπαιδευτικών, ποιοτική αξιολόγηση επίδοσης, διαλογική σχέση δασκάλου - μαθητή με ανάλογο βαθμό προσωπικής ευθύνης και αυτονομίας του μαθητή και φυσικά εξελισσόμενο εκπαιδευτικό σύστημα. Το αποτέλεσμα είναι ότι ο Η/Υ γίνεται **εργαλείο έκφρασης, διερεύνησης, πειραματισμού και αναζήτησης** στα χέρια και τον έλεγχο των μαθητών[1]. Κυρίως όμως μέσα από τον πειραματισμό και τη δοκιμή μπορεί να ανακαλύψει τη νέα γνώση[2], αλλά και να τη μεταφέρει σε νέες καταστάσεις. Με αυτόν τον τρόπο ενισχύεται η διαδικασία της

---

[1] Χρ. Κυνηγού, «Η ευκαιρία που δεν πρέπει να χαθεί: η υπολογιστική τεχνολογία ως εργαλείο Έκφρασης και Διερεύνησης στη Γενική Παιδεία», στο Α. Καζαμία - Μ. Κασσωτάκη, «Ελληνική εκπαίδευση: προοπτικές ανασυγκρότησης και εκσυγχρονισμού», εκδ. Σείριος, Αθήνα 1995, σ. 395

[2] Chr. Kynigos, «Innovation-in-practice: teacher strategies and beliefs constructed with computer-based exploratory classroom mathematics», PME 20, v. 3, ed. Luis Puig – Angel Gutiérrez, σσ. 220-221

ανακαλυπτικής μάθησης υπέρμαχοι της οποίας ήταν ο Dewey και ο Bruner. Ο **Bruner** μάλιστα αντιλαμβάνεται τη μάθηση να δομείται δυναμικά και προοδευτικά μέσα από τρία επίπεδα - στάδια, το **επίπεδο δραστηριοτήτων (enactive),** το **εικονικό (iconic)** και το **συμβολικό (symbolic)**[3]. Αυτή ακριβώς η τριπλή δυνατότητα προσφέρεται από το λογισμικό **Modellus** με τα εργαλεία τα οποία διαθέτει. Στο σημείο αυτό είναι απαραίτητο να δούμε την παιδαγωγική του διάσταση.

Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές τόσο από γνωστική όσο και από επιστημολογική άποψη κατά τη μελέτη των συναρτήσεων, αλλά και των συναρτησιακών σχέσεων αναφέρονται συχνά στη βιβλιογραφία και κυρίως συναντώνται στη διδακτική πρακτική. Στα σχολικά εγχειρίδια οι συναρτήσεις δίνονται είτε αλγεβρικά είτε γραφικά, οπότε οι μαθητές αδυνατούν να συλλάβουν τη φυσική ή πραγματική έννοια που τις διέπουν, οπότε έχουν δυσκολία στην αναγνώριση και χρησιμοποίηση συναρτήσεων. Οι δυσκολίες εντοπίζονται κυρίως στις μικρές τάξεις του Γυμνασίου, με αποτέλεσμα αργότερα το πρόβλημα να είναι εντονότερο[4]. Οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολία όταν πρόκειται να ασχοληθούν με καταστάσεις-προβλήματα που έχουν ένα συγκεκριμένο φυσικό περιεχόμενο. Η μετάβαση από το φυσικό φαινόμενο ή τα εμπειρικά δεδομένα στην επίσημη μαθηματική γνώση με ενίοτε φορμαλιστική μορφή προϋποθέτει κατανόηση των συναρτησιακά μεταβαλλόμενων μεγεθών. Η μελέτη ενός φυσικού συστήματος παραπέμπει σε μία αφηρημένη μαθηματική έννοια, αλλά και ο μαθηματικός τύπος παρέχει νόημα στο φυσικό σύστημα. Ποια από τις δυο πορείες προηγείται της άλλης είναι δύσκολο να απαντηθεί. Δια τούτο είναι προτιμότερο να υιοθετείται μία λιγότερο φορμαλιστική προσέγγιση πιο κοντά σε διαισθητικές αντιλήψεις, οι οποίες βοηθούν την κατανόηση των συναρτήσεων. Το βέβαιο είναι πως οι πολλαπλές αναπαραστάσεις ενός λογισμικού και η σύνδεσή τους με ρεαλιστικές καταστάσεις δίνουν τη δυνατότητα για αμφίπλευρη πορεία, δηλαδή με μετάβαση από το φυσικό σύστημα στη μαθηματική περιγραφή του και αντίστροφα, με αποτέλεσμα την καλλίτερη αντίληψη τόσο του φαινομένου όσο και του μαθηματικού τύπου που το αντιπροσωπεύει.

Η αναπαράσταση λοιπόν των πληροφοριών μέσα από το σύστημα μετατρέπεται σε μαθηματική τυποποίηση με τη γραφική απεικόνιση ή τη

---

[3] J. Bruner, «Toward a theory of instruction», 1966, σ. 11 &
H. Freudenthal, «Didactical Phenomenology of Mathematical Structures», D. Reidel Publishing Company, 1983, σ. 30 &
Γ. Φιλίππου – Κ. Χρίστου, ό.π., σσ. 67, 69, όπου για το τελευταίο στάδιο αναφέρεται ότι η μάθηση γίνεται χειριστικά.

[4] Ι. Μαμωνά – Downs, «Οι συναρτήσεις στη Μαθηματική Παιδεία», Πρακτικά 1ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Εκπαίδευσης – Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ: 'Τα Μαθηματικά στην Εκπαίδευση και την Κοινωνία', Αθήνα 1996, σ. 325

συμβολική καταγραφή ταυτόχρονα. Συνεπώς ο μαθητής μπορεί να παρακολουθεί την εξέλιξη του φαινομένου και την ίδια στιγμή και τη μαθηματική της έκφραση. Επιπλέον με το εργαλείο της **παρουσίασης** μπορεί να κάνει όσες αλλαγές επιθυμεί στην πορεία της κίνησης, οπότε σύμφωνα με την εποικοδομητική προσέγγιση ο μαθητής έχει τον έλεγχο των μεταβολών και πειραματιζόμενος ανακαλύπτει τη νέα γνώση συνδέοντας ένα φυσικό φαινόμενο με σχετικές μαθηματικές έννοιες. Έτσι από το ενεργητικό επίπεδο, το επίπεδο των δραστηριοτήτων (ποδόσφαιρο, ρίψη) περνάμε στο συμβολικό με την αποτύπωση της μαθηματικής εξίσωσης στο γράφημα, αξιοποιώντας και το εικονικό με την αναπαράσταση στο εργαλείο της παρουσίασης το οποίο προσομοιώνει την κίνηση που μελετάται και βοηθά το μαθητή να αναζητήσει και το 'κρυμμένο' μαθηματικό τύπο πίσω από την παραβολική τροχιά. 'Τρέχοντας' το πρόγραμμα ο μαθητής έχει δυνατότητα, με την ενεργητική συμμετοχή του, για άμεσο χειρισμό της προσομοίωσης, οπότε μπορεί να παρακολουθήσει την κίνηση σε μία δεδομένη διαδρομή ή περισσότερες, της αρεσκείας του, πειραματιζόμενος με σταθερά και μεταβλητά μεγέθη. Πέρα από την ανακαλυπτική μάθηση, όπως την εννοεί ο Bruner, ο μαθητής υιοθετεί μία θετική στάση για το μάθημα, διότι αντλεί χαρά και ικανοποίηση από μία μαθηματική δραστηριότητα με ανακάλυψη.

Τα μαθηματικά πλέον δε φαίνονται στατικά, αλλά παίρνουν δυναμική μορφή, και έτσι μπορούν τα παιδιά να βιώσουν «αφαιρετικές» καταστάσεις και να κατανοήσουν έννοιες δύσκολες. Το μηχάνημα λοιπόν δίνει τη δυνατότητα του **πειραματισμού**, των **υποθέσεων** και του **ελέγχου**. Δίνεται έμφαση σε **εξερεύνηση** και **πειραματική προσέγγιση**, αλλά και σε **αριθμητικές** και **αλγοριθμικές** διαδικασίες. Εδώ ο δάσκαλος μπορεί να αναπτύξει το πρόβλημα, όπως παρουσιάζεται κατά περίπτωση και μέσα στο αντίστοιχο φυσικό, ιστορικό και κοινωνικό πλαίσιο.

Όμως απαιτείται επαναπροσδιορισμός των στόχων διδασκαλίας και ειδικά στο πως θα χρησιμοποιηθεί ο Η/Υ και το τι θα πρέπει να μάθει ο μαθητής. Η Τεχνολογία δεν μπορεί να αντικαταστήσει την Παιδαγωγική, αλλά ο μαθηματικός είναι υπεύθυνος για τη διεξαγωγή της διδασκαλίας η οποία μέσω της Τεχνολογίας μπορεί να γίνει πιο αποτελεσματική. Για να συμβεί όμως αυτό απαιτούνται 3 ικανότητες από μέρους του διδάσκοντα σχετικά με **Μαθηματικά**, **Διδακτική** και **Πληροφορική**[5] (δηλαδή βασικές χειριστικές λειτουργίες).

Έτσι η διδασκαλία μπορεί να γίνει διαφορετική, δίνοντας έμφαση σε αλγοριθμικές διαδικασίες και κυρίως σε πειραματική προσέγγιση, κάνοντας

---

5 B. R Hodgson, «The roles and needs of mathematics teacher using IT», in «Integrating information technology into education», p. 32

τον ίδιο το μαθητή ένα μικρό ερευνητή, μετέχοντας με τον ίδιο τον διδάσκοντα σε μία διαδικασία ενεργούς έρευνας, η οποία προάγει την αποτελεσματική διδασκαλία και βελτιώνει τη μάθηση, ενώ ο δάσκαλος λειτουργεί σε ένα σύνθετο περιβάλλον μεταξύ διδασκαλίας, τεχνολογίας και ανθρώπινων σχέσεων[6].

ΠΛΑΙΣΙΟ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ

Το εν λόγω σενάριο προσφέρεται για εφαρμογή στη **Γ΄ Γυμνασίου** με δυνατότητα αξιοποίησής του στο μάθημα της Φυσικής.

Χρόνος και Χώρος υλοποίησης

Για την εμπλοκή ενός τμήματος με το εν λόγω θέμα απαιτούνται 3 διδακτικές ώρες εναλλάξ σε τάξη - εργαστήριο Πληροφορικής - τάξη και ενδεχομένως και άλλη ώρα για περαιτέρω διερεύνηση, αν υπάρξει συνεργασία με τον διδάσκοντα Φυσική.

Προαπαιτούμενες γνώσεις μαθητών και βοηθητικά εργαλεία

Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν την έννοια της παραβολής, καθώς και τον τρόπο γραφικής της παράστασης σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Για την εργασία στην τάξη απαιτούνται πρόχειρα τετράδια και πίνακας με χρωματιστούς μαρκαδόρους ή κιμωλίες, ενώ για το εργαστήριο Φύλλο Εργασίας το οποίο παρατίθεται στο τέλος της περιγραφής του εν λόγω σεναρίου.

Αλληλεπίδραση των εμπλεκομένων μαθητών

Ήδη έχει γίνει σχετικός λόγος στο σκεπτικό της δραστηριότητας, από παιδαγωγική άποψη, αναφορικά με την προστιθέμενη αξία. Τώρα θα δοθεί έμφαση στο διαδικαστικό θέμα λειτουργίας της. Οι μαθητές δουλεύουν σε ομάδες των 2-3 ατόμων ανά υπολογιστή, ώστε να συνεργάζονται. Φυσικά οι ρόλοι είναι διακριτοί και εναλλάσσονται με την καθοδήγηση του διδάσκοντα, αναφορικά με την ανάγνωση του φύλλου εργασίας, την εκτέλεση των διαφόρων βημάτων και τη σημείωση των απαντήσεων στα διάφορα ερωτήματα, ώστε να μη ζημιώνεται κανένα μέλος της ομάδας. Ενίοτε μπορεί να παραστεί ανάγκη για εργασία σε μεγαλύτερες ομάδες, αν κάποιο μηχάνημα βρίσκεται ή τεθεί εκτός λειτουργίας.

Διδακτικοί στόχοι

---

6 F. Nicassio, «An action research role for teachers», in «Integrating information technology into education», pp. 40, 43

Οι μαθητές θα μπορέσουν να αντιληφθούν καλλίτερα την έννοια της παραβολής μέσα από μία άλλη πολυδιάστατη οπτική, διαφορετική από την προτεινόμενη στο σχολικό εγχειρίδιο (**μαθησιακοί** στόχοι).

Με αυτό τον τρόπο θα έχουν τη δυνατότητα να αποδεσμευτούν από τη στατική αναπαράσταση θεμάτων σε τετράδιο - πίνακα και να πειραματιστούν δυναμικά με τα εργαλεία του συγκεκριμένου λογισμικού, **κατασκευάζοντας** και **παρατηρώντας** την πορεία τους με ελεγχόμενη επαναληπτική δυνατότητα (**χρηστικοί** στόχοι).

Τέλος επιτυγχάνονται και **κοινωνικο-πολιτισμικοί** στόχοι μέσα από την ομαδική εργασία, δηλαδή τη συνεργασία και την επικοινωνία μεταξύ των μαθητών, αλλά και μεταξύ μαθητών και εκπαιδευτικού ο οποίος, με ερωτήσεις κατάλληλα διατυπωμένες, αλλά και υποδείξεις, τους υποστηρίζει στη λύση του προβλήματος, ώστε να αντιληφθούν τη σημασία των μαθηματικών και σε θέματα της πραγματικής ζωής. Το αποτέλεσμα είναι να υπάρχει πραγματική διάδραση στο πλαίσιο της κοινωνικής αλληλεπίδρασης των εμπλεκομένων μαθητών / εκπαιδευτικών.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

Φάσεις υλοποίησης

Α΄, στην τάξη (1 h)

Εφόσον έχει διδαχθεί η έννοια της παραβολής, οι μαθητές ασχολούνται μέσα στην τάξη με την επίλυση των επιλεγμένων ασκήσεων όπως είναι διατυπωμένες στο βιβλίο. Κατόπιν τους δίνεται η διαφοροποιημένη εκδοχή, όπως διατυπώνεται στο Φύλλο Εργασίας.

Β΄, στο εργαστήριο (1 h)

Η συνέχεια γίνεται στο εργαστήριο Πληροφορικής, μετά από συνεννόηση με τον υπεύθυνο καθηγητή Πληροφορικής, όπου οι μαθητές αξιοποιώντας τα εργαλεία του λογισμικού **Modellus** επιτυγχάνουν συμβολική και εικονική αναπαράσταση των θεμάτων τους. Επίσης με κατάλληλα ερωτήματα προτρέπονται σε διαφοροποιήσεις και πειραματισμούς για εξαγωγή συμπερασμάτων

Γ΄, στην τάξη (1 h)

Η ολοκλήρωση του θέματος θα γίνει στην τάξη με συζήτηση για τα αποτελέσματα και τις περαιτέρω εφαρμογές.

Επίσης ενδεχομένως να χρειαστούν και άλλες ώρες σε περίπτωση συνεργασίας με τον διδάσκοντα Φυσική ή ατομική ενασχόληση των μαθητών και επίσκεψη εκ νέου στο εργαστήριο.

Προβλήματα κατά την υλοποίηση

Όσο καλά και να είναι σχεδιασμένη μία δραστηριότητα για το εργαστήριο, πάντα ελλοχεύει ο κίνδυνος κάποιων προβλημάτων, γι' αυτό ο εκπαιδευτικός πρέπει να είναι προετοιμασμένος με εναλλακτικές λύσεις για την αντιμετώπιση ανεπιθύμητων και απρόβλεπτων καταστάσεων, όπως διακοπή ρεύματος, οπότε δουλεύουν παραδοσιακά στα πρόχειρά τους, ή βλάβη κάποιου υπολογιστή, οπότε γίνεται ανασύνταξη ομάδων.

Επέκταση των δραστηριοτήτων στο Λύκειο

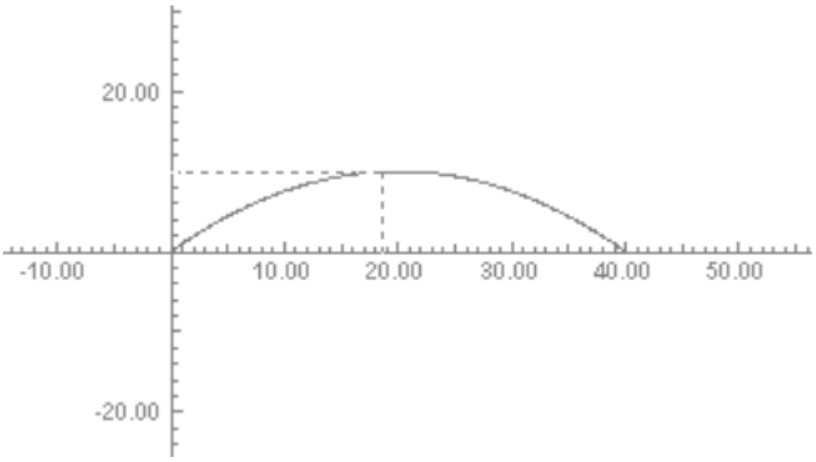
Το θέμα της **βολής** είναι πρόσφορο και για το Λύκειο. Μάλιστα θα μπορούσε να υλοποιηθεί η όλη δραστηριότητα και πιο εμπλουτισμένη, δεδομένου ότι υπάρχει και σχετική άσκηση στο βιβλίο τη Άλγεβρας Α΄ Λυκείου (13/ σ. 141).

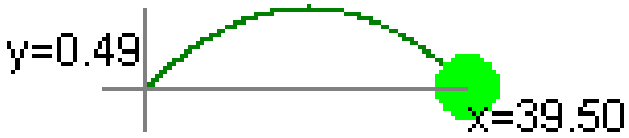
ΣΧΕΔΙΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Το πρόβλημα (Άσκηση 8/σ.156)

Στο βιβλίο δίδεται η εικόνα της τροχιάς μιας μπάλας και ζητείται να αποδειχθεί ότι η κίνηση υπακούει σε συγκεκριμένο τύπο. Στο προς μελέτη θέμα θα δοθεί ο τύπος και θα μελετηθεί / διερευνηθεί η εν λόγω κίνηση.

Με τις οδηγίες του φύλλου εργασίας οι μαθητές δημιουργούν στιγμιότυπα, όπως τα ακόλουθα και απαντούν σε διάφορα ερωτήματα, προκειμένου να προβούν σε διαπιστώσεις και συμπεράσματα.


20.00
-10.00
10.00
20.00
30.00
40.00
50.00
-20.00


y=0.49
x=39.50

y=0.00
x=40.00

Το πρώτο σχήμα έγινε με το εργαλείο **γράφημα** και τα επόμενα δύο με αυτό της **παρουσίασης,** επιλέγοντας **τροχιά** και **ίχνος** αντίστοιχα (με pixel **0.5**).

Σκοπός: Κατασκευή μιας προβληματικής κατάστασης με αφορμή μία άσκηση του σχολικού εγχειριδίου και δημιουργία διαφόρων αναπαραστάσεων τους με τη βοήθεια του Η/Υ και του εκπαιδευτικού λογισμικού Modellus[7], προκειμένου οι μαθητές να μελετήσουν την εν λόγω κίνηση, να προβούν σε διαπιστώσεις και να εξαγάγουν συμπεράσματα.

Στόχοι: Οι μαθητές να προβούν στις παρακάτω ενέργειες:

α) Να επεξεργαστούν με μαθηματικό τρόπο διαδικασίες που προκύπτουν μέσα από οικεία στην εμπειρία τους προβλήματα φυσικής

β) Να παρατηρούν μία προσομοίωση, έτσι ώστε να μπορούν να την περιγράφουν με φυσική γλώσσα και να την εκφράζουν με μαθηματικό τρόπο με τη βοήθεια μιας μεταβλητής

γ) Να χειρίζονται συναρτησιακές σχέσεις με διαφορετικούς τρόπους μέσα από ένα περιβάλλον ελέγχου, καθοριζόμενο μάλιστα από τους ίδιους.

δ) Να διερευνήσουν τις λανθασμένες κινήσεις τους.

ε) Να κάνουν διορθώσεις.

στ) Να. ερμηνεύσουν με όρους αλγεβρικούς τα εμπειρικά δεδομένα που προκύπτουν από μεταβολές σε φυσικά συστήματα

ζ) Να συνεργαστούν μεταξύ τους στο πλαίσιο ομαδικής εργασίας.

Μέθοδος: Καθοδηγούμενη διδασκαλία – ανακαλυπτική μάθηση

Μέσα: Η/Υ, φύλλο εργασίας.

[7] Το λογισμικό αυτό δημιουργήθηκε βασικά για εξέταση προβλημάτων της Φυσικής, ώστε μέσα από τη δημιουργία κατάλληλων 'μοντέλων' να εξυπηρετηθεί η μελέτη και κατανόηση του προβλήματος. Όμως σε θέματα κοινά των δύο επιστημών, όπως η περίπτωση της βολής, κάλλιστα μπορεί να αξιοποιηθεί και για τη μαθηματική διαπραγμάτευση της εν λόγω έννοιας.

Απαιτούμενες Γνώσεις:

Η έννοια της μεταβλητής και της συνάρτησης

Η έννοια της παραβολής.

Η γραφική παράσταση παραβολής.

Αξιολόγηση ως προς τη διασπίστωση της μάθησης:

Διατύπωση ερωτημάτων στο φύλλο εργασίας αναφορικά με:

α) την πολλαπλή αναπαράστασή του εξεταζόμενου θέματος και τη χρησιμότητά της

β) τη συμπεριφορά της γραφικής συνάρτησης της δεδομένης άσκησης, τόσο για θετικές όσο και για αρνητικές τιμές του **x**

γ) τη μαθηματική εξήγηση των ανωτέρω περιπτώσεων

Εργασία στο σπίτι:

- Ολοκλήρωση της δραστηριότητας και συμπλήρωσή της με ορισμένα ερωτήματα για εξάσκηση και ενδεχομένως ευχάριστη ενασχόληση.

- Επιπλέον άσκηση από το βιβλίο ή και εκτός αυτού

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

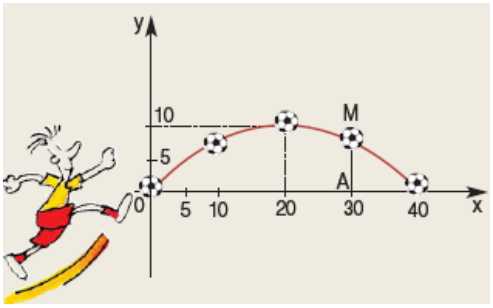
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:.....

ΤΜΗΜΑ: .....

Ημερομηνία .....

Λογισμικό: **Modellus**

Το πρόβλημα (άσκηση 8/σ.156 τροποποιημένη)



Στη διπλανή εικόνα η τροχιά που διαγράφει η μπάλα εκφράζεται με την εξίσωση

$y = -1/40 * x^2 + x$, με

$0 \leq x \leq 40$

Ας προσπαθήσουμε να την αναπαράγουμε με τη βοήθεια του Η/Υ και του λογισμικού **Modellus.**

Βήμα 1ο

Στη κενή επιφάνεια του πίνακα **Μοντέλο** (πάνω αριστερά) πληκτρολογούμε τον τύπο της τροχιάς. Στη συνέχεια πατάμε το κουμπί **Διερμηνεία** για επιβεβαίωση σωστής γραφής.

Κατόπιν με τον πίνακα **Έλεγχο** (πάνω δεξιά) μπορούμε να ενεργοποιήσουμε τον τύπο, αφού αντικαταστήσουμε το **t** με **x** από την εντολή **επιλογές,** γράφοντας στο νέο πίνακα που εμφανίζεται **x** αντί **t** (ανεξάρτητη μεταβλητή) και δίνοντας στα όρια 0 για την ελάχιστη τιμή και 40 για τη μέγιστη. Στη συνέχεια Ο.Κ, οπότε βλέπουμε την αλλαγή. Τώρα με 'κλικ' στο διπλανό εικονίδιο δραστηριοποιείται η κίνηση της τροχιάς. Ας την παρακολουθήσουμε με τα επόμενα βήματα.

Βήμα 2ο

Από την εντολή **Παράθυρο** του πίνακα Μοντέλο επιλέγουμε **Νέο γράφημα**, οπότε εμφανίζεται η γραφική παράσταση της τροχιάς, η οποία μπορεί να σχεδιάζεται εκ νέου κάθε φορά που ενεργοποιούμε το εικονίδιο , ενώ με το διπλανό του εικονίδιο διακόπτεται η κίνηση, όποτε θέλουμε, προκειμένου να εντοπίσουμε συγκεκριμένες συντεταγμένες και θέσεις της μπάλας.

Βήμα 3ο

Από το **Παράθυρο** πάλι επιλέγουμε **Νέα παρουσίαση**, οπότε εμφανίζεται ένας νέος πίνακας. Με 'κλικ' στο εικονίδιο της μπάλας (αριστερή στήλη εργαλείων) και σύρσιμό της εμφανίζεται στη λευκή επιφάνεια. Με δεξί 'κλικ' πάνω της εμφανίζεται ο πίνακας **Σωματίδιο**, όπου επιλέγουμε **x** ως οριζόντιο (άξονα) και **y** ως κατακόρυφο, ενώ από τα χαρακτηριστικά επιλέγουμε **τροχιά** και κατόπιν Ο.Κ

Ας ενεργοποιήσουμε τώρα το κάμποσες φορές. Τι παρατηρούμε;

……

Ας επιλέξουμε **ίχνη** στα χαρακτηριστικά. Τι παρατηρούμε τώρα; ……

Βήμα 4ο

Ας τροποποιήσουμε τις τιμές του **x** με την εντολή **Επιλογές** από τον πίνακα **Έλεγχο.**

Μπορείτε να δώσετε διάφορους αριθμούς, ακόμη κι αρνητικούς και να ενεργοποιείτε την κίνηση κάθε φορά.

Τι παρατηρούμε;……

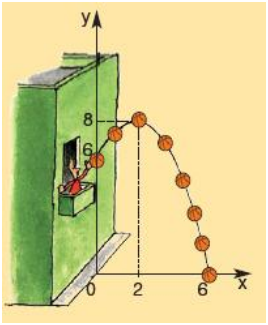
Που πιστεύετε ότι μπορεί να φανεί χρήσιμη αυτή η αναπαράσταση;

……

Τι επιτυγχάνεται με την αξιοποίησή της; ……

Άσκηση

Επαναλάβετε την παραπάνω διαδικασία για την παρακάτω περίπτωση (άσκηση 8/σ.157 τροποποιημένη).

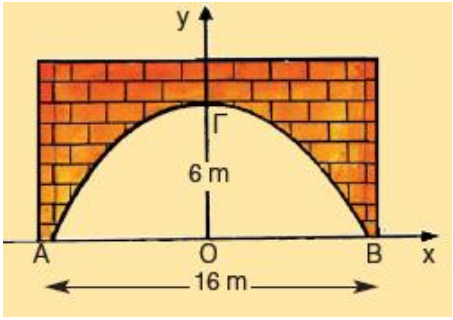


Στη διπλανή εικόνα η τροχιά που διαγράφει η μπάλα εκφράζεται με την εξίσωση

$$y = -\frac{1}{2} * x^2 + 2x + 6 \quad \text{με} \quad 0 \leq x \leq 6$$

Εργασία για το σπίτι

Εργαστείτε όπως προηγουμένως για την άσκηση 9/σ.157 (Μπορείτε να την αρχίσετε από τώρα)



Στη διπλανή εικόνα η κάθετη τομή μιας σήραγγας εκφράζεται με την εξίσωση

$$y = -\frac{3}{32} * x^2 + 6 \quad \text{με}$$

$$-8 \leq x \leq 8.$$

Σημείωση

Για καλλίτερα οπτικά αποτελέσματα πειραματιστείτε με τις τιμές των pixel στις κλίμακες για τον πίνακα Γράφημα, αλλά και για τον πίνακα Σωματίδιο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

BRUNER J., «Towards a theory of instruction», 1966.

FREUDENTAL H., «Didactical Phenomenology of Mathematical Structures», D. Reidel Publishing Company, 1983.

HODGSON B.R., «The roles and needs of mathematics teacher using IT», Integrating information technology into education.

ΚΥΝΗΓΟΥ ΧΡ., «Η ευκαιρία που δεν πρέπει να χαθεί: η υπολογιστική τεχνολογία ως εργαλείο Έκφρασης και Διερεύνησης στη Γενική Παιδεία», στο Α. Καζαμία - Μ. Κασσωτάκη (επιμ.), «Ελληνική εκπαίδευση: προοπτικές ανασυγκρότησης και εκσυγχρονισμού», εκδ. Σείριος, Αθήνα 1995, σσ. 394 – 415.

KYNIGOS CHR., «Innovation-in-practice: teacher strategies and beliefs constructed with computer-based exploratory classroom mathematics», PME 20, v. 3, ed. Luis Puig – Angel Gutiérrez, σσ. 217-224.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' Γυμνασίου, Βιβλίο εκπαιδευτικού, ΟΕΒΔ 2007.

Ι. ΜΑΜΩΝΑ – DOWNS, «Οι συναρτήσεις στη Μαθηματική Παιδεία», Πρακτικά 1ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Εκπαίδευσης – Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ: 'Τα Μαθηματικά στην Εκπαίδευση και την Κοινωνία', Αθήνα 1996, σσ. 325-324.

NICASSIO F., «An action research role for teachers», Integrating information technology into education.

ΦΙΛΙΠΠΟΥ Γ. - ΧΡΙΣΤΟΥ Κ., «Διδακτική των μαθηματικών», εκδ. Γ. Δαρδανού, Αθήνα 1995.

ΔΙΑΓΝΩΣΗ ΤΩΝ ΕΜΠΟΔΙΩΝ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗΣ

Στέλιος Ορφανός

Σχολικός σύμβουλος Φυσικών Επιστημών Δωδεκανήσου

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η συνάρτηση παραμένει μια δύσκολη μαθηματική έννοια για την πλειοψηφία των μαθητών. Στη βιβλιογραφία εντοπίζονται οι βασικές παράμετροι αυτής της δυσκολίας. Στη φυσική υπάρχουν επιπλέον παράμετροι της δυσκολίας κατανόησης των συναρτήσεων. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται δεδομένα ποιοτικής έρευνας, που πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια διδακτορικής διατριβής, εστιάζοντας στη διάγνωση των δυσκολιών στην κατανόηση των συναρτήσεων με τη συμβολή δραστηριοτήτων μοντελοποίησης.

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ

Παρά τις διάφορες προσπάθειες, η έννοια της συνάρτησης παραμένει μια δύσκολη μαθηματική έννοια για την πλειοψηφία των μαθητών. Στη βιβλιογραφία εντοπίζονται τρεις βασικές παράμετροι αυτής της δυσκολίας. Η πρώτη συνδέεται με τη συνθετότητα της έννοιας αλλά και με την ποικιλία των μαθηματικών νοημάτων που σχετίζονται με αυτήν, όπως μεταβλητή, συν-μεταβολή, σύνολο και άλλες. Η δεύτερη αφορά στο γεγονός ότι η έννοια της συνάρτησης ενυπάρχει στο μεγαλύτερο μέρος των μαθηματικών αλλά και των σχολικών μαθηματικών: οι τέσσερις πράξεις, η μέτρηση στη γεωμετρία, η επίλυση εξισώσεων και άλλες τεχνικές και αλγόριθμοι μπορούν να μελετηθούν από τη σκοπιά των συναρτήσεων. Αυτό δυσκολεύει ιδιαίτερα τη διαμόρφωση ενός ενιαίου και γενικά αποδεκτού πλαισίου μάθησης για την έννοια της συνάρτησης. Η τρίτη παράμετρος σχετίζεται με την αναγκαιότητα να αντιληφθούν οι μαθητές την έννοια της συνάρτησης σε ένα επίπεδο ως διαδικασία και σε ένα άλλο ως αντικείμενο. Για παράδειγμα, για να μπορέσει ο μαθητής να ερμηνεύσει τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, θα πρέπει να κατανοήσει τη συνάρτηση ως διαδικασία, ενώ για να μελετήσει την παράγωγο ή το ολοκλήρωμά της θα πρέπει να αντιληφθεί τις τρεις συνιστώσες της έννοιας, δηλαδή το πεδίο τιμών, το πεδίο ορισμού και τον κανόνα αντιστοίχησης ως μια ενιαία εννοιολογική οντότητα (Harel & Kaput, 1991). Η σημερινή πραγματικότητα των σχολικών μαθηματικών δεν παρέχει στους μαθητές τη δυνατότητα να συνειδητοποιήσουν και να αξιοποιήσουν αυτήν τη διάκριση. Αντίθετα, συχνά υπερτονίζει τον ένα τρόπο αντίληψης της έννοιας της συνάρτησης έναντι του άλλου, με σοβαρές συνέπειες στη μάθηση που επιτυγχάνεται από τους μαθητές, (Γούδας & Σακονίδης, 2002).

Στην παραδοσιακή διδασκαλία που η Φυσική παρουσιάζεται με μορφή επεισοδίων, οι έννοιες στους μαθητές είναι αδύναμα δομημένες και τμηματικές. Μία απομονωμένη έννοια είναι πρακτικά χωρίς νόημα και άχρηστη. Στην επιστημονική θεωρία, μία έννοια πάντοτε σχετίζεται με άλλες έννοιες, μέσω αξιωμάτων, ορισμών και/ή νόμων, το δίκτυο των οποίων φτιάχνει την οργάνωση της έννοιας.

Η ποσοτικοποίηση μιας έννοιας γίνεται σύμφωνα με νόμους και ακολουθώντας κανόνες που τίθενται από τη θεωρία που ανήκει η έννοια. Οι κανόνες ποσοτικοποίησης προσδιορίζουν πώς πρακτικά να μετρήσουμε μια έννοια και προσδιορίζουν τα αντίστοιχα όρια της προσέγγισης και της ακρίβειας.

Οι φυσικοί μαθαίνουν για τα φαινόμενα ερευνώντας τις ιδιότητές τους εμπειρικά και πλαισιώνοντας τα συμπεράσματά τους με όρους μοντέλων και θεωριών. Καταλαβαίνουν τα φυσικά πράγματα μέσω αναπαραστάσεων με

δομές δοκιμασμένων μοντέλων, (Hestenes D, 1987). Ο Νεύτων ήταν ο πρώτος, που κατείχε ένα πλήρες και συνεκτικό σύστημα αρχών για να μοντελοποιήσει τον Φυσικό Κόσμο, το σύστημα των αρχών αυτών είναι το έργο του Principia (Hestenes D, 1992).

Οι δραστηριότητες μοντελοποίησης αν σχεδιαστούν κατάλληλα μπορούν να αποτελέσουν ένα κατάλληλο πλαίσιο συμβατό με τις ιδέες του Vygotsky και να δώσουν ουσιαστικές ευκαιρίες στους μαθητές, να διαπιστώσουν και να κατανοήσουν τη σπουδαιότητα της μοντελοποίησης στην επιστήμη, να ανακαλύψουν και να οικοδομήσουν τη γνώση τους, να μάθουν από τις εμπειρίες τους, να επεξεργαστούν νέες έννοιες, να συμβάλλουν στη βαθύτερη κατανόηση των εννοιών και των νόμων της Φυσικής.

Ανάλογα με τον τρόπο συλλογισμού που ενεργοποιείται, τα προγράμματα μοντελοποίησης ταξινομούνται σε:

- Ποσοτικά, που χρησιμοποιούν αλγεβρικές σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών.
- Ποιοτικά όπου ένα σύνολο δράσεων γεννά συνέπειες που με τη σειρά τους παράγουν ένα νέο σύνολο από δράσεις με χρήση κανόνων, δομών, λογικών συναρτήσεων.
- Ημιποσοτικά, όπου χρησιμοποιούνται σχέσεις, με όρους περιγραφής κατά προσέγγιση, μεταξύ των μεταβλητών και επινοήθηκαν για εκπαιδευτική προσέγγιση.

Μπορούμε να διακρίνουμε δύο τρόπους ανάλογα με τη μελέτη των δομών ενός φαινομένου.

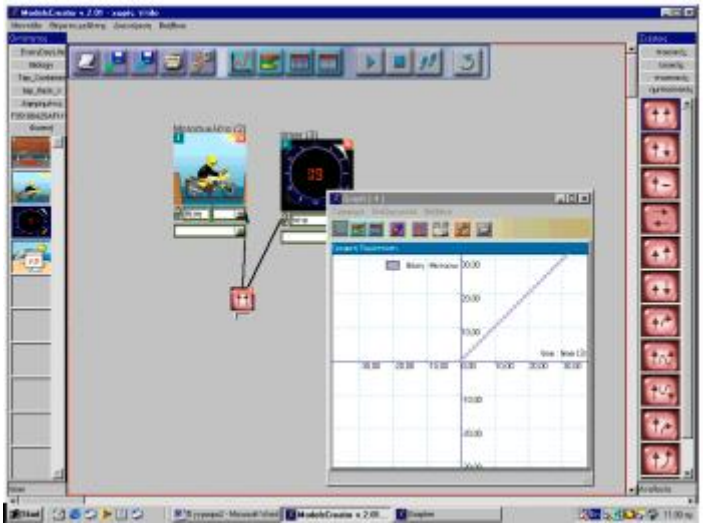
- Στα μοντέλα εξερεύνησης οι μαθητές διερευνούν τη δομή ενός μοντέλου που τους δίδεται, που είναι διαφορετική από τη δικιά τους.
- Στα μοντέλα έκφρασης δημιουργούν το μοντέλο με τις δικές τους δομές, εκφράζοντας και διερευνώντας τα δικά τους νοητικά μοντέλα.

Οι αναπαραστάσεις του μοντέλου εικόνα 1, δημιουργούν κίνητρο στους μαθητές για διερεύνηση και διευκολύνουν την σκέψη τους, συμβάλουν στην ανάπτυξη στρατηγικών, βοηθούν τους μαθητές στο να αλληλεπιδράσουν μεταξύ τους και να απαντούν στα ερωτήματα. Με τις δοκιμές επιβεβαιώνουν ή απορρίπτουν τις ιδέες τους και προχωρούν ανακαλυπτικά.

Η προσομοίωση τους κρατά το ενδιαφέρον να ασχοληθούν περισσότερο πάνω σε ένα θέμα χωρίς να βαρεθούνε ή να απογοητευθούν. Παρατηρήσαμε σε ορισμένες περιπτώσεις τους μαθητές να εντυπωσιάζονται από το αποτέλεσμα που βλέπουν στη προσομοίωση εξ αιτίας των αλλαγών που κάνουν στο

μοντέλο τους. Σε άλλες περιπτώσεις προβληματίστηκαν από την προσομοίωση και προσπάθησαν να το ερμηνεύσουν. Χαρακτηριστικές είναι οι απαντήσεις των μαθητών στα ερωτηματολόγια που τους δόθηκαν κατά τη διάρκεια των ερευνών. Στην ερώτηση τι τους φάνηκε ενδιαφέρον από το λογισμικό απάντησαν: *"Τα γραφήματα και ο πίνακας τιμών"*. Χαρακτηριστικές απαντήσεις στις ερωτήσεις τι τους φάνηκε ενδιαφέρον από την διαδικασία μάθησης και αν θεωρούν ότι κατανόησαν κάτι καλύτερα είναι: *"Οι συνδέσεις των μοντέλων μεταξύ τους", "Ο τρόπος που μπορείς να μάθεις κάτι." "Οι διάφορες λειτουργίες που είχαμε στη διάθεση μας για να εργαστούμε στα θέματα στο ερωτηματολόγιο." "Όχι. Απλώς ήταν μια επανάληψη στα όσα έμαθα στη διάρκεια της σχολικής χρονιάς", "Φυσικά αφού είδα οι νόμοι από το σχολείο να γίνονται πράξη μέσα από εικόνες κτλ." "Το γεγονός ότι η μάθηση συνδυάζεται με εικόνες και σχήματα και γίνεται πιο κατανοητή"*.

Οι μαθητές ασχολήθηκαν με ενδιαφέρον με τις δραστηριότητες και μπόρεσαν να αξιοποιήσουν τις αναπαραστάσεις του μοντέλου: πίνακα τιμών γραφική παράσταση προσομοιώσεις και ραβδογράμματα και να περάσουν από τη μία αναπαράσταση στην άλλη άμεσα. Η διατήρηση του ενδιαφέροντος των μαθητών και η ευκολία της αξιοποίησης των αναπαραστάσεων αφενός διευκόλυναν την έρευνα αλλά συνέβαλαν στη βαθύτερη κατανόηση των συναρτήσεων



Εικόνα ***Error! Unknown switch argument.****: Μοντέλο με ημιποσοτική*

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

Οι έρευνες έγιναν με ειδικά σχεδιασμένες δραστηριότητες Μοντελοποίησης για μαθητές γυμνασίου στο κεφάλαιο της Κινηματικής. Οι δραστηριότητες αξιοποίησαν τις δυνατότητες της ρεαλιστικής προσομοίωσης του εργαλείου μοντελοποίησης. Παράλληλα με την αλληλεπίδραση των μαθητών συμβάλλουν στην εννοιολογική αλλαγή, στη λεκτική αλληλεπίδραση μεταξύ μαθητών, στη βαθύτερη κατανόηση των εννοιών, (Ορφανός & Δημητρακοπούλου 2003).

Η διαδικασία μοντελοποίησης μέσω των αναπαραστάσεων του μοντέλου συνέβαλε αρχικά στον προβληματισμό των μαθητών πάνω στο φαινόμενο, στην ανακάλυψη των δυσκολιών και των εναλλακτικών ιδεών των μαθητών στις σχέσεις των μεγεθών, σε μεγάλο βαθμό από τους ίδιους τους μαθητές. Οι αναπαραστάσεις που αξιοποιήθηκαν από τους μαθητές είναι η προσομοίωση, ο πίνακας τιμών, η γραφική παράσταση και σε μικρότερο βαθμό τα ραβδογράμματα.

Οι μαθητές παρατηρούν την προσομοίωση κάθε φορά που τους φαίνεται κάτι ασυνήθιστο -άγνωστο ή δεν το έχουν κατανοήσει σε βάθος και δεν περιμένουν να το δουν. Είδαμε τους μαθητές ορισμένες φορές να εντυπωσιάζονται από την αλλαγή που έφεραν στην προσομοίωση οι τροποποιήσεις που κάνουν στο μοντέλο τους. Όταν η προσομοίωση είναι προσδοκώμενη και την έχουν κατανοήσει παρατηρούμε να επικαλύπτουν στην οθόνη του Η/Υ το παράθυρο του μοντέλου και να εστιάζουν την προσοχή τους στη γραφική παράσταση και στον πίνακα τιμών του μοντέλου. Όταν η πρόβλεψη τους συμφωνεί με την προσομοίωση, τότε κατανοούν βαθύτερα τις έννοιες και τις σχέσεις για τις οποίες έκαναν προβλέψεις· υπήρχαν και περιπτώσεις που δεν μπορούσαν να ερμηνεύσουν την προσομοίωση του μοντέλου.

Οι μαθητές για να μπορέσουν να ερμηνεύσουν τα φαινόμενα της καθημερινής ζωής με επιστημονικό τρόπο, είναι απαραίτητο να διακρίνουν την αιτία και το αποτέλεσμα, ποια μεγέθη είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές και ποια οι εξαρτημένες. Στο λογισμικό MODELLINGSPACE ο χρήστης δηλώνει ποια μεταβλητή είναι η ανεξάρτητη, όταν την συνδέει πρώτη στη σχέση. Οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν, ώστε οι μαθητές να προβληματιστούν στο είδος των μεταβλητών και στη σχέση που τις συνδέει, ώστε να οργανώσουν τις έννοιες με επιστημονικό τρόπο, αρχικά να συλλογιστούν ποιοτικά για τις σχέσεις, μετά να δημιουργήσουν μοντέλα με ημιποσοτικές σχέσεις και τελικά να μελετήσουν μοντέλα με ποσοτικές σχέσεις και να συντάξουν συναρτήσεις.

Οι παράμετροι που ανιχνεύθηκαν ότι δημιουργούν επιπλέον δυσκολίες στους μαθητές στην κατανόηση των συναρτήσεων στη Φυσική, αφορούν κυρίως το φυσικό περιεχόμενο των παραγόντων των τύπων, τις διαφορές στο περιεχόμενο του συμβολισμού μεταξύ φυσικής και μαθηματικών αλλά και στο περιεχόμενο των συναρτήσεων.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Οι μαθητές δεν χρησιμοποιούν σωστά τους τύπους· τα συνηθισμένα λάθη που παρατηρήσαμε είναι να μη γνωρίζουν τον τύπο σωστά, να κάνουν λανθασμένα αντικατάσταση και να μη ξεχωρίζουν ποιοι είναι γενικοί και ποιοι ισχύουν σε ειδικές μόνο περιπτώσεις. Οι τύποι που έχουν διδαχθεί και έχουν χρησιμοποιήσει για να λύσουν ασκήσεις φαίνεται να τους θεωρούν σαν γενικούς, ενώ ισχύουν υπό συγκεκριμένες συνθήκες.

Διάκριση Ανεξάρτητης Εξαρτημένης μεταβλητής

Παρατηρήσαμε ότι οι μαθητές δεν διακρίνουν τις μεταβλητές σε ανεξάρτητες και εξαρτημένες, ειδικά στις πρώτες δραστηριότητες. Η συχνότητα του φαινομένου αυτού ελαττωνόταν με την πρόοδο των δραστηριοτήτων. Χαρακτηριστική είναι η φράση μαθητή από απόσπασμα διαλόγου των: *"Αν πούμε ο χρόνος είναι ανάλογος με τη θέση, θα είναι το ίδιο αν πούμε η θέση είναι ανάλογη με το χρόνο;"*

Σχέση Αναλογίας

Στις πρώτες πιλοτικές έρευνες είδαμε ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονταν από τις στροβοσκοπικές εικόνες την αναλογική σχέση για να περιγράψουν πως μεταβάλλεται το μέγεθος της θέσης ως προς το χρόνο. Χρησιμοποιούσαν την αναλογική σχέση από τα πρώτα τους μοντέλα, αλλά συγχέουν τη σχέση αναλογίας με άλλες σχέσεις. Τα είδη της σύγχυσης που παρατηρήσαμε είναι:

- Οι μαθητές συμπλήρωσαν τον πίνακα τιμών με λανθασμένο τρόπο.
- Μεταξύ των σχέσεων σταθερής συνάρτησης και αναλογίας. Παρατηρήθηκε το φαινόμενο να χρησιμοποιούν τη σχέση της αναλογίας και σε περιπτώσεις που το μέγεθος ως προς το χρόνο ήταν σταθερό.
- Έκαναν λάθος πρόβλεψη για το είδος της σχέσης, αν μεταβληθεί η τιμή της σταθεράς αναλογίας. Όταν η σταθερά αναλογίας είναι η μονάδα, παρατηρήσαμε ότι οι μαθητές κατανοούν τη σχέση αναλογίας, και τις αναπαραστάσεις της, δεν υπήρχε καμία ένδειξη που να δείχνει ότι δεν κατανοούν κάτι. Οι πρώτες ενδείξεις παρανοήσεων στη σχέση αναλογίας παρουσιάστηκαν όταν η σταθερά

αναλογίας είναι διαφορετική από το ένα. Όταν οι μαθητές θέλησαν να συμπληρώσουν τις τιμές των μεγεθών σε πίνακα όπου η σταθερά αναλογίας είναι διαφορετική από τη μονάδα, οι τιμές των μεγεθών δεν ακολουθούσαν την αναλογική σχέση. Παρόλα αυτά παρατηρήθηκε ότι υπάρχει συνέπεια στη μεταβολή του κάθε μεγέθους ως προς τον εαυτό του.

Μία ομάδα σχολιάζοντας τη μεταβολή της θέσης σε σχέση με το χρόνο για τις τιμές σε πίνακα όπου οι τιμές της μεταβολής της θέσης ήταν πάντα ίδιες σχολίασε ότι: "μεταβάλλεται ανάλογα με το χρόνο". Οι προσδοκώμενες πιθανές απαντήσεις είναι: η μεταβολή της θέσης είναι σταθερή ή ότι είναι πάντα 10.

Η απάντηση άλλης ομάδας στο ερώτημα τι συμπεραίνουμε από τη γραφική παράσταση που προκύπτει, όταν ελαττώνουμε τη σταθερά αναλογίας: "*ο χρόνος δεν είναι ανάλογος με τη θέση αν ελαττώσουμε τη σταθερά*".

Σταθερή Συνάρτηση

Οι μαθητές της ηλικίας αυτής -αλλά και ακόμη μεγαλύτεροι όπως διαπιστώσαμε στις πιλοτικές έρευνες- παρουσιάζουν δυσκολίες στη κατανόηση της σταθερής συνάρτησης. Στις ημιποσοτικές σχέσεις χρησιμοποιούσαν τη σχέση της σταθεράς με άνεση, με αποτέλεσμα να φαίνεται ότι κατανοούν τη σταθερή σχέση μεταξύ των μεγεθών. Όταν όμως έπρεπε να συντάξουν την ποσοτική σχέση, φάνηκε ότι ο προβληματισμός δεν ήταν μόνο η σύνταξη της σχέσης, αλλά οι διάλογοι τους έδειχναν ότι δεν είχαν καταλάβει τι ακριβώς σημαίνει σταθερή συνάρτηση ή ότι η τιμή της μεταβλητής είναι σταθερή, ενώ η τιμή του χρόνου αλλάζει συνεχώς. Οι μαθητές εστιάζουν μόνο στο ένα μέγεθος από τα δύο, φάνηκε ότι η δυσκολία τους έγκειται στην κατανόηση της σύγχρονης εξέλιξης και των δύο μεγεθών και μάλιστα όταν το ένα μέγεθος παραμένει σταθερό.

Αρκετές φορές χρησιμοποίησαν την έννοια της αναλογίας αντί της σταθερής συνάρτησης.

Αναδείχθηκε η εναλλακτική ιδέα του ενός μαθητή που στη συνέχεια την εκφράζει και ο άλλος μαθητής της ομάδας ότι η τιμή του σταθερού μεγέθους είναι μηδέν, δηλαδή το σταθερό το ταυτίζει με το μηδέν. Είναι χαρακτηριστικός ο διάλογος του μαθητή με τον ερευνητή:

Ερευνητής: *Σταθερή τι σημαίνει;*

Γιώργος: *Να μείνει σταθερή να μην αλλάζει.*

Ερευνητής: *Δηλαδή πόσο;*

Γιώργος: *Μηδέν.*

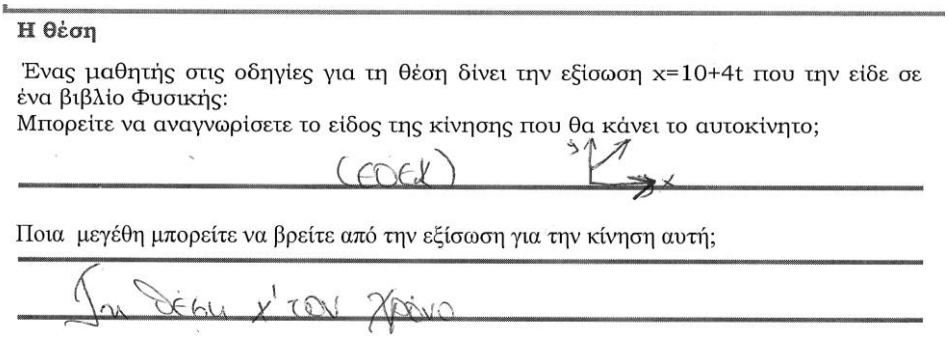
Η έννοια της σταθερής συνάρτησης αποδείχθηκε ότι είναι από τις δύσκολες σχέσεις. Δεν είναι εύκολο για τους μαθητές να κατανοήσουν πώς η μία μεταβλητή μεταβάλλεται και η άλλη παραμένει σταθερή.

Μελετήσαμε πως οι μαθητές συνδέουν τη συμβολική (ποσοτική) περιγραφή ενός μεγέθους με το είδος της κίνησης και αντιστρόφως, κατά πόσο κατανοούν το νόημα και το περιεχόμενο που έχουν στη φυσική οι μαθηματικές σχέσεις και οι εξισώσεις.

Ερμηνεία των συναρτήσεων

Οι παράγοντες στους τύπους της φυσικής είναι έννοιες, που συχνά συνδέονται μεταξύ τους με αποτέλεσμα ο τύπος να γίνεται συνθετότερο νοητικό κατασκεύασμα δύσκολα κατανοητό από τους μαθητές. Επιπλέον σε αρκετές περιπτώσεις ο παράγοντας μπορεί να είναι μία ακόμη συνάρτηση, π.χ. στην εξίσωση θέσης x=υt, όπου η ταχύτητα υ είναι και αυτή συνάρτηση ως προς το χρόνο t.

Δεν αναγνωρίζουν το είδος της κίνησης από την εξίσωση x=10+4t, οι δύο από τις τρεις ομάδες απάντησαν ότι δεν γνωρίζουν και η τρίτη ομάδα απάντησε ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, ενώ είναι ευθύγραμμη ομαλή, σχεδιάζοντας και τη γραφική παράσταση της θέσης ως προς το χρόνο, όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στην εικόνα 2.



*Εικόνα **Error! Unknown switch argument.** Απαντήσεις της ομάδας 4*

Αρχικά από τη συνάρτηση της θέσης ως προς το χρόνο οι μαθητές αναγνώρισαν μόνο τα μεγέθη της θέσης και του χρόνου, δεν αναγνωρίζουν την ταχύτητα και την αρχική θέση και την επιτάχυνση. Τα μεγέθη αυτά τα ανακάλυψαν στη συνέχεια μέσα στην εξίσωση της θέσης από την εκτέλεση και λειτουργία του μοντέλου και με τη μέθοδο των δοκιμών.

Οι μαθητές πολλές φορές αν και γνωρίζουν τον τύπο του μεγέθους της ταχύτητας, δεν κάνουν σωστή χρήση του τύπου (αντί των γενικών τύπων χρησιμοποιούν άλλους που ισχύουν μόνο σε ειδικές περιπτώσεις, αντί της μεταβολής του μεγέθους χρησιμοποιούν την τιμή του μεγέθους που έχει κάποια χρονική στιγμή).

Η γνωστική πορεία που παρατηρήθηκε στους μαθητές είναι η εξής: Αρχικά κατανοούν το ρόλο κάθε παράγοντα στην εξίσωση. Η ταύτιση του κάθε παράγοντα της εξίσωσης με το φυσικό μέγεθος, που αντιστοιχεί είναι γνωστική λειτουργία υψηλότερου βαθμού και θέλει μεγαλύτερη προσπάθεια για να επιτευχθεί.

Στις πρώτες δραστηριότητες οι μαθητές μελετούν τι συμβαίνει στο ένα μέγεθος και όχι τι συμβαίνει στο ένα μέγεθος σε σχέση με το άλλο. Π.χ. έχουν κατανοήσει ότι η ταχύτητα καθορίζει τη μεταβολή της θέσης, αλλά δεν λένε ρυθμό μεταβολής ή να αναφέρουν και το χρόνο με κάποιο τρόπο, όπως γρήγορα ή κάτι άλλο.

Με την πρόοδο των δραστηριοτήτων παρατηρούμε ότι διατυπώνουν πιο ολοκληρωμένα την σχέση των μεγεθών. Κατανοούν βαθύτερα την έννοια της σχέσης και ποιο μέγεθος εξαρτάται από ποιο.

Μελετήσαμε κατά πόσο οι μαθητές διαφοροποιούν μεταξύ τους συναρτήσεις που ενώ μπορεί να είναι ίδιου βαθμού εκφράζουν διαφορετικό περιεχόμενο ανάλογα με τα μεγέθη στα οποία αναφέρονται, π.χ. η εξίσωση $x=x_0+ut$ και η εξίσωση $u=u_0+at$, είναι ίδιου βαθμού αλλά εκφράζουν διαφορετική κίνηση, αφού αναφέρονται σε σχέσεις διαφορετικών μεγεθών π.χ. άλλο είδος κίνησης εκφράζει η ταχύτητα u=σταθερή και άλλο εκφράζει ή σχέση επιτάχυνση a=σταθερή, δηλαδή δύο σχέσεις ενώ στα Μαθηματικά είναι ισοδύναμες έχουν διαφορετικό νόημα στην Φυσική όταν αναφέρονται σε διαφορετικό φυσικό μέγεθος. Στη φυσική για τις συναρτήσεις αυτές θα παρατηρήσει κανείς και διαφορετική προσομοίωση.

Στις πιλοτικές έρευνες οι μαθητές είχαν δημιουργήσει μοντέλο με τη θέση ανάλογη με το χρόνο. Όταν τους ζητήθηκε να δημιουργήσουν μοντέλο για την ίδια κίνηση με τα φυσικά μεγέθη ταχύτητα και χρόνο μία ομάδα δημιούργησε μοντέλο πάλι με την ίδια σχέση της αναλογίας, αντί της σχέσης της σταθεράς.

Χρησιμοποίησαν τους τύπους της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης χωρίς αρχική θέση, ενώ στη κίνηση αυτή υπάρχει αρχική θέση. Δεν χρησιμοποίησαν τους γενικούς τύπους της μεταβολής θέσης προς τη μεταβολή του χρόνου αν και τους γνωρίζουν τους έχουν αναφέρει και τους έχουν γράψει στο φυλλάδιο.

Γράφουν τον τύπο της επιτάχυνσης α=υ/t και όχι με τις μεταβολές των μεγεθών. Ο τύπος που χρησιμοποιούν ισχύει μόνο στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα.

Αντί της μεταβολή του μεγέθους χρησιμοποιούν την τιμή του μεγέθους.

Μελετήσαμε την κατανόηση από τους μαθητές κάθε στοιχείου της εξίσωσης, όπως το βαθμό της, το πρόσημο που συνδέει κάθε όρο, καθώς και τις τιμές των σταθερών όρων, κατά πόσο και πως οι μαθητές συνδέουν τα μεγέθη με το είδος της κίνησης καθώς και τη συμβολή των προβλέψεων τους για την προσομοίωση ή τις άλλες αναπαραστάσεις για κάποια εξίσωση με τη σύγκριση αυτών που δίνει το λογισμικό.

Ο τρόπος που διατυπώνονται οι ασκήσεις που δίδονται στους μαθητές στο σχολείο τους προσανατολίζει σε έναν συγκεκριμένο τρόπο σκέψης τέτοιο ώστε το πρόβλημα που έχουν να επιλύσουν να έχει αναλυθεί και να περιγράφεται με συγκεκριμένους όρους.

Όταν όμως περιγράφεται η κίνηση με εκφράσεις της καθημερινής ζωής, "*κινείται με ταχύτητα που είναι συνεχώς ίση με το όριο ταχύτητας*" χρειάζεται οι μαθητές να αναγνωρίσουν πρώτα το είδος της κίνησης και μετά να προχωρήσουν στην επίλυση. Παρατηρήσαμε ότι οι μαθητές που αναγνωρίζουν το είδος της κίνησης, κατά κανόνα βρίσκουν και το είδος της σχέσης. Στους μαθητές δημιουργήθηκε απορία από τη διατύπωση του ερωτήματος που ανέφερε ότι το κινητό έχει ταχύτητα 4m/s και πηγαίνει αριστερά. Πίστευαν ότι θα έπρεπε να αναφέρεται ότι έχει ταχύτητα -4m/s.

Παρανοήσεις σε σχέση με τα μαθηματικά: Σε αρκετές περιπτώσεις ο μαθηματικός συμβολισμός έχει διαφοροποιημένο νόημα στη φυσική σε σχέση με τα μαθηματικά με αποτέλεσμα να δημιουργούνται εναλλακτικές ιδέες στους μαθητές για τις συναρτήσεις στη Φυσική και εξ αιτίας του συμβολισμού.

Ο ρόλος του προσήμου έχει διαφορετικό νόημα όταν αναφέρεται σε διαφορετικά φυσικά μεγέθη: Π.χ. Το κινητό Α με ταχύτητα 20m/s τρέχει με μικρότερη ταχύτητα από το κινητό Β που κινείται με ταχύτητα -30m/s, ενώ στα μαθηματικά ισχύει 20m/s>-30m/s.

Το αρνητικό πρόσημο στο μέγεθος της ταχύτητας δηλώνει τη φορά κίνησης, στο μέγεθος της επιτάχυνσης την κατηγορία κίνησης (επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη) και στο μέγεθος της θέσης που βρίσκεται το κινητό σχετικά με το σημείο αναφοράς.

Παρατηρήθηκε σύγχυση μεταξύ του περιεχομένου της ταχύτητας και της επιτάχυνσης όταν υπάρχει το αρνητικό πρόσημο στην ταχύτητα:

«…για να έχεις αρνητική ταχύτητα σημαίνει ότι επιβραδύνεις»

Σύγχυση μεταξύ του περιεχομένου της ταχύτητας και της θέσης, δηλαδή ότι η ταχύτητα εξαρτάται από τη θέση που βρίσκεται το κινητό: «*…ναι, αλλά το ότι κινείται (με ταχύτητα) προς τα δεξιά είναι και θέμα θέσης*»

Η γραφική παράσταση ψ=12-3x είναι μία φθίνουσα μαθηματική συνάρτηση, όταν όμως εκφράζει τη σχέση της ταχύτητας υ=12-3t περιγράφει δύο διαφορετικές κινήσεις. Μία κίνηση επιβραδυνόμενη έως τη χρονική στιγμή 4 και μετά από αυτή τη χρονική στιγμή μια επιταχυνόμενη κίνηση.

Συναντήσαμε την εναλλακτική ιδέα των μαθητών που κρύβεται πίσω από την έκφραση τους δεν υπάρχει ταχύτητα, θεωρούν ότι τη χρονική στιγμή μηδέν είναι και η ταχύτητα μηδέν παρόλο που η κίνηση είναι με σταθερή ταχύτητα. Συγχρόνως υπάρχει και η έννοια του σταθερού μεγέθους για το οποίο είδαμε ότι οι μαθητές δεν το κατανοούν πλήρως.

Μια ακόμη εναλλακτική ιδέα που πιθανόν να συντέλεσε στην απάντηση που έδωσαν και τα δύο μέλη της ομάδας είναι η σύγχυση της χρονικής στιγμής με το χρονικό διάστημα. Ο πρώτος μαθητής μίλησε για χρόνο ενώ η μεταβολή που ζητείται αναφέρεται σε χρονικό διάστημα.

ΣΥΜΠΕΡΆΣΜΑΤΑ

Με λογισμικά αυτής της κατηγορίας οι μαθητές μπορούν να δουν προσομοιωμένα ή με άλλου είδους αναπαραστάσεις τα αποτελέσματα των αλλαγών, που κάνουν στις συναρτήσεις Τα αποτελέσματα και εντυπωσιάζουν τους μαθητές ώστε να τραβήξουν το ενδιαφέρον τους και τους βοηθούν να κατανοήσουν το είδος της κίνησης, την αρχική θέση και τον πίνακα τιμών που τον αξιοποιούν για υπολογισμούς, όπως συνέβη με την αλλαγή που έφερε στην προσομοίωση της κίνησης του αυτοκινήτου η αλλαγή στο συντελεστή του χρόνου. Με τα παραδοσιακά μέσα διδασκαλίας είναι δύσκολο να επιτευχθούν τα παραπάνω.

Με την βοήθεια των δοκιμών οι μαθητές επέλεγαν ποια σχέση θα χρησιμοποιήσουν, αλλά και πώς θα ρυθμίσουν τη σχέση που έχουν επιλέξει για να μοντελοποιήσουν την κίνηση που περιγράφεται στο φυλλάδιο. Η δοκιμή του μοντέλου συνέβαλλε, ώστε οι μαθητές να κατανοήσουν τη λειτουργία των σχέσεων του μοντέλου και των αναπαραστάσεων του.

Η κατανόηση ενός μεγέθους φάνηκε ότι δεν είναι αρκετή για να διακρίνουν το μέγεθος αυτό από άλλα μεγέθη, για τα οποία έχουν εναλλακτικές ιδέες· πρέπει να κατανοήσουν και τα άλλα μεγέθη σε βάθος, ώστε να αποκτήσουν

και για αυτά μια στερεή γνώση σε βάθος, που θα τους βοηθήσει να τα δουν αυτοτελή και ανεξάρτητα ως γνωστικές οντότητες.

Δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να προβληματιστούν και να εκφράσουν τις απόψεις τους σε θεμελιώδη θέματα που πολλές φορές θεωρούνται προφανή και αυτονόητα. Είναι πιθανόν ακόμη και οι εκπαιδευτικοί να θεωρούν ότι είναι αυτονόητα. Ακόμη και οι ίδιοι οι μαθητές ανακαλύπτουν τι δεν έχουν κατανοήσει.

Αναγνωρίζουν ευκολότερα αν έχουν επιλέξει μη κατάλληλη σχέση, δυσκολότερα δε ποιες έννοιες συνδέουν λάθος. Οι μαθητές ανέπτυσσαν πρωτοβουλίες για να απαντήσουν τα ερωτήματα. Επέλεξαν περισσότερες τιμές για να κάνουν δοκιμές στο μοντέλο, ώστε να κατανοήσουν καλύτερα την επίδραση της σταθεράς στην αναπαράσταση του μοντέλου.

Έννοιες που φαίνεται ότι οι μαθητές τις έχουν κατανοήσει πλήρως είναι δυνατόν, με κατάλληλα εργαλεία, όπως αυτά της μοντελοποίησης, να αποκαλυφθούν ποιά σημεία δεν έχουν κατανοηθεί πλήρως. Με την μοντελοποίηση δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να ασχοληθούν με την ουσία ενός προβλήματος και όχι με εργασίες ρουτίνας έτσι μπορούν να τους δοθούν δραστηριότητες που απαιτούν συλλογισμούς ανώτερης τάξης και να διαγνωστούν τα εμπόδια κατανόησης των διαπραγματευόμενων θεμάτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Γούδας Α., Σακονίδης Χ. (2002). Η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης και των αναπαραστάσεών της από μαθητές γυμνασίου και λυκείου, *Πρακτικά του 5ου Πανελλήνιου Συνεδρίου "Διδακτική των Μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπαίδευση"*, 12-15 Οκτωβρίου, 2001, Θεσσαλονίκη.

Harel, G., & Kaput, J. (1991), The role of conceptual entities and their symbols in building advanced mathematcal concepts, in D. Tall (ed), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

Hestenes David, (1987). Toward a modeling theory of physics instruction *Am. J . Phys 55(5).*

Hestenes David, (1992). Modeling Games in the Newtonian World. Am. J. Phys. 60, 732-748.

Orfanos, S., Dimitracopoulou, A. (2003). Technology based modelling activities and the contribution to learning Concepts' relations in Physics. In (Ed) A. Mendez Vilas, J. A. & J. Mesa Gonzalez. "Advances in Technologe-Based EducationQ Toward a Knowledge-Based Society", Proceedings of II International Conference on multimedia ICT' s in Education, 5-10 July, 2003, Badajoz, Spain, Vol 3, pp. 1353-1357.

Η ΣΥΓΚΡΟΤΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΗ ΕΜΠΕΙΡΙΑ ΚΑΙ ΤΗΝ ΤΥΠΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Παντελάκη Ελβίνα

Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση
Μεταπτυχιακό Δίπλωμα ΑΠΘ/ΠΤΔΕ στη Διδακτική των Μαθηματικών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η έννοια που διαφοροποιεί τη Μαθηματική Ανάλυση από άλλους κλάδους των σύγχρονων μαθηματικών είναι η έννοια του ορίου η οποία αποτελεί τη βάση στην οποία στηρίζεται ο Διαφορικός αλλά και ο Ολοκληρωτικός Λογισμός. Το όριο είναι μια ιδιαίτερη σύνθετη έννοια με πολλές ποιοτικές πλευρές και εκφράσεις. Προκαλεί μια μεγάλη ποικιλία διαισθητικών αντιλήψεων και ταυτόχρονα εμφανίζεται σε διαφορετικά αυστηρά μαθηματικά πλαίσια που περιλαμβάνουν το όριο μιας ακολουθίας, το όριο μιας σειράς, το όριο μιας συνάρτησης, την έννοια της διαφορισημότητας, την έννοια της ολοκλήρωσης καθώς και άλλες έννοιες. Το όριο, σαν αυστηρή μαθηματική έννοια, χρησιμοποιείται και σαν εργαλείο στη φυσική κατά τον ορισμό της στιγμιαίας ταχύτητας. Η έννοια του ορίου είναι μια από τις δυσκολότερες έννοιες που καλούνται να κατανοήσουν οι μαθητές και να διδάξουν οι καθηγητές.

Στην εισήγηση περιγράφεται μια μελέτη της συγκρότησης της έννοιας του ορίου. Σκοπός της εργασίας είναι η διερεύνηση των αυθόρμητων και τυπικών αντιλήψεων, σχετικά με την έννοια του ορίου, που συγκροτούν οι μαθητές ως αποτέλεσμα της καθημερινής εμπειρίας και της τυπικής διδασκαλίας των μαθηματικών και της φυσικής. Στην έρευνα εμπλέκονται μαθητές από όλες τις τάξεις του Λυκείου. Γίνεται μελέτη σχετικά με τις αντιλήψεις τους για την έννοια του ορίου αλλά και για την έννοια των λέξεων που συνδέονται με την έννοια του ορίου («προσεγγίζει», «τείνει» και «συγκλίνει»). Μετά των εντοπισμό των αυθόρμητων και τυπικών αντιλήψεων ανά τάξη, γίνεται διερεύνηση της επίδρασης της διδασκαλίας της έννοιας του ορίου στη σχέση των αυθόρμητων και τυπικών αντιλήψεων των μαθητών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σύμφωνα με τον Bachelard, τα μαθηματικά αποτελούν το μοντέλο για την ορθολογική σκέψη γενικώς και για την επιστημονική ορθολογικότητα ειδικότερα. Τα μαθηματικά δεν είναι απλά μια γλώσσα, αλλά ένα ορθολογικό πλαίσιο, ένας τρόπος σκέψης. Η μαθηματική εξέλιξη συνεπάγεται την εξέλιξη του ορθολογικού και θεωρητικού πλαισίου της επιστημονικής σκέψης (Tiles, 1993: 85-89). Από την άλλη πλευρά, για τους λογικούς θετικιστές, τα μαθηματικά αντιμετωπίζονται ως μέσο για την επιστημολογία, ως εργαλείο δηλαδή των επιστημών. Σύμφωνα με τους λογικούς θετικιστές, τα μαθηματικά δεν εκφράζουν γεγονότα. Οι αριθμοί, από καθαρά μαθηματική άποψη, έξω από την εφαρμογή τους, δε σημαίνουν αντικείμενα του εμπειρικού κόσμου. Τα μαθηματικά ασχολούνται με ιδεατές έννοιες, όπως για παράδειγμα το σημείο χωρίς διαστάσεις. (Kraft, 1986: 30-33). Μια τέτοια ιδεατή έννοια, με την οποία θα ασχοληθούμε στην παρούσα εργασία είναι το όριο.

Η έννοια του ορίου διαφοροποιεί τη Μαθηματική Ανάλυση από άλλους κλάδους των σύγχρονων μαθηματικών και αποτελεί τη βάση στην οποία στηρίζεται ο Διαφορικός αλλά και ο Ολοκληρωτικός Λογισμός. Το όριο είναι μια ιδιαίτερη σύνθετη έννοια με πολλές ποιοτικές πλευρές και εκφράσεις. Προκαλεί μια μεγάλη ποικιλία διαισθητικών αντιλήψεων και ταυτόχρονα εμφανίζεται σε διαφορετικά αυστηρά μαθηματικά πλαίσια που περιλαμβάνουν το όριο μιας ακολουθίας, το όριο μιας σειράς, το όριο μιας συνάρτησης, την έννοια της συνέχειας, την έννοια της διαφορισημότητας, την έννοια της ολοκλήρωσης καθώς και άλλες έννοιες. Το όριο χρησιμοποιείται και στη φυσική, όπως για παράδειγμα στους ορισμούς της στιγμιαίας ταχύτητας και της επιτάχυνσης. Η έννοια του ορίου είναι μια από τις δυσκολότερες έννοιες που καλούνται να κατανοήσουν οι μαθητές και να διδάξουν οι καθηγητές.

Η ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

Η έννοια του ορίου στην αρχαία Ελλάδα: Οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί, παρά τα εξαιρετικά τους επιτεύγματα, δεν ασχολήθηκαν ουσιαστικά με την αυστηρή έννοια του ορίου. Μια πιθανή εξήγηση για το γεγονός αυτό είναι οι δυσκολίες βαθιάς φιλοσοφικής μορφής γύρω από την έννοια του απείρου (η οποία σχετίζεται άμεσα με την έννοια του ορίου) που παρουσιάστηκαν εκείνη την εποχή.

Παρόλα αυτά, το πρόβλημα υπολογισμού του τομέα ενός κύκλου, παραδείγματος χάριν, παρείχε μια ευκαιρία να αναπτυχθούν εργαλεία πολύ κοντά στην έννοια του ορίου. Ο Ιπποκράτης της Χίου το 430 π.Χ. θέλησε να αποδείξει ότι η αναλογία μεταξύ του τομέα δύο κύκλων είναι ίση με την

αναλογία των τετραγώνων των διαμέτρων τους. Ενέγραψε τα κανονικά πολύγωνα μέσα στους κύκλους και, αυξάνοντας κατά τρόπο αόριστο των αριθμό των πλευρών, πλησίασε τους τομείς των δύο κύκλων. Αυτή η μετάβαση προς το όριο, που εξηγείται πολύ λιτά, θα καθοριζόταν ένα χρόνο αργότερα με την περίφημη «μέθοδο της εξάντλησης» του Ευδόξου: με διαδοχική διχοτόμηση μπορούμε να επιτύχουμε ένα μέγεθος όσο μικρότερο θέλουμε.

Η έννοια του ορίου στη νεότερη ιστορία (16ος – 17ος αιώνας): Το 1635 ο Cavalieri, εισήγαγε την ιδέα και τη μέθοδο των «αδιαιρέτων» ποσοτήτων, θεωρώντας ότι κάθε γεωμετρικό μέγεθος μπορεί να διαιρείται σε άπειρα το πλήθος γεωμετρικά μεγέθη τα οποία είναι αδιαίρετες ποσότητες. Η χρήση των αδιαιρέτων στη Γεωμετρία δέχτηκε πολλές αρνητικές κριτικές διότι οδηγούσε σε παράδοξα και λάθη.

Η γέννηση του Απειροστικού Λογισμού, τα απειροστά και η σύγχυση γύρω από αυτά: Το τελευταίο τέταρτο του 17ου αιώνα επιτεύχθηκε η θεμελίωση του Απειροστικού Λογισμού από τους Newton και Leibniz. Οι εργασίες τους στρέφονταν γύρω από τις έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος. Η έννοια του ορίου που χρησιμοποιείται όλο αυτό το διάστημα εστιάζεται κυρίως στην έννοια του «απειροστού». Το απειροστό θεωρείται ως μία απειροελάχιστα μικρή ποσότητα η οποία μπορεί κάποια στιγμή να παραλειφθεί ως αμελητέα. Αυτό όμως δε γινόταν με κάποιο σαφή και αυστηρό μαθηματικό τρόπο. Η χρήση των απειροστών, ως θεμελιώδης έννοια του Απειροστικού Λογισμού, δημιούργησε μία οξύτατη διαμάχη γύρω από αυτά.

Οι προσπάθειες για μια αυστηρή θεμελίωση της έννοιας του ορίου τον 18ο αιώνα: Η προσπάθεια διατύπωσης του ορισμού του ορίου, χρησιμοποιώντας τον αλγεβρικό λογισμό και ιδιαίτερα τις ανισότητες, παρατηρείται στη διάρκεια του 18ου αιώνα. Ο D' Alembert επιχειρεί για πρώτη φορά τη θεμελίωση του Λογισμού του Leibniz στην έννοια του ορίου. Καταφέρνει τελικά να αποβάλει την έννοια του απειροστού από τη θεμελίωση του Απειροστικού Λογισμού.

Η αυστηρή θεμελίωση της έννοιας του ορίου τον 19ο αιώνα: Στις αρχές του 19ου αιώνα, ο Cauchy αναπτύσσει μία σταθερή θεωρητική βάση στον Απειροστικό Λογισμό με βάση την έννοια του ορίου. Με τους ορισμούς του για την έννοια του ορίου (*«Όταν οι διαδοχικές τιμές μιας μεταβλητής πλησιάζουν απεριόριστα μία σταθερή τιμή, έτσι ώστε τελικά να διαφέρουν από αυτή όσο λίγο θέλουμε, τότε η σταθερή αυτή τιμή λέγεται όριο όλων των άλλων.»*)και του απειροστού, δίνει τέλος στη μυστηριώδη μεταφυσική χρήση

των απειροστών που προβλημάτισε έντονα τους μαθηματικούς του 17ου αιώνα.

Στο υπόλοιπο του αιώνα, η προσέγγιση του Cauchy επεξεργάζεται και επαναδιατυπώνεται εννοιολογικά από τον Weierstrass και επικρατεί τελικά ως η κύρια μορφή της μαθηματικής ανάλυσης. Ο σύγχρονος ορισμός του ορίου συνάρτησης, που διατυπώθηκε πρώτα από τον Weierstrass και στην τελική του μορφή από τον μαθητή του Heine είναι ο ακόλουθος:

«Έστω $\xi \in R$ *σημείο συσσωρεύσεως του πεδίου ορισμού* $\Delta(f)$ *μιας συνάρτησης* f *. Θα λέμε ότι η* f *έχει όριο το* $\ell \in R$ *στο σημείο* ξ *, αν και μόνο αν, για κάθε* $\varepsilon > 0$ *, υπάρχει* $\delta > 0$ *, τέτοιο ώστε, για όλα τα* $x \in \Delta(f)$ *με* $0 < |x - \xi| < \delta$ *να έχουμε:* $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ *.»*

Συμβολικά:

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Delta(f)) 0 < |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Ο ορισμός αυτός είναι γνωστός ως $\varepsilon - \delta$ (έψιλον- δέλτα) ορισμός.

ΤΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ

Το όριο στα πλαίσια της διδασκαλίας του Απειροστικού Λογισμού τον 20ο αιώνα: Η διδασκαλία της έννοιας του ορίου στην Ελλάδα ξεκίνησε στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση μετά το τέλος της δεκαετίας του 60. Από τότε η προσοχή επικεντρώνεται, όχι στην εννοιολογική κατανόηση αλλά κυρίως, σε μία φορμαλιστικού τύπου εφαρμογή τυποποιημένων διαδικασιών υπολογισμού ορίων. Οι υπολογισμοί αυτοί στηρίζονται κυρίως σε αλγεβρικές τεχνικές.

Στα βιβλία της δεκαετίας του 70 και 80, δινόταν αρχικά ο τυπικός $\varepsilon - \delta$ ορισμός, με κάποια φορμαλιστικού τύπου αριθμητικά παραδείγματα εφαρμογής του, αποκομμένα από κάθε εμπειρική πραγματικότητα. Τη δεκαετία του 90, δεν παρατηρείται ουσιαστική αλλαγή. Παρά το γεγονός ότι ο $\varepsilon - \delta$ ορισμός ουσιαστικά δεν εξετάζεται, η Άλγεβρα εξακολουθεί να κυριαρχεί στις διαδικασίες υπολογισμού ορίων.

Αναφορές της έννοιας του ορίου στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια: Στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου και του Λυκείου υπάρχουν αρκετές άμεσες και έμμεσες αναφορές στην έννοια του ορίου.

Β' Γυμνασίου: Μία έμμεση αναφορά του ορίου υπάρχει στον υπολογισμό του εμβαδού κυκλικού δίσκου, ο οποίος χωρίζεται σε πιο μικρά ίσα μέρη μέχρι το τελικό σχήμα να προσεγγίζει όλο και περισσότερο ένα ορθογώνιο.

Γ' Γυμνασίου: Μια έμμεση αναφορά στην έννοια του ορίου υπάρχει κατά τη μελέτη της συνάρτησης $\psi = \frac{a}{x}$ όπου οι κλάδοι της υπερβολής πλησιάζουν πολύ κοντά τους άξονες χωρίς όμως να τους φτάνουν.

Α' Λυκείου: Έμμεσες αναφορές του ορίου υπάρχουν κατά τη μελέτη των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $f(x) = \frac{1}{x}$.

Β' Λυκείου: α)Άλγεβρα: Μία έμμεση αναφορά στην έννοια του ορίου υπάρχει κατά τη μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \varepsilon\phi x$. Η πρώτη άμεση αναφορά στην έννοια του ορίου (με το σύμβολο « $\lim$ ») γίνεται κατά τον υπολογισμό απείρων όρων γεωμετρικής προόδου, χωρίς όμως να δίνεται ο ορισμός του ορίου. Άμεσες αναφορές γίνονται επίσης στις δυνάμεις με άρρητο εκθέτη και στον ορισμό του αριθμού e.

β)Γεωμετρία: Έμμεσες αναφορές στην έννοια του ορίου υπάρχουν στις παραγράφους: προσέγγιση του μήκους του κύκλου με κανονικά πολύγωνα, μήκος τόξου, προσέγγιση του εμβαδού κύκλου με κανονικά πολύγωνα, εμβαδόν επιφάνειας σφαίρας, όγκος σφαίρας.

γ)Μαθηματικά θετικής κατεύθυνσης: Υπάρχει μία έμμεση αναφορά της έννοιας του ορίου κατά τη μελέτη της υπερβολής στο σημείο όπου εξετάζονται οι ασύμπτωτες.

Γ' Λυκείου: α)Μαθηματικά γενικής παιδείας: Η αναφορά στο όριο συνάρτησης γίνεται γραφικά, με ένα απλό παράδειγμα και χωρίς μαθηματική αυστηρότητα.

β)Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης: Αρχικά προσεγγίζεται η έννοια του ορίου γραφικά και στη συνέχεια δίνεται ο αυστηρός μαθηματικός ορισμός του ορίου. Σύμφωνα με το βιβλίο του διδάσκοντα, η διδασκαλία του ορίου δεν αποτελεί αυτοσκοπό αλλά στοχεύει στην προετοιμασία για την εισαγωγή στις έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος που αποτελούν και το κέντρο βάρους της ενότητας της Ανάλυσης.

Χρήση της έννοιας του ορίου στη φυσική: Μία χαρακτηριστική περίπτωση κατά την οποία χρησιμοποιείται το όριο στη φυσική είναι στον ορισμό της στιγμιαίας ταχύτητας. Η στιγμιαία ταχύτητα θεωρείται ως η ταχύτητα ενός σώματος σε μια δεδομένη χρονική στιγμή. Ορίζεται ως το όριο της μέσης ταχύτητας του σώματος σε χρονικά διαστήματα ολοένα και πιο μικρά γύρω από τη δεδομένη χρονική στιγμή. Καθώς το χρονικό διάστημα τείνει στο μηδέν, η ταχύτητα τείνει σε μια τιμή που ορίζεται ως στιγμιαία ταχύτητα.

Κατά τη μελέτη της κινηματικής, θεωρούμε το σώμα υλικό σημείο, δηλαδή υποθέτουμε ότι μπορούμε να αγνοήσουμε τις διαστάσεις του στην περιγραφή της κίνησης του. Η θέση του σώματος τότε δίνεται από το διάνυσμα θέσης $x(t)$ του σημείου κατά τη χρονική στιγμή t. Καθώς το σημείο διαγράφει την τροχιά του, το διάνυσμα θέσης μεταβάλλεται κατά Δx σε χρονικό διάστημα Δt. Το όριο του πηλίκου $\Delta x / \Delta t$, καθώς το Δt τείνει στο μηδέν ορίζεται ως η στιγμιαία ταχύτητα του σώματος κατά τη χρονική στιγμή t:

$$v = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Σύμφωνα με τη μαθηματική ορολογία, λέμε ότι η ταχύτητα είναι η παράγωγος του διανύσματος θέσης ως προς το χρόνο. Αν παραστήσουμε γεωμετρικά την τροχιά ως καμπύλη στο χώρο, το διάνυσμα της ταχύτητας είναι εφαπτόμενο στην τροχιά το δεδομένο σημείο.

Αντίστοιχα, η μεταβολή του διανύσματος της ταχύτητας με το χρόνο μας δίνει το διάνυσμα της επιτάχυνσης a του υλικού σημείου:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Η έννοια της στιγμιαίας ταχύτητας διδάσκεται στη Φυσική της Β' Γυμνασίου και στη Φυσική της Α' Λυκείου, χωρίς όμως να δίνεται ο παραπάνω ορισμός με το όριο. Το παράδειγμα με το ταχύμετρο του αυτοκινήτου (κοντέρ) που δείχνει τη στιγμιαία ταχύτητα του χρησιμοποιείται και στις δύο τάξεις. Στη Φυσική της Α' Λυκείου ειδικότερα, αναφέρεται πως: *«όσο μικραίνει η χρονική διάρκεια κίνησης του αυτοκινήτου, τόσο η υπολογιζόμενη από τις μετρήσεις μέση ταχύτητα προσεγγίζει την πραγματική ταχύτητα του αυτοκινήτου που δείχνει το κοντέρ. Αν η χρονική διάρκεια κίνησης του αυτοκινήτου γίνει πάρα πολύ μικρή, τότε η υπολογιζόμενη ταχύτητα είναι η στιγμιαία ταχύτητα και ταυτίζεται με αυτή που δείχνει το ταχύμετρο σε μία χρονική στιγμή.»* (σελ.49).

Στην πραγματικότητα όμως, αν λάβουμε υπόψη τον ορισμό της στιγμιαίας ταχύτητας με τη βοήθεια του ορίου, η παραπάνω ταύτιση δεν προκαλείται ποτέ. Για να υπολογιστεί η ταχύτητα μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή t, χρησιμοποιούνται δύο χρονικές στιγμές t_1 και t_2, πριν και μετά τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή t, οι οποίες τείνουν η μία προς την άλλη αλλά δεν πρόκειται ποτέ να ταυτιστούν. Δε θα ταυτιστούν ποτέ γιατί αλλιώς θα είχαμε: $\Delta t = t_2 - t_1 = 0$ οπότε το κλάσμα της στιγμιαίας ταχύτητας δε θα μπορούσε να οριστεί. Επομένως η ταχύτητα που δείχνει το κοντέρ ενός αυτοκινήτου δεν είναι η πραγματική τιμή αλλά μία τιμή που πλησιάζει πάρα πολύ κοντά στην πραγματική τιμή.

Επιστημολογικές οπτικές για την έννοια του ορίου και θεωρητικές παραδοχές για τη μάθηση της έννοιας του ορίου στο ελληνικό σχολείο: Οι θεωρίες του Piaget και του συμπεριφορισμού που κυριαρχούν στα μαθηματικά του Γυμνασίου και του Λυκείου συνδέουν επιτυχώς τις απολυταρχικές οπτικές για τη μαθηματική γνώση με τις διδακτικές μεθοδολογίες και πρακτικές. Σύμφωνα με τον Ernest (1991), οι απολυταρχικές απόψεις θεωρούν τα μαθηματικά ως ένα αντικείμενο απόλυτο, αναμφισβήτητο και μη επιδεχόμενο διορθώσεις. Τα μαθηματικά θεμελιώνονται στην ακλόνητη βάση της παραγωγικής λογικής.

Για τον Piaget, η προσαρμογή του ανθρώπου στο περιβάλλον του επιτελείται στη βάση δύο συμπληρωματικών μηχανισμών: της αφομοίωσης και της συμμόρφωσης. Με τον μηχανισμό της αφομοίωσης, στον οποίο ο Piaget αποδίδει μία ιδιαίτερη βαρύτητα, το παιδί χρησιμοποιώντας τα ανάλογα με το στάδιο ανάπτυξης του σχήματα, δρα επί του περιβάλλοντος, χειρίζεται τα δεδομένα του και αντιμετωπίζει τα διάφορα προβλήματα που βρίσκει. Με τον μηχανισμό της συμμόρφωσης, το παιδί διαμορφώνει και μετατρέπει αυτά τα αφομοιωτικά σχήματα. Η συμμόρφωση δηλαδή είναι η τροποποίηση της υπάρχουσας νοητικής δομής έτσι ώστε να συμπεριλάβει και τις νέες εμπειρίες. (Παπαμιχαήλ, 1988).

Ας πάρουμε, για παράδειγμα, τη διδασκαλία της έννοιας του ορίου, που μας ενδιαφέρει στην παρούσα εργασία, και ειδικότερα την περίπτωση υπολογισμού εμβαδού του κυκλικού δίσκου που διδάσκεται πρώτη φορά στη Β' Γυμνασίου και δεύτερη φορά στη Β' Λυκείου. Στη Β' Γυμνάσιου ο κυκλικός δίσκος χωρίζεται συνεχώς σε πιο μικρά ίσα μέρη μέχρι το τελικό σχήμα να προσεγγίζει όλο και περισσότερο ένα ορθογώνιο. Στη Β' Λυκείου, όπου έχει αφομοιωθεί η έννοια της συνάρτησης, κατά τον υπολογισμό του εμβαδού κυκλικού δίσκου, γίνεται χρήση των ακολουθιών των περιμέτρων

των κανονικών πολυγώνων. Το εμβαδόν Ε πλησιάζει όλο και περισσότερο τα εμβαδά των κανονικών πολυγώνων. Στο παράδειγμα μας δηλαδή, η αρχική μέθοδος για τον υπολογισμό του εμβαδού κυκλικού δίσκου τροποποιείται και επεκτείνεται ώστε να περιλάβει και τις νέες εμπειρίες μέσω της λειτουργίας της συμμόρφωσης.

Η ΣΥΓΚΡΟΤΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΣΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ

Με κέντρο κυρίως τη θεωρία της κοινωνικής ψυχογένεσης, της οποίας βασικός εκπρόσωπος είναι ο Vygotsky, και χρησιμοποιώντας τις σχετικές ερευνητικές μελέτες από τη διεθνή βιβλιογραφία για την έννοια του ορίου, εξετάζουμε τη συγκρότηση της έννοιας του ορίου στους μαθητές.

Ο σχηματισμός των αυθόρμητων και επιστημονικών εννοιών σύμφωνα με τη θεωρία της κοινωνικής ψυχογένεσης: Σύμφωνα με τον Vygotsky, *αυθόρμητη σκέψη* ή *αυθόρμητες έννοιες* είναι η σκέψη ή τα είδη των καθημερινών εννοιών που δεν αναπτύσσονται κατά τη διαδικασία οικειοποίησης ενός συστήματος γνώσεων, όπως αυτές που μεταδίδονται στο παιδί στην εκπαίδευση, αλλά που διαμορφώνονται κατά τη διαδικασία της πρακτικής του δραστηριότητας και της άμεσης επαφής με τους ανθρώπους του περιβάλλοντος του.

Η συγκρότηση των αυθόρμητων εννοιών προηγείται και η εκμάθηση των λεκτικών τους διατυπώσεων έπεται, ως προϊόν μιας άτυπης διδασκαλίας. Οι έννοιες αυτές δεν εντάσσονται σε ένα εννοιολογικό σύστημα και κατά τη συγκρότηση τους αντιστοιχούνται άμεσα στα στοιχεία της πραγματικότητας στα οποία αναφέρονται. Το παιδί, στο επίπεδο αυτό, ορίζει μια έννοια περιγράφοντας κατά κανόνα τη λειτουργία ή τη χρήση ενός συγκεκριμένου όντος, φαινομένου ή αντικειμένου στο οποίο η έννοια έχει ως υπόδειγμα αντιστοιχιστεί.

Οι επιστημονικές έννοιες συγκροτούνται μέσα από τις διαδικασίες οικειοποίησης ενός ιστορικά διαμορφωμένου και επιστημονικά οργανωμένου συστήματος γνώσεων, στο πλαίσιο της κοινωνικά οργανωμένης σχολικής μάθησης και με αφετηρία το λεκτικό ορισμό τους. Σε εντελώς αντίστροφη πορεία με αυτήν των αυθόρμητων εννοιών, η εκμάθηση των λεκτικών ορισμών των επιστημονικών εννοιών προηγείται και η συγκρότηση τους έπεται ως προϊόν μιας τυπικής διδασκαλίας (Χασάπης, 2000).

Οι αυθόρμητες αντιλήψεις των μαθητών ως εμπόδιο στην κατανόηση της έννοιας του ορίου: Οι ερευνητές, που έχουν διεξάγει σχετικές μελέτες, συμφωνούν ομόφωνα πως αν η διδασκαλία μιας έννοιας πρόκειται να είναι

αποτελεσματική τότε η διαισθητική γνώση που αποκτιέται από έναν μαθητή σε ένα εξωσχολικό πλαίσιο δεν πρέπει να απορριφθεί.

Ο Williams (1991, 2001), ερεύνησε λεπτομερέστερα τις αυθόρμητες αντιλήψεις των μαθητών για το όριο καθώς και τα μέσα με τα οποία αυτές οι αντιλήψεις μπορούν να αλλάξουν και να γίνουν αυστηρότερες. Οι μαθητές απέτυχαν στην ερευνητική προσπάθεια να υιοθετήσουν μια περισσότερο τυπική άποψη για το όριο.

Οι Grugnetti και Rizza (2003) ερεύνησαν τις δυσκολίες που παρουσιάζουν οι μαθητές στην κατανόηση των εννοιών του ορίου και του απείρου. Τα αποτελέσματα της έρευνας φανέρωσαν την ύπαρξη αρχικών διαισθητικών αντιλήψεων, ιδιαίτερα στις μικρές ηλικίες.

Η επίδραση της γλώσσας στην κατανόηση της έννοιας του ορίου: Η διαμεσολάβηση της γλώσσας, η οποία σύμφωνα με τον Vygotsky, αποτελεί τον καθοριστικό παράγοντα οικειοποίησης και ανάπτυξης των εννοιών, ανοίγει ένα μεγάλο πεδίο προβληματισμού και διερεύνησης της χρήσης και λειτουργίας της στην κατανόηση της έννοιας του ορίου. Οι λέξεις και οι φράσεις που οι μαθηματικοί θεωρούν συνώνυμες μπορούν να έχουν εντελώς διαφορετικές σημασίες για τους μαθητές.

Οι Davis & Vinner (1986), θεώρησαν πως ένα από τα εμπόδια που προκαλούν σύγχυση στους μαθητές σχετικά με τη έννοια του ορίου είναι η επιρροή της γλώσσας στην οποία, πίσω από τις λέξεις που χρησιμοποιούνται, υπάρχουν οι ιδέες που αυτές μας κάνουν να φανταζόμαστε και προέρχονται από την προηγούμενη εμπειρία μας.

Ο Monaghan (1991), μελέτησε συστηματικά τα αποτελέσματα της γλώσσας που χρησιμοποιείται στη διδασκαλία για την εκμάθηση των ορίων. Παρατήρησε ότι στις λέξεις, που λαμβάνονται από τη φυσική τους γλώσσα και έχουν γνωστές καθημερινές έννοιες, δίνονται λεπτά διαφορετικά νοήματα καθώς τις χρησιμοποιούμε σε μαθηματικό επίπεδο. Αυτό μπορεί να δημιουργήσει σύγχυση στους μαθητές.

Ο Cornu (1991), μελέτησε τη σημασία των λέξεων που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να περιγράψουν την έννοια του ορίου. Παρατήρησε πως οι λέξεις *τείνει προς* και *όριο* έχουν μια σημασία για τους μαθητές πριν καν αρχίσει η σχετική διδασκαλία. Οι μαθητές συνεχίζουν να παραμένουν στη σημασία αυτή και μετά που θα τους δοθεί ο επίσημος ορισμός.

Επιστημολογικά εμπόδια στην κατανόηση της έννοιας του ορίου: Ο Brousseau (1983), ορίζει το επιστημολογικό εμπόδιο ως τη γνώση που λειτουργεί καλά για μια ορισμένη περιοχή της δραστηριότητας και επομένως εδραιώνεται, αλλά στη συνέχεια αποτυγχάνει να λειτουργήσει ικανοποιητικά

σε ένα άλλο πλαίσιο και οδηγεί στις αντιφάσεις. Επομένως καθίσταται αναγκαίο να καταστραφεί η αρχική ανεπαρκής και λανθασμένα σχηματισμένη γνώση και να αντικατασταθεί με τη νέα έννοια που λειτουργεί ικανοποιητικά στο νέο πεδίο.

Τα βασικά επιστημολογικά εμπόδια που σχετίζονται με την έννοια του ορίου, μελετήθηκαν από τους Sierpinska (1987), Cornu (1991), και Artique (1998). Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη του Cornu, ο οποίος αναφέρει τέσσερα σημαντικά επιστημολογικά εμπόδια τα οποία εμφανίζονται στην ιστορική ανάπτυξη της έννοιας του ορίου και συνεχίζουν να εμφανίζονται και στους σημερινούς μαθητές: α) η αποτυχία σύνδεσης της γεωμετρίας με τους αριθμούς, β) η έννοια του απείρως μεγάλου και του απείρως μικρού, γ) η μεταφυσική άποψη της έννοιας του ορίου και δ) το ερώτημα αν επιτυγχάνεται το όριο ή όχι.

Ο ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στόχος της έρευνας: η διερεύνηση των αυθόρμητων και τυπικών αντιλήψεων, σχετικά με την έννοια του ορίου, που συγκροτούν οι μαθητές ως αποτέλεσμα της καθημερινής εμπειρίας και της τυπικής διδασκαλίας των μαθηματικών και της φυσικής.

Στις έμμεσες αλλά και στις άμεσες αναφορές στην έννοια του ορίου χρησιμοποιούνται (εκτός από τη λέξη «όριο») οι λέξεις «προσεγγίζει», «τείνει», «συγκλίνει». Για μία αναλυτικότερη διερεύνηση των αυθόρμητων και τυπικών αντιλήψεων σχετικά με την έννοια του ορίου, θεωρήσαμε πως έπρεπε να διερευνηθούν παράλληλα και οι αυθόρμητες – τυπικές αντιλήψεις σχετικά με τις έννοιες αυτές οι οποίες σχετίζονται άρρηκτα με την έννοια του ορίου.

Διατύπωση των ερευνητικών ερωτημάτων:

α)Πώς γίνονται αντιληπτές και χρησιμοποιούνται από τους μαθητές της Α', Β', Γ' Λυκείου οι έννοιες «όριο», «προσεγγίζει», «τείνει», «συγκλίνει» σύμφωνα με την καθημερινή τους εμπειρία

β)Πώς γίνονται αντιληπτές και χρησιμοποιούνται από τους μαθητές της Α', Β', Γ' Λυκείου οι έννοιες «όριο», «προσεγγίζει», «τείνει», «συγκλίνει» σύμφωνα με την τυπική διδασκαλία των μαθηματικών και της φυσικής

γ)Πώς η διδασκαλία της μαθηματικής έννοιας του ορίου έχει επηρεάσει τη σχέση των αυθόρμητων και τυπικών αντιλήψεων των μαθητών

Μέθοδος της έρευνας: Η έρευνα βασίστηκε σε ατομικές εστιασμένες συνεντεύξεις. Τα δύο βασικά θέματα που τέθηκαν για συζήτηση, μέσω του οδηγού συνέντευξης ήταν τα εξής: α)αντιλήψεις και χρήση των εννοιών «όριο»,

«προσεγγίζει», «τείνει», «συγκλίνει» με την αναφορά σχετικών παραδειγμάτων από την καθημερινή εμπειρία και β)αντιλήψεις και χρήση των εννοιών «όριο», «προσεγγίζει», «τείνει», «συγκλίνει» με την αναφορά σχετικών παραδειγμάτων από τα μαθηματικά και τη φυσική.

Συμμετέχοντες στην κυρίως έρευνα: Η έρευνα πραγματοποιήθηκε τον Φεβρουάριο του 2010, στα Εκπαιδευτήρια Θεοδωροπούλου του Νομού Χανίων. Συμμετείχαν 12 παιδιά συνολικά, 4 από κάθε τάξη του Λυκείου.

Μελέτη και ανάλυση των δεδομένων: Η ανάλυση των δεδομένων έγινε με τη μέθοδο της ανάλυσης περιεχομένου και στη βάση της παιδαγωγικής θεωρίας του Vygotsky

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Αυθόρμητες αντιλήψεις των εννοιών «όριο», «προσεγγίζει», «τείνει», «συγκλίνει» που συγκροτούν οι μαθητές ως αποτέλεσμα των καθημερινών εμπειριών τους: Τα παιδιά, στα παραδείγματα που χρησιμοποίησαν από την καθημερινή τους εμπειρία μετέφεραν, μέσα από το λόγο τους, τα συναισθήματα και τις προτιμήσεις τους.

Τα παιδιά της Α' και Β' Λυκείου αναφέρθηκαν, μέσω των παραδειγμάτων τους, κυρίως στις ανθρώπινες σχέσεις (π.χ. «το μέτρο που πρέπει να υπάρχει στις ανθρώπινες σχέσεις», «τα όρια που βάζουν οι γονείς, σε μία έξοδο του παιδιού, ως προς την ώρα», «τα όρια ανοχής ενός ανθρώπου», «το πλησίασμα δύο ανθρώπων με σκοπό να γνωριστούν και να κάνουν παρέα» κτλ.). Τα παιδιά αναφέρθηκαν και στις προτιμήσεις τους ή στα προβλήματα που τους απασχολούσαν ανάλογα με την τάξη στην οποία βρίσκονταν. Κάποια από τα παραδείγματα των παιδιών της Α' και Β' Λυκείου αφορούσαν την κατεύθυνση προς την οποία τείνουν (θετική, θεωρητική κτλ.) και το όριο που υπάρχει για τις βάσεις των μαθημάτων. Τα παιδιά της Γ' Λυκείου, και συγκεκριμένα τα παιδιά της θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης, δυσκολεύτηκαν να δώσουν καθημερινά παραδείγματα σχετικά με την έννοια του ορίου. Το παιδί της θετικής κατεύθυνσης συγκεκριμένα αναφέρθηκε στη στιγμιαία ταχύτητα ενός αυτοκινήτου και προσπάθησε να τη συνδέσει με το όριο χωρίς όμως να τα καταφέρει. Κάποια άλλα παραδείγματα των παιδιών της Γ' Λυκείου αφορούσαν την καθημερινή τους ζωή που τείνει να γίνει ρουτίνα και τις απαντήσεις δύο παιδιών σε ένα διαγώνισμα που συγκλίνουν.

Σύμφωνα με τον Vygotsky, τα παιδιά εκφράζουν μέσα από το λόγο τους τις σχέσεις και τα συναισθήματα τους. Η συναισθηματική ισορροπία του παιδιού που μεγαλώνει, η κοινωνική του προσαρμογή και η ανάπτυξη των γνωστικών του λειτουργιών συμπορεύονται. Τα παιδιά μεταφέρουν στο λόγο τους οικείες

καταστάσεις και αντιλήψεις που είναι κυρίαρχες στην καθημερινή ζωή της οικογένειας και του σχολείου.

Το όριο θεωρήθηκε από την πλειοψηφία των παιδιών ως εμπόδιο, φράγμα, κανόνας ή περιορισμός. Το όριο θεωρήθηκε επίσης ως σύνορο (ή το σημείο με το οποίο προκαλείται μετάβαση από μια κατάσταση σε μια άλλη) και λιγότερο ως τέλος ή τέρμα. Ανάλογα με τα παραδείγματα που χρησιμοποιήθηκαν το όριο επιτυγχανόταν, το όριο μπορούσε να ξεπεραστεί ή το όριο δεν μπορούσε να ξεπεραστεί.

Οι αυθόρμητες αντιλήψεις της έννοιας του ορίου, οι οποίες εντοπίστηκαν στην παρούσα έρευνα, συμφωνούν περισσότερο με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της έρευνας των Grugnatti & Rizza (2003). Σύμφωνα με τα αποτελέσματα εκείνης της έρευνας, στο 44% του δείγματος εντοπίστηκε η ιδέα ενός εμποδίου, φράγματος, κανόνα ή περιορισμού, στο 30% εντοπίστηκε η ιδέα ενός συνόρου, κλεισίματος και στο 19% η ιδέα ενός άκρου. Στην παρούσα εργασία δεν έγινε ποσοτικός έλεγχος των δεδομένων γιατί πολλά παιδιά αντιλήφθηκαν την έννοια του ορίου (όπως συνέβη και με τις άλλες έννοιες) με περισσότερες από μία σημασίες. Δηλαδή οι αυθόρμητες αντιλήψεις για τις εξεταζόμενες έννοιες διέφεραν όχι μόνο από παιδί σε παιδί αλλά συχνά και στο ίδιο το παιδί.

Οι αυθόρμητες αντιλήψεις των ρημάτων «προσεγγίζει», «τείνει» και «συγκλίνει», οι οποίες εντοπίστηκαν στην παρούσα εργασία, δημιούργησαν μια διαφορετική αίσθηση από τις αντίστοιχες αντιλήψεις που δημιούργησε το ουσιαστικό «όριο». Σύμφωνα με τον Monaghan (1991), το γεγονός αυτό δεν προκαλεί έκπληξη, δεδομένου ότι και τα τρία ρήματα είναι «λέξεις δράσεις».

Τα ρήματα «προσεγγίζει» και «τείνει» θεωρήθηκαν συχνά ως το ίδιο πράγμα. Προκαλούσαν μετακίνηση ενός ανθρώπου ή ενός κινουμένου αντικειμένου ή μιας κατάστασης προς έναν άλλον άνθρωπο ή προς ένα ακίνητο αντικείμενο ή μία άλλη κατάσταση. Τα παιδιά χρησιμοποίησαν τη λέξη «προσεγγίζει» για να περιγράψουν κυρίως το πλησίασμα ανθρώπων ή αντικειμένων και τη λέξη «τείνει» για να περιγράψουν κυρίως το πλησίασμα καταστάσεων. Συνήθως η μετακίνηση αυτή δε φτάνει τον άνθρωπο ή το αντικείμενο ή την κατάσταση που προσεγγίζεται. Και το ρήμα «συγκλίνει» έγινε αντιληπτό δυναμικά με τη διαφορά ότι τα σχετικά παραδείγματα περιέλαβαν την αμφίδρομη μετακίνηση δύο ανθρώπων ή αντικειμένων ή καταστάσεων (π.χ. «οι απόψεις μας συγκλίνουν»). Σε ορισμένες περιπτώσεις η μετακίνηση αυτή κατέληγε στο φτάσιμο ή στο άγγιγμα ή στην ταύτιση σε αντίθεση με τη μετακίνηση που προκάλεσαν τα ρήματα «προσεγγίζει» και «τείνει». Αρκετές φορές τα τρία ρήματα αντιπροσώπευαν τη μετακίνηση προς ένα τέρμα ενώ το «όριο» αντιπροσώπευε αυτό το τέρμα.

Τυπικές αντιλήψεις των εννοιών «όριο», «προσεγγίζει», «τείνει», «συγκλίνει» που συγκροτούν οι μαθητές ως αποτέλεσμα της διδασκαλίας των μαθηματικών και της φυσικής: Οι τυπικές αντιλήψεις της έννοιας του ορίου αφορούσαν κυρίως τα παιδιά της Γ' Λυκείου τα οποία είχαν διδαχτεί επίσημα την έννοια αυτή. Οι τυπικές αντιλήψεις των υπόλοιπων εννοιών αφορούσαν τα παιδιά όλων των τάξεων τα οποία είχαν διδαχτεί τις έμμεσες αναφορές στο όριο.

Τα δύο παιδιά θεωρητικής κατεύθυνσης της Γ' Λυκείου δεν είχαν διαμορφώσει τυπικές αντιλήψεις για την έννοια του ορίου αν και είχαν διδαχθεί την έννοια στα μαθηματικά γενικής παιδείας. Παρόλα αυτά οι αντιλήψεις των παιδιών θεωρητικής κατεύθυνσης παρουσίασαν ενδιαφέρον. Εφόσον δεν είχαν τυπικές αντιλήψεις για τη μαθηματική έννοια του ορίου, επηρεασμένοι ίσως από το πρώτο μέρος της συνέντευξης και τις αυθόρμητες αντιλήψεις τους, θεώρησαν, πως η έννοια του ορίου μάλλον σχετίζεται με κάποιον περιορισμό. Ειδικότερα το ένα παιδί ισχυρίστηκε πως ο συμβολισμός του ορίου στα μαθηματικά σχετίζεται με αγκύλες.

Το παιδί θετικής κατεύθυνσης της Γ' Λυκείου σύνδεσε αρχικά τη μαθηματική έννοια του ορίου με την έννοια της εφαπτομένης αλλά και της στιγμιαίας ταχύτητας από τη φυσική. Ισχυρίστηκε πως αντιλαμβάνεται την έννοια του ορίου γραφικά αλλά δυσκολεύτηκε να περιγράψει τον ισχυρισμό του αναλυτικότερα. Όταν του ζητήθηκε να προσπαθήσει να περιγράψει την έννοια του ορίου αριθμητικά, δεν μπόρεσε να κάνει αυτήν τη περιγραφή καθόλου. Όταν η ερευνήτρια έγραψε ένα παράδειγμα για το όριο μιας συνάρτησης ($\lim_{x\to 2} f(x) = 4$) και του ζήτησε να προσπαθήσει να το εξηγήσει, το παιδί απλώς διάβασε: *«Για τιμές κοντά στο 2, η f παίρνει τιμές κοντά στο 4.»*. Η σύνδεση που έκανε αρχικά, αυτό το παιδί, του ορίου με την εφαπτομένη δικαιολογείται από το γεγονός πως η εφαπτομένη συνδέεται με την έννοια της παραγώγου και η παράγωγος με τη σειρά της συνδέεται με την έννοια του ορίου.

Το παιδί τεχνολογικής κατεύθυνσης της Γ' Λυκείου δεν μπορούσε να εξηγήσει την έννοια του ορίου ως αυτοτελή έννοια και τη σύνδεσε με την έννοια της συνέχειας και της παραγώγου. Όταν η ερευνήτρια έγραψε ένα παράδειγμα για το όριο μιας συνάρτησης ($\lim_{x\to 2} f(x) = 4$) και του ζήτησε να προσπαθήσει να το εξηγήσει, το παιδί απλώς διάβασε: *«Όταν $x = 2$ τότε η συνάρτηση παίρνει την τιμή 4»*. Το παιδί έδωσε αυτήν την απάντηση γιατί είχε στο μυαλό του την έννοια της συνέχειας ή τη μεθοδολογία εύρεσης ορίου. Το ερώτημα σχετικά με το αν επιτυγχάνεται το όριο ή όχι, σύμφωνα με τον Cornu (1991), αποτελεί ένα επιστημολογικό εμπόδιο το οποίο προκάλεσε αντιπαράθεση που κράτησε

σε όλη την ιστορική εξέλιξη της έννοιας του ορίου και συνεχίζεται ακόμα και στους μαθητές.

Και από τα δύο αυτά παιδιά απουσίασε μία τυπική σύλληψη της έννοιας του ορίου. Το γεγονός αυτό ήταν αναμενόμενο εφόσον στο βιβλίο του διδάσκοντα αναφέρεται ότι η διδασκαλία του ορίου δεν αποτελεί αυτοσκοπό αλλά στοχεύει στην προετοιμασία για την εισαγωγή στις έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος που αποτελούν και το κέντρο βάρους της ενότητας της Ανάλυσης.

Σχετικά με τις τυπικές αντιλήψεις των εννοιών «προσεγγίζει», «τείνει» και «συγκλίνει» οι μαθητές όλων των τάξεων μπόρεσαν να αναφερθούν σε αρκετές έμμεσες αναφορές του ορίου. Μόνο τα δύο παιδιά θεωρητικής κατεύθυνσης της Γ' Λυκείου δεν είχαν καθόλου τυπικές αντιλήψεις για τις έννοιες αυτές. Σχεδόν όλα τα υπόλοιπα παιδιά αναφέρθηκαν στις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων οι οποίες πλησιάζουν πολύ κοντά τους άξονες. Αν και οι μαθηματικές σημασίες των τριών ρημάτων είναι ισοδύναμες, το ρήμα «τείνει» είναι αυτό που χρησιμοποιήθηκε περισσότερο από τα παιδιά. Το γεγονός αυτό δικαιολογείται από την πολύ συχνή χρήση της λέξης αυτής στα μαθηματικά και στη φυσική σε αντίθεση με τις υπόλοιπες λέξεις.

Τα περισσότερα παιδιά, στις τυπικές αντιλήψεις τους, αναφέρθηκαν στη στιγμιαία ταχύτητα από τη φυσική. Θεώρησαν, όπως ήταν αναμενόμενο, πως η στιγμιαία ταχύτητα ενός αυτοκινήτου είναι η ακριβής ταχύτητα που έχει το αυτοκίνητο κάθε χρονική στιγμή.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Α) Πώς γίνονται αντιληπτές και χρησιμοποιούνται από τους μαθητές της Α', Β', Γ' Λυκείου οι έννοιες «όριο», «προσεγγίζει», «τείνει», «συγκλίνει» σύμφωνα με την καθημερινή τους εμπειρία

Το όριο θεωρήθηκε από την πλειοψηφία των παιδιών ως εμπόδιο, φράγμα, κανόνας ή περιορισμός. Το όριο θεωρήθηκε επίσης ως σύνορο και λιγότερο ως τέλος ή τέρμα. Τα ρήματα «προσεγγίζει», «τείνει» και «συγκλίνει» έγιναν αντιληπτά δυναμικά και θεωρήθηκαν συχνά ως το ίδιο πράγμα. Προκαλούσαν μετακίνηση ενός ανθρώπου ή ενός κινουμένου αντικειμένου ή μιας κατάστασης προς έναν άλλον άνθρωπο ή προς ένα ακίνητο αντικείμενο ή μία άλλη κατάσταση. Σε ορισμένες περιπτώσεις η μετακίνηση αυτή κατέληγε στο φτάσιμο.

Β) Πώς γίνονται αντιληπτές και χρησιμοποιούνται από τους μαθητές της Α', Β', Γ' Λυκείου οι έννοιες «όριο», «προσεγγίζει», «τείνει», «συγκλίνει» σύμφωνα με την τυπική διδασκαλία των μαθηματικών και της φυσικής.

Τα παιδιά θεωρητικής κατεύθυνσης της Γ' Λυκείου θεώρησαν πως η έννοια του ορίου στα μαθηματικά σχετίζεται με κάποιον περιορισμό. Από τα παιδιά θετικής – τεχνολογικής κατεύθυνσης απουσίαζε μία τυπική σύλληψη της έννοιας του ορίου. Θεώρησαν πως το όριο χρησιμοποιείται ως εργαλείο για την συνέχεια ή την παράγωγο ή τη στιγμιαία ταχύτητα της φυσικής. Οι μαθητές όλων των τάξεων μπόρεσαν να αναφερθούν σε αρκετές έμμεσες αναφορές του ορίου, χρησιμοποιώντας τις λέξεις «προσεγγίζει» και «τείνει». Σε όλα τα παραδείγματα που χρησιμοποιήθηκαν οι τυπικές σημασίες των εννοιών αυτών είναι όμοιες. Χρησιμοποιούνται δηλαδή για να περιγράψουν ένα φαινόμενο το οποίο πλησιάζει πολύ κοντά σε ένα άλλο χωρίς να φτάνει. Ταύτιση δεν είχε πραγματοποιηθεί σε κανένα μαθηματικό παράδειγμα. Ταύτιση είχε πραγματοποιηθεί μόνο στη στιγμιαία ταχύτητα από τη φυσική.

Γ) Πώς η διδασκαλία της μαθηματικής έννοιας του ορίου έχει επηρεάσει τη σχέση των αυθόρμητων και τυπικών αντιλήψεων των μαθητών

Τα παιδιά που είχαν διδαχθεί τις εξεταζόμενες έννοιες και τις χρησιμοποιούσαν συχνά στα μαθηματικά και στη φυσική, παρουσίασαν αδύναμες αυθόρμητες αντιλήψεις και ισχυρές τυπικές για τις έννοιες αυτές. Αντίθετα τα παιδιά που δεν είχαν διδαχθεί τις εξεταζόμενες έννοιες ή δεν τις χρησιμοποιούσαν συχνά στα μαθηματικά και στη φυσική παρουσίασαν ισχυρές αυθόρμητες αντιλήψεις και αδύναμες τυπικές. Σε κάποια παιδιά παρατηρήθηκε η προσπάθεια ερμηνείας των αδύναμων αυθόρμητων ή τυπικών εννοιών στη βάση των αντίστοιχα ισχυρών τυπικών ή αυθόρμητων εννοιών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Artique, Michele (1998): *"Teaching and learning elementary analysis: what can we learn from didactical research and curriculum evolution?"*. First Mediterranean Conference on Mathematics.

Boyer, Carl (1949): *The history of calculus and its conceptual development*. New York: Dover.

Brousseau, Guy (1983): *"Les obstacles epistemologiques et les problems en mathematiques, Recherches en Didactique des Mathematiques"*. 4, 165-198.

Cornu, Bernard (1991): *"Limits"* In D. Tall (ed.), Advanced Mathematical Thinking, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 153-166.

Davis, Robert, Vinner, Shlomo (1986): *"The notion of limit: some seemingly unavoidable misconception stages"*. Journal of Mathematical Behaviour, 5, 281-303.

Ernest, Paul (1991): *"The philosophy of mathematics education"*. London: Falmer Press.

Grugnetti, Lucia, Rizza, Angela (2003): *"A lengthy process for the establishment of the concept of limit"*. Italy: Proceedings of the Third Conference of the European Group for Research in Mathematics Education.

Monaghan, Joe (1991): "*Problems with the language of limits"*. For the Learning of Mathematics, 11 (3), 20-24.

Sierpinska, Anna (1987): *"Humanities students and epistemological obstacles related to limits"*. Educational Studies in Mathematics, 18, 371-397.

Williams, Sir Peter (1991): *"Models of limit held by college calculus students"*. Journal for Research in Mathematics Education, 22, 219-236.

Williams, Sir Peter (2001): *"Predications of the limit concept: an application of repertory grids"*. Journal for Research in Mathematics Education, 32, 341-367.

Αντωνίου, Νικόλαος, Δημητριάδης, Παναγιώτης, Καμπούρης, Κωνσταντίνος, Παπαμιχάλης, Κωνσταντίνος, Παπατσίμπα, Λαμπρινή (2009): *Φυσική Β' Γυμνασίου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Αδαμόπουλος, Λεωνίδας, Βισκαδουράκης, Βασίλειος, Γαβαλάς, Δημήτριος, Πολύζος, Γεώργιος, Σβέρκος, Ανδρέας (2009): *Μαθηματικά Β' Τάξης Ενιαίου Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Αδαμόπουλος, Λεωνίδας, Δαμιανού, Χαράλαμπος, Σβέρκος, Ανδρέας (2009): *Μαθηματικά και στοιχεία Στατιστικής Γ' Ενιαίου Λυκείου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Ανδρεαδάκης, Στυλιανός, Κατσαργύρης, Βασίλειος, Μέτης, Στέφανος, Μπρουχούτας, Κωνσταντίνος, Παπασταυρίδης, Σταύρος, Πολύζος, Γεώργιος (2009): *Μαθηματικά Θετικής Κατεύθυνσης Γ' Ενιαίου Λυκείου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Ανδρεαδάκης, Στυλιανός, Κατσαργύρης, Βασίλειος, Παπασταυρίδης, Σταύρος, Πολύζος, Γεώργιος, Σβέρκος, Ανδρέας (2009): *Άλγεβρα Α' Ενιαίου Λυκείου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Ανδρεαδάκης, Στυλιανός, Κατσαργύρης, Βασίλειος, Παπασταυρίδης, Σταύρος, Πολύζος, Γεώργιος, Σβέρκος, Ανδρέας (2009): *Άλγεβρα Β' Ενιαίου Λυκείου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Αργυράκης, Δημήτριος, Βουργάνας, Παναγιώτης, Μέντης, Κωνσταντίνος, Τσικοπούλου, Σταματούλα, Χρυσοβέργης, Μιχαήλ (2009): *Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Αργυρόπουλος, Ηλίας, Βλάμος, Παναγιώτης, Κατσούλης, Γεώργιος, Μαρκάτης, Στυλιανός, Σιδέρης, Πολυχρόνης (2009): *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Ενιαίου Λυκείου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Βλάμος, Παναγιώτης, Δρούτσας, Παναγιώτης, Πρέσβης, Γεώργιος, Ρεκούμης, Κωνσταντίνος (2009): *Μαθηματικά Β' Γυμνασίου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Βλάχος, Ιωάννης, Γραμματικάκης Ιωάννης, Καραπαναγιώτης, Βασίλης, Κόκκοτας, Παναγιώτης, Περιστερόπουλος, Περικλής, Τιμόθεου, Γεώργιος (2009), *Φυσική Γενικής Παιδείας Α' Τάξης Γενικού Λυκείου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Βυγκότσι, Λεβ (1988): *Σκέψη και γλώσσα*. Αθήνα: Γνώση.

Κραφτ, Βίκτωρ (1986): *Ο κύκλος της Βιέννης και η γέννηση του Νεοθετικισμού*. Αθήνα: Γνώση.

Παπαμιχαήλ, Γιάννης (1988): *Μάθηση και κοινωνία: η εκπαίδευση στις θεωρίες της γνωστικής ανάπτυξης*. Αθήνα: Οδυσσέας.

Σπάιβακ, Μάικλ (1991): *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός: Μια εισαγωγή στην Ανάλυση*. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Τάιλς, Μαίρη (1993): *Μπασελάρ – Επιστήμη και Αντικειμενικότητα*. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Χασάπης, Δημήτρης (2000): *Διδακτική βασικών μαθηματικών ευνοιών*. Αθήνα: Μεταίχμιο.

Η ΠΑΡΟΥΣΙΑ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΤΑ ΓΥΜΝΑΣΙΑΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μιχαήλ Μανωλόπουλος,
Δρ. Παν. Αθηνών,
Σχ. Σύμβουλος Μαθηματικών.

Βασίλειος Μανωλόπουλος,
Δρ. Μηχανικός Ε.Μ.Π.,
Εφαρμ. Φυσικός του Ε.Μ.Π.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα μαθηματικά και η φυσική αναπτύσσονται σε μια αμφίδρομη σχέση. Μελετώντας την εξέλιξη και την αλληλεπίδραση μαθηματικών και φυσικής, οδηγούμαστε στην εμβάθυνση αλλά και στη σφαιρική κατανόηση αμφοτέρων. Στην παρούσα εισήγηση θα γίνει μια περιήγηση στα γυμνασιακά βιβλία των μαθηματικών (δασκάλου και μαθητή), με σκοπό την αλίευση αναφορών σε παραδείγματα, ασκήσεις και έννοιες από τη φυσική. Μια ερευνητική ματιά θα υπάρξει επίσης σε δύο από τις εγκεκριμένες γαλλικές σειρές για την γυμνασιακή εκπαίδευση.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα μαθηματικά και η φυσική αναπτύσσονται σε μια αμφίδρομη σχέση. Είναι γνωστό ότι τα μαθηματικά είναι η γλώσσα της φυσικής[1]. Η φυσική όμως δεν είναι μόνο ένα πεδίο εφαρμογής των μαθηματικών όπου έτοιμα προς λύση προβλήματα περιμένουν την απάντησή τους. Τα τιθέμενα προβλήματα αποτελούν αφορμή για επέκταση των μαθηματικών εργαλείων, εννοιών και θεωριών καθώς και διατύπωση νέων. Η φυσική αποτελεί μια από τις σπουδαιότερες πηγές πολιτιστικής πίεσης πάνω στα μαθηματικά, «*η αναγκαιότητα είναι μητέρα κάθε εφεύρεσης*», (Wilder 1968, σελ. 172, 175, 202, 211), ιδιαίτερα στους τελευταίους αιώνες. Είναι γνωστό το παράδειγμα του Newton και του Leibniz που εργάζονταν ερευνητικά σε θέματα που άπτονταν ταυτόχρονα μαθηματικών και φυσικής. Αλλά και η συνεργασία μεταξύ μαθηματικών και φυσικών δεν είναι ασυνήθης. Η στενή σχέση στην ανάπτυξη και των δύο επιστημών καταδεικνύεται στη μελέτη της ιστορίας των μαθηματικών και της φυσικής, η οποία (πρέπει να) αποτελεί αναπόσπαστο κλάδο της σπουδής και των δύο[2]. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η θεωρία γραφημάτων, που αποτελεί κλάδο της τοπολογίας, η οποία προήλθε από μελέτες φυσικών προβλημάτων κατά τον 19ο αιώνα και πρόσφατα έχει εφαρμογές τόσο στις φυσικές όσο και στις κοινωνικές επιστήμες. Ο Γερμανός Gustav Robert Kirchhoff, μελετώντας τα ηλεκτρικά κυκλώματα, πρώτος παρουσίασε έννοιες και θεωρήματα της θεωρίας γραφημάτων (Μαυρονικόλας 2002, σελ.259).

Ο αφαιρετικός τρόπος σκέψης των μαθηματικών έχει περάσει και σε άλλες θετικές επιστήμες και κυρίως στη φυσική. Αν και σκοπός της φυσικής είναι η μελέτη της «φυσικής πραγματικότητας», το μεγαλύτερο μέρος της θεωρητικής φυσικής είναι εγγύτερα εννοιολογικά προς τα αφηρημένα μαθηματικά παρά στη μελέτη των φυσικών φαινομένων.

Μελετώντας την εξέλιξη και την αλληλεπίδραση μαθηματικών και φυσικής, οδηγούμαστε στην εμβάθυνση αλλά και στη σφαιρική κατανόηση αμφοτέρων (Tzanakis 2002). Αν και στο επίπεδο των πανεπιστημιακών σπουδών τα ανωτέρω είναι ευρέως αποδεκτά, η εφαρμογή τους στη Γυμνασιακή Εκπαίδευση έχει δυσκολίες, όπου εκτός των άλλων δεν υπάρχει το αναγκαίο υπόβαθρο για το πέρασμα από τη μία επιστήμη στην άλλη.

---

[1] «Το βιβλίο της φύσης είναι γραμμένο με μαθηματικούς χαρακτήρες» γνωστή φράση του Γαλιλαίου που βρίσκεται στο φυλλάδιό του με τίτλο «Il Sagiatore» το οποίο εκδόθηκε το 1623.

[2] Το μάθημα «Ιστορία των επιστημών και της τεχνολογίας» ήταν από τα υποχρεωτικά μαθήματα της Γ' Λυκείου. Από τις αρχές της δεκαετίας του 2000 είναι προαιρετικό και στην πράξη δεν διδάσκεται πλην ελαχίστων εξαιρέσεων.

Στο παρόν άρθρο θα γίνει μια περιήγηση στα γυμνασιακά βιβλία των μαθηματικών (δασκάλου και μαθητή) με σκοπό την αλίευση αναφορών σε παραδείγματα, ασκήσεις και έννοιες από τη φυσική. Αναφορών που καθίστανται υποχρεωτικές αφού με τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο επιδιώκεται εκτός των άλλων και *«Η ανάδειξη της εφαρμοσιμότητας και πρακτικής χρήσης των Μαθηματικών από την αρχαιότητα ως τις μέρες μας, τόσο στις θετικές όσο και στις ανθρωπιστικές και κοινωνικοοικονομικές επιστήμες»*, (βλ. ΦΕΚ 303Β/13-03-2003 των νέων ΔΕΠΠΣ – ΑΠΣ).

Μια ερευνητική ματιά θα υπάρξει επίσης σε κάποιες από τις εν χρήσει γαλλικές σειρές για τη γυμνασιακή εκπαίδευση.

ΣΥΝΎΠΑΡΞΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΏΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΉΣ ΣΤΙΣ ΓΥΜΝΑΣΙΑΚΈΣ ΑΊΘΟΥΣΕΣ

Η φυσική και τα μαθηματικά είτε το θέλουμε είτε όχι συγκατοικούν στο ίδιο σπίτι (γυμνασιακή διδακτική διαδικασία). Το αν η συγκατοίκηση θα αποβεί αναγκαίο κακό ή σχέση αλληλοκατανόησης και αλληλοεκτίμησης εξαρτάται από πολλούς παράγοντες. Στην παράγραφο αυτή θα δούμε κάποιες παραμέτρους του θέματος.

Τα μαθηματικά αποτελούν ένα εργαλείο για τη φυσική. Η καλή γνώση του εργαλείου το καθιστά αποτελεσματικότερο στο πεδίο εφαρμογής του. Αν όμως υπερτονισθεί η αξία του και μονοπωλήσει το ενδιαφέρον, κινδυνεύει να αχρηστεύσει το ρόλο του. Η εστίαση του ενδιαφέροντος στην ορθολογικότερη και ακριβέστερη εφαρμογή του εργαλείου έχει ως κίνδυνο να παραμερισθεί το φυσικό φαινόμενο το οποίο θέλει να περιγράψει και να εξηγήσει ώστε να γίνει κατανοητό. Αν η μαθηματικοποίηση της φυσικής σε πανεπιστημιακό επίπεδο είναι απαραίτητη, στα γυμνασιακά χρόνια ενέχει τον κίνδυνο της «αποφυσικοποιήσεως» του φυσικού φαινομένου. Η συνεργασία και σε αυτή την περίπτωση μεταξύ των καθηγητών των δύο ειδικοτήτων κρίνεται απαραίτητη.

Όπως είναι γνωστό, πρωτίστως τα μαθηματικά και δευτερευόντως η φυσική, χαρακτηρίζονται σε σχέση με άλλους τομείς του επιστητού από τη μεγάλη ακρίβεια των εννοιών. Αν και πρόκειται για πλεονέκτημα έναντι των υπολοίπων επιστημών, στο επίπεδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης δημιουργεί δυσκολίες στην παρουσίαση και τον ορισμό των εννοιών. Η θεώρηση εννοιών στο ανθρώπινο μυαλό δεν είναι μια αυστηρά λογική μαθηματική διαδικασία. Οι έννοιες εγκαθίστανται είτε μέσω εικόνας (Concept Image), είτε μέσω του ορισμού (Concept Defition), ή και αμφοτέρων, (Tall 1981). Στην πρώτη περίπτωση πρόκειται για τη γνωστική δομή που προσεταιρίζεται στην έννοια, η οποία περιλαμβάνει διανοητικές εικόνες,

ιδιότητες και διαδικασίες που έχουν να κάνουν με αυτήν την έννοια και προέρχονται από την καθημερινή εμπειρία ή πληροφορίες πέραν του αυστηρού ορισμού. Αναδιαμορφώνεται με την πάροδο του χρόνου. Υπάρχουν όμως πάντα τα σπέρματα μιας παρανόησης και σύγκρουσης. Παράδειγμα η αφαίρεση που σημαίνει «μείωση, ελάττωση», όμως 5-(-3)=8! Στην έννοια μέσω ορισμού περιλαμβάνεται όλο το σύνολο των λέξεων που χρειάζεται να καθορίσουν την έννοια. Η έννοια μέσω εικόνας επηρεάζεται από την έννοια μέσω ορισμού. Η χρησιμοποίηση εννοιών της φυσικής αβασάνιστα, χωρίς να έχει προηγηθεί η διερεύνηση της εικόνας που υπάρχει στο μυαλό του μαθητή, μπορεί να δημιουργήσει αξεπέραστα προβλήματα δυσλειτουργιών ή εννοιολογικών συγκρούσεων. Η ορθότερη αντιμετώπιση για την αποτελεσματική χρήση εννοιών από τη φυσική, συνίσταται στον προηγούμενο «ακριβή» ορισμό τους. Τα εισαγωγικά αναφέρονται στην παιδαγωγική αξία του ορισμού, αφού αληθεύει η ρήση που αποδίδεται στον Poincaré, ότι «ένας καλός ορισμός στην εκπαίδευση είναι πρωτίστως αυτός που είναι κατανοητός από τους μαθητές». Άλλωστε η έρευνα στο χώρο της διδακτικής των θετικών επιστημών δείχνει ότι οι μαθητές και των τριών εκπαιδευτικών βαθμίδων αντιμετωπίζουν συχνά σημαντικές δυσκολίες στην κατανόηση των *επιστημονικών εννοιών (Arons 1990).*

Ένα δεδομένο που δυσχεραίνει τη χρήση της φυσικής στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι η έντονη αμφισβήτηση των νέων γυμνασιακών βιβλίων της φυσικής, ιδίως όσον αφορά το επίπεδο δυσκολίας τους αλλά και τη δυνατότητα που προσφέρουν στους μαθητές για αφομοίωση των εννοιών. «*Το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο και εσείς, ως συγγραφική ομάδα, ποιες έρευνες ακολουθήσατε και προτείνετε οι εισαγωγικές έννοιες στην Φυσική να γίνουν σε μία διδακτική ώρα (περιληπτικά); Γιατί δεν αφιερώνετε χρόνο για να οικοδομηθούν αυτές οι έννοιες στο Γυμνάσιο;*»

(«Η απάντηση μου στους συγγραφείς των βιβλίων της Φυσικής του Γυμνασίου», της Ε. Δανίλη, Σχ. Συμβούλου ΠΕ4 βλ. http://www.esos.gr/index.php?option=com_content&view =article&id= 5313:2009-12-02-07-16-44&catid=346:2009-12-02-06-54-27&Itemid=1498).

Στο ίδιο άρθρο υπάρχουν πληροφορίες και για άλλες αντιδράσεις στα προαναφερθέντα βιβλία. Δυσμενή κριτική υπέστησαν τα νέα βιβλία και στη Κύπρο. (βλ. http://www.neapnoi.org/main/index.php?option=com_content&view=article&id=112:2009-02-12-21-33-08&catid=1:latest-news&Itemid= 28). Ενδιαφέρον έχει και η πρόταση του Σχ. Συμβούλου Ι. Βλάχου (βλ. Συμβολή σε ένα διάλογο για τη διδακτέα ύλη της Φυσικής με τα νέα βιβλία στο Γυμνάσιο, http://users.otenet.gr/~givla1/).

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Οι παρατηρήσεις που ακολουθούν αφορούν το εγκεκριμένο από το αρμόδιο υπουργείο σχολικό βιβλίο των μαθηματικών καθώς και το βιβλίο του εκπαιδευτικού των ίδιων συγγραφέων (Βανδουλάκης 2007α, 2007β). Το ίδιο ισχύει και για τα σχολικά βιβλία των υπολοίπων τάξεων.

Ως θετικό στοιχείο αναφέρεται η ύπαρξη δύο σημειωμάτων, για τον Ερατοσθένη (μέτρηση της ακτίνας της γης) και τα μέτρα και σταθμά (Βανδουλάκης 2007α, σελ. 29 και 68), τα οποία συμβάλλουν στην ανάδειξη της σχέσης των μαθηματικών με τη φυσική.

Όμως η προσπάθεια «εμπλοκής» της φυσικής στη διδασκαλία των μαθηματικών δεν είναι πάντοτε επιτυχημένη. Η πρώτη αναφορά σε θέμα φυσικής είναι δυστυχώς λανθασμένη. Στη σελίδα 11 και συγκεκριμένα στην 2η Δραστηριότητα αναφέρεται ότι για να βαθμολογήσουμε ένα θερμόμετρο στους 0 ^{o}C το αφήνουμε στον πάγο αρκετή ώρα, ενώ το ορθό είναι σε μίγμα πάγου με απεσταγμένο νερό (σημείο τήξεως του πάγου) (Αλεξόπουλος 1962, §6). Διαφορετικά η θερμοκρασία του πάγου μπορεί να είναι χαμηλότερη των 0 ^{o}C.

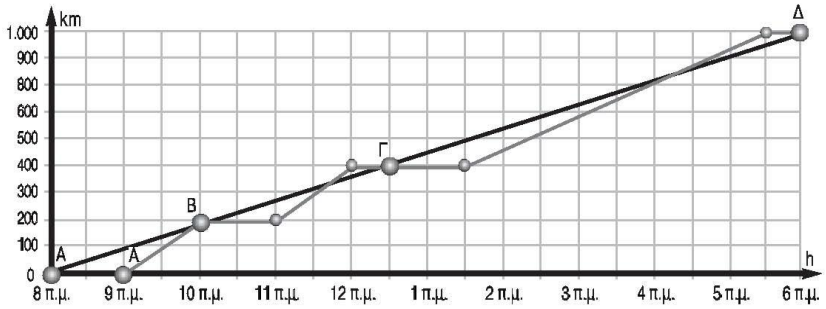
Στη σελίδα 64 και συγκεκριμένα στη 2η γραμμή, η έκφραση *«Υπάρχουν όμως πράγματα που μπορούν να μετρηθούν, όπως πχ το μήκος, το βάρος, ο χρόνος»* είναι τουλάχιστον αδόκιμη. Υπάρχουν ιδιότητες των σωμάτων που μπορούν να μετρηθούν με ακρίβεια και το αποτέλεσμα μπορεί να εκφρασθεί με έναν αριθμό, όπως το μήκος, η μάζα κλπ, ενώ για παράδειγμα συναισθήματα ή καταστάσεις, όπως ο φόβος ή η κούραση δεν εκφράζονται με έναν αριθμό.

Για την εισαγωγή της εννοίας των αντιστρόφως αναλόγων ποσών χρησιμοποιείται ένα παράδειγμα από τη φυσική το οποίο έχει λάθη. Διάφορα μεταφορικά μέσα κινούνται από την Αθήνα έως τη Χρυσούπολη Καβάλας και ζητείται να βρεθεί η σχέση ταχύτητας και χρόνου. Πέρα από το γεγονός ότι η ταχύτητα θα έπρεπε να συνοδεύεται από τον χαρακτηρισμό μέση, η κίνηση όλων των μέσων δεν γίνεται στην ίδια διαδρομή, όπως για παράδειγμα του αεροπλάνου και του λεωφορείου, επομένως το διάστημα δεν είναι το ίδιο για όλα τα μέσα. Την επόμενη χρονιά από την κυκλοφορία των βιβλίων, εστάλη διόρθωση εμβαλωματική η οποία έχει ως εξής: Αντί του *«Ξεκινούν ταυτόχρονα από την Αθήνα…… Το τέλος της διαδρομής είναι η πόλη της Χρυσούπολης Καβάλας, που απέχει 600Km»*, να γραφεί *«Ξεκινούν ταυτόχρονα από μία πόλη……..Το τέλος της διαδρομής είναι μία άλλη πόλη, που απέχει 600Km, σε ευθεία γραμμή από την αφετηρία»*. Όμως η παρατήρηση που αφορούσε την προηγούμενη διατύπωση δεν παύει να ισχύει.

Αν και στην καθημερινή ζωή οι έννοιες μάζα και βάρος ενίοτε συγχέονται, στα σχολικά βιβλία χρειάζεται προσοχή. Στη σελ. 143 δίνεται η πληροφορία ότι το βάρος του μορίου του νερού είναι $3 \cdot 10^{-23}$ g, ενώ το σωστό είναι ότι ο αριθμός αφορά τη μάζα του μορίου του νερού. Και εδώ κατέφθασε διόρθωση αντί για *«0,00000000000000000000003 gr να γραφεί 0,000000000000 00000000029 gr»*!

Η αναφορά σε παραδείγματα στα οποία υπεισέρχεται η ταχύτητα πρέπει να γίνεται προσεκτικότερα. Στο βιβλίο του εκπαιδευτικού (Βανδουλάκης 2007β), στις σελίδες 52 και 57 στις «ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ» υπάρχουν

4. Ένα φορτηγό (ευθεία γραμμή) και ένα λεωφορείο (τεθλασμένη γραμμή) ξεκινούν από τη πόλη Α και πάνε στην Δ, περνώντας από τις πόλεις Β και Γ. Το φορτηγό δεν κάνει καμία στάση, ενώ το λεωφορείο κάνει δύο. Μπορείς να φτιάξεις πίνακες, που να περιγράφουν τα ακριβή δρομολόγια των οχημάτων και τις ταχύτητες τους;



παραδείγματα κινουμένων αυτοκινήτων. Στην άσκηση 15 ορθότερη είναι η διατύπωση «με σταθερή ταχύτητα», όχι απλά «ταχύτητα». Στη δεύτερη περίπτωση (σελ. 57, υπ' αριθ. 3) ζητούνται στο ερώτημα β) η ταχύτητα μιας χρονικής περιόδου του ταξιδιού στο ζ) η μέση ταχύτητα του συνολικού ταξιδιού, και τις δύο φορές το ερώτημα αφορά το ίδιο φυσικό μέγεθος (τη μέση ταχύτητα), όχι όμως με την ίδια διατύπωση.

Σχήμα 1: Δραστηριότητα από τη σελίδα 62 του Βιβλίου του Εκπαιδευτικού.

Στο ίδιο βιβλίο και στη σελίδα 60 υπάρχει το ερώτημα, αν *«ο χρόνος που κινείται ένα αυτοκίνητο και η ταχύτητά του είναι ποσά ανάλογα»*, χωρίς να καθορισθεί το είδος της κίνησης. Είναι γνωστό ότι μόνο στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα τα δύο ποσά είναι ανάλογα. Επειδή οι μαθητές δεν γνωρίζουν το περιεχόμενο των όρων από τη φυσική, η επεξήγησή τους και η ορθή χρήση τους είναι επιβεβλημένες.

Γενικότερα τα κατασκευασμένα παραδείγματα ή προβλήματα για την «καλλίτερη» κατανόηση εννοιών ή για εξάσκηση, ενέχουν κινδύνους λαθών ή απιθανοτήτων και ενίοτε με την πολυπλοκότητά τους συσκοτίζουν την προς ανάδειξη έννοια. Ο κίνδυνος ενυπάρχει και για τα παραδείγματα από τη φυσική. Στο σχ. 1 υπάρχει μια δραστηριότητα όπως εμφανίζεται στη σελίδα 62 του Βιβλίου του Εκπαιδευτικού (Βανδουλάκης 2007β). Οι ζητούμενοι πίνακες αφορούν μέσες ταχύτητες και όχι απλά ταχύτητες. Λανθασμένα αναφέρεται ότι η κίνηση του φορτηγού στο διάγραμμα παριστάνεται από ευθεία γραμμή, αφού οι κλίσεις (μέσες ταχύτητες) των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΒΓ και ΓΔ είναι διαφορετικές. Και μια επισήμανση όχι χωρίς σημασία: οι (μέσες) ταχύτητες του λεωφορείου είναι φονικές για τους επιβάτες. Παράδειγμα: $\overline{\upsilon}_{AB}$ = 200 km/h!

Στη σελίδα 114 ο σωστός τρόπος γραφής της θερμοκρασίας είναι 7 ^{0}C και όχι 7^0. Στο διάγραμμα της σελίδας 126 στον κάθετο άξονα λείπει η μονάδα μέτρησης (^{0}C).

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Η διάθεση «εμπλοκής» της φυσικής στο βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου είναι και εδώ εμφανής, δεν στερείται όμως λαθών και παραλείψεων.

Κατ' αρχάς συναντάμε τρία ιστορικά σημειώματα τα οποία συμβάλλουν στην ανάδειξη της σχέσης των μαθηματικών με τη φυσική (Βλάμος 2007α, σελ. 22, 135, 185). Όμως στο εισαγωγικό σημείωμα για τη στερεομετρία λείπει η αναφορά της σημασίας της στην κατανόηση της φυσικής (Βλάμος 2007α, σελ. 200).

Θετική είναι στην παράγραφο 1.3 «Επίλυση τύπων», (Βλάμος 2007α), η αναφορά σε τύπους από τη φυσική. Δεν υπάρχει παντού αναφορά στο τι συμβολίζει κάθε γράμμα, και αυτό οφείλεται κατά τη γνώμη μας στο χαμηλό υπόβαθρο φυσικής των μαθητών της Β΄ Γυμνασίου, αφού η τάξη τους είναι η πρώτη γυμνασιακή τάξη στην οποία διδάσκεται η φυσική!

Θετική είναι επίσης η προτροπή προς τους διδάσκοντες καθηγητές (Βλάμος 2007, βιβλίο εκπαιδευτικού, σελ. 33, 44) να επισημανθεί στους μαθητές με τη βοήθεια παραδειγμάτων, η μεγάλη σημασία στη φυσική της γραμμικότητας μεταξύ δύο μεγεθών. Ατυχής είναι η έκφραση στη 2η αναφορά (σελ.44): *«Αρκετές βασικές έννοιες των φυσικών επιστημών ακολουθούν τη γραμμικότητα…»*. Ορθότερη είναι πχ η διατύπωση: «Υπάρχουν πολλά παραδείγματα φυσικών μεγεθών που συνδέονται με γραμμική σχέση μεταξύ τους…».

Παραδείγματα και ασκήσεις που έχουν σχέση με την ταχύτητα υπάρχουν και στα δύο βιβλία της Β΄ Γυμνασίου. Στο βιβλίο του μαθητή στη σελ. 76, η εφαρμογή 3 μπορεί να θεωρηθεί επιτυχημένη, αφού πρώτα αναφερθεί ότι ο χρόνος μετράται σε s και συμπληρωθούν στους άξονες του διαγράμματος οι μονάδες. Όμως σύντομα αρχίζουν τα προβλήματα.

Στη σελ. 57, ασκ. 8 (Βλάμος 2007α) η ταχύτητα χρειάζεται τον επιθετικό προσδιορισμό σταθερή.

Στη σελ. 82 (Βλάμος 2007α) η άσκηση είναι ατυχής ως προς τη διατύπωση των ερωτημάτων. Ζητείται η ταχύτητα ενός πυραύλου που κινήθηκε από τη Γη στη Σελήνη, μια απόσταση 380 000 km, σε τρεις ημέρες. Όμως τα δεδομένα παραπέμπουν αναγκαστικά στη μέση ταχύτητα. Στο 2ο ερώτημα, ο μαθητής καλείται να εκφράσει την ταχύτητα του πυραύλου συναρτήσει του χρόνου ενώ γνωρίζει μόνο τη μέση ταχύτητα (μέγεθος σταθερό) της διαδρομής. Ενδιαφέρουσα είναι η απάντηση που δίνεται στο τέλος του βιβλίου (σελ. 241) για να την συγκρίνει με τη δική του ο μαθητής. Η λύση κατά το βιβλίο είναι $\upsilon = \frac{380\,000}{t}$ που παραπέμπει σε μεταβλητή ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου!

Στη σελ. 188 η άσκηση αφορά ομαλή κυκλική κίνηση την οποία δεν γνωρίζει ο μαθητής της Β΄ Γυμνασίου.

Στη σελ. 17 του βιβλίου του εκπαιδευτικού (Βλάμος 2007β) και συγκεκριμένα στην άσκηση 2 οι αναφερόμενες ταχύτητες είναι μέσες ταχύτητες.

Στη σελ. 146 στο βιβλίο του μαθητή, στο ιστορικό σημείωμα υπάρχει ο τίτλος «Ο μηχανισμός των Αντικυθήρων ΑΣΤΡΟΛΑΒΟΣ». Το κείμενο όμως και οι φωτογραφίες αναφέρονται στον αστρολάβο και δεν έχουν καμιά σχέση με το μηχανισμό των Αντικυθήρων.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

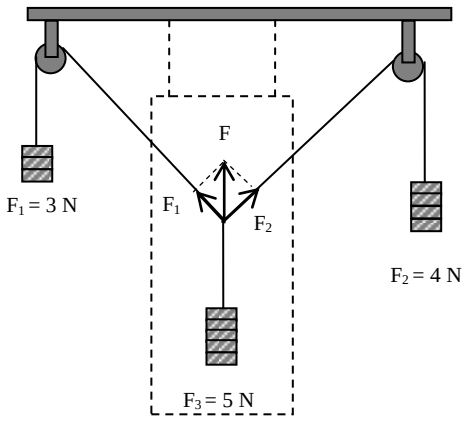
Οι έννοιες του διανύσματος και του διανυσματικού μεγέθους είναι από τις βασικότερες και στα μαθηματικά και στις φυσικές επιστήμες. Η εισαγωγή και η μελέτη της έννοιας του διανύσματος αναδύθηκε από τη συνεργασία και των δύο επιστημών. Οι ανάγκες της εκπαίδευσης εισάγουν από πολύ νωρίς την έννοια του διανύσματος και στα μαθηματικά και στη φυσική, κάτι που δημιουργεί προβλήματα αφού οι έρευνες έχουν καταδείξει τη δυσκολία κατανόησης της έννοιας του διανύσματος αλλά και του διανυσματικού μεγέθους, ακόμη και σε μεταλυκειακό επίπεδο, από μελετητές κυρίως από

την πλευρά της φυσικής (Warren 1971, Trowbridge 1980, Watts 1981, McCloskey 1983, Aguirre 1984, 1988, 1989, Eckstein 1989, Gilbert 1982, Knight 1995). Για την κατανόηση των εννοιών σε βάθος, απαραίτητη ιδίως στις γυμνασιακές τάξεις ώστε να μην δημιουργηθούν σπέρματα παρανοήσεως αργότερα είναι η χρήση παραδειγμάτων από τη φυσική. Εγγενής δυσκολία είναι η μη ύπαρξη καταλλήλου φυσικού υποβάθρου αφού στην Α΄ Γυμνασίου δεν διδάσκεται το μάθημα της φυσικής!

Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζονται στη διδασκαλία της έννοιας του διανύσματος, αναφέρονται κυρίως α) στη διάκριση ευθυγράμμου τμήματος και διανύσματος, β) στη διεύθυνση και στη φορά και γ) στις πράξεις μεταξύ διανυσμάτων **(**Δημητριάδου 2000).

Στο σχολικό βιβλίο (Βλάμος 2007α, σελ.156) εισάγεται η ανάγκη ορισμού του διανύσματος για τον πλήρη προσδιορισμό διανυσματικών μεγεθών με το δοκιμασμένο παράδειγμα της ταχύτητας ενός αυτοκινήτου σε ένα σταυροδρόμι. Στο βιβλίο όμως δεν έχει δοθεί προσοχή όσον αφορά το μέτρο των διανυσμάτων. Μέσα στο ίδιο σχήμα δεν τηρείται η αναλογία του μέτρου του διανύσματος με το μήκος του (σελ.157 δραστ.2, σελ.161 ασκ.7, σελ.170 ασκ.3). Άλλωστε πουθενά στο σχολικό βιβλίο του μαθητή δεν αναφέρεται η αναγκαία σύμβαση της προηγούμενης αναλογίας.

Όσον αφορά την εννοιολογική κατάκτηση του μαθητή για το άθροισμα των διανυσμάτων, αν και αναφέρεται παράδειγμα με τη μετατόπιση (Βλάμος 2007α, σελ.162), το βιβλίο δεν προσπαθεί ιδιαίτερα αφού το άθροισμα δύο διανυσμάτων δεν είναι τίποτε άλλο παρά «η συνισταμένη τους δύναμη όπως λέμε στη Φυσική» (σελ. 162). Δεν τονίζεται ρητά με παραδείγματα ότι το διάνυσμα που ορίσαμε ως άθροισμα δύο διανυσμάτων δίνει το ίδιο αποτέλεσμα όπως και τα δύο άλλα μαζί. Το άθροισμα δύο διανυσμάτων (κανόνας του παραλληλογράμμου), μπορεί να διαπιστωθεί και πειραματικά με συσκευή δύο τροχαλιών με τρία βάρη που ισορροπούν (σχ. 2). Σε κατακόρυφο χαρτί (διακεκομμένη γραμμή), σημειώνουμε τις διευθύνσεις των τριών νημάτων, καθώς και τα μήκη των τριών δυνάμεων. Η δύναμη F είναι αντίθετη με τη συνισταμένη των δυνάμεων F_1 και F_2. Τοιουτοτρόπως



Σχήμα 2: Διάταξη για την απόδειξη του κανόνα του παραλληλογράμμου.

διαπιστώνουμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

Οι παράγραφοι οι σχετικές με τα διανύσματα έχουν πολλά παραδείγματα ή ασκήσεις από τη φυσική και αυτό το γεγονός όπως τονίστηκε και προηγουμένως κρίνεται ως θετικό. Όμως και εδώ δεν λείπουν τα προβλήματα. Στο βιβλίο του μαθητή, στη σελίδα 169, στην εφαρμογή 2, υπάρχει μια άσκηση που ενώ μαθηματικά είναι πλήρης (ανάλυση δυνάμεως σε δύο συνιστώσες), από φυσικής πλευράς χωλαίνει αφού δεν αναφέρονται όλες οι δυνάμεις που εφαρμόζονται στο φορτηγό, όπως πχ η τριβή, η οποία είναι γνωστή στο μαθητή. Παραδείγματα από την καθημερινότητα οφείλουν στο μέτρο του δυνατού να είναι πλήρη. Παρόμοια σχόλια αρμόζουν και στις ασκήσεις 2, 3 και 5 της σελίδας 171 από το βιβλίο του μαθητή (Βλάμος 2007α), αλλά και στην άσκηση 10, σελ. 76, στο βιβλίο του καθηγητή (Βλάμος 2007β).

Τέλος στη σελ. 64 (Βλάμος 2007α), αναφέρεται πως το μηδενικό διάνυσμα δεν έχει ούτε διεύθυνση ούτε φορά, κάτι που έρχεται σε αντίθεση με την παραδοχή του σχολικού βιβλίου της Β΄ Λυκείου όπου το μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{AA}$ έχει φορέα οποιαδήποτε ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α (Αδαμόπουλος 2002).

Τα διανύσματα είναι ένα σημαντικό εργαλείο για τη φυσική και η πληρέστερη γνώση του και σε βάθος και σε πλάτος θα το καταστήσει ικανότερο και αποτελεσματικότερο στα χέρια του μαθητή κατά το μάθημα της φυσικής. Είναι σαφές επομένως ότι η διδασκαλία του πρέπει να προηγηθεί στα μαθηματικά και όχι στη φυσική όπως γίνεται σήμερα. Η συνεργασία των καθηγητών φυσικής και μαθηματικών κρίνεται κάτι περισσότερο από απαραίτητη στην παρούσα περίπτωση.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Αρκετά είναι εδώ τα παραδείγματα και οι ασκήσεις από τη φυσική. Άλλωστε οι συγγραφείς έχουν την έγνοια της ποικιλίας των ασκήσεων από εφαρμογές και από τη φυσική (Αργυράκης 2007β, σελ.10 και 59). Και εδώ όμως τα προβλήματα δεν λείπουν. Υπάρχει σημαντικός αριθμός αναφορών στις οποίες απαιτείται η έννοια της επιταχύνσεως καθώς και τύποι που την περιέχουν, αντικείμενο όμως που οι μαθητές το διδάσκονται στο Λύκειο. Παραδείγματος χάριν: σελ. 31 παράδειγμα 2, σελ. 37 άσκ. 10, σελ. 74 ασκ. 6, σελ. 100 προβλ. 3, σελ. 102 προβλ. 13, σελ. 139 προβλ. 19 (Αργυράκης 2007α) και στη σελ. 35 (Αργυράκης 2007β). Αν και το παράδειγμα 3 στη σελίδα 147, ενώ αναφέρεται στην ελεύθερη πτώση (επιταχυνόμενη κίνηση)

είναι διατυπωμένο χωρίς να δυσκολεύει το μαθητή (Αργυράκης 2007α), λείπουν όμως οι μονάδες στους άξονες.

Στη σελ. 149 το πρόβλ.7 αναφέρεται στην κινητική ενέργεια-η έννοια και οι τύποι είναι γνωστοί στο μαθητή-λείπουν όμως οι μονάδες από τα αριθμητικά δεδομένα.

Το πρόβλημα 6 στη σελίδα 88 και το πρόβλημα 14 στη σελίδα 141 (Αργυράκης 2007α) δεν είναι δυνατόν να λυθούν όταν οι ταχύτητες είναι μέσες, όπως αναφέρει η εκφώνηση, αλλά σταθερές. Στη σελίδα 127 στο πρόβλημα 7, οι ταχύτητες θέλουν τον χαρακτηρισμό σταθερές (Αργυράκης 2007α), ομοίως για το πρόβλημα 2 στη σελίδα 50 (Αργυράκης 2007β).

Στο πρόβλημα 6 της σελίδας 16 λείπουν οι μονάδες της θερμοκρασίας (Αργυράκης 2007α).

Στις σελίδες 104, 105 τα προβλήματα από τη φυσική θεωρούνται πετυχημένα (Αργυράκης 2007α).

Η έννοια της (στιγμιαίας) ταχύτητας της σταθερής και της μέσης ταχύτητας δεν περνούν τις καλλίτερες στιγμές τους στα σχολικά μαθηματικά βιβλία, μιας και δεν διαφοροποιούνται σαφώς. Από παιδαγωγικής και διδακτικής άποψης οι προηγούμενες έννοιες είναι από τις δυσκολότερες, αφού μια πλήρης ανάπτυξη προϋποθέτει καλές γνώσεις διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού. Ενδιαφέρον έχει η κλιμακωτή διαπραγμάτευση του θέματος από τον Αλεξόπουλο (Αλεξόπουλος 1960, σελ. 27). Τελικά ο καθηγητής των μαθηματικών με τη συνεργασία του φυσικού, οφείλει να εισάγει με απλό τρόπο τις προηγούμενες έννοιες αν θέλει να τις χρησιμοποιήσει σε παραδείγματα και ασκήσεις.

ΛΑΘΗ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΙΣ ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Οι μονάδες μετρήσεων των διαφόρων φυσικών μεγεθών ενίοτε αντιμετωπίζονται πρόχειρα στα γυμνασιακά μαθηματικά σχολικά βιβλία.

α) Χρησιμοποιούνται συντομογραφίες που δεν συμφωνούν με το διεθνές σύμβολο της μονάδας όπως έχει καθιερωθεί από το διεθνές σύστημα μονάδων.

Βασική μονάδα του χρόνου είναι το δευτερόλεπτο το οποίο συμβολίζεται με “s” (βλ. http://www.bipm.org/en/si/base_units/). Στο βιβλίο μαθηματικών της Γ΄ γυμνασίου (μαθητή και καθηγητή) χρησιμοποιείται παντού (λανθασμένα) το “sec”, σελίδες 31, 37, 74, 100, 102, 132, 139, 141, 147 (Αργυράκης 2007α) και σελίδα 50 (Αργυράκης 2007β). Αντιθέτως και

στα δύο βιβλία της Α΄ και της Β΄ Γυμνασίου ο συμβολισμός του δευτερολέπτου είναι ο σωστός.

Ο διεθνής συμβολισμός του γραμμαρίου είναι το g και όχι το gr (βλ. http://www. bipm.org/en/si/si_brochure/chapter3/3-2.html) όπως αναγράφεται λανθασμένα (Βανδουλάκης 2007α, σελ. 35, 97, 98, 143, και 241), (Βανδουλάκης 2007β, σελ. 50) και (Αργυράκης 2007α, σελ. 108).

Τα προθέματα από 10^{-21} έως 10^{3} γράφονται με μικρό γράμμα, ενώ από 10^{6} έως 10^{24} με κεφαλαίο (βλ. http://www.bipm.org/en/si/si_brochure/chapter3/prefixes.html). Επομένως η σωστή γραφή είναι kg και km και όχι Kg και Km όπως λανθασμένα γράφεται στις σελίδες 64, 66, 67, 68, 78, 81, 103, 105, 106, 109 και 159 (Βανδουλάκης 2007α), σελ. 50, 52, 53 (Βανδουλάκης 2007β), στις σελίδες 87 και 108 (Βλάμος 2007β), και στη σελ. 94 (Αργυράκης 2007β). Ενίοτε συνυπάρχουν τα Kg με τα kg στην ίδια σελίδα (64, 109, Βανδουλάκης 2007α).

Η μονάδα της πίεσης χιλιοστόμετρα ή εκατοστόμετρα υδραργύρου γράφεται mmHg ή cmHg χωρίς κενό ανάμεσα στη μονάδα μήκους και το χημικό σύμβολο του υδραργύρου (βλ. http://www.bipm.org/en/si/si_brochure/chapter4/table8.html) όπως λανθασμένα γράφεται στο σχολικό βιβλίο (Βλάμος 2007α, σελ. 66) αλλά και στο βιβλίο καθηγητή της Γ΄ Γυμνασίου (Αργυράκης 2007β, σελ. 71).

β) Όταν η μονάδα γράφεται ολογράφως πρέπει να χρησιμοποιούνται μικρά γράμματα και όχι κεφαλαία, π.χ. μέτρο, αμπέρ, νιούτον, κέλβιν, πασκάλ, κλπ. ακόμα και στις περιπτώσεις που η μονάδα έχει πάρει το όνομα της από κάποιο άτομο. Εξαίρεση αποτελεί η μονάδα μέτρησης της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κελσίου (ή Φαρενάιτ ή Κέλβιν) (βλ. http://www.bipm.org/ en/si/si_brochure/chapter5/5-2.html). Επομένως γράφουμε ångström και όχι Angström όπως λανθασμένα αναγράφεται στο σχολικό (Βανδουλάκης 2007α, σελ. 68), επίσης watt και όχι Watt (Βλάμος 2007β, σελ. 107).

γ) Η αριθμητική τιμή της μονάδας πρέπει να διαχωρίζεται με διάστημα από το σύμβολο της π.χ. 3 g και όχι 3g. Δυστυχώς και στα τρία σχολικά βιβλία η προηγούμενη σύμβαση δεν τηρείται πάντοτε: σελ. 35, 64, 66, 67, 69, 73, 123, 189, 236, 242, 244 (Βανδουλάκης 2007α), σελ. 22, 23, 64, 66, 155, 161, 233, 231, 238, 246, 249 (Βλάμος 2007α), ενώ στο βιβλίο της Γ΄ Γυμνασίου υπάρχουν μόνο τρεις λανθασμένες αναγραφές στις σελίδες 139, 259 και 262 (Αργυράκης 2007α). Ως φαίνεται στα βιβλία της Α΄ και Β΄ Γυμνασίου δεν υπάρχει έγνοια για την τήρηση του προηγούμενου κανόνα, κάτι που πρέπει να συμβαίνει για τα βιβλία της Γ΄ Γυμνασίου. Στο βιβλίο του

καθηγητή της Α΄ Γυμνασίου την παρατυπία την συναντάμε στις σελίδες 50, 52, 53, 54, 59, 65, 78, 79, 81, 86, 88 (Βανδουλάκης 2007β), στο βιβλίο του καθηγητή της Β΄ Γυμνασίου στη σελίδα 102 (Βλάμος 2007β) και τέλος στο βιβλίο του καθηγητή της Γ΄ Γυμνασίου στις σελίδες 35, 50, 71, 89 και 94.

Η ΠΕΡΙΠΕΤΕΙΑ ΤΟΥ ΛΙΤΡΟΥ ΣΤΑ ΓΥΜΝΑΣΙΑΚΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η λέξη λίτρο είναι αρχαία ελληνική λέξη που πέρασε μέσω της μεσαιωνικής λατινικής litra στη Γαλλία ως litre και στις αγγλοσαξωνικές χώρες ως liter ή litre. Πρόκειται για μονάδα όγκου η οποία δεν ανήκει στο διεθνές σύστημα μονάδων (S.I), χρησιμοποιείται όμως ευρύτατα.

Το 1795 καθιερώθηκε στην Γαλλία και ορίσθηκε σαν ένα κυβικό δεκατόμετρο. Το 1879 το CIPM[3], το διεθνές γραφείο μέτρων και σταθμών, το υιοθέτησε με το σύμβολο l (το μικρό γράμμα του λατινικού L).

Το 1901 στο 3ο συνέδριο της γενικής συνδιάσκεψης μέτρων και σταθμών (CGPM) το λίτρο επανακαθορίστηκε ως ο χώρος που καταλαμβάνει 1 kg καθαρού νερού στη θερμοκρασία της μεγίστης πυκνότητός του (3,98 ^{0}C) σε πίεση 1 atm. Αυτό σήμαινε ότι το ένα λίτρο ήταν περίπου 1,000027 dm^3. Το 1964 στο 12ο συνέδριο της γενικής συνδιάσκεψης μέτρων και σταθμών επαναφέρθηκε ο αρχικός ορισμός ως μιας άλλης ονομασίας του ενός dm^3. Το 1979 στο 16ο συνέδριο υιοθετήθηκε το εναλλακτικό σύμβολο L, με την ευχή να παραμείνει ως σύμβολο ένα εκ των δύο (βλ. http://www.bipm.org/en/CGPM/db/16/6/). Κατ' αρχάς είχε υιοθετηθεί το αγγλικό πεζό γράμμα l σύμφωνα με το διεθνή τρόπο γραφής, ο οποίος προβλέπει κεφαλαία γράμματα μόνο για τις μονάδες που προέρχονται από ονόματα προσώπων (π.χ 1 Pa=1 $N \cdot m^{-2}$, από τον Βλάσιο Πασκάλ). Στις χώρες όμως που χρησιμοποιείται το λατινικό αλφάβητο και κυρίως στις αγγλοσαξωνικές δημιουργείτο σύγχυση με το 1(ένα), είτε σε χειρόγραφο έντυπο είτε σε τυπωμένο. Για το λόγο αυτό προτάθηκε όπως αναφέρθηκε προηγουμένως το L.

Στο βιβλίο του καθηγητή της Α΄ Γυμνασίου (Βανδουλάκης 2007β, σελ. 46) αναφέρεται η λέξη λίτρο και δεν χρησιμοποιείται σύμβολο. Το ίδιο συμβαίνει και στη σελίδα 67 του βιβλίου του μαθητή. Στο υπόλοιπο βιβλίο του μαθητή (Βανδουλάκης 2007α) παντού χρησιμοποιείται το σύμβολο lt ή lt (σελίδες 36, 65, 68, 69, 78, 81, 108, 109, 236). Υπάρχει και το ml (σελ. 65).

[3] International Committee for Weights and Measures

Στο βιβλίο του καθηγητή της Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος 2007β, σελ. 101) αναφέρεται η λέξη λίτρο και δεν χρησιμοποιείται σύμβολο. Το ίδιο συμβαίνει στη σελίδα 30 του βιβλίου του μαθητή. Στη σελίδα 212 του βιβλίου του μαθητή χρησιμοποιείται το l (Βλάμος 2007α).

Στη Γ΄ Γυμνασίου στο βιβλίο του μαθητή (Αργυράκης 2007α), παντού χρησιμοποιείται η λέξη λίτρο και δεν χρησιμοποιείται σύμβολο (σελίδες 101, 139).

Η ΠΑΡΟΥΣΙΑ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΕ ΓΑΛΛΙΚΟΥΣ ΓΥΜΝΑΣΙΑΚΟΥΣ ΤΙΤΛΟΥΣ

Στη Γαλλία δεν υπάρχει μία σειρά μαθηματικών βιβλίων για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Ο σχολιασμός θα γίνει σε τρία βιβλία δύο σειρών που επιλέχηθησαν τυχαία. (Chapiron 2007 και Delord 2002, 2003). Η τάξη 3e αντιστοιχεί στην ελληνική Γ΄ Γυμνασίου, ενώ η 4e στη Β΄ Γυμνασίου.

Κάτι που χαρακτηρίζει και τα τρία βιβλία είναι η πιστή τήρηση της γραφής των μονάδων σύμφωνα με τα διεθνή πρότυπα. Καμία από τις αστοχίες των ελληνικών βιβλίων που καταγράφησαν προηγουμένως δεν παρατηρείται στα εν λόγω γαλλικά βιβλία. Οι άξονες σε όλα τα σχήματα συνοδεύονται από τις μονάδες των φυσικών μεγεθών. Στις περισσότερες των ασκήσεων προτείνεται η κλίμακα που θα ακολουθηθεί όσον αφορά τα μοναδιαία διανύσματα στους άξονες και τις μονάδες των φυσικών μεγεθών.

Στο βιβλίο της 4ης τάξεως (Delord 2002) υπάρχει ένα ενδιαφέρον σημείωμα για τον θεοδόλιχο, γωνιομετρικό οπτικό όργανο που χρησιμοποιείται στην αστρονομία, τη γεωδαισία και την τοπογραφία, για τη μέτρηση γωνιών με πολύ μεγάλη ακρίβεια. Τα παραδείγματα από τη φυσική δεν είναι πολλά. Υπάρχει μια αναφορά στη μάζα του ατόμου του άνθρακα (σελ. 68) με ορθό όμως τρόπο (βλ. παρατήρηση για το ίδιο θέμα στην αναφορά για το βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου), μια αναφορά στην ταχύτητα του ήχου (σελ. 119), στην απόσταση φρεναρίσματος (σελ. 82) και σε κάποιες αποστάσεις πλανητών (σελ. 68).

Στην παράγραφο για τα ανάλογα ποσά (Delord 2002, § 6, σελ. 107-122) υπάρχει μεγάλη αναφορά στην έννοια της μέσης ταχύτητας με πολλά παραδείγματα από την καθημερινή ζωή, ασκήσεις, προβλήματα και μετατροπές μονάδων. Όμως ο ορισμός της μέσης ταχύτητας (σελ. 112) ως συντελεστή αναλογίας μεταξύ του διαστήματος που διέτρεξε το κινητό σε ένα χρόνο t, ως προς αυτό το χρόνο είναι προβληματικός, έστω και αν η κίνηση χαρακτηρίζεται ομαλή (βλ. και σχετικό προβληματισμό παρακάτω στην αναφορά για το δεύτερο βιβλίο της 4ης τάξεως (Chapiron 2007). Η ταχύτητα

στις περισσότερες των περιπτώσεων συνοδεύεται από επιθετικό προσδιορισμό· εν γένει δεν προκύπτουν συγχύσεις. Σημαντική κατά τη γνώμη μας είναι και η ρητή διαφοροποίηση μεταξύ μέσης και σταθερής ταχύτητας (σελ. 112, 141). Αντίρρηση υπάρχει σε μία άσκηση της σελίδας 181, όπου ζητείται η απόσταση δύο ιστιοφόρων μετά από ένα χρονικό διάστημα, ιστιοφόρων που ξεκινούν ταυτόχρονα και δίνονται οι μέσες ταχύτητές τους. Οι μέσες ταχύτητες δεν μπορούν να μας δώσουν την ακριβή θέση ενός κινητού κάποια χρονική στιγμή.

Εντύπωση προκαλεί μία άσκηση που αφορά την επιμήκυνση ενός ελατηρίου όταν κρεμάσουμε διάφορα βάρη. Ως γνωστό όταν κινούμαστε μέσα στην περιοχή ελαστικότητας του ελατηρίου, σύμφωνα με το νόμο του Hooke βάρος και αντίστοιχη επιμήκυνση είναι ποσά ανάλογα (Halliday 1976, σελ. 347). Στην άσκηση τα αριθμητικά δεδομένα δεν αφορούν ανάλογα ποσά χωρίς να δίνεται κάποια εξήγηση!

Στο βιβλίο της 3ης τάξεως (Delord 2003) οι αναφορές στη φυσική είναι πολλές. Στις περισσότερες των περιπτώσεων υπάρχει και εξήγηση του φυσικού φαινομένου και όχι απλή εφαρμογή τύπων. Συγκεκριμένα συναντάμε την ελεύθερη πτώση (σελ. 65 και 110), το φαινόμενο Joule (σελ. 71), τον νόμο της παγκοσμίου έλξεως με αναφορά στο Νεύτωνα (σελ. 91), την ηλεκτρική ενέργεια (σελ. 103), το γινόμενο και το πηλίκο φυσικών μεγεθών, όπως ταχύτητα, κατανάλωση, παροχή, ηλεκτρική ενέργεια (σελ. 103), την ορθή αναφορά στη μάζα (σελ. 115), το φαινόμενο της εξάτμισης (σελ. 129), τη μέση και τη σταθερή ταχύτητα (σελ. 128, 129, 185).

Στη σελίδα 110 υπάρχει μια ενδιαφέρουσα αναφορά στη χρονοφωτογραφία και σχόλιο για την προσεγγιστική ισχύ των φυσικών νόμων.

Με αφορμή τα γραφόμενα στη σελίδα 282 για την εικασία του Kepler (βλ. http://en.wikipedia.org/wiki/Kepler_conjecture), ο καθηγητής μπορεί να μιλήσει για το κυβικό πλέγμα και την κρυσταλλική δομή (Kittel 1979, σελ. 17).

Τέλος η διαπραγμάτευση και η εννοιολογική ανάλυση του αθροίσματος διανυσμάτων κρίνεται σύντομη και επομένως ελλιπής, μιας και στο ως άνω διδακτικό αντικείμενο υπάρχει ο φόβος παρανοήσεων και γνωστικών συγκρούσεων **(**Δημητριάδου 2000).

Στο 2ο βιβλίο της 4ης τάξεως (Chapiron 2007), οι αναφορές στη φυσική είναι περισσότερες σε σχέση με το προαναφερθέν (Delord 2002). Στο βιβλίο (Chapiron 2007) συναντάμε τα εξής ιστορικά σημειώματα: α) για τον Κέλσιο και τις μονάδες θερμοκρασίας με σχετική άσκηση (σελ. 77), β) για το δορυφόρο Pioneer 11 και μία σχετική άσκηση (σελ. 138), γ) για την ταχύτητα

του ήχου και το διαστημόπλοιο Columbia μαζί με μία άσκηση (σελ. 141), δ) δύο ασκήσεις για την ταχύτητα του φωτός (σελ. 102, 130), με ιστορικό σημείωμα (σελ. 130). ε) για το άτομο και το Δημόκριτο μαζί με σχετική άσκηση και ς) για τον υπολογισμό της ακτίνας της γης από τον Ερατοσθένη (σελ. 254).

Οι ασκήσεις που αφορούν φυσικά φαινόμενα ή έχουν φυσικό περιεχόμενο εν γένει συνοδεύονται από επεξηγηματικές αναφορές ή πληροφοριακά στοιχεία, όπως για την αισθητή θερμοκρασία (πρόκειται για τη θερμοκρασία όπως τη νοιώθει το ανθρώπινο σώμα) σε αντίθεση με εκείνη που καταγράφεται από τις συσκευές (θερμόμετρα) (Chapiron 2007, σελ. 19), για την απόσταση φρεναρίσματος (σελ. 21), για το φαινόμενο Joule (σελ. 78), για την ταχύτητα του ανέμου (κλίμακα Beaufort, σελ. 106), για την αστρονομική μονάδα (σελ. 129). Ο συμβολισμός της στο βιβλίο είναι U.A., συμβολισμός που συνηθίζεται, όμως το διεθνές γραφείο μέτρων και σταθμών προτείνει το ua (βλ. http://www.bipm.org/fr/si/si_brochure/chapter4/table7.html#notes και http://www.bipm.org/utils/en/pdf/CCU14-EN.pdf).

Απαντώνται και οι ασκήσεις με θέμα: α) το ελατήριο (νόμος του Hooke, σελ. 40), β) την κατανάλωση βενζίνης και με σημείωμα για άλλες πηγές ενέργειας (σελ. 44), γ) τον υπολογισμό ηλεκτρικής αντίστασης (σελ. 60), δ) τη θέρμανση νερού όπου συναντάμε και τη λανθάνουσα θερμότητα (Αλεξόπουλος 1962, σελ. 73) κατά την αλλαγή της φάσεως (σελ. 100) και ε) την ταχύτητα του ήχου (σελ. 104, 138, 139, 142) με σχετικό σημείωμα για την εύρεση του σημείου πτώσεως του κεραυνού (σελ. 139).

Από τη σελίδα 87 έως την 106 υπάρχει μεγάλη αναφορά στη μέση ταχύτητα με αφορμή τα ανάλογα ποσά. Ερώτημα προκαλεί η χρήση της στο σχετικό κεφάλαιο των αναλόγων ποσών. Εν γένει η συμπεριφορά ενός κινητού (αυτοκινήτου, ποδηλάτου κλπ) σε μια διαδρομή μεταβάλλεται, αφού υπάρχουν στάσεις, επιβραδύνσεις και επιταχύνσεις και επομένως το πηλίκο της διαδρομής προς τον αντίστοιχο χρόνο σε διαφορετικά τμήματα αυτής της διαδρομής είναι διαφορετικό κάθε φορά και εν γένει διαφορετικό με τη μέση ταχύτητα ολόκληρης της διαδρομής, επομένως δεν υπάρχει σε αυτή την περίπτωση αναλογικότητα των μεγεθών χρόνου και διαστήματος. Το τελευταίο συμβαίνει στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, η οποία χαρακτηρίζεται από σταθερή ταχύτητα. Στη σελίδα 93, ο ορισμός της μέσης ταχύτητας είναι εκείνος της σταθερής στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Η χρήση της έννοιας της ταχύτητας είναι σημαντικά χαλαρότερη από εκείνη του αντιστοίχου βιβλίου της προηγούμενης σειράς (Delord 2002) και δεν υπάρχουν πάντα οι αναγκαίοι επιθετικοί προσδιορισμοί για την ταχύτητα

(μέση ή σταθερά). Υπάρχει όμως φροντισμένη αναφορά στη μετατροπή των διαφόρων μονάδων ταχύτητας (σελ. 95).

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η αναντίρρητη χρησιμότητα των μαθηματικών στις θετικές επιστήμες και όχι μόνο, είναι δυνατόν να καταδειχθεί και στα γυμνασιακά βιβλία των μαθηματικών. Η ανάγκη αυτή έχει γίνει κατανοητή και προβάλλεται στα ελληνικά αλλά και στα προαναφερθέντα γαλλικά βιβλία. Όσον αφορά τα ελληνικά, ενώ οι παραπομπές στη φυσική είναι αρκετές, η προσπάθεια κρίνεται ημιτελής και ενίοτε πρόχειρη. Ένα σημαντικό ερώτημα είναι αν οι καθηγητές μαθηματικών που καλούνται να διδάξουν τα βιβλία των μαθηματικών έχουν διάθεση ή και γνώσεις για να ασχοληθούν με θέματα που σχετίζονται με τη φυσική. Η μη ύπαρξη διάθεσης ακυρώνει τις οποιεσδήποτε καλές προθέσεις των συγγραφέων των σχολικών βιβλίων. Σημαντικό ρόλο στην αντιμετώπιση του θέματος θα παίξει η συνεργασία των καθηγητών και των δύο ειδικοτήτων. Άλλωστε όπως δήλωσε μαθήτρια σε σχετική έρευνα για τη σχέση σχολικών μαθηματικών και χημείας (Καφετζόπουλος 2005) χαριτολογώντας: «Το ένα χέρι νίβει το άλλο και τα δυο το πρόσωπο».

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

α) Ελληνόγλωσση

Αδαμόπουλος Λ., Βισκαδουράκης Β., Γαβαλάς Δ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α., (2002), *Μαθηματικά Β΄ Τάξη Ενιαίου Λυκείου, Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση,* εκδ. Ε΄.

Αλεξοπούλος Κ. (1960), *Γενική Φυσική, Μηχανική – Ακουστική,* τ. 1ος, Αθήναι.

Αλεξοπούλος Κ. (1962), *Γενική Φυσική, Θερμότης* τ. 4ος, Αθήναι.

Αργυράκης Δ., Βουργάνας Π., Μεντής Κ., Τσικοπούλου Σ., Χρυσοβέργης Μ. (2007α), *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου*, ΟΕΔΒ, Αθήνα, εκδ. Α΄.

Αργυράκης Δ., Βουργάνας Π., Μεντής Κ., Τσικοπούλου Σ., Χρυσοβέργης Μ. (2007β), *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου*, *Βιβλίο Εκπαιδευτικού*,ΟΕΔΒ, Αθήνα, εκδ. Α΄.

Βανδουλάκης Ι., Καλλιγάς Χ., Μαρκάκης Ν., Φερεντίνος Σ., (2007α), *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου*, ΟΕΔΒ, Αθήνα, εκδ. Α΄.

Βανδουλάκης Ι., Καλλιγάς Χ., Μαρκάκης Ν., Φερεντίνος Σ., (2007β), *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βιβλίο Εκπαιδευτικού*, ΟΕΔΒ, Αθήνα, εκδ. Β΄.

Βλάμος Π., Δρούτσας Π., Πρέσβης Γ., Ρεκούμης Γ., (2007α), *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου*, ΟΕΔΒ, Αθήνα, εκδ. Β΄.

Βλάμος Π., Δρούτσας Π., Πρέσβης Γ., Ρεκούμης Γ., (2007β), *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βιβλίο Εκπαιδευτικού*, ΟΕΔΒ, Αθήνα, εκδ. Α΄.

Δημητριάδου Ε., (2000), «Ο ρόλος της φυσικής στην εισαγωγή του διανύσματος στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση», Πρακτικά 2ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημ. Εκ/σης, Παν. Κρήτης, Ρέθυμνο 2000.

Καφετζόπουλος Κ., Μανωλόπουλος Μ., (2005), «Μαθηματικά και Χημεία ή προσπαθώντας να ενισχύσουμε έναν ασθενή δεσμό», *Ευκλείδης γ΄*, τ. 63 σελ. 47-57.

Kittel C., (1979), *Εισαγωγή στη Φυσική Στερεάς Καταστάσεως,* Έκδοση Γ. Πνευματικός Αθήνα, Μετάφραση Χ. Παπαγεωργοπούλου.

Μαυρονικόλας Μάριος (2002), *Θεωρία Γράφων,* Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, Πάτρα. (Διαθέσιμο στο διαδύκτιο: http://www.free-ebooks.gr/).

Halliday R., Resnick R., (1976), *Φυσική μέρος Α,* Έκδοση Γ. Πνευματικός – Θ. Λύρας, Αθήνα, Μετάφραση Γ. Πνευματικός, Γ. Πεπονίδης.

Wilder R., (1986), *Εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών,* Εκδόσεις Π. Κουτσούμπος Α.Ε, Αθήνα.

β) Ξενόγλωσση

Aguirre J., Erickson G., (1984), "Students' Conceptions about the Vector Characteristics of three Physics Concepts", *Journal of Research in Science Teaching*, 21(5), 439-457.

Aguirre J., (1988), "Student Preconceptions about Vector Kinematics", *The Physics Teacher,* 26(4), 212-216.

Aguirre J., Rankin G., (1989), "College Students' Conceptions about Vector Kinematics", *Physics Education,* 24(5) 290-294.

Arons A., (1990), A *guide to introductory physics teaching.* Washington: John Wiley & Sons, Inc.

Chapiron G., Mante M., Mulet-Marquis R., Pérotin C., (2007), *Mathématiques 4e,* Collection TRIANGLE, HATIER.

Delord R., Vinrich G., Bourdais M., (2003), *maths 3e*, Collection CINQ SUR CINQ, HACHETTE Éducation.

Delord R., Vinrich G., Bourdais M., (2002), *maths 4e,* Collection CINQ SUR CINQ, HACHETTE Éducation.

Eckstein S., Shemesh M., (1989), Development of children's ideas on motion: intuition vs. logical thinking", *International Journal of Science Education,* 11(3), 327-336.

Gilbert J., Watts D., Osborne R., (1982), "Students' Conceptions of ideas in mechanics" *Physics Education,* 17(2) 62-66.

Knight R., (1995), " The Vector Knowledge of Beginning Physics Students", *The Physics Teacher,* 33(2), 74-78.

Trowbridge D., McDermott L (1980), "Investigation of the student understanding of the concept of velocity in one dimension", *American Journal of Physics,* 48(12) 1020-1028.

McCloskey M., (1983), "Intuitive Physics", *Scientific American* 284(4) 122-130.

Tall D., Vinner S., (1981), "Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*" Educational Studies in Mathematics,* 12 (2) 151-169.

Tzanakis C., (2002), "On the relation between Mathematics and Physics in undergraduate teaching" in I. Vakalis, D. Hughes Hallett, Ch. Kourouniotis, D. Quinney, C. Tzanakis (eds), *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching and Learning of Mathematics (at the undergraduate level),* John Wiley & Sons Inc. New York, ISBN 0-471-46332-9 (in electronic form).

Warren J., (1971), "Circular Motion", *Physics Education,* 6(2) 74-77.

Watts D., Zylbersztajn A., (1981), "A survey of some children's ideas about force", *Physics Education,* 16(6) 360-365.

Ευχαριστίες

Οι συγγραφείς ευχαριστούν τη σχολική σύμβουλο ΠΕ04 Ασημίνα Κοντογεωργίου, για την ανάγνωση του χειρογράφου και τις εύστοχες παρατηρήσεις της.

ΣΥΝΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΕΚΕΙ ΠΟΥ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΝΑΝΤΟΥΝ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

Ένα Παράδειγμα από τα σχολικά εγχειρίδια του Δημοτικού (κύκλος-ταχύτητα-διάστημα-χρόνος)

Ολυμπία Γκριμπίζη

Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση
Μεταπτυχιακό Δίπλωμα ΑΠΘ/ΠΤΔΕ
στη Διδακτική των Μαθηματικών

Ελένη Σπανοπούλου

Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση
Μεταπτυχιακό Δίπλωμα ΑΠΘ/ΠΤΔΕ
στη Διδακτική των Μαθηματικών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία αναφέρεται στη σχέση των Μαθηματικών και των Φυσικών Επιστημών στο Δημοτικό Σχολείο μέσα από τα αναλυτικά προγράμματα και τα σχολικά εγχειρίδια. Μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα να ασχοληθούμε με τη συγκρότηση και το μετασχηματισμό των εννοιών που συναντούμε καθημερινά στη διδακτική πράξη στα δύο γνωστικά πεδία. Τα ερωτήματα που τίθενται αφορούν τη σχέση των δύο πεδίων στην παρουσίαση, κατανόηση, εξέλιξη και σύνδεση συγκεκριμένων εννοιών με την καθημερινή ζωή των παιδιών, την ερμηνεία τους με βάση τις φυσικές επιστήμες και τη σύνδεσή τους με μαθηματικές έννοιες. Επιθυμούμε να καταδείξουμε τα κοινά σημεία των δύο πεδίων, την αποδεικτική λογική που αφορά την ανάπτυξη συλλογιστικών διεργασιών, οι οποίες στηρίζονται στα βιώματα των παιδιών και στη συστηματική παρατήρηση στην οποία οδηγούνται μέσω των Φυσικών Επιστημών. Επιλέγουμε ως θέμα διερεύνησης τις έννοιες του κύκλου, της ταχύτητας, του χρόνου και του διαστήματος στο πλαίσιο των δύο γνωστικών πεδίων. Μας ενδιαφέρει η μαθηματική γνώση και οι μαθηματικές έννοιες να μη μελετούνται αποπλαισιωμένα, αλλά να συνδέονται με τα φυσικά φαινόμενα και την κοινωνική ζωή στην οποία συμμετέχουμε όλοι, μαθητές και δάσκαλοι. Τα συμπεράσματα και οι προτάσεις μας στηρίζονται στην ανάλυση και επεξεργασία ατομικών συνεντεύξεων με μαθητές Ε΄ τάξης Δημοτικού στα πλαίσια ενός project για τη διδασκαλία του κύκλου. Το project είχε ως στόχο τη σύνδεση μαθηματικών και φυσικών εννοιών, ώστε να κατανοηθούν καλύτερα και να συνδεθούν με την ζωή των παιδιών. Τις θεωρητικές μας αρχές αντλούμε από το χώρο των κοινωνιο-πολιτισμικών ποοσεγγίσεων (Vygotsky, 1993,2000) για τη γνώση και τη διεπιστημονική αντίληψη για την ερμηνεία και συγκρότηση των εννοιών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια όλο και περισσότερο η διεπιστημονική, διαθεματική προσέγγιση κερδίζει έδαφος στη διδασκαλία και τη μάθηση, καθώς τόσο σε εμπειρικό όσο και σε επιστημονικό επίπεδο καταγράφονται πολλά οφέλη (Ματσαγγούρας, 2002).

Η ιδέα να ασχοληθούμε με τις αμοιβαίες σχέσεις ανάμεσα στα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες μας φάνηκε ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα, επειδή πιστεύουμε πως μια προοπτική στην οποία τα δυο πεδία θα αλληλοσυμπληρώνουν το ένα το άλλο, σε ένα βαθύτερο επίπεδο από αυτό του εργαλείου ή απλά του κοινού τους περιεχομένου, θα βοηθήσει τους μαθητές/τριες στην κατανόηση, την ανάπτυξη και εξέλιξη των εννοιών τόσο της φυσικής όσο και των μαθηματικών.

Παρά το γεγονός της διαφορετικής οντολογικής υπόστασης των δυο επιστημών και οι δύο είναι αποτέλεσμα των ανθρώπινων κοινωνικών δραστηριοτήτων, και της κοινωνικής διαμεσολάβησης ανάμεσα στον άνθρωπο και την πραγματικότητα. Η διαφορά συνίσταται στο ότι οι μαθηματικές έννοιες δεν αναφέρονται άμεσα σε αισθητά χαρακτηριστικά ή ιδιότητες των στοιχείων της πραγματικότητας με αποτέλεσμα η διαδικασία επαλήθευσής τους να στηρίζεται στη βάση της λογικής αναγκαιότητας, ενώ οι έννοιες των φυσικών επιστημών αναφέρονται σε στοιχεία της υλικής πραγματικότητας και είναι εμπειρικά επαληθεύσιμες μέσω του «πειράματος» (Χασάπης, 2000).

Οι δυο επιστήμες όμως μοιράζονται αρκετά κοινά ως προς τις συλλογιστικές διεργασίες που ακολουθούν, αφού τόσο στα μαθηματικά όσο και στη φυσική χρησιμοποιείται η αποδεικτική λογική: στη μεν φυσική μέσω της παρατήρησης- της υπόθεσης- και του πειράματος οι μαθητές οδηγούνται σε μια ερμηνεία του φυσικού κόσμου, στα δε μαθηματικά κατά τη διάρκεια της επίλυσης προβλημάτων, της μοντελοποίησης πραγματικών καταστάσεων, οι μαθητές συνειδητοποιούν σταδιακά ότι «δουλεύω πάνω σε μια μαθηματική δραστηριότητα» σημαίνει κυρίως ότι προσδιορίζω το πρόβλημα, εικάζω για το αποτέλεσμα, πειραματίζομαι με τη βοήθεια παραδειγμάτων, συνθέτω ένα συλλογισμό, διατυπώνω μια λύση, ελέγχω τα αποτελέσματα και αξιολογώ την ορθότητά τους σε συνάρτηση με το αρχικό πρόβλημα.(Δ.Ε.Π.Π.Σ., 2003).

Τα νοήματα που αποκτούν οι έννοιες μέσω των αλληλεπιδράσεων, την κοινωνική επαφή και τη γλώσσα διαμορφώνουν τις πρώτες ιδέες των μαθητών για το πώς λειτουργεί ο κόσμος. Αυτές οι ερμηνείες και παραδοχές αποτελούν την βάση πάνω στην οποία οικοδομούνται οι επιστημονικές έννοιες. Οι δυσκολίες κατανόησης των εννοιών στην διδακτική πράξη έχουν να κάνουν τόσο με τις ιδέες των μαθητών για αυτές τις έννοιες και το

περιεχόμενο που αυτές κουβαλούν μέσα από την καθημερινή τους χρήση και από τα βιώματα των παιδιών όσο και από την διαδικασία με την οποία αυτές μετασχηματίζονται σε επιστημονικές στο σχολείο.

Ο Vygotsky (2000) διακρίνει τις έννοιες που συγκροτούνται στο στάδιο αυτό της νοητικής ανάπτυξης του ατόμου σε *αυθόρμητες* ή *εμπειρικές* και *αφηρημένες* ή *επιστημονικές*.

Οι αυθόρμητες συγκροτούνται μέσα από πρακτικές δραστηριότητες του παιδιού και σε σχέση με την άτυπη διδασκαλία που αναπτύσσεται από συνομήλικα ή ενήλικα άτομα του κοινωνικού του περιβάλλοντος. Η συγκρότηση των αυθόρμητων εννοιών προηγείται και η λεκτική τους διατύπωση έπεται. Γι' αυτό το παιδί σ' αυτό το σημείο ορίζει μια έννοια με την περιγραφή της λειτουργίας ή χρήσης ενός αντικειμένου ή φαινομένου χωρίς την παρουσία των οποίων η συνειδητή χρήση των εννοιών δεν είναι κατορθωτή.

Οι επιστημονικές έννοιες αντίθετα συγκροτούνται στη διαδικασία οικειοποίησης ενός ιστορικά και επιστημονικά οργανωμένου συστήματος γνώσεων δια μέσου των λεκτικών διατυπώσεων στο πλαίσιο της κοινωνικά οργανωμένης σχολικής μάθησης. Οι επιστημονικές έννοιες συνεπώς αποτελούν προϊόν της τυπικής διδασκαλίας.

Έχοντας υπόψη τα παραπάνω κατανοούμε τη σπουδαιότητα του σχολικού περιβάλλοντος και τις αντιλήψεις που διέπουν τη διαδικασία της μάθησης αναφορικά με το περιεχόμενο των δραστηριοτήτων και τον τρόπο που αυτές επιτελούνται. Μια τέτοιου τύπου θεώρηση για την ανάπτυξη της λογικής σκέψης του παιδιού όπως την επεξεργάστηκαν ο Vygotsky (2000) και οι συνεργάτες του, παρέχει τα εργαλεία κατανόησης και ερμηνείας των δυσκολιών που παρουσιάζονται στην καθημερινή διδακτική πρακτική και ιδιαίτερα στις θετικές επιστήμες σε σχέση με τη συγκρότηση και ανάπτυξη των εννοιών.

Η διαμεσολάβηση της γλώσσας που σύμφωνα με το Vygotsky (2000) αποτελεί τον καθοριστικό παράγοντα οικειοποίησης και ανάπτυξης των εννοιών, ανοίγει ένα μεγάλο πεδίο προβληματισμού και διερεύνησης της χρήσης και λειτουργίας της στη διδασκαλία τους. Η γνώση θεωρείται ως παράγωγο κοινωνικών πρακτικών διαμορφωμένων σε ιστορικά κοινωνικά και πολιτισμικά πλαίσια. Ως εκ τούτου δεν είναι αδιάψευστη, απόλυτη, απαλλαγμένη από τις αντιφάσεις της κοινωνικής πραγματικότητας και καθορισμένη μόνον από τη λογική (Χασάπης, 2005).

Ο Logan (1981), παρατηρεί ότι ολόκληρο το εννοιολογικό πλαίσιο του παιδιού είναι δομημένο στη δική του γλώσσα και απέχει πολύ από το επιστημονικό πλαίσιο. Το παιδί ξεκινώντας το σχολείο έχει ως βάση αυτή

ακριβώς τη «δική του γλώσσα», έπειτα διδάσκεται τη μητρική του γλώσσα και τέλος διδάσκεται φυσική με βάση τη μητρική του γλώσσα. Όπως επισημαίνει ο συγγραφέας, οι θετικές επιστήμες θα μπορούσαν να διδαχθούν ως μια δεύτερη κουλτούρα.

Σημαντικός αναδείχτηκε και ο ρόλος της σημασίας των λέξεων μέσα στο πλαίσιο στο οποίο ανήκουν. Ο Martin (στο Κόκκοτας, 1997) ορίζει τη λέξη «πλαίσιο» ως γλωσσική δομή συσχετιζόμενων εννοιών που συνθέτουν μια ορισμένη πραγματικότητα μέσα στην οποία κάθε έννοια αποκτά νόημα μέσα από τη σχέση της με τις άλλες έννοιες. Αυτό σημαίνει ότι στη διδασκαλία των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών πολλές λέξεις έχουν διαφορετικές σημασίες και χρήσεις ανάλογα με το πλαίσιο στο οποίο χρησιμοποιούνται. Ο Κόκκοτας (1997), τονίζει ότι η μη ύπαρξη σωστού πλαισίου οδηγεί σε παρανοήσεις και πως η αναζήτησή του θα μπορούσε να απαλλάξει τα παιδιά από αυτές.

Ειδικότερα για τον εποικοδομητισμό, η γλώσσα καθορίζει την οικοδόμηση της γνώσης με γνώμονα τις έννοιες που έχουν οι λέξεις μέσα στα πλαίσια του παιδιού. Η αοριστία των λέξεων που προκύπτει από τα πολλαπλά νοήματα που αποδίδονται σε έναν όρο δεν αποτελεί μειονέκτημα, αλλά διευκολύνει την επικοινωνία, η οποία θα ήταν αδύνατη αν οι λέξεις είχαν μόνο σημασία. Η οικοδόμηση του νοήματος των λέξεων προκύπτει μέσα από τη συζήτηση, τη διαφωνία, τη διαπραγμάτευση και τις διαφορές που υπάρχουν στο πλαίσιο των συμφραζόμενων της καθημερινής ζωής (Βλάχος, 2002). Σύμφωνα με την Driver (1998) η συζήτηση μεταξύ ομότιμων, εξασφαλίζει ένα πλαίσιο μέσα στο οποίο υποσυνείδητες ιδέες μπορούν να αναδειχτούν και να αποτελέσουν αντικείμενο στοχασμού και ελέγχου. Με τον τρόπο αυτό τα άτομα μπορούν να ξεκαθαρίσουν τις ιδέες τους συζητώντας με τους άλλους και τους δίνεται η ευκαιρία να χτίσουν ο ένας στις ιδέες του άλλου για να φτάσουν σε μια αποδεκτή πρόταση. Τα παιδιά χρειάζονται πολλές ευκαιρίες να συζητούν και να ακούν το ένα το άλλο, ώστε να βγάζουν νόημα στα μαθήματα στο σχολικό πλαίσιο. Η συζήτηση και τα επιχειρήματα πιθανόν να είναι και το συστατικό στοιχείο μιας αποτελεσματικής διδασκαλίας.

Αντικείμενο της παρουσίασης μας αποτελεί μια διδακτική παρέμβαση σε μαθητές/τριες της Ε΄ Τάξης του Δημοτικού, στις έννοιες του κύκλου και τα στοιχεία του -περιφέρεια, μήκος κύκλου - και στην έννοια της ταχύτητας σε σχέση με το χρόνο και το διάστημα.

Η διδασκαλία της έννοιας της ταχύτητας εντάσσεται στη διδακτέα ύλη του μαθήματος των Φυσικών της Ε΄ τάξης *(Ερευνώ και ανακαλύπτω)* στο Δημοτικό Σχολείο και περιλαμβάνεται στο κεφάλαιο *Μηχανική*. Οι ειδικοί στόχοι, όπως καταγράφονται στο βιβλίο του δασκάλου (Αποστολάκης κ.α.,

2006) του *φύλλου εργασίας* για την ταχύτητα είναι: α)Να αναφέρουν οι μαθητές/τριες παραδείγματα κίνησης σωμάτων με μεγάλη ή μικρή ταχύτητα, β)Να διαπιστώσουν οι μαθητές/τριες πειραματικά ότι η ταχύτητα ενός σώματος εξαρτάται από το χρονικό διάστημα που χρειάζεται ένα σώμα για να διανύσει μια συγκεκριμένη απόσταση, γ)Με το πείραμα να διαπιστώσουν τη σχέση του χρόνου που χρειάζεται ένα κινητό για να διανύσει μια απόσταση με την ταχύτητά του. *Στο τετράδιο εργασιών*, το σχολικό εγχειρίδιο στο οποίο εργάζονται οι μαθητές/τριες, προτείνεται μια πειραματική διαδικασία για να μελετήσουν τη σχέση ανάμεσα στο χρόνο που χρειάζεται ένα κινητό για να διανύσει μια απόσταση και στην ταχύτητά του. Ως αντικείμενο του πειράματος επιλέγεται μια μπάλα η οποία θα πρέπει να κυλήσει σε μια συγκεκριμένη απόσταση σε τρεις διαφορετικούς χρόνους: αργά-πιο γρήγορα-και τέλος ακόμη γρηγορότερα. Οι μαθητές/τριες καταγράφουν σε πίνακα που υπάρχει στο βιβλίο, τους χρόνους στις τρεις φάσεις του πειράματος και καταλήγουν σε συμπεράσματα.

Στα μαθηματικά, όπως διατυπώνεται στο βιβλίο του δασκάλου, (Κακαδιάρης κ.α., 2006), η έννοια του κύκλου και των στοιχείων του προβλέπεται να διδαχθεί σε μια διδακτική ώρα. Ο κύριος διδακτικός στόχος είναι να διαχειρίζονται οι μαθητές/τριες τα στοιχεία του κύκλου και να κάνουν υπολογισμούς και χαράξεις. Πιο αναλυτικά οι μαθητές/τριες θα πρέπει να είναι ικανοί, α) Να χρησιμοποιούν τη σωστή ορολογία που αφορά τον κύκλο, β) Να κατανοούν ότι $\delta=2\times\alpha$ *ή* $\alpha=\delta:2$ και να μπορούν να υπολογίζουν την ακτίνα αν γνωρίζουν τη διάμετρο ή το αντίστροφο γ) Να αναγνωρίζουν ότι το π είναι το σύμβολο του αριθμού *3,14*, δ) Να αναγνωρίζουν ότι το μήκος ενός κύκλου είναι ό,τι και η περίμετρος σε ένα γεωμετρικό σχήμα με πλευρές, ε) Να χρησιμοποιούν το διαβήτη και για να χαράζουν κύκλους, στ) Να ανακαλύψουν ότι το μήκος ενός κύκλου εξαρτάται από την ακτίνα του και να μπορούν να το υπολογίσουν χρησιμοποιώντας τον τύπο ($K=\pi\times\delta$), ζ) Να συνεργάζονται σε ομάδες των 4 για την επίτευξη μιας δραστηριότητας.

Τα κοινά σημεία που προσπαθήσαμε να διερευνήσουμε στο πλαίσιο αυτής της εργασίας αφορούν:

1. Στη σύνδεση των δυο πεδίων, φυσικής και μαθηματικών στο επίπεδο των εννοιών
2. Στη νοηματοδότηση των λέξεων στα μαθηματικά και στη φυσική σε καθημερινό και επιστημονικό επίπεδο (ταχύτητα, χρόνος, απόσταση, περίμετρος, κύκλος) και στο ρόλο του καθημερινού και σχολικού πλαισίου στο σχηματισμό των εννοιών.

3. Στη διερεύνηση των συλλογιστικών διεργασιών των παιδιών στη διάρκεια των μαθησιακών δραστηριοτήτων και στις δυσκολίες που παρουσιάζονται σε σχέση με το συμβολικό μέρος.

4. Στη σημασία των αλληλεπιδράσεων και της καθοδηγούμενης συγκρότησης της γνώσης για την κατασκευή κοινού νοήματος .

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Ως μέθοδο συλλογής του υλικού μας επιλέξαμε τις ατομικές συνεντεύξεις και διδακτικές παρεμβάσεις στην τάξη. Στην απόφασή μας αυτή οδηγηθήκαμε από τις βασικές επιδιώξεις και τους στόχους της έρευνάς μας, που ήταν η διερεύνηση των συλλογιστικών διεργασιών που αναπτύσσονται κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων των μαθηματικών και της φυσικής, με έμφαση στις προϋποθέσεις μετασχηματισμού των αυθόρμητων εννοιών σε επιστημονικές.

Το χαρακτηριστικό αυτού του τύπου της συνέντευξης είναι ότι εστιάζεται στις υποκειμενικές απαντήσεις του ερωτώμενου για μία γνωστή του κατάσταση η οποία έχει αναλυθεί από το συνεντευκτή πριν από τη συνέντευξη (Cohen, Manion, 2000). Στην εστιασμένη συνέντευξη ο συνεντευκτής μπορεί να παίζει έναν πιο ενεργητικό ρόλο, μπορεί να εισάγει πιο σαφείς λεκτικές υποδείξεις και να ενεργοποιεί μ' αυτόν τον τρόπο συγκεκριμένες διατυπώσεις απαντήσεων από τους ερωτώμενους και να αναπτύξει την ικανότητα να αξιολογεί συνεχώς τη συνέντευξη κατά τη διάρκεια της διεξαγωγής της (Merton & Kendall, 1946).

Η αλληλεπιδραστική σχέση που δημιουργείται ανάμεσα στο συνεντευκτή και τον ερωτώμενο μέσα από τη διαλογική συζήτηση και τις συνεχείς επαναδιατυπώσεις των ερωτήσεων και των απαντήσεων, οδηγεί στην οικοδόμηση κοινών νοημάτων (Mishler, 1996).

Η ατομική συνέντευξη έχει αρκετά κοινά χαρακτηριστικά με ένα μάθημα στη σχολική αίθουσα, όπου ο ερωτών ελέγχει και διαμορφώνει ως ισχυρότερος το κείμενο το οποίο προκύπτει (Kress, 2003).

Έχοντας υπόψη μας τα παραπάνω και ιδιαίτερα τη θέση ότι ο λόγος στη συνέντευξη δομείται από κοινού, προχωρήσαμε στο σχεδιασμό των συνεντεύξεων με οδηγό συνέντευξης και άλλα υλικά που ήταν απαραίτητα για το θέμα της έρευνάς μας.

Οδηγός Συνέντευξης

Συζητάμε το παρακάτω πρόβλημα:

Δύο ποδηλάτες ξεκινούν από την πλατεία του Πανοράματος και κατευθύνονται προς το σχολείο με την ίδια ταχύτητα. Ο α΄ ποδηλάτης έχει ποδήλατο με μεγαλύτερες ρόδες από το β΄ ποδηλάτη.

Ερωτ: Αν φτάνουν και οι δύο μαζί, τίνος οι ρόδες περιστράφηκαν (γύρισαν) περισσότερες φορές; Πώς το σκέφτηκες;

Ερωτ: Πώς νομίζεις ότι μπορούμε να υπολογίσουμε τον αριθμό των στροφών;

Τι πρέπει να γνωρίζουμε; Τι μπορούμε να κάνουμε για να το βρούμε;

Ερωτ: Γνωρίζουμε ότι η απόσταση-διάστημα είναι 2 χμ. Μπορούμε να βρούμε πόσες φορές περιστράφηκαν οι ρόδες του κάθε ποδηλάτου;

Οι ατομικές συνεντεύξεις έγιναν από τη δασκάλα του τμήματος που είναι η μια από τις εισηγήτριες. Συμμετείχαν 5 μαθητές/τριες της Ε΄ Τάξης, από Δημοτικό Σχολείο της Ανατολικής Θεσσαλονίκης. Η επιλογή των μαθητών/τριών έγινε με κριτήριο την διαφορετική ακαδημαϊκή τους επίδοση, την κοινωνική και πολιτισμική σύνθεση της τάξης, και το φύλο.

Μετά τις συνεντεύξεις ακολούθησε διδακτική παρέμβαση 6 ωρών σε 3 δίωρα στην τάξη, η οποία και μαγνητοφωνήθηκε, με σκοπό να οικειοποιηθούν οι μαθητές/τριες τις έννοιες των μαθηματικών και της φυσικής (περιφέρεια, μήκος κύκλου, ταχύτητα, διάστημα, χρόνος) που αναδείχτηκαν μέσα από τις συνεντεύξεις και αφορούσαν το θέμα μας.

Στη συνέχεια έγινε επεξεργασία του υλικού, τόσο από τις συνεντεύξεις όσο και από την διδακτική παρέμβαση στην τάξη και επιλέχτηκαν αποσπάσματα τα οποία ταξινομήθηκαν σε επίπεδα ανάλυσης σύμφωνα με τους στόχους της έρευνας και τα ζητήματα που ανέκυψαν στην διαδικασία. Η ανάλυση και η ερμηνεία του λόγου των παιδιών έγινε υπό το πρίσμα της παιδαγωγικής θεώρησης του Vygotsky και της κοινωνικής συγκρότησης της γνώσης (Mercer, 2000).

Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι ο σχεδιασμός του project μας έδωσε τη δυνατότητα να συζητήσουμε σε μεγαλύτερο βάθος τις διαδικασίες συγκρότησης των μαθηματικών και των φυσικών εννοιών, τη σχέση του καθημερινού και του σχολικού πλαισίου, του καθημερινού και του επιστημονικού λόγου. Η διαδικασία αυτή λειτούργησε αναστοχαστικά ως προς τη διδακτική μας πράξη, τη θέση και το ρόλο μας ως δασκάλων. Η αποδέσμευση από την πιστή εφαρμογή του αναλυτικού προγράμματος, μας έδωσε τη δυνατότητα να κατανοήσουμε καλύτερα τις συλλογιστικές διεργασίες των παιδιών και να σταθούμε στις διαφορετικές αντιλήψεις για τις

έννοιες που διαπραγματευόμασταν. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα την τροποποίηση του αρχικού σχεδιασμού του project που κινούνταν περισσότερο στο επίπεδο της σύνδεσης των δύο γνωστικών πεδίων.

ΕΠΙΠΕΔΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Σύνδεση των δύο γνωστικών πεδίων, Μαθηματικών και Φυσικής, στο επίπεδο των εννοιών.

Τα παιδιά στην καθημερινότητά τους συνδέουν τα δυο γνωστικά πεδία προκειμένου να κατανοήσουν και να ερμηνεύσουν καταστάσεις της πραγματικότητας στην οποία συμμετέχουν. Χρησιμοποιούν πρακτικούς συλλογισμούς για να δώσουν απαντήσεις στα ερωτήματά τους και τους διατυπώνουν με περιγραφικό λόγο χωρίς τη χρήση επιστημονικών εννοιών. Η σκέψη τους εξακολουθεί να είναι καταγραφική και παρουσιάζεται μια ασυνέχεια στο εννοιολογικό τους πλαίσιο (Vygotsky, 2000).

Αυτό που φαίνεται να τους δυσκολεύει είναι να εντάξουν σε κατηγορίες τις έννοιες και να τις μεταφράσουν στο συμβολικό σύστημα. Οι έρευνες δείχνουν ότι οι ιδέες των μαθητών σχετικά με την κίνηση δεν έχουν συνοχή και δεν μπορούν να συγκροτήσουν θεωρία (Driver,1998).

Μαθ: *Εάν πηγαίνει το μικρό ποδήλατο με πιο γρήγορο ρυθμό από το άλλο και έχει μικρότερες ρόδες και περιστρέφεται πιο γρήγορα θα φτάσει πιο γρήγορα. Άρα, πρέπει να πηγαίνει λίγο πιο αργά από το μεγάλο για να μπορέσει να είναι ίσα.*

Δασκ: *Α, για να είναι μαζί;*

Μαθ: *Ναι*

Δασκ: *Α, δηλαδή θέλεις να μου πεις μήπως αυτές οι ρόδες του μικρότερου ποδηλάτου περιστρέφονται με μεγαλύτερη ευκολία; Τι θες να μου πεις;*

Μαθ: *Όχι, αυτό δεν έχει σχέση.. είναι ότι ..είναι μικρότερες και επειδή γυρίζουνε πιο γρήγορα μπορεί να φτάσει λίγο πιο γρήγορα.*

Δασκ: *Μάλιστα. Και πρέπει να ακολουθεί λες το μεγάλο τώρα. Ωραία. Για πες μου τώρα, Αφροδίτη μπορούμε εμείς να υπολογίσουμε τον αριθμό των στροφών που έχουνε κάνει οι ρόδες του μικρού ή του μεγάλου ποδηλάτου;*

Μαθήτρια: *Ε, όχι, αν δεν μας δώσει ας πούμε χιλιόμετρα…δηλαδή, τώρα θα πάμε στα μαθηματικά. Γιατί, δε μας λέει πόσα χιλιόμετρα είναι από το Πανόραμα μέχρι το σχολείο και ταχύτητα την ίδια, όμως ποια ταχύτητα είναι; Και χρειάζεται αυτά να τα βρούμε για να μπορέσουμε να καταλάβουμε.* ***(Δ΄ συνέντευξη)***

Δασκ: *Αυτό ναι, γι' αυτό είσαι βέβαιη πια, έτσι. Για να βρούμε τους κύκλους που θα κάνει είναι το πρόβλημα τώρα πια. Μπορούμε να βρούμε έναν τρόπο να τους μετρήσουμε;*

Μαθ: *Ναι*

Δασκ: *Ναι, για πες έχεις καμιά ιδέα;*

Μαθ: *Τώρα, όχι.*

Δασκ: *Τώρα, όχι. Λες ότι θα υπάρχει όμως ε;*

Μαθ: *Ναι, σίγουρα.*

Δασκ: *Εσύ, δεν μπορείς να σκεφτείς κάτι;*

Μαθ: *Ε..ε, με μαθηματικά τώρα πρέπει να το βρούμε αυτό.*

(Ε΄ συνέντευξη)

Στα παραπάνω αποσπάσματα τα παιδιά μετακινούνται διαισθητικά από το ένα πεδίο στο άλλο με σχετική ευκολία και άνεση και συνδέουν τις δυο επιστήμες χωρίς να το συνειδητοποιούν. Καθώς όμως προχωράει η συζήτηση κατανοούν ότι αρκούν οι εμπειρικές τους γνώσεις για να δώσουν απαντήσεις στα ζητήματα που προκύπτουν καθημερινά. Αντιλαμβάνονται ότι τους είναι απαραίτητη η συνεισφορά των επιστημονικών πεδίων. Καταφεύγουν στα μαθηματικά γιατί γνωρίζουν από τη σχολική τους πράξη πώς είναι αυτά που δίνουν λύση σε προβλήματα. Δυσκολεύονται όμως να μεταφέρουν το συλλογισμό τους σε ένα πιο τυπικό επίπεδο που απαιτεί το συμβολικό σύστημα των μαθηματικών.

Ο ρόλος του καθημερινού πλαισίου και της βιωμένης εμπειρίας στο σχηματισμό των εννοιών.

Τα βιώματα των παιδιών φαίνεται ότι παίζουν καθοριστικό ρόλο στην κατανόηση και ερμηνεία ενός προβλήματος. Το καθημερινό πλαίσιο διαμορφώνει τις πρώτες ιδέες των μαθητών για το σχηματισμό των εννοιών.

Δασκ: *Τίνος οι ρόδες περιστράφηκαν περισσότερες φορές;*

Μαθ: *Από το μικρό ποδήλατο.*

Δασκ: *Από το μικρό ποδήλατο. Πώς το σκέφτηκες και το είπες αυτό;*

Μαθ: *Ε, το μεγάλο ποδήλατο επειδή έχει μεγαλύτερες ρόδες…ε..πώς να το πω αυτό; Δε χρειάζεται να κάνει πολλούς κύκλους, ενώ το μικρό που έχει*

μικρότερες ρόδες πρέπει να κάνει περισσότερους κύκλους για να φτάσει και το μεγαλύτερο.

.....

Δασκ: *Σου' ρθε στο μυαλό το ποδήλατό σου;*

Μαθ: *Ναι, γιατί προσπαθώ κάθε φορά να φτάσω την αδελφή μου που έχει πιο μεγάλο.*

(Ε΄ συνέντευξη)

Δασκ: *Μάλιστα υ' ακούσω, λέγε.Πόσες στροφές κάμει η ρόδα του μικρού ποδήλατου και πόσες του μεγάλου;*

Μαθ: *Κυρία πόσες στροφές ε; 1500 με 2000*

Δασκ: *Πώς κατέληξες σ' αυτό το συμπέρασμα. Δύο χιλιόμετρα είναι η απόσταση*

Μαθ: *Σκέφτηκα ότι σ' ένα λεπτό κάνει περίπου 25 στροφές*

Δασκ: *Πώς θα το βρεις όμως ότι κάνει 25΄*

Μαθ: *Σκέφτηκα λίγο πως έτσι κάνω εγώ.*

Δασκ: *Πήγες στο δικό σου το βίωμα όπως λέμε* ***(Τάξη)*** .

Δασκ: *Τι πάει να πει αυτό τώρα. Τι γίνεται με την ταχύτητα του ποδήλατου;*

Μαθ: *Από εκεί που το πιάνουμε έχει συγκεκριμένες ταχύτητες……Δηλαδή, το πεντάλ ελαφραίνει στο 1 και στο 5 βαραίνει.*

Δασκ: *Δηλαδή, τι θα πει ελαφραίνει το πεντάλ, για εξήγησέ μου, τι κάνει εκεί πέρα;*

Μαθ: *Είναι πιο εύκολο να το πατήσεις, να το γυρίσεις.*

Δασκ: *Α, μάλιστα. Και οι ρόδες πώς περιστρέφονται στην ανηφόρα;*

Μαθ: *Πιο αργά*

Δασκ: *Πιο αργά, ε; Αλλά, εσύ πατάς το πεντάλ πιο εύκολα. Ενώ στην κατηφόρα;*

Μαθ: *Βάζω απ' τις τελευταίες ταχύτητες που έχει, ώστε να είναι πιο δύσκολο να γυρίσω το πεντάλ, για να μην πάρω πολύ ταχύτητα και πέσω.*

Δασκ: *Μάλιστα, αυτό το ρόλο έχει. Κι όταν είσαι σ' έναν ευθύ δρόμο τις χρησιμοποιείς;*

Μαθ: *Ναι, Βάζω 2-3-4, δηλαδή τις μέσες ταχύτητες κάπως.*

Δασκ: *Γιατί το κάνεις αυτό;*

Μαθ: *Ούτε να δυσκολεύομαι να το γυρίσω, ούτε για να είναι πολύ εύκολο.* ***(Γ΄ συνέντευξη)***

Δασκ: *Πώς μπορούμε να μετρήσουμε τις στροφές της ρόδας; Εμείς υποθέτουμε ότι δεν αλλάζει συνέχεια ταχύτητα, πηγαίνει με την ίδια.*

Μαθ: *Ναι, με τον ίδιο ρυθμό.*

Δασκ: *Εσύ αυτό που λες, το έχεις κάνει καμιά φορά;*

Μαθ: *Ναι μια φορά αλλά δεν μπόρεσα να τις μετρήσω.*

Δασκ: *Τι ήταν αυτό που σε δυσκόλεψε;*

Μαθ: *Ότι πήγαινε γρήγορα η ρόδα.*

Δασκ: *Εκεί το έχανες;*

Μαθ: *Ναι.*

Δασκ: *Πώς το έβαζες το σημάδι αυτό, για εξήγησέ μου για να το καταλάβω καλύτερα.*

Μαθ: *Έβαζα κάτι σαν καλάμι στην ακτίνα και είχα ζωγραφίσει κάτι στο σίδερο και τις μετρούσα πόσες φορές κι έγραφα σ' ένα χαρτί πόσες φορές γυρνούσε.*

Δασκ: *Κι αυτό ήταν μεγάλο καλάμι; Από πού ξεκινούσε;*

Μαθ: *Ξεκινούσε από την ακτίνα κι έφτανε μέχρι το σίδερο ή την αλυσίδα.*

Δασκ: *Δηλ. ήταν ίσο με τι;*

Μαθ: *Με τη ρόδα, όχι με τη ρόδα, με την ακτίνα.* ***(Α΄ συνέντευξη)***

Τα παιδιά προκειμένου να δώσουν απάντηση στην ερώτηση τίνος ποδηλάτου οι ρόδες περιστρέφονται περισσότερες ή λιγότερες φορές στον ίδιο χρόνο για να διανύσουν την ίδια απόσταση, ανακαλούν από τις προσωπικές τους εμπειρίες και σχέσεις. Η έννοια της ταχύτητας συνδέεται με το ρυθμό που κινείται ένα όχημα (αργά ή γρήγορα), τις στροφές της ρόδας και το σύστημα των ταχυτήτων που βρίσκεται στο όχημα. Εισάγουν επίσης αριθμητικά δεδομένα με βάση τις εμπειρίες τους προκειμένου να κατανοήσουν το πρόβλημα. Χρησιμοποιούν τον αναλογικό συλλογισμό σε μια προσπάθεια να αναπαραστήσουν το πρόβλημα και να οδηγηθούν στη λύση του. Οι πρώτες προσπάθειες των παιδιών για τη μέτρηση των στροφών παραπέμπει στις πρακτικές που χρησιμοποιούσαν οι άνθρωποι για να λύσουν καθημερινά προβλήματα. Οι έρευνες δείχνουν ότι μερικές από τις εναλλακτικές απόψεις

των παιδιών είναι ίδιες με τις ιδέες που είχαν οι επιστήμονες σε παλαιότερες εποχές (Driver, 1998).

Στο καθημερινό πλαίσιο και μέσα από τις δραστηριότητες τους τα παιδιά έχουν έρθει σε επαφή και χρησιμοποιούν διάφορες έννοιες με περιγραφικό λόγο. Ο λόγος τους δεν είναι πάντα ακριβής και στηρίζονται στις εικόνες που δημιουργούν εκφέροντάς τον. Η παρατήρηση και η δοκιμή αποτελούν, όπως φαίνεται, βασικά στοιχεία στη διαμόρφωση των ιδεών τους. Η τακτική αυτή που ακολουθούν τα παιδιά παραπέμπει στη μέθοδο με την οποία εξετάζονται τα φυσικά φαινόμενα.

Σύμφωνα με τον Bertrand (1994), οι αναπαραστάσεις αποτελούν ενδείξεις ενός οργανωμένου, απλού συνεκτικού ερμηνευτικού μοντέλου που χρησιμοποιείται συχνά μέσω αναλογιών στη λύση προβλημάτων. Τα παιδιά οικοδομούν ένα ορισμένο αριθμό τέτοιων μοντέλων με τη βοήθεια των οποίων επιχειρούν να γνωρίσουν και να ερμηνεύσουν το περιβάλλον τους. Οι προηγούμενες αντιλήψεις αναπαραστάσεις τους συνιστούν τα μόνα εργαλεία που διαθέτει ο μαθητής και μέσω αυτών αποκωδικοποιεί την πραγματικότητα. Οι καινούριες πληροφορίες χρησιμοποιούνται σε σχέση με προηγούμενες καταστάσεις, ενώ ταυτόχρονα τα υπάρχοντα γνωστικά σχήματα μετασχηματίζονται.

Οι μαθητές ανατρέχουν στον αναλογικό συλλογισμό όταν προσεγγίζουν ένα τομέα που δεν τους είναι αρκετά οικείος. Τότε ανακαλούν μια κατάσταση της οποίας γνωρίζουν τη λύση ή την έχουν επιχειρήσει και τη θεωρούν ανάλογη με το προς επίλυση πρόβλημα (Κόκκοτας, 1997).

Είναι σημαντικό να τονίσουμε την ανάγκη για αναλογικό συλλογισμό, στην προσπάθεια ανάπτυξης των επιστημονικών εννοιών της ταχύτητας και της επιτάχυνσης – άποψη που μελετήθηκε και από τον Piaget (1979).

Δασκ: *Τι έκανε ο δεύτερος πιο γρήγορα;*

Μαθ: *Πεντάλι…*

Δασκ: *Μάλιστα, πατούσε τα πόδια του πιο πολύ… έκανε πιο γρήγορα πεντάλι, δηλ. τι προσπαθούσε να κάνει ο δεύτερος ποδηλάτης;*

Μαθ: *Να αναπτύξει ταχύτητα.*

Δασκ: *Μάλιστα, να αναπτύξει ταχύτητα, λες εσύ* ***(Β΄ συνέντευξη).***

Ο όρος «επιτάχυνση» δεν χρησιμοποιείται συχνά από μαθητές της σχολικής ηλικίας, λόγω του ότι τους εισάγει σε επιστημονικά μαθήματα. Καθημερινές

εκφράσεις, όπως π.χ. «πηγαίνει γρηγορότερα» χρησιμοποιούνται με ασαφή τρόπο, καθώς μερικές φορές οι μαθητές αναφέρονται στην αύξηση του μέτρου της ταχύτητας και άλλες φορές στην αύξηση της ταχύτητας με το χρόνο. Τα παιδιά είναι ανάγκη να αναπτύξουν τα γλωσσικά εργαλεία προκειμένου να περιγράψουν καλύτερα την κίνηση (Driver, 1998).

Οι συλλογιστικές διεργασίες των παιδιών στη διάρκεια των μαθησιακών δραστηριοτήτων – δυσκολίες και παρανοήσεις.

Τα μαθηματικά εξακολουθούν για τα παιδιά να αποτελούν μια αφηρημένη νοητική διεργασία, συμβολικά προσανατολισμένη που δεν έχει σχέση με την πρακτική τους δραστηριότητα, σε αντίθεση με τη Φυσική την οποία τα παιδιά φαίνεται να συνδέουν με τις καθημερινές τους δραστηριότητες. Η φυσική για τα παιδιά αναπαριστά τον κόσμο των αντικειμένων, ενώ τα σύμβολα αποτελούν τα αντικείμενα των μαθηματικών (Thompson, 1994).

Δασκ: *Πάλι όχι… Δε σου αρκεί που σου έδωσα ένα στοιχείο, ότι δηλ. η απόσταση, το διάστημα δηλ. που έκαναν ποδήλατο είναι 2 χλμ.*

Μαθ: *2000 μέτρα διά…*

Δασκ: *Τι θα είναι αυτό που θα βάλουμε στο διά; Ε…; αυτό σκέφτεσαι; Μπορούμε να το βρούμε το διά;*

Μαθ: *Όχι.*

Δασκ: *Τι σκέφτεσαι εσύ ότι μπορεί να μπει στο διά; Πες μου το με λόγια.*

Μαθ: *Δια τις πόσες στροφές…*

Δασκ: *Τις στροφές θέλουμε να βρούμε…*

Μαθ: *Διά τις πόσες φορές κύλησε η ρόδα.*

Δασκ: *Ναι, θα διαιρέσουμε, λες…*

Μαθ: *Τα 2000 μ. διά του αριθμό των στροφών,… που…*

Δασκ: *(δημιουργείται μία σύγχυση με τις λέξεις ηχητικά και επαναλαμβάνεται το ερώτημα από τη δασκάλα) Τώρα σου κάνω το σχήμα… Έτσι όπως βλέπεις τη ρόδα εδώ μπορείς να σκεφτείς;*

Μαθ: *Διά μισό;*

Δασκ: *Έχεις κανένα μισό εδώ; Έχεις κανέναν αριθμό;*

Μαθ: *Όχι…*

Δασκ: *Τι μπορούμε να υπολογίσουμε και να μάθουμε;*

……

Μαθ: *Πόσα χλμ., πόσα μ. είναι η ρόδα;*

Δασκ: *Δηλ.; Το πας πάρα πολύ κουτά.*

Μαθ: *2000 διά…*

Δασκ: *Άσε τους αριθμούς, πόσα μ. είπες ήταν η μία ρόδα. Όταν λες, πόσα μ. ήταν η μία ρόδα τι πρέπει να μετρήσουμε από τη ρόδα;*

Μαθ: *Την περίμετρο.*

Δασκ: *Την περίμετρο… Αν το βρούμε αυτό θα τα καταφέρουμε να βρούμε τον αριθμό των στροφών;*

Μαθ: *Ναι, γιατί θα διαιρέσουμε με το 2000.* ***(Β΄ συνέντευξη).***

Μαθ: *Θα κάναμε…Πρώτα θα βρίσκαμε πόσες φορές θα είναι για τα 2 χιλιόμετρα και θα βρίσκαμε την απόσταση.*

Δασκ: *Την απόσταση την ξέρουμε.*

Μαθ: *Εννοώ πόσες φορές θα κάνει κύκλους.*

Δασκ: *Εκείνο πώς θα το βρούμε με τις πόσες φορές;*

Μαθ: *Νομίζω, με όσες φορές ο κύκλος επί (×) 2 χιλιόμετρα.*

Δασκ: *Επί (×) 2 χιλιόμετρα, έτσι λες να το βρούμε; Εμείς θέλουμε να βρούμε σου ξαναθυμίζω, τον αριθμό των στροφών. Πόσες φορές περιστράφηκαν οι ρόδες;*

Μαθ: *Ε, θα κάνουμε δια για να βρούμε τη μία φορά και μετά θα κάνουμε επί*

Δασκ: *Τι θα κάνουμε δια, για πες;*

Μαθ: *Τις ρόδες με τα χιλιόμετρα και θα δούμε πόσο γυρίζει …και μετά θα κάνουμε επί τις στροφές με …αυτές που θα βρούμε …τη στροφή που θα βρούμε με τα χιλιόμετρα και θα βρούμε πόσες στροφές έκανε.(* ***Δ΄ συνέντευξη).***

Τα παιδιά στο σχολικό πλαίσιο θεωρούν ότι για να προχωρήσουν στη λύση ενός προβλήματος είναι απαραίτητα τα αριθμητικά δεδομένα. Αναζητούν έναν αλγόριθμο που θα τους δώσει την λύση. Πχ επί, δια, 3,14 κλπ.

Το σχολικό περιβάλλον και οι δραστηριότητες των μαθητών είναι συνδεδεμένα με αριθμητικές πράξεις. Τα παιδιά όταν δεν μπορούν να ανακαλέσουν εμπειρίες τους προκειμένου να λύσουν ένα πρόβλημα,

αναζητούν ένα σύστημα οικείο σ' αυτά, το σύστημα των συμβόλων και των αλγόριθμων. Γίνεται όμως κατανοητό ότι δεν μπορούν εύκολα να το διαχειριστούν κι αυτό.

Η Donaltson υποστηρίζει ότι τα παιδιά και συχνά και οι ενήλικες αναπτύσσουν συλλογιστικές διαδικασίες και καταλήγουν σε συμπεράσματα με μεγαλύτερη ευκολία στο πλαίσιο των κατανοητών γεγονότων παρά σε δηλώσεις που προσαρμόζονται στα κριτήρια του τυπικού συλλογισμού. Αναφερόμενη στην αφαιρετική σκέψη τονίζει ότι η μετάβαση σ' αυτή ισοδυναμεί με την έκφραση της μορφής ή της λογικής δομής του συλλογισμού παραλείποντας τελείως το περιεχόμενο ή το νόημα.

Σύγχυση εργαλείων και εννοιών

Ένα από τα σημαντικά ζητήματα με τα οποία έρχονται αντιμέτωπα τα παιδιά στη διαδικασία κατάκτησης της σχολικής γνώσης είναι η οικειοποίηση, η αποσαφήνιση των εννοιών και η χρήση των εργαλείων. Η διαμεσολάβηση της γλώσσας και των άλλων εργαλείων είναι καθοριστική στην ανάπτυξη της σκέψης του παιδιού. Το παιδί μιλά, σκέφτεται και εμπλέκεται σε μια δραστηριότητα που εμπεριέχει τα συστήματα λόγου της κουλτούρας του, ενώ παράλληλα διαμορφώνει μια δια-λογική αντίδραση στα συστήματα λόγου. Εσωτερικεύει και ταυτόχρονα επαναδομεί τα συστήματα λόγου μετέχοντας σε μια δημιουργική διαδικασία η οποία ισοδυναμεί με μάθηση (Μπίμπου, 2003). Ακόμη η διαμεσολάβηση των εργαλείων δεν διευκολύνει απλά μια δράση, αλλά αντίθετα την μεταμορφώνει ή την επαναπροσδιορίζει (Vygotsky, 2000).

Δασκ: *Μήπως σκέφτεσαι τι πρέπει να ξέρουμε για να βρούμε την περίμετρο της ρόδας;*

Μαθ: *Το εμβαδόν (γελάει)*

Δασκ: *Το εμβαδόν, είπαμε είναι η επιφάνεια, εμείς μιλάμε για την περίμετρο, το γύρω-γύρω, ξέρεις τι μπορούμε να ξέρουμε; Έχεις καμιά ιδέα; Τι μας χρειάζεται;*

Μαθ: *Ένας αριθμός; (**Β΄ συνέντευξη)***

Δασκ: *Τι σ' έκανε να αλλάξεις απόφαση;*

Μαθ: *Ότι είναι πιο μικρές κι έχουν την….(δυσκολεύεται) κι έχουν μικρότερο όγκο*

Δασκ: *Όταν λες όγκο τι εννοείς;*

Μαθ: *Έτσι όπως είναι σχεδιασμένο* ***(Γ΄ συνέντευξη)***

Όπως διαπιστώνεται από το λόγο των παιδιών υπάρχει μια σύγχυση στο επίπεδο των εννοιών της περιμέτρου, της επιφάνειας και του όγκου καθώς και των αντίστοιχων εργαλείων που χρησιμοποιούνται για τη μέτρησή τους.

Τα παιδιά χρησιμοποιούν τις έννοιες λεκτικά χωρίς αυτό να σημαίνει κατ' ανάγκη ότι τις έχουν οικειοποιηθεί και μπορούν να τις χειριστούν και να τις εντάξουν στις καθημερινές και σχολικές δραστηριότητες. Για παράδειγμα η έννοια της ταχύτητας έχει συνδεθεί με το ρυθμό, τη μέτρησή της με όργανα (ταχόμετρο) και εκφράζεται με τις λέξεις αργά ή γρήγορα. Είναι δύσκολο για τα παιδιά να κατανοήσουν την επιστημονική της υπόσταση ως δύναμης.

Αυτό δείχνει την δυσκολία μετάβασης από τις *αυθόρμητες* έννοιες στις *επιστημονικές* και στη συγκρότηση ενός εννοιολογικού πλαισίου στο οποίο μπορούν να στηριχτούν για να ερμηνεύσουν την κοινωνική πραγματικότητα και να οικοδομήσουν νέα γνώση.

Η διδακτική αλληλεπίδραση και η καθοδηγούμενη συγκρότηση της γνώσης στην οικοδόμηση κοινού νοήματος

Τα τελευταία χρόνια έχει παρατηρηθεί ένα αυξημένο ερευνητικό ενδιαφέρον για το ρόλο των κοινωνικών-διδακτικών αλληλεπιδράσεων στην επίτευξη γνωστικών μετασχηματισμών στη σκέψη των παιδιών. Ερευνητές, κινούμενοι στα πλαίσια των θεωρητικών ρευμάτων που αποδέχονται τη σημασία των αλληλεπιδράσεων στη μάθηση, μελετούν την οικοδόμηση των γνώσεων μέσα από τις κοινωνικές ανταλλαγές, μετατοπίζοντας το επίκεντρο του ερευνητικού τους ενδιαφέροντος από τη σχέση του υποκειμένου με το αντικείμενο στην επικοινωνία γύρω από το αντικείμενο. Στα πλαίσια αυτά αποκτά ιδιαίτερη σημασία η μελέτη των παρεμβάσεων που πραγματοποιεί ο εκπαιδευτικός και των αλληλεπιδράσεων που αναπτύσσονται μεταξύ αυτού και των μαθητών (Ραβάνης, κ.α, 2002)

Δασκ: *Έχεις καμιά ιδέα πώς μπορούμε να βρούμε τον αριθμό των στροφών; Τι πρέπει να γνωρίζουμε, τι να βρούμε;*

Μαθ: *Το πόσες φορές γύρισε…*

Δασκ: *Ναι, το πόσες φορές γύρισε σ' ένα διάστημα, σε μία απόσταση 2 χμ., ναι, το πόσες φορές γύρισαν.*

Μαθ: *Την ταχύτητα.*

Δασκ: *Η ταχύτητα είναι ίδια, κινούνται με την ίδια ταχύτητα. Λοιπόν σ' ακούω, τι σκέφτηκες… (η δασκάλα του άφησε λίγο μόνο να σκεφτεί)*

Μαθ: *Με μια περιστροφή πόσα μέτρα καταλαμβάνει η κάθε ρόδα.*

Δασκ: *Μάλιστα. Αυτά τα μέτρα που καταλαμβάνει, όπως λες, η κάθε ρόδα σε μια περιστροφή, ποια είναι, μπορείς να μου τα δείξεις, να μου τα πεις… (δείχνει με το χέρι του την περιφέρεια της ρόδας) Έκανες με το χέρι σου κάποιο σχέδιο, μπορείς να μου το δείξεις καλύτερα με το χέρι ή με το μολύβι, ποια είναι τα μέτρα που καταλαμβάνει σε μια στροφή…*

Μαθ: *Αυτά (μάλλον δείχνει τον κύκλο)*

Δασκ: *Όταν κάνει μια περιστροφή η ρόδα…*

Μαθ: *Επανέρχεται στην ίδια θέση*

Δασκ: *Επομένως ποια λες εσύ ότι είναι τα μέτρα που κάνει;*

Μαθ: *Ένα μέτρο…*

Δασκ: *Ξέρουμε ότι είναι ένα μέτρο;*

Μαθ: *Όχι.*

Δασκ: *Όχι, δεν το ξέρουμε. Τι πρέπει να ξέρουμε για να το βρούμε αυτό; Μπορείς να υποθέσεις; Τι θα μας βοηθούσε για να βρούμε τα μέτρα που κάνει η ρόδα σε μια περιστροφή;*

Μαθ: *Το… εκείνο που μετράει τα χμ.*

Δασκ: *Α… μάλιστα… εμείς δεν έχουμε τέτοια όργανα τώρα στο ποδήλατο…*

Μαθ: *Με μέτρο…*

Δασκ: *Με μέτρο, λες, να το μετρήσουμε. Τι θα μετρήσουμε με το μέτρο, πες μου.*

Μαθ: *Το… την περίμετρο.*

Δασκ: *Μάλιστα, την περίμετρο του σχήματος θα την μετρήσουμε με μέτρο. Ωραία, Πολύ ωραία. Και το μέτρο πώς θα το κάνουμε να το μετρήσουμε γύρω-γύρω. Έχεις καμιά ιδέα;*

Μαθ: *Κυκλικά, όπως ακολουθεί η ρόδα.*

Δασκ: *Μάλιστα κυκλικά . Μπορούμε πάντοτε να κάνουμε αυτή τη δουλειά; Μπορούμε πάντοτε να παίρνουμε το μέτρο και να μετράμε; Δεν είναι κάτι απίθανο αυτό που μου είπες.*

Μαθ: *Με ακτίνες;*

Δασκ: *Α! μάλιστα. Τι να χρειαστεί, δηλαδή, να ξέρουμε; Ρωτάς κι εσύ.*

Μαθ: *Πόση είναι η απόσταση απ' τη μέση του κύκλου μέχρι στο τέρμα εκεί που τελειώνει.*

Δασκ: *Δηλαδή, αυτό το λες εσύ, το βλέπεις κιόλας εδώ στο σχήμα του ποδηλάτου, ότι λέγεται;*

Μαθ: *Ακτίνα*

Δασκ: *Μάλιστα. Δηλαδή, εάν ξέραμε πόση είναι η ακτίνα του κύκλου θα μπορούσαμε λες να το βρούμε;*

Μαθ: *Ναι*

Δασκ: *Ναι, ε; Θέλω απλά να μου πεις λίγο παραπάνω τη σκέψη σου αφού έφτασες μέχρι εκεί τι δηλαδή θα γινόταν αν βλέπαμε την ακτίνα, τι θα γινόταν για να καταλάβω πώς το σκέφτεσαι*

Μαθ: *Αν ξέραμε την ακτίνα θα μπορούσαμε να πολ/σιάζαμε… μ' έναν συγκεκριμένο αριθμό…τώρα δεν του θυμάμαι*

Δασκ: *Α… Μήπως έχεις κάτι ακούσει; Κάτι έχεις διαβάσει; Τι συγκεκριμένο αριθμό;*

Μαθ: *Για να δούμε τις ακτίνες…με το 3,4…κάτι τέτοιο.*

Δασκ:…*14 (γελώντας) ναι, ναι εντάξει σ' αυτό έχεις δίκιο. Δεν θα βρίσκαμε όμως τις ακτίνες αν πολλαπλασιάζαμε μ' αυτό. Κάτι άλλο θα βρίσκαμε.* ***(Γ' συνέντευξη)***

Στα πλαίσια των συνεντεύξεων αλλά και της εκπαιδευτικής διαδικασίας, οι μαθητές αντιμετώπισαν προβλήματα στο μετασχηματισμό και στη σύνδεση των βιωματικών νοητικών τους αναπαραστάσεων και πρακτικών με το εννοιολογικό πλαίσιο της επιστήμης.

Στην προσπάθεια τους αυτή καθοριστικό ρόλο έπαιξε η καθοδήγηση και η διαμεσολάβηση του/της εκπαιδευτικού. Οι καταστάσεις αλληλεπίδρασης και επικοινωνίας που δημιουργήθηκαν φαίνεται ότι συνέβαλαν αποφασιστικά στην αποσαφήνιση των εννοιών και βοήθησαν γενικότερα στην ανάπτυξη και οικειοποίηση τους.

Ο σημαντικός ρόλος της διδασκαλίας έγκειται σ' αυτό ακριβώς το σημείο. Η διδασκαλία πρέπει να προσανατολιστεί στις υπό ωρίμανση λειτουργίες και να δημιουργήσει μέσα από τη μαθησιακή διαδικασία το στάδιο της επόμενης

ανάπτυξης του παιδιού. *«Η παιδαγωγική πρέπει να προσανατολιστεί στην παιδική εξέλιξη του αύριο, και όχι σ' αυτήν του χθες. Μόνο τότε θα είναι σε θέση να κινήσει μέσα στην διδασκαλία τις εξελικτικές εκείνες διαδικασίες που βρίσκονται τώρα στη ζώνη της επόμενης εξέλιξης»* (Βυγκότσκι, 1993, σ.296).

Σύμφωνα με τον Βυγκότσκι, (1993, σ.301). *«Η διδασκαλία μπορεί να επέμβει στην εξέλιξη τους και να ασκήσει την καθοριστική της επίδραση ακριβώς γιατί αυτές οι λειτουργίες με την έναρξη της σχολικής ηλικίας δεν είναι ακόμη ώριμες και έτσι μπορεί η διδασκαλία να οργανώσει την παραπέρα διαδικασία της εξέλιξής τους και έτσι να καθορίσει το πεπρωμένο τους»*

ΕΠΙΛΟΓΟΣ- ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΕΥΡΗΜΑΤΩΝ

Η συγκεκριμένη έρευνα λειτούργησε αναστοχαστικά ως προς τη διδακτική πράξη και το ρόλο μας ως εκπαιδευτικούς. Έδωσε τη δυνατότητα να σταθούμε πάνω στις σκέψεις των παιδιών και στον τρόπο που αυτές εκφράζονται μέσα από το λόγο τους. Διαπιστώσαμε ότι οι εμπειρίες και τα βιώματα τους είναι καθοριστικοί παράγοντες στη συγκρότηση των εννοιών και στις συλλογιστικές διαδικασίες που αναπτύσσουν κατά τη διάρκεια των μαθησιακών δραστηριοτήτων.

Φαίνεται ότι το πεδίο των φυσικών επιστημών αποτελεί μια πολύ καλή βάση πάνω στην οποία μπορούν να οικοδομηθούν και να συγκροτηθούν οι επιστημονικές έννοιες. Τα παιδιά αντλούν από το φυσικό κόσμο γνώσεις και πληροφορίες τις οποίες προσπαθούν να κατανοήσουν και να τις ερμηνεύσουν παρατηρώντας και δοκιμάζοντας. Οι έννοιες αυτές είναι οικείες στα παιδιά γιατί αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της καθημερινής τους ζωής, με αποτέλεσμα να οδηγούνται σε καθημερινούς πρακτικούς συλλογισμούς με τους οποίους αναπτύσσουν τη σκέψη τους. Τα μαθηματικά μέσω της ποσοτικοποίησης των εννοιών δρουν υποστηρικτικά στην οργάνωση, κατηγοριοποίηση και ιδιοποίηση τους.

Η σύνδεση των δύο πεδίων είναι σημαντική στο σχηματισμό εννοιολογικού πλαισίου και στην εξοικείωση των παιδιών με τα συμβολικά συστήματα και τα εργαλεία που διαμεσολαβούν στην οικοδόμηση και στην κατάκτηση της γνώσης.

Τα παιδιά αβίαστα κινούνται στα δυο επιστημονικά πεδία, χρησιμοποιούν έννοιες και γνώσεις ταυτόχρονα και από τα δύο, στην προσπάθεια τους να δώσουν απαντήσεις στα ερωτήματα που τους τίθενται και αφορούν την καθημερινή τους πρακτική. Όταν όμως επιχειρείται η μετάβαση στην οργανωμένη σχολική γνώση, παρουσιάζονται δυσκολίες που σχετίζονται με

την αντίληψη που κυριαρχεί στα αναλυτικά προγράμματα, να είναι γνωσιακά αποσυνδεδεμένα τα δύο πεδία.

Στα σχολικά αναλυτικά προγράμματα η μαθησιακή διαδικασία των φυσικών και μαθηματικών εννοιών, στηρίζεται σε μία μεθοδολογία αποκομμένη από την κοινωνική και καθημερινή πραγματικότητα και τα βιώματα των παιδιών. Στη φυσική, κεντρική θέση εξακολουθεί να κατέχει η παραδοσιακή αντίληψη ότι η αξιόπιστη γνώση πρέπει να βασίζεται στην παρατήρηση και την καταγραφή αυτών που συμβαίνουν στα πειράματα. Στα μαθηματικά από την άλλη, κυριαρχούν τα σύμβολα, τα διαγράμματα και οι τύποι. Το κοινό χαρακτηριστικό των δύο γνωστικών αντικειμένων είναι η απουσία εστίασης στις συλλογιστικές διεργασίες που αναπτύσσουν τα παιδιά.

Η χρήση της εικόνας φάνηκε να είναι καθοριστική για το μαθησιακό αποτέλεσμα και βοήθησε τους μαθητές/τριες να συνθέσουν μια αναπαράσταση πιο ολοκληρωμένη για τις έννοιες της ταχύτητας και του μήκους του κύκλου. Ωστόσο η «μετάφραση» της εικόνας επηρεάζεται από την αρχική γνώση και το γλωσσικό κώδικα που διαθέτουν οι μαθητές/τριες και δεν είναι σίγουρο ότι ερμηνεύεται με το σωστό τρόπο.

Η χρήση του επιστημονικού λεξιλογίου από τους μαθητές είναι ένα δύσκολο θέμα που προσδιορίζει σε σημαντικό βαθμό την κατανόηση και ανάπτυξη των εννοιών. Ο γλωσσικός κώδικας που χρησιμοποιούν τα παιδιά για να περιγράψουν τις εμπειρίες τους διαφέρει από τον γλωσσικό κώδικα που απαιτείται για να περιγράψουν και να κατανοήσουν τις επιστημονικές έννοιες. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να δημιουργείται μια δυσκολία που οδηγεί σε συναισθηματική απομάκρυνση των παιδιών από τις θετικές επιστήμες και πολλές φορές σε χαμηλές ακαδημαϊκές επιδόσεις.

Συνοψίζοντας τις θέσεις που προκύπτουν από τα παραπάνω ευρήματα πιστεύουμε ότι η διδασκαλία είναι απαραίτητο να λαμβάνει υπόψη την προηγούμενη γνώση των μαθητών, τον γλωσσικό τους κώδικα και τις ιδέες τους για το υπό διαπραγμάτευση θέμα. Είναι σημαντικό ο εκπαιδευτικός να δημιουργεί «γέφυρες» στη μαθησιακή διαδικασία, εισάγοντας τις επιστημονικές φράσεις και έννοιες που σχετίζονται με τις εμπειρίες τους. Η συζήτηση πάνω στις ιδέες των μαθητών και η έμφαση στις συλλογιστικές διεργασίες που χρησιμοποιούν οι μαθητές/τριες πρέπει να βρίσκεται στο επίκεντρο της διδασκαλίας.

Τέλος είναι σημαντικό να επισημάνουμε ότι η βελτίωση του συστήματος επικοινωνίας και η καλή γνώση του αντικειμένου αποτελεί προϋπόθεση για μια αποτελεσματική διδασκαλία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αποστολάκης, Α., Παναγοπούλου, Ε., Σάββας, Σ., Τσαγλιώτης, Ν., Πανταζής, Γ., Σωτηρίου, Σ., Τόλιας, Β., Τσαγλογέωργα, Α., Καλκάνης, Γ., (2006). *Φυσικά Ε΄ Δημοτικού, Ερευνώ και ανακαλύπτω, Βιβλίο του δασκάλου,* ΟΕΔΒ

Bertrand, Y.,(1994). *Σύγχρονες Παιδαγωγικές Θεωρίες*. Ελληνικά Γράμματα. Αθήνα.

Βλάχος, Α.Ι.,(2002). «Γλώσσα και διδασκαλία των φυσικών επιστημών- Ένα παράδειγμα εφαρμογής των θέσεων εποικοδόμησης στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση.» *Διδασκαλία των φυσικών επιστημών- Έρευνα και Πράξη*, 2, 16-27

Borg, W.R., (1963). *Educational Research*: *An Indroduction*, Longman, London.

Βυγκότσκι, Λ., (1993). *Σκέψη και γλώσσα*, Γνώση, Αθήνα.

Cohen, L., Manion, L., (2000). *Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής Έρευνας,* Μεταίχμιο, Αθήνα.

Donaldson, M., (2001). *Η Σκέψη των Παιδιών*, Gutenberg, Αθήνα.

Δ.Ε.Π.Π.Σ. & ΑΠΣ Μαθηματικών (2003). *Εισαγωγή, θεωρητικό υπόβαθρο για την Μαθηματική Εκπαίδευση του Δημοτικού Σχολείου*, (ΦΕΚ 302-303-304/ 13-3-2003/ τ. Β')

Driver R., Squires A., Rushworth V., Robinson P.,(1998). *Οικοδομώντας στις Έννοιες των Φυσικών Επιστημών,* Τυπωθήτω, Αθήνα.

Κακαδιάρης, Χ., Μπελίτσου Ν., Στεφανίδης, Γ., Χρονοπούλου, Γ., (2006) *Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού, Βιβλίο δασκάλου,* Αναδ. Συγγρ. Πατάκης, ΟΕΔΒ

Κόκκοτας, Β.Π., (1997). *Σύγχρονες προσεγγίσεις στη διδασκαλία των φυσικών επιστημών,* Αθήνα

Kress, G., (2003). *Γλωσσικές διαδικασίες σε Κοινωνιοπολιτισμική Πρακτική*, Σαββάλας, Αθήνα.

Logan, P. (1981). Language and physics. Physics Education, 16,74-77

Ματσαγγούρας, Η., (2002). *Η Διαθεματικότητα στη Σχολική Γνώση. Εννοιοκεντρική Αναπλαισίωση και Σχέδια Εργασίας*, Αθήνα, Γρηγόρης.

Mercer, N., (2000). *Η Συγκρότηση της Γνώσης,* μεταφρ. Παπαδοπούλου Μ., Μεταίχμιο, Αθήνα

Merton, R.K. & Kendall, P.L., (1946). "The focused interview", *American Journal of Sociology*, 51, 541-557

Mishler, E.,(1996). *Συνέντευξη Έρευνας*, Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα

Thompson, P., (1994). "Bridges between Mathematics and Science Education", Paper presented at the *Project 2061 Conference on Developing a Research Blueprint*, Baton Rouge, LA

Vygotsky, L.S., (2000).*Νους στην κοινωνία: Η ανάπτυξη των Ανώτερων Ψυχολογικών Διαδικασιών,* στο Σ. Βοσνιάδου (επιμ.), Α. Μπίμπου και Σ. Βοσνιάδου (μτφ), Gutenberg, Αθήνα.

Ραβάνης Κ., (2002*). Οι φυσικές επιστήμες στην προσχολική εκπ/ση. Διδακτική και γνωστική προσέγγιση,* Τυπωθήτω, Αθήνα.

Χασάπης, Δ. (2000). *Διδακτική Βασικών Μαθηματικών Εννοιών,.* Μεταίχμιο, επιστήμες, Αθήνα.

Χασάπης, Δ., (2005). Κοινωνικές & Πολιτισμικές διαστάσεις της Μαθηματικής Εκπαίδευσης. *4ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, Α.Π.Θ./ Π.Τ.Δ.Ε.-Διδασκαλείο «Δημήτρης Γληνός», 19 & 20 Μαρτίου, Θεσσαλονίκη.

ΠΑΙΖΟΝΤΑΣ ΜΕ ΤΗ ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ : ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΖΥΓΟΥΣ ΤΗΣ MARIE CURIE … ΣΤΙΣ ΤΡΑΜΠΑΛΕΣ ΤΗΣ ΠΕΡΑΙΑΣ

Στέλιος Παπακωνσταντίνου

Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση
Μεταπτυχιακό Δίπλωμα ΑΠΘ/ΠΤΔΕ στη Διδακτική των Μαθηματικών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εισήγηση φιλοδοξεί να οργανώσει ένα ταξίδι στο χώρο και το χρόνο. Από τα εργαστήρια πειραματικής φυσικής και μαθηματικών του École de Physique στο Παρίσι ως τις σχολικές αυλές της Περαίας. Τη διετία 1907-1908, η Μαρί Κιουρί πείθει μια ομάδα φίλων για την οργάνωση πειραματικών διδασκαλιών. Κάθε γονέας οφείλει να αναλάβει τη διδασκαλία ενός επιστημονικού θέματος με ακροατήριο (ή μάλλον συμμετέχοντες) τα ίδια τους τα παιδιά. Νομπελίστες και μέλη της Ακαδημίας των Επιστημών διδάσκουν χημεία, μαθηματικά, λογοτεχνία, ιστορία, γλώσσες, φυσικές επιστήμες … Οι Πέμπτες ανήκουν στη Μαρί Κιουρί και στις στοιχειώδεις έννοιες της φυσικής. Η Κιουρί παρουσιάζει τη ζυγαριά, εισάγει ορολογία, ευνοεί τους πρώτους αδέξιους παιδικούς χειρισμούς, ζυγαριές λύνονται και συναρμολογούνται και αβίαστα οδηγείται στη λειτουργία του οργάνου. Η γνώση δεν επιβάλλεται παρά ανακαλύπτεται. Τα ερωτήματα προκαλούνται, οι χειρισμοί επιβάλλονται, η σκέψη δεν ενοχλεί … Τα παιδιά τοποθετούνται στον πυρήνα μιας έρευνας. Η ιστορία είναι συναρπαστική και προκαλεί διδακτική εκμετάλλευση από τους επαγγελματίες της εκπαίδευσης. Στο εγχείρημα της αυγής του 20ου αιώνα προστίθεται ένα λιθαράκι : μαθητές και μαθήτριες της Α' Δημοτικού καβαλούν τις διαθέσιμες τραμπάλες στην αυλή του σχολείου. Όμως, οι τραμπάλες της παιδικότητας αφηγούνται πλέον μια ιστορία για φάλαγγες, βραχίονες, υπομόχλια, ακμές και δίσκους. Ήδη, τα πρώτα διδακτικά ερωτήματα κάνουν την εμφάνισή τους. Πώς προχωράς σήμερα ; Από το ζυγό στην τραμπάλα ή αντίστροφα; Η όποια απόφαση φανερώνει διαμετρικά αντίθετες επιστημολογικές πεποιθήσεις και διδακτικές στάσεις.

1907, ECOLE DE PHYSIQUE - ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΜΙΑ ΖΥΓΑΡΙΑ

Η παρούσα εισήγηση φιλοδοξεί να οργανώσει ένα ταξίδι στο χώρο και το χρόνο. Από τα εργαστήρια πειραματικής φυσικής και μαθηματικών του Παρισιού ως τις σχολικές αυλές της Περαίας, ενός προαστίου πλέον της Θεσσαλονίκης. Η ιστορία περιλαμβάνει κορυφαίους ερευνητές, δεκάχρονα αγόρια και κορίτσια, τη δύναμη του τυχαίου … μια αποθήκη, ζυγούς και τραμπάλες ! Κι όλα αυτά μεταξύ 1907-2010.

Τη διετία 1907-1908, η Curie πείθει μια ομάδα φίλων (στο σύνολό τους διακεκριμένοι επιστήμονες) για την οργάνωση πειραματικών διδασκαλιών. Κάθε γονέας οφείλει να αναλάβει τη διδασκαλία ενός επιστημονικού θέματος με ακροατήριο (ή μάλλον συμμετέχοντες) τα ίδια τους τα παιδιά. Κάθε μέρα κι ένα μάθημα. Εν μέσω σχολίων διακωμώδησης από τις εφημερίδες, διδάσκονται από νομπελίστες και μέλη της ακαδημίας των επιστημών, χημεία, μαθηματικά, λογοτεχνία, ιστορία, γλώσσες, φυσικές επιστήμες, πηλοπλαστική, ζωγραφική! Οι Πέμπτες ανήκουν στη Marie Curie και στους τοίχους της École de Physique αντηχούν, ως γεγονός ανεπανάληπτο, οι στοιχειώδεις έννοιες της Φυσικής.

Το ‘σχολείο’ ονομάστηκε ‘συνεταιρισμός’ και η δεκατριάχρονη Isabelle Chavannes δεν αρκείται στην εκτέλεση πειραμάτων. Κρατά σημειώσεις από δέκα μαθήματα της Curie. Χρόνια αργότερα, ο ανεψιός της, Rémi Langevin (καθηγητής Μαθηματικών σε γαλλικό πανεπιστήμιο), αναλαμβάνει να κάψει κάθε άχρηστο αντικείμενο σε μια οικογενειακή αποθήκη. Διακρίνει το μαύρο ντοσιέ ανάμεσα σε πλήθος χαρτιών. Η ιστορία δημοσιοποιείται και μαζί της μια σειρά από σημαντικές ερευνητικές και διδακτικές αλήθειες. Αλήθειες πάντα επίκαιρες μα δυστυχώς ακόμα ανεκπλήρωτες.

Οι σημειώσεις της Chavannes[1] μεταφράζονται στα ελληνικά και εκδίδονται ως *‘Μαθήματα φυσικής για τα παιδιά των φίλων μου’*. Το τέταρτο κεφάλαιο έχει τον τίτλο :

‘Τέταρτο μάθημα … όπου μαθαίνουμε να ζυγίζουμε’

Η Curie ξεκινά παρουσιάζοντας τη ζυγαριά και τα μέρη της. Νέες λέξεις φανερώνονται : φάλαγγα, βραχίονες, υπομόχλιο ή ακμή, δίσκοι.

Προτρέπει τα παιδιά να αγγίξουν το μυτερό άκρο της ακμής. Ακολουθεί η παρουσίαση της συνδεσμολογίας και του ρόλου κάθε εξαρτήματος.

[1] Το βιβλίο περιλαμβάνει τις σημειώσεις της μαθήτριας, ωστόσο τόσο η ελληνική έκδοση όσο και το γαλλικό πρωτότυπο, εστιάζουν στο όνομα της διάσημης ‘δασκάλας’.

Η φάλαγγα στηρίζεται στη βάση με τη βοήθεια του υπομοχλίου (…) Το υπομόχλιο χρησιμεύει για να στηρίζει τη φάλαγγα ώστε να μπορεί να ταλαυτεύεται (…) Στην άκρη του κάθε βραχίονα της φάλαγγας κρέμονται δίσκοι (…) Η ακίδα χρησιμεύει για να μας δείχνει τη θέση της φάλαγγας (…) (Marie Curie, 2007: 73)

Εμφανίζονται άλλοι τύποι ζυγαριών (απλή ζυγαριά κουζίνας, ζυγαριά ακριβείας με φρένα ακινητοποίησης των δίσκων). Τα μικρότερα παιδιά λύνουν ζυγαριές απλές όπως της κουζίνας, τα μεγαλύτερα λύνουν ζυγαριές με τρία υπομόχλια.

Πριν την εκτέλεση των πειραμάτων, τα παιδιά μαθαίνουν ότι η ισορροπία εξασφαλίζεται όταν στους δίσκους τοποθετηθούν ίσα βάρη και πως κάθε βάρος πρέπει να τοποθετείτε με τρόπο που να μετακινεί τα υπομόχλια κατακόρυφα.

Ταυτόχρονα ανατίθενται ρόλοι (υπεύθυνοι για τα κομμάτια ή τα ρινίσματα χαλκού, παιδιά που θα εκτελέσουν κάποια ζύγιση …).

Παρατηρούν την κλήση της ζυγαριάς. Προσπαθούν να την ισορροπήσουν χρησιμοποιώντας αρχικά βαρίδια.

Νέα προβλήματα προκύπτουν : για να ζυγιστούν τα ρινίσματα χωρίς να διασκορπιστούν είναι αναγκαία η χρήση και η εξοικείωση με τις έννοιες του καθαρού βάρους, του απόβαρου και του μεικτού βάρους. Τα Μαθηματικά προσφέρουν τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης για τον έλεγχο των μετρήσεων ακριβείας που προηγήθηκαν.

Επισημαίνεται ότι το βασικό τμήμα της ζυγαριάς είναι η φάλαγγα. Αποτελεί πρόκληση η μετατόπιση ενός βραχίονα της φάλαγγας πιο κοντά στο υπομόχλιο. Η άρση της ισορροπίας είναι ολοφάνερη και προκαλεί δυνατές λύσεις. Να επιστρέψει ο βραχίονας στη θέση του ; Να τοποθετηθεί ένα βαρίδιο στην άλλη μεριά ; Και τι είδους βαρίδιο ; Ίσης μάζας ή τα καταφέρνουν καλύτερα τα μικρότερα βαρίδια ;

Η Curie ξεσκονίζει τη μνήμη των μικρών ερευνητών. Μέσω της οικείας τραμπάλας θεμελιώνουν τη νέα γνώση. Παιδιά άνισης μάζας μπορούν να ισορροπήσουν στην τραμπάλα αρκεί ο βαρύτερος να βρίσκεται πιο κοντά στο μέσο της. Η εμπειρία της παιδικότητας γίνεται γνώση και επιστήμη μαζί. Τα μαθηματικά και οι ζυγίσεις ορίζουν πλέον με ακρίβεια :

"Όταν μια φάλαγγα με άνισους βραχίονες βρίσκεται σε ισορροπία, στον βραχίονα που είναι δυο φορές μακρύτερος, κρέμεται βάρος δυο φορές μικρότερο.' (Marie Curie, 2007: 79)

2010, 1Ο ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ ΠΕΡΑΙΑΣ - ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΜΙΑ ΤΡΑΜΠΑΛΑ

Παρακαλώ, μη μπαίνετε στον πειρασμό των συγκρίσεων. Το επιβάλει η ασυμμετρία προσώπων και πλοκής. Τη νέα προσπάθεια χαρακτηρίζει ο σεβασμός προς την πρωτοπορία. Διατηρούμε ως δικαίωμα τη διαχρονική ανάγκη της έμπνευσης. Ίσως η προσπάθεια να μην υστερεί, ωστόσο έπεται …

Τι είναι λοιπόν αυτό που μας οδήγησε γύρω από ζυγούς και τραμπάλες. Σίγουρα το συναρπαστικό της ιστορίας. Όμως και κάποια λιθαράκια που στρώθηκαν από τη Marie Curie, επισημάνθηκαν από το συντάκτη του προοιμίου (Yves Quéré) και κρίθηκαν σημαντικά για τους επαγγελματίες της εκπαίδευσης. Το πρωτότυπο της αυγής του 20ου αιώνα αναζήτησε τη συσσώρευση ερωτημάτων, ενθάρρυνε τον πειραματισμό στο θρανίο αποφεύγοντας τον αντίστοιχο της έδρας, έκτισε γέφυρες μεταξύ της υλικότητας των ζυγών και των νοερών πράξεων, μετέτρεψε την κατακόρυφη λειτουργία της επιστήμης σε οριζόντια εμπλέκοντας τα παιδιά στον πυρήνα μιας έρευνας.

Ήδη, ερωτήματα διδακτικής φύσης κάνουν την εμφάνισή τους. Πώς προχωράς σήμερα; Από το ζυγό στην τραμπάλα ή αντίστροφα; Η όποια απόφαση φανερώνει διαμετρικά αντίθετες επιστημολογικές πεποιθήσεις και διδακτικές φιλοσοφίες. Αν αποτελεί στόχο η εξοικείωση των παιδιών με τα μαθηματικά και τη φυσική, η διαδικασία μπορεί να ξεκινήσει από την τάξη. Αντίθετα, αν κύρια ενδιαφέρει η ανάπτυξη των παιδιών με τη βοήθεια της επιστήμης η διαδικασία καταλήγει στην τάξη.

Τα κοινά εργαλεία, όπως οι τραμπάλες, αποτελούν προϊόντα του ανθρώπινου πολιτισμού, συμμετέχουν στην ιστορική εξέλιξη της επιστήμης (ενδεχομένως και αφετηριακά) ενώ ευνοούν την αμφίδρομη σχέση μεταξύ των καθημερινών παιδικών δραστηριοτήτων και των επιστημονικών εννοιών.

Επιπρόσθετα, οι τραμπάλες, όπως θα φανεί στη συνέχεια, δεν υπολείπονται σε διδακτικά εκμεταλλεύσιμους περιορισμούς, είτε σε σχέση με τη βιωμένη πραγματικότητα, είτε σε σχέση με νοητικές διεργασίες που οι φυσικές και μαθηματικές δραστηριότητες αναπτύσσουν.

Επίσης, η επιτυχής οικειοποίηση ενός συστήματος επιστημονικών γνώσεων απαιτεί ένα χρονικά προγενέστερο, αλλά καλά επεξεργασμένο εννοιολογικό πλέγμα. Κατά το Vygotsky, το εννοιολογικό αυτό πλέγμα αναπτύσσεται πάντα στο παρελθόν μέσω της αυθόρμητης παιδικής σκέψης. (Vygotsky, 1993: 311-312)

Τα παραπάνω, αλλά και η πεποίθηση ότι οι μαθητές και οι μαθήτριες της Α' τάξης μπορούν και πρέπει να ελέγξουν όσα η επιστήμη ετοίμασε γι' αυτά,

μας οδήγησε αρχικά στη διαδοχική παρατήρηση και τον έλεγχο κάθε τραμπάλας της βιωμένης πραγματικότητας.

1η στάση : Νηπιαγωγείο

Για πρώτη φορά, ζητείται από τα παιδιά να παρατηρήσουν μια τραμπάλα και να προτείνουν τα σημαντικά τμήματά της. Εκφράζονται απόψεις για το χρώμα, τον τύπο του καθίσματος, τα υλικά κατασκευής.

Όταν ανεβαίνει στην τραμπάλα ένα παιδί, το ίδιο κι όταν τη μοιράζονται τρία παιδιά, παρατηρείται ανισορροπία η οποία αποδίδεται στο πλήθος των βαρών. Όταν ανεβαίνουν δύο ή τέσσερα παιδιά, αποδίδεται η ανισορροπία στη στάση του σώματος.

Οι απόψεις αυτές καταγράφονται, αλλά δεν αντικρούονται.

Ωστόσο, με τις δοκιμές αυτές εγκαταλείπουν τη σημαντικότητα των ποιοτικών χαρακτηριστικών για τη λειτουργία του οργάνου και αναγνωρίζουν πλέον το ρόλο του κεντρικού πύρου. Είναι ένα πρώτο βήμα στην προσδοκώμενη γνωστική αναδόμηση.

2η στάση : Α' Πάρκο

Στην τραμπάλα ανεβαίνουν δύο παιδιά. Η ανισορροπία αποδίδεται στο βάρος τους.

Όταν τα παιδιά γίνονται τρία, η ανισορροπία αποδίδεται στο βάρος των δύο παιδιών που προσθετικά υπερισχύει.

Η όμοια στάση που διατηρεί το σώμα τους οδηγεί τα υπόλοιπα στην υποβάθμιση του ρόλου της στάσης στις καταστάσεις ανισορροπίας. Είναι ένα δεύτερο βήμα γνωστικής αναδόμησης.

3η στάση : Β' Πάρκο

Η τραμπάλα εδώ διαφέρει αφού επιτρέπει τη μετακίνηση της φάλαγγας σε τρεις θέσεις. Τα παιδιά το επισημαίνουν αμέσως καθώς αποτελεί μέρος της ανεπίσημης γνώσης που το παιχνίδι προσφέρει.

Στην κεντρική θέση δημιουργούμε ισορροπίες μεταξύ ισοβαρών παιδιών και ανισορροπίες μεταξύ ανισοβαρών παιδιών.

Φροντίζουμε την ομοιόμορφη στάση των σωμάτων ώστε να μη θέσουμε σε αμφισβήτηση το συμπέρασμα στο οποίο αβίαστα είχαν φτάσει νωρίτερα.

Μετακινούμε τη φάλαγγα ώστε ο αριστερός βραχίονας να μεγαλώσει σε βάρος του δεξιού. Στην τραμπάλα ανεβαίνουν δύο ισοβαρή παιδιά, από αυτά που νωρίτερα είχαν ισορροπήσει. Παρατηρείται ανισορροπία που όλοι αποδίδουν στη μετακίνηση της φάλαγγας.

Στη συνέχεια, και με τη φάλαγγα στην ίδια ακραία θέση, δοκιμάζουμε την τραμπάλα με δύο ανισοβαρή παιδιά. Το βαρύτερο κάθεται στη θέση με το μικρότερο βραχίονα. Αναμέναμε την επικράτησή του, όπως είχε συμβεί νωρίτερα. Ωστόσο, τώρα δημιουργείται μια σχετική ισορροπία.

Ένα παιδί αναλαμβάνει να μετρήσει το μήκος κάθε βραχίονα απουσία κάθε κατάλληλου και επίσημου οργάνου. Προτείνονται διάφοροι τρόποι και τελικά προκρίνεται η χρήση της παλάμης. Η παλάμη αποτελεί τη μονάδα μέτρησης του μήκους και η μαθήτρια βρίσκει ότι ο αριστερός βραχίονας υπερισχύει του δεξιού κατά μία παλάμη (4,5 παλάμες – 5,5 παλάμες). Στην ανισότητα αυτή αποδίδεται η παραπάνω ανισορροπία μεταξύ ισοβαρών παιδιών και η ισορροπία μεταξύ ανισοβαρών παιδιών.

Πλέον, η τραμπάλα έχει δύο νέα σημαντικά λειτουργικά τμήματα, εκτός του πύρου που είχε επισημανθεί στην τραμπάλα του νηπιαγωγείου.

Στο εικονικό εργαστήριο[2]

Τα παιδιά αναγνωρίζουν το ψηφιακό όργανο κυρίως από τα πιατάκια του, αν και επισημαίνουν ότι οι ζυγαριές των υπεραγορών έχουν ένα πιατάκι. Επίσης, δε δυσκολεύονται να αναγνωρίζουν την ομοιότητά του με την τραμπάλα. Γι' αυτό εκ των προτέρων γνωρίζουν ότι η τοποθέτηση βάρους θα καταργήσει την ισορροπία.

Τοποθετείται αριστερά ένα βάρος με την ένδειξη 100. Τα παιδιά δείχνουν μια ροπή προς την αναζήτηση της ισορροπίας. Ζητούν να τοποθετηθεί το βάρος με την ένδειξη 128 αφού η σχέση 100 < 128 δεν τους είναι οικεία. Επίσης, αν και οι προσθετικές τους δεξιότητες είναι ακόμη περιορισμένες, επιλέγουν αρχικά μεγαλύτερα βάρη (64 και 32). Στην συνέχεια διαλέγουν τα μικρότερα (16, 8 και 4). Μετά από κάποιες αποτυχίες που φανερώνονται και εικονικά, ανακαλούν τις διαδικασίες συμπλήρωσης (96, …, 97, 98, 99, 100) που έχουν χρησιμοποιήσει στα σχολικά Μαθηματικά.

[2] Στο σχολείο έγινε προβολή και χρήση εικονικού εργαστηρίου (ζυγαριά) από την ιστοσελίδα users.uom.gr/~delys/SoftSample.htm

Φαίνεται πως η ψηφιακή ζυγαριά ευνοεί τις ποσοτικοποιήσεις και τους νοερούς αριθμητικούς υπολογισμούς μέσω της πρόσθεσηq, αντίθετα με την τραμπάλα που ανακαλούσε συγκρίσεις του τύπου μεγαλύτερο-μικρότερο[3].

Τα παιδιά αιτιολογούν την ανάγκη χρήσης τριών βαρών για την εξισορρόπηση ενός βάρους, με αριθμητικά κριτήρια. Πλέον δε μιλούν για βαρύτερα σώματα, όπως στην τραμπάλα, αλλά για μεγαλύτερους και μικρότερους αριθμούς. Έτσι, παρατηρούν ότι η επιπλέον τοποθέτηση των ελάχιστων βαρών 1 και 2 δεν επιβαρύνει την ανισορροπία (τουλάχιστον οπτικά). Αντίθετα, μια τοποθέτηση του 128 θα μπορούσε να σπάσει την ψηφιακή ζυγαριά !

Η ψηφιακή ζυγαριά μηδενίζεται και τοποθετούνται εννέα δεκάδες στα αριστερά. Για την προσδοκώμενη ισορροπία δοκιμάζονται αθροιστικά το 64 και το 32. Μια νέα ανισορροπία προβάλει και αναζητούνται λύσεις. Αυτή τη φορά προτιμούν τα ελάχιστα βάρη που ελεγχόμενα και σταδιακά θα οδηγήσουν σε ισορροπία. Κατά την τοποθέτηση των βαρών με την ένδειξη 1, αριθμούν όλα μαζί : 1, 2, 3, 4, 5, 6 στοπ !

Η ψηφιακή ζυγαριά μηδενίζεται και πάλι. Στο δεξιό πιατάκι τοποθετείται το 8. Για την ισορροπία δηλώνουν ότι θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν τα 8 από τα 9 βάρη με την ένδειξη της μονάδας. Από τα 9 θα βγάλουμε το 1. Αφαίρεση, κύριε !

Η ψηφιακή ζυγαριά μηδενίζεται για τελευταία φορά. Χρησιμοποιώντας μαθηματικό λόγο ζητώ από τα παιδιά την παραγωγή του αριθμού 35 στο αριστερό πιατάκι. Εκεί κυριαρχούν οι ενδείξεις 10 και 1. Μπορούμε να το πετύχουμε με τρεις δεκάδες (3 Δ) και πέντε μονάδες (5 Μ). Η πρόταση αυτή εκτελείται στην εικονική ζυγαριά και αμέσως δηλώνουν ότι απουσία βάρους με ένδειξη 35 στα δεξιά και δεδομένου ότι το 35 είναι μεγαλύτερο του 32 (35 > 32), κρίνεται αναγκαία η χρήση και πρόσθετων βαρών μικρής αξίας (32, ... 33,34,35), του 2 και του 1.

<u>Στην αίθουσα της τάξης με κατασκευές</u>

Με απλά υλικά κατασκευάζουμε ζυγούς για κάθε θρανίο. Στη διάθεση κάθε ομάδας είναι και τέσσερις συνδετήρες. Τα παιδιά αποδίδουν την επιλογή αυτού του πλήθους των προσφερόμενων συνδετήρων στο άθροισμα (2 + 2), όχι όμως και στη διαφορά (2 – 2). Έτσι θα μπορεί να ισορροπεί η ζυγαριά.

[3] Σύμφωνα με το Luria, κατά τη μετάβαση από το παιχνίδι στην αριθμητική δραστηριότητα, τα παιδιά αναθεωρούν τις σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων κι εδώ είναι σημαντικός ο ρόλος των ενηλίκων.

Οι χειρισμοί ξεκινούν. Δύο συνδετήρες στο ένα πιατάκι και προκαλείται ανισορροπία. Τοποθετούν τους υπόλοιπους στο άλλο πιατάκι και αναμένουν ισορροπία. Πράγματι αυτό συμβαίνει στους περισσότερους ζυγούς. Όχι όμως σε όλους. Στην απλοϊκή κατασκευή εμφανίζεται ένας περιορισμός. Η προηγούμενη ανισορροπία μετατόπισε τη μεταλλική φάλαγγα και η τοποθέτηση ισόποσων συνδετήρων δεν την επαναφέρει. Έχει γλιστρήσει η βέργα, δηλώνουν τα περισσότερα. Είχε συμβεί και στο πάρκο, το θυμάστε κύριε;[4]

Στην αίθουσα της τάξης με ζυγό εργαστηρίου

Παρουσιάζεται στα παιδιά μια ζυγαριά από το εργαστήριο του σχολείου και μια συλλογή σταθμών. Τοποθετείτε ένα σώμα με την ένδειξη 50 και τα παιδιά αναζητούν αθροίσματα κατάλληλα για ισορροπία. Καταγράφουν στον πίνακα ένα από αυτά. Ελέγχουν αν το επιλεγμένο άθροισμα μπορεί να υποστηριχτεί από τα διαθέσιμα σταθμά.

Όμοια εργάζονται και με το άθροισμα 100 = 50 + 20 + 20 + 10.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα συμμετέχοντα πρωτάκια μπήκαν στο τριήμερο πρόγραμμα ανυποψίαστα, δίχως πρότερη εμπειρία σε κάτι ανάλογο. Από την πρώτη στάση διέκριναν το λειτουργικό από το αισθητικό. Στα ποιοτικά χαρακτηριστικά προστέθηκαν και τα ποσοτικά. Το παιχνίδι (ως κατασκευή) έγινε όργανο[5]. Δοκίμασαν τις δυνατότητές του ενώ έλεγξαν ταυτόχρονα και το σώμα τους. Η ανέμελη κίνηση χρειάστηκε να παγώσει όπως τα καρέ του κινηματογράφου. (Vygotsky, 2000: 165-166)

---

[4] Για τον J. L. Paour, ένα βασικό πρόβλημα στο οποίο θα πρέπει να απαντήσει ο οικοδομισμός είναι οι συνθήκες μετάβασης από τα συστήματα δράσης στα συστήματα λειτουργίας. Δηλαδή, με ποιο τρόπο το παιδί με τη δράση του πάνω στα αντικείμενα παράγει αφαιρετικά γενικές εννοιολογικές δομές. Πρόκειται για δράση που υπερβαίνει το περιστασιακό περιεχόμενο του αντικειμένου της δράσης.

[5] Η *αντίληψη πραγματικών αντικειμένων* εισάγεται από το Vygotsky. Τα μικρά παιδιά, από μικρή ηλικία, μεταβαίνουν από την αντίληψη χρωμάτων και σχημάτων στο νόημα του αντικειμένου. Για τους μαθητές και τις μαθήτριες της Α' τάξης του πρωτοβάθμιου σχολείου, η μετάβαση από την κυριαρχία του αντικειμένου πάνω στο νόημα στην κυριαρχία του νοήματος επί του αντικειμένου δεν έχει πλήρως επιτευχθεί. Η όλη διαδικασία περιγράφεται υπό τους όρους της *Ζώνης της Επόμενης Εξέλιξης*.

Στην δεύτερη στάση μιλούν για βάρη. Όταν ισορροπεί η τραμπάλα, μιλούν για ισοβαρή παιδιά, στην ανισορροπία μιλούν για ανισοβαρή παιδιά. Εδώ τα βάρη χαρακτηρίζονται ως μικρότερα ή μεγαλύτερα. Όταν αναβαίνουν τρία παιδιά, η ανισορροπία αιτιολογείται από τον αριθμό των παιδιών (δύο έναντι ενός). Εδώ τα βάρη χαρακτηρίζονται ως λιγότερα ή περισσότερα και έτσι υποβαθμίζεται η έννοια του βάρους από την έννοια του πλήθους. Σταδιακά αδιαφορούν για τη στάση του σώματος.

Στην τρίτη στάση δείχνουν εξοικειωμένα. Υποδεικνύουν αμέσως τη δυνατότητα μετατόπισης της φάλαγγας και το ρόλο αυτής. Όμως η επιμήκυνση του αριστερού βραχίονα έχει συνδεθεί εμπειρικά με την ανισορροπία. Τώρα επιτυγχάνονται και ισορροπίες μεταξύ ανισοβαρών παιδιών. Για πολλοστή φορά αναγκάζονται να εμπλέξουν τα σώματα στις εκδηλώσεις της τραμπάλας. Δεν είναι μόνο τα σώματα ούτε μόνο η τραμπάλα. Είναι και τα δυο. Ποιο σώμα σε ποιο βραχίονα;

Στη μέτρηση του κάθε βραχίονα εκφράζονται αριθμητικά για πρώτη φορά. Ορίζουν μονάδα μέτρησης … στα δικά τους μέτρα, κάτι που αναδεικνύει τη διδακτική αξία των οργανωτικών προβλημάτων.

Το εικονικό εργαστήριο προσφέρει ένα νέο μνημονικό κρίκο, τη ζυγαριά των καταναλωτικών τους εμπειριών. Όμως, κύρια εισάγει τους νοερούς αριθμητικούς συλλογισμούς στις ισορροπίες. Το μεγαλύτερο-μικρότερο ή περισσότερο-λιγότερο της τραμπάλας γίνεται αριθμός. Η υλικότητα των χειρισμών οπισθοχωρεί.

Στο νέο περιβάλλον αποκτούν μια ποιοτική σχέση με τους αριθμούς. Οι μεγαλύτεροι είναι κατάλληλοι για να προσεγγίσεις μια ισότητα ενώ οι μικρότεροι για αποφύγεις νέες ανισότητες. Αυτό εφαρμόζεται στην τάξη και αποτελεί σημαντική δεξιότητα στη νοερή εύρεση της διαφοράς, αφού αρχικά εκμεταλλεύονται τις δεκάδες και αργότερα τις μονάδες.

Για το Vygotsky, οι έννοιες διακρίνονται σε καθημερινές (mundane) και ακαδημαϊκές (academic). Οι ακαδημαϊκές διαμορφώνονται στα πλαίσια της οργανωμένης σχολικής διδασκαλίας και διακρίνονται από τις αυθόρμητες έννοιες που το παιδί φέρνει μαζί του. Η διάκριση αυτή αιτιολογείται από τη διαφορετική σχέση που έχουν αυτές οι έννοιες με την εμπειρία του παιδιού, από τις διαφορετικές σχέσεις του παιδιού με το αντικείμενο και από το διαφορετικό δρόμο που ακολουθούν μέχρι τη στιγμή της τελικής διαμόρφωσής τους. Γενικά, η ισχύς του ενός τύπου υποδηλώνει την αδυναμία του άλλου τύπου των εννοιών. Π.χ. αφετηρία της εξέλιξης της έννοιας ισορροπίας δεν αποτελεί η ακαδημαϊκή διατύπωση που το σχολείο για πρώτη φορά εμφανίζει στο παιδί. Η έννοια αυτή, αλλά και κάθε παρόμοια, είναι πλήρης από προσωπικές εμπειρίες κι έχει διανύσει το πιο

σημαντικό εξελικτικό τμήμα της πραγματικής-εμπειρικής του διάστασης. Γενικεύοντας, θα λέγαμε ότι κάθε διαδικασία προσέγγισης μιας νέα σημασίας ή ορολογίας που εμπεριέχει επιστημονικές έννοιες, αποτελεί την αφετηρία της εξέλιξης της επιστημονικής έννοιας κι ένα στάδιο της εξέλιξης της καθημερινής έννοιας που οικειοποιείται το παιδί.

Το ταξίδι στο χρόνο επιχείρησε να χτίσει γέφυρες με την εκπαίδευση των αρχών του 20ου. Κρίνοντας εκ των υστέρων, φαίνεται ότι κάτι τέτοιο δεν ήταν δυνατό. Οι διδασκαλίες της Κιουρί εκτελέστηκαν σε ένα πλαίσιο παράλληλο με το επίσημο εκπαιδευτικό σύστημα της Γαλλίας. Και ως παράλληλο, δεν εφάπτονταν σε κανένα του σημείο μ' αυτό. Έτσι, η περιπέτεια των συλλογικών διδασκαλιών ολοκληρώθηκε όταν το απαίτησαν οι επαγγελματικές υποχρεώσεις των γονιών και οι απολυτήριες εξετάσεις του επίσημου σχολικού προγράμματος. Αντίθετα, εμείς δράσαμε εντός των όρων που το σύστημα εκπαίδευσης θέτει, όπως η τήρηση του ωρολογίου προγράμματος. Διδακτικά όμως, το ελληνικό σχολείο, διατηρεί έναν ιδιαίτερα χαλαρό έλεγχο.

Η επιλογή της μετατόπισης του κέντρου βάρους από την τάξη στις αυλές και τα πάρκα αποδείχτηκε κρίσιμη. Η περιγραφή της σταδιακής και αβίαστης τροποποίησης της συμπεριφοράς των παιδιών από γνωστική άποψη, με την κατάρρευση προ-γνωστικών και γι' αυτό ανθεκτικών απόψεων, ξεπέρασε κάθε προσδοκία[6]. Επίσης, η πειραματική ανάλυση έδειξε ότι οι μαθητές και οι μαθήτριες ανέπτυξαν διαφοροποιημένους συλλογισμούς κατά την επαφή τους με αυθόρμητες και μη αυθόρμητες έννοιες. Όπως ο Vygotsky παρατήρησε, '*… συμπεριφέρονται διαφορετικά σε παρόμοιες πράξεις, που απαιτούν ταυτόσημες ενέργειες …*'. (Vygotsky, 1993: 228)

Το πλάνο εκτέλεσης δοκιμών στις τραμπάλες, στην εικονική ζυγαριά και στις μαθητικές κατασκευές διευρύνθηκε στην πορεία. Κανείς από τους συμμετέχοντες δεν ήθελε να το εγκαταλείψει. Τελικά, όσο οι ζυγοί από

[6] Με φαινομενολογικούς όρους, η διδακτική προσέγγιση επιχείρησε να οδηγήσει τόσο την αισθητική αντίληψη όσο και τη μάθηση και την έρευνα στην επιστήμη, καθιερώνοντας *μια εσωτερική, διαλεκτική σχέση μεταξύ της προσωπικής, υποκειμενικής πτυχής, και της επίσημης, αντικειμενικής πτυχής.* (Dalin, 2001: 468)

πλαστελίνη, κλωστές και μολυβάκια θα διατηρούνται στα ράφια της τάξης, όσο οι τραμπάλες θα στέκουν όρθιες, σε πείσμα των καιρών και των δημάρχων που τις αμελούν κι όσο τα παιδιά θα βιώνουν τα προνόμια της ισορροπίας και της ανισορροπίας … μπορούμε να είμαστε αισιόδοξοι !

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Curie, Marie (2007): Μαθήματα Φυσικής για τα Παιδιά των Φίλων μου. Αθήνα: Αλεξάνδρεια.

Dahlin, Bo (2001), The Primacy of Cognition – or of Perception? A Phenomenological Critique of the Theoretical Bases of Science Education, *Science & Education*, 10, 453-475.

Luria, A., R., (1992): Γνωστική Ανάπτυξη. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Paour, J., L., (1994): «Ο Πιαζετικός Οικοδομισμός και η Έννοια της Διαμεσολαβημένης Μαθησιακής Εμπειρίας». Στο Γιάννης Παπαμιχαήλ (επιμ.), Κοινωνιο-γνωστική Προσέγγιση και Διδακτικές Διαδικασίες της Μάθησης των Φυσικών και Λογικο-μαθηματικών Εννοιών στο Σχολείο Αθήνα: Gutenberg, σελ. 80-103.

Vygotsky, Lev (1993): Σκέψη και Γλώσσα. Αθήνα: Γνώση.

Vygotsky, Lev (2000): Νους στην Κοινωνία. Αθήνα: Gutenberg.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΔΥΟ ΔΑΣΚΑΛΩΝ ΣΕ ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Ιωάννης Θ. Λαζαρίδης
Σχ. Σύμβουλος Π.Ε.
Υποψήφιος Διδάκτορας

Τριαντάφυλλος Α. Τριανταφυλλίδης
Αναπληρωτής Καθηγητής
Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στα πλαίσια διδακτορικής έρευνας επιχειρείται η εθνογραφική παρατήρηση δασκάλων που εφαρμόζουν στη σχολική τους πράξη διαθεματικές δραστηριότητες με βάση τα Μαθηματικά. Σκοπός είναι η διερεύνηση στο νέο μαθησιακό πλαίσιο, πιθανών αλλαγών στην παραδοσιακή, διδακτική συμπεριφορά των δασκάλων. Η μεθοδολογική προσέγγιση που ακολουθείται είναι η μελέτη περιπτώσεων. Με καθημερινή παρατήρηση στην τάξη συλλέγονται εμπειρικά δεδομένα και ακολουθεί η περιγραφή τους. Στη συνέχεια η ανάλυση και κατηγοριοποίησή τους οδηγεί στην εξαγωγή συμπερασμάτων και στην ανάδυση ερωτημάτων. Στην παρούσα εισήγηση παρουσιάζονται αποσπάσματα από δύο μελέτες περιπτώσεων όπου δύο διαφορετικές τάξεις εφάρμοσαν διαθεματικές δραστηριότητες με βάση τα Μαθηματικά και στοιχεία Φυσικής, στις διδακτικές ώρες της Ευέλικτης Ζώνης.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Πρόσφατα άρχισε η εφαρμογή της Διαθεματικής Προσέγγισης και στη χώρα μας μέσ' απ' τη θεσμοθέτησή της με το πρόγραμμα της Ευέλικτης Ζώνης και το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.). Οι Dorfler & McLone (1986) αναφέρουν (μτφ. από τον γράφοντα): «Τα τελευταία χρόνια με την ανάπτυξη της τεχνολογίας, η αλληλεπίδραση των Μαθηματικών με τα άλλα επιστημονικά πεδία, διευρύνθηκε τόσο ποσοτικά, όσο και ποιοτικά. Τα Μαθηματικά μπορούμε να τα δούμε στο κέντρο ενός πολυσύνθετου δικτύου που τα συνδέει με τα άλλα μαθήματα. Αυτές οι συνδέσεις είναι αμφίδρομες. Τα άλλα μαθήματα είναι αμφότερα και πηγές για μαθηματικές ιδέες και πεδία εφαρμογής. Η διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών με κατανόηση, δεν μπορεί να επιτευχθεί σε απομόνωση, αν πράγματι αντιλαμβανόμαστε τα Μαθηματικά ως μια ανθρώπινη δραστηριότητα που στοχεύει στην κατανόηση "της πραγματικότητας" και στη λύση προβλημάτων μέσα σ' αυτήν». Ο Whitehead (1948) πρότεινε ότι η μόνη λύση για βελτίωση του εκπαιδευτικού γίγνεσθαι, είναι «η κατάργηση της επιζήμιας αποσύνδεσης των γνωστικών πεδίων, που σκοτώνει τη ζωντάνια ενός σύγχρονου curriculum». Το ζητούμενο παραμένει και τα Μαθηματικά μπορούν να αναδείξουν την ενοποιητική τους δύναμη στον τομέα Διαθεματικότητα. Το Εθνικό Συμβούλιο Δασκάλων των Μαθηματικών στις Η.Π.Α. (N.C.T.M.) στις Αρχές και τα Κριτήρια για τα Σχολικά Μαθηματικά (2000), περιλαμβάνει το κριτήριο: "Connections" όπου αναφέρει: «Τα Π.Σ. απ' το Νηπιαγωγείο μέχρι τη 12η τάξη οφείλουν να καθιστούν τους μαθητές ικανούς να αναγνωρίζουν και να εφαρμόζουν Μαθηματικά σε πλαίσια έξω απ' τα Μαθηματικά» και «Τα σχολικά Μαθηματικά πρέπει να συμπεριλαμβάνουν ευκαιρίες για μαθηματική μάθηση μέσ' από δραστηριότητες αναδυόμενες έξω απ' τα Μαθηματικά. Οι συνδέσεις μπορούν να γίνονται είτε με άλλα γνωστικά πεδία και μαθήματα είτε με την καθημερινή ζωή των μαθητών. Είναι απαραίτητη η δυνατότητα για βιωματική μάθηση των Μαθηματικών σ' ένα πλαίσιο».

Η διαθεματικότητα συνδέεται στενά με τη μέθοδο project. Η απαρχή της μεθόδου βρίσκεται στο φιλοσοφικό ρεύμα του Πραγματισμού και στο κίνημα «προοδευτικής αγωγής» με κύριο εκπρόσωπο τον Dewey (1916). Η μέθοδος project διαδόθηκε από τον Dewey κι από το μαθητή του Kilpatrick (1925), ο οποίος την όρισε ως μια δράση που είναι σκόπιμη και γίνεται με ενθουσιασμό. Έχει πολλές δυνατότητες τις οποίες όπως σημειώνει ο Frey (1986) τις ανακαλύπτει κανείς κατά τη διάρκεια της βίωσης - εξέλιξης ενός project. Εμπεριέχει τη διαθεματικότητα, «ανοικτές» μαθησιακές καταστάσεις, την ομαδοσυνεργατική και βιωματική μάθηση σε αυθεντικά πλαίσια καθημερινής ζωής και το άνοιγμα του σχολείου στην κοινωνία.

Σχετικές πηγές της διεθνούς βιβλιογραφίας αναφέρουν διαθεματικές δραστηριότητες σύνδεσης των μαθηματικών με τη φυσική (Friend, 1984), (Briers, 1986), (Berlin & White, 1992), (Westerberg & Whiting, 1992). Η διεθνής έρευνα σχετικά με τη διαθεματικότητα εστιάζεται γύρω από τρεις κύριες κι ως ένα βαθμό αλληλοκαλυπτόμενες κατηγορίες. Σύμφωνα με τη Lake (1994), στην 1η κατηγορία ανήκει το μεγαλύτερο μέρος των μελετών και αφορά περιγραφές διαθεματικών ενοτήτων ή άλλων τύπων ενοποιημένων προγραμμάτων. Στη 2η κατηγορία ανήκουν οι μελέτες οι οποίες αναφέρονται σε όλες τις εκπαιδευτικές βαθμίδες από το δημοτικό σχολείο μέχρι το γυμνάσιο και περιγράφουν την επίδραση της διαθεματικότητας στη μαθητική επιτυχία και συμπεριφορά. Σε αυτές τις μελέτες διερευνώνται επίσης οι συμπεριφορές κι αντιλήψεις των δασκάλων. Η 3η κατηγορία εστιάζει στην οργάνωση μιας διαθεματικής διδασκαλίας - ενιαιοποιημένου προγράμματος.

Οι λίγες διεθνείς έρευνες που σχετίζονται με την επίδραση ενός διαθεματικού προγράμματος στις στάσεις των δασκάλων και των μαθητών αναφέρουν θετικά αποτελέσματα (Edgerton, 1990; MacIver, 1990; Greene, 1991; Boaler, 1998). Από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση διαπιστώσαμε ότι υπάρχει διεθνώς ένα μικρό σώμα ερευνών οι οποίες σχετίζονται με την επίδραση ενός διαθεματικού προγράμματος στις στάσεις των δασκάλων. Το κενό αυτό λοιπόν στην ερευνητική βιβλιογραφία ήταν ένας από τους λόγους που μας οδήγησαν στην επιλογή και στο σχεδιασμό του δικού μας ερευνητικού εγχειρήματος.

Στα πλαίσια διδακτορικής έρευνας επιχειρήσαμε εθνογραφική παρατήρηση δασκάλων που εφάρμοσαν στη σχολική τους πράξη διαθεματικές δραστηριότητες με βάση τα Μαθηματικά. Σκοπός είναι η διερεύνηση στο νέο μαθησιακό πλαίσιο, πιθανών αλλαγών στην παραδοσιακή, διδακτική συμπεριφορά των δασκάλων. Η μεθοδολογική προσέγγιση που ακολουθείται είναι η μελέτη περιπτώσεων. Με καθημερινή παρατήρηση στην τάξη συλλέγονται εμπειρικά δεδομένα και ακολουθεί η περιγραφή τους. Στη συνέχεια η ανάλυση και κατηγοριοποίησή τους οδηγεί στην εξαγωγή συμπερασμάτων και στην ανάδυση ερωτημάτων. Στο τρέχον άρθρο παρουσιάζονται αποσπάσματα από δύο μελέτες περιπτώσεων όπου δύο διαφορετικές τάξεις εφάρμοσαν διαθεματικές δραστηριότητες με βάση τα Μαθηματικά και στοιχεία Φυσικής, στις διδακτικές ώρες της Ευέλικτης Ζώνης (Ε.Ζ.).

2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η μεθοδολογία της έρευνάς μας είναι καθαρά ποιοτική. Η μεθοδολογική προσέγγιση είναι η μελέτη περιπτώσεων, όπου ως περιπτώσεις εκλαμβάνονται οι σχολικές τάξεις που ενεπλάκησαν στην υλοποίηση αντίστοιχων project.

Επομένως η μεθοδολογική προσέγγιση βασίζεται στη συμμετοχική παρατήρηση και στην επακόλουθη καταγραφή, κωδικοποίηση και ανάλυση των δεδομένων παρατήρησης. Έχοντας μια πειραματική διάσταση, δανείζεται μεθοδολογικά στοιχεία από την εθνογραφική έρευνα (Heath, 1982; Anderson, 1989) και την έρευνα δράσης (Altrichter, Posch, Somekh, 2001). Δανείζεται στοιχεία από την εθνογραφική έρευνα όσον αφορά την περιγραφή, την ανάλυση και τη διαδικασία της κωδικοποίησης των ποιοτικών δεδομένων σε θεματικές κατηγορίες. Επίσης παρ' όλες τις αποκλίσεις της, η έρευνά μας διατηρεί πολλά από τα χαρακτηριστικά της έρευνας δράσης. Στις μελέτες περίπτωσης, οι εκπαιδευτικοί σταδιακά, συμμετείχαν ενεργά στη συνδιαμόρφωση του υλικού και στο σχεδιασμό, την αξιολόγηση και την επανατροφοδότηση της διαδικασίας.

Με έρευνα βασισμένη στη συμμετοχική παρατήρηση, χωρίς αρχικές υποθέσεις, προσπαθήσαμε να συναντήσουμε την πολυδιάστατη «πραγματικότητα» μαθητών, μαθητριών και δασκάλων κάποιων συγκεκριμένων τάξεων, για συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα, αναζητώντας ερωτήματα που πιθανώς θα αναδύονταν από τα φαινόμενα και που η μελέτη της σπουδαιότητάς τους θα γινόταν άμεσα επί τόπου. Καθόλη τη διάρκεια της έρευνας αναπτύχθηκε ένας εσωτερικός διάλογος ανάμεσα στον ερευνητή και το υλικό, με στόχο την ενορατικότητα (reflexivity), την εξέταση του θέματος από διάφορες οπτικές γωνίες και το διαρκή έλεγχο της αξιοπιστίας της έρευνας. Κατά την έρευνα ακολουθήσαμε μια κυκλική διαλεκτική διαδικασία. Την επιλογή μιας συγκεκριμένης τάξης, ακολούθησε η διαμόρφωση εθνογραφικών ερωτήσεων, με βάση τις οποίες πραγματοποιήσαμε τη συλλογή, καταγραφή και κωδικοποίηση των εθνογραφικών δεδομένων και τέλος την ανάλυσή τους. Ακολούθησε η εκ νέου διαμόρφωση εθνογραφικών ερωτήσεων και το όλο εγχείρημα ολοκληρώθηκε με τη συγγραφή συμπερασμάτων - προτάσεων.

Εφόσον επεδίωκα την ενασχόληση των τάξεων με συγκεκριμένες διαθεματικές δραστηριότητες βασισμένες στα μαθηματικά, η ενεργός εμπλοκή μου ήταν απαραίτητη σε επίπεδο συμμετέχοντος ως παρατηρητή, ώστε να προσανατολιστεί μαθησιακά η διαδικασία. Εξαιτίας της εμπλοκής μου είχα χρόνο για λίγες σημειώσεις κατά τη γέννηση των φαινομένων, γι' αυτό η καταγραφή δεδομένων βασίστηκε σε σημειώσεις γραφείου, στην ηχογράφηση και στη μνημονική ικανότητα. Ακολουθώντας το παράδειγμα του Willis (1977) επέλεξα να παρουσιάσω πρώτα την περιγραφή της κοινωνικής σκηνής της τάξης και μετά την ανάλυση που απορρέει από την περιγραφή και τη θεωρία που αναδύεται απ' την ανάλυση. Έγινε χρήση στην έρευνα των μεθόδων του τριγωνισμού και της αναλυτικής επαγωγής ως αποδεικτικά εγκυρότητας κι επιστημονικής αξιοπιστίας. Η ανάλυση βασίστηκε σε

αναλυτικές ιδέες και αναλυτικά υπομνήματα (Hammersley & Atkinson, 1983) και μπορεί να χαρακτηριστεί ως πραγματιστική «substantive» (Glaser & Strauss, 1968).

3. ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΤΟΥ ΕΓΧΕΙΡΗΜΑΤΟΣ

Στην πρώτη μελέτη περίπτωσης, ένας δάσκαλος Δ΄ τάξης δημοτικού σχολείου του Καρπενησίου μαζί με τους μαθητές-τριες του επεξεργάστηκαν στην Ευέλικτη Ζώνη (Ε.Ζ.) τη διαθεματική ενότητα: «Διατροφή-Θερμίδες», στη διάρκεια ενός μηνός το σχ. έτος 2003-04.

Μαζί με το δάσκαλο συντάξαμε ένα φυλλάδιο 8 σελίδων με πληροφορίες και φύλλα εργασιών που μοιράσαμε στα παιδιά και χρησίμευσε ως σημείο αναφοράς. Τα παιδιά με την καθοδήγηση του δασκάλου ενεπλάκησαν σε συζήτηση από την οποία αναδύθηκαν διάφορες εκφάνσεις της έννοιας «ενέργεια». Μέσα από το διάλογο προέκυψε ότι δεν χρειάζονται ενέργεια μόνο οι ζωντανοί οργανισμοί, αλλά κι οι μηχανές. Επίσης προέκυψε ότι η ενέργεια εμφανίζεται με διάφορες μορφές και μπορεί να μετατρέπεται από τη μια μορφή στην άλλη. Σχολιάζοντας εικόνα του φυλλαδίου συμπεράναμε ότι όταν αθλούμαστε καταναλώνουμε ενέργεια. Επίσης διαπιστώσαμε ότι όπως τα αυτοκίνητα χρειάζονται βενζίνη για να έχουν ενέργεια και να κινηθούν, έτσι και οι άνθρωποι χρειάζονται τροφή. Αναδύθηκε η ανάγκη ύπαρξης ισορροπίας μεταξύ των θερμίδων που παίρνουμε από τις τροφές και των θερμίδων που καταναλώνουμε με τις σωματικές ασκήσεις. Διαβάσαμε τον «Ορισμό» της θερμίδας, ως μονάδας θερμικής ενέργειας, αλλά κι ως μονάδας ενέργειας που παίρνουμε από τις τροφές.

Κατόπιν σε ένα πίνακα με 2 στήλες, υπήρχαν 100 γραμ. διαφόρων ειδών τροφών κι η αντίστοιχη ενέργεια που δίνουν σε θερμίδες. Η αυθόρμητη σύγκριση από τα παιδιά των τροφών ως προς τις θερμίδες τους, μας έδωσε την ιδέα κατασκευής ραβδογράμματος. Έπειτα εργαστήκαμε σε σχετικό πρόβλημα. Δεδομένου ότι τα παιδιά των 12 ετών χρειάζονται καθημερινά 2.800 θερμίδες, ζητείτο από τους μαθητές «Ποιες τροφές και σε ποια ποσότητα θα επέλεγαν από αυτές που υπάρχουν στον πίνακα, ώστε να καλύψουν τις ανάγκες τους σε ενέργεια για μια ημέρα». Σε επόμενη συνάντηση τα παιδιά συμπλήρωσαν «ημερολόγιο διατροφής και σωματικής άσκησης για 3 ημέρες», χρησιμοποιώντας ένα θερμιδομετρητή τσέπης. Βρήκαν για κάθε ημέρα, τις συνολικές θερμίδες που πήραν από τις τροφές και που έκαψαν με τις σωματικές ασκήσεις και διερεύνησαν αν υπάρχει ισορροπία θερμίδων.

Η τελευταία σελίδα του φυλλαδίου με τίτλο «Πόσες θερμίδες καίμε σε δέκα λεπτά» ήταν ο προοργανωτής κι εισήγαγε σ' ένα ανοικτό Πρόβλημα που

δόθηκε σε ξεχωριστό φύλλο κι εκτελέστηκε συνδυαστικά. Τα παιδιά διερεύνησαν τον πίνακα της τελευταίας σελίδας όπου υπήρχαν διάφορες σωματικές ασκήσεις και οι αντίστοιχες θερμίδες που καίμε σε 10 λεπτά. Έπειτα μοιράσαμε ξεχωριστό φύλλο εργασίας στην κάθε ομάδα, με τίτλο «Χρόνος Σωματικής Άσκησης για να καούν θερμίδες από διάφορες λιχουδιές». Εξηγήσαμε στα παιδιά ότι πρέπει να βρουν σε πόσα λεπτά, θα καούν οι θερμίδες από μια λιχουδιά, κάνοντας μια σωματική άσκηση από αυτές του προηγούμενου πίνακα και τους δώσαμε το εξής παράδειγμα: «Π.χ. από τον πίνακα της τελευταίας σελίδας του φυλλαδίου προκύπτει ότι με 10 λεπτά περπάτημα καίμε 25 θερμίδες. Για να κάψουμε όλες τις 150 θερμίδες που μας δίνουν τα πατατάκια, πόσα λεπτά περπάτημα χρειαζόμαστε;». Τους είπαμε ότι σε κάθε ομάδα μπορούν να επιλέξουν για να ασχοληθούν με όποια λιχουδιά θέλουν. Τα παιδιά στη Δ΄ τάξη δεν είχαν διδαχθεί ακόμη τα κλάσματα, είχαν διδαχθεί τους δεκαδικούς και είχαν μόνο κάποιες στοιχειώδεις γνώσεις κλασμάτων. Άλλοτε κόβοντας χαρτονένιους κυκλικούς δίσκους για να αναπαραστήσουν τα λεπτά και να βρουν τα κλάσματα του ενός λεπτού που χρειάζονταν, άλλοτε επινοώντας διάφορες στρατηγικές, όπως τη διαρκή διχοτόμηση ή διάφορες παραλλαγές της αναγωγής στη μονάδα, τα παιδιά σε κάθε ομάδα ασχολήθηκαν με τους συνδυασμούς «λιχουδιά - σωματική άσκηση» που επέλεξαν κι έμειναν στρατευμένα στο σκοπό τους κατά τη διάρκεια ολόκληρου διώρου, «κάνοντας» μαθηματικά.

Στη δεύτερη μελέτη περίπτωσης, μία δασκάλα Δ΄ τάξης δημοτικού σχολείου του Καρπενησίου μαζί με τους μαθητές-τριες της επεξεργάστηκαν στην Ε.Ζ. το project: «Κυκλοφοριακή Αγωγή», στη διάρκεια 26 διδακτικών ωρών σε 4 μήνες, το σχ. έτος 2005-06.

Σε μία συνάντηση αναλύσαμε την έννοια και τις μονάδες μέτρησης της ταχύτητας, συνδυάζοντας στοιχεία φυσικής και μαθηματικών. Διακρίναμε τις μονάδες μέτρησης για την ταχύτητα των αυτοκινήτων και τις μονάδες για την ταχύτητα των ανθρώπων. Ύστερα θέσαμε ένα αρχικό πρόβλημα στον πίνακα όπου δίνονταν η απόσταση και ο χρόνος και ζητείτο η ταχύτητα ενός αυτοκινήτου. Αφού οι μαθητές υπολόγισαν την ταχύτητα στο τετράδιό τους, τους ζητήσαμε να βρουν τα δύο αντίστροφα προβλήματα που προκύπτουν από το αρχικό και να τα διατυπώσουν προφορικά. Διερευνήσαμε πώς θα υπολογίσουμε το χρόνο και την απόσταση και διατυπώσαμε τις γενικές σχέσεις απόστασης, χρόνου, ταχύτητας. Κατόπιν η δασκάλα μοίρασε φυλλάδια με δικά της σχετικά προβλήματα που περιείχαν αριθμούς συμμιγείς, δεκαδικούς και κλασματικούς. Οι μαθητές σε ζευγάρια έλυσαν τα προβλήματα. Σε άλλη συνάντηση χρονομετρήσαμε στο προαύλιο, την ταχύτητα όλων των παιδιών στα 60 μέτρα, με τη βοήθεια του Γυμναστή. Μετά στην τάξη βρήκαμε την ταχύτητα των παιδιών σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο.

4. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ

Έπειτα από περιγραφή και διεξοδική ανάλυση μαθησιακών επεισοδίων από την πρώτη (1η Μ.Π.) και τη δεύτερη μελέτη περίπτωσης (2η Μ.Π.), εμφανίστηκαν σταδιακά αλλαγές, στη διδακτική στάση των δύο δασκάλων και στο ευρύτερο μαθησιακό πλαίσιο.

Ενθάρρυνση του διαλόγου

Δάσκαλος: Γιατί τρώμε; (Ο Δήμος λέει: «Για να μεγαλώσουμε», η Μάρα: «γιατί πεινάμε»). Τι μας προσφέρει το φαγητό; (Ο Νίκος λέει: «Υγεία», ο Μάνος: «Δύναμη», ο Θάνος: «Ζωή»). Ωραία! Δύναμη, υγεία, ζωή, με άλλα λόγια ενέργεια. Όταν ζούμε, δουλεύουμε αθλούμαστε τι χρειάζεται να καταναλώσουμε;…(Σιωπή). Μήπως πάλι ενέργεια; Σε τι μετράμε την ενέργεια που παίρνουμε με τις τροφές; (Η Βέρα λέει: «Σε κιλά!»). Σε θερμίδες! (Ο Μάριος λέει: «Έχω ακούσει ότι 1 σοκολάτα έχει 500 θερμίδες»). Σημαίνει ότι αν φάω 1 σοκολάτα θα πάρω 500. Ο οργανισμός σας χρειάζεται ημερησίως 2800 θερμ. Αν πάρουμε περισσότερες τι συμβαίνει;

Δήμος: Παχαίνουμε. (Ο δάσκαλος ρωτά: «Αν πάρω λιγότερες;», η Μάρα λέει: «Αδυνατίζω»).

(1η Μ.Π.-Ημέρα 1η) Ο δάσκαλος προσπαθεί με ερωτήσεις να διερευνήσει προϋπάρχουσες γνώσεις των παιδιών γύρω από θέματα διατροφής. Ο Ausubel (1968) είχε υπογραμμίσει τη σημασία της προϋπάρχουσας γνώσης στην απόκτηση της νέας. Παλαιότερα με τη σπειροειδή διάταξη της ύλης (Brunner, 1977) δινόταν βάρος στις τυπικές προϋπάρχουσες γνώσεις. Στην εποχή μας υπό το πρίσμα πορισμάτων της Σύγχρονης Διδακτικής (Cobb & Yackel, 1996) δίνεται εξίσου έμφαση στις άτυπες γνώσεις εκτός σχολείου. Στο project, οι προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών ήταν περισσότερο άτυπες και λιγότερο τυπικές. Ακόμη κι όταν ο δάσκαλος δεν κατορθώνει ώστε τα παιδιά να κατασκευάσουν τη ζητούμενη έννοια, αναδομώντας προηγούμενες απαντήσεις, προσπαθεί να αναδυθεί σταδιακά η νέα έννοια -κλειδί. Αξιοποιεί διδακτικά την άτυπη προϋπάρχουσα γνώση του Μάριου και με τη χρήση κατάλληλων ερωτήσεων επιδιώκει να αναδυθεί η ανάγκη ισορροπίας θερμίδων.

Δάσκαλος: Μάλιστα, διαλέξατε στην ομάδα Δ΄ το παγωτό που δίνει 300 θερμίδες. Σε 10 λεπτά περπάτημα 25 θερμίδες. Μετά λέτε σε 20 λεπτά καίμε 50 θερμίδες κι ανεβαίνοντας έτσι βρήκατε ότι σε 120 λεπτά περπάτημα καίγονται

οι 300 θερμίδες που μας δίνει το παγωτό... Παιδιά, για να δούμε την ομάδα Δ, τι έκανε; Ποιος θα μας τα παρουσιάσει; Ο Δημήτρης. Για πες μας Δημήτρη, τι κάνατε; ... (Ο Δημήτρης παρουσιάζει τη λύση της ομάδας του κι εγώ γράφω στον πίνακα ό,τι λέει. Από τις υπόλοιπες ομάδες έχουν σταματήσει τη δουλειά τους και παρακολουθούν τον τρόπο επίλυσης της ομάδας Δ. Σταδιακά εμπλέκονται ενεργά)...

(1η Μ.Π.-Ημέρα 3η) Ο δάσκαλος ανακεφαλαίωσε κι ο εκπρόσωπος της ομάδας Δ παρουσίασε τη στρατηγική της ομάδας για να τεθεί σε συζήτηση και να παρακινηθούν άλλες ομάδες να την υιοθετήσουν ή να αναπτύξουν δική τους. Η μάθηση είναι πολιτιστική μύηση εδραιωμένων πρακτικών, κατά την κοινωνικοπολιτιστική προσέγγιση (Vygotsky, 1978).

Δάσκαλος: Τελειώστε ό,τι κάνετε και προσέξτε στον πίνακα για να συζητήσουμε όλοι μαζί.

(1η Μ.Π.-Ημέρα 3η) Ο δάσκαλος παρακινεί τα παιδιά να εμπλακούν σε μαθηματικό διάλογο.

Η δασκάλα είπε: «Θέλουμε να σας προτείνουμε να ασχοληθούμε στις ώρες της Ε.Ζ. με θέματα Κυκλοφοριακής Αγωγής… Συμφωνείτε;». Όλοι δέχτηκαν.

(2η Μ.Π.-Ημέρα 1η) Πριν την Ε.Ζ. ο διάλογος δασκάλας - μαθητών είχε μορφή εξέτασης. Πρώτη φορά η δασκάλα δε ρωτά για να εξετάσει, αλλά για να ζητήσει συγκατάθεση.

Δασκάλα: Πώς μπορούμε να περιορίσουμε τη ρύπανση απ' τ' αυτοκίνητα;

Δημήτρης: Με καταλύτες. (Η Έλσα λέει: αν παίρνουμε μέσα μαζικής μεταφοράς).

(2η Μ.Π.-Ημέρα 2η) Η δασκάλα προωθεί τη συζήτηση καλλιεργώντας την κριτική σκέψη.

Αγγελική: Περνάμε γρήγορα απέναντι γιατί μπορεί να μας προλάβει αυτοκίνητο.

Δασκάλα: Ποια είναι η πιο σύντομη διαδρομή απ' αυτές, η κάθετη ή οι πλάγιες;

Νίκος: Η κάθετη νομίζω (Η δασκάλα ρωτά:«Πώς θα σιγουρευτείς») Θα μετρήσω. (Του δίνει χάρακα). Η κάθετη 12 εκ., οι πλάγιες 14 & 13. Η κάθετη είναι πιο σύντομη, είμαι σίγουρος.

(2η Μ.Π.-Ημέρα 3η) Η δασκάλα μέσα από το διάλογο αναδεικνύει την ανάγκη μέτρησης και απόδειξης. Κάνει σαφές ότι οι αισθήσεις μας μπορεί να μας ξεγελάσουν. Γι' αυτό τα παιδιά πρέπει να χρησιμοποιούν μία βασική επιστημονική διαδικασία, τη Μέτρηση. Διαπιστώνουμε διαφοροποίηση στη στάση της δασκάλας. Στην Ε.Ζ. βάζει τα παιδιά να ασχοληθούν με

χειραπτικές διαδικασίες, ενώ αντίθετα πριν την Ε.Ζ., δεν τους ενθάρρυνε για κάτι τέτοιο.

Μείωση του ανταγωνισμού μεταξύ των μαθητών

Δάσκαλος: Σημασία έχει ότι όλοι προσπαθήσατε να πλησιάσετε…

(1η Μ.Π.-Ημέρα 1η) Στο project δεν υπάρχει βαθμολόγηση, με όποιες ανταγωνιστικές προεκτάσεις. Όλοι επαινούνται από το δάσκαλο για τη συμμετοχή και την προσπάθειά τους.

(Ο ένας μαθητής της ομάδας, τραβούσε το φύλλο εργασίας από του άλλο. Δυσκολεύονταν στον ενδοομαδικό προγραμματισμό και την κατανομή ρόλων. Υπήρχε διαμάχη στα 2 αγόρια της ομάδας). (Ο δάσκαλος λέει: «Η α΄ ομάδα δεν τελείωσε ακόμα! Έχουμε πρόβλημα στην ομάδα. Ας το συζητήσουμε όλοι μαζί! Τα 3 παιδιά της ομάδας δεν συνεργάζονται, καθένας θέλει να κάνει μόνος όλη τη δουλειά. Είναι σωστό;». Τα παιδιά απαντούν: «Όχι!»).

Δημήτρης (α΄ ομάδας): Ο Βασίλης, κύριε! (Ο Βασίλης θλιμμένος σκύβει το κεφάλι).

Δάσκαλος: Δε φταίει μόνο ο Βασίλης. Στην ομάδα τι πρέπει να κάνουμε;

Πετρίνα: Όλοι να δουλεύουμε. (Ο Δάσκαλος λέει: «Όλοι να δουλεύουμε εξίσου, όχι μόνο ένας).

(1η Μ.Π.-Ημέρα 2η) Ο δάσκαλος φέρνει προς συζήτηση σε όλη την τάξη, τις δυσκολίες στη συνεργασία μιας ομάδας δίνοντας έμφαση στην επικοινωνία, όπως υποστηρίζει κι η σύγχρονη αντίληψη της Διδακτικής των Μαθηματικών. Έτσι με τη συμμετοχή των μαθητών αναδύονται μαθησιακές νόρμες καλής συνεργασίας κι επικοινωνίας.

Δάσκαλος: Συμφωνείστε αρχικά όλα τα μέλη στην ομάδα, ποια λιχουδιά θέλετε. Διαλέξτε μια λιχουδιά από την πρώτη στήλη. Θέλετε τα πατατάκια, το παγωτό;… Με 10 λεπτά περπάτημα καίμε 25 θερμίδες, για να κάψουμε τις 300 που μας δίνει μια μπάλα παγωτό, πόσα λεπτά περπάτημα χρειαζόμαστε; Για σκεφτείτε έναν τρόπο στην ομάδα σας, συζητείστε για να του βρείτε. Ό,τι κάνετε κι ό,τι τρόπο δοκιμάζετε γράψτε του στο φύλλο εργασίας. Χρειαζόμαστε στο τέλος έναν εκπρόσωπο από κάθε ομάδα που θα μας ανακοινώσει τον τρόπο που σκέφτηκε η ομάδα του. Αυτός ο τελικός τρόπος θα βγει αν συνθέσετε, τις διαφορετικές ιδέες που έχετε…

(1η Μ.Π.-Ημέρα 3η) Ο δάσκαλος ενθαρρύνει τις συλλογικές και συνεργατικές διαδικασίες.

Μάγδα (λέει το πρόβλημα με δικά της λόγια): Ένα αυτοκίνητο ταξίδεψε από Λαμία στην Αθήνα σε 2 ώρες. (Διστάζει). (Η δασκάλα ρωτά: «Θέλει κανείς να βοηθήσει τη Μάγδα;»).

(2η Μ.Π.-Ημέρα 4η) Η δασκάλα ενθαρρύνει το διάλογο και τη συνεργασία.

Ερευνητής: Από το αρχικό πρόβλημα να φτιάξουμε τα δύο αντίστροφα που μπορούμε.

Δασκάλα: Κάτι που κάναμε προχθές στο μάθημα των μαθηματικών. Για να δούμε τι θυμάστε;

(2η Μ.Π.-Ημέρα 4η) Η δασκάλα προσπαθεί να εμπλακούν όσο γίνεται περισσότεροι μαθητές στη διατύπωση του προβλήματος, ώστε να έχουν την ευκαιρία προφορικής έκφρασης – αναστοχασμού των δεδομένων και να συνηθίσουν να συνεργάζονται για τον κοινό σκοπό.

<u>Αντιμετώπιση του λάθους</u>

Δάσκαλος: Με τι ασχοληθήκατε, με τα πατατάκια; Γιατί τα σβήσατε; Για να τα πάρουμε πάλι από την αρχή. Κι οι τρεις να σκέφτεστε και να λέτε. Στα 10 λεπτά πόσες θερμίδες καίμε;

Μάριος: 25. Στα 20 λεπτά 50…Στα 60 λεπτά 150. Το βρήκαμε, στις 150 θέλαμε να φτάσουμε.

(1η Μ.Π.-Ημέρα 3η) Τα παιδιά έκαναν λάθος στα δεδομένα στα οποία εφάρμοσαν σωστή στρατηγική. Ο δάσκαλος αντιδρώντας σωστά, αντί να διορθώσει το λάθος, τα παρακινεί να ξεκινήσουν απ' την αρχή, ώστε φτάνοντας σε γνωστική σύγκρουση να βρουν μόνα το λάθος.

Μάριος: Τι θα κάνουμε κύριε; Αν πάμε στα 40 λεπτά καίμε 160 θερμίδες. Θέλουμε 150.

Δάσκαλος: Για σκεφτείτε το λίγο…

(1η Μ.Π.-Ημέρα 3η) Το παιδί όντας σε αδιέξοδο, ζητά βοήθεια. Ο δάσκαλος αποφεύγοντας να δώσει έτοιμη λύση κοινοποιεί στην ομάδα τον προβληματισμό του μαθητή και παροτρύνει να το σκεφτούν ακόμα. Μετά ο ίδιος που ζήτησε βοήθεια βρήκε μόνος τρόπο να προχωρήσει.

Δασκάλα: Όπως είστε ομάδες… ό,τι συμφωνήσετε γράψτε το. Γράψατε κάτι; Δεν μας νοιάζει αν κάνετε και λάθος. Αυτό που θέλουμε είναι να συζητάτε και να μας λέτε ιδέες.

(2η Μ.Π.-Ημέρα 4η) Έχουμε αλλαγή στάσης της δασκάλας σε σχέση με την αρχική. Τονίζει στα παιδιά ότι δεν θ' αξιολογηθούν αρνητικά τα λάθη τους κι

ότι μεγαλύτερη σημασία έχει η προσπάθεια, η διεξαγωγή συζήτησης κι η εξαγωγή ιδεών, παρά το σωστό αποτέλεσμα.

Έμφαση στην κατανόηση

Αγγελική: Το πρώτο αυτοκίνητο έκανε τα 300 χλμ. σε 3 ώρες. Είχε ταχύτητα 300:3=100.

Δασκάλα: Εκατό τι;… (Η Αγγελική λέει: «Χιλιόμετρα ανά ώρα»).

(2η Μ.Π.-Ημέρα 4η) Η δασκάλα αναδεικνύει την ανάγκη πάγιας αναφοράς των μονάδων μέτρησης, ώστε να αποκτήσουν νόημα οι αφηρημένοι αριθμοί.

Δασκάλα: Θα θέλαμε να ετοιμάσετε ένα παρόμοιο δικό σας πρόβλημα για την άλλη φορά.

(2η Μ.Π.-Ημέρα 4η) Είναι ένα θετικό βήμα αλλαγής στάσης το ότι η δασκάλα ζητά από τους μαθητές, να κατασκευάσουν και να παράγουν ένα δικό τους πρόβλημα.

Ερευνητής: Τα 100 μ. όταν τρέχουν σε τι τα μετράνε; χιλιόμετρα ανά ώρα; (Σιωπή).

Δασκάλα: Σε μικρές αποστάσεις χρησιμοποιούμε ως μονάδα ταχύτητας, μέτρα το δευτερόλεπτο. Θέλετε μια μέρα, στο προαύλιο, να μετρήσει ο Γυμναστής την ταχύτητά σας στα 60 μ.;

(2η Μ.Π.-Ημέρα 4η) Οι μαθητές δε γνωρίζουν με τι μονάδες μετρούμε την ταχύτητα στα 100 μ. Η δασκάλα αναγκάστηκε να δώσει απάντηση. Όμως με δική της πρωτοβουλία πρότεινε τη βιωματική δραστηριότητα μέτρησης της ταχύτητας των μαθητών στο προαύλιο. Η ανάληψη πρωτοβουλιών και η υιοθέτηση βιωματικών μορφών μάθησης είναι δύο πρόσθετα ενδεικτικά στοιχεία αλλαγής στη διδακτική συμπεριφορά της.

Δασκάλα(γράφοντας): Έχουμε για το Δήμο, γνωστά στοιχεία Απόσταση=60 μ. και το χρόνο στον οποίο τα έτρεξε, Χρόνος=12 δευτερόλεπτα. Τι ζητάμε; Ποιο είναι το άγνωστο στοιχείο;

(2η Μ.Π.-Ημέρα 5η) Ενώ πριν τη διαθεματική προσέγγιση η δασκάλα δεν οργάνωνε την επίλυση ενός προβλήματος, εδώ οργανώνει τα δεδομένα του προβλήματος.

Δασκάλα: Θυμάται κανείς όταν ξέρουμε απόσταση και χρόνο, πώς βρίσκουμε την ταχύτητα;

(2η Μ.Π.-Ημέρα 5η) Η δασκάλα ανακαλεί τις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών, ώστε οι μαθητές να βασιστούν σε αυτές για να ξεδιπλώσουν τη στρατηγική επίλυσής τους.

Ανάδυση στρατηγικών

Μάριος (εντελώς αυθόρμητα): Τις πιο πολλές θερμίδες τις παίρνουμε από το βούτυρο.

Δάσκαλος: Πολύ σωστά. Και τις λιγότερες; (Η Μαρία λέει: «Από τη ντομάτα»). (Η αυθόρμητη σύγκριση από τα παιδιά των τροφών ως προς τις θερμίδες, μας έδωσε την ιδέα μιας γραφικής παράστασης - ραβδογράμματος, χωρίς να έχουμε προετοιμαστεί για αυτό με το δάσκαλο).

(1η Μ.Π.-Ημέρα 1η) Αντίθετα από τη συνήθη παραδοσιακή πρακτική, ο δάσκαλος κι εγώ κατορθώσαμε να υπάρχει ευελιξία και συνεχής επανασχεδιασμός της πορείας διδασκαλίας που βασιζόταν στην ανατροφοδότηση από τις αντιδράσεις των μαθητών. Έτσι επετεύχθη, το μάθημα να μην είναι στατικό, αλλά ζωντανό συνεχώς εξελισσόμενο με πλήρη δυναμική.

(Ο Δάσκαλος όσο εγώ είχα εμπλακεί στην εργασία της ομάδας γ΄, εκείνος ταυτόχρονα ασχολείτο με την υποστήριξη της ομάδας α΄ κι έφτασαν στο ίδιο πρόβλημα, που το επεξεργάστηκαν όμως με διαφορετικό τρόπο, με στοιχεία αναγωγής στη μονάδα)…

(1η Μ.Π.-Ημέρα 3η) Αναδείχθηκε μια θέση της Σύγχρονης Αντίληψης Διδακτικής Μαθηματικών. Ένα πρόβλημα λύνεται με πολλούς τρόπους. Είναι μαθησιακά ωφέλιμο, τα παιδιά να μην επιμένουν μόνο στον ένα. Για να συμβεί αυτό σε τάξη εθισμένη να αρκείται στον ένα τρόπο, σημαντικό είναι ο δάσκαλος να παρακινεί σε αναζήτηση πολλών τρόπων.

Δάσκαλος: Αν κόβουμε τα 10 λεπτά συνεχώς σε μικρότερα κομμάτια, ποιο θα είναι το μικρότερο κομμάτι που μπορούμε να φτάσουμε; (Ο Μάριος λέει: «Το 1 λεπτό»). Μάλιστα! Το 1 λεπτό. Ας πάρουμε το προηγούμενο παράδειγμα, πατατάκια με ποδηλασία κι αντί να βρούμε το μισό των 10 λεπτών και μετά το μισό του μισού, να βρούμε το 1 λεπτό. Αφού ξέρουμε ότι στα 10 λεπτά καίμε 40 θερμίδες στο 1 λεπτό πόσες καίμε; Ξέρουμε τα πολλά και ζητάμε το 1…

(1η Μ.Π.-Ημέρα 3η) Ο δάσκαλος αξιοποιεί ανακεφαλαιώνοντας στρατηγική που αναδύθηκε. Πατώντας στη διαρκή διχοτόμηση εκμαιεύει τη στρατηγική αναγωγής στη μονάδα.

Ερευνητής: Βλέπουμε ότι ένας άλλος τρόπος είναι να ψάχνω να βρω πρώτα στο 1 λεπτό πόσες θερμίδες καίμε, στη μία μονάδα και μετά στα πολλά. Βέβαια εδώ σε αυτά τα προβλήματα θα μπορούσαμε αντίστροφα να ψάξουμε να βρούμε τη 1 θερμίδα σε πόσο χρόνο την καίμε...

Δάσκαλος: Το κάναμε για λίγο κι αυτό, στην ομάδα Γ, κόβουτας το λεπτό σε δευτερόλεπτα. Μάρα: Είπαμε 1 λεπτό 4 θερμίδες, 1 θερμίδα σε 15 δευτερόλεπτα.

(1η Μ.Π.-Ημέρα 3η) Ο δάσκαλος κι εγώ προσπαθούμε να αναδείξουμε τις πολλές εφαρμογές αναγωγής στη μονάδα είτε ζητώντας τις θερμίδες σε ένα λεπτό είτε αντίστροφα σε πόσο χρόνο καίμε τη 1 θερμίδα. Ο δάσκαλος κι η Μάρα έδωσαν ένα παράδειγμα αναγωγής όπου η μονάδα είναι η 1 θερμίδα. Έτσι τα παιδιά διαπιστώνουν ότι ακόμη και μια παγιωμένη στρατηγική, όπως η αναγωγή στη μονάδα, μπορεί να χρησιμοποιείται με διάφορες εκφάνσεις.

Δάσκαλος: Πάρα πολλές θερμίδες! Νομίζω Αλέξη ότι δεν έγραψες όλη την αλήθεια. Ίσως υπερέβαλες λίγο. Δεν μπορεί για 6 ώρες σε μια μέρα να έκανες σωματικές ασκήσεις. Αν αφαιρέσουμε τις θερμίδες που έκαψε ο Αλέξανδρος, από τις θερμίδες που πήρε με τις τροφές την ίδια μέρα, θα έχουμε: 3.273-1.810=1.463 θερμίδες. Πολύ λίγες! Υπάρχει ισορροπία;

(1η Μ.Π.-Ημέρα 4η) Η τήρηση του ημερολογίου ενέχει τις επιστημονικές διαδικασίες της Παρατήρησης, της Συλλογής, της Καταγραφής και Ταξινόμησης. Ο δάσκαλος σχολιάζοντας ότι ο Αλέξης υπερέβαλε, προσπαθεί να εθιστούν τα παιδιά στην αρχή της επιστημονικότητας. Με την έννοια ότι όταν κάνουμε μια έρευνα και μια καταγραφή, ακόμη και σε ένα ημερολόγιο διατροφής, πρέπει να υπάρχει ακρίβεια κι εγκυρότητα σε αυτά που γράφουμε.

Νίκος: Η κάθετη 12 εκ. οι πλάγιες 14 & 13. Η κάθετη είναι πιο σύντομη είμαι σίγουρος πια.

(2η Μ.Π.-Ημέρα 3η) Αναδύεται η στρατηγική της αποδεικτικής διαδικασίας μέσω μέτρησης - σύγκρισης, ώστε τα παιδιά να μάθουν να τεκμηριώνουν τα συμπεράσματά τους.

Δασκάλα:… στο προαύλιο να μετρήσει ο Γυμναστής την ταχύτητά σας στα 60 μ.;

(2η Μ.Π.-Ημέρα 4η) Αναδύθηκε βιωματικά η διαδικασία υπολογισμού της ταχύτητας για μικρές αποστάσεις, με δεδομένα την απόσταση και το χρόνο.

Δασκάλα(γράφοντας): Έχουμε για το Δήμο, γνωστά στοιχεία Απόσταση=60 μ., Χρόνος=12 δεύτερα. Τι ζητάμε; Ποιο το άγνωστο στοιχείο; (Η Μάγδα απαντά: «Ζητάμε την ταχύτητα»).

Νίκος: Νομίζω διαιρούμε την απόσταση με το χρόνο. (Η Αλεξάνδρα λέει: «Είναι 60:12=5»).

(2η Μ.Π.-Ημέρα 5η) Υπολογίστηκε η ταχύτητα του Δημήτρη σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο.

Αγγελική: Τη δικιά μου ταχύτητα κυρία, δε θα τη βρούμε;

Δασκάλα: Επειδή δε βγαίνει ακέραιο αποτέλεσμα, είπαμε να μην ασχοληθούμε…Έχει στην έδρα κομπιουτεράκι. Θες να το χρησιμοποιήσεις να βρεις την ταχύτητά σου που δε βγαίνει ακριβώς; (Η Αγγελική λέει: «Ναι, θέλω!»). (Ο ερευνητής λέει: «Απόσταση=60μ. Χρόνος=13 δεύτερα»).

Αγγελική: Βρήκα 4,6153…(Η Δασκάλα λέει: «Αυτός είναι ένας δεκαδικός αριθμός»).

(2η ΜΠ-Ημέρα 5η) Απ' τον κίνδυνο να νιώσουν παιδιά αδικημένα λόγω άνισης μεταχείρισης αναδύθηκε η ανάγκη χρήσης αριθμομηχανής. Η εισαγωγή της χρήσης της βοήθησε να υπολογιστούν ταχύτητες με δεκαδικό πηλίκο και τη δασκάλα να εισάγει τους δεκαδικούς.

Δασκάλα: Άρα βγάζω το λευκό χαρτί κι όπου ταχύτητα βάζουμε 100, όπου απόσταση 200 κι όπου χρόνος 2 κι η σχέση που είχα πριν γίνεται 100=200:2. Στο πρώτο μας πρόβλημα είχαμε κρυμμένο, δεν γνωρίζαμε, το 100, την ταχύτητα □ =200:2. Τώρα μπορούμε να κρύψουμε ένα άλλο από τα υπόλοιπα δύο στοιχεία και να βγει από το πρώτο πρόβλημα, ένα νέο, αντίστροφο πρόβλημα. Κρύβω λοιπόν με το χαρτί το 2 κι έχουμε 100=200: □. Δηλαδή από τα τρία μεγέθη ταχύτητα, απόσταση και χρόνο. Ποια ξέρουμε και ποια ζητάμε;

Αλεξάνδρα: Ξέρουμε την ταχύτητα και την απόσταση και ζητάμε το χρόνο.

Δασκάλα: Ποιος θα μας πει το αντίστροφο πρόβλημα με λόγια;

Μάγδα: Ξέρουμε ότι Λαμία-Αθήνα είναι 200 χλμ. Ένα αυτοκίνητο έτρεχε με ταχύτητα 100 χλμ. την ώρα. Σε πόση ώρα έκανε το ταξίδι Λαμία-Αθήνα;

Δασκάλα: Πολύ ωραία! Τι πράξη θα κάνουμε να λύσουμε το πρόβλημα, να βρούμε το χρόνο;

Αλέξης: Θα κάνω διαίρεση 200:100=2 ώρες. (Η Αλέκα λέει: «Χρόνος=Απόσταση:Ταχύτητα»).

Δασκάλα: Στην 1η σχέση 100=200:2 του αρχικού προβλήματος, ας κρύψουμε τώρα το 200. Έχουμε (σκεπάζει το 200) 100=□:2. Ποιος θα μας πει το 2ο αντίστροφο πρόβλημα με λόγια; Βίκυ: Ένα αυτοκίνητο έτρεχε με ταχύτητα 100 χλμ. την ώρα. Έκανε τη διαδρομή Λαμία-Αθήνα σε 2 ώρες. Πόση είναι η απόσταση Λαμία-Αθήνα; (Η δασκάλα ρωτά τι ξέρουμε και τι ζητάμε).

Αγγελική: Ξέρουμε την ταχύτητα 100 χλμ. την ώρα, ξέρουμε το χρόνο 2 ώρες και ζητάμε την απόσταση. (Η δασκάλα ρωτά τι θα κάνουμε για να βρούμε την απόσταση).

Νίκος: Πολλαπλασιασμό 2·100=200 χλμ. (Η Βίκυ λέει: «Απόσταση=Χρόνος · Ταχύτητα»).

(2η ΜΠ-Ημέρα 4η) Με αφαιρετική διαδικασία κι αποπλαισίωση, μέσα από τη διερεύνηση των αντίστροφων προβλημάτων, η δασκάλα εξάγει επαγωγικά γενικούς μαθηματικούς τύπους, μετασχηματισμούς εξισώσεων, εύρεσης του χρόνου με δεδομένα απόσταση και ταχύτητα και εύρεσης της απόστασης με δεδομένα την ταχύτητα και το χρόνο.

Ανάδειξη πολλών τρόπων λύσης – ποικιλία απαντήσεων

(Από τις τέσσερις ομάδες μόνο η ομάδα γ΄ έφτιαξε πρόβλημα αφαίρεσης. Οι άλλες ομάδες έφτιαξαν προβλήματα πρόσθεσης. Όμως και σε αυτά τα προβλήματα παρουσιάζει ενδιαφέρου ο διαφορετικός τρόπος γλωσσικής πλαισίωσης σε κάθε ομάδα των αριθμητικών δεδομένων).
(1η Μ.Π.-Ημέρα 2η) Στα προβλήματα πρόσθεσης με δεδομένα του πίνακα, παρουσιάζει ενδιαφέρον ο διαφορετικός τρόπος γλωσσικής πλαισίωσης των δεδομένων από κάθε ομάδα.

Δημήτρης: 120 λεπτά… (Ο Μάριος της ομάδας γ΄ λέει: «Δηλαδή 2 ώρες»).

(1η Μ.Π.-Ημέρα 3η) Κάθε μαθητής εκφράζει ελεύθερα το αριθμητικό αποτέλεσμα στις μετρικές μονάδες χρόνου που προτιμά, 120 λεπτά ή 2 ώρες. Είναι πολύ σημαντικό να κατανοήσουν οι μαθητές, ότι στις επιστήμες, δεν υπάρχει πάντα μόνο μια αποδεκτή λύση ούτε ένας τρόπος έκφρασης, αλλά διαλέγουμε το σύστημα αναφοράς που μας ταιριάζει.

(Ο συνδυασμός πατατάκια - ποδηλασία είχε νωρίτερα λυθεί απ’ την ομάδα γ΄. Ξεκινώντας από τη σχέση σε 10 λεπτά καίμε 40 θερμίδες, βρήκαν ανεβαίνοντας ότι σε 30 λεπτά 120 θερμίδες και διχοτομώντας και προσθέτοντας το μισό κατέληξαν ότι σε 37,5 λεπτά 150 θερμίδες. Η ομάδα β΄ υιοθετώντας αναγωγή στη μονάδα, βρήκε ότι αφού στα 10 λεπτά 40 θερμίδες σε 1 λεπτό 40:10=4 θερμίδες κι υπολόγισε ότι σε 8 λεπτά καίμε 8Χ4=32 θερμίδες και συνεχίζοντας από εκεί που είχε φτάσει, πρόσθεσε 8 λεπτά και κατέληξε ότι στα 38 λεπτά καίμε 120+32=152 θερμίδες. Αυτό έγραψε, ικανοποιημένη που είχε πλησιάσει στο 150).

(1η Μ.Π.-Ημέρα 3η) Από την ομάδα β΄ αναδύθηκε διαφορετικός τρόπος συλλογιστικής από την ομάδα γ΄ κι ενισχύθηκε η άποψη ότι υπάρχουν πολλοί τρόποι λύσης σε ένα πρόβλημα. Η ομάδα β΄ δεν έφτασε ακριβώς στο 150 υιοθετώντας υπολογισμό κατά προσέγγιση.

(Η δασκάλα ρωτά: «Ποιος θα το ξαναπεί;» κι η Αγγελική λέει: «Ένα αυτοκίνητο έκανε από Λαμία σε Αθήνα 2 ώρες. Αν ξέρουμε Λαμία-Αθήνα είναι 200 χλμ. με πόση ταχύτητα έτρεχε;»).

(2η Μ.Π.-Ημέρα 4η) Κάθε φορά που κάποιος μαθητής επαναδιατυπώνει ένα μαθηματικό πρόβλημα, η σύνταξη κι οι λέξεις που χρησιμοποιεί είναι διαφορετικές από αυτές που χρησιμοποίησε πριν ο συμμαθητής ή ο

δάσκαλος. Μια επιβεβαίωση της κατασκευαστικής θεωρίας μάθησης ότι οι μαθητές ενεργά και υποκειμενικά κατασκευάζουν τη γνώση τους.

Καθοδήγηση δασκάλου-ας, Αυτονόμηση μαθητών

(Στη συνέχεια υπάρχει ένα πρόβλημα. Με δεδομένο ότι τα παιδιά των 12 ετών χρειάζονται καθημερινά 2.800 θερμίδες, ζητείται «Ποιες τροφές και σε ποια ποσότητα θα επέλεγαν από του πίνακα, ώστε να καλύψουν ανάγκες σε ενέργεια για μια ημέρα». Υπάρχει σκίτσο με 2 παιδιά).

Δάσκαλος: Μπορούμε να απαντήσουμε στο πρόβλημα όπως η Ισμήνη; Μαθηματικά είναι σωστή η απάντησή της, αφού 5 σοκολάτες Χ 529 =2.645 θερμίδες.

Παναγιώτα: Όχι, γιατί χρειάζεται ποικιλία τροφών. Όχι μόνο ένα είδος, σε μεγάλες ποσότητες.

Δάσκαλος: Ωραία! Αρχίστε να εργάζεστε στο πρόβλημα, ώστε με τροφές από του πίνακα σε διάφορες ποσότητες να φτάσετε κοντά στις 2.800 θερμίδες που χρειάζεστε σε μία μέρα...

(1η Μ.Π.-Ημέρα 1η) Ακολουθώντας στρατηγικές - όπως αυτές του Polya (1991, σ.20-21) στη φάση κατανόησης ενός προβλήματος - ο δάσκαλος υπογραμμίζει κατά την εκφώνηση τα σημεία που πρέπει να προσεχτούν. Στη συνέχεια όμως γίνεται πιο καθοδηγητικός. Ευτυχώς το «ανοικτό» πρόβλημα εξισορροπεί την κατάσταση αφήνοντας περιθώρια επιλογών.

(Εργάστηκαν σε 4 ομάδες: 3Χ3 και 1Χ4. Σημαντική εμπειρία ήταν για αυτά ο ενδοομαδικός προγραμματισμός και η κατανομή ρόλων. Ο δάσκαλος κι εγώ δεν αναμειχθήκαμε καθόλου, απλώς τους είπαμε ότι σε κάθε ομάδα καλό είναι: 1) να οριστεί ένας εκπρόσωπος που θα παρουσιάσει στην τάξη στο τέλος συνθετικά, το έργο όλης της ομάδας και 2) όλα τα παιδιά να εργαστούν ισότιμα, π.χ. κάθε παιδί να κατασκευάσει 2-4 ράβδους από το ραβδόγραμμα).

(1η Μ.Π.-Ημέρα 2η) Αφήσαμε χρόνο για ενδοομαδικό προγραμματισμό και κατανομή ρόλων, χωρίς να αναμειχθούμε. Υπενθυμίσαμε καλές πρακτικές της ομαδοσυνεργατικής μάθησης, π.χ. ορισμό εκπροσώπων κι ισότιμο καταμερισμό ευθυνών (Ματσαγγούρας, 2000).

(Κατόπιν ο δάσκαλος παρακίνησε τις ομάδες να διατυπώσουν ένα δικό τους πρόβλημα σε κάθε ομάδα με κάποια από τα στοιχεία της γραφικής παράστασης - πίνακα και να το λύσουν. Από τις τέσσερις, μόνο η ομάδα Γ', αισθάνθηκε την ανάγκη να αξιοποιήσει τις συγκρίσεις που κάναμε στο ραβδόγραμμα και στο πρόβλημα που έφτιαξε, ρωτούσε πόσο περισσότερες θερμίδες έχουν τα 100 γρ. βούτυρο από τα 100 γρ. ντομάτα και απάντησε με αφαίρεση).

(1η Μ.Π.-Ημέρα 2η) Σε αντίθεση με το παλαιό εγχειρίδιο της Δ΄ τάξης στα Μαθηματικά, όλο το μαθησιακό υλικό που κατασκευάσαμε για την ενότητά μας ήταν γεμάτο από μαθησιακές ευκαιρίες δημιουργικής κατασκευής και κριτικής σκέψης, με ελεύθερη επιλογή των παραμέτρων από τα παιδιά. Ο δάσκαλος είχε τη δυνατότητα να εφαρμόσει στην πράξη εξατομικευμένη εργασία με βάση τις ατομικές διαφορές των μαθητών. Την εξατομικευμένη διδασκαλία ανέκαθεν υποστήριζαν επιστήμονες της Αγωγής και στην εποχή μας ενισχύεται περισσότερο από τα επιστημολογικά πορίσματα του Κονστρουκτιβισμού (Von Glasersfeld, 1984) και από τη θεωρία της πολλαπλής νοημοσύνης (Gardner, 1983).

Δάσκαλος: Για να δούμε τώρα για το πατινάζ. Πες εσύ Βασίλη.

Βασίλης: Στα 10 λεπτά πατινάζ 50 θερμίδες, στα 20 λεπτά πατινάζ 100 θερμίδες, στα 30 λεπτά πατινάζ 150 θερμίδες. Ωραία, φτάσαμε στο 150. Αυτό ήταν εύκολο…

(1η Μ.Π.-Ημέρα 3η) Ήταν σωστές οι επιλογές από το δάσκαλο και του απλού προβλήματος πατινάζ-πατατάκια και του συγκεκριμένου μαθητή για να το λύσει μεγαλόφωνα. Η ομάδα Α που είχε συγκριτικά αδύναμη «μαθηματική παρουσία», χρειαζόταν εύκολες προβληματικές καταστάσεις με ακέραια πολλαπλάσια, για να τις λύσει με επιτυχία και να τονωθεί η αυτοπεποίθηση των μελών της, κυρίως του Βασίλη που νωρίτερα αντιμετώπισε δυσκολίες.

Διεύρυνση περιεχομένου και διαδικασιών των σχολικών μαθηματικών

Δάσκαλος: Ας πούμε ότι τα 5 λεπτά, τα παριστάνουμε με αυτά τα 5 κυκλάκια (Ζωγραφίζει πάνω στο θρανίο 5 κυκλικούς δίσκους)…Τα μισά και των πέντε λεπτών;…Τις 10 θα τις καίμε στα μισά λεπτά. Πόσο είναι το μισό του 2,5;… (Σιωπή)…Για σχεδιάστε στο φύλλο σας 2,5 λεπτά με κύκλους. Ας υποθέσουμε ότι ένας κύκλος, είναι ο κύκλος που κάνει ο δείκτης των δευτερολέπτων στο ρολόι, για να μετρήσει ένα λεπτό. Πόσους κύκλους θα χρειαστούμε;…

(1η Μ.Π.-Ημέρα 3η) Ο δάσκαλος προσπαθεί να νοηματοδοτήσει τη σχέση λεπτού - κύκλου, για να διευκολύνει την υιοθέτηση των κύκλων ως μοντέλου αναπαράστασης.

Δάσκαλος: Τι δείχνουν τα μουντζουρωμένα κομμάτια που βρήκατε; Για μαζέψτε τα λίγο! Πόσο είναι τελικά το μισό του 2,5;…(Σιωπή-αμηχανία)…(Τότε παίρνει ένα λευκό φύλλο χαρτί, κόβει τρεις κυκλικούς δίσκους και εκτελεί την προηγούμενη διαδικασία από την αρχή, κόβοντας αυτή τη φορά τα κομμάτια)…(Στη συνέχεια διχοτομώντας-κόβοντας και συνθέτοντας τα κομμάτια, τα παιδιά κατέληξαν ότι το μισό των 2,5 λεπτών είναι 1¼).

(1η Μ.Π.-Ημέρα 3η) Τα παιδιά αν και σχεδιαστικά χώρισαν τους 2,5 κύκλους στα μισά τους, όταν ζητήθηκε να τα συνθέσουν ώστε να εκφράσουν αριθμητικά το μισό του 2,5 έμειναν άπραγοι. Ανατροφοδοτούμενος ο δάσκαλος τροποποίησε την τακτική του χρησιμοποιώντας χειραπτικό υλικό. Όταν αντί για σχέδιο η διαδικασία έγινε με κυκλικούς δίσκους που κόψαμε, τα παιδιά κατάφεραν να συνθέσουν τα κομμάτια. Όσο πιο χειροπιαστό το μοντέλο αναπαράστασης, τόσο πιο οικείο για τα παιδιά, ώστε να εκτελέσουν νοητικές πράξεις - στάδιο συγκεκριμένων ενεργειών, Piaget (1965), Πραξιακό στάδιο, Brunner (1977).

Αγγελική: Περνάμε γρήγορα απέναντι γιατί μπορεί να μας προλάβει αυτοκίνητο.

Δασκάλα: Ποια είναι η πιο σύντομη διαδρομή απ' αυτές, η κάθετη ή οι πλάγιες;

Νίκος: Η κάθετη νομίζω (Η δασκάλα ρωτά:«Πώς θα σιγουρευτείς») Θα μετρήσω. (Του δίνει χάρακα). Η κάθετη 12 εκ., οι πλάγιες 14 & 13. Η κάθετη είναι πιο σύντομη, είμαι σίγουρος.

(2η ΜΠ.-Ημέρα 3η) Η δασκάλα αναδεικνύει την ανάγκη μέτρησης. Στην Ε.Ζ. βάζει τα παιδιά να ασχοληθούν με χειραπτικές διαδικασίες, ενώ πριν δεν τους ενθάρρυνε για κάτι τέτοιο.

Δασκάλα: Πάμε στο προαύλιο να μετρήσει ο Γυμναστής την ταχύτητά σας στα 60 μ.;

(2η Μ.Π.-Ημέρα 4η) Αναδύθηκε βιωματικά η διαδικασία υπολογισμού της ταχύτητας για μικρές αποστάσεις, με δεδομένα την απόσταση και το χρόνο.

Δασκάλα: Θυμάστε που την περασμένη φορά είχαμε πει ότι ενώ για μεγάλες αποστάσεις τις ταχύτητες των αυτοκινήτων τις μετρούμε σε χιλιόμετρα ανά ώρα, σε μικρές αποστάσεις και τις ταχύτητες των ανθρώπων χρησιμοποιούμε για μονάδες ταχύτητας τα μέτρα ανά δευτερόλεπτο;

Αγγελική: Τη δικιά μου ταχύτητα κυρία, δε θα τη βρούμε;

Δασκάλα: Επειδή δε βγαίνει ακέραιο αποτέλεσμα, είπαμε να μην ασχοληθούμε…Έχει στην έδρα κομπιουτεράκι. Θες να το χρησιμοποιήσεις να βρεις την ταχύτητά σου που δε βγαίνει ακριβώς;

(2η ΜΠ-Ημέρα 5η) Απ' τον κίνδυνο να νιώσουν παιδιά αδικημένα λόγω άνισης μεταχείρισης αναδύθηκε η ανάγκη χρήσης αριθμομηχανής.

(2η Μ.Π.-Ημέρα 5η) Η δασκάλα επιμένει στην αποσαφήνιση της διαφοράς των δύο μονάδων ταχύτητας χλμ/ώρα και μ/δευτερόλεπτο και πότε χρησιμοποιείται η καθεμιά, διευρύνοντας το περιεχόμενο των σχολικών μαθηματικών της Δ΄ τάξης.

(Η δασκάλα οδήγησε τα παιδιά στην αίθουσα πληροφορικής, όπου ζωγράφισαν με το πρόγραμμα ζωγραφικής των Windows, αυτοκίνητα, πινακίδες σήμανσης διαφόρων σχημάτων).

(2η Μ.Π.-Ημέρα 6η) Η δασκάλα χρησιμοποιώντας εναλλακτικές μορφές μάθησης στο ανοικτό πλαίσιο των διαθεματικών δραστηριοτήτων, συνδύασε το φυλλάδιο με τις πινακίδες σήμανσης, τη συζήτηση - διδακτική διερεύνηση γεωμετρικών εννοιών και τη χρήση των Η/Υ.

Έμφαση στη «Ρεαλιστική» διάσταση των μαθηματικών πλαισίων

Ερευνητής: Ένας κανόνας που διαβάσαμε λέει: «Όταν δεν υπάρχουν κοντά σου κινούμενα οχήματα, διάσχισε κάθετα το δρόμο». Γιατί μας λέει κάθετα και όχι λοξά, διαγώνια; …

(2η Μ.Π.-Ημέρα 2η) Αναδύθηκε ένα γνήσιο γεωμετρικό πρόβλημα με αφετηρία κι αναφορά σε μια πραγματική δραστηριότητα της καθημερινής ζωής (ρεαλιστικά μαθηματικά).

Δασκάλα: Σε μικρές αποστάσεις χρησιμοποιούμε μονάδες ταχύτητας μέτρα/δευτερόλεπτο. Θέλετε μια μέρα στο προαύλιο να μετρήσει ο Γυμναστής την ταχύτητά σας στα 60 μ.;

(2η ΜΠ-Ημέρα 5η) Αφού μελέτησαν την έννοια της ταχύτητας, με μονάδα «χιλιόμετρα/ώρα», σε προβλήματα με αυτοκίνητα και μεγάλες διαδρομές - όχι και τόσο οικείο πλαίσιο - τώρα διερευνούν την ταχύτητά τους με μονάδα «μέτρα/δευτερόλεπτο» (ρεαλιστική προσέγγιση).

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ

Μέσα από περιγραφή κι ανάλυση μαθησιακών επεισοδίων στην τάξη, αναδύθηκαν προοδευτικές μεταβολές στη διδακτική στάση των δύο δασκάλων. Συνολικά οι αλλαγές που αναδύθηκαν είναι: α) Οι εκπαιδευτικοί ρωτούν «γιατί» και «πώς» ενθαρρύνοντας το διάλογο και σταδιακά δίνουν το λόγο στα παιδιά μειώνοντας το δικό τους ποσοστό κατοχής λόγου. Κρατούν συντονιστικό ρόλο. Η φύση των δραστηριοτήτων είναι τέτοια (βιωματική δράση, θέμα κοινωνικού προβληματισμού, κατασκευή με χειραπτικό υλικό, εξερευνήσεις στο χάρτη, εργασία στον υπολογιστή) ώστε οι μαθητές ερευνώντας διεκδικούν περισσότερο χώρο. β) Οι εκπαιδευτικοί αντί να ενισχύουν τον ανταγωνισμό όπως παλιά, συμβάλλουν στη μείωση του ανταγωνισμού. Δίνουν το χρόνο και τη δυνατότητα σε πιο πολλούς μαθητές για να απαντήσουν. Αντί πλέον να επιμένουν στη γρήγορη επίτευξη του αποτελέσματος, δίνουν έμφαση κυρίως στη διαδικασία και στην κατανόηση. γ) Οι εκπαιδευτικοί αντιμετωπίζουν διαφορετικά τα λάθη των μαθητών. Αντί

όπως παλιά να κρίνουν αρνητικά τα λάθη, αρχίζουν να ερμηνεύουν τον τρόπο σκέψης που οδήγησε στα λάθη και τα αξιοποιούν διδακτικά ως «ανοιχτό παράθυρο στη σκέψη των μαθητών». Δεν διορθώνουν πια τα λάθη, αλλά με κονστρουκτιβιστική διαδικασία δημιουργούν κατάλληλες προϋποθέσεις για να τα ανακαλύψουν οι μαθητές μόνοι τους. δ) Διαπιστώνουμε στροφή του ενδιαφέροντος των εκπαιδευτικών στην επίτευξη κατανόησης από τους μαθητές. ε) Οι εκπαιδευτικοί ενθαρρύνουν πλέον την ανάδυση στρατηγικών επαγωγικά από τα παιδιά. Οργανώνουν άτυπες σποραδικές πρακτικές και τις κατευθύνουν μέσα από μια διαδικασία επανεπινόησης, ώστε οι στρατηγικές να αναδύονται με αφετηρία λύσεις των παιδιών. στ) Υπήρξε μείωση καθοδήγησης των εκπαιδευτικών κι αύξηση αυτονόμησης μαθητών. ζ) Σε σχέση με το παραδοσιακό πρότυπο και το σχολικό βιβλίο, έχουμε διεύρυνση περιεχομένου - διαδικασιών των σχολικών μαθηματικών μέσ' απ' τη διαθεματικότητα. η) Οι εκπαιδευτικοί δίνουν έμφαση στη ρεαλιστική διάσταση των μαθηματικών πλαισίων. Στο ευρύ πεδίο της διαθεματικότητας επιλέγουν πλαίσια προβλημάτων μέσα απ' την καθημερινή ζωή των μαθητών.

Οι αλλαγές δε σταματούν με την ολοκλήρωση της διαθεματικής προσέγγισης, δείχνουν να συνεχίζουν και μετά την Ε.Ζ., στα τυπικά μαθηματικά. Αν δούμε το μοντέλο «αναθεώρηση διδακτικής πρακτικής-δάσκαλοι», ως ανάλογο με το μοντέλο «μάθηση νέου αντικειμένου-μαθητές», διαπιστώνουμε ότι οι απόψεις των δασκάλων σε μια θεώρηση κονστρουκτιβιστική, αποτελούν τις προϋπάρχουσες δομές που θα προσπαθήσουν οι αναθεωρητές επιστήμονες να φέρουν σε «γνωστική σύγκρουση» ώστε να θελήσουν οι ίδιοι οι δάσκαλοι ν' αλλάξουν πρακτικές στη μάθηση των μαθηματικών. Η σύγκρουση όμως αυτή δεν γίνεται μόνο σε θεωρητικό επίπεδο, αλλά κυρίως στην καθημερινή διδακτική πράξη. Το πλαίσιο διαθεματικών δραστηριοτήτων δίνει ευκαιρίες αλλαγής των παραδοσιακών πρακτικών στη μαθηματική μάθηση. Επιχείρησα αυτή την επιστημονική υπόθεση και διερεύνησα με ποιοτικές μεθόδους την ορθότητά της. Τα αποτελέσματα ήταν ενθαρρυντικά. Δεν αναμένονταν ριζικές αλλαγές σε παγιωμένες νοοτροπίες ετών. Όμως κάποια ελπιδοφόρα σπέρματα αλλαγής του εκπαιδευτικού γίγνεσθαι των μαθηματικών εμφανίστηκαν σταδιακά. Συμπερασματικά, η συμβολή της διαθεματικότητας στην υλοποίηση του σύγχρονου οράματος ποιοτικής αναβάθμισης της μαθηματικής εκπαίδευσης, φαίνεται σημαντική.

6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Altrichter, H., Posch, P., Somekh, B. (2001), Οι εκπαιδευτικοί ερευνούν το έργο τους: Μια Εισαγωγή στις Μεθόδους της Έρευνας Δράσης, Μεταίχμιο, Αθήνα.

Anderson, G.L. (1989), Critical ethnography in education: Origins, current status, and new directions. Review of Educational Research, 59(3), 249-270.

Ausubel D. (1968), "Educational Psychology: A Cognitive View", New York.

Banister, S., & Harlow, C. (1997), Integrating math and writing skills into the physical education curriculum. Teaching Elementary Physical Education, 28-30.

Berlin, D., and White, A. (1992), Report from the NSF/SSMA Wingspread Conference: A Network for Integrated Science and Mathematics Teaching and Learning." School Science and Mathematics 92/6: 340-343.

Boaler, J. (1998), Open and closed mathematics: student experiences and understandings. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 29, 41-62.

Briers, G. (1986), Identification of Math and Science Concepts, Skills and Experiences Provided in Vocational Agriculture in Texas. Texas A & M University: Department of Agricultural Education,(ED 281 035).

Bruner, J. (1977), The process of education: A landmark in educational theory. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Cobb P., Yackel E. (1996) "Constructivist, Emergent and Sociocultural Perspectives in the Context of Developmental Research", Educational Psychologist, 31(3/4), p.175-190, Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Dewey, J. (1916), Democracy and Education. An introduction to the philosophy of education (1966 edn.), New York: Free Press.

Dorfler, W., McLone, R.R. (1986), Mathematics as a school subject, In Perspectives on mathematics education, 49-97, Reidel Publishing Company.

Edgerton, R. (1990), Survey Feedback from Secondary School Teachers that are Finishing their First Year Teaching from an Integrated Mathematics Curriculum. Washington, DC.

Frey, K.(1986), Η μέθοδος Project. Μια μορφή συλλογικής εργασίας στο σχολείο. Θεωρία και Πράξη, Θεσσαλονίκη, εκδόσεις Κυριακίδη.

Friend, H. (1984), The Effect of Science and Mathematics Integration on Selected Seventh Grade Students: Attitudes Toward and Achievement in Science. N.Y.: New York City Board of Education.

Gardner H. (1983), "Frames of Mind: The Theory of Multiple Intelligences".

Glaser, B., Strauss, A. (1968), The Discovery of Grounded Theory, Weidenfeld: London.

Greene, L. (1991), "Science-Centered Curriculum in Elementary School." Educational Leadership 49/2: 48-51.

Hammersley, M., Atkinson, P. (1983), Ethnography: principles in practice, Tavistock, London.

Heath, S.B. (1982), Ethnography in Education: defining the essentials. In: Gillmore, P; Glatthorn, A. (Ed..). Washington, DC: Center for Applied Linguistics, p. 35-55.

Kilpatrick, W.H. (1925), Foundations of Method, New York: Macmillan.

Lake, K. (1994), Integrated Curriculum. Close-Up #16. Portland, OR: Northwest Regional Educational Laboratory,

MacIver, D. (1990), "Meeting the Need of Young Adolescents: Advisory Groups, Interdisciplinary Teaching Teams, and School Transition Programs." Phi Delta Kappan 71/6:458-465. John Hopkins University (CREMS).

Ματσαγγούρας Η (2000) «Ομαδοσυνεργατική Διδασκαλία & Μάθηση» Γρηγόρης Αθήνα

N.C.T.M., (2000), Principles and Standards for School Mathematics.

Piaget, J. (1965), "The Child's Conception of Number", The Norton Library.

Polya G. (1991), "Πώς να το λύσω», ελληνική έκδοση του «How to Solve it», Princeton University Press 1957, Εκδόσεις Καρδαμίτσα.

Von Glasersfeld, E. (1984), An introduction to radical constructivism. NY: Norton.

Vygotsky, L.S. (1978), Mind in Society; The development of Higher Psychological processes. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Westerberg, J., and Whiting, J. (1992), Popcorn: An Explosive Mixture of General Mathematics and General Science. Mathematics Teacher 85/4 : 306-309.

Whitehead,A.N.(1948) The Aims of Education and Other Essays, N.A.Library, N.Y.

Willis, P. (1977), Learning to Labour: how working class kids get working class jobs.

Η ΣΧΕΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΤΟ ΕΡΓΟ «ΔΙΑΛΟΓΟΙ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΙΚΑ» ΤΟΥ ALFRED RENYI: ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗΣ

Χρίστος Μηλιώνης,

Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η σχέση των Μαθηματικών με τις Φυσικές επιστήμες είναι ο κεντρικός άξονας γύρω από τον οποίο περιστρέφεται το περιεχόμενο του έργου «Διάλογοι για τα Μαθηματικά» του Alfréd Rényi. Μέσα από τρεις αφηγήσεις, οι οποίες έχουν τη μορφή διαλόγου, ο Α. Rényi επιχειρεί αρχικά να αναζητήσει τη σχέση των Μαθηματικών με την πραγματικότητα, στη συνέχεια να ανοίξει μια συζήτηση για τις εφαρμογές των μαθηματικών και τέλος να αναδείξει τη σπουδαιότητα της μαθηματικής μεθόδου για την ανακάλυψη των νόμων της φύσης, μέσα από τη μαθηματική μελέτη της κίνησης. Ο Rényi επέλεξε τη συγκεκριμένη μορφή αφήγησης επειδή θεωρούσε αναγκαίο η συζήτηση για τα ζητήματα αυτά να είναι κατανοητή στο ευρύ κοινό. Μέσα από την εισήγηση θα επιδιωχθεί, αφενός να συζητηθεί το περιεχόμενο των τριών διαλόγων και αφετέρου να αναδειχτούν οι δυνατότητες διδακτικής αξιοποίησής τους από τους εκπαιδευτικούς της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, τόσο στο πλαίσιο της διδασκαλίας του μαθήματος, όσο και στο πλαίσιο υλοποίησης πολιτιστικών προγραμμάτων ή διαθεματικών δραστηριοτήτων. Κατά τη διερεύνηση, θα γίνει αναφορά και σε άλλα έργα τα οποία μπορούν να συνδυαστούν με το έργο του Α. Rényi, όπως το μυθιστόρημα «Ο Άνθρωπος που μετρούσε την άμμο» της Τζίλιαν Μπράνσοου και το θεατρικό «Ο Γαλιλαίος» του Μπέρτολτ Μπρεχτ.

"If I feel unhappy, I do mathematics to become happy.
If I am happy, I do mathematics to keep happy."
Alfréd Rényi[1]

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο Ούγγρος μαθηματικός Alfréd Rényi (1921 – 1970), με το έργο του *Διάλογοι για τα Μαθηματικά,* θίγει ορισμένα βασικά ζητήματα για τη φύση των μαθηματικών, για τις εφαρμογές τους, καθώς και για τη σχέση τους με το φυσικό κόσμο. Στην προσπάθειά του να διερευνήσει τα ζητήματα αυτά, θέτει ερωτήματα όπως: *Τι είναι τα μαθηματικά και σε τι μας χρησιμεύουν; Πού εφαρμόζονται και ποια είναι η σχέση τους με τις άλλες επιστήμες; Ποιες είναι οι θετικές και ποιες οι αρνητικές επιπτώσεις της χρήσης τους; Πώς μπορούν να γίνουν κατανοητά από το ευρύτερο κοινό;* Προκειμένου να δώσει απαντήσεις στα ερωτήματα αυτά, ο Rényi επινόησε τους *Διαλόγους για τα Μαθηματικά.* Πρόκειται για ένα έργο, το οποίο αποτελείται από τρία μέρη, όπου αναπτύσσονται με μορφή διαλόγου οι θέσεις του συγγραφέα για τα παραπάνω ζητήματα .

Όπως δηλώνει ο συγγραφέας, αποφάσισε να γράψει τους *Διαλόγους* επειδή διαπίστωνε «ένα μεγάλο αριθμό προκαταλήψεων, παρεξηγήσεων και εσφαλμένων αντιλήψεων» για τα μαθηματικά, από ανθρώπους «που έχουν μερική γνώση και που δεν έχουν αρκετά ευρύ ορίζοντα», οι οποίοι «είναι περισσότερο επιρρεπείς στο να κάνουν λανθασμένες γενικεύσεις», επειδή επίσης έβρισκε ότι «οι αρχές των μαθηματικών και των εφαρμογών τους είναι συχνά θέμα διαμάχης ακόμα και ανάμεσα σε μαθηματικούς» και τελικά είχε πεισθεί ότι «υπάρχει πραγματική ανάγκη για μια συζήτηση των βασικών ζητημάτων των μαθηματικών και των εφαρμογών τους μ' ένα τρόπο, που ενώ θα τα κάνει προσιτά στους μη ειδικούς, θα παρουσιάζει αυτά τα προβλήματα στην πλήρη του πολυπλοκότητα» (Rényi, 1979: 114).

Ο Rényi, αναγνωρίζοντας ότι «δεν θα ήταν εύκολο να κάνεις τέτοια θέματα κατανοητά στο πλατύ κοινό», ψάχνει «για μια ειδική μέθοδο» για να φέρει «αφηρημένα προβλήματα πιο κοντά στον κοινό άνθρωπο». Στον πρώτο από τους *Διαλόγους* επιλέγει ως *«ειδική μέθοδο»* τη «Σωκρατική μορφή διαλόγου», γιατί προσδίδει στο διάλογο ζωηρότητα και ζωντάνια και του προσφέρει εσωτερική ένταση, αλλά και γιατί θεωρεί ότι «η Σωκρατική

[1] Παρατίθεται στο Pál Turán, *"The Work of Alfréd Rényi"*, Matematikai Lapok 21 (1970) 199 - 210.

μέθοδος είναι βασικά συγγενής με τη μαθηματική μέθοδο». Διαφορετικοί στη μορφή και το ύφος, οι δυο επόμενοι διάλογοι τοποθετούνται σε «εξαιρετικά αποφασιστικές ιστορικές περιστάσεις», των οποίων η δυναμική, αξεχώριστα δεμένη με τις εκβάσεις των διαλόγων, μεγεθύνει την έντασή τους (Rényi, 1979: 114-117).

Η ΜΟΡΦΗ ΚΑΙ ΤΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ ΤΩΝ ΔΙΑΛΟΓΩΝ

Με τη μορφή διαλόγου έχουν γραφτεί κορυφαία έργα της φιλοσοφίας και της επιστήμης, όπως τα περισσότερα έργα του Πλάτωνα, του Γαλιλαίου, του Lakatos και πολλών άλλων. Η επιλογή της μορφής του διαλόγου σε ένα κείμενο, γίνεται όταν η βασική επιδίωξη του συγγραφέα δεν είναι η παρουσίαση κάποιων παρατηρήσεων ή θέσεών του, αλλά η καλύτερη κατανόηση και ερμηνεία τους από τον αναγνώστη. Στα επιστημονικά κείμενα με μορφή διαλόγου, ο ρόλος του αναγνώστη είναι αναβαθμισμένος, επειδή ο συγγραφέας δεν παρουσιάζει ως «αυθεντία» τις θέσεις ή τα συμπεράσματά του, αλλά «συζητάει» με τον αναγνώστη, στον οποίο δίνει λόγο και άποψη, προσπαθώντας να τον βοηθήσει να κατανοήσει. Η επιστήμη έχει ανάγκη την ακρίβεια των παρατηρήσεων, αλλά και την ενδελεχή, εξεταστική και κρητική σκέψη.

Αλλά και η διδακτική πράξη, ουσιαστικά λειτουργεί ως μια επικοινωνιακή διεργασία, η οποία διεξάγεται κυρίως με τη μορφή διαλόγου μεταξύ εκπαιδευτικού και μαθητών με στόχο την κατάκτηση της γνώσης από τους μαθητές. Χαρακτηριστικές περιπτώσεις αποτελούν τα έργα *Η γοητεία των μαθηματικών* και *Μαθηματικές συναντήσεις* του Serge Lang[2], στα οποία οι Διαλέξεις του συγγραφέα διεξάγονται με τη μορφή διαλόγου με το κοινό.

Η Σωκρατική διαλεκτική μέθοδος χαρακτηρίζεται και ως *«γενετική διαδικασία»*, ένα είδος μαιευτικής. Ο Rényi, επιλέγει τη μορφή Σωκρατικού διαλόγου για τον πρώτο από τους Διαλόγους του, σημειώνοντας ότι με τη μορφή αυτή δεν επιδιώκεται η σύγκρουση δυο απόψεων, αλλά ότι οι μετέχοντες προσπαθούν να ανακαλύψουν μαζί την αλήθεια με τη μέθοδο των ερωτήσεων. (Rényi, 1979: 114-117)

Πρώτος διάλογος: Τι πράγματι είναι τα μαθηματικά;

[2] Και τα δύο έργα κυκλοφορούν στα ελληνικά από τις εκδόσεις *κάτοπτρο*.

Στον πρώτο διάλογο[3], ο οποίος δημοσιεύθηκε το 1962, ο Rényi προσπαθεί να ακολουθήσει πιστά τη μέθοδο, ακόμα και τη γλώσσα των αυθεντικών Σωκρατικών διαλόγων. Ο Σωκράτης έχει τον κύριο λόγο στη συζήτηση, ενώ τα μαθηματικά παρουσιάζονται στον αναγνώστη *«ευ τω γενυάσθαι»*, με την έννοια που από τότε δίνεται σε αυτά. Ο διάλογος αναπτύσσεται ανάμεσα σε δύο πρόσωπα, τον Σωκράτη και τον Ιπποκράτη και οι συνομιλητές, με τη βοήθεια της λογικής ανάλυσης των εννοιών, αναζητούν την αληθινή φύση των μαθηματικών.

Η μαιευτική μέθοδος ακολουθείται με συνέπεια σε όλη τη διάρκεια του διαλόγου:

> ***ΣΩΚΡΑΤΗΣ****: …Ο καθένας πρέπει να αποφασίζει μόνος του τι θέλει να κάνει. Δεν μπορώ να κάνω τίποτα περισσότερο από το να βοηθήσω, σα μία μαμή να γεννηθεί ή απόφαση σου.*
>
> *[…]…είσαι έτοιμος να κάνεις τη συζήτηση με τον τρόπο που προτιμώ: Εγώ θα σε ρωτάω και συ θα πρέπει να δίνεις τις απαντήσεις. Έτσι θα μπορέσεις να δεις καθαρά τι κιόλας ξέρεις. Γιατί μ' αυτή τη μέθοδο θα βλαστήσουν οι σπόροι των γνώσεων που ήδη κατέχεις.*

Ως κεντρικό θέμα του πρώτου διαλόγου τίθεται το ερώτημα: *τι πράγματι είναι τα μαθηματικά;* Για τον Rényi η συζήτηση του θέματος αυτού ήταν ιδιαίτερα σημαντική γιατί θεωρούσε ότι «η διδασκαλία των μαθηματικών […] βρίσκεται ακόμη μακριά από το να δίνει μια σωστή και εμπεριστατωμένη απάντηση». Με το ερώτημα αυτό, το οποίο αφορά στη φύση των μαθηματικών, προσεγγίζονται θέματα της φιλοσοφίας των μαθηματικών

> ***ΣΩΚΡΑΤΗΣ****: …Λοιπόν, για πες μου, ξέρεις τί είναι τα μαθηματικά; Υποθέτω ότι, αφού θέλεις να τα σπουδάσεις, μπορείς και να ορίσεις τι είναι …να περιγράψεις τη φύση τους.*
>
> *… Για παράδειγμα, αν σε ρωτούσα για την τέχνη των γιατρών, θ' απαντούσες ότι αυτή ή τέχνη ασχολείται με την υγεία και την αρρώστια και έχει σα σκοπό να θεραπεύει την αρρώστια και να διατηρεί την υγεία. … Λοιπόν, απάντησε μου σ' αυτό. Η ιατρική ασχολείται με κάτι πού υπάρχει ή με κάτι πού δεν υπάρχει; Αν δεν υπήρχαν καθόλου γιατροί, θα εξακολουθούσε να υπάρχει ή αρρώστια;*
>
> *… Ας ρίξουμε μια ματιά σε μία άλλη τέχνη, ας πούμε π.χ. στην αστρονομία. Συμφωνείς μαζί μου ότι οι αστρονόμοι μελετούν την κίνηση των άστρων; …Κι αν σε ρωτήσω, αν ή αστρονομία ασχολείται με κάτι πού υπάρχει, ποια*

[3] Ο πρώτος *Διάλογος* προδημοσιεύτηκε στα ουγγρικά το 1962

θα είναι ή απάντηση σου; …Θα υπήρχαν τ' άστρα, αν δεν υπήρχε ούτε ένας αστρονόμος στον κόσμο;

…Τώρα πες μου, νεαρέ μου φίλε, ποιο είναι το αντικείμενο των μαθηματικών; Τι πράγματα μελετά ο μαθηματικός;

***ΙΠΠΟΚΡΑΤΗΣ**: …ο μαθηματικός μελετά τους αριθμούς και τα γεωμετρικά σχήματα.*

***ΣΩΚΡΑΤΗΣ**: Η απάντηση είναι σωστή, άλλα τι λες, αυτά τα πράγματα υπάρχουν;*

***ΙΠΠΟΚΡΑΤΗΣ**: Βέβαια. Πώς θα μπορούσαμε να μιλάμε γι' αυτά, αν δεν υπήρχαν;*

***ΣΩΚΡΑΤΗΣ**: Πες μου, τώρα, αν δεν υπήρχαν μαθηματικοί, θα υπήρχαν οι πρώτοι αριθμοί; Κι αν είναι έτσι, πού θα υπήρχαν αυτοί;*

Διαπιστώνουμε ότι στο μέρος αυτό του διαλόγου κυριαρχεί το οντολογικό ζήτημα των μαθηματικών, καθώς και το ερώτημα πώς (με ποια αίσθηση) μπορεί κάποιος να τεκμηριώσει ότι τα μαθηματικά "αντικείμενα" υπάρχουν.

Τίθεται όμως και ένα επιστημολογικό ζήτημα, σχετικά με τη δυνατότητα που έχουμε να γνωρίσουμε την "μαθηματική αλήθεια". Και επιπλέον: Γιατί η μαθηματική γνώση εφαρμόζεται στην πραγματικότητα; Πώς μπορεί διαφορετικές προσωπικότητες να βρίσκουν το ίδιο θεώρημα; Ποιος ο ρόλος της κοινωνίας και του πολιτισμού;

Ένα βασικό ερώτημα που τίθεται στη συνέχεια στο διάλογο είναι: Τα μαθηματικά τα επινοούμε ή τα ανακαλύπτουμε; Εδώ ο Rényi φαίνεται ότι υιοθετεί την θέση που διατυπώνει ο J. Hadamard (1995 :13), ότι υπάρχουν άφθονα παραδείγματα επιστημονικών αποτελεσμάτων που είναι δυνατό να χαρακτηριστούν τόσο ανακαλύψεις, όσο και επινοήσεις.

***ΣΩΚΡΑΤΗΣ**: …Πες μου, ποια είναι ή διαφορά ανάμεσα στον ναυτικό, πού ανακαλύπτει ένα ακατοίκητο νησί και στον ζωγράφο, πού βρίσκει ένα καινούριο χρώμα, το όποιο κανένας άλλος ζωγράφος δεν έχει χρησιμοποιήσει πριν απ' αυτόν;*

***ΙΠΠΟΚΡΑΤΗΣ**: Νομίζω πώς ό ναυτικός μπορεί να ονομαστεί εξερευνητής, και ό ζωγράφος, εφευρέτης. Ό ναυτικός ανακαλύπτει ένα νησί πού υπήρχε πριν απ' αυτόν, μόνο πού ήταν άγνωστο, ενώ ό ζωγράφος εφευρίσκει ένα καινούριο χρώμα, το όποιο πριν δεν υπήρχε καθόλου.*

***ΣΩΚΡΑΤΗΣ**: … για πες μου, ο μαθηματικός που βρίσκει μια νέα αλήθεια, την ανακαλύπτει ή την εφευρίσκει; Είναι δηλ. εξερευνητής, όπως ο ναυτικός, ή εφευρέτης, όπως ό ζωγράφος;*

ΙΠΠΟΚΡΑΤΗΣ*: Μου φαίνεται, πώς ο μαθηματικός μοιάζει περισσότερο με άνθρωπο πού ανακαλύπτει.…*

ΣΩΚΡΑΤΗΣ*: …θα πρόσθετα μόνο, ότι σε μικρότερη έκταση ο μαθηματικός είναι και ένας εφευρέτης, ειδικά όταν επινοεί νέες έννοιες. αλλά κι ο καθένας πού ανακαλύπτει πρέπει να είναι σε κάποια έκταση και εφευρέτης. Για παράδειγμα, αν ένας ναύτης θέλει να πάει σε μέρη, πού άλλοι ναύτες πριν απ' αυτόν αδυνατούσαν να πλησιάσουν, πρέπει να φτιάξει ένα πλοίο, πού να είναι καλύτερο από τα πλοία πού χρησιμοποίησαν αυτοί. Οι νέες έννοιες, πού εφεύραν οι μαθηματικοί είναι σαν τα νέα πλοία πού μεταφέρουν αυτόν πού τις ανακαλύπτει, πιο πέρα, στη μεγάλη θάλασσα τής σκέψης.*

… ***ΣΩΚΡΑΤΗΣ****: … Ποιο είναι το αντικείμενο των μαθηματικών; … Ας γυρίσουμε πίσω στο σημείο πού καταλήξαμε πριν, πώς ό μαθηματικός δεν ασχολείται με τον αριθμό των προβάτων, πλοίων ή άλλων υπαρκτών πραγμάτων, άλλα με τους ίδιους τους αριθμούς. Δε νομίζεις όμως, ότι εκείνο πού ανακαλύπτουν οι μαθηματικοί ότι ισχύει για τους καθαρούς αριθμούς, ισχύει και για τους αριθμούς των υπαρκτών πραγμάτων; Για παράδειγμα, ο μαθηματικός βρίσκει ότι ο 17 είναι πρώτος αριθμός. Συνεπώς δεν είναι αληθινό ότι δεν μπορείς να μοιράσεις 17 ζωντανά πρόβατα σε μια ομάδα ανθρώπων, δίνοντας στον καθένα τον ίδιο αριθμό προβάτων, έκτος αν ή ομάδα έχει 17 ανθρώπους; … Τώρα, πες μου, αν είχε δειχτεί ότι ό κόσμος των μαθηματικών, παρά τις ιδιορρυθμίες του, είναι, με ορισμένη έννοια, όμοιος με τον πραγματικό μας κόσμο, θα εξακολουθούσες να το βλέπεις σαν θαύμα, ότι τα μαθηματικά μπορούν να εφαρμοσθούν για τη μελέτη του πραγματικού κόσμου;*

ΙΠΠΟΚΡΑΤΗΣ*: Σ' αύτη τη περίπτωση όχι, αλλά δεν βλέπω καμιά ομοιότητα ανάμεσα στον πραγματικό κόσμο και στο φανταστικό κόσμο των μαθηματικών.*

ΣΩΚΡΑΤΗΣ*: Βλέπεις το βράχο στην άλλη πλευρά του ποταμού, εκεί πού ό ποταμός φαρδαίνει και σχηματίζει λίμνη;… βλέπεις την εικόνα του βράχου, πού αντανακλάται στο νερό; …Τότε πες μου, ποια είναι ή διαφορά ανάμεσα στο βράχο και στην αντανάκλαση του;*

ΙΠΠΟΚΡΑΤΗΣ*: Ο βράχος είναι ένα στερεό κομμάτι από σκληρή ύλη. Θερμαίνεται από τον ήλιο. Αν τον άγγιζες, θα αισθανόσουν ότι ή επιφάνεια του δεν είναι λεία. Το είδωλο όμως στο νερό δεν μπορούμε να το αγγίξουμε· αν έβαζα το χέρι μου επάνω του, θα άγγιζα μόνο το δροσερό νερό. Συγκεκριμένα, ή αντανακλώμενη εικόνα δεν υπάρχει στην πραγματικότητα. Είναι αυταπάτη, τίποτε άλλο.*

ΣΩΚΡΑΤΗΣ*: Δεν υπάρχει τίποτα κοινό ανάμεσα στο βράχο και στο είδωλο του πού καθρεφτίζεται;*

ΙΠΠΟΚΡΑΤΗΣ*: Λοιπόν, με ορισμένη έννοια, ή αντανακλώμενη εικόνα είναι μια πιστή ζωγραφιά του βράχου. Το περίγραμμα του βράχου ακόμα και οι μικρές προεξοχές του, είναι καθαρά ορατές στην αντανακλώμενη εικόνα. Άλλα και τί μ' αυτό; θέλεις να πεις πώς ό κόσμος των μαθηματικών είναι μια αντανακλώμενη εικόνα του πραγματικού κόσμου στον καθρέφτη της σκέψης μας;[…]*

ΣΩΚΡΑΤΗΣ*: Ας θυμηθούμε πώς αναπτύχθηκαν οι αφηρημένες ιδέες των μαθηματικών. Είπαμε πώς ό μαθηματικός ασχολείται με τους καθαρούς αριθμούς και όχι με τους αριθμούς των πραγματικών αντικειμένων. Άλλα νομίζεις ότι κάποιος πού ποτέ δεν έχει μετρήσει πραγματικά αντικείμενα, μπορεί να καταλάβει την αφηρημένη ιδέα του αριθμού; Όταν ένα παιδί μαθαίνει να μέτρα, πρώτα μετρά πετραδάκια και μικρά ξυλαράκια. Μόνον αν ξέρει ότι δυο πετραδάκια και τρία πετραδάκια μας κάνουν πέντε πετραδάκια και το ίδιο για τα ξυλαράκια ή κέρματα, τότε είναι ικανό να καταλάβει ότι δυο και τρία κάνουν πέντε. Ή περίπτωση είναι ουσιαστικά ή ίδια και στη γεωμετρία. Το παιδί φτάνει στην ιδέα τής σφαίρας μέσα από την πείρα του με στρογγυλά αντικείμενα, όπως οι μπάλες. Το ανθρώπινο είδος ανάπτυξε όλες τις θεμελιώδεις ιδέες των μαθηματικών με παρόμοιο τρόπο. Αυτές οι ιδέες αποκρυσταλλώνονται από τη γνώση του πραγματικού κόσμου και έτσι δεν είναι εκπληκτικό, άλλα ευτελώς φυσικό, πού διατηρούν τα σημάδια τής καταγωγής τους, όπως τα παιδιά των γονιών τους. Και …έτσι και κάθε κλάδος των μαθηματικών, αν είναι αρκετά αναπτυγμένος, γίνεται ένα χρήσιμο εργαλείο στην εξερεύνηση του πραγματικού κόσμου.*

ΙΠΠΟΚΡΑΤΗΣ*: Τώρα, είναι ευτελώς ξεκάθαρο σε μένα, πώς ή γνώση των μη υπαρκτών πραγμάτων του κόσμου των μαθηματικών, μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην καθημερινή ζωή.*

…λοιπόν, …η ερώτηση που απόμεινε ήταν για τη χρησιμότητα αυτής της γνώσης. Τώρα έχουμε βρει πως ο κόσμος των μαθηματικών δεν είναι τίποτε άλλο από μια αντανάκλαση του πραγματικού κόσμου στο μυαλό μας. Μ' αυτό γίνεται φανερό, ότι κάθε ανακάλυψη στον κόσμο των μαθηματικών μας δίνει κάποιες πληροφορίες για τον πραγματικό κόσμο. …

ΣΩΚΡΑΤΗΣ*: …θα έλεγες: «Πες μου, Σωκράτη, ποιο νόημα έχει το να μελετάμε την αντανακλώμενη εικόνα, αν μπορούμε να μελετήσουμε το ίδιο το αντικείμενο;»*

ΙΠΠΟΚΡΑΤΗΣ*: 'Εχεις απόλυτο δίκιο. …θα απαντούσα, ότι αν έχουμε τη δυνατότητα να ρίξουμε μια ματιά στο αρχικό αντικείμενο, δεν έχει νόημα*

να κοιτάξουμε την αντανακλώμενη εικόνα. Άλλα είμαι σίγουρος ότι αυτό δείχνει μόνο πώς ή παρομοίωση μας δεν έχει πετύχει σ' αυτό το σημείο…

***ΣΩΚΡΑΤΗΣ**: …το παράδοξο ξεπήδησε γιατί επιμείναμε πολύ στην παρομοίωση της αντανακλώμενης εικόνας. Μια παρομοίωση μοιάζει με τόξο, αν το τεντώσεις πάρα πολύ, σπάει. ….*

Η σχέση των μαθηματικών με των πραγματικό κόσμο είναι κυρίαρχή στο μέρος αυτό των Διαλόγων και αναδεικνύεται από τον Rényi πολύ παραστατικά με το παράδειγμα της αντανάκλασης. Βέβαια, η σχέση των μαθηματικών και της αντικειμενικής πραγματικότητας είναι υπερβολικά περίπλοκη. Έτσι, η ιδέα πως η μαθηματική γνώση βασίζεται σε άμεσες και ακριβείς αναπαραστάσεις της φυσικής πραγματικότητας, υπόκειται σε αρκετές επικρίσεις, αφού στην πορεία της ανάπτυξης των μαθηματικών, οι αντιλήψεις της μαθηματικής αλήθειας υπόκεινται σε αμφισβητήσεις, ανασκευές ή ακόμη και ανατροπές και οι αρχές των μαθηματικών και των εφαρμογών τους είναι συχνά θέμα διαμάχης, ακόμα και ανάμεσα σε μαθηματικούς. Χαρακτηριστική είναι η αναφορά του I. Lakatos (1996: 22) στη διαμάχη δογματικών και σκεπτικιστών, η οποία έχει ιστορία δυο χιλιάδων ετών.

Δεύτερος διάλογος: για τις εφαρμογές των μαθηματικών

Η στροφή των μαθηματικών προς την πράξη έγινε κατά την περίοδο των Αλεξανδρινών, «σε ένα άλλο κοινωνικό περίβλημα, περισσότερο εμπορικό και κοσμοπολίτικο» (Φίλη, 1987 :232). Στον δεύτερο από τους *Διαλόγους*[4], η προσοχή του Rényi συγκεντρώνεται σε μια περισσότερο λεπτομερή συζήτηση των εφαρμογών των μαθηματικών. Ο Αρχιμήδης[5] είναι το κύριο πρόσωπο του διαλόγου αυτού, καθώς το όνομά του, ακόμα και στους αρχαίους χρόνους, ήταν αναπόσπαστα συνδεδεμένο με τέτοιες εφαρμογές. Δεν είναι τυχαίο ότι το όνομα του Αρχιμήδη είναι εξ ίσου, ίσως και περισσότερο, γνωστό από τη Φυσική (Νόμος των μοχλών, Αρχή της άνωσης κ.α.). Ο διάλογος διεξάγεται μεταξύ του Αρχιμήδη και του Ιέρωνα, όταν ο Ιέρωνας επισκέπτεται τον Αρχιμήδη στο σπίτι του. Ο Αρχιμήδης προσπαθεί να εξηγήσει στον Ιέρωνα τη χρησιμότητα των μαθηματικών, την έννοια του μαθηματικού μοντέλου και τη διάκριση μεταξύ μαθηματικών και φυσικών μοντέλων. Θίγονται όμως και

[4] Ο δεύτερος διάλογος πρωτοπαρουσιάστηκε στο Πανεπιστήμιο του Τορόντο το 1964

[5] Ο Αρχιμήδης υπήρξε ένας λαμπρός μηχανικός και ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς όλων των εποχών. Σπούδασε στην αλεξανδρινή σχολή και ήταν «ευαίσθητος δέκτης των κοινωνικών αναγκών της πόλης του, δανείστηκε τα δημιουργικά στοιχεία του έργου του από την κοινωνική πραγματικότητα, πράγμα που δίδει στο έργο του ένα σύγχρονο χαρακτήρα.» (Φίλη, 1987: 232-233)

κοινωνικά ζητήματα (εργασία των δούλων), καθώς και ζητήματα ηθικής και πολιτικής διάστασης (πόλεμος-ειρήνη, ευθύνη του επιστήμονα για τις συνέπειες του έργου του κ.α.).

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ *… όταν ανακάλυψα μια αντλία για να βγάζει το νερό από τα ορυχεία σου, ώστε οι άνθρωποι που δούλευαν εδώ να μην περνούν μέχρι τους γοφούς μέσα από τα νερά δεν ενδιαφέρθηκες. Ο επικεφαλής των ορυχείων μου είπε πως δεν νοιάζεται αν τα πόδια των σκλάβων θα είναι υγρά – δεν είναι από αλάτι. …Και θυμάσαι όταν σου πρότεινα να φτιάξω μια μηχανή να ποτίζει τα χωράφια σου; Η εργασία των σκλάβων ήταν φθηνότερη….*

… Όλη μου η προσπάθεια, να δείξω στον κόσμο πως τα μαθηματικά μπορούν να τους βοηθήσουν στην ειρήνη ήταν μάταιη. Αλλά όταν ο πόλεμος ήρθε, ξαφνικά θυμήθηκες τις τροχαλίες μου, και τους μοχλούς μου….

… Αλλά αυτό δεν ήταν το είδος της δράσης με το οποίο ήθελα να αποδείξω την πρακτική αξία των μαθηματικών. Είδα άνδρες να σκοτώνονται από τις μηχανές μου και αυτό με γέμισε ενοχές….

…ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ *…ας πάρουμε για παράδειγμα τους καθρέπτες που έκαναν τόσο καλά την δουλειά τους σήμερα. Αυτό που εγώ πολύ απλά έπρεπε να θυμάμαι ήταν μια γνωστή ιδιότητα της παραβολής: πάρε ένα σημείο Ρ της παραβολής, ένωσε το με την εστία και σχεδίασε από το Ρ μια ευθεία που είναι παράλληλη με τον άξονα. Αυτές οι δύο ευθείες σχηματίζουν ίσες γωνίες με την εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Ρ…..*

… Μερικοί μαθηματικοί πήγαν ακόμα ένα βήμα πιο πέρα. Εξερεύνησαν μερικά από τα καθαρά γεωμετρικά συμπεράσματα ή επινόησαν νέες αποδείξεις, αλλά σταμάτησαν εδώ.. Εγώ απλά πήγα ένα βήμα παρακάτω. Κοίταξα επίσης στα μη-μαθηματικά συμπεράσματα.

ΙΕΡΩΝ *Σκέφτομαι ότι ανακάλυψες κάποιου νέο νόμο της οπτικής.*

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ *Η οπτική τελικά δεν είναι τίποτα άλλο από έναν κλάδος της γεωμετρίας. Αυτό που χρησιμοποίησα από την οπτική, ήταν ο νόμος της ανάκλασης μιας ακτίνας που είναι γνωστός εδώ και πολύ καιρό.*

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ *…"Ένα μουτέλο δεν χρειάζεται να είναι από κάθε άποψη όμοιο με την πραγματικότητα την οποία σχηματοποιεί. Αρκεί να μοιάζει από τις απόψεις που πραγματικά έχουν σημασία. Εξ άλλου, τα ίδιο μαθηματικό μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσαρμοστεί σε εντελώς διαφορετικές πρακτικές καταστάσεις. Για παράδειρα, χρησιμοποίησα επίσης τις ιδιότητες των παραβολών για να κατασκευάσω καταπέλτες, γιατί ή τροχιά μιας πέτρας, που ρίχνεται άπα έναν καταπέλτη, μπορεί να*

προσεγγιστεί αρκετά ικανοποιητικά από μια παραβολή. Χρησιμοποίησα και πάλι τις παραβολές, για να υπολογίσω πόσο βαθιά θα βυθισθεί ένα πλοίο μέσα στη θάλασσα κάτω απ' το βάρος του φορτίου του. Βέβαια, ή κάθετη τομή ενός πλοίου δεν έχει ακριβώς παραβολική μορφή, αλλά ένα περισσότερο ρεαλιστικό μοντέλο δεν θα ήταν μαθηματικά εύχρηστο. Τ' αποτελέσματα ωστόσο ήταν σε αρκετά καλή συμφωνία με τα γεγονότα. Συγκεκριμένα, ήμουν σε θέση να βρω κάτω από ποιες συνθήκες ένα πλοίο θα μπορούσε να παραμείνει όρθιο, όταν χτυπιόταν απ' τον άνεμο και τα κύματα, επειδή το κέντρο βάρους του τείνει να βρεθεί στην βαθύτερη δυνατή θέση.

…ακόμα κι ένα ακατέργαστο μαθηματικό μοντέλο μπορεί να μας βοηθήσει να καταλάβουμε καλύτερα μια πρακτική κατάσταση, γιατί στην προσπάθεια να μορφώσουμε ένα μαθηματικό μοντέλο, αναγκαζόμαστε να σκεφτούμε πάνω σ' όλες τις λογικές δυνατότητες, να ορίσουμε όλες τις έννοιες με σαφήνεια και χωρίς διφορούμενα και να ξεχωρίσουμε τους πρωτεύοντες απ' τους δευτερεύοντες παράγοντες. Ακόμα κι αν ένα μαθηματικό μοντέλο οδηγεί σε αποτελέσματα, που δεν είναι σύμφωνα με τα γεγονότα, μπορεί να είναι χρήσιμο γιατί η αποτυχία ενός μοντέλου μπορεί να μας βοηθήσει να βρούμε ένα καλύτερο….

…ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ *… Σε σχέση με τα μαθηματικά τώρα, σου έδειξα προηγούμενα ότι για να μπορέσει κανείς να τα εφαρμόσει με επιτυχία πρέπει να έχει μια βαθιά γνώση και αν κανείς θέλει να τα εφαρμόσει σε ένα πρωτότυπο πεδίο θα πρέπει να είναι ένας δημιουργικός μαθηματικός. Αντίστροφα η εμπλοκή με εφαρμογές μπορεί να βοηθήσει στην καθαρή μαθηματική έρευνα. […] …πριν από λίγο καιρό ενδιαφερόμουν πολύ να απαντήσω σε ένα ερώτημα της μηχανικής που αφορούσε το κέντρο βάρους ενός σώματος. Τα αποτελέσματα τα οποία αποκόμισα με βοήθησαν να στήσω μηχανές και αυτές με την σειρά τους με βοήθησαν να αποδείξω νέες γεωμετρικές προτάσεις. Έχω αναπτύξει μια παράξενη μέθοδο που αποτελείται από υπό εξέταση γεωμετρικά προβλήματα με μηχανικές μελέτες που αφορούν τα κέντρα βάρους. Αυτή η μέθοδος είναι ευρετικού τύπου δηλαδή δεν μπορεί να παραγάγει ακριβείς αποδείξεις. Πολλά θεωρήματα γινόταν καθαρά σε μένα χρησιμοποιώντας αυτή την μέθοδο του συλλογισμού. Βέβαια όσο η μέθοδος δεν παράγει ακριβή αποτελέσματα συνέχιζα να αποδείχνω τα θεωρήματα, που είχα εικάσει με την μηχανική μου μέθοδο, με παραδοσιακές γεωμετρικές μεθόδους. Είναι πολύ πιο εύκολο να υποστηρίξεις την απόδειξη, αν κάποιος προηγούμενα είχε αποκτήσει κάποια γνώση της ερώτησης μέσω μηχανικών αναλογιών και έτσι να γνωρίζει τι πρέπει να αποδειχθεί.*

*… **Το εμβαδόν οποιουδήποτε τμήματος μιας παραβολής είναι τα τέσσερα τρίτα της επιφάνειας του τριγώνου που έχει την ίδια βάση και το ίδιο ύψος**. Αφού βρήκα το αποτέλεσμα με την δική μου μέθοδο, στην συνέχεια βρήκα και μια απόδειξη με παραδοσιακό τρόπο.*

***ΙΕΡΩΝ** Αν βρήκες την απόδειξη του θεωρήματος με μηχανική, γιατί σκοτίστηκες για την γεωμετρική απόδειξη;*

***ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ** Όταν στην αρχή ανακάλυψα την μέθοδό μου, τα αποτελέσματα στα οποία κατέληγα με την βοήθειά της δεν ήταν πάντα σωστά. Στην συνέχεια, αναλύοντας τις περιπτώσεις που με παραπλανούσε, την ανέπτυξα τόσο πολύ ώστε τώρα να μην με παραπλανά ποτέ. Αλλά ακόμα δεν μπορώ να αποδείξω ότι κάθε αποτέλεσμα που παίρνω με αυτό τον τρόπο είναι πραγματικά σωστό. …*

***ΙΕΡΩΝ** Αλλά είναι οι ακριβείς αποδείξεις, πραγματικά απαραίτητες στα εφαρμοσμένα μαθηματικά; Μετά από όλα αυτά το μαθηματικό μοντέλο είναι μόνο μια προσέγγιση της πραγματικότητας. Αν χρησιμοποιείς προσεγγιστικά σωστούς τύπους, τα αποτελέσματά σου θα προσεγγίζουν πολύ την πραγματικότητα και δεν θα είναι ποτέ απόλυτα σωστά.*

***ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ** …Ακριβώς επειδή το μαθηματικό μοντέλο είναι μόνο μια προσέγγιση και υπάρχει πάντα μια ασυμφωνία με τα γεγονότα, θα πρέπει να φροντίσουμε ώστε αυτή η ασυμφωνία να μην μεγαλώσει περισσότερο με την σωστή χρήση των μαθηματικών. Θα πρέπει κανείς να είναι όσο το δυνατόν ακριβής. …υπάρχει μια κοινή παρεξήγηση ότι χρησιμοποιώντας προσεγγίσεις αποχωρείς από την μαθηματική ακρίβεια. Οι προσεγγίσεις έχουν μια ακριβή θεωρία, και αποτελέσματα σχετικά με προσεγγίσεις – για παράδειγμα , ανισώσεις – πρέπει να αποδείχνονται τόσο αυστηρά όσο οι ταυτότητες. Πιθανά να θυμάσαι τις προσεγγίσεις που έδωσα για την επιφάνεια του κύκλου, όταν δίνεται η διάμετρος. Το απέδειξα με αυστηρή χρήση της γεωμετρίας.*

***ΙΕΡΩΝ** Σε ποια άλλα αποτελέσματα σε οδήγησε η μηχανική σου μέθοδος;*

***ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ** Αυτή η μέθοδος με οδήγησε να ανακαλύψω ότι **ο όγκος μιας σφαίρας είναι τα δύο τρίτα του όγκου του περιγεγραμμένου κυλίνδρου**.*

*…Θεωρώ ότι η μέθοδος από μόνη της είναι περισσότερο ενδιαφέρουσα από κάθε επί μέρους αποτέλεσμα στο οποίο μπορώ να οδηγηθώ με την βοήθειά της. Θυμάσαι τι σου είπα κάποτε μιλώντας για τους μοχλούς: **«Δώσε μου ένα τόπο να σταθώ και μπορώ να κινήσω την γη»**; Βεβαίως δεν υπάρχει τέτοιο σημείο στον κόσμο….*

ΙΕΡΩΝ *Πάντα μου μιλάς για εφαρμοσμένα μαθηματικά αλλά όλα τα παραδείγματα που μου δίνεις είναι εφαρμογές της γεωμετρίας. Όσον αφορά τη γεωμετρία, μπορώ τώρα να δω πως μπορεί να εφαρμοστεί. Για παράδειγμα η λειτουργικότητα μιας μηχανής εξαρτάται από την μορφή και το μέγεθος των στοιχείων που την απαρτίζουν. Η τροχιά μιας πέτρας που ρίχνει ο καταπέλτης σου είναι μια καμπύλη, κατά προσέγγιση μια παραβολή όπως είπες. Αλλά τι συμβαίνει με άλλους κλάδους των μαθηματικών όπως λόγου χάριν η θεωρία αριθμών. Δύσκολα μπορώ να φανταστώ ότι μπορεί να έχει κάποιο πρακτικό ενδιαφέρον. Βεβαίως δεν μιλώ για τα στοιχεία της αριθμητικής που ξεκάθαρα χρησιμοποιούνται σε κάθε είδος υπολογισμού. Εννοώ πράγματα όπως η διαιρετότητα, οι πρώτοι αριθμοί, το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο και άλλα παρόμοια.*

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ *Λοιπόν, αν συνδέσεις δυο γρανάζια το καθένα με διαφορετικό αριθμό δοντιών το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο έρχεται αναπόφευκτα. Σε πείθει αυτό το απλό παράδειγμα; Πρόσφατα πήρα ένα γράμμα από τον φίλο μου τον Ερατοσθένη τον Κυρηναίο, που μου έγραφε σχετικά με μια απλή αλλά ευφυή μέθοδο – την έλεγε κόσκινο – την οποία επινόησε για να βρίσκει τους πρώτους αριθμούς. Σκέψου σχετικά με αυτή την μέθοδο. Έκανα ένα σχέδιο μιας μηχανής που υλοποιεί την ιδέα. Αυτή η μηχανή λειτουργεί με ένα σύνολο γραναζιών. Όταν το γυρίσεις ας πούμε n φορές και κοιτάξεις στην τρύπα εάν η θέα είναι ανοικτή ο αριθμός n είναι πρώτος. Αλλά αν η θέα είναι κλειστή τότε ο n είναι σύνθετος.*

…ΙΕΡΩΝ *…θα θυμηθώ μια ιστορία σχετικά με του Ευκλείδη.* ***Ένας από τους μαθητές του μελετώντας γεωμετρία του ρώτησε. «Τι θα κερδίσω μαθαίνοντας αυτά τα πράγματα;». Αμέσως ο Ευκλείδης κάλεσε τον δούλο του και είπε. « Δώσε του ένα νόμισμα, αφού θέλει να κερδίσει από αυτό που μαθαίνει.»*** *Μου φαίνεται πως αυτή η ιστορία δείχνει του Ευκλείδη να σκέφτεται πως δεν είναι απαραίτητο για έναν μαθηματικό να σκοτίζεται για την πρακτική χρήση των αποτελεσμάτων του.*

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ *Νομίζω ότι εσύ και πολλοί άλλοι έχετε παρανοήσει την ιστορία με τον Ευκλείδη. Δεν σημαίνει ότι δεν ενδιαφέρεται για τα πρακτικά συμπεράσματα των μαθηματικών και τα θεωρεί ανάξια για έναν φιλόσοφο. Αυτό είναι καθαρά εκτός λογικής. Έχει γράψει όπως πολύ καλά γνωρίζεις το βιβλίο με τίτλο Φαινόμενα, σχετικά με την αστρονομία και ένα βιβλίο στην οπτική και επίσης πιθανότατα είναι ο συγγραφέας του βιβλίου Κάτοπτρα που χρησιμοποίησα για την κατασκευή των κατόπτρων, είχε επίσης ενδιαφερθεί για την μηχανική. Όπως εγώ καταλαβαίνω την ιστορία ο Ευκλείδης ήθελε να δώσει έμφαση στο αξιοσημείωτο γεγονός πως τα*

μαθηματικά ανταμείβουν μόνο όσους ενδιαφέρονται γι αυτά, όχι μόνο για την ανταμοιβή αλλά και για τα ίδια τα μαθηματικά.....

Τρίτος διάλογος: για τη γλώσσα του βιβλίου της φύσης

Ο τρίτος διάλογος έχει ως θέμα τη σπουδαιότητα της μαθηματικής μεθόδου για την ανακάλυψη των νόμων της φύσης. Η αρμονία μαθηματικών – φυσικής και η εξαιρετική καταλληλότητα της μαθηματικής γλώσσας στην περιγραφή των φυσικών φαινομένων περιγράφονται από τον E. Wigner στο άρθρο του *Η Ανεξήγητη Αποτελεσματικότητα των Μαθηματικών στις Φυσικές Επιστήμες*, όπου γράφει ότι «...το θαύμα της καταλληλότητας της μαθηματικής γλώσσας για τη διατύπωση των νόμων της φυσικής *είναι ένα εξαίσιο δώρο[...]* Θα πρέπει να είμαστε ευγνώμονες γι' αυτό και να ελπίζουμε ότι δε θα μας αφαιρεθεί αλλά θα επεκταθεί...» (Ταμπάκης, 1996: 21-23). Όμως, η αμφίδρομη σχέση μαθηματικών και φυσικής, εκτός από τη *«μαθηματικοποίηση»* της φυσικής, οδηγεί και στη *«φυσικοποίηση»* των μαθηματικών, όταν μέσα από γνωστές μεθόδους και προτάσεις της φυσικής (κυρίως της Μηχανικής), επινοούνται μαθηματικές προτάσεις και η λύση ορισμένων καθαρώς μαθηματικών προβλημάτων. Χαρακτηριστική περίπτωση είναι η ανακάλυψη από τον Αρχιμήδη μαθηματικών (γεωμετρικών) προτάσεων με χρήση μηχανικών μεθόδων, καθώς και η ιδιοφυής μηχανική επινόηση της *«τετραγωνίζουσας»* του Ιππία που χρησιμοποιήθηκε για την τριχοτόμηση της γωνίας και τον τετραγωνισμό του κύκλου (Ταμπάκης, 1996: 162).

Ο τρίτος *Διάλογος για τα Μαθηματικά* διεξάγεται μεταξύ του Γαλιλαίου[6], του Τορικέλι και της Κ. Νικολίνι, στο σπίτι της τελευταίας, στο οποίο φιλοξενείται ο Γαλιλαίος. Στο διάλογο αυτό αναλύεται η σχέση των μαθηματικών με τις άλλες επιστήμες, ιδιαίτερα με τις φυσικές επιστήμες και την τεχνολογία και υποστηρίζεται η άποψη ότι τα μαθηματικά είναι απαραίτητα για τη μελέτη της φύσης. Ο Γαλιλαίος υποστηρίζει ότι όποιος μελετά τη φύση, δεν είναι αρκετό να χρησιμοποιεί μόνο τα αποτελέσματα, αλλά πρέπει να έχει και βαθιά γνώση των μαθηματικών.

ΓΑΛΙΛΑΙΟΣ *Από πολύ καιρό είχα σχεδιάσει να γράψω αυτό το βιβλίο. Επί τέλους το άρχισα πριν μερικούς μήνες, αλλά με διέκοψε το κάλεσμα εδώ στη Ρώμη για ανάκριση....*

ΤΟΡΡΙΚΕΛΛΙ *Θα ήθελα πολύ να ακούσω κάτι για το περιεχόμενό του.*

---

[6] Ο Γαλιλαίος (Galileo Galilei, 1564-1643) έγραψε το έργο *Διάλογος σχετικά με τα δυο κύρια συστήματα του κόσμου: του Πτολεμαίου και του Κοπέρνικου (Dialogo sopra I due massimi sistemi del mondo, tolemaico e copernicano)*

ΓΑΛΙΛΑΙΟΣ *Οι Έλληνες μαθηματικοί έφτασαν σε καταπληκτικά συμπεράσματα στην επιστήμη τους και μερικοί από αυτούς –π.χ. ο Αρχιμήδης- εφαρμόσαμε με μεγάλη επιτυχία τα αποτελέσματα τους σε διάφορα πρακτικά ζητήματα. Αλλά κρατήθηκαν μακριά από τη μαθηματική μελέτη της κίνησης και από εκείνη την εποχή κανένας δεν το τόλμησε. Στην εργασία μου, αν ποτέ τελειώσει, το πιο σημαντικό μέρος θα είναι η περιγραφή της κίνησης*

… οι Έλληνες φιλόσοφοι συχνά συζητούσαν για την κίνηση. Πάρε για παράδειγμα τα παράδοξα του Ζήνωνα, για τον Αχιλλέα και τη χελώνα. … Ο Αριστοτέλης προσπάθησε να καταρρίψει τα παράδοξα του Ζήνωνα… Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, οι φυσικές επιστήμες ασχολούνται με ανεξαρτήτως υπάρχοντα, αλλά μεταβλητά πράγματα, ενώ τα μαθηματικά ασχολούνται με αμετάβλητα, αλλά όχι ανεξαρτήτως υπάρχοντα πράγματα και τα ανεξαρτήτως υπάρχοντα και μεταβλητά πράγματα- ένα από αυτά είναι η κίνηση- δεν μπορούν να είναι αντικείμενο καμίας επιστήμης… Η λανθασμένη διδασκαλία του όρθωσε έναν αφύσικο φραγμό ανάμεσα στα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες που μόνο ελάχιστοι άνθρωποι τόλμησαν να ξεπεράσουν.

Από τις πρώτες σελίδες του Διαλόγου, ο Γαλιλαίος διευκρινίζει ότι η μαθηματική μελέτη της κίνησης είναι κεντρικό σημείο αναφοράς του έργου του. Στη συνέχεια τοποθετείται για τη σχέση του με την εκκλησία και τα προβλήματα που αντιμετωπίζει:

ΓΑΛΙΛΑΙΟΣ *…όταν ήρθα στη Ρώμη εξακολουθούσα να πιστεύω ότι θα ήμουν ικανός να πείσω την εκκλησία πως το ζήτημα της κίνησης της γης δεν ήταν ζήτημα πίστης, αλλά ζήτημα πραγματικότητας, η εξέταση του οποίου έπρεπε να αφεθεί στην επιστήμη. … Αν η εκκλησία συνεχίσει να υποστηρίζει το Πτολεμαϊκό σύστημα θα βρεθεί στην ίδια κατάσταση με εκείνον που παραμένει στο κατάστρωμα ενός πλοίου που βυθίζεται.…*

Για την εξήγηση των φυσικών νόμων με τη βοήθεια των μαθηματικών:

Κ. ΝΙΚΟΛΛΙΝΙ *… Δεν κατάλαβα εντελώς αυτό που είπες για τους νόμους της φύσης, πως είναι δηλαδή γραμμένοι στη γλώσσα των μαθηματικών.*

ΓΑΛΙΛΑΙΟΣ *Έλα στο παράθυρο, σε παρακαλώ. Κοίτα αυτή τη σφαίρα. Θα την αφήσω ελεύθερη. Παρατήρησε πως θα πέσει στο έδαφος. Παρατήρησέ την καθώς πέφτει. Τι σημείωσες;*

Κ. ΝΙΚΟΛΛΙΝΙ *Φαίνεται να πέφτει με όλο και μεγαλύτερη ταχύτητα.*

ΓΑΛΙΛΑΙΟΣ *Έχεις δίκιο, αλλά πώς «μαζεύει» ταχύτητα; Υπάρχει μια θαυμάσια απλή κανονικότητα. …αν η ταχύτητα είναι σταθερή, η απόσταση είναι ίση με το γινόμενο του χρόνου επί την ταχύτητα. Αν ένα οριζόντιο*

τμήμα αντιπροσωπεύει το χρόνο, ένα κάθετο τμήμα την ταχύτητα, η απόσταση που καλύπτεται είναι ίση με το εμβαδόν του ορθογωνίου που έχει σαν πλευρές τα τμήματα που αναφέραμε… και ακόμα λέω – έστω και αν με ξαναϋποπτευθούν για αίρεση – ότι ***εδώ πάνω στη γη, η κίνηση ακολουθεί τους ίδιους νόμους που ακολουθεί και στον ουρανό****.*

Κ. ΝΙΚΟΛΛΙΝΙ *… Ίσως απόψε θα ονειρευτείς μια άλλη εποχή, στην οποία ακόμη και τα μικρά παιδιά θα μαθαίνουν στο σχολείο ότι η γη κινείται γύρω από του ήλιο.*

ΓΑΛΙΛΑΙΟΣ …*είμαι σίγουρος ότι αυτή η εποχή θα έρθει σύντομα. Την πρόοδο της επιστήμης δε μπορεί να τη σταματήσει κανείς. Αλλά μερικές φορές έχω αμφιβολίες αν αυτή η εποχή θα είναι πραγματικά τόσο ευτυχισμένη, όσο φαντάζομαι.…*

Κ. ΝΙΚΟΛΛΙΝΙ *…Αλλά θα υπάρχουν πάντα άνθρωποι για τους οποίους η αλήθεια είναι περισσότερο σπουδαία από οτιδήποτε άλλο…*

ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗΣ

Οι «Διάλογοι για τα Μαθηματικά» είναι ένα υποδειγματικό κείμενο, το οποίο προσφέρεται για διδακτική αξιοποίηση από τους εκπαιδευτικούς της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, τόσο στο πλαίσιο της διδασκαλίας των Μαθηματικών, της Φυσικής ή και άλλων μαθημάτων, όσο και στο πλαίσιο υλοποίησης πολιτιστικών προγραμμάτων ή διαθεματικών δραστηριοτήτων. Αυτό μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού δράματος. Έχουν ήδη υλοποιηθεί παρόμοιες δραστηριότητες σε σχολεία της Β/θμιας Εκπ/σης με πολύ θετικά αποτελέσματα. (Γαζίλα, 1993: 25-27).

Ενδεικτικές δυνατότητες για την αξιοποίηση των διαλόγων στο πλαίσιο της διδασκαλίας μπορούν να θεωρηθούν οι ακόλουθες:

Η πιο απλή δραστηριότητα με την οποία μπορούν να αξιοποιηθούν οι *Διάλογοι για τα μαθηματικά* είναι η ανάγνωση στην τάξη. Ο εκπαιδευτικός επιλέγει ένα κατάλληλο απόσπασμα και δυο ή περισσότεροι μαθητές το διαβάζουν στην τάξη. Ανάλογα με το χρόνο που διατίθεται, μπορεί να ακολουθήσει συζήτηση για θέματα που αναδεικνύονται μέσα από το κείμενο. Η δραστηριότητα μπορεί να αναπτυχθεί περισσότερο, με τους μαθητές να προετοιμάζονται για τους ρόλους που θα υποδυθούν, ή με τη δραματοποίηση του κειμένου ή αποσπασμάτων του και να οδηγήσει στη διοργάνωση ενός θεατρικού αναλογίου ή ακόμα και μιας θεατρικής παράστασης. Για τη μεγαλύτερη συμμετοχή των μαθητών, μπορεί να γίνει διανομή ενός ρόλου σε περισσότερα πρόσωπα. Π. χ. ο Ιπποκράτης στον πρώτο διάλογο θα μπορούσε

να αντικατασταθεί από μια ομάδα μαθητών. Το ίδιο μπορεί να γίνει και με τους άλλους ρόλους και τους άλλους διαλόγους.

Δυνατότητες αξιοποίησης δίνονται και μέσα από τη λειτουργία Λεσχών Ανάγνωσης, όπου ομάδες μαθητών συζητούν για συγκεκριμένα βιβλία και αναλύουν το περιεχόμενό τους. Οι «Διάλογοι για τα Μαθηματικά» μπορούν να συνδυαστούν επίσης με άλλα έργα παρεμφερούς περιεχομένου, μορφής και θεματολογίας τα οποία μπορούν να μελετηθούν παράλληλα. Ο δεύτερος διάλογος π.χ., συνδυάζεται με το μυθιστόρημα *Ο Άνθρωπος που μετρούσε την άμμο,* της Τζίλιαν Μπράνσοου[7], το οποίο αναφέρεται στη ζωή του Αρχιμήδη, όταν επέστρεψε από την Αλεξάνδρεια στις Συρακούσες και ανέλαβε την κατασκευή πολεμικών μηχανών για την άμυνα της πόλης. Ο τρίτος διάλογος συνδυάζεται με το θεατρικό έργο *Η ζωή του Γαλιλαίου,* του Μπέρτολτ Μπρεχτ, στο οποίο αναπτύσσονται κυρίως θέματα ηθικής στάσης του επιστήμονα, ο ρόλος της επιστήμης *(«πιστεύω πως ο μοναδικός σκοπός της επιστήμης είναι να ελαφρώσει το μόχθο της ανθρώπινης ύπαρξης», σελ. 142)* και ένας γενικότερος κοινωνικός προβληματισμός *(«Κι εγώ παρέδωσα τη γνώση μου στους δυνατούς για να την εκμεταλλευτούν, να την εξευτελίσουν ή να την αγνοήσουν, ανάλογα με τα συμφέροντά τους» σελ.143).*

Μέσα από τους *Διαλόγους για τα Μαθηματικά,* δίνεται η δυνατότητα να επιδιωχθούν διαθεματικές και διεπιστημονικές προσεγγίσεις θεμάτων όπως: η ηθική διάσταση της επιστήμης και του επιστήμονα, η σχέση των μαθηματικών με την άσκηση της εξουσίας, τον πόλεμο και την ειρήνη, την ελευθερία της σκέψης και του λόγου κ. α. (Ποια η θέση του Αρχιμήδη για τη χρησιμοποίηση των μαθηματικών και της φυσικής για την κατασκευή όπλων; Ποια η θέση του Γαλιλαίου για το ρόλο της εκκλησίας απέναντι στην επιστήμη;)

Θέματα φιλοσοφίας, επιστημολογίας, ιστορίας ή και διδακτικής μπορούν να συζητηθούν με τους μαθητές. Π.χ.: Τι είναι τα μαθηματικά και ποια είναι η σχέση τους με τον πραγματικό κόσμο; Επινοούμε ή ανακαλύπτουμε τα μαθηματικά; Πώς κατασκευάζεται και πώς λειτουργεί ένα μαθηματικό μοντέλο; Τι εμπόδια εμφανίζονται στην εξέλιξη της επιστήμης; Πώς πρέπει να παρατηρούμε, να συσχετίζουμε και να ερμηνεύουμε τα φυσικά φαινόμενα; Πώς μπορούμε να αξιοποιούμε το διάλογο για να παρουσιάζουμε τις θέσεις μας ή για να βγάζουμε συμπεράσματα; Ποιο ήταν το ιστορικό, το οικονομικό και το κοινωνικό πλαίσιο της εποχής των διαλόγων και ποια ήταν η κατάσταση στον πολιτισμό και στην ανάπτυξη των επιστημών; Ποια είναι η προσέγγιση των ιστορικών γεγονότων μέσα από την οπτική των κειμένων;

---

[7] *Ο Άνθρωπος που μετρούσε την άμμο,* της Τζίλιαν Μπράνσοου κυκλοφορεί από τις εκδόσεις Μίνωας (μτφρ. Γ. Καλαμαντής)

Στο πλαίσιο του μαθήματος των μαθηματικών ή της φυσικής μπορούν με αφορμή και με τη βοήθεια των *Διαλόγων* να συζητηθούν θέματα, όπως; Το νόημα του φυσικού νόμου για την ερμηνεία του φυσικού κόσμου και των φυσικών φαινομένων. Η μελέτη της κίνησης, η σημασία της και ο ρόλος που έπαιξε στην εξέλιξη των μαθηματικών. Η μαθηματική έκφραση των νόμων της φυσικής. Η βοήθεια που προσφέρουν τα μαθηματικά για την κατανόηση της φυσικής, αλλά και αντίστροφα, πως η φυσική μπορεί να μας βοηθήσει για την κατανόηση των μαθηματικών (π.χ.: πως μπορούμε να κατανοήσουμε καλύτερα την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο μιας συνάρτησης συνδέοντας την με την ταχύτητα και την επιτάχυνση)

Ακόμη και θέματα μορφολογίας των κειμένων και αλληλεπίδρασης μορφής και περιεχομένου μπορούν να συζητηθούν σε συνεργασία με τους εκπαιδευτικούς γλωσσικών μαθημάτων. Να αναζητηθούν οι ιδιαιτερότητες του λόγου και της γλώσσας των επιστημονικών κειμένων, τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα, οι ομοιότητες και οι διαφορές τους με άλλα κείμενα και να επιδιωχθεί μία συγκριτική ανάγνωση – ανάλυση. Ποιες οι ομοιότητες και ποιες οι διαφορές στη δομή και τη λειτουργικότητα των τριών διαλόγων;

Είναι βέβαιο, ότι εφόσον υπάρχει το κατάλληλο παιδαγωγικό κλίμα στην τάξη, στο πλαίσιο της υλοποίησης των δραστηριοτήτων που περιγράψαμε, προωθούνται και κατακτώνται σημαντικοί στόχοι της εκπαίδευσης, όπως είναι η βελτίωση της επικοινωνιακής ικανότητας των μαθητών και της ικανότητας για επιχειρηματολογία, η κοινωνικοποίηση τους, η ανάπτυξη της συνεργατικότητας και τέλος η αισθητική και πολιτιστική τους καλλιέργεια.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Brecht, Bertol (2000): *Η ζωή του Γαλιλαίου* (μεταφρ. Σπύρος Ευαγγελάτος). Αθήνα: Ερμής

Hadamard, Jacques (1995): *Η ψυχολογία της επινόησης στα μαθηματικά.* Αθήνα: Κάτοπτρο

Lakatos, Imre (1996): *Αποδείξεις και Ανασκευές.* Αθήνα: Τροχαλία

Rényi, Alfréd (1962): *Διάλογοι για τα μαθηματικά.* (μεταφρ. Μ. Μυτιληναίος, Τ. Σπύρου) Αθήνα: Διογένης.

Ταμπάκης, Νίκος (1996): *Αναπαραστάσεις του κόσμου Πραγματικότητα και σύγχρονη φυσική.* Αθήνα: εκδόσεις ΣΤΑΧΥ

Φίλη, Χριστίνα (1987): *Αμφίδρομα Παράλληλες Αναζητήσεις Επιστήμης και Τέχνης.* Αθήνα: Σμίλη.

ΔΙΑΒΑΖΟΝΤΑΣ ΓΙΑ ΤΗ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ ΠΑΡΕΑ ΜΕ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΑΣ

Σταυρούλα Παπανικολάου

Μαθηματικός Δ.Ε.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία μας προτείνεται μια διαθεματική προσέγγιση των μαθηματικών και της φυσικής για τους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, βασισμένη στην πλούσια εμπειρία λειτουργίας λεσχών ανάγνωσης στα σχολεία. Η θεωρία της σχετικότητας και οι πολυσυζητημένες εξελίξεις στη φυσική του 20ου αιώνα αλλά και οι πρωταγωνιστές αυτών των εξελίξεων , με εξέχουσα μορφή αυτή του Αϊνστάιν, ασκούν ιδιαίτερη γοητεία στους μαθητές. Ο χώρος και ο χρόνος, η τέταρτη διάσταση, η ταυτοχρονία, ο κυβισμός είναι κάποιες από τις έννοιες που θα ξεδιπλωθούν μέσα από τις σελίδες των βιβλίων «Αϊνστάιν Πικάσο» του Arthur Miller και «Τα ρολόγια του Αϊνστάιν και οι χάρτες του Πουανκαρέ» του Peter Galison. Υπάρχει τρόπος να πείσουμε τους μαθητές μας να διαβάσουν ένα από αυτά τα βιβλία; Πώς θα οργανώναμε μια λέσχη ανάγνωσης; Πώς μπορούμε να συζητήσουμε με τους μαθητές γι αυτά τα θέματα; Τι υλικό θα χρησιμοποιούσαμε; Θα επιδιώκαμε τη συνεργασία κι άλλων καθηγητών; Ποια θα ήταν τα άμεσα και έμμεσα αποτελέσματα για τους μαθητές, τους συντονιστές καθηγητές και για το σχολείο γενικότερα; Υπάρχει εμπειρία από μια τέτοια προσπάθεια; Η παρουσίαση θα προσπαθήσει να απαντήσει σε αυτά τα ερωτήματα και να προβάλει τις προοπτικές που ανοίγονται από αυτές τις προσπάθειες για μια νέα προσέγγιση στη διδακτική των μαθηματικών και της φυσικής, μια αναβαθμισμένη σχέση των μαθητών με τη λογοτεχνία, καθώς και για τη διαθεματικότητα στη πράξη.

Στην Ελλάδα το διάβασμα βιβλίων δεν είναι δημοφιλής ενασχόληση. Σύμφωνα με την Πανελλήνια Έρευνα Αναγνωστικής Συμπεριφοράς της VPRC, οι αγοραστές μπορεί να αυξάνονται, οι αναγνώστες όμως λιγοστεύουν. Δύο στους τρεις Έλληνες δεν διάβασαν κανένα βιβλίο το 2004, πλην σχολικού ή επαγγελματικού, ποσοστό 65,8%, , έναντι 61,1% που κατέγραψε

η ίδια έρευνα το 1998. Η έρευνα, που παρουσιάστηκε στην «Καθημερινή» 4-12-05, καταγράφει και άλλες ανησυχητικές συνήθειες: το 39% δεν διαβάζει ποτέ εφημερίδα, το 62% δεν πήγε ούτε μια φορά στον κινηματογράφο επί ένα έτος, το 83% δεν πήγε καθόλου στο θέατρο, το 90% δεν παρακολούθησε μια συναυλία...

Στα γενικά λύκεια της χώρας μας η λέξη διάβασμα έχει καθιερωθεί να χρησιμοποιείται με μια τελείως διαφορετική σημασία. Δεν συνδέεται με τη ψυχαγωγία. Είναι μια επιθυμία και ταυτόχρονα μια απαίτηση των καθηγητών από τους μαθητές, μια υποχρέωση, συνήθως δυσάρεστη, για τους μαθητές. Στη συντριπτική πλειοψηφία οι μαθητές δεν διαβάζουν γιατί θέλουν να μάθουν. Είναι ένα μέσο που θα τους κάνει να επιτύχουν στις εξετάσεις για το Πανεπιστήμιο, ένα έργο που απαιτείται για να πάρουν το βαθμό που χρειάζεται, ώστε να τους δοθεί το απολυτήριο του λυκείου. Έστω και μέσα από αυτή τη διαδικασία τα παιδιά μαθαίνουν σε βαθμό που ποικίλει και μάλιστα με μεγάλες αποκλίσεις. Τα περισσότερα δε, πιστεύουν ότι οι γνώσεις που αποκτούν δεν είναι χρήσιμες και φυσικά δεν απολαμβάνουν παρά πολύ σπάνια κάποιο μέρος της διαδικασίας. Είναι αντικείμενο μελέτης πως τα παιδιά που ασχολούνταν ώρες με τα τετράδια, τα μολύβια, τη ζωγραφική και τα βιβλία τους στη προσχολική ηλικία τώρα θεωρούν ότι ζουν όταν ολοκληρώσουν το διάβασμα και κλείσουν τα βιβλία τους. Φυσικά υπάρχουν και οι εξαιρέσεις αλλά μόνο για να επιβεβαιώσουν τον κανόνα. Όσοι διδάσκουμε στο λύκειο εισπράττουμε καθημερινά τις επιπτώσεις αυτής της αντίληψης αλλά και όλοι όσοι εμπλέκονται σύμβουλοι, φροντιστές και βέβαια οι γονείς των μαθητών έχουν κάνει αυτές τις ίδιες διαπιστώσεις. Δεν είναι το αντικείμενο αυτής της εισήγησης να μελετήσει σε μεγαλύτερο βάθος την όλη κατάσταση και να προτείνει ριζικές λύσεις. Παρόλο που πιθανόν είναι πιο δραστικό εγχείρημα, φαίνεται στις μέρες μας το πιο ουτοπικό και κυρίως ανεξάρτητο από τη θέληση μας.

Η Ελλάδα στον εκπαιδευτικό διαγωνισμό PISA του Οργανισμού Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης που πραγματοποιήθηκε το 2006 και εστίαζε στις δεξιότητες κατανόησης κειμένου και στον τομέα μαθηματικών και φυσικών επιστημών, κατατάχθηκε 38η σε σύνολο 57 χωρών που συμμετείχαν (PISA 2006, Analysis and Data, 4/12/2007). Εντύπωση προκαλεί το γεγονός ότι ενώ οι Έλληνες μαθητές εκδηλώνουν έντονο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες, τα κατανοούν και θεωρούνται ικανοί, έχουν πολύ χαμηλές επιδόσεις. Αυτά προκύπτουν από την τελευταία έκθεση του Οργανισμού Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης (ΟΟΣΑ) Education at a Glance 2007.

Όλοι όσοι είμαστε μαθηματικοί της τάξης έχουμε αντιληφθεί την δυσπιστία πολλών μαθητών απέναντι στο αντικείμενο, το άγχος για την επίδοση τους

και πολλές φορές καλούμαστε να απαντήσουμε σε ερωτήσεις του τύπου «Πού θα μας χρειαστούν αυτά, στη καθημερινότητα μας;». Αντιλήψεις που αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά από τη μια με δέος και θαυμασμό και από την άλλη με την απόσταση που αρμόζει σε ένα αντικείμενο δύσκολο και εκτός πραγματικότητας. Αντίστοιχη είναι και η στάση τους απέναντι στους μαθηματικούς., σεβασμός και θαυμασμός για το νοητικό σύμπαν που φαίνεται να κατέχουν και από την άλλη η εικόνα του αφηρημένου, που ζει στον κόσμο του, ανθρώπου. Συχνά δίνεται η εντύπωση ότι όπως καλούμε τα παιδιά να δουν ένα αντικείμενο σαν σχήμα, απαλλάσσοντας το από το υλικό του, το χρώμα του ή τη χρήση του, έτσι γενικεύοντας κι αυτά πιστεύουν ότι οι μαθηματικοί βλέπουν ασπρόμαυρα. Μια επιστήμη μονόπλευρη, απαλλαγμένη από συναισθήματα, συγκινήσεις, μύθο. Δεν είναι φυσικά διαφορετική η εικόνα του περίγυρου τους.

Για τις φυσικές επιστήμες τα πράγματα είναι κάπως καλύτερα. Είναι πιο εύκολη η σύνδεση με τη πραγματικότητα, ως μελέτη των φυσικών φαινομένων, μια άποψη που ενισχύεται από την εργαστηριακή υποστήριξη του μαθήματος. Οι μαθητές όμως θεωρούν τη φυσική ένα από τα πιο δύσκολα μαθήματα στο λύκειο.

Μετά από αυτές τις εισαγωγικές επισημάνσεις ο τίτλος αυτού του κειμένου φαίνεται ίσως ανέφικτος. Αντίθετα, λόγω ακριβώς αυτών των διαπιστώσεων είναι μεγάλη πρόκληση η επιτυχία ενός τέτοιου στόχου. Είναι ένα ισχυρό κίνητρο. Τα μαθηματικά αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της μεγάλης περιπέτειας των ανθρώπινων ιδεών, με βαθιές διασυνδέσεις με την φιλοσοφία, την ιστορία, την λογοτεχνία, την τέχνη, τις φυσικές και τις ανθρωπιστικές επιστήμες,. Και για αυτόν ακριβώς τον λόγο, πρέπει να αποκατασταθούν στη θέση που τους αρμόζει στο μυαλό όλων μας και ειδικότερα στο μυαλό της νέας γενιάς. Τα τελευταία χρόνια, γίνονται όλο και περισσότερες προσπάθειες να γεφυρωθεί το πολιτιστικό χάσμα. Γίνονται αποτελεσματικές απόπειρες να χρησιμοποιηθούν οι μέθοδοι των γνωστικών και των ανθρωπιστικών επιστημών στην κατανόηση και την εκμάθηση των θετικών επιστημών. Ενταγμένη σε αυτή τη προσπάθεια η σύνδεση της λογοτεχνίας με τα μαθηματικά και τις θετικές επιστήμες γενικότερα, τα τελευταία χρόνια είναι εντυπωσιακή. «*Ο εμπλουτισμός των διαλέξεών μας, των μεθόδων διδασκαλίας, και του προγράμματος σπουδών, με στοιχεία μυθιστοριογραφίας μπορεί να βοηθήσει με ποικίλους τρόπους και σε πολλά επίπεδα, να φέρει την ομορφιά, τη δύναμη, και την ψυχραιμία του μηνύματός μας με περισσότερη σαφήνεια, και λιγότερο πόνο στους αποδέκτες μας αλλά και σε ένα ευρύτερο και πιο διαφορετικό ακροατήριο*» (Παπαδημητρίου Χρήστος , 2003).

Παρά τον μεγάλο αριθμό άρθρων και προτάσεων για τη σύνδεση της λογοτεχνίας με τα μαθηματικά, εντούτοις, σχετικά λίγες επίσημες μελέτες

έχουν δημοσιευτεί για τα οφέλη από την εφαρμογή της στη πράξη. Οι περισσότερες αφορούν στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Οι Hebert & Furner το 1997 εισήγαγαν την τεχνική «bibliotherapy», μια μέθοδο με την οποία η σύνδεση μαθηματικών και λογοτεχνίας επιδρά αποτελεσματικά στους μαθητές για να ξεπεράσουν τη φοβία τους για τα μαθηματικά, αλλά και που βοηθάει ειδικές ομάδες μαθητών, είτε με μαθησιακές δυσκολίες είτε με ιδιαίτερο ταλέντο στα μαθηματικά. Πληθώρα άρθρων και βιβλίων έχουν εκδοθεί για τα θετικά αποτελέσματα της ενσωμάτωσης της λογοτεχνίας στη διδασκαλία των μαθηματικών είτε με τη μορφή παράλληλης ανάγνωσης, είτε με τη χρήση της για εμπλουτισμό της διδασκαλίας με δραστηριότητες, αλλά κυρίως με τα λογοτεχνικά βιβλία να λειτουργούν σαν αφορμή για τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών και των εφαρμογών τους. Κοινός παρονομαστής σε όλες τις έρευνες τα θετικά συμπεράσματα που εξήχθησαν που δείχνουν να επιβεβαιώνουν την αποτελεσματικότητα της σύνδεσης της λογοτεχνίας με τα μαθηματικά. Αντίστοιχες έρευνες για τη σύνδεση της μοντέρνας φυσικής και της λογοτεχνίας είχαν αποτελέσματα επίσης πολύ θετικά με το ποσοστό της μεγαλύτερης τιμής στην αξιολόγηση των μαθητών για το εγχείρημα, να φτάνει στο 48% (Alan J Friedman, 1973).

Η πρόταση μας δεν είναι να επέμβουμε στη διαδικασία του μαθήματος, ενσωματώνοντας στη διδασκαλία μας τη χρήση λογοτεχνικών βιβλίων με θέματα από τις θετικές επιστήμες ούτε εμπλουτίζοντας το, με τη μορφή παράλληλης ανάγνωσης. Η πρόταση μας είναι να οργανώσουμε και να συντονίσουμε μια λέσχη ανάγνωσης με τους μαθητές μας και να ασχοληθούμε με τη σχετικότητα και όχι μόνο.

ΤΙ ΕΙΝΑΙ Η ΛΕΣΧΗ ΑΝΑΓΝΩΣΗΣ;

Λέσχη ανάγνωσης είναι μια ομάδα ανθρώπων, που συναντιούνται με κάποιο προσυμφωνημένο πρόγραμμα για να συζητήσουν ένα βιβλίο της επιλογής τους. Η διαδικασία μιας τέτοιας συνάντησης δεν είναι κάτι καινούριο, αν και η ονομασία λέσχη ανάγνωσης είναι σύγχρονη, γινόταν ακόμη και τότε, που το βιβλίο δεν υπήρχε με τη σημερινή μορφή του. Κάποτε το διάβασμα δεν ήταν μοναχική εμπειρία. Οι Ρωμαίοι διάβαζαν δυνατά σε άλλους και συζητούσαν. Τους αιώνες πριν την τυπογραφία, όταν τα βιβλία ή τα χειρόγραφα ήταν σπάνια και δυσεύρετα, η ανάγνωση ήταν μεγαλόφωνη και ακολουθούσε συζήτηση. Τον 15ο αιώνα στα σαλόνια της γαλλικής αριστοκρατίας οργανώνονταν από γυναίκες φιλολογικά απογεύματα. Στο Παρίσι, στα σαλόνια της αριστοκρατίας επίσης, ακούστηκαν για πρώτη φορά οι ιδέες του Διαφωτισμού. Οι πλούσιες αστές κυρίες δημιούργησαν έναν κοινωνικό κύκλο από λογοτέχνες, καλλιτέχνες, ζωγράφους, ανθρώπους των

γραμμάτων κ.α., και έτσι ικανοποιούσαν εν μέρει τη δίψα τους για μάθηση και πολιτισμό. Στα λογοτεχνικά καφέ τον 18ο αιώνα μεγάλες μορφές του Διαφωτισμού της λογοτεχνίας, της πολιτικής, της φιλοσοφίας συζητούσαν. Στις δημόσιες βιβλιοθήκες της Ουαλίας και της πολιτείας Queensland της Αυστραλίας φυλάσσονται γράμματα που χρονολογούνται στις αρχές του 19ου αιώνα τα οποία οι μετανάστες έστελναν σε συγγενείς και φίλους. Σε αυτά περιγράφουν πως στις ατέλειωτες ώρες του ταξιδιού τους με το πλοίο για Αυστραλία ή Αμερική, διάβαζαν και συζητούσαν.

Αργότερα τον 19ο αιώνα στην Αμερική γυναικείες ομάδες διάβαζαν ποίηση. Η ιστορία των καφέ συνεχίζεται σε όλη την Ευρώπη στις αρχές του 20ου αιώνα, ενδεικτικά το Caffe Florian στη Βενετία, το Closerie Des Lilas στο Παρίσι, το Café Sental στη Βιέννη, το Café Gijon στη Μαδρίτη γίνονται οι χώροι που οι διανοούμενοι της εποχής παρουσιάζουν τα έργα τους και συζητούν.

Η ανάγκη του ανθρώπου να επικοινωνήσει, να μοιραστεί τις απόψεις, τα συναισθήματα του και τις κρίσεις του για ένα έργο, μουσικό, κινηματογραφικό, θεατρικό, λογοτεχνικό, επιστημονικό είναι δεδομένη και ικανοποιείται αρκετά συχνά. Πολλές φορές σε τυχαίες συναντήσεις και άλλες φορές πιο συστηματικά αλλά χωρίς πρόγραμμα. Ο ***Schubert*** και οι φίλοι του συναντιόντουσαν, διαβάζανε Heine και συζητούσαν. Η «Συμμορία του Picasso » , η παρέα δηλαδή με πυρήνα τον Picasso συναντιόταν σχεδόν καθημερινά για να συζητήσουν γύρω από τη πολιτική, τη φιλοσοφία, τα μαθηματικά, τη τεχνολογία και την επιστήμη. Η παρέα του Einstein, η περίφημη «Ακαδημία της Ολυμπίας» διασκέδαζε και είχε πρόγραμμα συζητήσεων για έργα των Leibniz, Hume, Πλάτωνα, Poincare. Είναι φανερό ότι πέρα από τα επικοινωνιακά και ψυχαγωγικά οφέλη μιας τέτοιας δραστηριότητας, ο διάλογος είναι ο κινητήριος μοχλός για να οδηγήσει το μυαλό του καθενός ακόμη παραπέρα, ώστε κάποιες φορές να συμβάλλει σε άλματα στην παγκόσμια τέχνη και επιστήμη. Άλλωστε σε μας τους Έλληνες, είναι γνωστό ότι ο διάλογος υπήρξε ο βασικός παράγοντας ανάπτυξης της φιλοσοφίας και της επιστήμης στην αρχαία Ελλάδα. Στις μέρες μας εκτιμάται ότι υπάρχουν τουλάχιστον 50.000 λέσχες ανάγνωσης στη Μεγάλη Βρετανία και 500.000 στις ΗΠΑ ενώ μεγάλος είναι και ο αριθμός των λεσχών ανάγνωσης στη Γαλλία και στην Αυστραλία. Λέσχες ανάγνωσης μπορούν να οργανωθούν σε δήμους, χώρους δουλειάς, πολιτιστικούς συλλόγους, βιβλιοπωλεία, γειτονιές, Πανεπιστήμια, σχολεία. Στην Ελλάδα παρόλο που είναι κάτι σχετικά νέο, λειτουργούν λέσχες ανάγνωσης σχεδόν σε όλες τις πόλεις της Ελλάδας με ποικιλία στο είδος του βιβλίου.

Στην Ελλάδα όμως οφείλεται μια παγκόσμια πρωτοπορία. Λέσχες ανάγνωσης με θέμα τα μαθηματικά και μάλιστα στα σχολεία. Ομάδες αποτελούμενες από μαθητές και από συντονιστές καθηγητές.

ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΚΑΤΑΛΛΗΛΑ ΒΙΒΛΙΑ;

Οι θετικές επιστήμες στη λογοτεχνία παρουσιάζονται σε μεγάλο αριθμό βιβλίων. Με κάποια απλούστευση, ας δούμε δυο σημαντικές κατηγορίες αυτών των βιβλίων:

- Λογοτεχνικά βιβλία με αναφορές στις θετικές επιστήμες. Κύριος στόχος η ψυχαγωγία του αναγνώστη, με την αρχαϊκή σημασία του όρου, με φορέα κάποιο κομμάτι του ευρύτερου πεδίου των μαθηματικών.
- Επιστημονικά βιβλία με πλοκή ή δομή λογοτεχνικού βιβλίου. Κύριος στόχος η διδασκαλία μαθηματικών και φυσικών εννοιών με πρόσχημα ένα μύθο.

Σε αυτή τη κατηγορία θα μπορούσαμε να εντάξουμε τη πλειοψηφία των πρώτων επιστημονικών συγγραμμάτων, όπως:

«Τσου Πέι Τσουαγκ Σιγκ» (300 π.Χ.) το αρχαιότερο κινέζικο μαθηματικό κείμενο.

«Σούρια Σιντχάντα» (500 μ.Χ.) ινδικό επικό ποίημα με αστρονομικές παρατηρήσεις και μαθηματικές προεκτάσεις.

Επίσης όλα τα έργα του Γαλιλαίου και το Somnium του Κέπλερ.

Σε ολόκληρο το Μεσαίωνα, υπήρξε διδακτικό εγχειρίδιο το «Περί των γάμων του Ερμή και της φιλολογίας» του Μαρσιανού Καπέλα (400μ.Χ.), ένα λογοτεχνικό κείμενο που παρουσίαζε το σύνολο των επιστημονικών γνώσεων της εποχής.

Στην εποχή μας έχουμε μεγάλη ποικιλία βιβλίων «μαθηματικής λογοτεχνίας» και μάλιστα αρκετά ελλήνων συγγραφέων. Το πρώτο που εκδόθηκε, και για το οποίο αξίζει να αναφέρουμε τη τεράστια επιτυχία του στην Ελλάδα αλλά και στο εξωτερικό, είναι το «Ο θείος Πέτρος και η εικασία του Γκόλντμπαχ» του Απόστολου Δοξιάδη. Η επιλογή ενός βιβλίου για μια λέσχη ανάγνωσης είναι πια πολύ εύκολη, εφόσον μπορούμε να επιλέξουμε ανάμεσα σε δεκάδες που έχουν εκδοθεί, παίρνοντας υπόψη μας το στόχο, τα ενδιαφέροντα και τις δυνατότητες των μαθητών και συντονιστών καθηγητών. Άρθρα για τα κριτήρια αξιολόγησης βιβλίων «μαθηματικής λογοτεχνίας», όπως και κατάλογοι με αυτά τα βιβλία έχουν συνταχθεί κυρίως στην Ελλάδα αλλά και στις ΗΠΑ.

ΤΟ ΞΕΚΙΝΗΜΑ

Με δεδομένη την απόφαση για τη δημιουργία μιας λέσχης ανάγνωσης στο σχολείο, με αντικείμενο τη σχετικότητα, διαλέγουμε ως μέσο ένα από δυο πολύ αξιόλογα βιβλία. Το ένα «Αϊνστάιν Πικάσο» του Arthur Miller, και το άλλο «Τα ρολόγια του Αϊνστάιν και οι χάρτες του Πουανκαρέ» του Peter Galison. Γνωρίζουμε ότι θα είναι μια καινούρια εμπειρία για τα παιδιά από πολλές απόψεις, Οι συναντήσεις δεν έχουν καμιά ομοιότητα με το μάθημα. Η συζήτηση, η συμφωνία, η διαφωνία είναι απαραίτητα συστατικά για μια εποικοδομητική συνάντηση. Η συνεργασία με τους συμμαθητές τους στην εύρεση στοιχείων, στις δραστηριότητες, στις επισκέψεις είναι επίσης κάτι νέο. Το θέμα δεν το γνωρίζουν γιατί ακόμη και αν η θεωρία της σχετικότητας περιέχεται στο βιβλίο της κατεύθυνσης της Γ' λυκείου είναι «εκτός ύλης». Παράλληλα όμως οι ραγδαίες εξελίξεις στη φυσική από τον 20ο αιώνα και μετά, η σχετικότητα, η κβαντομηχανική και οι εφαρμογές τους έχουν πυροδοτήσει συζητήσεις που έχουν ξεφύγει από τη στενή επιστημονική κοινότητα. Το ευρύ κοινό ενδιαφέρεται για τις εξελίξεις αυτές σε σχέση με τη κοινωνικοπολιτική κατάσταση, όπως για παράδειγμα τη κατασκευή και την έκρηξη της ατομικής βόμβας. Η διαστολή του χρόνου, η τέταρτη διάσταση, τα παράλληλα σύμπαντα εξήψαν τη φαντασία συγγραφέων και σκηνοθετών που δημιούργησαν έργα βασισμένα σε ταξίδια στο χρόνο. Ο Einstein από τους πρωταγωνιστές αυτών των εξελίξεων είναι ο πιο γνωστός επιστήμονας στο πλατύ κοινό διεθνώς.. Οι μαθητές μας έχουν το ενδιαφέρον να προσεγγίσουν όλες αυτές τις νέες έννοιες την ιστορία της γέννησης τους και τον τρόπο που άλλαξαν την εικόνα μας για τον κόσμο. Επομένως δεν έχουμε παρά να τους το προτείνουμε.

Η ΟΡΓΑΝΩΣΗ

Μια πολύ σημαντική πτυχή στη δημιουργία της λέσχης είναι η πρόταση μας στους υπόλοιπους καθηγητές να συντονίζουν ή και να συμμετέχουν στη λέσχη. Η διαφορετική οπτική ματιά του καθενός και η προσφορά γνώσεων σε άλλο τομέα δίνει τη διάσταση της διαθεματικότητας στη πράξη και δίνει επιπρόσθετο ενδιαφέρον στις συναντήσεις. Η δραστηριότητα μπορεί να ενταχθεί στα πολιτιστικά προγράμματα ή και στα προγράμματα αγωγής υγείας. Συνήθως ορίζεται μια συνάντηση κάθε εβδομάδα και με δεδομένες τις διαθέσιμες εβδομάδες μοιράζουμε τις σελίδες του βιβλίου που αναλογούν σε κάθε μια από αυτές.. Στη κάθε συνάντηση σχολιάζονται, συζητιούνται τα αντίστοιχα θέματα, εμπλουτίζονται με πληροφορίες από άλλα μέσα βιβλία, περιοδικά, internet. Προτείνονται δραστηριότητες, επισκέψεις,

εκδρομές. Κάθε λέσχη έχει τη δική της δυναμική και προσαρμόζει τους στόχους και τις επιδιώξεις της ανάλογα με τις δυνατότητες και τα ενδιαφέροντα των συμμετεχόντων της. Τα ταλέντα των μαθητών αξιοποιούνται δημιουργικά και συχνά δίνουν και ένα τελικό αποτέλεσμα όπως δημιουργία αφίσας, σκίτσων, θεατρικού ή κινηματογραφικού έργου. Ας δούμε πως θα αξιοποιούσαμε σε αυτή τη κατεύθυνση τα δυο προτεινόμενα βιβλία, παίρνοντας υπόψη ότι μπορούν να ειδωθούν σε πολλά επίπεδα ανάλογα τις δυνατότητες της ομάδας.

«ΑΪΝΣΤΑΙΝ – ΠΙΚΑΣΟ, Ο ΧΩΡΟΣ, Ο ΧΡΟΝΟΣ ΚΑΙ Η ΟΜΟΡΦΙΑ», ARTHUR MILLER, ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΡΑΥΛΟΣ 2002

Ο συγγραφέας Arthur Miller είναι καθηγητής της Ιστορίας και φιλοσοφίας της Επιστήμης στο University College του Λονδίνου. Έχει συμμετάσχει σε πολλές τηλεοπτικές και ραδιοφωνικές εκπομπές, όπως το Nova, το The Late Show και το In our time και έχει διδάξει και γράψει ευρέως για την ιστορία και τη φιλοσοφία της σύγχρονης επιστήμης, τις γνωσιακές επιστήμες, την επιστημονική δημιουργικότητα και τη σχέση μεταξύ τέχνης και επιστήμης.

Το βιβλίο του αυτό, έχει στόχο να αναδείξει αλλά και να διερευνήσει τη φύση της δημιουργικής σκέψης. Τη περίοδο 1900- 1910 συντελέστηκαν ρηξικέλευθες αλλαγές τόσο στην τέχνη όσο και στην επιστήμη. Ο Αϊνστάιν φτάνει στη διατύπωση της θεωρίας της σχετικότητας αλλάζοντας για πάντα την εικόνα που βλέπουμε τον κόσμο και ο Πικάσο ολοκληρώνει τον πίνακα ¨Οι δεσποινίδες της Αβινιόν» εισάγοντας την τέχνη στον εικοστό αιώνα. Μέσα από τις βιογραφίες τους ζωντανεύει το κλίμα της εποχής και οι συνθήκες της μποέμικης φτώχειας στις οποίες ζούσαν ο Αϊνστάιν και ο Πικάσο, στη Βέρνη και στο Παρίσι αντίστοιχα. Οι κοσμογονικές αλλαγές σάρωναν την Ευρώπη. Η τεχνολογία αναπτυσσόταν γοργά, η ηλεκτροδότηση προχωρούσε στο Παρίσι και άρχισε η προβολή των πρώτων κινηματογραφικών ταινιών. Στενοί φίλοι συναντιόντουσαν στο ατελιέ του Πικάσο που έγραφε «Ραντεβού των ποιητών», από την άλλη μια παρόμοια συντροφιά βρισκόταν στη Βέρνη αυτοονομαζόμενη «Ακαδημία της Ολυμπίας» και συζητούσαν τις εξελίξεις σε όλα τα γνωστικά αντικείμενα. Το υπαινικτικό φλερτάρισμα του Poincare με ανώτερες διαστάσεις ήταν ανάμεσα στους παράγοντες που ώθησαν τον Πικάσο να ανακαλύψει τη γεωμετρία ως γλώσσα της νέας τέχνης, και οι ιδέες του για το χρόνο και το ταυτόχρονο βοήθησαν τον Αϊνστάιν να ανακαλύψει τη σχετικότητα. Οι νέοι τρόποι αναπαράστασης της πραγματικότητας που και οι δυο αναζητούσαν, καρποφορούν όταν τα σύνορα των γνωστικών πεδίων καταρρέουν και κάποιες έννοιες της αισθητικής αποκτούν μέγιστη σημασία.

Η ομάδα ανάγνωσης που θα ασχοληθεί με αυτό το βιβλίο θα εμπλουτιζόταν από την παρουσία ενός φυσικού και ενός γνώστη της τέχνης και της ιστορίας της.

Το βιβλίο αποτελείται από 8 κεφάλαια στα οποία εναλλάσσονται οι αφηγήσεις για τη ζωή και το έργο των δυο ηρώων. Τα μισά κεφάλαια αφορούν στη ζωή και το έργο του Πικάσο και τα άλλα μισά τη ζωή και το έργο του Αϊνστάιν. Σε αυτά και διαδοχικά από τη μια σελίδα στην άλλη ξεδιπλώνεται ο άνθρωπος Αϊνστάιν από την παιδική του ηλικία ως και την ηλικία που ήταν πια «απόλυτα διάσημος». Απαντώνται ερωτήματα που πολλοί μαθητές έχουν, για παράδειγμα αν ήταν καλός μαθητής ή τι σχέση είχε με το σχολείο. Από την άλλη ξεδιπλώνεται και η πορεία του ως επιστήμονας, ποιοι τον επηρέασαν στη σκέψη του, ποια έργα επέδρασαν στη διατύπωση της θεωρίας της σχετικότητας, ποια ήταν η σχέση του με τους άλλους φυσικούς της εποχής του. Το βιβλίο προσφέρει τη δυνατότητα στην ομάδα για πολλές δραστηριότητες, ενδεικτικά αναφέρουμε:

- Έρευνα για βιογραφίες πλήθους προσωπικοτήτων που παρελαύνουν στο βιβλίο από διαφορετικούς χώρους, φυσικών, μαθηματικών, φιλόσοφων, ζωγράφων.
- Συζητήσεις για την εκπαίδευση, το ρόλο του επιστήμονα στον κοινωνικό περίγυρο, την ευθύνη για τη χρήση των ανακαλύψεων του, την έννοια της δημιουργίας, την τέχνη, την υπεροχή των Γερμανών φυσικών στις αρχές του 20ου αιώνα, την επιμονή και υπομονή για την επίτευξη του στόχου παρά τις αντίξοες συνθήκες, όπως αυτή που επέδειξαν οι πρωταγωνιστές μας, συνθήκες που άλλους θα καταρράκωναν.
- Σχολιασμοί: π.χ. της δήλωσης του Αϊνστάιν «οι δάσκαλοι μου στο δημοτικό θύμιζαν λοχίες και στο γυμνάσιο υπολοχαγούς».
- Αναλύσεις όρων όπως κυβισμός, ταυτοχρονία, απόλυτος χώρος και χρόνος, διαστολή του χρόνου, χώρος των τεσσάρων διαστάσεων με παραδείγματα.
- Γνωριμία με τις μη Ευκλείδειες γεωμετρίες.
- Δραστηριότητες.
    1. Δημιουργία άλμπουμ με έργα των σπουδαίων ζωγράφων που αναφέρονται.
    2. Παρουσίαση της ιστορίας της φωτογραφίας
    3. Παρουσίαση της ιστορίας του κινηματογράφου

4. Παιχνίδι με τις διπλωμένες οπτικές κάρτες, νέες οπτικές προσεγγίσεις, ψυχολογία γκεστάλτ.

5. Παρουσίαση των ανακαλύψεων της φυσικής που δεν μπορούμε να δούμε, ακτίνες Χ, ακτίνες Γ , ακτίνες Β, ραδιενέργεια.

- Επισκέψεις. Ίδρυμα Ευγενίδου, Δημόκριτος, Εθνική Εστία Επιστημών, Μουσείο Ηρακλειδών.

«ΤΑ ΡΟΛΟΓΙΑ ΤΟΥ ΑΪΝΣΤΑΙΝ ΚΑΙ ΟΙ ΧΑΡΤΕΣ ΤΟΥ ΠΟΥΑΝΚΑΡΕ», PETER GALISON, ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΤΟΠΤΡΟ, 2007.

Ο Peter Galison είναι καθηγητής ιστορίας της επιστήμης και καθηγητής φυσικής στο Πανεπιστήμιο του Harvard. Του έχουν απονεμηθεί το Βραβείο Max Planck, η υποτροφία από το Ίδρυμα Mac Arthur, καθώς και το βραβείο Pfizer καλύτερου βιβλίου ιστορίας της επιστήμης για το έργο του Image and Logic.

Στόχος του βιβλίου του είναι να μας οδηγήσει σε μια διττή ανάγνωση της Επιστήμης και της Τεχνολογίας. Να εκτιμήσουμε αφενός μεν τις αφηρημένες έννοιες και μεταφορές που ζωντανεύουν στα σχετικιστικά έργα του Einstein και του Poincare ως πραγματικά αφηρημένες, αλλά ταυτόχρονα να τις ερμηνεύσουμε σε σχέση με τους πλήρως υλικούς κόσμους στους οποίους ανήκουν. Πιο συγκεκριμένα πώς οι πνευματικές διαδρομές του Albert Einstein και του Henri Poincare συνδέονται με τη μέτρηση του χρόνου χρησιμοποιώντας τηλεγραφικά δίκτυα, το συγχρονισμό των ρολογιών στους σιδηροδρομικούς σταθμούς και την αντιστοίχιση των χρονικών συντεταγμένων στα σημεία της υδρογείου. Τα ιστορικά γεγονότα παρουσιάζονται σε πολλά επίπεδα, ενταγμένα στο κοινωνικό, πολιτικό, φιλοσοφικό και πολιτιστικό πλαίσιο στο οποίο γεννήθηκαν και αναπτύχθηκαν οι επαναστατικές ιδέες που άλλαξαν την επιστήμη. Η πολιτική των κυβερνήσεων για την προώθηση του εμπορίου, για τις θαλάσσιες αλλά και τις σιδηροδρομικές μεταφορές (οι οποίες θα χρησίμευαν και για τη μεταφορά στρατού) και η αποικιακή ευρωπαϊκή στρατηγική ανέδειξαν την απαίτηση γεωδαισίας και του προσδιορισμού της ώρας. Οι εθνικές φιλοδοξίες, ο αγώνας γοήτρου, η βιομηχανία, αλλά και η κατάκτηση και ο πόλεμος συνόδευαν την βύθιση των καλωδίων στους ωκεανούς, την επίγεια τοποθέτηση τους, τη χρηματοδότηση αποστολών και τις συναντήσεις των αντιπροσωπειών των χωρών για τον καθορισμό του πρώτου μεσημβρινού.

Ενδεικτικά το βιβλίο δίνει τη δυνατότητα για:

- Έρευνα για βιογραφίες Γαλιλαίου, Νεύτωνα, Lorentz, Heisenberg, Piaget.
- Έρευνα για στιγμές που η τεχνολογία προηγήθηκε της θεωρίας ,σχέση καθαρού και εφαρμοσμένου.
- Συζητήσεις για την στενή σχέση των μαθηματικών και της φυσικής ανά τους αιώνες, για την εκπαίδευση και τα εκπαιδευτικά συστήματα σε άλλες χώρες, τα αριθμητικά συστήματα αρίθμησης και το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης για τη μέτρηση γωνιών (βαθμοί–grad), για τα επιστημονικά πειράματα που δεν επαληθεύουν τη θεωρία, για τις κρίσεις στις θεωρίες της φυσικής και των μαθηματικών, τα οικονομικά κίνητρα στην επιστήμη.
- Πειράματα. Επαγωγή, κατοπτρικό γαλβανόμετρο Thomson.
- Αναλύσεις όρων όπως διαστολή του χρόνου, ταυτοχρονία, απόλυτος χώρος και χρόνος, χάος, fractals.
- Παράλληλα αναγνώσματα για τη καθιέρωση των προτύπων μέτρων και σταθμών.
- Γνωριμία με τις μη Ευκλείδειες γεωμετρίες.
- Δραστηριότητες.
    1. Δημιουργία σε παγκόσμιο χάρτη της πορείας του συγχρονισμού και της χαρτογράφησης.
    2. Έρευνα για τη καθιέρωση συμβάσεων (μηδέν, μονάδες μέτρησης).
    3. Προβολή οπτικοακουστικού υλικού για τη σχετικότητα και τον Albert Einstein.
    4. Παρουσίαση της ιστορίας του ρολογιού.
    5. Παιχνίδι με τη θεωρία της σχετικότητας χρησιμοποιώντας τα επιμορφωτικά προγράμματα της nova και ξένων Πανεπιστημίων και επιστημονικών ιδρυμάτων.
- Επισκέψεις. Ίδρυμα Ευγενίδου, Δημόκριτος, Εθνική Εστία Επιστημών, Μουσείο Ηρακλειδών.

Η ΕΜΠΕΙΡΙΑ

Η ομάδα «Θαλής και Φίλοι» είναι μία μη-κερδοσκοπική εταιρεία με έδρα την Ελλάδα και διεθνή δραστηριότητα, η οποία, με στόχο να δημιουργηθούν γέφυρες από και προς τα μαθηματικά, πρωτοπόρησε στη δημιουργία λεσχών ανάγνωσης με θέμα τα μαθηματικά. Ξεκινώντας αυτή η προσπάθεια από τη σχολική χρονιά 2005-2006 πιλοτικά, έχει φτάσει φέτος στην λειτουργία εκατό και πλέον λεσχών ανάγνωσης σε Γυμνάσια και Λύκεια σε όλη τη χώρα. Στη διάρκεια αυτών των ετών οι λέσχες ανάγνωσης έχουν ασχοληθεί με δεκάδες βιβλία και έχουν εκπονηθεί πολλά έργα ως τελικά αποτελέσματα της δουλειάς τους, θεατρικά, ομιλίες, κατασκευές, αφίσες, κείμενα.

Η δική μας εμπειρία στις λέσχες ανάγνωσης, με αντικείμενο βιβλία λογοτεχνίας με θέματα από τις θετικές επιστήμες, προέρχεται από το συντονισμό μιας λέσχης ενηλίκων στο βιβλιοπωλείο Fnac, που λειτούργησε για τρία χρόνια με ένα βιβλίο κάθε μήνα αλλά κυρίως από τις λέσχες ανάγνωσης που έγιναν στο 11ο Γενικό Λύκειο Πειραιά. Και οι λέσχες αυτές είναι πολλές. Η πρώτη, και από τις πρώτες λέσχες ανάγνωσης σε δημόσιο σχολείο, έγινε το 2005- 2006 με το βιβλίο «Τα αστέρια της Βερενίκης» του Denis Guedj, ένα μυθιστόρημα που περιγράφει τη μέτρηση της περιμέτρου της γης από τον Ερατοσθένη, με φόντο τη κοσμοπολίτισσα Αλεξάνδρεια με το Μουσείο και τη βιβλιοθήκη της. Τα παιδιά που συμμετείχαν ήταν 17 και τον συντονισμό ανέλαβαν δυο καθηγήτριες η υποφαινόμενη και η κ. Πιθαρούλη Άννα, φιλόλογος. Η εμπειρία ήταν εξαιρετική για όλους μας. «Είναι δύσκολο να εκμαιεύσεις από 16ρηδες τι πραγματικά είναι αυτό που τους κάνει να επιστρέφουν στους τέσσερις τοίχους του σχολείου, ακόμη και τις Κυριακές, για να ανταλλάξουν απόψεις επί λογοτεχνικών έργων που αντλούν τη θεματολογία τους από τα μαθηματικά» γράφει η δημοσιογράφος Ξένια Κουναλάκη στο «Κ» της Καθημερινής, τις 9 Απρίλιοι 2006, περιγράφοντας τις εντυπώσεις της από τη συνάντηση της λέσχης μας που παρακολούθησε. Πράγματι και εμείς ακόμη εκπλαγήκαμε όταν την επόμενη χρονιά παρόλο που τα παιδιά φοιτούσαν πια στη Γ' Λυκείου και είχαν να δώσουν τη μάχη των πανελλαδικών εξετάσεων, μας πρότειναν να βρούμε ένα σχετικά μικρό βιβλίο για να ασχοληθούμε στη λέσχη, ώστε να απαιτεί λιγότερο χρόνο στο σπίτι αλλά να κάνει πλούσιες τις συναντήσεις μας σε περιεχόμενο, να μπορούν να ξεφεύγουν, να χαλαρώνουν και ταυτόχρονα να μαθαίνουν. «Το τελευταίο παραμύθι του Μιγκέλ Τόρρες ντα Σίλβα» του Thomas Vogel, υπήρξε η πιο κατάλληλη επιλογή. Τη ίδια χρονιά όμως συντονίζαμε και μια δεύτερη λέσχη που λειτουργούσε στο σχολείο, με μαθητές της Α Λυκείου. Η επιλογή των παιδιών αυτής της ομάδας ήταν το βιβλίο «Το θεώρημα του παπαγάλου» του Denis Guedj.Οι συναντήσεις δεν υποκαθιστούσαν το μάθημα και δεν είχαν και χαρακτήρα μαθήματος. Αντίθετα κάποιος παρατηρητής θα έβλεπε μια κεφάτη παρέα να λέει ιστορίες, να μοιράζεται πληροφορίες που βρήκε από βιβλία, περιοδικά, το internet. Κάποιες φορές

θα ήταν θιασώτης έντονων διαλόγων και διαφωνιών σε συζητήσεις π.χ. για το ρόλο του επιστήμονα στη κοινωνία, για τις επιπτώσεις των ερευνών των επιστημόνων στην εξέλιξη της ιστορίας, τη θέση της γυναίκας επιστήμονα. Ο δικός μας ρόλος των συντονιστών πολλές φορές ήταν να πυροδοτεί τέτοιες συζητήσεις. Σε κάθε σχεδόν συνάντηση είχαμε και κάποιους επισκέπτες είτε προσκεκλημένους συγγραφείς όπως ο κ. Δοξιάδης και ο κ. Μιχαηλίδης, μεταφραστές είτε συναδέλφους άλλων ειδικοτήτων που βοηθούσαν με τις γνώσεις τους σε κάποια σημεία του κειμένου. Τα παιδιά συχνά αναλάμβαναν εθελοντικά εργασίες σε ομάδες. Οργανώσαμε και εξόδους, στο ίδρυμα Μείζονος Ελληνισμού στην έκθεση των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών, στο θέατρο «17η νύχτα» του Απόστολου Δοξιάδη, με θέμα το τελευταίο διάστημα της ζωής του Kurt Friedrich Gödel και το θεώρημα της μη πληρότητας. Ακόμη παρακολουθήσαμε με τα παιδιά διαλέξεις με θέματα από τα μαθηματικά και τις θετικές επιστήμες. Η τελική παρουσίαση της δουλειάς μας ήταν έργο των παιδιών, όπως και η αφίσα που τυπώθηκε. Ασχολήθηκαν με κέφι και μεράκι για να φτιαχτούν, απορρίπτοντας ιδέες, φρεσκάροντας άλλες, εμπλουτίζοντας κάποιες νέες. Η παράδοση συνεχίστηκε με δυο λέσχες και την επόμενη χρονιά και συνεχίζεται και σήμερα. Είμαστε υπερήφανοι για αυτή την προσπάθεια με δεδομένες και τις ιδιαιτερότητες του σχολείου, αφ ενός από την υποβαθμισμένη κοινωνικά και οικονομικά περιοχή του και αφ ετέρου τον χαρακτηρισμό του ως ένα από τα αθλητικά λύκεια της χώρας με απορρέουσες δυσκολίες στη λειτουργία του. Τα αποτελέσματα ήταν πολλά και ιδιαίτερα θετικά για τους μαθητές όπως φαίνεται από τις απαντήσεις τους σε ερωτηματολόγιο που τους δόθηκε (Πρακτικά Η΄ Πανελληνίου Συνεδρίου «Μαθηματικά και Ανθρωπιστικές επιστήμες», Νοέμβριος 2008).

Τα αποτελέσματα όμως είναι πολλά και ιδιαίτερα θετικά και για τους καθηγητές. Στην ερευνητική διερεύνηση του κ. Χρίστου Μηλιώνη, των δραστηριοτήτων οι οποίες διεξάγονται στην Ελλάδα στο πλαίσιο της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και αφορούν την προσέγγιση των μαθηματικών μέσα από τη λογοτεχνία, αναφέρεται ότι: « Οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί δηλώνουν ότι η συμμετοχή στη δραστηριότητα (των λεσχών ανάγνωσης) βοήθησε σημαντικά τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς και ότι η βοήθεια αυτή αφορούσε διάφορες πλευρές τους: τους προσέφερε πολύτιμες γνώσεις, τους εξόπλισε με διδακτικά εργαλεία, ενίσχυσε την παιδαγωγική και επιστημονική τους συγκρότηση, τους προσέφερε ευχάριστες συγκινήσεις, τους βοήθησε να επικοινωνήσουν με τους μαθητές τους (περισσότερο) αλλά και με τους συναδέλφους τους (λιγότερο)».

Συμπερασματικά να προσθέσω ότι η μετάδοση γνώσης σε μαθητές που χαμογελούν να σε ακούνε, η συμμετοχή σε μια ζωντανή νεαρή παρέα που

σκέφτεται, αστειεύεται, διασκεδάζει μαθαίνοντας, επιπλέον που σε εμπιστεύεται και σε προτρέπει να παρέμβεις, να προτείνεις, να σχολιάσεις είναι ένα αποτέλεσμα που δεν το ζούμε στις τάξεις μας. Καθηγητές και μαθητές γίνονται συνδημιουργοί της γνώσης. Πολύ συχνά υπάρχει ως συνακόλουθο και μια αλλαγή στο τρόπο που βλέπουν τη λογοτεχνία ή που βλέπουν τα μαθηματικά, τις θετικές επιστήμες ή τη γνώση γενικότερα. Σε πείσμα των καιρών και των διαφόρων σειρήνων τα παιδιά που συμμετέχουν σε λέσχη ανάγνωσης διαβάζουν και διαβάζουν εθελοντικά. Ψάχνουν, αναρωτιούνται, μαθαίνουν. Μαθαίνουν να συνεργάζονται, να συζητούν, μαθαίνουν να κρίνουν και να διαφωνούν. Θεωρούμε ότι ανοίγει ένας δρόμος προσέγγισης της γνώσης μέσω μιας ευχάριστης διαδικασίας και προσέγγισης της ψυχαγωγίας μέσω μιας εναλλακτικής διδακτικής διαδικασίας, του διαβάσματος λογοτεχνικών βιβλίων. Είναι τιμητικό για μας τους εκπαιδευτικούς να έχουμε παίξει ένα ρόλο στη δημιουργία σκεπτόμενων ή έστω προβληματισμένων ατόμων για τις αξίες της εποχής, για την αξία της γνώσης και της επιστήμης.. Νιώσαμε μετά από τόσα χρόνια υπηρεσίας στην εκπαίδευση, ουσιαστική και άμεση την προσφορά μας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Aguilar, Jesus H., Book Review, On the History of Science: Method and Metaphors, Human Studies (2006)29:135–140

Alexander R., Amir, Focus: Mathematical stories, Chicago Journals, December 2006

Δοξιάδης, Απόστολος, Από την παράνοια στους αλγόριθμους, Εκδόσεις Ίκαρος, Αθήνα, 2η έκδοση 2006.

Δοξιάδης, Απόστολος, Embedding mathematics in the soul: narrative as a force in mathematics education, Opening address to the Third Mediterranean Conference of Mathematics Education, Athens, 3 Ιανουαρίου 2003.

Friedman, Alan, Physics and literature in this century: a new course, Physics Education, 8, 1973.

Galison, Peter, Τα ρολόγια του Αϊνστάιν, οι χάρτες του Πουανκαρέ, Εκδόσεις Κάτοπτρο, Αθήνα, 2007

Galison, Peter, Ten Problems in History and Philosophy of Science, Isis, 2008, 99:111–124

Hartley, Jenny, The *Reading Groups Book*, Oxford University Press, 2002

Hebert, Thomas P, Furner, Joseph M, Helping High Ability Students Overcome Math Anxiety through Bibliotherapy, Journal of Secondary Gifted Education, v8 n4 p164-78, University of Georgia, Sum 1997

Hong Haekyung, Effects of mathematics learning through children's literature on math achievement and dispositional outcomes, Early Childhood Research Quarterly, Volume 11, Number 4, December 1996

Jacobsohn, Rachel W., The Reading Group Handbook, Hyperion Press, New York, 1994

Karp Karen, Brown E. Todd, Allen Linda, Allen Candy, Feisty Females: Inspiring Girls to Think Mathematically, Pearson Education Canada Mar 23 1998.

Kasman Alex, Book Review: Cryptonomikon in the Notices of the AMS, USA, December 1999.

Kasman, Alex, Mathematical Fiction, website, http//math. cofc. Edu/faculty/ MATHFICT

Mazur Barry, It's a story, Πρακτικά συνεδρίου «Μαθηματικά και Αφήγηση», «Θαλής και φίλοι» Mathematical Sciences Research Institute, Μύκονος, 2005

Μηλιώνης, Χρίστος, Προσέγγιση των μαθηματικών μέσα από τη λογοτεχνία, Πάτρα, 2007.

Michaelides, Tefcros, La science conçue comme langage universel dans le Micromegas de Voltaire, Contact+, Mars 2006

Μιχαηλίδης, Τεύκρος , Μαθηματική Λογοτεχνία: μια πρόκληση, Πρακτικά 19ου συνεδρίου μαθηματικής παιδείας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 2002

Μιχαηλίδης, Τεύκρος, Από τον Αισχύλο στους μεταμοντέρνους: μαθηματική λογοτεχνία, Σύγχρονα Θέματα, 83, Δεκέμβριος 2003

Μιχαηλίδης, Τεύκρος, Η μυστική γοητεία των αριθμών, ένθετο Επτά Ημέρες της εφημερίδας Καθημερινή, 11 - 4 – 2004

Μιχαηλίδης, Τεύκρος, Μαθηματικές Μυθοπλασίες, ένθετο Επτά Ημέρες της εφημερίδας Καθημερινή, 11 - 4 – 2004

Μιχαηλίδης, Τεύκρος, Όταν τα μαθηματικά προσφέρουν στόχο στη λογοτεχνία, ένθετο Βιβλιοθήκη της εφημερίδας Ελευθεροτυπία, 24 - 11 – 2006

Miller, Arthur, Αϊνστάιν Πικάσο, Εκδόσεις Π. Τραυλός, Αθήνα 2002

Papadimitriou, Christos, MythematiCS: in praise of storytelling in the teaching of computer science and math, ACM New York, NY, USA, December 2003

Paulos, Allen, Once upon a number, Basic Books, New York, 1998

Sriraman, Bharath, Mathematics and Literature: Synonyms, Antonyms or the Perfect Amalgam, The Australian Mathematics Teacher- Australian Association of Mathematics Teachers, Vol 59, No.4, pp.26-31, 2003

Sriraman, Bharath, Mathematics and Literature (the sequel): Imagination as a pathway to advanced mathematical ideas and philosophy. The Australian

Mathematics Teacher Australian Association of Mathematics Teachers, Vol 60, No.1, pp.17-23, 2004.

Thiessen, D., Matthias, M., & Smith, J., The wonderful world of mathematics: A critically annotated list of children's books in mathematics, 2nd Edition. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1998

Usnick, V. & McCarthy,J, Turning adolescents onto mathematics through literature, Middle School Journal, 29 (4), 50-54, 1998.

Whitin Phyllis; Whitin David Jackman, Math is language too: talking and writing in the mathematics classroom, Urbana, Ill.: National Council of Teachers of English, 2000.

Whitin Phyllis; Whitin David Jackman, New visions for linking literature and mathematics, Urbana, Ill.: National Council of Teachers of English; Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2004.

Wilson, S. & Thornton S., To heal and enthuse: Developmental bibliotherapy and pre-service primary teachers' reflections on learning and teaching mathematics, Proceedings of the 29th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Sydney, 2006.

ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙΙ
Παρεμβάσεις

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΩΣ "ΜΑΥΡΟ ΚΟΥΤΙ": ΧΡΗΣΤΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΨΗΦΙΑΚΑ ΠΑΚΕΤΑ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΦΥΣΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΚΟΙΝΩΝΙΑΣ

Γεράσιμος Μελετίου gmelet@teiep.gr
Τάσος Πατρώνης valdemar@math.upatras.gr
Γιάννης Ρίζος iarizos@teihal.gr

«Ω, τι ωραίες μέρες!»

Σ. Μπέκετ

Είναι γνωστό το φαινόμενο της "απομαθηματικοποίησης" στις σύγχρονες κοινωνικές πρακτικές και ιδιαίτερα στην εκπαίδευση, εξαιτίας της ευρύτατης διάδοσης των έτοιμων – για – χρήση τεχνολογικών εφαρμογών και πακέτων που δεν απαιτούν γνώση της υποκείμενης μαθηματικής δομής τους (Keitel 1989, Keitel, Kotzmann & Skovsmose 1993, Gellert & Jablonka 2009). Σε πολλές περιπτώσεις τέτοιων "εφαρμογών" οι χρήστες – διδασκόμενοι, διδάσκοντες, ακόμα και ερευνητές! – δεν γνωρίζουν ούτε τα εμπλεκόμενα μαθηματικά μοντέλα και τους αλγορίθμους, ούτε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες αυτά "εφαρμόζονται", ούτε φυσικά και την κοινωνική προέλευση των σχετικών προβλημάτων ή την ιστορία τους. Η υποκατάσταση αυτή των διαδικασιών σκέψης και μαθηματικοποίησης από, άγνωστα στη λειτουργία τους για πολλούς, "μαύρα κουτιά" τείνει να γίνει ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της σύγχρονης κοινωνίας και εκπαίδευσης, με συνέπειες που χρειάζονται ειδικότερη έρευνα και προσοχή. Από την άλλη μεριά, η διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης φαίνεται να συναντά μεγάλες δυσκολίες σε μαθητές και φοιτητές (Πατρώνης & Ρίζος 2009). Στην ανακοίνωσή μας θα επιχειρήσουμε μια εξειδικευμένη διερεύνηση του παραπάνω φαινομένου σε χρήστες των μαθηματικών που ανήκουν σε διαφορετικές κατηγορίες, παρουσιάζοντας μελέτες περίπτωσης. Προκειμένου να επεξεργαστούμε ένα κατάλληλο πλαίσιο ανάλυσης και ερμηνείας των ευρημάτων μας, θα σκιαγραφήσουμε σύντομα την ιστορία εμφάνισης ορισμένων χαρακτηριστικών μοντέλων προσομοίωσης και θα αναφερθούμε στις εργαλειακές σημασίες (Πατρώνης 1993) που έχουν αποκτήσει στην παλαιότερη και πρόσφατη ιστορία τους τα μαθηματικά (Diffie & Landau

1998, Skovsmose & Yasukawa 2009) πέρα από τις απλοϊκές περιγραφές της "εφαρμογής" τους στις φυσικές και κοινωνικές επιστήμες.

Αναφορές:

W. Diffie & S. Landau (1998). Privacy on the Line, MIT Press.

U. Gellert & E. Jablonka (2009). The demathematising effect of technology. Στο: P. Ernest, B. Greer & B. Sriraman (επιμ.), *Critical Issues in Mathematics Education*, Monograph 6 in the Montana Mathematics Enthusiast, IAP, 19–24.

C. Keitel (1989). Mathematics Education and Technology. *For the Learning of Mathematics*, 9(1), 103–120.

C. Keitel, E. Kotzmann & O. Skovsmose (1993). Beyond the tunnel vision: Analysing the relationship between mathematics, society and technology. Στο: C. Keitel & K. Ruthven (επιμ.) *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology*, Springer, 243–279.

O. Skovsmose & K. Yasukawa (2009). Formatting Power of "Mathematics in a Package": A Challenge for Social Theorising? Στο: P. Ernest, B. Greer & B. Sriraman (επιμ.), *Critical Issues in Mathematics Education*, Monograph 6 in the Montana Mathematics Enthusiast, IAP, 255–282.

Τ. Πατρώνης (1993). Κριτική του εργαλειοποιημένου λόγου στη μαθηματική παιδεία. *Νέα Κοινωνιολογία*, τευχ. 17, 70–84.

Τ. Πατρώνης – Γ. Ρίζος (2009). Η «Φύση» γερνάει γρήγορα: Εκθετικές συναρτήσεις, εκθετικοί νόμοι μεταβολής και οι εικόνες τους σε μαθητές και φοιτητές. Πρακτικά 26ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας.