ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΧΑΣΑΠΗΣ

Επιμέλεια

7ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών 15 & 16 Μαρτίου 2008

Ομάδα Έρευνας της Μαθηματικής Εκπαίδευσης

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
7ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών
15 & 16 Μαρτίου 2008

Εκδόσεις:
Κίτρους Επισκόπου 7
Θεσσαλονίκη
Τηλ.: 2310 203 566
www.copycity.gr

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Το βιβλίο, διαφόρων τύπων και μορφών, παίζει ένα σημαντικό ρόλο στη διδασκαλία των μαθηματικών παρέχοντας ερμηνείες της μαθηματικής γνώσης στους εκπαιδευτικούς, στους μαθητές και μαθήτριες και στους γονείς τους. Το διδακτικό εγχειρίδιο των μαθηματικών εξειδικεύει το αντίστοιχο αναλυτικό πρόγραμμα οργανώνοντας και αναπτύσσοντας το περιεχόμενο του σε αντιστοιχία με τις απαιτήσεις της διδασκαλίας, το βοηθητικό βιβλίο των μαθηματικών υποστηρίζει τη διδασκαλία παρέχοντας πρόσθετες εμπειρίες μάθησης και ανάπτυξης δεξιοτήτων και το εκπαιδευτικό βιβλίο, γενικότερα, συμβάλλει στη δημιουργία ενός ευνοϊκού πλαισίου μάθησης των μαθηματικών ενισχύοντας τις προσωπικές διερευνήσεις των μαθητών και των μαθητριών.

Ο θεωρητικός προβληματισμός και η εμπειρική έρευνα για το ρόλο και τη συμβολή του βιβλίου στη διδασκαλία των μαθηματικών περιλαμβάνει ζητήματα για τη δομή και το περιεχόμενο των βιβλίων από την οπτική του μαθηματικού περιεχομένου τους και των παραστάσεων της μαθηματικής γνώσης που το περιεχόμενο αυτό προβάλλει, από την οπτική της διδακτικής οργάνωσης της μαθηματικής γνώσης, από την οπτική του κοινωνιολογικού πλαισίου και των πολιτισμικών παραδόσεων και ρευμάτων τα οποία κάθε βιβλίο ενσωματώνει, αξιοποιεί και προβάλλει. Αντίστοιχα ενδιαφέρουν ιδιαίτερα, οι πρακτικές χρήσης του βιβλίου από τους εκπαιδευτικούς, τους μαθητές και μαθήτριες και τους γονείς τους σε σχολικά και μη περιβάλλοντα καθώς και οι επιπτώσεις των χρήσεων αυτών, τόσο στη διδασκαλία στη μάθηση των μαθηματικών, όσο και στην ανάπτυξη θετικών ή αρνητικών εικόνων και προσωπικών συναισθημάτων για τα μαθηματικά.

Η ενημέρωση για τους σχετικούς προβληματισμούς, τις ερευνητικές δραστηριότητες και τις πρωτοβουλίες των ερευνητών και των εκπαιδευτικών για τον πολύπλευρο ρόλο του βιβλίου στη διδασκαλία των μαθηματικών αποτέλεσε πρωταρχικό στόχο του 7ου Διημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών με θέμα «Το βιβλίο στη διδασκαλία των μαθηματικών» που οργανώθηκε στις 15 & 16 Μαρτίου 2008 στη Σχολή Θετικών Επιστημών του Α.Π.Θ. με την οργανωτική υποστήριξη της Ομάδας Έρευνας της Μαθηματικής Εκπαίδευσης, της Ελληνικής Εταιρείας Ιστορίας, Φιλοσοφίας &

Διδακτικής των Επιστημών, του Σωματείου 'Φιλοι του Τεχνικού Μουσείου Θεσσαλονίκης' και του περιοδικού ΚΡΙΤΙΚΗ.

Στην παρούσα έκδοση περιλαμβάνονται τα κείμενα των εισηγήσεων, οι οποίες παρουσιάστηκαν στο Διήμερο αυτό και μια διεθνής βιβλιογραφία αναλύσεων και ερευνών για τα σχολικά βιβλία των μαθηματικών.

Για την Οργανωτική Επιτροπή

Δημήτρης Χασάπης
Επίκουρος Καθηγητής Τ.Ε.Α.Π. Η. του Πανεπιστημίου Αθηνών

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ Ι

Το βιβλίο στη διδασκαλία των μαθηματικών: Γενικά ζητήματα και προβληματισμοί

Δημήτρης Χασάπης
Το βιβλίο στη διδασκαλία των μαθηματικών: ένα διαρκές ζήτημα…… 11

Birgit Pepin
Μια διεθνής σύγκριση των διδακτικών βιβλίων μαθηματικών και της χρήσης τους απ' τους εκπαιδευτικούς – Ποια εικόνα των μαθηματικών παρουσιάζουν στους μαθητές τα σχολικά βιβλία της Αγγλίας, Γαλλίας και Γερμανίας;…… 21

Νίκος Τσιώτσος
Μπορεί ένα αφηγηματικό βιβλίο να είναι μαθηματικό; Προσεγγίσεις των μαθηματικών του Δημοτικού σχολείου μέσα από βιβλία με ιστορίες…… 55

Στέφανος Μπαλής
Τα μαθηματικά στην ποίηση και η ποίηση των μαθηματικών…… 77

Άννα Κωστούλα
Εγχειρίδια – Ήθη – Κράτος. Ποια η σχέση τους…… 91

ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙ

Σχολικά βιβλία μαθηματικών: Κριτικές προσεγγίσεις και ερευνητικές διαπιστώσεις

Ευάνθης Χατζηβασιλείου
Τα πολιτισμικά στοιχεία στα νέα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Α΄ τάξης του Δημοτικού σχολείου…… 109

Γεράσιμος Κουστουράκης & Κώστας Ζαχάρος
Μια κοινωνιολογική προσέγγιση της σχολικής γνώσης στα εγχειρίδια των Μαθηματικών. Το παράδειγμα των βιβλίων των Μαθηματικών της Β΄ Δημοτικού…… 121

Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης
Πολύ-πολιτισμικότητα, Ιστορία των μαθηματικών και σχολικό εγχειρίδιο της Γ' Τάξης Δημοτικού σχολείου…… 135

Κυριαζής Παρασχίδης
Τα ανοιχτά προβλήματα στα εγχειρίδια των μαθηματικών της Ε΄ τάξης του Δημοτικού σχολείου – Μία πρώτη ερευνητική απόπειρα…… 145

Χρήστος Ταξίδης
Πολιτισμικές διαστάσεις των νέων σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών της Στ΄ τάξης του Δημοτικού σχολείου…… 157

Μαρία Βλάχου & Δημήτρης Χασάπης
Η χρήση του σχολικού βιβλίου στη διδασκαλία των μαθηματικών του Δημοτικού σχολείου…… 177

Τάσος Πατρώνης και Μαρία Καίσαρη
Τα μαθηματικά ως "επίπεδη" σχολική γνώση:Αλλαγή «Παραδείγματος», αντιστάσεις και συμβιβασμοί στα νέα σχολικά βιβλία μαθηματικών για το Γυμνάσιο…….. 191

Ελένη Λυμπεροπούλου & Μαλβίνα Παπαδάκη
Τα νέα βιβλία των μαθηματικών του Γυμνασίου - Τα τρία «παιδαγωγικά αξιώματα» ή η κρυμμένη αντι-διδακτική αντιστροφή…… 195

Στάμη Τσικοπούλου
Οι δραστηριότητες στο σχολικό βιβλίο των μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου…… 211

Ευγενία Κολέζα & Ευάγγελος Φακούδης
Προλεγόμενα μιας ανάλυσης των εγχειριδίων σχετικά με την έννοια της συνάρτησης…… 225

Ελισσάβετ Καμπάνη
Ανοίγει ο καθηγητής την πόρτα της σχολικής του τάξης στα νέα βιβλία των Μαθηματικών…… 245

ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙΙ

Σχολικά βιβλία μαθηματικών: Ιστορικές θεωρήσεις

Μαρία Τερδήμου
Από την Αριθμητική του Γλυζωνίου στον Απειροστικό Λογισμό του Κούμα: ο ρόλος και η πορεία των μαθηματικών διδακτικών εγχειριδίων κατά την περίοδο της Οθωμανικής κατοχής…… 261

Γιάννα Κατσιαμπούρα
Το Ευσύνοπτον σύνταγμα του 1008: το παλαιότερο διδακτικό εγχειρίδιο των επιστημών..... *275*

ΕΝΟΤΗΤΑ IV

Έντυπο υλικό διδασκαλίας μαθηματικών

Ιωάννα Γεωργίου
Διδασκαλία μαθηματικών μέσα από την ιστορία και την κουλτούρα.... *291*

Κατερίνα Καλφοπούλου
Λέσχη ανάγνωσης με αφορμή ένα ιστορικό σημείωμα από τα νέα βιβλία του Γυμνασίου..... *307*

Χρυσάνθη Σκουμπουρδή
Σχεδιασμός εικονογραφημένου βιβλίου για την προσέγγιση των σχημάτων από νήπια..... *321*

Ειρήνη Γ. Λιάκου
Ένα παράδειγμα αξιολόγησης έντυπου εκπαιδευτικού υλικού για την προσχολική ηλικία με θέμα την αρίθμηση στην πρώτη δεκάδα (0-10)..... *333*

ΕΝΟΤΗΤΑ V

Κείμενα αναφοράς

Zhu Yan Fan Lianghuo
Μια βιβλιογραφία των ερευνών για τα σχολικά βιβλία των μαθηματικών..... *347*

ΕΝΟΤΗΤΑ Ι

Το βιβλίο στη διδασκαλία των μαθηματικών: Γενικά ζητήματα και προβληματισμοί

ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: ΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΥΠΟ ΔΙΑΡΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

Δημήτρης Χασάπης

Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΧΟΛΙΑ: ΠΕΡΙ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΓΕΝΙΚΩΣ

Μια φαινομενικά κοινότυπη, αλλά αναγκαία προκείμενη κάθε συζήτησης περί σχολικών βιβλίων γενικώς είναι ότι κάθε σχολικό βιβλίο γράφεται εκ προθέσεως για την επιδίωξη της υλοποίησης συγκεκριμένων διδακτικών στόχων, οι οποίοι είναι σαφώς διατυπωμένοι και προτάσσονται του αντίστοιχου αναλυτικού προγράμματος, το οποίο επίσης καθορίζουν. Μαζί με τη διδασκαλία, και ως μέσα διδασκαλίας, τα σχολικά βιβλία υλοποιούν τις επιλογές του αναλυτικού προγράμματος των σχολικών μαθημάτων. Το δεδομένο αυτό σημαίνει ότι κάθε σχολικό - διδακτικό, βιβλίο επιλέγει, οργανώνει και μεταβιβάζει τις αξιολογημένες ως σημαντικές - από μια συγκεκριμένη βεβαίως οπτική - γνώσεις και πρακτικές και ως εκ τούτου αναγκαίες για τη διδασκαλία τους στο σχολείο.

Γενικά, επομένως, τα σχολικά βιβλία αποτελούν συλλογές κειμένων, επιστημονικών ή μυθοπλαστικών, κοσμικών ή θρησκευτικών, τα οποία οι μαθητές οφείλουν να μελετούν, ώστε να πιστοποιηθούν από το σχολείο και με τα κριτήρια του σχολείου ως ικανοί για την προαγωγή τους στην επόμενη εκπαιδευτική βαθμίδα και εντέλει ως εγγράμματοι με την ολοκλήρωση των κύκλων της βασικής εκπαίδευσης. Άρα, η μορφή, το περιεχόμενο, ο λόγος και η ιδεολογία των σχολικών βιβλίων αποτελεί μια επικυρωμένη και επίσημα αναγνωρισμένη εκδοχή της επιδιωκόμενης εγγραματοσύνης σε ένα συγκεκριμένο τομέα γνώσης και πρακτικής και εν προκειμένου στα μαθηματικά. Όπως έχει αναλυθεί από τον Bernstein (1989), αυτό που αποκαλείται σχολική γνώση συγκροτείται από κοινού από το αναλυτικό πρόγραμμα το οποίο ορίζει ποια είναι η έγκυρη γνώση, από την παιδαγωγική πρακτική η οποία ορίζει ποια είναι η έγκυρη μεταβίβαση αυτής της γνώσης και από την αξιολόγηση η οποία ορίζει ποια είναι η έγκυρη απόκτηση της γνώσης.

Η συγγραφή, επομένως, και γενικότερα η παραγωγή ενός σχολικού βιβλίου αποτελεί συστατικό στοιχείο μιας επιλεκτικής λογικής, η οποία διαμορφώνεται από σύνθετες ιστορικο-κοινωνικές διαδικασίες και η οποία χαρακτηρίζει ταυτόχρονα και το αντίστοιχο αναλυτικό πρόγραμμα. Μια επιλεκτική λογική δια της οποίας συγκεκριμένα κοινωνικά και πολιτικά συμφέροντα συγκροτούν αυτό που θεωρείται αρχικά έγκυρη σχολική και τελικά σε μεγάλο βαθμό και αξιόλογη δημόσια γνώση. Τα σχολικά βιβλία, επομένως, μπορούν να θεωρηθούν ως μέσα παραγωγής και διάδοσης, όχι μόνο των επικυρωμένων ως έγκυρων γνώσεων, αλλά και συγκεκριμένων αξιών απέναντι στις γνώσεις αυτές. Ως μέσα, δηλαδή, διαμόρφωσης των σχέσεων των παιδιών με την κοινωνική λειτουργία των γνώσεων αυτών και των προτύπων αναφοράς και πρακτικής χρησιμοποίησης τους στην καθημερινή ζωή. Αποτέλεσαν ιστορικά και αποτελούν στο παρόν, σε διαφορετική βεβαίως έκταση και με διαφορετική μορφή κατά μάθημα, πρωτίστως μέσα μεταβίβασης στις νέες γενιές θρησκευτικών, πολιτισμικών, κοινωνικών και πολιτικών αξιών, όπως επίσης και πρακτικών συμπεριφορών και δευτερευόντως εργαλεία μάθησης και ανάπτυξης νοητικών δεξιοτήτων.

Γι' αυτό ακριβώς το λόγο, τα σχολικά βιβλία αποτελούν βασικά εργαλεία της κοινωνικής κατασκευής της εγγραματοσύνης και προφανώς πολύ συχνά αντικείμενα έντονής διαμάχης με εμφανή ιδεολογικά και πολιτικά προτάγματα. Ο κρατικός έλεγχος στους όρους παραγωγής, διανομής και χρήσης του σχολικού βιβλίου, ιδιαίτερα στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα αλλά όχι μόνον και όχι πάντα με τις ίδιες μορφές και μηχανισμούς, συναρτάται με αυτές ακριβώς τις ιδεολογικο-πολιτικές λειτουργίες του.

Με την απόλυτη σαφήνεια και τον καθόλου πολιτικά συγκαλυμμένο λόγο των πρώτων σχετικών νομοθετικών ρυθμίσεων δια των οποίων οργανώθηκε το σχολείο στη χώρα μας (και τις αναγκαίες προσαρμογές στον τονισμό) το Διάταγμα της 1ης Απριλίου 1836 «περί βιβλιοπωλείου εν τη Βασιλική Τυπογραφία», ορίζει ότι « … πρέπει να φυλαχθή ως αξίωμα ότι πρέπει όλα τα διδασκαλεία (εννοεί διδακτήρια) του Κράτους, και εξαιρέτως τα ελληνικά και κοινά σχολεία, συμφώνως με τον σκοπόν του παρόντος διατάγματος, να προβλέπωνται αδιακόπως κατά την αληθή ανάγκη των με τοιαύτα βιβλία και παραδείγματα, τα οποία να μην εμπεριέχουν διδασκαλίας και γνώμας επιβλαβείς εις την θρησκείαν ή εις την πολιτείαν ή εις την ηθικήν και πνευματική του ανθρώπου ανάπτυξιν και εκπαίδευσιν, και όντα χρήσιμα εις τον σκοπόν μιας φρονίμου παιδαγωγίας να συντείνουν εις τας κοινάς και αναποφεύκτους δια το εξής χρείας της Ελλάδος και να επιταχύνωσι την εκπαίδευσιν του λαού δι' ενός λεκτικού καθαρού και καλλωπισμένου … ». Η λογική αυτή, άσχετα από τη ρητή ή μη διατύπωση της, καθόρισε την παραγωγή και τη χρήση των σχολικών βιβλίων, όλων των μαθημάτων, στην

Ελλάδα, αλλά και στην πλειονότητα των εθνικών εκπαιδευτικών συστημάτων, βεβαίως με τις αντίστοιχες κατά περίπτωση και τις εκάστοτε πολιτικές, κοινωνικές, πολιτιστικές ή άλλες ιδιομορφίες (Χασάπης 2007).

Τα σχολικά βιβλία, αρχικά κυρίως είναι αναγνωστικά και θρησκευτικής κατήχησης και αργότερα βιβλία αριθμητικής, γεωμετρίας και φυσικών επιστημών, αρχίζουν να παράγονται μαζικά με την εμφάνιση της τυπογραφίας στη Δυτική Ευρώπη και να χρησιμοποιούνται ευρέως, ιδίως στα γερμανικά, σχολεία τον 16ο αιώνα κατά τη διάρκεια της Προτεσταντικής Μεταρρύθμισης. Τα Λουθηριανά σχολικά βιβλία, τα οποία εισήγαγαν τη λογική και έκτοτε καθόρισαν τα βασικά χαρακτηριστικά των σχολικών βιβλίων, αποτελούσαν συλλογές διασκευασμένων, συντομευμένων ή και σχολιασμένων θρησκευτικών και κοσμικών κειμένων σε μια αλληλουχία, καθορισμένη με διάφορα κατά περίπτωση κριτήρια. Κατά τον επόμενο αιώνα στις αυτοκρατορίες και αργότερα κατά τον 18ο και 19ο αιώνα με τη συγκρότηση των εθνικών κρατών, τα σχολικά βιβλία σε συνδυασμό με την επιθεώρηση των σχολείων και τις εξετάσεις των μαθητών αποτέλεσαν τον πυρήνα των προσπαθειών για την τυποποίηση της διδασκαλίας κάθε μαθήματος σε όλα τα σχολεία των διαφορετικών γεωγραφικά ή και πολιτισμικά περιοχών μιας κρατικής επικράτειας, όπως επίσης και για την τυποποίηση των εθνικών γλωσσών.

Αυτά τα ιστορικά δεδομένα διαμόρφωσαν τις βασικές αρχές της μορφής και του περιεχομένου των σχολικών βιβλίων, ώστε να ενσωματώνουν και να υλοποιούν κανονιστικές αρχές για το τι πρέπει να διδαχθεί στα παιδιά, πότε πρέπει να διδαχθεί, με ποιες γλωσσικές μορφές και με βάση ποιες παιδαγωγικές παραδοχές. Οι κανονιστικές αυτές αρχές, απολύτως ιδεολογικές, προσέλαβαν κατά τη διάρκεια του 20ου αιώνα επιστημονικά επιχρίσματα με τη βοήθεια της εκπαιδευτικής ψυχολογίας. και παράλληλα συσκοτίστηκαν από την κυριαρχία του δόγματος για την ουδετερότητα της επιστήμης και της τεχνολογίας, όπως και της ίδιας της εκπαιδευτικής διαδικασίας εννοούμενης πλέον ως διαδικασία κυρίως τεχνική.

ΤΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: ΜΟΡΦΗ ΚΑΙ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

Όπως όλα τα σχολικά διδακτικά βιβλία, αλλά σε μεγαλύτερο βαθμό τα διδακτικά βιβλία των μαθηματικών παίζουν έναν ιδιαίτερο ρόλο στην καθημερινή πρακτική της διδασκαλίας των μαθηματικών, την οποία ουσιαστικά οργανώνουν, αφού καθορίζουν άμεσα το περιεχόμενο και την αλληλουχία των μαθημάτων. Παράλληλα, διαμορφώνουν τη δομή της ίδιας της διδασκαλίας στα πρότυπα των διδακτικών ενοτήτων τους μέσα από τα παρα-

δείγματα τα οποία προσφέρουν, αλλά κυρίως μέσα από τις ασκήσεις και τα προβλήματα τα οποία προτείνουν στους μαθητές (και στους δασκάλους) για επίλυση.

Σε μια αξιολόγηση των διδακτικών βιβλίων των μαθηματικών πριν από ογδόντα χρόνια στις ΗΠΑ σημειώνονταν ότι «*το διδακτικό βιβλίο είναι το σπουδαιότερο από τα εργαλεία του δασκάλου. Στον καθορισμό του αντικειμένου των μαθησιακών εμπειριών των μαθητών μέρα με τη μέρα είναι πιο αποφασιστικός παράγοντας από το εγκεκριμένο αναλυτικό πρόγραμμα. Στον καθορισμό της μεθόδου διδασκαλίας ώρα με την ώρα έχει μεγαλύτερη επιρροή από τις οδηγίες διδασκαλίας. Στην πραγματικότητα τα διδακτικά βιβλία που χρησιμοποιούνται από μαθητές και δασκάλους αποτελούν το πραγματικό αναλυτικό πρόγραμμα και την πραγματική μεθοδολογία της διδασκαλίας. Αυτό δεν αποτελεί μια συνηθισμένη θεωρία αλλά ένα πραγματικό γεγονός*» (Fuller1928, όπως αναφέρεται στο Chavez-Lopez 2003, σ. 6).

Σε μια πρώτη ανάγνωση όλα τα διδακτικά βιβλία των μαθηματικών οργανώνουν το περιεχόμενο τους σε τρία μέρη: μέρος πρώτο, παρουσίαση θεωρητικών γνώσεων ή τεχνικών, μέρος δεύτερο, παραδείγματα και μέρος τρίτο, ασκήσεις και προβλήματα. Το πρώτο μέρος στο οποίο υποστηρίζεται, κατά τις προθέσεις των συγγραφέων, η ιδιοποίηση των διδασκόμενων μαθηματικών εννοιών και μεθόδων οι οποίες παράλληλα αναπτύσσονται κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών στη σχολική τάξη, ακολουθείται από παραδείγματα, τα οποία αποτελούν ένα είδος προτύπων για την επίλυση των ασκήσεων και των προβλημάτων του τρίτου μέρους. Οι ασκήσεις και τα προβλήματα καταλαμβάνουν συνήθως την μεγαλύτερη έκταση κάθε ενότητας του βιβλίου και, κατά κανόνα, διατάσσονται σε μια κλίμακα δυσκολίας από το εύκολο στο δύσκολο, στη βάση μιας υπόθεσης η οποία έρχεται από την παράδοση του συμπεριφορισμού σύμφωνα με την οποία η μάθηση είναι αποτέλεσμα μιας βήμα προς βήμα εξάσκησης (Love & Pimm 1996).

Για την ανάλυση του περιεχομένου των διδακτικών βιβλίων μαθηματικών και της οργάνωσης του έχουν προταθεί διάφορα σχήματα ταξινόμησης από διάφορες οπτικές, κάθε μια από τις οποίες αναδεικνύει και διαφορετικές όψεις τους, τονίζοντας και διαφορετικά στοιχεία του ρόλου τους στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Ο Van Dormolen (1986), για παράδειγμα, τονίζοντας το περιεχόμενο των διδακτικών βιβλίων μαθηματικών διακρίνει σε κάθε διδακτική ενότητα ένα θεωρητικό μέρος (ορισμοί, αξιώματα, θεωρήματα), ένα αλγοριθμικό μέρος (κανόνες, τεχνικές, οδηγίες), ένα λογικό μέρος (κανόνες προσέγγισης και χρήσης του θεωρητικού μέρους), ένα μεθοδολογικό μέρος (μέθοδοι) και ένα επικοινωνιακό μέρος (συμβολισμοί και κανόνες γραφής των μαθηματι-

κών). Αντίθετα, ο Dowling (1998) προτάσσει μια κοινωνιολογική ανάλυση του περιεχομένου και της δομής των διδακτικών βιβλίων των μαθηματικών διαπιστώνοντας ότι και το μαθηματικό τους περιεχόμενο και η διδακτική τους λογική διαφοροποιούνται με κριτήρια συναρτημένα με τα εκπαιδευτικά χαρακτηριστικά των μαθητών στους οποίους απευθύνονται και τους διαφορετικούς τύπους των σχολείων για τα οποία προορίζονται (τυπικά ή πρότυπα, γενικά ή τεχνικά σχολεία).

Η ΕΡΕΥΝΑ ΓΙΑ ΤΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: ΜΙΑ ΣΚΙΑΓΡΑΦΗΣΗ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Παρόλο που η έρευνα για τα διδακτικά βιβλία, το περιεχόμενο, τη δομή, τη χρήση τους από μαθητές και δασκάλους, το ρόλο τους στη διδασκαλία και άλλα συναφή ζητήματα αναπτύχθηκε ήδη από τη δεκαετία του 1930 παράλληλα με τη γενικότερη ανάπτυξη της εκπαιδευτικής έρευνας (ενδεικτικά, Bagley 1931), τα διδακτικά βιβλία των μαθηματικών ως ιδιαίτερο είδος διδακτικών βιβλίων αποτέλεσαν αντικείμενο έρευνας και ανάπτυξης πολύ αργότερα, όταν κατά τη δεκαετία του 1960 πραγματοποιήθηκαν οι ριζικές μεταρρυθμίσεις των σχολικών μαθηματικών, υπό την καθοδήγηση του ΟΟΣΑ, σε όλες σχεδόν τις χώρες του κόσμου.

Οι δημοσιευμένες έρευνες για τα διδακτικά βιβλία των μαθηματικών μπορεί, με γενικούς όρους, να ταξινομηθούν σε τρεις κατηγορίες:

1. έρευνες για τη δομή και το περιεχόμενο των βιβλίων,
2. έρευνες για τη χρήση των βιβλίων από μαθητές και δασκάλους,
3. έρευνες για το θεσμικό καθεστώς παραγωγής και χρήσης των βιβλίων καθώς και για το ρόλο τους στις εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις.

Οι έρευνες για τη δομή και το περιεχόμενο των διδακτικών βιβλίων μαθηματικών μπορεί, όπως προτείνουν οι Pepin & Haggarty (2001), να ταξινομηθούν στις ακόλουθες επιμέρους τέσσαρες κατηγορίες.

Έρευνες οι οποίες προσεγγίζουν τη δομή και το περιεχόμενο των διδακτικών βιβλίων μαθηματικών με κριτήρια

(1) *τις μαθηματικές προθέσεις των βιβλίων*, οπότε αναλύουν το μαθηματικό περιεχόμενο των βιβλίων, τις υπονοούμενες παραδοχές τους για τη μαθηματική γνώση και τη μορφή παρουσίασης της μαθηματικής γνώσης (ενδεικτικά, Pickreign 1996, Raman 1998),

(2) *τις παιδαγωγικές προθέσεις των βιβλίων*, οπότε αναλύουν τους τρόπους με τους οποίους ενισχύεται ή δεν ενισχύεται η μάθηση από το μαθη-

ματικό περιεχόμενο των διδακτικών βιβλίων, από τη μέθοδο παρουσίασης του περιεχομένου και τις διδακτικές τεχνικές που τα βιβλία υιοθετούν και από τις μορφές παρουσίασης και τη ρητορική των κειμένων των βιβλίων (ενδεικτικά, Fischer 1997),

(3) *τις κοινωνικές αναφορές των βιβλίων* (ενδεικτικά, Clarkson 1993, Garcia et al. 1990) και

(4) *τις πολιτισμικές αξίες, οι οποίες αποτυπώνονται στα βιβλία*, οπότε αναλύουν από αντίστοιχες οπτικές το περιεχόμενο τους (ενδεικτικά, Seah & Bishop 2000).

Στο πλαίσιο της ταξινόμησης αυτής, ένα μεγάλο μέρος των ερευνών για τη δομή και το περιεχόμενο των διδακτικών βιβλίων μαθηματικών περιλαμβάνει έρευνες συγκριτικής ανάλυσης των διδακτικών βιβλίων στο σύνολο τους ή σε στοιχεία του περιεχομένου τους κατά χώρα ή και χρονική περίοδο, όπως η ανάλυση του Bierhoof (1996) για τη δομή και το περιεχόμενο των διδακτικών βιβλίων μαθηματικών του πρωτοβάθμιου σχολείου στην Βρετανία, Γερμανία και Ελβετία, των Park & Leung (2002) για τα βιβλία στην Κίνα, Αγγλία, Ιαπωνία, Κορέα και ΗΠΑ, των Pepin & Haggarty (2001) για τα βιβλία των κατώτερου κύκλου της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Αγγλία, Γαλλία και Γερμανία ή των Valverde και άλλων (2002) οι οποίοι στο πλαίσιο της TIMSS (Τρίτη Διεθνής Μελέτη των Μαθηματικών και των Φυσικών Επιστημών) ανέλυσαν τα σχολικά βιβλία μαθηματικών σε συνάρτηση με τα αντίστοιχα αναλυτικά προγράμματα πενήντα περίπου χωρών.

Οι έρευνες για τη χρήση των βιβλίων από μαθητές και δασκάλους μπορεί, επίσης σύμφωνα με τις Pepin & Haggarty (2001), να διακριθούν σε έρευνες για

(1) το κύρος των διδακτικών βιβλίων στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών,

(2) τους χρήστες των διδακτικών βιβλίων μαθηματικών (δασκάλους, μαθητές, γονείς),

(3) τους τρόπους χρήσης των βιβλίων από μαθητές, δασκάλους, γονείς και άλλους,

(4) τη διαμεσολάβηση του περιεχομένου των διδακτικών βιβλίων από τους δασκάλους και

(5) τις εκπαιδευτικές παραδόσεις που σχετίζονται με τα σχολικά βιβλία.

Στις κατηγορίες αυτές περιλαμβάνονται έρευνες για τον τρόπο με το οποίο οι δάσκαλοι χρησιμοποιούν το διδακτικό βιβλίο μαθηματικών στις σχολικές τάξεις, όπως της Pepin (1997) για την Αγγλία, Γαλλία και Γερμανία, των

Freeman & Porter (1989) για τις ΗΠΑ, των Χασάπη & Βλάχου (2008) για την Ελλάδα, συγκριτικές έρευνες όπως των Sosniak & Stodolsky (1993) για τη χρήση των βιβλίων από τους δασκάλους κατά τη διδασκαλία διαφόρων μαθημάτων σε μια τάξη του πρωτοβάθμιου σχολείου των ΗΠΑ ή όπως του Reys και άλλων (2003) για τη χρήση διαφορετικών διδακτικών βιβλίων για τη διδασκαλία μαθηματικών σε ίδιες σχολικές τάξεις, έρευνες για την έκταση της χρήσης του διδακτικού βιβλίου και για τον βαθμό εξάρτησης της διδασκαλίας των μαθηματικών από το σχολικό βιβλίο, όπως των Grouws & Smith (2000) ή του Whittington (2000) στις ΗΠΑ, έρευνες για τη συνάφεια της χρήσης του διδακτικού βιβλίου με την επίδοση των μαθητών, όπως του Foxman (1999), και άλλες για διάφορες όψεις και ζητήματα της χρήσης των διδακτικών βιβλίων των μαθηματικών.

Οι έρευνες για το θεσμικό καθεστώς παραγωγής και χρήσης των βιβλίων, όπως και για το ρόλο τους στις εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις εντοπίζονται στην συγχρονική και διαχρονική ανάλυση συναφών ζητημάτων, όπως είναι για παράδειγμα οι πολιτικές επιλογής και υιοθέτησης σχολικών βιβλίων (Seeley 2003, Tyson-Bernstein & Woodward 1991), η συνάφεια αναλυτικών προγραμμάτων και αντίστοιχων σχολικών βιβλίων (Freeman & Porter1989), το διδακτικό κύρος τους, οι σχέσεις δασκάλων με τα σχολικά βιβλία (Colloby 2003, Remillard 2000), αλλά και οι σχέσεις μαθητών και γονέων, η αποτελεσματικότητα τους ως φορέων εισαγωγής καινοτομιών στη διδασκαλία των μαθηματικών (Wilson & Goldenberg, 1998).

ΕΠΙΛΕΓΟΜΕΝΑ ΣΧΟΛΙΑ

Όπως όλες οι έρευνες υποδεικνύουν, ο ρόλος του διδακτικού βιβλίου και στην οργάνωση και στο περιεχόμενο και στη μεθοδολογία της διδασκαλίας των μαθηματικών είναι καταλυτικός και η διαπίστωση αυτή έχει μια διεθνή ισχύ. Όπως υπογραμμίζουν οι Robitaille & Travers (1992), συνοψίζοντας τα πορίσματα μιας διεθνούς έρευνας «*οι δάσκαλοι των μαθηματικών σε όλες τις χώρες βασίζονται πάρα πολύ για την καθημερινή δουλειά τους στα διδακτικά βιβλία και αυτό χαρακτηρίζει τη διδασκαλία των μαθηματικών περισσότερο από κάθε άλλο μάθημα του αναλυτικού προγράμματος. Οι δάσκαλοι αποφασίζουν τι θα διδάξουν, πως θα το διδάξουν και τι είδους ασκήσεις θα βάλουν στους μαθητές τους κυρίως με βάση το περιεχόμενο του εγκεκριμένου διδακτικού βιβλίου* (σ. 706).

Από το άλλο μέρος, τα διδακτικά βιβλία μαθηματικών απευθύνονται πρωτίστως στους μαθητές και οι συγγραφείς τους θεωρούν – τουλάχιστον τυπικά – ως κύριους αναγνώστες και χρήστες των βιβλίων τους μαθητές (Kang & Kilpatrick, 1992). Όμως, οι δάσκαλοι είναι αυτοί οι οποίοι διαμε-

σολαβούν μεταξύ μαθητών και διδακτικών βιβλίων με ποικίλους τρόπους και κατά τη διάρκεια και στο περιθώριο της διδασκαλίας των μαθηματικών, και όπως έχει χαρακτηριστικά διατυπωθεί από τους Love & Pimm (1996) «*ακόμα και στην περίπτωση που ο υποτιθέμενος αναγνώστης είναι ο μεμονωμένος μαθητής, τα διδακτικά βιβλία υπάρχουν σε ένα ευρύτερο πλαίσιο άλλων πηγών στις οποίες συμπεριλαμβάνονται οι περιεχόμενες στα βιβλία του δασκάλου οδηγίες χρήσεις τους στην τάξη. Ο δάσκαλος αναμένεται να είναι παρών πριν ή κατά τη διάρκεια της ανάγνωσης του διδακτικού βιβλίου για να διευκρινίζει, να επεκτείνει το περιεχόμενο του ή, να απαλείφει τις δυσκολίες κατανόησης του*» (σ. 385).

Η σχέση του δασκάλου, επομένως, με το διδακτικό βιβλίο μαθηματικών, όπως και με το αναλυτικό πρόγραμμα που αυτό υλοποιεί, είναι συστατική της διδακτικής του πρακτικής.

Γι' όλα αυτά και πολλά περισσότερα που έστω και η απλή αναφορά τους στο παρόν κείμενο είναι αδύνατη, ο προβληματισμός - θεωρητικός και ερευνητικός - για το περιεχόμενο, τη δομή, τη χρήση, το θεσμικό πλαίσιο, το ρόλο τους στη μάθηση και στη διδασκαλία και άλλα συναφή με τα διδακτικά βιβλία των μαθηματικών ζητήματα είναι διαρκής και ως εκ τούτου η θεωρητική και ερευνητική δραστηριότητα αναγκαία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Bagley, W. C. (1931). The textbook and methods of teaching. In G. M. Whipple (Ed.), The textbook in American education, 30th Yearbook of the National Society for the Study of Education, Chicago: University of Chicago Press.

Bernstein, B., (1989), *Παιδαγωγικοί κώδικες και κοινωνικός έλεγχος*, Εισαγωγή, μετάφραση, σημειώσεις Ι. Σόλομων, Αθήνα: Εκδόσεις Αλεξάνδρεια.

Bierhoof, H. (1996). Laying the foundations of Numeracy: A comparison of primary school textbooks in Britain, Germany and Switzerland. Teaching Mathematics and its Applications, 15(4), 141-157.

Chavez-Lopez, O. (2003), From the textbook to the enacted curriculum: textbook use in the middle school mathematics classroom, Unpublished Ph. D. Thesis, University of Missouri, Columbia.

Clarkson, P. (1993). Gender, ethnicity and textbooks. Australian Mathematics Teacher, 49(2), 14-16.

Colloby,R.(2003).Curriculum materials as a professional tool: How a mathematics textbook affected two teachers' learning, *The Elementary School Journal,* 103, 287-311.

Dowling, P. (1998) *The Sociology of Mathematics Education: mathematical myths/redagogic texts,* London: Falmer Press.

Fischer, T. A. (1997). A content analysis of United States math textbooks, 1966-1996 from a special education perspective. Doctoral dissertation, University of Wisconsin. (UMI: AAT 9810351)

Freeman, D. J., & Porter, A. C. (1989), Do textbooks dictate the content of mathematics instruction in elementary schools? *American Educational Research Journal*, 26, 403–421.

Foxman, D. (1999), Mathematics textbooks across the world: Some evidence from the Third International Mathematics and Science Study, Slough: National Federation for Educational Research.

Fuller, F. D. (1928), Scientific evaluation of textbooks: An experiment in cooperative evaluation of junior high school mathematics texts. Boston: Houghton Mifflin.

Garcia, J., Harrison, N. R., & Torres, J. (1990), The portrayal of females and minorities in selected elementary mathematics series. School Science and Mathematics, 90 (1), 2-12.

Grouws, D. A., & Smith, M. S. (2000). NAEP findings on the preparation and practices of mathematics teachers. In E. A. Silver & P. A. Kennedy (Eds.), Results from the seventh mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress, Reston, VA: NCTM, 107–139.

Kang, W., & Kilpatrick, J. (1992), Didactic transposition in mathematics textbooks, *For the Learning of Mathematics*, 12, 2–7.

Love, E., & Pimm, D. (1996), 'This is so': a text on texts. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education,* Vol. 1, Dordrecht: Kluwer, 371-409.

Park, K., & Leung, F. K. S. (2002), A comparison of the mathematics textbooks of China, England, Japan, Korea, and United States. In S. L. Y. Yam & S. Y. S. Lau (Eds.), ICMI comparative study conference 2002: Pre-conference proceedings Hong Kong: University of Hong Kong, 225-233.

Pepin, B. (1997), Developing an understandin g of mathematics teachers in England, France and Germany: an ethnographi c study, unpublished PhD thesis, Reading.

Pepin, B., & Haggarty, L. (2001), Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teach-ing and learning cultures, *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik*, 33(5), 158-175.

Pickreign, J. R. (1996), An analysis of mathematics vocabulary and symbols use in five elementary mathematics textbook series. Doctoral dissertation, University of Kansas. (UMI: AAT 9726564)

Raman, M. (1998), Epistemological messages conveyed by high school and college mathematics textbooks. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association. San Diego. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 420523)

Remillard, J. T. (2000), Can curriculum materials support teachers' learning: Two fourth-grade teachers' use of a new mathematics text, *The Elementary School Journal,* 100 (4), 331-350.

Reys, R., Reys, B., Lapan, R., Holliday, G., & Wasman, D. (2003), Assessing the impact of standards-based middle grades mathematics curriculum materials on student achievement. *Journal for Research in Mathematics Education, 3*4(1), 74-95.

Robitaille, D. F., & Travers, K. J. (1992). International studies of achievement in mathemat-ics. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research in mathematics teaching and learning, New York: Macmillan, 687–709.

Seeley, C. L. (2003), Mathematics textbook adoption in the United States. In G. Stanic and J. Kilpatrick (eds.), A History of Mathematics Education, vol. 2, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 957-988.

Seah, W. T., & Bishop, A. J. (2000), Values in mathematics textbooks: A view through two Australasian regions. Paper presented at the Annual Meetings of the American Educational Research Association, New Orleans, LA.

Sosniak, L. A., & Stodolsky, S. S. (1993), Teachers and textbooks: Materials use in four fourth-grade classrooms, *The Elementary School Journal*, 93, 249–275.

Tyson-Bernstein, H., & Woodward, A. (1991). Nineteenth century policies for twenty-first century practice: The textbook reform dilemma. In Textbooks in american society, Albany, NY: State University of New York Press, 91–104.

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002), According to the Book. Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Van Dormoien, J. (1986) Textual analysis, in: B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds), *Perspective s on Mathematics Education,* Dordrecht: Reidel.

Whittington, D. (2000), 2000 National Survey of Science and Mathematics Education: Status of middle school mathematics teaching. Chapel Hill, NC: Horizon Research, Inc. *http://2000survey.horizon-research.com/ reports/mid-math.php*

Wilson, M. S., & Goldenberg, M. P. (1998). Some conceptions are difficult to change: One middle school mathematics teachers' struggle. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 1, 269-293.

Χασάπης Δ. & Βλάχου Μ. (2008), Η χρήση του σχολικού βιβλίου στη διδασκαλία των μαθηματικών του Δημοτικού σχολείου, στον παρόντα τόμο.

Χασάπης, Δ. (2007), Περί σχολικών βιβλίων γενικώς, αλλά όχι αορίστως, *Ενθέματα, Κυριακάτικη Αυγή*, 2 Σεπτ. 2007

ΜΙΑ ΔΙΕΘΝΗΣ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΧΡΗΣΗΣ ΤΟΥΣ ΑΠ' ΤΟΥΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥΣ – ΠΟΙΑ ΕΙΚΟΝΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΟΥΝ ΣΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΣΤΗΝ ΑΓΓΛΙΑ, ΓΑΛΛΙΑ ΚΑΙ ΓΕΡΜΑΝΙΑ;*

Birgit Pepin

University of Manchester, UK

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία δέκα χρόνια η συγγραφέας μελετάει τις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών σε σχολικές τάξεις διαφόρων Ευρωπαϊκών χωρών και ιδιαίτερα της Αγγλίας, Γαλλίας και Γερμανίας. Στόχος των μελετών αυτών είναι η βαθύτερη κατανόηση των τεκταινομένων στις σχολικές τάξεις του κατώτερου κύκλου των δευτεροβάθμιων σχολείων και ειδικά των ζητημάτων εκείνων τα οποία αφορούν στις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών και στα διδακτικά υλικά, όπως είναι τα σχολικά βιβλία. Η συγκριτική οπτική έχει συμβάλει στη σαφέστερη αποτύπωση των πρακτικών αυτών, στον εντοπισμό εναλλακτικών προσεγγίσεων και κατά συνέπεια στη βαθύτερη κατανόηση τους, και ίσως έχει υποκινήσει συζητήσεις για τις αντίστοιχες επιλογές στη χώρα μου. Μερικές φορές είναι σημαντικό να συνειδητοποιούμε ότι έχουμε επιλογές και να υποψιαζόμαστε ποιες μπορεί να είναι αυτές οι επιλογές.

Η μελέτη των διδακτικών βιβλίων των μαθηματικών μας οδήγησε στην κατανόηση της σπουδαιότητας τους, παρά τους ισχυρισμούς πολλών εκπαιδευτικών για το αντίθετο, και το πιο σημαντικό για τις δυνατότητες τους. Ιδιαίτερα για τις δυνατότητες παροχής και υποστήριξης ποικίλων μαθηματικών δραστηριοτήτων, οι οποίες με τη σειρά τους είναι πιθανόν να υποκι-

*Απόδοση στα Ελληνικά: Ελένη Γιαννακοπούλου & Δημήτρης Χασάπης

νούν και να υποστηρίζουν τη συμμετοχή στο μάθημα των μαθηματικών και την ευχαρίστηση (μαθητών και δασκάλων) από τη συμμετοχή αυτή.

Τα διδακτικά βιβλία μαθηματικών ποικίλουν σε περιεχόμενο και «πλούτο» υλικού και προσφέρουν διαφορετικά πράγματα σε διαφορετικούς ανθρώπους. Αυτό που φαίνεται κοινό είναι ότι τα διδακτικά βιβλία προσφέρουν μαθηματικές δραστηριότητες και εργασίες με τη μορφή ερωτήσεων και ασκήσεων στους δασκάλους οι οποίοι επιλέγουν και στους μαθητές οι οποίοι ασχολούνται και εργάζονται μ' αυτές.

Οι μαθηματικές εργασίες των διδακτικών βιβλίων και η «διαμεσολάβηση» τους από τους δασκάλους και το περιβάλλον των σχολικών τάξεων στην Αγγλία, Γαλλία και Γερμανία αποτέλεσε το επίκεντρο των ερευνών μας. Η συγγραφέας ισχυρίζεται ότι οι διαφορετικές μαθηματικές ασκήσεις οι οποίες περιέχονται στα διδακτικά βιβλία, σε συνδυασμό με τη διαμεσολάβηση τους από τους εκπαιδευτικούς, συνεπάγονται - σε μεγάλο βαθμό - διαφορές στις δραστηριότητες και στις πρακτικές οι οποίες αναπτύσσονται στις σχολικές τάξεις. Μας ενδιαφέρει σαφώς: η ποιότητα των εκπαιδευτικών ευκαιριών οι οποίες προσφέρονται στους μαθητές για τη μάθηση των μαθηματικών, τα «μέσα» με τα οποία μπορεί να βελτιστοποιηθεί η ποιότητα αυτή και η αντίστοιχη εμπλοκή των εκπαιδευτικών.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

ΔΙΔΑΚΤΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΚΑΙ ΕΥΚΑΙΡΙΕΣ ΜΑΘΗΣΗΣ

Οι μαθητές περνούν πολύ χρόνο στο σχολείο εργαζόμενοι με κείμενα και γραπτά υλικά, όπως είναι τα διδακτικά βιβλία. Αναγνωρίζοντας την εκπαιδευτική σπουδαιότητα αυτών των κειμένων η Τρίτη Διεθνής Μελέτη των Μαθηματικών και των Φυσικών Επιστημών (Third International Mathematics and Science Study - TIMSS) περιέλαβε μια εκτεταμένη πολυεθνική ανάλυση των αναλυτικών προγραμμάτων και των σχολικών βιβλίων των μαθηματικών πενήντα σχεδόν χωρών, ως τμήμα μιας διερεύνησης της μαθηματικής εκπαίδευσης και των αποτελεσμάτων της (Valverde et al, 2002). Από την ανάλυση οι ερευνητές καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι

«*τα διδακτικά βιβλία είναι εκείνα τα έντυπα τα οποία χρησιμοποιούνται πιο συστηματικά από τους δασκάλους και τους μαθητές τους κατά την κοινή εργασία τους*» (Valverde et al, 2002, σ. viii)

και σχολιάζουν τις διάφορες ευκαιρίες μάθησης οι οποίες προσφέρονται στους μαθητές κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών στις διάφορες χώρες

«*Ένα ζήτημα σημαντικής σπουδαιότητας για τις χώρες οι οποίες συμμετείχαν στην TIMSS ήταν η ποιότητα των παρεχόμενων στους μαθητές εκπαιδευτικών ευκαιριών για τη μάθηση των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών – καθώς και των μέσων τα οποία βελτιστοποιούν αυτή την ποιότητα*» (Valverde et al, 2002, σ. viii).

Τα διδακτικά βιβλία αποτελούν την κύρια πηγή αυτών των εκπαιδευτικών ευκαιριών. Οι Romberg and Carpenter (1986), για παράδειγμα, σημειώνουν ότι τα διδακτικά βιβλία αντιμετωπίζονται (στις ΗΠΑ) ως «*αυθεντία στη γνώση και οδηγός στη μάθηση* (και ότι) *… πολλοί δάσκαλοι θεωρούν τη δουλεία τους ως 'μεταποίηση του κειμένου των διδακτικών βιβλίων' "* (σ. 25). Ο Mayer et al. (1995) θεωρούν ότι τα διδακτικά βιβλία στις ΗΠΑ συνιστούν «*ένα είδος de facto εθνικού αναλυτικού προγράμματος*». Ο Garner (1992) σημειώνει ότι στις ΗΠΑ «*τα διδακτικά βιβλία λειτουργούν ως κρίσιμο όχημα για την απόκτηση της γνώσης στο σχολείο*» και μπορεί «*να αντικαθιστούν το λόγο του δασκάλου ως πρωταρχική πηγή πληροφοριών*» (σ. 53). Ο Glyn et al (1986) διατυπώνουν την άποψη ότι σε πολλά μαθήματα οι μαθητές αισθάνονται «*ότι οφείλουν μεγάλο μέρος της γνώσης στο έντυπο διδακτικό υλικό*» (σ. 245).

Σε Ευρωπαϊκό πλαίσιο η συγγραφέας (μαζί με την Linda Haggarty) ερεύνησαν τα διδακτικά βιβλία των μαθηματικών (του κατώτερου κύκλου των δευτεροβάθμιων σχολείων) στην Αγγλία, Γαλλία και Γερμανία, καθώς και τη χρήση τους από τους δασκάλους στη σχολική τάξη (Pepin and Haggarty, 2001; Haggarty and Pepin, 2002).

Σε μια διαφορετική έρευνα, επίσης, μελέτησαν τις παιδαγωγικές αρχές και τις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών στην Αγγλία, Γαλλία και Γερμανία (Pepin, 1997, 1999a+b, 2002), ώστε να κατανοηθούν ζητήματα τα οποία προέκυψαν από τη μελέτη των διδακτικών βιβλίων. Τα ευρήματα, όχι μόνο επιβεβαίωσαν τη σημαντική εξάρτηση των δασκάλων από τα διδακτικά βιβλία, αλλά ανέδειξαν και τους τρόπους δια των οποίων πολλοί δάσκαλοι περιόριζαν τις παρεχόμενες από τα βιβλία αυτά ευκαιρίες μάθησης. Με άλλα λόγια διαπιστώνεται, παρά τους περιορισμούς της έρευνας μας, ότι τα διδακτικά βιβλία μπορεί δυνητικά να προσφέρουν καλλίτερες ευκαιρίες μάθησης στους μαθητές από εκείνες οι οποίες προσφέρονται από τους δασκάλους και ταυτόχρονα, όμως, τα ίδια αυτά βιβλία αντιπροσωπεύουν το ανώτερο φράγμα των μαθησιακών ευκαιριών. Ο Schoenfeld (1988) στην ίδια λογική σχολιάζει ότι αν και η καλή διδασκαλία μπορεί να αντισταθμίζει τις ανεπάρκειες των διδακτικών βιβλίων «*υπάρχουν ενδείξεις που πιστοποιούν … ότι αυτό δεν συμβαίνει*» (σ. 163).

Από εκτεταμένες έρευνες σε πολλές χώρες και από διεθνείς συγκρίσεις είναι ξεκάθαρο ότι τα διδακτικά βιβλία είναι σπουδαία μέσα διδασκαλίας και επηρεάζουν σημαντικά οτιδήποτε συμβαίνει στη σχολική τάξη. Ακόμη παραπέρα μπορεί να υποστηριχτεί ότι είναι οι διαμεσολαβητές ανάμεσα «*στην πρόθεση του αναλυτικού προγράμματος και στη διδασκαλία που αναπτύσσεται στη σχολική τάξη*» (Valverde et al, 2002, σ. 2).

Η ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΔΑΣΚΑΛΟΥΣ

Η βιβλιογραφία είναι σαφής για την δυνητική ισχύ και την αυθεντία του σχολικού βιβλίου (Valverde et al, 2002; Olsen, 1989; Pepin & Haggarty, 2001). Από την σχετική έρευνα TIMSS (Valverde et al, 2002) ξέρουμε ότι τα σχολικά βιβλία «*επιχειρούν να προδιαγράψουν τη δομή των σχολικών μαθημάτων. Αυτές οι προδιαγραφές περιλαμβάνουν του καθορισμό των μαθηματικών θεμάτων τα οποία θα διδαχθούν, της αλληλουχίας τους , των δραστηριοτήτων οι οποίες μπορεί να χρησιμοποιηθούν για την διερεύνηση των μαθηματικών θεμάτων και την αναμενόμενη συμπεριφορά των μαθητών ως στοιχείο των δραστηριοτήτων αυτών … το βιβλίο μετατρέπεται σε ένα πρόγραμμα δραστηριοτήτων*». (σ. 167)

Είναι, όμως, εξ ίσου σαφές ότι οι δάσκαλοι δρουν ως διαμεσολαβητές του βιβλίου. Οι δάσκαλοι αποφασίζουν ποια βιβλία θα χρησιμοποιήσουν, ποια κεφάλαια του βιβλίου θα αξιοποιήσουν στη διδασκαλία τους και με ποια σειρά, με ποιους τρόπους οι μαθητές θα ασχοληθούν με το βιβλίο, σε ποιο επίπεδο και με ποιόν τρόπο θα παρεμβληθούν μεταξύ του βιβλίου και των μαθητών τους. Οι δάσκαλοι ως διαμεσολαβητές του διδακτικού βιβλίου αποτελούν αντικείμενο σχετικών ερευνών. Οι Johnsen (1993) and Van Dormolen (1986), για παράδειγμα, αναφέρουν έρευνες οι οποίες διαπιστώνουν ότι οι δάσκαλοι χρησιμοποιούν όλα τα είδη σχολικών βιβλίων με όλους τους τρόπους και σχολιάζουν ότι, παρόλο που τα διδακτικά βιβλία καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό τη διδακτική δραστηριότητα, ο καθορισμός αυτός δεν γίνεται με τους τρόπους που έχουν υποθέσει οι συγγραφείς των βιβλίων. Ο Johnsen (ο.π.) ταξινομεί τους δασκάλους ή ως πιστούς ακόλουθους του βιβλίου με ελάχιστο ή και καθόλου χρόνο αφιερωμένο στη μελέτη άλλου υλικού για κάθε μάθημα τους ή ως ακόλουθους της οργάνωσης της ύλης του βιβλίου, αλλά επιλεκτικούς στη χρήση του περιεχομένου τους ή σε εκείνους οι οποίοι δεν ακολουθούν ούτε το περιεχόμενο ούτε τη δομή των ενοτήτων του βιβλίου και διδάσκουν βασισμένοι σε δικό τους συμπληρωματικό υλικό. Ο διαμεσολαβητικός ρόλος των δασκάλων επεκτείνεται πέρα από την επιλογή του περιεχομένου και περιλαμβάνει αποφάσεις για ευρύτερα διδακτικά ζητήματα. Όπως έχουμε σχολιάσει αλλού (Pepin &

Haggarty, 2001), ο δάσκαλος μπορεί να δρα ως διαμεσολαβητής της εξουσίας του διδακτικού βιβλίου, διαμεσολαβητής ή πάροχος του μετα-λόγου του βιβλίου, διαμεσολαβητής της γλώσσας και των διευκρινήσεων του βιβλίου. Επιπλέον ο δάσκαλος μπορεί να παρέχει τις δικές του διευκρινήσεις, τα δικά του παραδείγματα και θέματα.

Ο Schmidt et al. (1996) αναφέρουν ότι, διεξάγοντας την έρευνα TIMSS, παρακολούθησαν μαθήματα σε σχολεία της Νορβηγίας, της Ισπανίας και των ΗΠΑ τα οποία βασίζονταν σε μεγάλο βαθμό στα διδακτικά βιβλία.: «*Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις, τα μαθηματικά που παρουσιάζονταν στην τάξη εμφανίζονταν ως ένα έγκυρο σώμα γνώσης το οποίο μαθητές και δάσκαλοι πρέπει να κατέχουν».* Στη Γαλλία, αντίθετα, *«η συχνότητα με την οποία οι δάσκαλοι διαφοροποιούνταν από το διδακτικό βιβλίο αποτελούσε μια ένδειξη ότι η διδασκαλία των μαθηματικών βασίζονταν στην εμπειρία του δασκάλου*» (σ. 91).

Η Boaler (1997) διεξήγαγε μια αναλυτική έρευνα σε δύο δευτεροβάθμια σχολεία στην Αγγλία στα οποία διδάσκονταν μαθηματικά με «παραδοσιακούς» και «προοδευτικούς», αντίστοιχα, τρόπους και υποστηρίζει ότι «η παρουσίαση του θέματος και η άσκηση» είναι η σχετικά τυπική προσέγγιση της διδασκαλίας των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, στην οποία «*η βασισμένη στο σχολικό βιβλίο διδασκαλία εφαρμόζεται από την πλειονότητα των δασκάλων των μαθηματικών*» (Boaler 1997, σ. 39). Αναφέρει επίσης τον Schoenfeld (1988), ο οποίος ισχυρίζεται ότι η βασισμένη στο σχολικό βιβλίο διδασκαλία, γενικά, συνεπάγεται τη διδασκαλία διαφόρων θεμάτων «*τα οποία έχουν τεμαχιστεί σε μικρές ενότητες οι οποίες επικεντρώνονται στην εκμάθηση αλγοριθμητικών τεχνικών ως μεμονωμένων δεξιοτήτων*» (Schoenfeld 1988, στο Boaler 1997). Είναι ενδιαφέρουσα η αναφορά του Beaton et al. (1996) ότι, σύμφωνα με τα ευρήματα της έρευνας TIMSS οι μισοί περίπου Άγγλοι μαθητές που ρωτήθηκαν θεωρούσαν ότι η επιτυχία στα μαθηματικά προϋπόθετε και την απομνημόνευση του διδακτικού βιβλίου.

Ως παράδειγμα της έμφασης την οποία μπορεί να δώσουν οι δάσκαλοι, ο Doyle (1988) σχολιάζει ότι πρέπει να είναι ιδιαίτερα προσεκτικοί στην αναμενόμενη από τους μαθητές επίδειξη της κατανόησης των μαθηματικών, τα οποία εμπεριέχονται στις ασκήσεις και στα προβλήματα που περιλαμβάνονται στο διδακτικό βιβλίο. Μια έμφαση στο ζήτημα αυτό προϋποθέτει μια σαφή συσχέτιση ανάμεσα στις μαθηματικές έννοιες και στις ασκήσεις που δίνονται για επίλυση (Henningsen & Stein, 1997) ή συνάφειες με αυτά που ο μαθητής ήδη ξέρει και κατανοεί (Hiebert & Carpenter, 1992).

Φαίνεται ότι οι δάσκαλοι διαμεσολαβούν το διδακτικό βιβλίο με συγκεκριμένους τρόπους και οι τρόποι αυτοί μπορεί να είναι διαφορετικοί σε διαφορετικές χώρες και ότι οι διαμεσολαβήσεις αυτές επηρεάζονται από τις πολιτισμικές παραδόσεις των χωρών αυτών (Pepin & Haggarty, 2001).

ΔΙΔΑΚΤΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Φαίνεται ότι τα διδακτικά βιβλία επηρεάζουν, σε μεγάλο βαθμό, τις μαθηματικές εμπειρίες των μαθητών. Τα βιβλία παρέχουν στα παιδιά ευκαιρίες μάθησης εκείνων των πραγμάτων τα οποία θεωρούνται σημαντικά από την κυβερνητική πολιτική. Οι δάσκαλοι διαμεσολαβούν τα βιβλία επιλέγοντας και διαμορφώνοντας ασκήσεις και προβλήματα, και με αυτή την έννοια διαμεσολαβούν και τη μάθηση, καθορίζοντας και οργανώνοντας τη δουλειά των μαθητών με βάση τα βιβλία.

Ο Doyle (1988) σημειώνει ότι οι ασκήσεις και τα προβλήματα που οι δάσκαλοι δίνουν στους μαθητές επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό τον τρόπο πρόσληψης του περιεχομένου ενός μαθήματος του αναλυτικού προγράμματος. Ακόμα παραπέρα κατά την γνώμη του οι ασκήσεις και τα προβλήματα διαμορφώνουν ένα πλαίσιο σκέψης των μαθητών, όχι μόνο κατά την διάρκεια, αλλά και μετά την διδασκαλία των μαθηματικών. Αυτό σημαίνει ότι οι ασκήσεις και τα προβλήματα, τις περισσότερες φορές επιλεγμένα από τα σχολικά βιβλία, επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό τον τρόπο που οι μαθητές σκέφτονται τα μαθηματικά και κατανοούν το νόημά τους. Οι Henningsen & Stein (1997) σχολιάζουν ότι «*οι σχολικές εργασίες με τις οποίες ασχολούνται οι μαθητές παρέχουν το πλαίσιο εντός του οποίου μαθαίνουν να σκέφτονται το περιεχόμενο ενός επιστημονικού αντικειμένου και διαφορετικές σχολικές εργασίες επιβάλουν διαφορετικές νοητικές απαιτήσεις στους μαθητές.... Έτσι, το είδος των σχολικών εργασιών μπορεί να επηρεάσει και να οργανώσει του τρόπο με τον οποίο οι μαθητές σκέφτονται και μπορεί να περιορίσει ή να διευρύνει τις απόψεις τους για το αντίστοιχο επιστημονικό αντικείμενο. Οι μαθητές αναπτύσσουν τη δικιά τους αίσθηση για το τι σημαίνει 'κάνω μαθηματικά' από τις πραγματικές εμπειρίες τους με τα μαθηματικά και οι κύριες εμπειρίες τους με τα μαθηματικά ως επιστημονικό αντικείμενο προέρχονται από τις σχολικές δραστηριότητες στις οποίες συμμετέχουν ....*» (σ. 525)

Παρόμοια ο Hiebert et al (1997) σημειώνουν ότι οι μαθητές «*διαμορφώνουν τις αντιλήψεις τους για το τι είναι ένα επιστημονικό αντικείμενο από το είδος των σχολικών εργασιών που εκτελούν .... Οι αντιλήψεις των μαθητών για ένα επιστημονικό αντικείμενο συγκροτούνται από το είδος των εργασιών που εκτελούν και όχι από τις νουθεσίες του δασκάλου ... οι σχολικές εργασίες είναι αποφασιστικές*» (σ. 17/18).

Επιπλέον ισχυρίζονται ότι «*η φύση των σχολικών εργασιών ορίζει για τους μαθητές τη φύση του επιστημονικού αντικειμένου και συμβάλλει σημαντικά στο είδος της σχολικής ζωής (Doyle 1983, 1988). Το είδος των σχολικών εργασιών που καλούνται οι μαθητές να εκτελέσουν θεμελιώνει το σύστημα της διδασκαλίας που αναπτύσσεται. Διαφορετικά είδη σχολικών εργασιών οδηγούν σε διαφορετικά συστήματα διδασκαλίας*» (σ. 7).

Σύμφωνα με τους Henningsen & Stein (1997) το νόημα του «κάνω μαθηματικά» ή «συμπεριφέρομαι μαθηματικά» για τους μαθητές εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το είδος των σχολικών εργασιών και των δραστηριοτήτων στις οποίες συμμετέχουν και αυτές με τη σειρά τους χρωματίζουν τις αντιλήψεις τους για τα μαθηματικά. Έτσι κάνοντας μαθηματικά και αναπτύσσοντας συγκεκριμένες αντιλήψεις για τα μαθηματικά είναι πιθανόν «*να δημιουργήσει» συγκεκριμένες «μαθηματικές διαθέσεις» ή «μια συγκεκριμένη οπτική για τα μαθηματικά*» (Schoenfeld, 1988)- όπως επίσης και για την ιδιοποίηση της μαθηματικής γνώσης.

Οι κατάλληλες σχολικές εργασίες έχουν τουλάχιστον τρία χαρακτηριστικά (Hiebert et al, 1996). Πρώτον, καθιστούν τα μαθηματικά προβληματικά έτσι ώστε οι μαθητές τα αντιμετωπίζουν ως ένα ενδιαφέρον και σχετικό πρόβλημα. Δεύτερον, συνδέονται με την κατάσταση των μαθητών και τρίτο, «*αφήνουν πίσω τους μια μαθηματική αξία*» (σ. 12), δηλαδή προκαλούν τους μαθητές να αναστοχαστούν σημαντικές μαθηματικές ιδέες.

Όπως η Boaler (2000) υπογραμμίζει οι μαθητές από τη διδασκαλία των μαθηματικών δεν μαθαίνουν απλά μεθόδους ή πώς να εκτελούν μια εργασία ή πώς να εφαρμόζουν έναν αλγόριθμο, αλλά μαθαίνουν «να μαθαίνουν μαθηματικά». Διαφορετικά περιβάλλοντα σχολικών τάξεων, διαφορετικοί περιορισμοί και προσφορές παρεχόμενες από διαφορετικές καταστάσεις και ευκαιρίες συμμετοχής σε μαθηματικές πρακτικές είναι πιθανό να επηρεάσουν τις αντιλήψεις των παιδιών για το τι σημαίνει να μαθαίνουν και να κάνουν μαθηματικά. Μαθαίνοντας να ασχολούνται επιτυχώς με τα μαθηματικά σημαίνει ότι μαθαίνουν να συμμετέχουν και να ταυτίζονται με τα πρότυπα μιας σχολικής κοινότητας. Συγκεκριμένα διδακτικά βιβλία μπορούν να ενισχύσουν πρακτικές, οι οποίες εισάγονται και υποστηρίζονται από τον δάσκαλο και αντίστροφα.

Φαίνεται ότι οι μαθηματικές εργασίες, οι ασκήσεις και τα προβλήματα, βρίσκονται στο επίκεντρο της μάθησης, της ανάπτυξης αντιλήψεων για το τι είναι μαθηματικά και της κατανόησης του τι συνεπάγεται να κάνω μαθηματικά. (NCTM, 2000).

Η ΕΡΕΥΝΑ

Σε προηγούμενες έρευνες (Pepin, 1997; Pepin, 1999b, Pepin, 2002), και χρησιμοποιώντας ένα εθνογραφικό πλαίσιο αναπτύχθηκε μια κατανόηση των πρακτικών της διδασκαλίας των μαθηματικών στην Αγγλία Γαλλία και Γερμανία. Προέκυψε ότι οι εθνικές εκπαιδευτικές παραδόσεις αποτελούσαν σημαντικό παράγοντα προσδιορισμού και επιρροής των διδακτικών δραστηριοτήτων. Σε μια επόμενη έρευνα οι Pepin και Haggarty ερεύνησαν τα διδακτικά βιβλία στις τρεις χώρες και τους τρόπους με τους οποίους χρησιμοποιούνται από τους δασκάλους κατά την διδασκαλία των μαθηματικών στο κατώτερο κύκλο του δευτεροβάθμιου σχολείου (Pepin & Haggarty, 2001; Haggarty & Pepin, 2002). Στην έρευνα αυτή, όχι μόνο επιβεβαιώθηκαν τα προηγούμενα ευρήματα, αλλά διαπιστώθηκε ότι η χρήση διδακτικών υλικών (όπως τα βιβλία) σε συνδυασμό με την επιλογή των (μαθηματικών) ασκήσεων και προβλημάτων επιδρά σε μεγάλο βαθμό στο μαθηματικό «διαιτολόγιο» που προσφέρεται στους μαθητές, το οποίο με τη σειρά του είναι πιθανό να επηρεάσει τις αντιλήψεις των μαθητών για το τι είναι μαθηματικά και για το τι σημαίνει να σκέφτεσαι με μαθηματικό τρόπο. Σε μια πρόσφατη έρευνα (Pepin, 2007; Pepin & Haggarty, 2007) χρησιμοποιήθηκε η έννοια «συνύφανση» (connectivity), ως αναλυτικό εργαλείο για τη μελέτη των μαθηματικών ασκήσεων και προβλημάτων σε ότι αφορά τη δυνατότητα κατανόησης των μαθηματικών από τα παιδιά. Κανένα από τα βιβλία που αναλύθηκαν δεν ικανοποιούσε τα κριτήρια της μάθησης των μαθηματικών δια της κατανόησης τους και αυτό που έγινε φανερό από την ανάλυση των βιβλίων, καθώς και των μαθηματικών ασκήσεων και προβλημάτων που περιείχαν τα μαθηματικά βιβλία, ήταν ο κεντρικός ρόλος του δασκάλου στη διαμεσολάβησή τους και στον εμπλουτισμό τους (Pepin & Haggarty, 2007). Όμως, εντοπίστηκαν χαρακτηριστικά των βιβλίων και κοινές πρακτικές των δασκάλων και χαρακτηριστικά των ασκήσεων και προβλημάτων των διδακτικών βιβλίων και των τριών χωρών, τα οποία επιτρέπουν την υπόθεση ότι οι ασκήσεις και τα προβλήματα μαθηματικών σε συνδυασμό με τη χρήση τους και το περιβάλλον μέσα στο οποίο χρησιμοποιούνται μπορεί να επηρεάσουν ή ακόμα και να «καθορίσουν» την ανάπτυξη της μαθησιακής, μαθηματικής, ταυτότητας των μαθητών (Pepin, 2008).

Στη παρούσα εισήγηση παρουσιάζεται μια νέα ανάλυση «της έρευνας των διδακτικών βιβλίων». Για την ανάλυση αυτή υιοθετήθηκε μια διαδικασία ανάλυσης θεμάτων παρόμοια με αυτή που περιγράφουν οι Woods (1986) και Burgess (1984) η οποία έχει αποδειχθεί χρήσιμη και σε άλλες διεθνής συγκριτικές έρευνες (π.χ. Broadfoot & Osborn, 1993). Παραδείγματα, τα οποία απεικονίζουν με τον καλύτερο τρόπο τα επιλεγμένα θέματα από την

έρευνα αυτή παρουσιάζονται εδώ. Για παράδειγμα από την ανάλυση των ασκήσεων και προβλημάτων επιλέχτηκε ένα συγκεκριμένο θέμα (αρνητικοί αριθμοί) για να διευκρινίσει τα χαρακτηριστικά των βιβλίων που προαναφέρθηκαν. Όμως εξαιτίας της διεθνούς συγκριτικής διάστασης της έρευνας έπρεπε να αντιμετωπιστούν ανάλογες δυσκολίες και συγκεκριμένα ζητήματα σχετικά με την εννοιολογική αντιστοιχία, την αντιστοιχία των μετρικών συστημάτων και την γλωσσική αντιστοιχία (Warwick & Osherson, 1973; Pepin, 2002 και 2004). Για να εντοπιστούν και να κατανοηθούν οι εκπαιδευτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών και τα διδακτικά περιβάλλοντα στην Αγγλία, Γαλλία και Γερμανία, κρίθηκε σκόπιμο να αξιοποιηθεί η γνώση μας από προηγούμενες έρευνες (Pepin, 1997, 1999a και b; 2002), η οποία ανέδειξε το σύνθετο χαρακτήρα της δουλειά των δασκάλων και του περιβάλλοντος των σχολικών τάξεων στην Αγγλία Γαλλία και Γερμανία, ως αποτέλεσμα επιδράσεων, όπως είναι η ανάπτυξη των εκπαιδευτικών συστημάτων και των διδακτικών παραδόσεων.

Τα κύρια ερευνητικά ερωτήματα ήταν:

- Ποια είναι τα γενικά χαρακτηριστικά των επιλεγμένων διδακτικών βιβλίων των μαθηματικών του κατώτερου κύκλου του δευτεροβάθμιου σχολείου στην Αγγλία, Γαλλία και Γερμανία και πως τα βιβλία αυτά χρησιμοποιούνται από τους δασκάλους στις σχολικές τάξεις;
- Ποιο είναι το είδος των ασκήσεων και των προβλημάτων που περιέχονται στα σχολικά διδακτικά βιβλία σε συνάρτηση με τα γενικά χαρακτηριστικά τους και τα ενδιαφέροντα των δασκάλων κατά τη χρήση τους;
- Ποια εικόνα για τη φύση των μαθηματικών και το «κάνω» μαθηματικά παρουσιάζουν στους μαθητές τα σχολικά βιβλία στην Αγγλία, Γαλλία και Γερμανία;

ΕΥΡΗΜΑΤΑ

ΤΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΤΗΣ ΣΧΟΛΙΚΗΣ ΤΑΞΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η διδασκαλία των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση διεξάγεται σε διαφορετικά περιβάλλοντα στην Αγγλία, στη Γαλλία και στη Γερμανία. Ενώ στην Αγγλία και στη Γαλλία τα περισσότερα παιδιά αυτής της ηλικίας φοιτούν σε ενιαία σχολεία, στη Γερμανία τα παιδιά διακρίνονται σε αυτά που φοιτούν στο κλασσικό σχολείο-*Gymnasium* (περίπου 40%), στο τεχνικό σχολείο-*Realschule*, ή στο δευτεροβάθμιο νέο σχολείο-*Hauptschule*. Οι τρεις τύποι των Γερμανικών σχολείων έχουν διαφορετικά αναλυτικά προγράμματα και διαφορετικά διδακτικά βιβλία μαθηματικών. Επιπλέον οι

μαθητές στις τρεις χώρες υπόκεινται σε διαφορετική σχολική οργάνωση, η οποία έχει επιπτώσεις στο «μαθηματικό διαιτολόγιο» και στις αντίστοιχες εμπειρίες τους από τη διδασκαλία των μαθηματικών. Στην Αγγλία τα περισσότερα σχολεία εφαρμόζουν ένα «σύστημα διάκρισης» (setting system) των μαθητών σε τμήματα ανάλογα με τη θεωρούμενη ικανότητα τους με στόχο την βελτίωση των επιδόσεων τους, παρά τις αποδείξεις των εμπειρικών ερευνών για το αντίθετο (Boaler, 1997; Boaler et al, 2000). Το σύστημα αυτό συνεπάγεται διαφορετικά διδακτικά βιβλία για τα διάφορα επίπεδα ικανοτήτων, τα οποία διατίθενται από τους εκδότες. Στη Γαλλία η πλειονότητα των μαθητών φοιτά σε τάξεις μικτών ικανοτήτων και διδάσκονται το ίδιο βιβλίο μαθηματικών, το οποίο επιλέγεται για κάθε σχολική τάξη από το σχολείο. Στη Γερμανία η διάκριση των μαθητών ακολουθεί τους τρεις τύπους σχολείων, σε καθένα από τους οποίους, όμως, η διδασκαλία των μαθηματικών είναι ενιαία για κάθε τάξη. Όπως προαναφέρθηκε σε κάθε τύπο σχολείων χρησιμοποιούνται διαφορετικά διδακτικά βιβλία μαθηματικών, ανάλογα με το αναλυτικό τους πρόγραμμα, τα οποία επιλέγονται από το Υπουργείο της περιοχής–*Land*, από έναν κατάλογο εγκεκριμένων διδακτικών βιβλίων μαθηματικών.

Η πρόσβαση των μαθητών στα διδακτικά βιβλία μαθηματικών ποικίλει επίσης κατά χώρα. Στην έρευνά μας για πολλούς μαθητές στο Στάδιο 4 (Key Stage 4) [1] και για όλους σχεδόν τους μαθητές στο Στάδιο 3 (Key Stage 3) δεν είχε καθοριστεί ένα διδακτικό βιβλίο μαθηματικών για χρήση στο σχολείο και στο σπίτι. Μερικοί δάσκαλοι και σχολεία είχαν βρει εναλλακτικές λύσεις: οι μαθητές έφερναν τα δικά τους τετράδια του μαθητή στο Στάδιο 4 ή στους μαθητές διανέμονταν διαφορετικά βιβλία σε διαφορετικά μαθήματα ή διανέμονταν φύλλα εργασίας τα οποία συνοδεύουν διάφορες εκδόσεις διδακτικών βιβλίων για τη δουλειά στο σπίτι, ενώ τα βιβλία έμεναν στο σχολείο. Η πλειονότητα των μαθητών στο Στάδιο 3 και ένας σημαντικός αριθμός τους στο Στάδιο 4 χρησιμοποιούσαν βιβλία μόνο κατά την διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο και υπό την επίβλεψη του δασκάλου. Μπορούμε, επομένως, να θεωρήσουμε ότι πάρα πολύ μαθητές σε αυτά τα σχολεία είχαν πρόσβαση στα σχολικά βιβλία μόνο ενώ βρίσκονταν στη σχολική τάξη και ήταν επομένως υποχρεωμένοι να βασίζονται αποκλειστικά στις παραδόσεις του δασκάλου κατά την διάρκεια των μαθημάτων (Pepin & Haggarty, 2003).

[1] Στην Αγγλία, η υποχρεωτική εκπαίδευση διακρίνεται σε τέσσερα στάδια. Οι δάσκαλοι που έλαβαν μέρος στην παρούσα έρευνα δίδασκαν μαθητές στο στάδιο 3(Key Stage 3 ηλικίας 11-14) και στο στάδιο 4(Key Stage 4 ηλικίας 14-16).

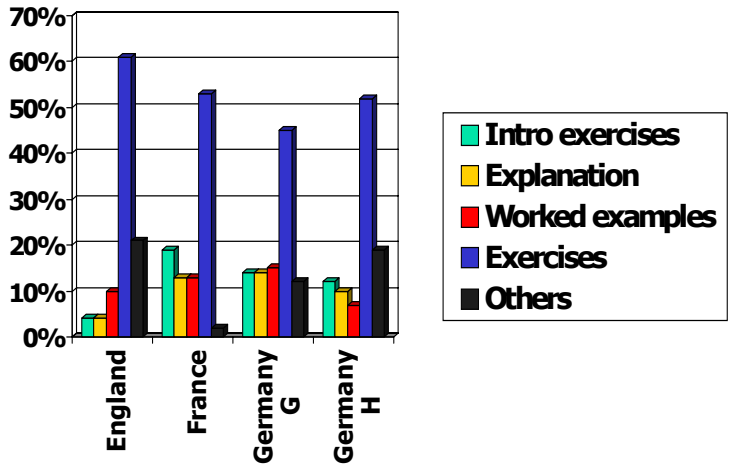
Στη Γαλλία η κατάσταση ήταν εντελώς διαφορετική. Κάθε μαθητής είχε ένα διδακτικό βιβλίο, το οποίο διανέμονταν από το σχολείο και χρησιμοποιούνταν κατά την διάρκεια της σχολικής χρονιάς στο σχολείο και στο σπίτι. Παραδοσιακά, κάθε χρόνο αγοράζονται και ανανεώνονται τα διδακτικά βιβλία μιας σχολικής τάξης.

Στη Γερμανία οι μαθητές αγοράζουν μόνοι τους τα διδακτικά βιβλία, τα οποία επιλέγονται από τα σχολεία και τους δασκάλους από έναν κατάλογο διδακτικών βιβλίων εγκεκριμένων από το Υπουργείο. Μόνο σε περιπτώσεις «δυσκολίας» (π.χ. εάν οι γονείς δεν έχουν την οικονομική δυνατότητα να αγοράσουν τα βιβλία) το σχολείο διανέμει βιβλία. Αυτό ήταν ιδιαίτερα φανερό στο δευτεροβάθμιο νέο σχολείο–*Hauptschule*, όπου οι μαθητές «δανείζονταν» τα βιβλία από το σχολείο.

Το σημαντικό είναι ότι κάθε μαθητής στις σχολικές τάξεις που διερευνήθηκαν στη Γαλλία και στη Γερμανία είχε ένα βιβλίο μαθηματικών, υποθετικά για την υποστήριξη της μάθησης, το οποίο ή παρέχονταν από το σχολείο ή αγοράζονταν από τους γονείς και οι περισσότεροι δάσκαλοι απαιτούσαν από τους μαθητές να έχουν τα βιβλία αυτά μαζί τους σε κάθε μάθημα. Στις σχολικές τάξεις της Αγγλίας οι μαθητές έχουν διαφορετικά διδακτικά βιβλία και φύλλα εργασίας για διαφορετικές ενότητες των μαθηματικών και χρησιμοποιούσαν αυτά τα βιβλία μόνο στη σχολική τάξη με τους δασκάλους τους. Είναι επομένως αναμενόμενο ότι η χρήση των διδακτικών βιβλίων από τους δασκάλους ποικίλει, επίσης, κατά χώρα και αυτό σχολιάζεται στη συνέχεια.

ΤΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΚΑΙ Η ΧΡΗΣΗ ΤΟΥΣ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΔΑΣΚΑΛΟΥΣ

Στην Αγγλία, Γαλλία και Γερμανία τα αναλυτικά προγράμματα μαθηματικών στο κατώτερο δευτεροβάθμιο σχολείο έχουν ελάχιστες διαφορές στο περιεχόμενό τους και στο τέλος του 9ου χρόνου τα διδακτικά βιβλία έχουν σε γενικές γραμμές καλύψει το ίδιο σύνολο μαθηματικών ιδεών και θεμάτων. Επιπλέον και αυτό ίσως παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, ένα μεγάλο μέρος όλων των διδακτικών βιβλίων που αναλύθηκαν περιείχε ασκήσεις για τους μαθητές. Με άλλα λόγια, υπήρχαν περισσότερες ασκήσεις παρά εξηγήσεις και αυτό χαρακτηρίζει γενικά το είδος του λόγου των μαθηματικών βιβλίων. Μια λεπτομερής ανάλυση του ζητήματος αυτού υπάρχει σε σχετικά άρθρα μας (π.χ. Pepin & Haggarty, 2004; Haggarty & Pepin, 2002).



Στη χρήση των διδακτικών βιβλίων από τους δασκάλους εντοπίστηκαν σημαντικές διαφορές κατά την διδασκαλία των μαθηματικών, ενώ όλοι οι δάσκαλοι τόνιζαν την σπουδαιότητα των βιβλίων για τα μαθήματά τους. Δέκα δάσκαλοι μαθηματικών που δίδασκαν σε σχολεία της Αγγλίας και συμμετείχαν με συνεντεύξεις στην έρευνα μας χρησιμοποιούσαν όλοι τα βιβλία τακτικά. Σχεδόν όλος ο χρόνος της χρήσης των βιβλίων στη σχολική τάξη αφιερωνόταν στην εξάσκηση των μαθητών στην επίλυση ασκήσεων τις οποίες επέλεγε ο δάσκαλος, ενώ πάντα ακολουθούσαν εξηγήσεις του δασκάλου για τη συγκεκριμένη δεξιότητα ή τεχνική επίλυσης μιας άσκησης. Όλοι οι δάσκαλοι βασίζονταν υπερβολικά στο βιβλίο και αιτιολογούσαν την επιλογή τους αυτή στην έλλειψη χρόνου για την προετοιμασία άλλου διδακτικού υλικού.

"*I use textbooks in most lessons and our whole scheme of work is written around the textbook.*" (JBF)

[Χρησιμοποιώ τα βιβλία στα περισσότερα μαθήματα μου και όλο το σχέδιο εργασίας μας είναι βασισμένο στο βιβλίο]

"*We are hard pressed for time and we're much more hard pressed than we were fifteen or so years ago, very much more so, the teaching load is horrendous, in terms of the amount of free time you have and also the assessments you are asked to give and within the school the number of meetings you are asked to attend, everything just takes so much more time.*" (MSH)

[Πιεζόμαστε πολύ από την έλλειψη του χρόνου και πιεζόμαστε πολύ

περισσότερο τώρα από όσο δεκαπέντε ή περίπου τόσα χρόνια πριν, πολύ περισσότερο, τα διδακτικά βάρη είναι τρομερά, σε σχέση με τον διαθέσιμο χρόνο και με τις βαθμολογίες που πρέπει να παραδόσεις και τον αριθμό των συνεδριάσεων που πρέπει να παρακολουθήσεις στο σχολείο, όλα απαιτούν πάρα πολύ χρόνο] (MSH).

Η πλειονότητα των δασκάλων που συμμετείχαν με συνεντεύξεις στην έρευνα μας ήταν έμπειροι στην διδασκαλία των μαθηματικών και δήλωναν ότι ζητούσαν από τα βιβλία ασκήσεις για επίλυση από τους μαθητές τους. Όπως δήλωναν ενδιαφέρονταν λιγότερο για εξηγήσεις ή προτεινόμενες διδακτικές προσεγγίσεις ή δραστηριότητες. Τα βιβλία χρησιμοποιούνταν για επίλυση ασκήσεων και «εξάσκηση δεξιοτήτων».

"*I use it for the pupils to practise the skills that I've previously introduced, so I expect to teach the topic and whatever method may be necessary and to do all explanations and then I use the exercises in the textbooks for the pupils to complete; … they don't use it to teach themselves. We teach them and the pupils then practise the skills."* (JBF)

[Χρησιμοποιώ το βιβλίο για να εξασκήσουν οι μαθητές τις δεξιότητες που έχω προηγούμενα διδάξει, έτσι περιμένω να διδάξω ένα θέμα και την όποια μέθοδο είναι αναγκαία, να δώσω όλες τις εξηγήσεις και έπειτα για συμπλήρωμα να δώσω στους μαθητές να λύσουν ασκήσεις από το βιβλίο… δεν χρησιμοποιούν το βιβλίο για αυτό-διδασκαλία. Εμείς διδάσκουμε και οι μαθητές στη συνέχεια εξασκούνται].

Είναι ενδιαφέρον ότι όλοι οι δάσκαλοι στην Αγγλία θεωρούν αδύνατη τη χρήση του ίδιου σχολικού βιβλίου για τους μαθητές της ίδιας τάξης. Αντίθετα μίλησαν για την ανάγκη διαφορετικών βιβλίων για τους μαθητές υψηλής, μεσαίας και χαμηλής «ικανότητας». Κατά τα λεγόμενά τους, οι μαθητές υψηλής ικανότητας χρειάζονται ενδιαφέρουσες και προκλητικές ασκήσεις, και ίσως, κάποιες εξηγήσεις. Οι μαθητές μεσαίας ικανότητας χρειάζονται πληθώρα απλών ασκήσεων για εξάσκηση σε συγκεκριμένες δεξιότητες ή τεχνικές. Οι ανάγκες των μαθητών χαμηλής ικανότητας προσδιορίζονται κυρίως με όρους πλαισίου αναφοράς των μαθηματικών και γλωσσικών απαιτήσεων.

"[for top sets] *I'm still looking for practice exercises, but with a bit more challenge to them, so whatever I do, can the textbook exercises take them on a bit further, so that's what I am looking for, lots of practice all the time, with top-set."* (JBLH).

[(για τα τμήματα των αριστούχων) Ψάχνω για ασκήσεις, αλλά κάπως προκλητικές για τους μαθητές, έτσι οτιδήποτε διδάσκω, να τους πηγαίνουν λίγο

παραπέρα οι ασκήσεις του βιβλίου, αυτό είναι που αναζητώ, συνεχή εξάσκηση για τους μαθητές ανωτέρου επιπέδου]

"*Intermediate students do not need intriguing exercises otherwise they can't do them ! You know, they don't need to be taxed, they've got to be pretty straight forward.*" (LSL)

[Οι μέτριοι μαθητές δεν χρειάζονται πολύπλοκες ασκήσεις γιατί δεν μπορούν να τις λύσουν! Ξέρεις δεν χρειάζεται να επιβαρυνθούν, χρειάζεται οι ασκήσεις να είναι εντελώς απλές].

"*…but children in the lower sets do not necessarily have a textbook and certainly the Year 11 I have which is a set 9, we do not have a textbook for them, there is not a suitable textbook that we have in the Department for them, which doesn't frighten them because there is just too much in these books, they need to be spoon-fed, they need being given short, concise examples they can follow and then having ten of the same really to do."* (MMLH)

[…αλλά τα παιδιά στα τμήματα χαμηλής επίδοσης δεν έχουν αναγκαστικά ένα βιβλίο και βέβαια στην 11η Τάξη που έχω, η οποία είναι επιπέδου 9, δεν έχουν ένα βιβλίο, δεν υπάρχει κατάλληλο βιβλίο διαθέσιμο για αυτά τα παιδιά στο σχολείο, το οποίο να μην τους τρομάζει γιατί υπάρχει πάρα πολύ ύλη σε αυτά τα βιβλία, οι μαθητές χρειάζονται να ταϊστούν με το κουτάλι, χρειάζονται να έχουν σύντομα, απλά, παραδείγματα, τα οποία μπορούν να κατανοήσουν και στη συνέχεια δέκα παρόμοιες ασκήσεις για επίλυση].

Οι περισσότεροι Γάλλοι και Γερμανοί δάσκαλοι δήλωσαν ότι χρησιμοποιούν τα βιβλία σε *κάθε* μάθημα και ισχυρίστηκαν ότι τα βιβλία ήταν μια από τις κύριες πηγές τους σε σύγκριση με τα φύλλα εργασίας και την τεχνολογία της πληροφορίας, για παράδειγμα. Όμως, μια λεπτομερέστερη ανάλυση δείχνει ότι η χρήση των βιβλίων είναι εντελώς διαφορετική και έχουν διαφορετικά ενδιαφέροντα για τα διδακτικά βιβλία.

Οι Γερμανοί δάσκαλοι του *Gymnasium* έχουν μια σαφή αντίληψη για τη χρήση του βιβλίου στο μάθημά τους, κατά την διάρκεια των φάσεων της επανάληψης και της άσκησης, όχι όμως κατά την «φάση της πρόσληψης», κατά την οποία χρησιμοποιούν τις παιδαγωγικές τους δεξιότητες για την διδασκαλία και συζητούν με τους μαθητές τους την μαθηματική έννοια. Σε προηγούμενα άρθρα (π.χ. Pepin, 1999b) εξηγήθηκε ότι ειδικά οι Γερμανοί δάσκαλοι του *Gymnasium* χρησιμοποιούν μεγάλο μέρος του διδακτικού χρόνου για συζήτηση με όλη την τάξη των μαθηματικών εννοιών ή των ασκήσεων που έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Το στοιχείο της πρακτικής σε

σχέση με τις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου υποστηρίχθηκε επίσης από τους δασκάλους του *Hauptschul*.

"…ich gebrauche Schulbücher selten in der Erarbeitungsphase, wesentlich in der Festigungsphase und zum üben. … Erarbeitungsphase läuft meistens anhand von Beispielen, die ich also selber vortrage, aber dann beziehen sie sich durchaus auf das Schulbuch auch, also daß man die Übungsphase direkt anschließen kann. …, daß das abgestimmt, und auch die Begrifflichkeit dem Schulbuch entspricht, manchmal nehme ich auch die Beispiele aus diesem Schulbuch oder aus anderen Schülbüchern, um dann die Übungsphasen aus diesem Schulbuch dann wirklich auch gleich anschließen zu können." (RGG)

[Σπανίως χρησιμοποιώ το διδακτικό βιβλίο κατά τη διάρκεια της φάσης της πρόσληψης, (αλλά) κυρίως στη φάση της επανάληψης και της άσκησης… Στη φάση της πρόσληψης παρουσιάζω κυρίως παραδείγματα, τα οποία όμως σχετίζονται με το διδακτικό βιβλίο, ώστε να μπορεί κάποιος να τα συνδέσει κατευθείαν όταν φτάνει στη φάση των ασκήσεων… οι οποίες είναι αντίστοιχες και η γλώσσα συναφή με εκείνη του βιβλίου, μερικές φορές παίρνω τα παραδείγματα από το βιβλίο ή από άλλα βιβλία και η φάση των ασκήσεων ακολουθεί…]

„…ich sag mal Hauptschwerpunkte ist in der Festigung und in der Übungsphase setze ich diese Lehrbücher ein. In der Erarbeitung …zum Teil, weil ich denke die Schüler erwarten einfach, daß man nicht nur so an das Buch geklammert ist sondern daß man sich ganz locker einfach über Mathematik einfach nur unterhält, und ich versuche die Schüler dort abzuholen, wo sie gerade stehen und deswegen führe ich am Anfang häufig ein Gespräch mit den Schülern aus dem sie ihre eigenen Erfahrungen darlegen können, und ich versuche dann daraus das mathematische Problem zu entwickeln." (MGG)

[… θα έλεγα ότι η έμφαση είναι στη φάση της επανάληψης και ότι χρησιμοποιώ τα βιβλία σε αυτή την φάση. Κατά τη φάση της πρόσληψης… σε κάποιο βαθμό, επειδή νομίζω ότι οι μαθητές θεωρούν ότι κάποιος δεν βασίζεται αυστηρά στο βιβλίο αλλά μιλάει για τα μαθηματικά με έναν ελεύθερο τρόπο, προσπαθώ να πιάσω τους μαθητές από εκεί που πραγματικά βρίσκονται και για αυτό κατά την αρχή του μαθήματος έχω συχνά μια συζήτηση με τα παιδιά στην οποία μου εκθέτουν τις εμπειρίες τους και προσπαθώ από αυτή τη συζήτηση να αναπτύξω ένα μαθηματικό πρόβλημα].

Παρόμοιες πρακτικές παρατηρήθηκαν και με τους Γάλλους δασκάλους, οι οποίοι χρησιμοποιούν πολύ τα διδακτικά βιβλία. Το βιβλίο χρησιμοποιήθηκε από διάφορους δασκάλους και όλοι οι Γάλλοι δάσκαλοι ανέφεραν τις

τρεις φάσεις των μαθημάτων τους (activitées-cours-exercises), αλλά όλοι ήθελαν να κάνουν το *cours* (την ουσία του μαθήματος) μόνοι τους χωρίς το βιβλίο και να επιλέγουν τις εισαγωγικές δραστηριότητες (*activitees*) και τις ασκήσεις (*exercises)* από το βιβλίο. Οι Γάλλοι δάσκαλοι απέδιδαν την ίδια αξία με του Γερμανούς και Άγγλους δασκάλους στις ασκήσεις του βιβλίου. Όπως και οι Ευρωπαίοι συνάδελφοι τους ζητούσαν να υπάρχει ένα μεγάλο εύρος ασκήσεων στα διδακτικά βιβλία.

"*J'utilise les livres essentiellement pour les exercices. … (όταν ρωτήθηκε τι θεωρεί σημαντικό στα βιβλία)…les exercices, oui, et puis au niveau de la leçon, la progression."* (CRF)

[…χρησιμοποιώ τα βιβλία κυρίως για τις ασκήσεις (όταν ρωτήθηκε τι θεωρεί σημαντικό στα βιβλία)…τις ασκήσεις ναι, και έπειτα στη διδασκαλία μου, την πρόοδο…]

"…, *et pour les activités et pour les exercices*." (MUF) […[χρησιμοποιεί το βιβλίο] για τις δραστηριότητες και για τις ασκήσεις]

"*…ce qui nous a surtout intéressé, c'est les exercices, parce que là c'est bien fait…" (REF)* […ότι μας ενδιαφέρει συγκεκριμένα είναι οι ασκήσεις, γιατί είναι καλές…]

Ως προς την διαφοροποίηση οι Γάλλοι δάσκαλοι αναφέρθηκαν σε διαφοροποιημένες ασκήσεις.

"Ce qui m'intéresse moi c'est avoir beaucoup d'exercices, mais de niveaux très variables parce que les classes sont de plus en plus hétérogènes et, bon j'arrive assez bien à gérer je trouve l'hétérogénéité des classes dans la mesure où je propose des exercices distincts selon le niveau de l'élève; c'est vraiment un peu à la carte, quoi, et au bout d'un moment ils acceptent assez facilement les élèves de ne pas faire tous les exercices, d'en faire quelques-uns, ceux qui veulent aller un peu plus loin, bon ils vont un peu plus loin, c'est un peu dans cet esprit là." (FEF)

[Με ενδιαφέρει να έχω πολλές ασκήσεις αλλά διαφόρων επιπέδων, γιατί οι σχολικές τάξεις είναι όλο και πιο πολύ ανομοιογενείς και … παίρνω υπόψη μου αυτή την ανομοιογένεια όπου προτείνω διαφορετικές ασκήσεις ανάλογα με το επίπεδο κάθε μαθητή, το οποίο είναι πραγματικά λίγο a-la-carte, λοιπόν, και μετά από λίγο οι μαθητές δέχονται εύκολα να μην κάνουν όλες τις ασκήσεις, να κάνουν μερικές μόνο και εκείνοι που θέλουν να προχωρήσουν παραπέρα, προχωρούν παραπέρα, είναι κάπως σε αυτό το πνεύμα].

"*Il sépare exercices de soutien, plus ou moins exercices faciles, et exercices d'approfondissement."* (CRF)

[Διακρίνουν ανάμεσα στις βασικές ασκήσεις, λιγότερο ή περισσότερο δύσκολες ασκήσεις και ασκήσεις εμβάθυνσης].

Οι δάσκαλοι απαιτούν από τα βιβλία διαφορετικούς τύπους ασκήσεων έτσι ώστε να επιλέγουν για τα διάφορα επίπεδα των μαθητών τους.

Συνοψίζοντας, οι δάσκαλοι και στις τρεις χώρες χρησιμοποιούν ασκήσεις από τα διδακτικά βιβλία για εξάσκηση των μαθητών τους. Διαπιστώνεται ότι σε μερικές χώρες (π.χ. Γερμανία) συζητούν τα μαθηματικά (για τα οποία δίνονται στη συνέχεια ασκήσεις από το βιβλίο) περισσότερο από ότι σε άλλες και ότι οι μαθητές συνήθως έχουν περισσότερες εμπειρίες αλληλόδρασης με όλη την τάξη και μεγαλύτερη «διαμεσολάβηση» των ασκήσεων του βιβλίου από τον δάσκαλο. Επιπλέον φαίνεται ότι οι δάσκαλοι ενδιαφέρονται για διαφορετικές όψεις του διδακτικού βιβλίου. Ενώ οι Γάλλοι δάσκαλοι απαιτούν διαφοροποιημένες ασκήσεις οι οποίες θα τους βοηθήσουν να ανταποκριθούν στις διαφορετικές ανάγκες των ανομοιογενών τάξεων, οι Γερμανοί δάσκαλοι του *Gymnasium* επιθυμούν περίπλοκες ασκήσεις οι οποίες θα προκαλέσουν τους μαθητές τους. Οι δάσκαλοι του *Hauptschul* εξέφρασαν ανησυχίες για τις αναγνωστικές δυσκολίες των μαθητών τους στην αντιμετώπιση των ασκήσεων του σχολικού βιβλίου, οι οποίες συμπίπτουν με αντίστοιχες ανησυχίες πολλών Άγγλων δασκάλων. Όμως πέρα από αυτό, οι Άγγλοι δάσκαλοι φαίνεται να επιζητούν έναν οδηγό που θα τους βοηθήσει να σχεδιάσουν τα μαθήματά τους και να δώσουν διαφοροποιημένες ασκήσεις στους μαθητές των διαφόρων επιπέδων, δηλαδή που θα κάνουν την ζωή τους «ευκολότερη».

Μπορεί επομένως να διατυπωθεί η ερώτηση πως είναι αυτές οι ασκήσεις στα σχολικά βιβλία; Με ποιους τρόπους υποκινούν την εμπλοκή των μαθητών με τα μαθηματικά; συνδέονται με τις εμπειρίες της ζωής των μαθητών; Βοηθούν τους δασκάλους να διαφοροποιήσουν τις απαιτήσεις τους; Πως παρουσιάζουν τα σχολικά μαθηματικά στους μαθητές;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σε μία πρόσφατη έρευνα (Pepin, 2007; Pepin & Haggarty, 2007) αναλύθηκαν οι ασκήσεις και τα προβλήματα των διδακτικών βιβλίων των μαθηματικών, μεταξύ άλλων, και ως προς τις νοητικές τους απαιτήσεις (Bloom, 1956), καθώς και την ένταξή τους σε ένα πλαίσιο αναφοράς (Freudenthal, 1968, 1991; Gravemeijer, 1994). Διαπιστώθηκε, ότι ενώ στα Αγγλικά και Γερμανικά βιβλία τα μισά σχεδόν προβλήματα ήταν ενταγμένα σε ένα πλαίσιο, έστω και τεχνητό, στα Γαλλικά βιβλία αυτό αφορούσε μόνο το ένα τρίτο περίπου των προβλημάτων. Αυτό σημαίνει, ότι για τους Γερμανούς Άγγλους ή Γάλλους μαθητές το ένα στα δύο προβλήματα εντάσσεται ολο-

σχερώς σε ένα αφηρημένο μαθηματικό κόσμο και δεν συνδέεται με τον κόσμο στον οποίο ζουν.

Ως παράδειγμα των προβλημάτων που είναι πιθανό να συναντήσουν οι μαθητές στα διδακτικά βιβλία των μαθηματικών αναλύθηκαν τρία από τα συνήθως χρησιμοποιούμενα διδακτικά βιβλία μαθηματικών στην 7η Τάξη (Lambacher Schweizer 7; Key Maths 7; Cinq sur Cinq 6eme) και παρουσιάζεται εδώ μια λεπτομερέστερη ανάλυση του κεφαλαίου που αναφέρεται στους «Αρνητικούς αριθμούς».

Οι ρητοί αριθμοί και μεταξύ αυτών οι αρνητικοί διδάσκονται στους μαθητές της 7ης τάξης του **Γερμανικού** Γυμνασίου από το βιβλίο "Lambacher Schweizer 7" (1996, 2002) στο κεφάλαιο με τίτλο «Rationale Zahlen» (σ. 78-115). Δείτε στο Παράρτημα 2 τις σελίδες 78/79 του βιβλίου αυτού.

Από την εισαγωγική σελίδα είναι φανερό ότι γίνεται μια προσπάθεια να ενταχθεί η μαθηματική έννοια των αρνητικών αριθμών σε διάφορα, οικεία στους μαθητές, πλαίσια. Τα πλαίσια αυτά σχετίζονται με μια άλλη αναπαράσταση, την αριθμογραμμή. Αυτό συνάδει με τις έρευνες οι οποίες υπογραμμίζουν τη σπουδαιότητα των συσχετίσεων ανάμεσα στις ποικίλες αναπαραστάσεις μιας μαθηματικής έννοιας ή ενός προβλήματος και την υποστήριξη των μαθητών να συσχετίζουν τα μαθηματικά με εμπειρίες τους από οικίες καταστάσεις (π.χ. Grouws, 1992; Hiebert, 1986). Οι ασκήσεις, όπως φαίνεται και στη σελίδα αυτή σχετίζονται με διάφορα πλαίσια τα οποία έχουν ήδη εισαχθεί στην εισαγωγή του κεφαλαίου (π.χ. επίπεδο νερού πάνω ή κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας, θερμοκρασία, υπολογισμοί κέρδους και ζημιάς), όπως επίσης και με άλλα πλαίσια, όπως είναι η νίκη ή ήττα στις εκλογές. Είναι ενδιαφέρον ότι σε δύο ασκήσεις οι αρνητικοί αριθμοί συναρτώνται με άλλες μαθηματικές έννοιες, όπως η μέση τιμή και η απόκλιση και μπορεί να υποστηριχθεί ότι εδώ τα μαθηματικά συνδέονται με άλλους τομείς των μαθηματικών.

«*Πέντε παιδιά μιας οικογένειας έχουν κατά την γέννησή τους το ακόλουθο βάρος:*

3345g; 3185g; 3320g; 3265g; 3280g.

Υπολογίστε την απόκλιση του κάθε βάρους από το μέσο βάρος των πέντε παιδιών και παραστήστε τις αποκλίσεις αυτές σε μια κλίμακα.» (σελ. 79, no9).

Σε επόμενες παραγράφους υπάρχουν ασκήσεις οι οποίες επιδιώκουν την εννοιολογική κατανόηση, ενώ άλλες είναι εντελώς υπολογιστικές. Παράδειγμα των πρώτων είναι:

«*Εξηγείστε το νόημα των ακόλουθων προτάσεων:*

a. Ο λογαριασμός της Ρίτας είναι '-85 DM'.

β. Η Κασπία Θάλασσα έχει υψόμετρο -28m.

γ. Το καθαρό βάρος ενός κουτιού με σοκολάτες διαφέρει κατά -15g από το απαιτούμενο βάρος» (σ. 81, no.3).

Η απόδοση ενός νοήματος είναι δύσκολη για πολλούς μαθητές. Ο Schoenfeld (1992, 1994) λεει ότι η μάθηση μπορεί να ειδωθεί, μεταξύ άλλων, ως μία διαδικασία συγκρότησης μιας «μαθηματικής διάθεσης» ή μιας «μαθηματικής άποψης» και η ανάπτυξη μιας μαθηματικής διάθεσης χαρακτηρίζεται από δραστηριότητες, όπως είναι η νοηματοδότηση των μαθηματικών ιδεών (Henningsen & Stein, 1997).

Οι 'Nombres relatifs' εισάγονται στην 7η Τάξη (6ème) του **Γαλλικού** σχολείου με το βιβλίο 'Cinq sur cinq- math 6ème' (1996) (σ. 211-224). Είναι ενδιαφέρον ότι πριν από το κεφάλαιο υπάρχει το 'ce que dit le programme'- τι λεει το αναλυτικό πρόγραμμα. Αυτό σε περιληπτική μορφή δηλώνει ξεκάθαρα στους μαθητές τι απαιτείται από το αναλυτικό πρόγραμμα να έχουν μάθει μετά τι διδασκαλία αυτού του κεφαλαίου.

Το κεφάλαιο έχει πέντε διακριτά μέρη (και αυτό ισχύει για κάθε κεφάλαιο): (i) 'découvrir'- να βρείτε (εισαγωγικές δραστηριότητες); (ii) 'retenir'- να θυμάστε (ουσιώδη για μάθηση); (iii) 'apprendre á resoudre'- να μάθετε πώς να λύνετε; and (iv) 'exercises et problèmes'- ασκήσεις και προβλήματα; και επιπλέον (v) 'soutien'- υποστήριξη (επαναληπτικές ασκήσεις).

Στις πρώτες σελίδες αυτού του κεφαλαίου παρουσιάζονται τέσσαρες εισαγωγικές δραστηριότητες (σ. 212/213), οι οποίες σχετίζονται και δείχνουν τους νέους αριθμούς 'nouveaux nombres' σε πλαίσια όπως, για παράδειγμα, ανελκυστήρες (με εικόνα), κατάδυση, ιστορία (πριν και μετά Χριστό) και συστήματα συντεταγμένων. Επιπλέον, μετεωρολογικά δεδομένα και θερμοκρασίες (περιοχών της Γαλλίας) εξηγούνται με όρους θετικών και αρνητικών, όπως και αντίθετων, (opposées) αριθμών. Ακολούθως ο αναγνώστης υποκινείται να συσχετίσει τα σχόλια και τα πλαίσια που εκτέθηκαν σε προηγούμενες σελίδες με τα μαθηματικά και τα πλαίσια παρουσιάζονται, ουσιαστικά, ως μια λογική υποδομή για την «επινόηση» των αρνητικών αριθμών. Ο τρόπος που κατά περίπτωση επιτυγχάνεται αυτό δεν εξηγείται και στις σελίδες που ακολουθούν τα πλαίσια δεν φαίνεται πλέον να ενδιαφέρουν. Φαίνεται ότι οι εισαγωγικές δραστηριότητες αποτελούν ένα πρόσχημα, παρά ένα πραγματικό πεδίο μάθησης και οι μαθηματικές έννοιες είναι το επίκεντρο του κεφαλαίου με ή χωρίς αναφορές σε πραγματικό πλαίσιο.

Οι ασκήσεις ταξινομούνται σε πέντε μέρη. Εδώ θα αναλύσουμε τα δύο πρώτα ('nombres relatifs'και 'additions d'entiers relatifs', σ. 218/219). Δείτε το Παράρτημα 3.

Στο μέρος που επιγράφεται «σχετικοί αριθμοί» υπάρχουν οκτώ ασκήσεις, οι τρεις εκ των οποίων σε κάποιο πλαίσιο. Σε μια από τις ασκήσεις αυτές υπό τον τίτλο «θερμοκρασίες και πρακτική ζωή» δίνονται διάφορες θερμοκρασίες και οι μαθητές καλούνται να συσχετίσουν τη σωστή θερμοκρασία με τη σωστή κατάσταση (π.χ. κανονική θερμοκρασία ανθρωπίνου σώματος – 37 βαθμοί). Η άσκηση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ότι σκοπεύει να δώσει στους μαθητές μια αίσθηση του μεγέθους αυτών των αριθμών συσχετίζοντας τους με οικείες σ' αυτούς καταστάσεις. Μια άλλη άσκηση, παρόμοια με μια άσκηση του Αγγλικού διδακτικού βιβλίου, χρησιμοποιεί τον ανελκυστήρα ως πλαίσιο εξοικείωσης με τους αρνητικούς αριθμούς (σχολιάζεται παρακάτω). Επιπρόσθετα, επιστρατεύεται η έννοια των «αντιθέτων» και οι μαθητές καλούνται να *σκεφθούν* εάν η δήλωση «να πάρω τον αντίθετο του αντίθετου ενός αριθμού σημαίνει να μην κάνω τίποτα»! Σε ποιο βαθμό οι μαθητές αναμένεται να σκεφτούν με βάση έναν πίνακα (που δίνεται για να συμπληρωθεί στην άσκηση) και με ποιους τρόπους ο πίνακας αυτός βοηθάει δεν είναι ξεκάθαρο. Προσφέρει, όμως, ευκαιρίες για συζήτηση στην τάξη, εάν επιθυμεί ο δάσκαλος.

Οι ασκήσεις που αφορούν στην πρόσθεση αρνητικών αριθμών χρησιμοποιούν πολλά και διάφορα γραφήματα και πίνακες για την επανάληψη της πράξης. Για παράδειγμα, χρησιμοποιείται ένα «προσθετικό» σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο οι συντεταγμένες αθροίζονται, π.χ. το σημείο (2,3) ονομάζεται 5 ή ζητείται να συμπληρωθεί ένας πίνακας στον οποίο υπάρχουν αλγεβρικές εκφράσεις τις οποίες οι μαθητές πρέπει, αφού εκτελέσουν τις πράξεις, να αντικαταστήσουν με τα αποτελέσματα τους που είναι αρνητικοί αριθμοί.

Όλες αυτές οι ασκήσεις είναι έξω από οιονδήποτε πλαίσιο, με εξαίρεση τη θερμοκρασία, και φαίνεται ότι στόχος τους είναι να ενισχύσουν την «διαδικαστική ευχέρεια» των μαθητών (Kilpatrick et al, 2001). Μια αναλογία σκαλοπατιών και σκάλας, η οποία αναφέρθηκε σε μια προηγούμενη ενότητα με τίτλο 'apprendre a resoudre' δεν ανακαλείται και έτσι και δεν γίνεται καμία σύνδεση ανάμεσα στις αναλογίες και στις αναπαραστάσεις της πρόσθεσης από τη μια ενότητα του σχολικού βιβλίου στην επόμενη.

Οι αρνητικοί αριθμοί εισάγονται στην 7η Τάξη του **Αγγλικού** σχολείου με τα Key Maths 7², σ. 245-266. Η εισαγωγική σελίδα του κεφαλαίου συσχετίζει τους αρνητικούς αριθμούς με τη μέτρηση της θερμοκρασίας και αναφέρεται στον Φαρενάιτ και στον Κέλσιο, τις δύο μεγάλες προσωπικότητες στην ιστορία της μέτρησης της θερμοκρασίας. Οι επόμενες δύο σελίδες «εισάγουν τους αρνητικούς αριθμούς» με μια εικόνα που δείχνει έναν πωλητή παγωτών, δίνονται ελάχιστες εξηγήσεις και ακολουθούν ασκήσεις με θερμοκρασίες, διαδικαστικού κυρίως χαρακτήρα. Οι ακόλουθες είναι τυπικά παραδείγματα:

«*Γράψτε τις θερμοκρασίες που δείχνουν τα θερμόμετρα σε βαθμούς Κελσίου …*»

«Οι 15 º C είναι θερμότεροι από τους -10 º C;"

«Αντιγράψτε τα ζευγάρια των θερμοκρασιών. Αντικαταστήστε το ; με < (μικρότερο ή ψυχρότερο από) ή > (μεγαλύτερο ή θερμότερο από)» (Ακολουθούν σειρές αριθμών).

«Βάλτε τις θερμοκρασίες με σειρά αρχίζουτας από την ψυχρότερη ….»

Γενικά, δίνονται λίγες εξηγήσεις ή σχόλια στις επτά σελίδες αυτής της ενότητας, η οποία περιλαμβάνει κυρίως παραδείγματα και ασκήσεις. Θα επικεντρωθούμε τώρα σε μια ενότητα η οποία περιέχει πιο προχωρημένες ασκήσεις και προβλήματα από εκείνα των εισαγωγικών σελίδων και από αυτές τις ασκήσεις και τα προβλήματα θα σχολιάσουμε εκείνα τα οποία αναφέρονται σε διαφορετικά από τη θερμοκρασία πλαίσια. Δείτε τη σελίδα 250 του Key Maths 7² στο Παράρτημα 1.

Οι εισαγωγικές προτάσεις «*Οι αρνητικοί αριθμοί δεν βρίσκονται μόνο στα θερμόμετρα. Έχουν και άλλες χρήσεις*» αποτελούν τη μοναδική αναφορά της χρήσης και της χρησιμότητας των αρνητικών αριθμών σε άλλα πλαίσια, εκτός εκείνων της θερμοκρασίας. Είναι, όμως, αμφίβολο αν οι μαθητές μπορεί να πειστούν γι' αυτό ή ακόμα και αν δίνουν προσοχή σ' αυτό. Η πρώτη άσκηση αναφέρεται στον ανελκυστήρα ενός κτηρίου. Το πλαίσιο αυτό είναι μέρος των πλαισίων, τα οποία προτείνονται στο αναλυτικό πρόγραμμα Key Stage 3 National Strategy for mathematics (2001).

«Εδώ είναι ο πίνακας ελέγχου ενός ανελκυστήρα

4	*Τέταρτος όροφος*
3	*Τρίτος όροφος*
2	*Δεύτερος όροφος*
1	*Πρώτος όροφος*
0	*Ισόγειο*
-1	*Υπόγειο – Χώρος στάθμευσης*

Ποιος αριθμός δηλώνει το Ισόγειο;
Που θα πάτε αν πατήστε το $\boxed{-1}$*;*
Πάτε από τον Πρώτο στον Τέταρτο όροφο. Πόσους ορόφους ανεβαίνετε;
Πάτε από τον Τρίτο όροφο στο Υπόγειο. Πόσους ορόφους κατεβαίνετε;
(Key Maths 7² σ. 250)

Μια παρόμοια άσκηση υπάρχει και στο γαλλικό βιβλίο, στη σελίδα 218 του '5 sur 5' (6eme) (n°2):

«*Ένας πύργος αποτελείται από 12 ορόφους και 4 υπόγεια. Πως νομίζετε ότι μπορεί να είναι ο πίνακας ελέγχου του ανελκυστήρα του;» (σ. 218).* Η άσκηση συμπληρώνεται με μια εικόνα ενός ανθρώπου ο οποίος περιμένει με δυο μεγάλες βαλίτσες και ένα πακέτο μπροστά στον ανελκυστήρα που «δεν λειτουργεί» (δείτε στο Παράρτημα 3).

Φαίνεται ότι και στις δύο περιπτώσεις, οι βασικές έννοιες των αρνητικών αριθμών υποτάσσονται σε ένα πλαίσιο και ότι το πλαίσιο κατευθύνει τα παιδιά σε μια λύση κοινής λογικής. Το πλαίσιο, όμως, συσκοτίζει το γεγονός ότι αναφέρεται στους αρνητικούς αριθμούς. Πραγματικά, όλη η άσκηση δεν είναι παρά μια σειρά ερωτήσεων συσχετισμένων με το συγκεκριμένο πλαίσιο, οι οποίες δεν συναρτώνται ούτε μεταξύ τους ούτε με τις βασικές ιδέες των αρνητικών αριθμών. Επιστρέφοντας στο Αγγλικό βιβλίο (σελίδες 250/251), οι αρνητικοί αριθμοί εντάσσονται επίσης στο πλαίσιο ενός τηλε-παιχνιδιού και στη δραστηριότητα ενός δασκάλου ο οποίος δίνει θετικούς ή αρνητικούς βαθμούς για την πρόωρη ή την καθυστερημένη άφιξη των παιδιών στο σχολείο. Οι απαντήσεις απαιτούν την αναγραφή ενός αριθμού, χωρίς να απαιτούνται εξηγήσεις ή συλλογισμοί.

Όλες αυτές οι ασκήσεις αναφέρονται σε οικείες καταστάσεις, αλλά χωρίς καμία προσπάθεια εννοιολογικής προσέγγισης των αρνητικών αριθμών, αφού κάθε ερώτηση αντιμετωπίζεται μεμονωμένα και μπορεί να απαντηθεί με χρήση τεχνικών κοινής λογικής, υποκείμενη πάντοτε στον κίνδυνο να παραμείνει στη σκέψη των παιδιών άσχετη με τα μαθηματικά και απόλυτα συνυφασμένη με το συγκεκριμένο πλαίσιο αναφοράς της. Παρά το γεγονός ότι τα πλαίσια φαίνονται ενδιαφέροντα, δεν συνδέονται με τις μαθηματικές έννοιες στις οποίες βασίζονται οι αρνητικοί αριθμοί και έτσι μπορεί μακροπρόθεσμα να είναι για τους μαθητές άνευ νοήματος. Αντίστοιχα, οι ασκήσεις και τα προβλήματα δεν συσχετίζονται με τις μαθηματικές έννοιες ή τα νοήματα τους (Smith & Stein, 1998), τα οποία μάλλον συσκοτίζουν. Φαίνεται ότι αυτές οι ασκήσεις υπάρχουν εκεί απλά για να υπάρχουν ασκήσεις προς επίλυση. Στην τελευταία σελίδα αυτής της ενότητας, χρησιμοποιείται η ιστορία των μαθηματικών ως πλαίσιο των αρνητικών αριθμών, όπως και ένα παράδειγμα του «υψομέτρου πάνω ή κάτω από το επίπεδο της θάλασσας» με τετριμμένες, όμως, ερωτήσεις. Χωρίς αμφιβολία θα μπορούσαν όλα αυτά τα πλαίσια να χρησιμοποιηθούν ως βάση για τη διερεύνηση των εννοιών των αρνητικών αριθμών, στα σχολικά βιβλία, όμως, παραμένουν αναξιοποίητα.

Συνοψίζοντας, στο Γερμανικό βιβλίο η χρησιμοποίηση ενός πλαισίου θεωρείται σημαντική για την κατανόηση των αρνητικών αριθμών και τα πλαίσια επιλέγονται να είναι οικεία σε γνωστές στους μαθητές καταστάσεις. Τα πλαίσια αυτά συσχετίζονται, επίσης, με τις μαθηματικές έννοιες. Σε ποια έκταση, όμως, οι μαθητές αποδίδουν μαθηματικά νοήματα σε αυτά τα πλαίσια ή είναι εξοικειωμένοι με αυτά δεν αποτέλεσε αντικείμενο της έρευνας μας. Στο Γαλλικό βιβλίο εκ πρώτης όψεως παρέχονται πολλά πλαίσια για την κατανόηση της έννοιας των αρνητικών αριθμών. Όμως, μια ενδελεχής ανάλυση δείχνει ότι τα πλαίσια αυτά είναι τεχνητές κατασκευές υποκείμενες στα μαθηματικά. Είναι φανερό ότι πρόκειται για εφαρμογές της μαθηματικής έννοιας των αρνητικών αριθμών (και των αντιθέτων τους) και των πράξεων στους αρνητικούς αριθμούς (πρόσθεση). Η χρήση των «αντιθέτων» αριθμών στην αριθμογραμμή είναι ελάχιστη, με εξαίρεση μια άσκηση.

Στο Αγγλικό βιβλίο υπάρχουν, δυνητικά, πλούσια πλαίσια με την προϋπόθεση ότι μπορεί να συσχετιστούν από τους μαθητές με τις έννοιες των αρνητικών αριθμών. Δυστυχώς, όμως, καθένα πλαίσιο εισάγεται και «χρησιμοποιείται» μεμονωμένα, χωρίς σύνδεση με τις υποκείμενες μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες, χωρίς ερωτήσεις και ασκήσεις, οι οποίες θα οδηγήσουν τους μαθητές σε ένα επίπεδο κατανόησης.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα διδακτικά βιβλία αποδοκιμάζονται συχνά και οι δάσκαλοι των μαθηματικών δεν θέλουν να αντιμετωπίζονται ως διδάσκοντες «σύμφωνα με το βιβλίο» (Johnson & Rising, 1972). Όμως, καλώς ή κακώς, όπως διαπιστώνουν οι σχετικές έρευνες τα διδακτικά βιβλία αποτελούν την κύρια πηγή διδασκαλίας των μαθηματικών σε όλο τον κόσμο (Valverde et al, 2002). Αυτό ισχύει, επίσης, στην Αγγλία, τη Γαλλία και τη Γερμανία. Επιπλέον, οι δάσκαλοι επιλέγουν ασκήσεις και προβλήματα για τους μαθητές τους από αυτά τα βιβλία, οι μαθητές μαθαίνουν από την εργασία που διεξάγεται στη σχολική τάξη και οι ασκήσεις τις οποίες επιλύουν διαμορφώνουν σε μεγάλο βαθμό το είδος αυτής της εργασίας.

Τι μπορεί να μάθουν, όμως, από τα διδακτικά βιβλία που αναλύθηκαν και ποιο είδος εργασιών και δραστηριοτήτων σχετίζονται με αυτές τις ασκήσεις; Για να ασχοληθούν με τα μαθηματικά οι μαθητές πρέπει να βρίσκουν μια άσκηση ενδιαφέρουσα, μια άσκηση την οποία θα ήθελαν να λύσουν. Αυτό προϋποθέτει ότι αναπτύσσουν μια σχέση με την άσκηση, με την έννοια ότι τα πλαίσια και οι καταστάσεις αναφοράς της άσκησης συνιστούν γι΄ αυτούς μια πραγματικότητα. Προϋποθέτει, επίσης, ότι οι μαθητές βρίσκουν την

άσκηση μαθηματικά «προβληματική», δηλαδή απαιτεί μαθηματικά για την επίλυση της.

Με βάση τα αποτελέσματα της έρευνας μας διαπιστώνεται ότι και στις τρεις χώρες, κατά πάσα πιθανότητα, ζητείται από τους μαθητές να επιλύσουν ασκήσεις και προβλήματα (από το διδακτικό βιβλίο), οι οποίες παρουσιάζονται μέσα σε ένα πλαίσιο. Η ένταξη των ασκήσεων σε ένα πλαίσιο φαίνεται ότι είναι μια σημαντική επιλογή και τα πλαίσια αυτά είναι και στις τρεις χώρες παρόμοια. Το ερώτημα της σχέσης των πλαισίων αυτών με τα παιδιά και τις καθημερινές εμπειρίες τους δεν τέθηκε από την έρευνα μας. Αυτό που διαφέρει, όμως, και στις τρεις χώρες είναι ο τρόπος με τον οποίο τα μαθηματικά συσχετίζονται με αυτά τα πλαίσια, όπως και το είδος των εργασιών που ζητείται από τους μαθητές σε αυτές τις ασκήσεις. Στη Γερμανία διαπιστώνεται ότι κάθε πλαίσιο (των ασκήσεων που αναλύθηκαν) είναι συνυφασμένο με τις αντίστοιχες μαθηματικές έννοιες και υπάρχει μια στενή σχέση μεταξύ τους, ενώ στην Αγγλία οι ασκήσεις τοποθετούνται σε ένα πλαίσιο το οποίο, φαινομενικά, επιλέγεται για τη δική του αξία και άρα έχει μικρή λογική συνάφεια ή συσχέτιση με τις αντίστοιχες μαθηματικές έννοιες. Οι περισσότερες ασκήσεις μπορεί να επιλυθούν χωρίς γνώση των αντίστοιχων μαθηματικών εννοιών (των αρνητικών αριθμών στην παρούσα περίπτωση). Σε ποιο βαθμό οι μαθητές μπορεί να μάθουν τις μαθηματικές έννοιες λύνοντας απλά τις ασκήσεις δεν είναι σαφές. Στη Γαλλία, και έχει ενδιαφέρον αυτό, το πλαίσιο αναφοράς μιας άσκησης χρησιμοποιείται ως πρόφαση για τη διδασκαλία των μαθηματικών, ως ένας Δούρειος ίππος ο οποίος θα παρασύρει τους μαθητές στη «σημαντική» ενότητα κάθε κεφαλαίου, την ενότητα «cours», των μαθηματικών εννοιών. Τα μαθησιακά αποτελέσματα αυτών των ασκήσεων απαιτούν για τη διερεύνηση τους μια διαφορετική προσέγγιση. Στο εννοιολογικό επίπεδο των μαθηματικών εννοιών (π.χ. αντίθετοι αριθμοί κλπ.), όμως, μπορεί να διατυπωθεί ο ισχυρισμός ότι στη Γαλλία και στη Γερμανία οι μαθητές αντιλαμβάνονται περισσότερα για τον εννοιολογικό χαρακτήρα, και ίσως και για τη δομή των μαθηματικών, από όσα είναι δυνατόν να γίνουν αντιληπτά μέσα από τις ασκήσεις των Αγγλικών διδακτικών βιβλίων.

Ένα δεύτερο «κατάλοιπο» (Hiebert et al, 1997) της έρευνας μας προέρχεται από τις μεθόδους ή τις στρατηγικές επίλυσης των προβλημάτων που περιέχονται στα διδακτικά βιβλία. Τα Γαλλικά βιβλία ασχολούνται με τα ζητήματα αυτά σε μια χωριστή ενότητα κάθε κεφαλαίου ('apprendre a resoudre') και οι ασκήσεις διατάσσονται ανάλογα με τη μέθοδο επίλυσης τους. Θέτοντας τα διδακτικά βιβλία των τριών χωρών σε ένα συνεχές θα μπορούσε να ειπωθεί ότι στο ένα άκρο τα Αγγλικά βιβλία αφήνουν τους μαθητές ή τους δασκάλους να επινοήσουν ή να εξακριβώσουν τις μεθόδους

επίλυσης των ασκήσεων που περιέχουν και αυτό μπορεί να είναι αυτονόητο και στο άλλο τα Γαλλικά βιβλία, ειδικά, παρέχουν ένα σαφή τρόπο επίλυσης συγκεκριμένων ασκήσεων. Το μήνυμα, επομένως, που λαμβάνουν οι μαθητές είναι ότι (1) τα μαθηματικά είναι εκεί για να ασχοληθούμε μ' αυτά (Αγγλία) και ότι τα πλαίσια αναφοράς τους και οι έννοιες δεν «συνομιλούν μεταξύ τους» αναγκαστικά ή ότι (2) δεν ενδιαφέρουν τα πλαίσια αναφοράς των μαθηματικών (Γαλλία), αλλά οι υποκείμενες μαθηματικές έννοιες και υπάρχουν στρατηγικές «αναγωγής» των εντός πλαισίου προβλημάτων σε «απλά» μαθηματικά προβλήματα ή ότι (3) οι μαθηματικές έννοιες και τα πλαίσια αναφοράς τους μπορεί να είναι συνυφασμένα και τα τυπικά δομημένα μαθηματικά, συμπεριλαμβανομένων των στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων, μπορεί να είναι χρήσιμα στα προβλήματα της καθημερινής ζωής (Γερμανία).

Σε ότι αφορά στη διαμεσολάβηση των ασκήσεων από τους δασκάλους διαπιστώνεται ένα από τα πιο σημαντικά καθήκοντα ενός δασκάλου είναι η επιλογή κατάλληλων ασκήσεων και προβλημάτων. Οι δάσκαλοι και στις τρεις χώρες κάνουν τις επιλογές τους κυρίως από το διδακτικό βιβλίο. Οι διαφορές εντοπίζονται στην έκταση με την οποία οι δάσκαλοι εισάγουν τους μαθητές τους στην επίλυση των ασκήσεων και στους τρόπους με τους οποίους εισάγουν τις αναγκαίες για την επίλυση των ασκήσεων αυτών μαθηματικές έννοιες. Η εικόνα μας είναι ότι στη μια χώρα (Γερμανία) οι δάσκαλοι εισάγουν τις μαθηματικές έννοιες σε μια συζήτηση με όλη την τάξη και επιλέγουν συγκεκριμένες ασκήσεις για την «εμπέδωση» τους, στην άλλη (Αγγλία) οι δάσκαλοι κάνουν μια σχετικά σύντομη εισαγωγή ή διδάσκουν κανόνες και απαιτούν την επίλυση ενός μεγάλου αριθμού απλών ασκήσεων για εξάσκηση και στην άλλη (Γαλλία) οι δάσκαλοι έχουν στη διάθεση τους δραστηριότητες από το διδακτικό βιβλίο για να εισάγουν μια έννοια και αφού εξηγήσουν στους μαθητές τα «ουσιώδη» (cours) επιλέγουν διαφοροποιημένες ασκήσεις για να ανταποκριθούν στις ανάγκες μιας θεωρούμενης ως ετερογενούς σχολικής τάξης.

Δεν είναι σαφές σε πιο βαθμό οι δάσκαλοι επιλέγουν σχετικές ασκήσεις ώστε οι μαθητές τους να αντιμετωπίσουν την ίδια μαθηματική ιδέα από διάφορες οπτικές ή κλιμακώνουν τις ασκήσεις ώστε να δημιουργηθούν για τους μαθητές τους ευκαιρίες να εμβαθύνουν βαθμιαία στην κατανόηση μιας μαθηματικής ιδέας. Έχει υποστηριχτεί (π.χ. Hiebert et al 1997) ότι όταν κλιμακώνονται οι ασκήσεις με αυτή τη λογική ενισχύεται η συνοχή των μαθηματικών εμπειριών οι οποίες προσφέρονται στα παιδιά. Συνοχή εδώ σημαίνει ότι οι ασκήσεις και οι δραστηριότητες συναρθρώνονται κατάλληλα και με νόημα. Δεν αποτέλεσε ιδιαίτερο αντικείμενο της έρευνας μας, αλλά μπορεί να ειπωθεί ότι από μια ανάλυση της ακολουθίας των

ασκήσεων κάθε κεφαλαίου των Αγγλικών διδακτικών βιβλίων προκύπτει ότι, οι μαθητές καλούνται να επιλύσουν σειρές ασκήσεων, οι οποίες είναι σχεδόν τυχαία διαταγμένες, σχετικά άσχετες μεταξύ τους και φαίνεται να μην οδηγούν πουθενά. Αντίθετα, στα Γαλλικά βιβλία οι ασκήσεις διατάσσονται με βάση το θεωρούμενο βαθμό δυσκολίας τους και κατά θεματικές κατηγορίες μέσα σε μια ενότητα.

Αποτελέσματα άλλης έρευνας (Pepin, 1997, 1999b) δείχνουν ότι οι Γάλλοι και ειδικότερα οι Γερμανοί δάσκαλοι του *Gymnasium* επιλέγουν ασκήσεις για επίλυση μέσα στην τάξη και μερικές φορές σε συζήτηση με όλη την τάξη, οι οποίες αποτελούν παραδείγματα των εννοιών που διδάχθηκαν και είναι «δύσκολες», ενώ δίνουν για επίλυση στο σπίτι «εύκολες» ασκήσεις. Στην έρευνα αυτή, οι Άγγλοι δάσκαλοι μας είπαν ότι οι μαθητές τους χρειάζονται «μια από τα ίδια» για εξάσκηση. Η επιλογή και η επίλυση ασκήσεων σε μια «συνεκτική» αλληλουχία είναι σημαντική. «Η επιλογή συνεκτικών σειρών ασκήσεων προς επίλυση προσφέρει στους δασκάλους έναν τρόπο να υλοποιήσουν το όραμα τους για τις δυνατότητες μάθησης των μαθητών τους σε μια σχολική χρονιά. Το να θέτουν στόχους με βάση τις εμπειρίες και τα ελλείμματα των μαθητών τους αποτελεί έναν άλλο τρόπο σκέψης …» (Hiebert et al, 1997, σ. 34).

Η επίδραση των δασκάλων στο περιβάλλον και στο πνευματικό κλίμα της σχολικής τάξης είναι μεγάλη και αυτό ισχύει και στην Αγγλία και στη Γαλλία και στη Γερμανία. Μέσα στα όρια του σχολικού συστήματος, εάν οι μαθητές φοιτούν σε μικτές τάξεις (Γαλλία), χωρίζονται σε τμήματα ικανοτήτων (Αγγλία) ή διακρίνονται σε διαφορετικούς τύπους σχολείων (Γερμανία), οι δάσκαλοι έχουν ελευθερία επιλογής μαθηματικών ασκήσεων, οι οποίες διαμορφώνουν τη διδασκαλία τους, αλλά και διαμεσολαβούν τις ασκήσεις αυτές με τρόπους που οι ίδιοι θεωρούν βέλτιστους. Σε πιο βαθμό οι δάσκαλοι δημιουργούν γνωστικές συγκρούσεις για να προκαλέσουν τη σκέψη των παιδιών είναι πέρα από τους στόχους της έρευνας μου, αλλά αυτό είναι εφικτό με επιλεγμένες νοητικές δραστηριότητες (*activitées*) από εκείνες που περιέχονται στα Γαλλικά διδακτικά βιβλία (Pepin & Haggarty, 2003).

Επιτρέποντας λάθη και ίσως προκαλώντας τα ή θέτοντας ανοιχτές ερωτήσεις είναι ένας άλλος τρόπος επίδρασης στο πνευματικό κλίμα της σχολικής τάξης. Κοιτώντας, όμως, τις ασκήσεις των σχολικών βιβλίων διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει καμία ανοιχτή ερώτηση στα Αγγλικά βιβλία και ελάχιστες στα Γαλλικά και στα Γερμανικά. Οι διδακτικές πρακτικές όλων των δασκάλων, αλλά ειδικότερα των Γερμανών, μπορεί να θεωρηθεί ότι, κατά κάποιον τρόπο, επιδιώκουν να αξιοποιήσουν τα λάθη των παιδιών στις ασκήσεις για να εμβαθύνουν την κατανόηση των μαθηματικών (Pepin,

1997). Αυτό το ζήτημα συζητήθηκε πολλές φορές με τους δασκάλους στην έρευνα μας.

Συμπερασματικά μπορεί να υποστηριχτεί και με δεδομένους τους περιορισμούς της έρευνας μας, ότι η εικόνα για τα μαθηματικά, την οποία πιθανότατα διαμορφώνουν οι μαθητές, βασίζεται στις ασκήσεις και στα προβλήματα του σχολικού βιβλίου, στις πρακτικές επίλυσης των ασκήσεων και των προβλημάτων αυτών, καθώς και στο περιβάλλον της σχολικής τάξης μέσα στο οποίο εργάζονται και αποκτούν εμπειρίες επίλυσης των ασκήσεων και των προβλημάτων, στοιχεία τα οποία είναι διαφορετικά στην Αγγλία, στη Γαλλία και στη Γερμανία. Ενώ μπορεί να υποστηριχθεί ότι και στις τρεις χώρες οι μαθητές «ασκούνται» να είναι «συμμορφωμένοι» – σπάνια παρέχονται ευκαιρίες διαπραγμάτευσης των μαθηματικών και της μάθησης τους – στην Αγγλία το μαθηματικό διαιτολόγιο των σχολικών βιβλίων ωθεί τους μαθητές στον «κοινό νου». Μπορεί να λεχθεί ότι στη Γαλλία ευνοείται η μαθηματική ταυτότητα του «εργαλειακού» (instrumentalist) και στη Γερμανία του «συνδέοντα» (connector), επιπλέον του συμμορφωμένου (conformist) μαθητή; Εάν αυτό ισχύει, τότε πρέπει να ιδωθεί σε πιο βαθμό οι μαθητές «παγιδεύονται» σε αυτές τις μαθηματικές ταυτότητες, για καλό ή για κακό, από τον τρόπο που διδάσκουν τα μαθηματικά οι δάσκαλοι τους. Ποιοι τύποι ευκαιριών είναι αναγκαίοι ώστε να είναι δυνατή μια αλλαγή;

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ

Το μεγαλύτερο μέρος της έρευνας για τα διδακτικά βιβλία στην Αγγλία, Γαλλία και Γερμανία διεξήχθη σε συνεργασία με την Dr Linda Haggarty και αυτή η εισήγηση βασίζεται στην έρευνα αυτή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Boaler, J. (1997) *Experiencing school mathematics: teaching styles, sex and setting*. Buckingham, UK: Open University Press.

Boaler, J. (2000) Mathematics from another world: traditional communities and the alienation of learners. *Journal of mathematical Behaviour* 18(4):1-19.

Boaler, J., Wiliam, D. and Brown, M. (2000) Students' experiences of ability grouping- disaffection, polarisation and the construction of failure. *British Educational Research Journal,* 27 (4).

Broadfoot, P. and Osborn, M. (1993) *Perceptions of teaching*. London: Cassell.

Burgess, R.G. (1984) *In the Field: An Introduction to Field Research*. London: Allan & Unwin.

Cinq sur cinq- math 6eme- Dlord, R. & Vinrich, G., with Bourdais, M. (1996), Paris: Education.

DfEE (2001) *Key Stage Three National Strategy: Framework for Teaching Mathematics: Years 7, 8 and 9*, London: Department for Education and Employment.

Doyle, W. (1983) Academic Work, *Review of Educational Research*, 53:2, pp.159-99.

Doyle, W. (1988) Work in Mathematics Classes: the content of student thinking during instruction, *Educational Psychologist*, 23(2): 167-80.

Freudenthal, H. (1968) Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, 1: 3-8.

Freudenthal, H. (1991) *Revisiting mathematics education. China lectures.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Garner, R. (1992) Learning from school texts. *Educational Psychologist,* 27: 53-63.

Glyn, S.M., Andre, T. and Britton, B.K. (1986) The design of instructional text. *Educational Psychologist,* 21: 245-51.

Gravemeijer, K. P.E. (1994) *Developing realistic Mathematics Education.* Utrecht: CD- Press/Freudenthal Institute.

Grouws, D.A. (1992) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.

Haggarty, L. and Pepin, B. (2002) 'An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German Classrooms: who gets an opportunity to learn what?' *British Educational Research Journal* 28 (4).

Henningsen, M. and Stein, M.K. (1997) 'Mathematical tasks and student cognition: classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning', *Journal for Research in Mathematics Education* 28 (5): 524-49.

Hiebert, J. (ed) (1986) *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K.C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A. and Human, Piet (1997) *Making sense- teaching and learning mathematics with understanding,* Portsmouth, NH: Heinemann.

Hiebert, J. and Carpenter, T. (1992) Learning and teaching with understanding, in D.A. Grouws (ed) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, New York: Macmillan.

Johnsen, E.B. (1993) *Textbooks in the Kaleidoscope. A critical Survey of Literature and Research on Educational Texts*. Oslo: Scandinavian University Press.

Johnson, D.A. and Rising, G.R. (1972) *Guidelines for teaching mathematics*. Belmont/ California: Wadsworth.

Keymaths - Baker, D, Bland, P, Hogan, P, Holt, B, Job, B, Verity, R, Wills, G (2000) *Keymaths 7[1] and Keymaths 7[2]* . Cheltenham: Stanley Thornes

Kilpatrick, J., Swafford, J. and Findell, B. (eds) (2001) *Adding it up- Helping children learn mathematics*. Washington DC: National Academy Press.

Lambacher Schweizer – Schmid, A and Weidig, I (1994) *Lambacher Schweizer 6.* Stuttgart: Klett.

Mayer, R.E., Sims, V. and Tajika, H. (1995) A comparison of how textbooks teach mathematical problem solving in Japan and the United States, *American Educational Research Journal*, 32: 443-60.

National Council of Teachers of Mathematics (2000) *Principles and Standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Olson, D.R. (1989) On the language and authority of textbooks. In De Castell, S. et al (eds) *Language, authority and criticism: readings on the school textbook*. London: Falmer Press.

Osborn, M., Broadfoot, P., McNess, E., Planel, C, Ravn, B. and Triggs, P. (2003) *A World of difference- comparing learners across Europe,* Maidenhead, UK: Open University Press.

Pepin, B. (2008- submitted) "Learner classroom identity 'conditioned' by mathematical tasks in textbooks? – a comparative perspective", chapter in Brown, M., Mendick, H., Black, L., Rodd, M., and Solomon, Y. (eds) *Mathematical relationships: identities and participation* .

Pepin, B. (2007) 'About mathematical tasks and making connections: an exploration of connections made in and 'around' mathematics textbooks in England, France and Germany' (Plenary presentation), in Bergsten, C., Grevholm, B., Masoval, H., and Ronning, F. (eds) *Relating Practice and Research in Mathematics Education*, Proceedings of NORMA 05, Fourth Nordic Conference on mathematics Education, Trondheim, September 2005.

Pepin, B. (2002) 'Different cultures, different meanings, different teaching' in L.Haggarty (ed) *Teaching Mathematics in Secondary Schools*, London: Routledge (pp.245-58).

Pepin, B. (1999a) Mobility of mathematics teachers across England, France and Germany. *European Educational Researcher*, Volume 5 (1), pp.5-14.

Pepin, B. (1999b) The influence of national cultural traditions on pedagogy: classroom practices in England, France and Germany. In *Learners and Pedagogy*, eds. J.Leach and B.Moon. London: Sage Publications.

Pepin, B (1997) Developing an understanding of mathematics teachers in England, France and Germany: an ethnographic study. Reading: Unpublished PhD thesis.

Pepin, B. and Haggarty, L. (2007) 'Making connections and seeking understanding: Mathematical tasks in English, French and German textbooks', Paper presentation at AERA 07, Chicago, April 2007.

Pepin, B. and Haggarty, L. (2003) 'Mathematics textbooks and their use by teachers: a window into the education world of particular countries?, in Van den Akker, J. , Kuiper, W. and Hameyer, U. (eds) *Curriculum Landscapes and Trends,* Dordrecht: Kluwer (pp. 73-100).

Pepin, B. and Haggarty, L. (2001) 'Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures', *Zentralblatt for the Didactics of Mathematics*, 33 (5): 158-75.

Pepin, B. (2002) 'Methodological issues of cross-national comparisons: efforts to establish equivalence in a cross-national study of mathematics teachers' work in England, France and Germany' in Fries, A., Rosenmund, M. and

Heller, W. (eds) *Comparing Curriculum Making Processes* (in the series "Explorations"), Zurich: Peter Lang (pp. 269-80).

Pepin, B. (2004) 'Comparing notions of social justice in education across borders and cultures- Some methodological considerations', in Moreno Herrera, L. and Francia, G (eds) *Educational Policies – Implications for equity, equality and equivalence*, Oerebro, Sweden: University Press (pp. 221-36).

Romberg, T.A. and Carpenter, T.P. (1986) Research on teaching and learning mathematics: two disciplines of scientific enquiry, In M.C. Wittrock (ed) *Handbook of Research on Teaching* (3rd ed., pp.850-873). New York: Macmillan.

Schoenfeld, A.H. (1988) When good teaching leads to bad results: the disasters of "well-taught" mathematics courses, *Educational Psychologist*, 23(2): 145-66.

Schoenfeld, A.H. (1992) Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D.A.Grouws (ed) *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (p.334-71). New York: Macmillan.

Schoenfeld, A.H. (1994) Reflections on doing and teaching mathematics. In A.H.Schoenfeld (ed) *Mathematical thinking and problem solving* (p.53-70). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Smith, M.P. and Stein, M.K. (1998) Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics in the Middle School*, 3(5): 344-50.

Valverde, G.A., Bianchi, L.J., Wolfe, R.G., Scmidt, W.H. and Houng, R.T. (2002) *According to the Book- Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Van Dormolen (1986) Textual Analysis. In Christiansen, B, Howson, A.G. and Otte, M (eds) *Perspectives on Mathematics Education*. Dordrecht: D.Reidel.

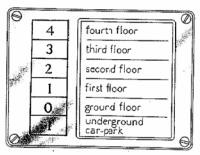
Warwick, D. and Osherson, S. (eds) (1973) *Comparative Research Methods: an Overview*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

Woods, P. (1996) *Inside Schools: Ethnography in Educational Research*. London: Routledge & Kegan Paul.

Negative numbers are not just found on thermometers. They have other uses.

Exercise 11:3

1 Here is the control panel of a lift.



a What number is used for the ground floor?

b Where do you go if you press −1?

c You go from the first floor to the fourth floor.
How many floors do you go up?

d You go from the third floor to the car-park.
How many floors do you go down?

2 On a TV quiz show contestants lose 5 points if they interrupt a question but do not know the correct answer.

a A contestant interrupts the first question and gets the answer wrong.
How could this be shown on the score-board?

b The contestant scores 10 points on the next round.
How many points does he have now?

3 Mr Patel has a points system for his form 7P:
early 1 point, just in time 0 points, late −2 points.
Dale is late on Monday, just in time on Tuesday and Wednesday and early on Thursday and Friday.
How many points does he have at the end of the week?

4 James subtracts one number from another on his calculator and gets the answer 8.
What would his answer be if he did the subtraction with the second number first?

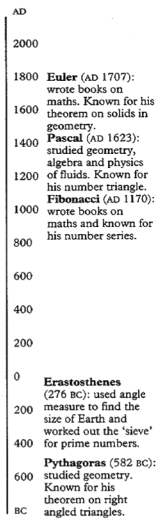
5 **a** Amy loses her coat and must pay £55 for a new one. She has £26 saved and she earns £15. Amy borrows the rest from her mother.
How much does she borrow?

b Amy's aunt gives Amy £20 for her birthday. Amy pays her mother back.
How much does Amy have left?

6

Sir Isaac Newton (1642–1727)

Einstein (AD 1879): theory of relativity.
Newton (AD 1642): astronomer and mathematician, famous for study of gravity.
Napier (AD 1550): engineer, invented rods or 'bones' for calculating.



The time line shows the dates of birth of some famous mathematicians.

a How many years after Newton was Einstein born?

b Pythagoras studied geometry and so did Euler. How many years before Euler was Pythagoras born?

c Erastosthenes was born many years before Napier. How many years exactly?

d If you were to add Archimedes (262 BC) to the diagram, between which two mathematicians would he go?

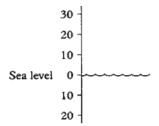
7 The wreck of the ship *James Egan Layne* lies at 21.6 m. Sea level is zero (0).
A diver is swimming down to look at the wreck. He is 11.2 m below the surface.

a How much deeper does he have to dive?

A helicopter flies overhead at 29.7 m.

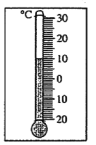
b What is the distance between the helicopter and the diver?

c Draw a sketch to illustrate the question.
Show the information and your answers on a number line at the side of your sketch.



ΜΙΑ ΔΙΕΘΝΗΣ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΧΡΗΣΗΣ...

1 Unter null/über null



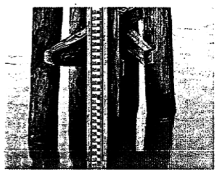


Fig. 1

Rote Zahlen und Kurzarbeit
(nik) Der Konzernumsatz ging 1990/91 auf 249 (Vorjahr 259) Mio. DM zurück, heißt es in einer Mitteilung des Gewerbebetriebes. Der Konzernumsatz sei nur eingeschränkt mit dem Vorjahr vergleichbar, da erstmals

1 a) Was bedeuten die roten Zahlen auf dem Thermometer? Wo steht die Thermometeranzeige bei „12 Grad unter null"?
b) Fig. 1 zeigt den Pegel vom Hamburger Hafen bei Niedrigwasser. Lies den Wasserstand ab. In welchem Bereich steht das Wasser bei einem Pegelstand „über null"?

2 Was ist in dem Zeitungsausschnitt mit den „roten Zahlen" gemeint?

Die Höhe von Bergen oder auch die Höhenlage von Orten oder Seen werden in Metern über dem Meeresspiegel, dem „Normal-Null", kurz in m über NN, angegeben. Das Höhenprofil in Fig. 2 zeigt, dass es aber auch Punkte gibt, z. B. den Wasserspiegel des Toten Meeres in Israel, die unter NN liegen.

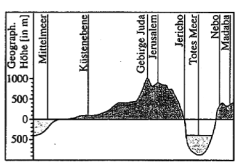


Fig. 2

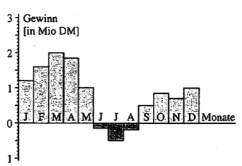
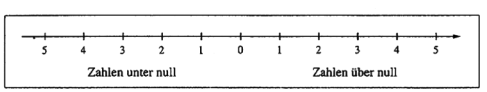


Fig. 3

Früher war es in der Buchhaltung oder bei Kontoauszügen üblich, Guthaben mit schwarzen Zahlen und Schulden mit roten Zahlen zu schreiben. Daher spricht man heute noch bei Schulden oder Verlusten von roten Zahlen. Das Diagramm in Fig. 3 zeigt die Gewinne eines Konzerns im Laufe eines Jahres. In den Monaten Juni bis August wurden „rote Zahlen geschrieben", d. h., statt Gewinne wurden Verluste gemacht.

Bei z. B. Temperaturen, Pegelständen, geographischen Höhen können Zustände „unter null" auftreten. Um sie zeichnerisch darzustellen, erweitert man den Zahlenstrahl zu einer symmetrischen Skala:



Die „schwarzen Zahlen" 1, 2, 3, . . . und die „roten Zahlen" liegen spiegelbildlich bezüglich 0.

Aufgaben

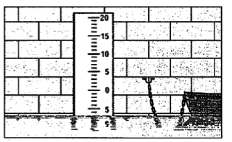


Fig. 1

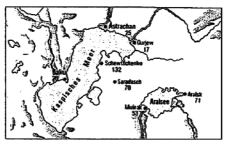


Fig. 2

3 Die folgenden Wasserstände wurden jeweils um 7 Uhr an einem Stauwehr gemessen. Zeichne die Skala eines Pegels und trage die Wasserstände ein:

Mo: 7 cm unter null,	Di: 5 cm unter null,	Mi: 19 cm über null,
Do: 8 cm über null,	Fr: 7 cm über null,	Sa: 12 cm unter null,
So: 5 cm unter null.		

4 In Ostfriesland liegen einige Seen unter dem Meeresspiegel. Lies ihre Höhen ab:

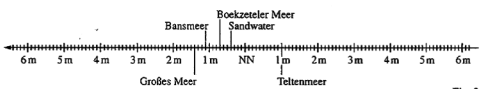


Fig. 3

5 Entnimm der Landkarte von Fig. 2 die Höhen der eingezeichneten Orte. Trage sie mit den Ortsnamen auf einer geeigneten Skala ein.

6 Fig. 4 zeigt eine Darstellung über Gewinne und Verluste einzelner Parteien bei einer Wahl. Lies die einzelnen Gewinne und Verluste ab.

7 Stelle folgende Gewinne und Verluste einer Firma in einem Diagramm dar:
1. Quartal: 80000 DM Gewinn,
2. Quartal: 150000 DM Verlust,
3. Quartal: 40000 DM Gewinn,
4. Quartal: 40000 DM Verlust.

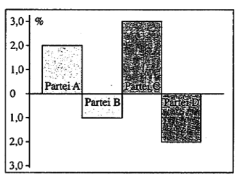


Fig. 4

8 Eine Fleischfabrik stellt Dosenkonserven her, die ein Füllgewicht von 450 g haben sollen. Kontrollmessungen von acht zufällig ausgewählten Dosen ergaben die Gewichte 448 g; 451 g; 442,5 g; 447 g; 454 g; 455,5 g; 449 g; 452 g.
a) Gib bei jeder der acht Dosen die Abweichungen vom Sollwert an.
b) Stelle die Abweichungen an einer Skala dar.

9 Die fünf Kinder einer Familie hatten bei ihrer Geburt folgende Gewichte: 3345 g; 3185 g; 3320 g; 3265 g; 3280 g.
Berechne die Abweichungen der Geburtsgewichte vom mittleren Geburtsgewicht der fünf Kinder. Stelle die Abweichungen an einer Skala dar.

S'exercer

NOMBRES RELATIFS

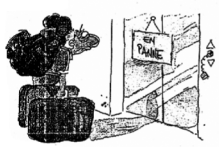
1 **Températures et vie pratique**

− 41	6 à − 2	37	1 500
44	6 000	0	− 18 à − 40

Il s'agit de replacer ces températures (en degrés Celsius) dans les bonnes cases.

a) Corps humain (temp. normale) : ☐.
b) Transformation de l'eau en glace : ☐.
c) Dans un réfrigérateur : ☐.
d) Dans un congélateur : ☐.
e) Flamme : ☐.
f) Surface du Soleil : ☐.
g) Température la plus élevée en France (Toulouse, 1923) : ☐.
h) Température la moins élevée en France (Doubs, 1985) : ☐.

Note On ne peut pas atteindre une température plus basse que − 273°C. C'est le zéro absolu.

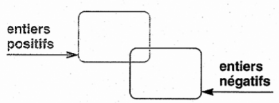


2 Une tour comporte douze étages et quatre niveaux en sous-sol. Comment imaginez-vous le « tableau de bord » de l'ascenseur de cette tour ?

3 Imaginons que l'on prenne l'année 2 000 pour repérer les années : 2 005 est alors repérée par (+ 5) et 1 995 par (− 5).
1° Donner les entiers relatifs permettant de repérer les années suivantes :
2 010 ; 1 997 ; 2 000 ; 1 960 ; 2 024 ; 1 789.
2° Inversement, donner les années correspondant aux entiers relatifs suivants :
+ 8 ; − 10 ; − 35 ; + 100.
3° Et l'année de votre naissance ! par quel entier relatif est-elle repérée ?

4 **1°** Olivier a obtenu les notes suivantes :
17 ; 7 ; 10 ; 13 ; 8 ; 14,5 ; 11,5 ; 9,5.
Pour indiquer les écarts à la moyenne 10, il décide de noter + 4 pour 14 et − 4 pour 6.
Donner, pour chaque note d'Olivier, l'écart à la moyenne.
2° Comme Olivier, Olivia a indiqué l'écart à la moyenne de chacune de ses notes. Elle obtient :
+ 5 ; − 1 ; + 2 ; − 3 ; 0 ; + 7,5 ; − 1,5 ; + 0,5.
Retrouver les notes (sur 20) obtenues par Olivia.

5 Voici une liste de nombres relatifs :
2,5 ; − 5 ; + 2 ; 0 ; − 5,2 ; − 52 ; 5 ; − 2 ; + 0,2 ; − 0,5.
Après avoir trié les entiers relatifs, les placer dans un schéma du type ci-dessous :



6 Écrire l'opposé de chacun des nombres suivants : 3 ; − 7,5 ; + 12 ; − 9 ; 0 ; 4,6.

7 Reproduire et compléter le tableau :

a pour opposé	7		0	−15		
a pour opposé		23			−6,9	
						−0,4

Matthieu affirme que : « prendre l'opposé de l'opposé d'un nombre, c'est ne rien faire ! »
A-t-il raison ?

8 **Avec une calculatrice** (+/− ou −x)
1° Sur une calculatrice, on affiche 15. Supposons que l'on appuie ensuite quinze fois sur la touche +/−.
Finalement que va-t-on obtenir ?
2° Sur une calculatrice, on affiche 20. Supposons que l'on appuie ensuite vingt fois sur la touche +/−.
Finalement que va-t-on obtenir ?

ADDITIONS D'ENTIERS RELATIFS

9 Reproduire et compléter :

				4				
				3		5		
				2				
				1				
−4	−3	−2	−1		1	2	3	4
				−1				
−6				−2				
				−3				
				−4				

10 Compléter les cases par un nombre relatif sachant que chaque entier relatif ci-dessous indique un gain ou une perte.
(*Par exemple :* (+ 10) est un gain de 10 F et (− 4) est une perte de 4 F.)

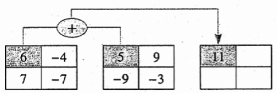
(+ 15) suivi de (+ 19) → ☐
(+ 18) suivi de (− 13) → ☐
(− 11) suivi de (+ 15) → ☐
(+ 12) suivi de (− 17) → ☐
(− 19) suivi de (+ 11) → ☐
(− 13) suivi de (− 16) → ☐

11 Calculer l'augmentation ou la baisse qui peut remplacer :
a) une augmentation de 28 F suivie d'une augmentation de 19 F ;
b) une augmentation de 54 F suivie d'une baisse de 45 F ;
c) une baisse de 16 F suivie d'une baisse de 34 F ;
d) une baisse de 32 F suivie d'une augmentation de 23 F.
(On écrira, dans les quatre cas, l'addition des deux entiers relatifs correspondants.)

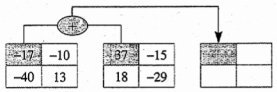
12 Reproduire et compléter le tableau :

+(−9)	20	9	6	2	−5	−9

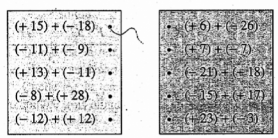
13 Compléter le dernier tableau comme indiqué :



14 Compléter le dernier tableau comme indiqué :



15 Relier les sommes égales :



16 Reproduire et compléter le tableau :

a	b	c	a + b	b + c	a + b + c
− 6	4	− 9			
− 8	−10	18			
− 13	13	− 11			
21	− 15	− 25			

17 Reproduire et compléter le tableau.
« opp (*x*) » signifie : opposé du nombre *x*.

x	y	x + y	opp (x + y)	opp (x)	opp (y)	opp (x) + opp (y)
3	− 8					
− 5	9					
				4	7	
				− 6	0	

18 **Retrouver les erreurs**
Corriger les erreurs dans certains des calculs :
(+ 13) + (− 7) = (+ 6) ; (− 10) + (+ 24) = − 34 ;
(+ 9) + (− 16) = (− 5) ; (− 25) + (+ 15) = (− 10) ;
(− 17) + (− 15) = (− 2) ; (− 18) + (− 19) = (− 37).

ΜΙΑ ΔΙΕΘΝΗΣ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΧΡΗΣΗΣ...

ΜΠΟΡΕΙ ΕΝΑ ΑΦΗΓΗΜΑΤΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ; ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΒΙΒΛΙΑ ΜΕ ΙΣΤΟΡΙΕΣ

Νίκος Τσιώτσος

Συγγραφέας

Θα μου επιτρέψετε να ξεκινήσω αυτή την εισήγηση πρώτο πρόσωπο. Κι αυτό επειδή τα βιβλία στα οποία πρόκειται να αναφερθώ είναι αποτέλεσμα μιας σύνθεσης από δύο αγωνίες. Από την προσωπική μου αγωνία σαν μαθητής σε σχέση με τα μαθηματικά, και από την αγωνία την οποία αντίκριζα, ως εκπαιδευτικός, στα πρόσωπα και στη γενικότερη συμπεριφορά των μαθητών μου. Πρόκειται εξ άλλου να αναφερθώ σε μια βιωματικότερη, ελπίζω, προσέγγιση ενός τμήματος των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου. Για το λόγο αυτό θα ήθελα να εντείνω την έμφαση στην από μέρους μου βιωματική κατάληξη σ' αυτήν. Από την άλλη μεριά, η διδακτική μου πρόταση για τη διδασκαλία των μαθηματικών αναφέρεται σε ό,τι θα μπορούσε να ονομαστεί «αφηγηματική μέθοδος». Θα επιθυμούσα λοιπόν το περιεχόμενο της εισήγησής μου να έχει έναν παρόμοιο –ως επί το πλείστον- χαρακτήρα.

Θα ξεκινήσω λοιπόν από τις προσωπικές μου μνήμες σχετικά με τα μαθηματικά του δημοτικού σχολείου. Μνήμες όχι ιδιαίτερα ευχάριστες, που γίνονται ακόμη πιο ζοφερές όταν αναφέρονται στα προβλήματα της αριθμητικής. Πραγματικά τα άλυτα προβλήματα των μαθηματικών βάραιναν αφόρητα τη σχολική μου σάκα, όπως βάραιναν και τα βήματά μου στο δρόμο για το σχολείο.

Σαν εκπαιδευτικός της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης αντικρίζω καθημερινά την ίδια συνθήκη και στους μαθητές μου. Κι αναφέρομαι στο δυσάρεστο σάστισμα μπροστά σε κάθε καινούριο κεφάλαιο του σχολικού εγχειριδίου (παρά τον υποτιθέμενα «χαριτωμένο» τρόπο με τον οποίο παρουσιάζεται το περιεχόμενό του), και το ίδιο απαράλλαχτο δέος μπροστά στα λεκτικά προβλήματα των μαθηματικών, ακόμη και στα πιο απλά. Έχουμε συνηθίσει να θεωρούμε μια τέτοια κατάσταση σαν αναμενόμενη -ίσως και φυσιολογική. Τα μαθηματικά αποτελούν άλλωστε τον πιο αφηρημένο τομέα της γνωστικής διαδικασίας που τελείται στο δημοτικό σχολείο. Γι' αυτό και οι προ-

σπάθειες που καταβάλλονται από τους εκπαιδευτικούς αποσκοπούν στο να οδηγηθούν οι μαθητές μέσα από ενέργειες πάνω σε ποσότητες πραγματικών αντικειμένωνμ σε ενέργειες που αποκτούν σταδιακά ένα χαρακτήρα αφηρημένο και συμβολικό.Παρά τα όποια κενά στη πορεία αυτής της μετάβασης, η πλειονότητα των μαθητών μοιάζει να κατακτά επαρκώς το στάδιο της αρίθμησης και της εκτέλεσης των τεσσάρων πράξεων. Έστω κι αν αυτές οι εκτελέσεις αποκτούν έναν χαρακτήρα μηχανικό, και παρά τις εκάστοτε προσφυγές σε περισσότερο κιναισθητικούς τύπους διαχείρισης των αριθμητικών πράξεων, οι συμβολικές δράσεις πάνω σε αφηρημένες ποσότητες δε φαντάζουν αδύνατες για τους μαθητές του δημοτικού σχολείου.

Το σημαντικότερο πρόβλημα – κι επιτρέψτε μου αυτή την ταυτολογία- έγκειται στα προβλήματα των μαθηματικών. Πράγμα περίεργο, μιας και τα λεκτικά προβλήματα των μαθηματικών εκπροσωπούν μια σύζευξη της αφηρημενικότητας των αριθμητικών πράξεων με πιο «χειροπιαστά» ζητήματα της καθημερινής ζωής. Κι όμως οι μαθητές μοιάζουν να αισθάνονται εντονότερο δέος και μεγαλύτερη απέχθεια γι' αυτά απ' ότι για τις καθαρά συμβολικές μαθηματικές πράξεις. Γιατί άραγε συμβαίνει αυτό; Ποιος είναι ο λόγος που τα λεκτικά προβλήματα δημιουργούν μια τέτοια αποκαρδιωτική ματαίωση στους μαθητές;

Σε προηγούμενο συνέδριο έγινε κιόλας λόγος για το λόγο των μαθηματικών προβλημάτων στα εγχειρίδια του Δημοτικού σχολείου και στην απαγόρευση που δημιουργεί στην «εμπλοκή των γλωσσικών κοινωνικών και γνωστικών δυνατοτήτων των μαθητών που απαιτούνται για τη λύση τους»[1]. Εδώ θα επιχειρήσω κάτι διαφορετικό από την ανάλυση και την ενοχοποίηση μιας, πραγματικά, άχαρης λεκτικής δόμησης. Θα μιλήσω για τα προβλήματα των μαθηματικών όπως θα ήθελα να τα αντικρίζω σαν μαθητής του δημοτικού σχολείου. Μιας και η προβληματική μου αναφέρεται στο ρόλο της αφήγησης, θα επιχειρήσω να δείξω τις δυνατότητες της στην προσέγγιση μαθηματικών εννοιών του δημοτικού σχολείου γενικότερα. Κι ακόμη, θα προσπαθήσω να τονίσω το ρόλο που ένα αφηγηματικό βιβλίο θα μπορούσε να παίξει στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Μέσα στο δικό μου προσωπικό δέος μπροστά στα προβλήματα των μαθηματικών είχα επιχειρήσει αρκετές φορές να τ' αντικρίσω σα μικρές ιστορίες. Η ανάγκη μου άλλωστε να ακούω και να διαβάζω ιστορίες, και να σχημα-

[1] Ολυμπία Γκριμπίζη, Ο Λόγος των Μαθηματικών Προβλημάτων στα Εγχειρίδια του Δημοτικού Σχολείου και η Σχέση που δημιουργεί με τους Μαθητές, στο. *Εικόνα, Σχήμα και Λόγος στη Διδασκαλία των Μαθηματικών* (5ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών, Θεσσαλονίκη *13-14 Μαρτίου 2004.*

τίζω την αίσθηση του κόσμου μέσα απ' αυτές, με είχαν ωθήσει σε μια τέτοια απεγνωσμένη καταφυγή. Έτσι είχα αποφασίσει να ξεκινώ την ανάγνωση ενός προβλήματος μαθηματικών με την ίδια συναισθηματική προδιάθεση που ξεκινούσα την ανάγνωση ενός παραμυθιού ή μιας ιστορίας.

Είχα πιστέψει πως δε λάθευα στην επιλογή μου αυτή. Τα προβλήματα των μαθηματικών έμοιαζαν εξ' άλλου με ιστορίες. Τα περισσότερα αναφέρονταν σε ανθρώπινους χαρακτήρες που έρχονταν μεταξύ τους σε αλληλεπιδράσεις (έστω και μοναχά οικονομικές)· αλληλεπιδράσεις που θα μπορούσαν, ωστόσο, να αποτελέσουν το κίνητρο για το σχηματισμό μιας, υποτυπώδους, έστω, πλοκής. Θα μπορούσα λοιπόν να τα αντιμετωπίσω σαν ιστορίες με ανοιχτό τέλος, που η αναζήτησή του θα ήταν το κίνητρο για να ακολουθήσω τις κινήσεις των χαρακτήρων εκτελώντας τις απαιτούμενες αριθμητικές πράξεις.

Η συνέχεια της ανάγνωσης ήταν πάντοτε απογοητευτική.

Η επίπεδη σκιαγράφηση των χαρακτήρων, η ελλιπής πλοκή τους και η απουσία της οποιασδήποτε, -έστω και ισχνής- δράσης, διέψευδαν απογοητευτικά την αρχική μου προδιάθεση. Με άλλα λόγια, από το πρόβλημα έλειπαν τα χαρακτηριστικά εκείνα που θα μπορούσαν να το χαρακτηρίσουν σαν ένα ενδιαφέρον αφήγημα. Μονάχα που τότε δε μπορούσα να το ξέρω. Ό,τι βίωνα άμεσα ήταν η ματαίωση της πρόθεσής μου να το διαβάσω σαν ιστορία. Ούτε και γνώριζα τον τρόπο για να κάνω το λόγο του τόσο αφηγηματικό όσο πίστευα πως τους άξιζε. Γιατί, πράγματι πίστευα ότι το άξιζαν. Κι έτσι, παρά τις συνεχείς απογοητεύσεις μου, συνέχιζα να επιμένω στην αξίωση να αντικρίζω τα προβλήματα των μαθηματικών σαν ιστορίες Δε μπορούσα να γνωρίζω, όταν αργότερα, σαν εκπαιδευτικός, παρατηρούσα στους μαθητές μου την ίδια απόγνωση από τα προβλήματα των μαθηματικών, αν κι εκείνοι μοιράζονταν την ίδια αξίωση με μένα. Αυτό που γνώριζα ωστόσο, ήταν και η δική τους ματαίωση απ' αυτά. Και μπορούσα ακόμη να γνωρίζω πως ήταν αυτή η ματαίωση που ευθύνονταν, στο μεγαλύτερο βαθμό, για την ανέχειά τους απέναντι στο μάθημα των μαθηματικών.

Μέσα λοιπόν στις προσπάθειές μου να καταστήσω την προσέγγιση των προβλημάτων των μαθηματικών περισσότερο καταληπτή για τους μαθητές μου, και παρατηρώντας τη δική τους επίσης θετική στάση απέναντι στην ανάγνωση και την ακρόαση ιστοριών, αποφάσισα να επιχειρήσω γι' αυτούς ό,τι δεν είχα κατορθώσει τότε για τον εαυτό μου:

Να καταστήσω το λόγο των μαθηματικών του Δημοτικού σχολείου, περισσότερο αφηγηματικό. Όπου τουλάχιστο αυτό μου ήταν δυνατό.

Φυσικά, δεν ήμουνα μόνος στην αντίληψη αυτή. Η αφήγηση σαν μορφή διαχείρισης της ανθρώπινης πολιτισμικής -και συναισθηματικής- εμπειρίας, και σαν φορέας μύησης σε δεδομένα πολιτισμικά περιβάλλοντα, αποτελεί χαρακτηριστικό ολόκληρου του κεφαλαίου της λογοτεχνίας. Από τα λαϊκά παραμύθια και τους μύθους μέχρι την καταξιωμένη ατομική λογοτεχνική παραγωγή, οι ιστορίες δημιουργούν αναπαραστάσεις του κόσμου ικανές να εμπλέξουν συναισθηματικά τον ακροατή ή τον αναγνώστη και να προσδώσουν νόημα στην άμορφη εμπειρία του. Ακόμη και σε ό,τι αφορά την πραγμάτευση στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών που απευθύνονται σε παιδιά (χωρίς απαραίτητα κάποιον άμεσο διδακτικό στόχο), στοιχεία της υπάρχουν διάσπαρτα σε έργα της παιδικής λογοτεχνίας[2].

Τονίζοντας την εκπαιδευτική αξία των αφηγημάτων ο Kieran Egan[3], υπογράμμισε το σχήμα και το συναισθηματικό νόημα που αυτά προσδίδουν στα γεγονότα της πραγματικότητας με την ικανότητά τους να εμπλέκουν την παιδική φαντασία στη διαδικασία της μάθησης. Και είναι τονίζει, μια τέτοια εμπλοκή τόσο πολύτιμη, ώστε να καταλήγει υποστηρίζοντας ότι οι δάσκαλοι οφείλουν να σκέφτονται σαν αφηγητές ιστοριών κάθε φορά που αναπτύσσουν ένα θέμα στους μαθητές.

Ο ρόλος των αφηγημάτων (ιστοριών και μύθων) στην οργάνωση της εμπειρίας και της μνήμης μας για τα ανθρώπινα πεπραγμένα, υπογραμμίστηκε και από τον Jerome Bruner[4]. Σ' ένα εκτενές άρθρο του τόνισε πως η εμπειρία μας από τις ανθρώπινες υποθέσεις τείνει να παίρνει τη μορφή αφηγήσεων. Αντίθετα με τις αντίστοιχες οργανώσεις των λογικο-επιστημονικών διαδικασιών που μπορούν να απορριφθούν μονάχα μέσα από τη λογική τους διάψευση, οι αφηγηματικές δομήσεις κρίνονται σε σχέση με την «αληθοφάνειά» κι όχι την επαλήθευσή τους. Δεν εμπίπτουν σε εμπειρικές επικυρώσεις ούτε υπακούν σε λογικές προϋποθέσεις. Αυτό που αφορά σε μια αφήγηση είναι η συναισθηματική μασδέσμευση με τα δρώμενα που τη συνθέτουν[5] και το προσωπικό νόημα που αντλούμε απ' αυτή. Και είναι

---

[2] Αναφέρω σαν ενδεικτικό παράδειγμα, την αφηγηματική διαχείρηση των αρνητικών αριθμών στο βιβλίο του Roald Dahl *«Ο Τσάρλι και ο Μεγάλος Γυάλινος Ανελκυστήρας»* όπου μέσα στην λαχτάρα της για ξανάνιωμα, η υπέργηρη γιαγιά του Τσάρλι παίρνει τόσο μεγάλη δόση από το θαυματουργό φάρμακο του Βίλυ Βόγκα και ξανανιώνει τόσο πολύ, που γυρίζει πίσω από την εποχή της γέννησης της και περνάει μέσα στη χώρα του «πλην». Δε γίνεται δηλαδή απλώς νεότερη αλλά αποκτάει και μια αρνητική ηλικία. Από κει και πέρα, η απίστευτα περιπετειώδης επαναφορά της περιλαμβάνει μια πληθώρα μαθηματικών πράξεων που δένονται όμως ευχάριστα με την πλοκή και σ παύουν να αποτελούν ένα ενδιαφέρον ανάγνωσμα.

[3] Egan, Kieran. 1989. *Teaching as Story Telling*. Chicago: University of Chicago Press,

[4] Bruner, J. The Narrative Construction of Reality, *Critical Inquiry* Autumn 1991

[5] Αυτό δηλαδή που ονομάστηκε από τον S.T. Coleridge σαν *Αναστολή της Δυσπιστίας (Suspension of Disbelief*) και που αναφέρεται στην ημι-συνειδητή στάση ενός αναγνώστη σχετικά με την

τούτη η άντληση νοήματος που κάνει τον Bruner να καταλήξει ότι στην κοινωνική μας ζωή, οι αφηγήσεις δεν συνιστούν μονάχα μια μορφή αναπαράστασης, ή ερμηνείας, αλλά και σύνθεσης της πραγματικότητας. Αποτελούν έναν ξεχωριστό, κι όμως αναγκαίο, τύπο σκέψης -τον αφηγηματικό (narrative) που η φαντασιακή εφαρμογή του οδηγεί στη διαμόρφωση ιστοριών, σφιχτοδεμένων δραμάτων και πιστευτών (παρότι όχι απαραίτητα αληθινών) ιστορικών διηγήσεων. Οι αφηγήσεις θα μπορούσαν να συμπληρώσουν (παρά την γνωστική αντιδιαστολή τους) τον παραδειγματικό (paradigmatic) τύπο σκέψης των λογικών επιστημών.

Όσο κι αν αυτοί οι δύο τύποι σκέψης είναι πρακτικά μη αναγώγιμοι, η παραγνώριση του πρώτου για χάρη του δεύτερου ισοδυναμεί –όπως ισχυρίζεται ο Bruner- με αποτυχία στη σύλληψη της πλούσιας ποικιλομορφίας που παρουσιάζει η ανθρώπινη σκέψη.[6]. Ακόμη και η έννοια της αιτιότητας λειτουργεί εντελώς διαφορετικά στον εκάστοτε τύπο. Εκεί που ο παραδριγματικός (ή πραγματειακός) τύπο σκέψης καταπιάνεται με την καθιέρωση γενικών αιτιοτήτων, ενεργοποιώντας διαδικασίες για την πιστοποίηση επαληθεύσιμων αναφορών για τον έλεγχο της εμπειρικής τους αλήθειας, στον κόσμο των αφηγήσεων (που ανήκει στον αναπαραστατικό ττύπο σκέψης), έστω κι αν αυτός υπακούει σε κανόνες μιας λογικής σταθερότητας, η παραβίαση της δεν ισοδυναμεί με την ακύρωσή του. Δημιουργεί απλώς τη βάση ενός δράματος.[7] Κι ωστόσο δεν παύει να παραμένει αναγκαίος. Και για τους μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης θα τολμούσα να ισχυριστώ, ότι είναι απόλυτα ουσιαστικός.

Έχω την αίσθηση πως είναι, προπάντων, αυτή η πλευρά της σκέψης (η αναπαραστατική ή αφηγηματική) που έχει αγνοηθεί σημαντικά από το εκπαιδευτικό μας σύστημα. Μπορεί στα πολύ πρώιμα στάδια του της πρωτοβάθμιας σχολικής ζωής των μαθητών να προσφέρουμε κάποιες ευκαιρίες για την οργάνωση της εμπειρίας τους μέσα από ιστορίες ή παραμύθια. Τις

αποδοχή τα στοιχεία φανταστικών ιστοριών σαν πιστευτά, ανεξάρτητα από το πόσο αδιανόητα θα του έμοιαζαν αυτά στην πραγματική του ζωή.

[6] Bruner, J. (1086) *Actual Minds, Possible Worlds* Harvard University Press

[7] Ο Bruner, ωστόσο, δεν κάνει άλλο παρά να συντάσσεται και να αναπλάθει με γνωστικούς όρους ό,τι εκφράζεται από την εξπρεσιβιστική (expressivist) θεώρηση για την τέχνη. Ήδη η Susanne Langer (1943) (Philosophy in a New Key, Harvard University Press) έκανε διάκριση ανάμεσα στον πραγματειακό (discursive) συμβολισμό που δανείζει τον εαυτό του στη λογική μας και τον αναπαραστατικό (representative) συμβολισμό που οργανώνεται μορφικά σε κάθε εκπροσώπηση της τέχνης και που δημιουργεί εικόνες και συμβολισμούς του ανθρώπινου συναισθήματος μέσα από αισθητικές μορφές. Για τη Langer η τέχνη δεν αποτελεί απλώς ένα σύμπτωμα του ανθρώπινου συναισθήματος. Συγκροτεί μια ουσιαστική μορφή γνώσης. Ή όπως τέθηκε πολύ εύστοχα από τον Robert Witkin (The Intelligence of Feeling, London Heineman) ένα «*νοήμον συναίσθημα*».

εγκαταλείπουμε όμως άστοργα μόλις αντιληφθούμε την εκδήλωση των δυνατοτήτων τους για πιο αφαιρετικές και συμβολικές μορφές γνωστικής λειτουργίας.

Έτσι, αντιμετωπίζουμε τον αναπαραστατικό τύπο συμβολισμού σαν προλογικό -κι όχι σαν αναγκαίο συμπλήρωμα των περισσότερο λογικών διαδικασιών της σκέψης μας, αρνούμαστε να δεχτούμε την αναγκαιότητά του στα επόμενα στάδια της ζωής των μαθητών μας (κι όχι μονάχα της σχολικής), και παραμελούμε το ρόλο της αφήγησης στη διδασκαλία και στα σχολικά μας εγχειρίδια, (ιδιαίτερα σ' αυτά των μαθηματικών). Κι από την άλλη μεριά, αισθανόμαστε ικανοποιημένοι που, χωρίς καμιά ουσιαστική οργάνωση –ή επανοργάνωση- του περιεχομένου τους, τείνουμε να πιστεύουμε ότι τα καθιστούμε ποερισσότερο ευχάριστα και πιο εύληπτα με πρόσθετες (μα καθόλου λειτουργικές) εικονικές και λεκτικές πληροφορίες που ομορφαίνουν ίσως τις σελίδες τους· λειτουργούν όμως άσχετα από το κείμενο. Για το λόγο αυτό παραμένουν, μοιραία, ουδέτερες και απλώς διακοσμητικές[8]. Όλες αυτές οι χαριτωμένες διακοσμήσεις θα παραμένουν ουσιαστικά αδύναμες χωρίς την οργανική τους σύνδεση με μια στοχαστική καταγραφή του περιεχομένου, που θα μπορούσε –και από μόνη της- να ελκύσει το ενδιαφέρον του μαθητή.

Πιστεύω πως, ανάμεσα σ' οτιδήποτε άλλο, η αφήγηση Θα μπορούσε να αποτελέσει μια τέτοια μορφή καταγραφής.

Για να λειτουργήσει όμως απαιτεί μια ριζική αναδιάρθρωση του περιεχομένου των βιβλίων. Κι ακόμη περισσότερο: έναν στοχασμό πάνω σε ό,τι απ' αυτό θα μπορούσε να αποδοθεί αφηγηματικά· έστω και στον καθαρά αφηρημένο τομέα των μαθηματικών. Γιατί σαν τμήμα του αναπαραστατικού συμβολισμού υπάρχει στην αφήγηση μια σημαντική διάκριση από την περιγραφές της πραγματικότητας και από τους τύπους του πραγματειακού (ή παραδειγματικού) τύπου σκέψης. Η ζωή των αφηγήσεων, όπως και η ζωή

[8] Θα ήθελα να σταλθώ για λίγο σ' αυτό το σημείο της οργάνωσης των εγχειριδίων των μαθηματικών τονίζοντας πως δεν αρκεί -και θα 'λεγα μάλιστα ότι δημιουργεί εύλογες συγχύσει, η επιτηδευμένη και άκριτα «χαριτωμένη» διανθιση του περιεχομένου της ύλης των μαθηματικών στα εγχειρίδια του Δημοτικού Σχολείου (που κατά τα άλλα δε διαφέρει σε τίποτα από την απλή, επίπεδη καταγραφή του) με φιοριτούρες και εικόνες αριθμών (που έχουν αδικαιολόγητα μετατραπεί από σύμβολα σε προσωποποιημένες οντότητες), ή έστω με τις ζωγραφιές χαμογελαστών παιδικών προσώπων που μοιάζουν να διασκεδάζουν μ' ένα περιεχόμενο που στους ζωντανούς, πραγματικούς μαθητές του σχολείου δε φαντάζει καθόλου διασκεδαστικό. Ούτε και οι τυποποιημένες φράσεις που επιζητούν αστόχαστα και εκβιαστικά να πείσουν για το ευχάριστο του περιεχομένου («οι φίλοι μας τα νούμερα». «καλημέρα φίλε μου αριθμέ», «ας διασκεδάσουμε» κ.λ.π.) μπορούν να βεβαιώσουν το μαθητή για την αλήθεια τους.

κάθε έργου τέχνης, έγκειται στη *μορφή* τους. Και στην περίπτωση ενός αναγνώσματος, αυτή η μορφή προκύπτει από την αφηγηματική οργάνωση του χώρου δράσης, των δρώντων χαρακτήρων και της δυναμικής αλληλουχίας των γεγονότων. Προκύπτει, με άλλα λόγια, μέσα από μια συγκεκριμένη πλοκή που, όπως αναφέρει ο David Lodge, αποτελεί τη θεμελιακή αρχή της δόμησης ενός αφηγήματος, σε τέτοιο μάλιστα βαθμό, που ο όρος *πλοκή* να ταυτίζεται με αυτόν του όρου *ιστορία*[9].

Είναι αυτή η πλοκή που βλέπω τώρα πως έλειπε από τα προβλήματα των μαθηματικών του σχολείου μου. Και ήταν η απουσία της που μου απαγόρευε -όπως πιστεύω ότι απαγορεύει και στους σημερινούς μαθητές- να αναπλάσω νοητικά το πρόβλημα των μαθηματικών σαν ένα αφήγημα. Αν το μπορούσα αισθάνομαι ότι θα ήμουν σε θέση να ακολουθήσω τη δράση των ηρώων με τις απαιτούμενες αριθμητικές πράξεις και θα κατόρθωνα, επιτέλους να ανακαλύψω το κρυμμένο τέλος της ιστορίας. Είναι αυτό που επιχείρησα να δώσω σε μαθηματικές κατηγορίες της ύλης του δημοτικού σχολείου, όπως τα προβλήματα των μαθηματικών, και οι έννοιες της γεωμετρίας.

Το ποιο θα είναι το αρχικό κίνητρο που πυροδοτεί το σχηματισμό μιας πλοκής είναι εξαρτημένο από το σκοπό του (συνειδητό ή ασύνειδο) του αφηγητή ή του συγγραφέα. Θα μπορούσε να αποσκοπεί στην ανάδειξη της πολυπλοκότητας των δρώντων χαρακτήρων, ή ίσως στην ανάδειξη των χώρων και των καταστάσεων που μέσα τους οι χαρακτήρες κινούνται και δρουν. Παρά το γεγονός της αλληλεξάρτησής όλων των περιπτώσεων, η έμφαση στο περιεχόμενο που θα αναδεικνύεται από την εκάστοτε πλοκή είναι υπόθεση του αφηγητή και του εικονικού αναγνώστη ή ακροατή που έχει απέναντί του.

Στην περίπτωση των δύο βιβλίων που θα αναφερθώ παρακάτω, ο εικονικός αναγνώστης μου υπήρξε ο μαθητής και η μαθήτρια του δημοτικού σχολείου. Έτσι αρχικό κίνητρο της πλοκής διαμορφώθηκε από το εκάστοτε μαθησιακό αποτέλεσμα που θέλησα να επιτύχω. Αντίθετα με άλλα βιβλία στα οποία αναφέρθηκα, εδώ πρόκειται για βιβλία προορισμένα να διδάσκουν ενώ αφηγούνται. Ή και το αντίστροφο. Η προσπάθεια μου πάντως να ισορροπήσω ανάμεσα στις δύο συνθήκες αποτρέπει τον χαρακτηρισμό τους σε αμιγώς αφηγηματικά ή ξεκάθαρα διδακτικά. Για να το θέσω με όρους του Bruner, οι δύο τύποι σκέψης ο παραδειγματικός και ο αφηγηματικός συγκλίνουν σ' αυτά σε μια ισορροπία, με τέτοιο τρόπο που τα χαρακτηριστικά του δεύτερου τύπου να γίνονται το πεδίο για την ομαλότερη εκδίπλωση των στοιχείων του πρώτου. Δε χάνουν όμως τα θεμελιώδη στοιχεία

[9] Lodge, D. (1996) *The Practice of Writing* Hardmonsworht, Penguin

τους. Αν συνέβαινε κάτι τέτοιο, αν δηλαδή η αφήγηση έχανε τα δομικά στοιχεία που συγκροτούν την πλοκή της, τότε θα υπήρχαν αντίστοιχα αποτελέσματα και στην την κατανόηση του προβλήματος ή του όποιου μαθηματικού περιεχομένου γίνεται πραγματεύσιμο μ' αυτόν τον τρόπο.

Ωστόσο, και παρά τη συνειδητή διδακτική μου πρόθεση, η επιλογή του περιβάλλοντος και των χαρακτήρων που εμπλέκονται στο ξετύλιγμα της πλοκής κάθε ιστορίας δεν παύουν να είναι προϊόντα μιας διαδικασίας η οποία –όπως συμβαίνει με τη διαμόρφωση οποιασδήποτε φανταστικής αφήγησης- δεν υπήρξε απόλυτα συνειδητή. Όπως απόλυτα συνειδητή δεν υπήρξε η επιλογή του ύφους, και η κατάταξή τους σε κάποιο ιδιαίτερο αφηγηματικό είδος. Προσπάθησα όμως, να παραμείνω πιστός σε μια βασική προϋπόθεση στην οποία αναφέρθηκα και πιο πάνω. Στην ανάγκη για μια αισθητική –και συναισθηματική-απόσταση μέσα από τη δημιουργία χώρων και χαρακτήρων απομακρυσμένων από την καθημερινή τετριμμένη πραγματικότητα. Κάτι που δε συμβαίνει με κανένα από τα προβλήματα των σχολικών εγχειριδίων[10].

Εκτός από την άκομψη λεκτική τους δόμηση, ένα άλλο χαρακτηριστικό των λεκτικών προβλημάτων μαθηματικών είναι και η αποθαρρυντική συντομία τους. Ό,τι θα μπορούσε να νοηθεί σαν οργανικό μέρος μιας αφήγησης αποκρύπτεται –ή μάλλον αγνοείται- σε τέτοιο βαθμό, που το πρόβλημα να μοιάζει με την άτεχνη περίληψη μιας ιστορίας, η πλοκή της οποίας παραμένει πεισματικά άγνωστη.

Ποια θα μπορούσε να είναι η ιστορία αυτή;

Μιας και στην περίπτωση που αναφέρομαι ακολουθείται η αντίστροφη πορεία από αυτήν που συμβαίνει συνήθως (δεν προκύπτει δηλαδή η περίληψη από την ιστορία, αλλά η ιστορία από την περίληψη), η ιστορία θα μπορούσε να είναι οποιαδήποτε. Με άλλα λόγια η έκτασή της θα μπορούσε να καλύπτει τα δεδομένα και τα ζητούμενα ενός προβλήματος επιτρέποντας, ωστόσο, στον αφηγητή να διαμορφώσει όσο πιο πειστικά θα μπορούσε, το περιβάλλον και τις κινήσεις των – πειστικά σκιαγραφημένων- χαρακτήρων. Η «κρυμμένη» ιστορία πίσω από ένα πρόβλημα μαθηματικών θα πρέπει να αποκαλυφθεί. Να απλωθεί στη μέγιστη έκταση μιας εύγλωττης αφήγησης, και να προκύψει ξανά η δυνατότητα για τη διαμόρφωση

[10] Μια από τις διατυμπανιζόμενες «βελτιώσεις»των εγχειριδίων του σχολείου, είναι ότι ακολουθούν τις εξελίξεις της πραγματικότητας και συναρμόζονται με την πολυπλοκότητα των χρηματικών συναλλαγών της εποχής μας, χωρίς, κάτι τέτοιο να είναι, πιστεύω, απαραίτητο, για την καλλιέργεια των ικανοτήτων λύσης μαθηματικών προβλημάτων.

μιας περίληψης (που από μόνη της θα αποτελούσε ένα τυπικό πρόβλημα μαθηματικών) μέσα από την ευρύτερη ιστορία.

Όλα τα παραπάνω αφορούν στις ενέργειες του αφηγητή. Σε ό,τι αφορά τους αναγνώστες (δηλαδή τους μαθητές), αυτοί θα έχουν τη δυνατότητα να λύνουν σταδιακά το πρόβλημα με τη σειρά των ζητούμενων σε κάθε τμήμα της ιστορίας. Κι αν ακολουθήσουν πιστά τις ενέργειες των ηρώων θα καταλήξουν στο τέλος της, έχοντας ήδη ένα λυμένο πρόβλημα μαθηματικών.

Τα στάδια αυτής της διαδικασίας τα οποία μπορούν να αποκαλύπτουν στους μαθητές βαθμιαία το σύνολο των ζητούμενων – και τα οποία συνθέτουν ένα λεκτικό πρόβλημα- υποκρύπτονται (κι αυτή τη φορά τεχνηέντως) από τους συγγραφείς των σχολικών εγχειριδίων. Πιστοί στη άποψη ότι τα μαθηματικά είναι μια ουδέτερη επιστήμη, διαμορφώνουν ιστορίες (επιτρέψτε μου να επιμένω ότι η διαμόρφωση ενός προβλήματος αποτελεί πάντα σύνθεση μιας ιστορίας -έστω και απλής) που είναι στερημένες από τα στοιχεία που καθιστούν μια αφήγηση ελκυστική. Έτσι ο μαθητής καλείται να δώσει λύση σ' ένα μυστήριο (τι άλλο θα μπορούσε να αποτελεί το ερώτημα στο πρόβλημα των μαθηματικών παρά ένα μυστήριο;) όπου διαβάζει ανόρεχτα την ανάπτυξη των δεδομένων που το στοιχειοθετούν. Και παρά την απρόθυμη στάση του μαθητή, η επίμονη παραίνεση για πολλαπλές αναγνώσεις ενός λεκτικού προβλήματος, μέχρι την κατάληξη στη λύση του, συνεχίζει να αποτελεί μια συνθήκη πολύ συχνή στις αίθουσες των δημοτικών σχολείων.

Αν λοιπόν το πρόβλημα των μαθηματικών θα μπορούσε να πάρει τη μορφή ενός αφηγήματος με την αναγκαία πλοκή και τη επαρκή σκιαγράφηση των χαρακτήρων μέσα από τη δράση τους στον αφηγηματικό χώρο, τότε και η αντιμετώπισή του θα μπορούσε να τελεστεί με όρους σημασιολογικούς ή νοηματικούς -και όχι μονάχα μαθηματικούς. Κι από την άλλη μεριά, η κατανόηση του περιεχομένου του από τους μαθητές θα μπορούσε να ελεγχθεί με τη συγγραφή από μέρους τους μιας συνοπτικής νοηματικής απόδοσης, η οποία, όπως ανέφερα και πιο πάνω, θα μπορούσε να αποτελέσει από μόνη της ένα τυπικό λεκτικό πρόβλημα μαθηματικών. Αποδίδοντας νοηματικά και συνοπτικά το αφήγημα, ο μαθητής θα ήταν σε θέση να έχει κιόλας κατασκευάσει ένα δικό του πρόβλημα. Ένα πρόβλημα που τα στάδια για τη λύση του είναι κιόλας γνωστά.

Η συνθήκη αυτή θα μπορούσε να νοηθεί/προσφερθεί σαν ένα παράδειγμα του κονστρουβιστικού μοντέλου για τη μάθηση, μιας και οι μαθητές κατανοούν τα δεδομένα ενός προβλήματος επειδή το έχουν κατασκευάσει από μόνοι τους. Κι ακόμη θα έχουν τη δυνατότητα να διαχειριστούν τη μεταγνώση τους για τους τρόπους ενέργειας και τις στρατηγικές που χρησιμο-

ποιούν· όχι μονάχα για να λύσουν ένα πρόβλημα, αλλά και για να το συνθέσουν. Οι αναφορές, εξ' άλλου στο αφήγημα απ' όπου το πρόβλημα προέκυψε, δημιουργούν τους όρους για την αιτιολόγηση της κάθε κίνησής τους για την κατασκευή και τη λύση του.

Οφείλω να ομολογήσω, σ' αυτό το σημείο, ότι οι αφηγηματικές μου απόπειρες (με συνειδητούς διδακτικούς σκοπούς), δεν αποσκοπούσαν από την αρχή στη δημιουργία ανεξάρτητων ιστοριών. Περιορίστηκαν μονάχα στην πλήρωση των αφηγηματικών κενών στα προβλήματα των εγχειριδίων. Τούτο συνέβη με τη δημιουργία δραματοποιημένων καταστάσεων μέσα στην αίθουσα που κινούνταν γύρω από τα θέματα που περιέχονταν σ' αυτά. Έτσι οι «καταστάσεις» που περιγράφονταν στα προβλήματα αναλυθήκαν αρκετές φορές σε ξέχωρες σκηνικές δράσεις που κάθε μια τους τόνιζε ένα από τα ζητούμενα του εκάστοτε προβλήματος.

Αν και το αποτέλεσμα υπήρξε αξιοσημείωτα θετικό σε ό,τι αφορά τη συμμετοχή και την ομαδοσυνεργατική ενασχόληση με την πορεία της λύσης, η θεματολογία των προβλημάτων που περιλαμβάνονταν στα εγχειρίδια ήταν απελπιστικά φτωχή και πληκτικά μονομερής για να δημιουργήσει ενδιαφέρουσες δραματικές συνθήκες για μεγάλο χρονικό διάστημα. Θεώρησα λοιπόν ότι ήταν ανάγκη για μια αλλαγή όχι μονάχα στον τρόπο του διδακτικού χειρισμού, αλλά και στη συνολική διαμόρφωση των προβλημάτων. Ή ακόμη, γιατί όχι: για μια άλλη εντελώς διαφορετική γραφή τους. Για μια γραφή όπου θα έκανα χρήση των ζωτικών στοιχείων της αφήγησης και που απουσίαζαν από τα προβλήματα των εγχειριδίων.

Έτσι δημιουργήθηκαν οι *«Ιστορίες με 4 Πράξεις»*.

Όπως και σε κάθε τέχνη έτσι και στην αφήγηση δεν αξιώνουμε μια πιστή αντιγραφή της πραγματικότητας. Το αντίθετο μάλιστα. Για να προσλάβουμε συναισθηματικά ένα αφηγηματικό κείμενο, αυτό πρέπει να βρίσκεται σε μια αισθητική απόσταση από τις ενέργειες του καθημερινού βίου. Πολύ περισσότερο στις αφηγήσεις που απευθύνονται σε παιδιά, θα έλεγα μαζί με τον Bettelheim[11] ότι η απόσταση αυτή πρέπει να φτάνει στο σημείο που να αποκλείει τις άμεσες συνδέσεις με πρόσωπα της καθημερινότητας. Συνδέσεις ικανές να δημιουργήσουν συγχύσεις σχετικά με το τι είναι πραγματικό και τι όχι. Η αξία των φανταστικών χαρακτήρων έγκειται στο ότι τα παιδιά δεν νιώθουν πως πρέπει να συγκριθούν άμεσα μαζί τους· νιώθουν περισσότερη ασφάλεια μέσα σε χώρους φαντασιακούς. Όσο παράδοξο κι αν

[11] Bettelheim, B. (1976) "*The Uses of Enchantment*", Harmonsworthn. Penguin, και ελληνικός τίτλος «*Η Γοητεία των Παραμυθιών*». Μετάφραση Ελένη Αστερίου, Αθήνα., Γλάρος.

μοιάζει, η συναισθηματική *απόσταση* των φανταστικών ιστοριών είναι αυτή που δημιουργεί περισσότερη *εγγύτητα* με τα παιδιά[12].

Δε θέλησα λοιπόν, στο βιβλίο αυτό, να επιχειρήσω απλώς έναν αφηγηματικό χειρισμό των καταστάσεων που εμπεριέχονται στην πλειονότητά των προβλημάτων των σχολικών εγχειριδίων. Παραμένοντας πιστός στο χαρακτήρα της συναισθηματικής απόστασης, αποφάσισα ώστε οι χαρακτήρες και οι καταστάσεις να διαφέρουν ριζικά απ' αυτούς που επί δεκαετίες συνεχίζουν να κατακλύζουν τα εγχειρίδια των μαθηματικών του σχολείου (τόσο αδιάφοροι για τους σημερινούς μαθητές, όσο είχαν υπάρξει και για μένα). Έτσι, εκτός από το βασικό χαρακτήρα των ιστοριών που είναι ένας αγαθός νεαρός κτηματίας, οι ήρωες είναι ζώα του δάσους. οι αριθμητικές πράξεις που αναφέρονται σε χρηματικές συναλλαγές απουσιάζουν σκόπιμα μέχρι το τελευταίο κεφάλαιο (που έχει και τον ανάλογο τίτλο: «Χρήματα»), ενώ για λόγους διατήρησης του ίδιου αισθητικής απόστασης άλλαξα και το όνομα της νομισματικής μονάδας που χρησιμοποιείται στον φανταστικό χωρόχρονο των ιστοριών. Κι έτσι το Ευρώ έγινε «Ευγώ»!

Σε ό,τι αφορά τις ιστορίες, αυτές ακολουθούν την πορεία διαμόρφωσης προβλημάτων των τεσσάρων πράξεων, Ταυτόχρονα, ζητείται από το μαθητή να διαμορφώνει (αναπαράγοντας συνοπτικά το περιεχόμενο κάθε ενότητας) ένα ή περισσότερα προβλήματα μαθηματικών, που γίνονται συνθετότερα, όσο πιο σύνθετες γίνονται και οι ίδιες οι ιστορίες. Ακόμη, ένα πρόσθετο αφήγημα με πρωταγωνιστή έναν ιππότη που αισθάνεται υπέρβαρος (επειδή κάνει το λάθος να ζυγίζεται φορώντας την πανοπλία του) επιχειρεί να εισάγει τους μαθητές στις έννοιες του καθαρού και μεικτού βάρους που συνήθως δημιουργούν αρκετές δυσκολίες σχετικά με τη διάκρισή τους.

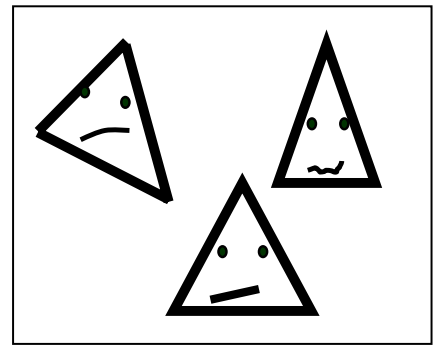
Μαζί με τους χαρακτήρες αυτούς -που μετέχουν στις κυρίες αφηγήσεις- το προσωπικό ενός τσίρκου με ακροβάτες, θαυματοποιούς και κλόουν προσφέρεται για να βοηθήσει στην εμπέδωση των εννοιών του εκάστοτε κεφαλαίου με τρόπο έμμετρο, μιας και οι στίχοι είναι ευκολότερο να ακολουθηθούν και να αφομοιωθούν από το μαθητή του δημοτικού σχολείου. Δύο μικρά αποσπάσιμα *απ' αυτά τα έμμετρα κείμενα-προβλήματα εμφανίζονται στο Παράρτημα.*

---

[12] Θα άξιζε εδώ να αναφέρω την παρατήρηση του ***C. S. Lewis*****:** «*Οι αποκαλούμενες ως ρεαλιστικές ιστορίες για παιδιά είναι πολύ περισσότερο παραπλανητικές απ' αυτές που μοιάζουν με παραμύθια. Ποτέ δεν περίμενα ο πραγματικός κόσμος να είναι όπως αυτός των παραμυθιών. Νομίζω, αντίθετα, ότι περίμενα το σχολείο μου να μοιάζει με ιστορίες που αναφέρονταν σε σχολεία. Οι φανταστικές ιστορίες δε με παραπλανούσαν. Οι άλλες πραγματικά το έκαναν*. (Lewis, C. S., 1982, *Surprised by Joy* Harvest Books)

Η ΕΠΙΠΕΔΙΑ: ΑΦΗΓΗΜΑΤΑ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Ενώ στην περίπτωση του προηγούμενου βιβλίου οι χαρακτήρες επιλέχτηκαν για να λειτουργήσουν στην αφηγηματική εκτύλιξη των προβλήματα των μαθηματικών, στην περίπτωση της Επίπεδίας, η οποία γράφτηκε για να εισάγει τους μαθητές στα χαρακτηριστικά και τις κανονικότητες των γεωμετρικών σχημάτων, η πλοκή των αφηφημάτων που αναπτύχθηκαν είναι χαρακτηρο-κεντρική**.** Λειτουργεί δηλαδή για την ανάδειξη των χαρακτήρων. Η ανάδειξη όμως αυτή συμβαίνει μ' έναν ταυτόχρονο ανθρωπομορφισμό των γεωμετρικών σχημάτων. Μονάχα που σ' αυτή τη περίπτωση οι ιδιότητες των χαρακτήρων-σχημάτων γίνονται οργανικό μέρος της πλοκής. Δε λειτουργούν πλέον σαν απλά χαρακτηριστικά μαθηματικών οντοτήτων. Γίνονται στοιχεία δρώντων προσώπων. Και είναι τόσο σημαντικά ώστε να δημιουργούν ελιγμούς στην πλοκή και να κατευθύνουν αποφασιστικά τη δραματική ένταση.



Ο ανθρωπομορφισμός των γεωμετρικών σχημάτων δεν παρουσίασε ιδιαίτερες δυσκολίες. Θα αρκούσε άλλωστε και η απλή παρουσίαση των γεωμετρικών σχημάτων ως προσώπων για να δημιουργήσει εύκολα μια παροδική *αναστολή της δυσπιστίας*[13] και να τα καταστήσει αποδεκτά από τους μαθητές σαν πρόσωπα.

Ο σχηματισμός, για παράδειγμα, στον πίνακα της τάξης των τριών τριγώνων που φαίνονται στην εικόνα (σκαληνό, ισοσκελές και ισόπλευρο)λ μαζί με το ταυτόχρονο ερώτημα σχετικά με το ποιο απ' αυτά θα ήθελαν οι ίδιοι τους να σχετίζονται**,** θα μπορούσε να ενεργοποιήσει συζητήσεις (και δρώμενα ίσως) οι οποίες όχι μονάχα θα υποβοηθούσαν τη μάθηση σχετικά με τα χαρακτηριστικά των σχημάτων, αλλά και θα οδηγούσαν σε χρήσιμες, για τον εκπαιδευτικά, αποκαλύψεις σχετικά ναι με το χαρακτήρα και τη συναισθηματική ίσως συγκρότηση των μαθητών. Προχωρώντας ακόμη περισσότερο, θα μπορούσε κανείς να σχηματίσει μια φανταστική δραματική συνθήκη και να ρωτήσει σχετικά με την υποθετική δράση των σχημάτων αυτών (που τώρα έχουν μεταβληθεί σε χαρακτήρες) μέσα στην συνθήκη αυτή.

Η συναισθηματική απόσταση στο βιβλίο αυτό εξασφαλίζεται από τον ίδιο το χώρο δράσης (μια επίπεδη χώρα δύο διαστάσεων), και την επιλογή των

[13] Βλ. υποσημείωση 5.

δρώντων χαρακτήρων (τα ίδια τα γεωμετρικά σχήματα). Πραγματικά, ο χώρος αυτός και τα ανθρωποποιημένα σχήματα δεν είναι καθόλου δύσκολο να λειτουργήσουν αφηγηματικά[14]. Δεν είναι, άλλωστε, λίγα τα δάνεια από το χώρο της γεωμετρίας, που χρησιμοποιούμε μεταφορικά στην καθημερινή μας επικοινωνία. Αυτά μπορούν όχι μονάχα να υποβοηθήσουν το σχηματισμό και τον εμπλουτισμό των αφηγήσεων, αλλά και να δημιουργήσουν παιχνίδια ανάμεσα στην μεταφορά και την κυριολεξία[15]. Τέτοια παιχνίδια λειτούργησαν όσο διήρκησε η συγγραφή του βιβλίου (όπου αντιμετώπιζα κι εγώ τα γεωμετρικά σχήματα σαν αξιοπερίεργους ανθρώπινους χαρακτήρες με όλες τις εκκεντρικότητες που τους προσδίδονται από τα επίπεδα και γραμμικά χαρακτηριστικά τους).

Σε ό,τι αφορά το αφηγηματικό είδος που θα μπορούσε να προκύψει, τα χαρακτηριστικά και οι ιδιότητες των (ανθρωπόμορφων πια) γεωμετρικών σχημάτων θα μπορούσαν να αποκαλύπτονται σταδιακά μέσα στα αφηγήματα, ώστε αυτά να προσλαμβάνουν το χαρακτήρα ιστοριών αστυνομικού μυστηρίου. Όταν για παράδειγμα αναζητείται ο διαρρήκτης που έκλεψε τη σπάνια συλλογή των τόξων του Γεράσιμου Χορδωτού (ενός πλούσιου και εκκεντρικού κύκλου), ο υπαστυνόμος Τρίχας (ένα οξυγώνιο τρίγωνο με τετράγωνη λογική) μαζί με το βοηθό του τον Αγησίλαο (ένα ορθογώνιο τρίγωνο που προσπαθεί φιλότιμα να οξύνει το πνεύμα και τις γωνίες του) ανακαλύπτουν στον τόπο της διάρρηξης αποτυπώματα γωνίας 75ο. Οι μαθητές καλούνται συνεχίζοντας την ανάγνωση του αφηγήματος να αποκλείσουν από τους βασικούς αντιπροσώπους των τετραπλεύρων (απλό τετράπλευρο, τραπέζιο, ισοσκελές τραπέζιο, πλάγιο παραλληλόγραμμο, ρόμβο, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και τετράγωνο) τους «ύποπτους» εκείνους οι οποίοι δε θα μπορούσαν να έχουν στο περίγραμμά τους έστω και μία γωνία 75ο (στην προκειμένη περίπτωση το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και το τετράγωνο). Από κει και πέρα, οι έρευνες (που στην αφήγηση παραμένουν αστυνομικές) εντοπίζονται σε πρόσθετα χαρακτηριστικά τα οποία θα μπορούσαν να μειώσουν τον αριθμό των υπόπτων μέχρι την αποκάλυψη (και τη σύλ-

[14] Ήδη το 1884 ο Έγγλος θεολόγος Edwin Abbott δημοσίευσε το "Flatland", ένα σατιρικό βιβλίο για την κοινωνική ιεραρχία της Βικτωριανής εποχής με ήρωες γεωμετρικά σχήματα (Abbott, E. A. Flatland : *Η Επιπεδοχώρα* (μετάφραση:Φωτεινή Μωράκη). Αθήνα. Αιώρα, 1999).

[15] Έτσι μιλάμε για καταστάσεις που «*διέγραψαν τον κύκλο τους*» ή που «*μπήκαν στην τελική ευθεία*», για «*κύκλους γνωριμιών*», για Ιψενικά τρίγωνα, για «*κοινωνικές πυραμίδες*», για «*παράλληλες ζωές*» ή «*παράλληλες σχέσεις*», για «*οικονομική επιφάνεια*», για άτομα που «*στέκονται ή δε στέκονται στο ύψος τους*» ή στο «*ύψος των περιστάσεων*», που «*έχουν ή δεν έχουν κάποιο επίπεδο*», για «*ήσυχες γωνίες*» ή για «*καταστάσεις που οξύνονται ή αμβλύνονται*», για «*πλούσιες καμπύλες*», για «*κοινά σημεία*» μεταξύ ανθρώπινων χαρακτήρων.

ληψη) του πραγματικού ένοχου[16]. Μέχρι που να συμβεί αυτό, τα χαρακτηριστικά της οικογένειας των τετράπλευρων είναι διαρκώς παρόντα. Κι έχοντας οργανική σημασία για τη ροή της αφήγησης, αποκτούν μια ιδιαίτερη σημασία και για τον αναγνώστη- μαθητή. Στο Παράρτημα εμφανίζεται ένα απόσπασμα από τις έρευνες του κεντρικού ήρωα.

Η διδακτική σημασία των αφηγημάτων δε σταματά στην απλή ανάγνωσή τους. Έχοντας κατανοήσει τα χαρακτηριστικά των σχημάτων μέσα από την αφήγηση, δε θα ήταν δύσκολο να ζητήσει κανείς από τους μαθητές να συνθέσουν τα δικά τους αφηγήματα ή τα δικά τους αστυνομικά προβλήματα, (που στην ουσία τους είναι προβλήματα γεωμετρίας). Μιας και τα χαρακτηριστικά των σχημάτων αποτελούν, για τον επίπεδο αφηγηματικό χωρόχρονο, ενοχοποιητικά στοιχεία, οι μαθητές μπορούν να επιλέξουν τους δικούς τους πιθανούς ύποπτους (μπορούν να βοηθηθούν σ' αυτό ανατρέχοντας στα δελτία ταυτότητας τετράπλευρων που παρατίθενται σε παράρτημα του βιβλίου) ανάλογα με τα χαρακτηριστικά που ενοχοποιούν το εκάστοτε γεωμετρικό σχήμα-χαρακτήρα.

Η άσκηση στη συγγραφή αφηγημάτων δεν αποτελεί βέβαια τον κυρίως διδακτικό στόχο του βιβλίου. Μπορεί όμως να λειτουργήσει θαυμάσια αποδεικνύοντας –μαζί με τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά και των δύο βιβλίων στα οποία αναφέρθηκα- ότι η διδασκαλία των μαθηματικών δεν αποτελεί απαραίτητα μια μονοσήμαντη μύηση σε, αφηρημένες, ουδέτερες και συναισθηματικά άτεγκτες κατηγορίες. Μπορεί να γίνεται τόσο ζεστή, όσο ζεστή θα μπορούσε να είναι η πρόθεση μας και οι λεκτικοί χειρισμοί που χρησιμοποιούμε για να τα διδάξουμε.

[16] Στο συγκεκριμένο αφήγημα υπάρχουν αρκετές περιστροφές της πλοκής που μεταβάλλουν τις υποψίες και ανακατευθύνουν τις έρευνες του υπαστυνόμου σε διαφορετικούς πιθανούς ύποπτους έτσι ώστε. Να αναδεικνύονται μέσα από το αφήγημα όλα τα είδη των τετράπλευρων με τα χαρακτηριστικά τους.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1
Από τις **“Ιστορίες με 4 Πράξεις”**

ΤΟ ΜΕΓΑΛΟ ΑΝΑΚΑΤΕΜΑ

Ο Τηλέμαχος ο Σβούρας
Που όλοι στο τσίρκο τον γνωρίζουνε με τ’ όνομα
«ο Ανακατωσούρας»
είναι μαζί και κλόουν και ζογκλέρ
του διευθυντή του τσίρκου ο προσωπικός σοφέρ
και διορθώνει αν χρειαστεί καμιά φορά
του τσίρκου τα καλοριφέρ

Δηλαδή με λίγα λόγια
κάνει λίγα από όλα πάντα στη σειρά)
σφουγγαρίζει, ξεσκονίζει
τους χαυλιόδοντες των ελεφάντων με βερνίκι τους γυαλίζει
τους ιπποπόταμους τη νύχτα με άριες τους νανουρίζει
τους κροκόδειλους καρτερικά παρηγορεί αν κλαίνε
Και με περίσσια επιμέλεια ξεπλένει και σκουπίζει
Των ταχυδακτυλουργών τις βέργες
Ενώ στου τσίρκου τα’ άσπρα άλογα
μαύρες ρίγες με πινέλο ζωγραφίζει
όταν απεργούν οι ζέβρες

Αλλά και στο νούμερό του είναι άσσος
Ανεμοστρόβιλος σωστός
Ξεκινά στα χέρια του να παίζει αρχικά
Τέσσερα μικρά μπαλάκια μοναχά

Και πριν προλάβει η κυρία στον εξώστη
να φωνάξει δυνατά
«Ε, σιγά. Αυτό είναι πανεύκολο
μπορούνε να το κάνουν και παιδιά»
Ο χιμπατζής απ’ το κλουβί του
Άλλα οκτώ μπαλάκια στη σκηνή πετάει
Και μπορείς εσύ μια πράξη απλή
μόνο να κάνεις και να πεις
Πόσα μπαλάκια ο Τηλέμαχος
Στα χέρια του τώρα κρατάει;

Ε, αυτό δεν είναι δα και τόσο τρομερό
Λέει ο χοντρός ο κύριος
που κάθεται στη πρώτη θέση
Για μένα ο ζογκλέρ είναι ικανός κι έχει προσόντα
Όταν στα χέρια τα μπαλάκια που κρατεί
Είναι τουλάχιστον ογδόντα

Και τόσα ακριβώς ήτανε τα μπαλάκια που εκείνη τη στιγμή
Έφυγαν απ' του κανονιού την κάνη
Κι αντί να σωριαστούνε επάνω στη σκηνή
Βρέθηκαν στου Τηλέμαχου τα γρήγορα χεράκια
Και πριν προλάβει ο χοντρός τη φράση του να ολοκληρώσει
Ο Ανακατωσούρας το νούμερό του συνεχίζει

Με ..... μπαλάκια.
Και τώρα σας ζητώ
Να βρείτε γρήγορά και στο λεπτό
Πόσα είναι όλα τα αντικείμενα που υπάρχουν στο σωρό
Μαζί με το τεράστιο αυγό
Και με τον Ανακατωσούρα

Είναι.....

Και δυστυχώς, και δυστυχώς
εκείνο το τεράστιο αυγό
που ήταν κι αρκετά βαρύ μπορώ να πω
κι έσπασε στο κεφάλι του επάνω
του Ανακατωσούρα έκανε να χάσει το ρυθμό
και να του φύγουν στο λεπτό από τα χέρια
Οι μπάλες οι μεγάλες οι .....
Τα μουσικά τα όργανα τα.....
Τα μπαλάκια τα .....

ΚΑΤΙ ΛΕΙΠΕΙ

Ο καημενούλης ο μαθητευόμενος ο κλόουν ο Νεκτάριος
Στο νούμερό του είναι λιγάκι ατζαμής
Αφού, πώς να το κάνουμε, είναι ακόμη αρχάριος
Και στις γκάφες αρκετά επιρρεπής
Και κάτι τέτοιο πολύ εύκολα θα μπορούσες να το πεις
Όταν τον βλέπεις να σωριάζεται συνέχεια καταγής
Κι επειδή είναι λιγάκι χοντρούλης και βαρύς
Κάποιες φορές πέφτοντας ή σπάει ή ραγίζει
Και κάποια απ' τα σανίδια της σκηνής

Αλλά αυτό που βασικά θα ήθελα να πω
είναι πως εκτός από αρχάριος κλόουν ο Νεκτάριος
Στο τσίρκο είναι δυστυχώς αλλά επισήμως

Μοναδικός και ίσως αποκλειστικός
Αποθηκάριος
Και έτσι μετά από κάθε παράσταση που λες
μετράει των κλόουν τις αστείες και τις παρδαλές στολές
Τα καπέλα και τις βέργες των ταχυδακτυλουργών
Τα μουσικά τα όργανα της μπάντας
Και τα μακριά δικτυωτά καλσόν
των ακροβατισσών

Βρήκες πως είναι ……. Εντάξει.
Ψιθύρισε το τώρα στου Νεκτάριου τ' αυτί για να το ξέρει
Και στον κατάλογο ν' αρχίσει να το γράφει
Πριν οι 35 μουσικοί της μπάντας
έρθουν για ν' αρπάξουνε από το ράφι
τα όργανα τα 24 που πάνω εκεί φυλάει
και πριν όλοι μαζί αρχίσουν να φωνάζουν δυνατά
«Πω πω τι πράγματα είναι αυτά
που είναι τα υπόλοιπα τα όργανα τα ……..
που έχουν πάει;»
Πες στον Νεκτάριο αμέσως πόσα λείπουν
Για ν' αρχίσει να τα ψάχνει στης αποθήκης τις γωνίες
Πριν απειλητικά ο αρχιμουσικός κουνήσει τη μπαγκέτα
Και ίσως στο αυτί του ο σαλπιγκτής σφυρίξει δυνατά
Με την τρομπέτα

Και σήμερα να, λίγο πριν επάνω στη σκηνή
κάνουν παρέλαση του τσίρκου οι 25 μαζορέτες
με τα ροζ ψηλά καπέλα
και τα κουστούμια με τις χρυσαφένιες πιέτες
Στην αποθήκη μέσα είδε ο Νεκτάριος με τρόμο
Πως τα καπέλα ήτανε 22 μόνο
Και τώρα ψάχνει με μεγάλη στ' αλήθεια αγώνα
Όσα του λείπουνε να βρει,
που είναι, θα έλεγα ευτυχώς, μονάχα ……

Και τώρα ο Νεκτάριος ψάχνει απελπισμένα
Μέσα και έξω από την αποθήκη
«α, να! Φωνάζει εδώ είναι 7
μου λείπουν τώρα άλλα ……
να κι άλλα οκτώ, να κι άλλα δύο λέει τώρα
αχ ευτυχώς, ξαλάφρωσα, τα βρήκα όλα

Αλλά πριν προλάβει ακόμα να το πει
του τσίρκου η παρέλαση η τελευταία ετοιμάζεται να αρχίσει
Κι οι κλόουν όλοι είναι 15
Κι τα σακάκια τους στη αποθήκη μου είναι μονάχα 5
Κι από τους 11 ακροβάτες που κάνουν τούμπες στον
αέρα
Καθώς μπροστά απ' το ακροατήριο περνάνε
Γιατί έχω μόνο τέσσερις στολές
Κι οι υπόλοιπες που τριγυρνάνε
Και γιατί οι ζέβρες που μαζί κι οι δύο
Είχανε ρίγες 70
Τις βλέπω τώρα με ρίγες μοναχά 52;
Αχ άλλο δεν αντέχω σας λέω θα παραιτηθώ
Πάντα στη θέση τους όλα τα βάζω
Με προσοχή τα αραδιάζω

Και τα μετρώ και πάλι τα μετρώ
Και τα ξαναμετρώ
Μα βλέπω συνεχώς με πίκρα και με λύπη

Πως πάντα κάτι χάνεται
Πάντοτε κάτι λείπει

Απάντηση: Λείπουν ……. καπέλα

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2
ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΠΕΔΙΑ: ΑΦΗΓΗΜΑΤΑ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Ποιος Λήστεψε Τον Χορδωτό;

Ήταν περασμένα μεσάνυχτα. Ο υπαστυνόμος Τρίχας καθόταν στο σπίτι του στην οδό Υποτείνουσας 35, και σκάλιζε, όλος καμάρι, παλιές πετυχημένες υποθέσεις. Του άρεζε κάπου κάπου να θυμάται πους τρόπους που είχε επινοήσει για να συλλάβει διάφορους επιπεδοκακοποιούς. Ήταν κι αυτός ένας τρόπος για να ακονίζει και να οξύνει το πνεύμα του. Ήταν έτοιμος να τα παρατήσει και να πέσει για ύπνο, όταν ξαφνικά χτύπησε το τηλέφωνο.

— Ποιος να ᾽ναι τέτοια ώρα; αναρωτήθηκε. Συνέχεια μου τηλεφωνούν όταν αρχίζω να νυστάζω. Λοιπόν, ή θα πρέπει να πάψω να νυστάζω, ή θα πρέπει να αλλάξω την ώρα που νυστάζω. Δε γίνεται να μου τηλεφωνούν πάντα περασμένα μεσάνυχτα.

Με τις σκέψεις αυτές πλησίασε το τηλέφωνο και σήκωσε νωχελικά το ακουστικό

—Εμπρός! Απάντησε βαριεστημένα.

— Κύριε υπαστυνόμε, Γεράσιμος Χορδωτός εδώ, από τη συνοικία των κύκλων. Με συγχωρείτε που σας ενοχλώ τέτοια ώρα/. Μόλις τώρα μου κλέψανε δύο από τα καλύτερα τόξα της περίφημης συλλογής μου.

— Δεν είναι η πρώτη φορά που συμβαίνει κάτι τέτοιο Γεράσιμε, απάντησε ο υπαστυνόμος κάπως εκνευρισμένα. Θα πρέπει μάλλον να φυλάγετε καλύτερα τη συλλογή σας. Δε μπορώ να ασχολούμαι συνεχώς με τα τόξα σας.

* * * *

. . . . Ο Γεράσιμος γύρισε προς το ανοιχτό παράθυρο που έβλεπε προς τη μεριά του κήπου, κι έβγαλε μια δυνατή φωνή.

—Τεταρτίνο!
— Ναι αφεντικό, ακούστηκε μια βαριά και μάλλον άγαρμπη απάντηση.

— Έλα λίγο που σε θέλω.

—Έφτασα!

Μουρτζούφλης με ακανόνιστο βάδισμα και ύφος αδιάφορο, ο Τεταρτίνος μπήκε στο δωμάτιο και μίλησε στον Γεράσιμο.

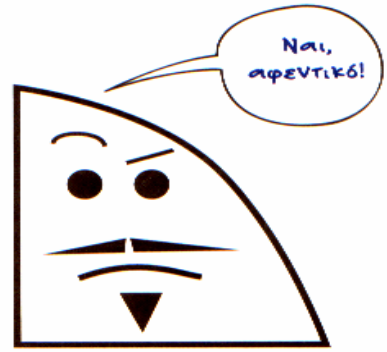
— Τι θες αφεντικό;

— Πες στον κύριο τι είδες εκείνο το βράδυ που έγινε η κλοπή.

— Τι είδα; Τον κλέφτη είδα ντε! Τον κυνήγησα τον άτιμο αλλά βλέπεις καθότι τεταρτημόριος κι όχι κύκλος τέλειος σαν τον κύριο Γεράσιμο από δω, δε τσουλάω καλά και δε μπόρεσα να τον φτάσω. Στο παραπέντε μου ξέφυγε ο απατεώνας.

Ο Τρίχας πήρε το σοβαρό του ύφος και ρώτησε τον Τεταρτίνο.

— Είδες τίποτα απ' αυτόν;



—Αμέ, δυο πλευρές κάθετες σίγουρα τις είχε. Πιάνει το μάτι μου εμένα. Σα τζιτζιφιόγκος ήτανε ο τύπος. Και ντυμένος στην τρίχα παρακαλώ.

— Δε μπορεί, έκανε έκπληκτος ο υπαστυνόμος. Ο ρόμβος δεν έχει κάθετες πλευρές. Μπορεί οι πλευρές του να είναι ίσες, αλλά δεν είναι κάθετες. Είσαι σίγουρος; είπε γυρνώντας προς τον Τεταρτίνο.

Ο Τεταρτίνος έριξε στον υπαστυνόμο ένα βλοσυρό βλέμμα και μετά τινάχτηκε σκορπώντας γύρω του κομματάκια ξεραμένης λάσπης.

— Κοίταξε ρε φίλε, είπε με τη βραχνή φωνή του. Εσύ μπορεί να έχεις μοιρογνωμόνια και τα τέτοια. Εμένα όμως το μάτι μου κόβει καλά· κι άμα δει κάτι το βλέπει. Κατάλαβες;

— Κατάλαβα, είπε ενοχλημένος ο Τρίχας.

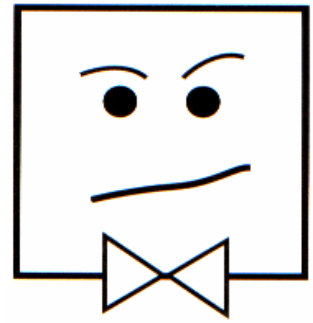
—Ωραία λοιπόν, αφού κατάλαβες, μην κάνεις περίσσιες ερωτήσεις. Όταν ο Τεταρτίνος λέει ότι είδε, παει να πει ότι είδε καλά. Εντάξει τριχοειδές φαινόμενο;

— Εντάξει, έκανε αμήχανα ο Τρίχας . . . .

* * * * *

. . . Ο Τιμολέων ο Κανονικός φόρεσε το βελούδινο κουστούμι του, έσφιξε το παπιγιόν του και κοιτάχτηκε στον καθρέφτη σιγομουρμουρίζοντας το αγαπημένο του τραγούδι.

Είμαι πολύ ωραίος, είμαι κανονικός
Σε όλα είμαι σπουδαίος και σ' όλα είμαι ορθός
Έχω ίσες γωνίες, έχω ίσες πλευρές
Κι οι διαγώνιές μου Ίσες και κάθετες
Ποιος είναι σαν κι εμένα βρε σ΄ αυτή τη γειτονιά
Που είμαι όλο γούστο και φίνα τσαχπινιά
Σαν βάζω τα καλά μου και βγαίνω για σεργιάνι
Το δόλιο το τραπέζιο ζηλεύει και τα χάνει
Ζηλεύουνε ακόμα ρόμβοι και ορθογώνια
Και σκάζουνε τα πλάγια παραλληλόγραμμα



Αφού θαύμασε τον εαυτό του για μια ακόμη μια φορά, τίναξε τη λιγοστή σκόνη που είχε καθίσει στη γωνία Δέλτα του. Μετά άρχισε να φαντάζεται την εντύπωση που θα έκανε στον αποψινό χορό όπου ήταν καλεσμένος.

Ήταν ο χορός της Τζένης Πλαγιαστινού. Ενός πλάγιου παραλληλόγραμμου που διέθετε τις σωστές κλίσεις και αναλογίες για να γίνει ένα διάσημο τετραπευρομανεκέν. Ήξερε πως η Τζένη τον συμπαθούσε πολύ και τον καλούσε πάντοτε στις δεξιώσεις της. Σ' αυτόν τον χορό θα βρισκόταν πολλές από τις διασημότητες της τετραπλευρογειτονιάς. Θα διασκέδαζαν πολύ. Θα χόρευαν βαλσάκια και ταγκό. Θα χόρευαν χορούς αντικριστούς, παραλληλιστούς και τεμνόμενους. Και μετά από τη διασκέδαση θα επιδίδονταν στο αγαπημένο τους σπορ. Ένα σπορ ήταν πολύ της μόδας στην ψηλή κοινωνία της τετραπλευρογειτονιάς. Το σπορ της τοξοβολίας.

Μόλις σκέφτηκε την τοξοβολία, ο Τιμολέων χαμογέλασε στο είδωλό του. Ήξερε πως απόψε κανένας δε θα μπορούσε να του παραβγεί. Γιατί; Γιατί είχε στη διάθεσή του τέσσερα από τα καλύτερα τόξα σ' όλη την Επιπεδία. Τα τόξα που πήρε από τη συλλογή του Γεράσιμου Χορδωτού!

Η ώρα πλησίαζε. Ο Τιμολέων ξεκλείδωσε τη ντουλάπα όπου είχε κρύψει τα κλεμμένα τόξα. Τα θαύμασε για λίγο και μετά πήρε δύο απ' αυτά. Τα άλλα δύο θα τα φυλούσε για επόμενες δεξιώσεις.

Τη στιγμή εκείνη άκουσε ένα παρατεταμένο χτύπημα στην πόρτα.

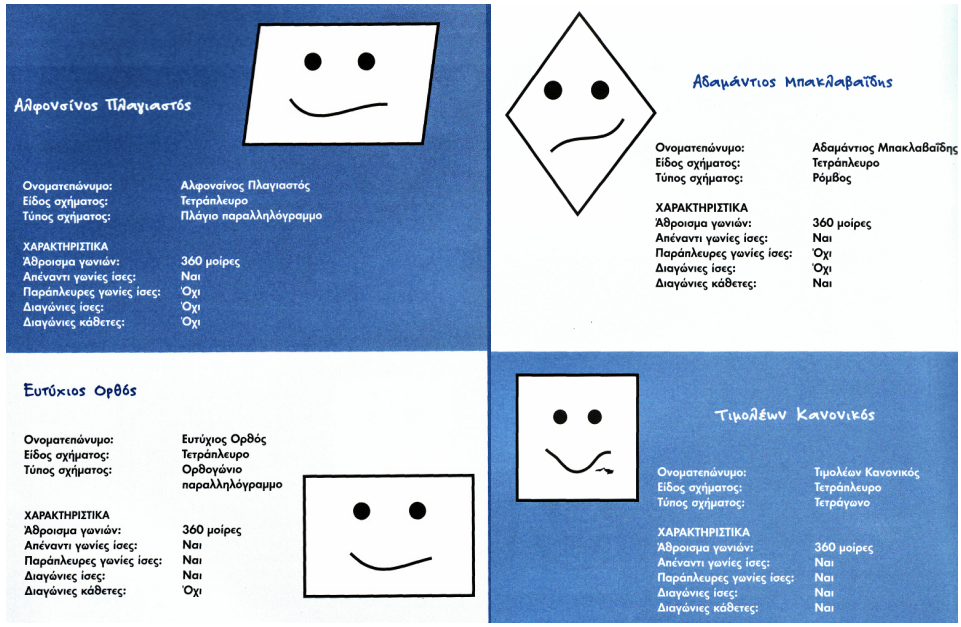
«Ποίας να 'ναι τώρα;» αναρωτήθηκε. «Ποιος ανάγωγος μπορεί να μ' ενοχλεί την ώρα που ετοιμάζομαι για διασκέδαση;»

Το χτύπημα στην πόρτα εξακολούθησε πιο δυνατό.

— Ποιος είναι; φώναξε εκνευρισμένος ο Τιμολέων.

— Ανοίξτε εν ονόματι του γεωμετρικού νόμου! ακούστηκε η φωνή του υπαστυνόμου Τρίχα.

Β. ΔΕΛΤΙΑ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΩΝ



ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΗΝ ΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ Η ΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Στέφανος Μπαλής

Δρ. Μαθηματικός-Συγγραφέας

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΗΝ ΠΟΙΗΣΗ

Γράμματα και αριθμοί. Γραφή και Αρίθμηση. Τα πρώτα πράγματα που μαθαίνει το παιδί. Στην αρχή τόσο η γραφή με την ανάγνωση όσο και η αρίθμηση με τις αριθμητικές πράξεις εξυπηρετούν πρακτικές καθημερινές ανάγκες. Σιγά - σιγά σε μερικούς ανθρώπους ξεπερνούν τις πρακτικές ανάγκες, ανεβαίνουν σ' άλλο πνευματικό επίπεδο και γίνονται πνευματικές δημιουργίες. Κορυφή της γραφής είναι η Ποίηση και της αρίθμησης τα Μαθηματικά. Τι είναι Ποίηση και τι Μαθηματικά; Υπάρχουν πολλές απαντήσεις τόσες όσοι και οι δημιουργοί τους ή ακόμα κι όσοι οι αποδέκτες τους. Όποιος διαβάζει και αγαπάει την ποίηση καταλαβαίνει τι είναι ποίηση έστω κι αν δεν μπορεί να το διατυπώσει και να το εκφράσει. Το ίδιο όποιος ασχολείται με τα μαθηματικά αντιλαμβάνεται ότι τα μαθηματικά δεν είναι μόνο ένα χρήσιμο εργαλείο που βοηθούν στην επίλυση πρακτικών προβλημάτων και στην κατανόηση άλλων επιστημών. Νοιώθουν ότι είναι και κάτι άλλο, έστω κι αν δεν μπορούν να το ορίσουν με ακρίβεια. Εκείνο που είναι σίγουρο είναι ότι τόσο τα Μαθηματικά όσο και η Ποίηση είναι δύο πανάρχαιες πνευματικές δημιουργικές δραστηριότητες του ανθρώπου, αυτόνομες και αυτοδύναμες, που βοηθούν στην κατανόηση του κόσμου και ομορφαίνουν τη ζωή.

ΜΕΡΙΚΕΣ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΥΣΕΣ ΓΝΩΜΕΣ ΚΑΙ ΑΠΟΨΕΙΣ ΤΟΣΟ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΩΝ ΟΣΟ ΚΑΙ ΠΟΙΗΤΩΝ

Ο μεγάλος μαθηματικός Poincaré έγραψε:

«*Ο επιστήμονας δε μελετά τη φύση επειδή είναι χρήσιμο να κάνει κάτι τέτοιο. Τη μελετάει, επειδή βρίσκει ευχαρίστηση σ' αυτό, και βρίσκει ευχαρίστηση, γιατί είναι όμορφη. Αν η φύση δεν ήταν όμορφη, δε θα ήταν άξια να τη γνω-*

ρίσουμε και η ζωή δε θα ήταν άξια να τη ζήσουμε. Εννοώ την εσωτερική ομορφιά που έρχεται με την αρμονική τάξη των μερών και την οποία μία καθαρή ευφυΐα μπορεί να συλλάβει. Ένας μαθηματικός αντλεί από την εργασία του την ίδια συγκίνηση που αισθάνεται και ένας καλλιτέχνης· η χαρά του είναι το ίδιο μεγάλη και της ίδιας ποιότητας».

Σχετικά με το τι είναι ομορφιά ο Dirac γράφει:

«*Η μαθηματική-ομορφιά δεν μπορεί· να οριστεί περισσότερο από ό, τι μπορεί να οριστεί η ομορφιά στην τέχνη, αλλά εκείνοι που μελετούν τα μαθηματικά δεν έχουν συνήθως καμιά δυσκολία στο να την εκτιμούν*».

Πραγματικά ακόμα και ο άνθρωπος που μαθαίνει τα στοιχειώδη μαθηματικά χαίρεται, όταν πετυχαίνει να αποδείξει και την πιο στερεότυπη άσκηση. Όταν μάλιστα η απόδειξη είναι «κομψή» ή όταν ένα πρόβλημα που έλυσε ήταν «ωραίο», τότε αισθάνεται την ίδια ευχαρίστηση και αισθητική απόλαυση όση και με το διάβασμα ενός ποιήματος ή με την ακρόαση ενός μουσικού έργου ή ακόμα και με την παρακολούθηση ενός ωραίου κινηματογραφικού έργου ή μιας θεατρικής παράστασης.

Ο Άγγλος μαθηματικός Hardy στο βιβλίο του Η απολογία ενός μαθηματικού, ένα από τα ποιητικότερα βιβλία που γράφτηκαν για τα μαθηματικά, σημειώνει:

«*Ο μαθηματικός, όπως ένας ζωγράφος ή ένας ποιητής, είναι ένας σχεδιαστής. Τα σχεδιαγράμματά του είναι φτιαγμένα με ιδέες. Ο ζωγράφος φτιάχνει σχέδια με σχήματα και χρώματα, ο ποιητής με λέξεις. Και στην ποίηση μετρούν οι ιδέες. Η ποίηση δεν είναι το πράγμα που λέγεται, αλλά ο τρόπος με τον οποίο το λέμε. Τα μαθηματικά. σχεδιάσματα, όπως εκείνα ενός ζωγράφου ή ενός ποιητή, πρέπει να είναι όμορφα. Οι ιδέες όπως τα χρώματα ή οι λέξεις, πρέπει να ταιριάζουν μεταξύ τους με αρμονικό τρόπο. Η ομορφιά είναι το πρώτο κριτήριο: δεν υπάρχει μόνιμη θέση στον κόσμο για άσχημα μαθηματικά*»

Δύσκολα θα βρίσκαμε σήμερα έναν μορφωμένο άνθρωπο αναίσθητο στην αισθητική έλξη των μαθηματικών. Μπορεί να είναι πολύ δύσκολο να οριστεί η μαθηματική ομορφιά, αλλά αυτό είναι εξ ίσου αληθινό για κάθε είδους ομορφιά· μπορεί να μη γνωρίζουμε ακριβώς τι εννοούμε λέγοντας ότι ένα ποίημα είναι όμορφο, αλλά αυτό δε μας εμποδίζει να αναγνωρίσουμε την ομορφιά του, όταν το διαβάσουμε. Μπορούμε να σημειώσουμε ότι η ομορφιά ενός μαθηματικού θεωρήματος εξαρτάται όχι από τις πρακτικές εφαρμογές του, αλλά από τη σημασία των μαθηματικών ιδεών που συνδέει, όσο και από την κομψότητα της απόδειξής του, όπως ακριβώς στην ποίηση η ομορφιά ενός στίχου μπορεί να εξαρτάται από τη σπουδαιότητα των ιδεών που περιέχει: Μία μαθηματική απόδειξη πρέπει να μοιάζει με έναν απλό και ευδιάκριτο αστερισμό και όχι με ένα νεφέλωμα διασκορπισμένο στο

γαλαξία μας· τότε είναι κομψή. Μία κομψή απόδειξη είναι ένα ποίημα σε όλα της, εκτός από τη μορφή στην οποία είναι γραμμένη.

Ο ποιητής PauI Valéry γράφει σχετικά:

«Μια κοπιώδης, αλλόκοτη μαθηματική ανακάλυψη μετράει λίγο. Μόνο η κομψότητα είναι χρήσιμη, γόνιμη, βαθιά, αφού δίχως αυτήν τα μαθηματικά είναι σπαζοκεφαλιές και μ 'αυτήν μοντέλα. Η κομψότητα είναι ουσιαστική».

Ενδιαφέρουσα είναι και η άποψη του Ιάννη Ξενάκη, που συνδυάζει τα μαθηματικά με τη μουσική. Λέει:

«*Τα μαθηματικά κινούνται στο χώρο της φαντασίας. Μαθηματική σκέψη είναι η ικανότητα της συνδυαστικής. Πολλοί μαθηματικοί εργάζονται σαν τους καλλιτέχνες· όπως οι καλλιτέχνες. ξεκινούν με μία σύλληψη που προσπαθούν εκ των υστερών να αποδείξουν. Συλλαμβάνουν κάτι και μετά το επαληθεύουν. Τόσο στα μαθηματικά όσο και στην τέχνη. ο δρόμος είναι το απόλυτο σκοτάδι. τα μαθηματικά υπάρχουν. για να επιβεβαιώνουν την αναγκαιότητα ενός φαντασικού κόσμου. Χωρίς μαθηματικά, τα όνειρα και η φαντασία θα ήταν στο κενό*».

Ο Άγγλος ποιητής Shelley στο έργο του *Μια υπεράσπιση της ποίησης* [A Defense of Poetry] συνδέει την επιστήμη με την ποίηση. Γράφει:

«*Η ποίηση είναι πραγματικά κάτι θείο. Είναι συγχρόνως το κέντρο και η περιφέρεια της γνώσης· είναι αυτό το οποίο καταλαβαίνει όλη την επιστήμη και αυτό στο οποίο όλη η επιστήμη πρέπει να αναφέρεται. Είναι συγχρόνως η ρίζα και το λουλούδι όλων των άλλων συστημάτων σκέψης. Οι ποιητές είναι οι μάντεις μιας έμπνευσης χωρίς προηγούμενο· οι καθρέφτες των γιγαντιαίων σκιών, τις οποίες το μέλλου ρίχνει πάνω στο παρόν. Οι ποιητές είναι οι μη αναγνωρισμένοι νομοκανόνες του κόσμου».*

Ίσως απ' όλα όσα παραπάνω ανέφερα για τα μαθηματικά να γίνεται ευκολότερα αποδεκτή η ρήση του Πλάτωνα, ότι «ο θεός πάντα γεωμετρεί», ή του Γαλιλαίου, ότι «το μεγάλο βιβλίο της φύσης είναι γραμμένο με μαθηματικά σύμβολα».

Συμπληρωματικά στα παραπάνω είναι και η γνώμη του Χάϊζεμπερκ (Βραβείο Νόμπελ 1932).

«*Μόνο δύο γλώσσες έχει ο άνθρωπος για να αντιμετωπίσει την πραγματικότητα, τα μαθηματικά και την ποίηση».* Πολύ εύστοχα ο Νίκος Ταμπάκης (Μηχανικός φιλόσοφος) έγραψε*: «Τη φράση του Χάϊζεμπεργκ προτιμώ να τη διαβάσω λίγο διαφορετικά: Μαθηματικά και ποίηση είναι τα δύο παράθυρά μας προς τον κόσμο. Η θέα που το καθένα τους προσφέρει είναι πολύ διαφορετικό από το άλλο, όμως κατά έναν παράδοξο τρόπο, είναι συμπληρωματικές*

μεταξύ τους, γεγονός που αυτανακλά και τη δική μας δίδυμη φύση: Λογική – Συναίσθημα».

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω μπορούμε να πούμε επιγραμματικά για τα Μαθηματικά και την Ποίηση:

1. Τόσο τα μαθηματικά όσο και η ποίηση οικοδομούνται με λέξεις και ιδέες. Ο μαθηματικός χτίζει τον κόσμο του με τις λέξεις και τις ιδέες και δημιουργεί προτάσεις και αλήθειες που απευθύνονται στο μυαλό του ανθρώπου. Ο ποιητής χτίζει τον κόσμο του με τις λέξεις και τις ιδέες και δημιουργεί νοήματα, εικόνες και ρυθμούς που απευθύνονται στην ψυχή του ανθρώπου. Και στις δύο περιπτώσεις, το δημιούργημα ανταποκρίνεται στις προσδοκίες του ανθρώπου, όταν είναι ωραίο.

2. Τα μαθηματικά περιγράφουν και ερμηνεύουν τον κόσμο μέσα από τα φίλτρα της λογικής του μαθηματικού. Η ποίηση περιγράφει και ερμηνεύει τον κόσμο μέσα από τα φίλτρα της ευαισθησίας του ποιητή. Έτσι, λοιπόν, μαθηματικά και ποίηση βοηθούν να κατανοήσουμε τον κόσμο.

3. Τα μαθηματικά είναι μια καταβύθιση του μαθηματικού στα βαθύτερα στρώματα του μυαλού του. Η ποίηση είναι μια καταβύθιση του ποιητή στα βαθύτερα στρώματα της ψυχής του. Και στις δύο περιπτώσεις, ο «δύτης» φέρνει στην επιφάνεια λαχταριστή πραμάτεια.

4. Τα μαθηματικά είναι αλήθεια ενσαρκωμένη με λέξεις και ιδέες. Η ποίηση είναι συναίσθημα ενσαρκωμένο με λέξεις και ιδέες. Αλλά όμορφο είναι ό,τι είναι αληθινό, και η ομορφιά, δηλαδή η αλήθεια, δημιουργεί συναισθήματα.

5. Τα μαθηματικά είναι ο καρπός του συγκεκριμένου. Η ποίηση είναι το άνθος του συγκεκριμένου. Άνθος και καρπός είναι συστατικά της ζωής.

6. Κανένας στίχος δεν ανατρέπει καθεστώτα· μπορεί, όμως, να ανατρέψει τη λογική που τα στηρίζει (Θούριος του Ρήγα Φεραίου, Μασσαλιώτιδα). Κανένα θεώρημα δεν μπορεί να ανατρέψει καθεστώτα· μπορεί όμως, να ανατρέψει τις δυνάμεις που τα στηρίζουν (Αρχιμήδης, Einstein). Τα μαθηματικά και η ποίηση μπορούν να αναταράξουν την κοινωνία και να γίνουν καταλύτες για την ανατροπή καταστάσεων. Ή, όπως γράφει ο Οδυσσέας Ελύτης: *Καθώς φαίνεται και για ν' ανατραπούν καθεστώτα - τι θρίαμβος! Χρειάζεται η καλή ποιότητα.* Και ακόμα (Εν λευκώ, σ. 253): *Η ποίηση, που από τη φύση της δεν αρκείται ποτέ στη μία όψη των πραγμάτων, έφτασε να 'ναι στις μέρες μας η μόνη πραγματικά επικίνδυνη για τους εκάστοτε κρατούντες.*

7. Τα μαθηματικά είναι μία αποκάλυψη, ένα καινούριο φως που φωτίζει την αθέατη όψη του κόσμου. Τα μαθηματικά ανασύρουν από τα βάθη

της σκέψης ό,τι μπορεί να ερμηνεύσει τον κόσμο. Η ποίηση είναι μία αποκάλυψη, ένα καινούργιο φως πάνω σε αλήθειες γνωστές. Η ποίηση ανασύρει από τα βάθη της συνείδησης ό,τι μπορεί να αποτελέσει μία νέα ανθρώπινη εμπειρία και, έτσι, ξανακαινουργιώνει τον κόσμο.

8. Δεν υπάρχει βασιλική οδός που να οδηγεί στα μαθηματικά. Δεν υπάρχει βασιλική οδός προς την καρδιά της ποίησης. Η μαθητεία είναι απαραίτητη, για να μπεις στον έναν ή στον άλλον κόσμο. Όσο περισσότερο μαθητεύεις, τόσο καταλαβαίνεις ότι το χάσμα μεταξύ μαθηματικών και ποίησης μικραίνει. Τόσο ο μαθηματικός όσο - και ο ποιητής, για να δημιουργήσουν, πρέπει να δουλέψουν σκληρά και πρέπει να διαθέτουν, εκτός από γνώσεις, διαίσθηση και φαντασία, ενόραση και δημιουργικότητα, μυαλό και ψυχή. Όταν η ευαισθησία και η λογική συμπορεύονται, τότε μαθηματικά και ποίηση βοηθούν να κατανοήσουμε τον κόσμο και η εικόνα του κόσμου ομορφαίνει.

Για την παρουσία των μαθηματικών στην ποίηση σας παραπέμπω στο βιβλίο μου «Μαθηματικά και Ποίηση». Όμηρος, Αισχύλος, Αρχιμήδης, Πλάτωνας, Σόλων, Βαφόπουλος, Κακναβάτος, Ελύτης, Ρίτσος, Μπουκάλας είναι μερικοί μόνο ποιητές που το έργο τους είναι μια απόδειξη ότι τα μαθηματικά και η ποίηση έχουν πολλά κοινά στοιχεία.

Θα σας διαβάσω μόνο ένα ποίημα του Θεσσαλονικιού ποιητή Γιώργου Βαφόπουλου. Κυρίαρχα στοιχεία στην ποίησή του είναι ο έρωτας, ο θάνατος και ο χρόνος, δομικά υλικά με τα οποία κτίζει τα ποιήματά του, όπως ακριβώς το σημείο, η ευθεία και το επίπεδο είναι τα τρία δομικά στοιχεία με τα οποία ο Ευκλείδης οικοδόμησε τη γεωμετρία με τα «Στοιχεία» του. Στο ποίημά του «ο μεγάλος Κώνος» το γεωμετρικό μοντέλο είναι κυρίαρχο στη δόμησή του.

Ο ΜΕΓΑΛΟΣ ΚΩΝΟΣ

Ας δεχθούμε πως η δομή του κόσμου είν' ένας κώνος, που
απ' τη βάση ως τη κορφή του διατρέχεται από μια γραμμή σπειροειδή.
Ο άνθρωπος του οιδιπόδειου αινίγματος ξεκινά την αυγή,
πάνω στ' αχνάρια της γραμμής, με τα τέσσερα πόδια. Στα μισά
του δρόμου στυλώνεται στα δυο του, για να ιδεί κατάματα τον
ήλιο του λαμπρού μεσημεριού. Και το βράδυ φθάνει στην
κορφή του κώνου, σέρνοντας τώρα το τρίτο του ποδάρι,
έτοιμος ν' αντικρίσει τη μεγάλη δύση.
Άλλ' έμεινε ατελής του αινίγματος η λύση. Παραλείφθηκε η
εκδοχή της τελευταίας οριζοντιώσεως. Κι ακόμα η αλληγορία
του λίκνου και του φέρετρου, που ήσαν δεμένα στις δύο άκρες

της σπειροειδούς γραμμής του κώνου. Ο κόσμος θα μπορούσε να ναι κι ένας κύβος, σαν εκείνον του Καίσαρος, που «ερρίφθη» στο Ρουβίκωνα.
Κι ακόμα θα μπορούσε να ναι κι ένας κύκλος, όμοιος με τ αλώνι του Διγενή Ακρίτα.
Το σχήμα του στερνά ο καθείς ανακαλύπτει, κατά του κόσμο που στη φύση του ταιριάζει.
Είναι άνθρωποι τετράγωνοι, ίσιοι ή τεθλασμένοι, που βολεύονται μέσα στο περίγραμμά τους. κι είναι άλλοι πρηνείς και πεπλατυσμένοι, που αρκούνται «μετριοφρόνως» σε μια τάβλα.
Όμως εγώ επιμένω στου μεγάλου κώνου το πολυσήμαντο σχήμα, όπου σ' έναν κύκλο αλλεπάλληλων ενιαυτών. τα βήματά μου οδηγηθήκαν με περίσκεψη προς την κορφή του, ανάμεσ' απ' άνθη, πέτρες και σκιές θανάτου. Στέκομαι τώρα. στο στερνό σκαλί της σπείρας κι αναμετρώ τα στάδια τη μακράς πορείας μου. Θα ναι μάταιο το χέρι μου να υψώσω, αφού δε βλέπω να μου απλώνεται άλλο χέρι.
Όσοι γνωρίζανε πως στην κορφή του κώνου του υποχθονίου πυρός έχασκε ο αρχαίος κρατήρας, ήδη μπορούνε να εξηγήσουν την προτίμησή μου προς το υπερούσιο σχήμα του μεγάλου κώνου.
Καθώς πια δεν υπάρχει ανάληψη στους ουρανούς, μου αρκεί το έσχατο πήδημα του Εμπεδοκλέους.

Τα γεωμετρικά στοιχεία κυριαρχούν στη δομή του ποιήματος: ο κώνος, η σπειροειδής γραμμή, το τετράγωνο ο κύβος και η τεθλασμένη γραμμή χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν την πορεία της ζωής ενός ανθρώπου από τη γέννησή του ως το θάνατο. Οι πρώτες σπείρες στη βάση του κώνου, τα παιδικά χρόνια, είναι μεγάλες, είναι η εποχή που αργά - αργά διαμορφώνεται ο άνθρωπος, ο ορίζοντάς του είναι μικρός. Όσο ανεβαίνουμε πάνω στην επιφάνεια του κώνου οι σπείρες μικραίνουν, αλλά ο ορίζοντας του βλέμματός μας μεγαλώνει. Δε νομίζω ότι μπορεί να δοθεί εναργέστερη εικόνα της πορείας της ζωής από την ανέλιξη στην επιφάνεια ενός κώνου. Μια γοητευτική συνάντηση της ποίησης με τα μαθηματικά.

Η ΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Δε χρειάζεται καμία ιδιαίτερη γνώση για να ανιχνεύσουμε την παρουσία των μαθηματικών σ' ένα ποίημα, αρκεί το ενδιαφέρον και η αγάπη μας για την ποίηση. Τα πράγματα αλλάζουν όταν θελήσουμε ν' ανιχνεύσουμε την ποίηση των μαθηματικών. Στην περίπτωση αυτή χρειάζεται και κάποια γνώση των μαθηματικών και όσο βαθύτερη είναι η γνώση αυτή τόσο πιο εύκολα ανακαλύπτουμε την ποίηση των μαθηματικών. Εκτός από τις γνώσεις των μαθηματικών καθοριστικό ρόλο παίζει και η αίσθηση που έχουμε γενικά για την ομορφιά και το ωραίο. Ο φιλόσοφος Bertrand Russel έγραψε:

Τα μαθηματικά, σωστά ιδωμένα, κατέχουν όχι μόνου αλήθεια, αλλά και εξαιρετική ομορφιά, μία ομορφιά ψυχρή και αυστηρή, όμοια με γλυπτού, που δεν γοητεύει το αδύνατο μέρος της φύσης μας, χωρίς τις υπέροχες παγίδες της ζωγραφικής και της μουσικής, όμως εξαίσια καθαρή και ικανή για αυστηρή τελειότητα, τέτοια που μόνον η μεγίστη τέχνη μπορεί να μας προσφέρει.

Χρειάζεται όμως και κάτι άλλο: Να διευκρινίσουμε τι εννοούμε ποίηση των μαθηματικών και σε ποια μαθηματικά. θα την αναζητήσουμε. Η ποίηση των μαθηματικών είναι, κατά κάποιο τρόπο, ενσωματωμένη στις μεγάλες εξισώσεις - τύπους των μαθηματικών καθώς και στην απόδειξή τους. Επίσης ενυπάρχει στα "σοβαρά θεωρήματα" και στις "σοβαρές μαθηματικές κατασκευές". Η σοβαρότητα ενός μαθηματικού θεωρήματος έγκειται όχι στις πρακτικές του συνέπειες αλλά στη σημασία και τον πλούτο των μαθηματικών ιδεών που περιέχει. Η ομορφιά ενός μαθηματικού θεωρήματος ή μιας εξίσωσης ή μιας κατασκευής εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη σπουδαιότητα των ιδεών που περιέχει, από την δύναμη της εικόνας που παρουσιάζει, από την απλότητα της απόδειξής του. Τα μαθηματικά σχεδιάσματα, όπως και εκείνα ενός ζωγράφου ή ποιητή πρέπει να είναι όμορφα. Οι ιδέες όπως τα χρώματα ή οι λέξεις πρέπει να ταιριάζουν μεταξύ τους με αρμονικό τρόπο. Η ομορφιά είναι το πρώτο κριτήριο: Δεν υπάρχει στον κόσμο μόνιμη θέση για άσχημα μαθηματικά. Πιστεύω ότι με τα παραδείγματα που ακολουθούν αναδεικνύονται τα ποιητικά στοιχεία των μαθηματικών και διευκολύνεται η αναζήτησή τους.

ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

Ας ξεκινήσουμε από το πρώτο μεγάλο γραπτό ποιητικό έργο, την Ιλιάδα και την Οδύσσεια του Όμηρου. Ένα τεράστιο ποιητικό οικοδόμημα όπου, για πρώτη φορά, δημιουργείται ένα ενιαίο αρμονικό σύνολο με θέμα, πρωτότυπες ιδέες, κοσμοθεωρίες, αισθήματα, γραμμένο με γλώσσα λιτή, με φαντασία, με εικόνες που εξάπτουν την περιέργεια και ικανοποιούν τις πνευματι-

κές ανησυχίες του αναγνώστη, τον ψυχαγωγούν και ομορφαίνουν τη ζωή του. Ακόμη και μικρά . μαθηματικά προβλήματα χρησιμοποιούνται από τον Όμηρο για να περιγράψουν κάποιες καταστάσεις (πλήθος των μνηστήρων). Δεν είχε σημασία αν πριν από τον Όμηρο, στα 300 χρόνια που μεσολάβησαν από τον Τρωικό πόλεμο ως τον Όμηρο, διάφοροι αοιδοί τραγούδησαν τα έπη. Ο Όμηρος ήταν εκείνος που με την προσωπική του φωνή συνέθεσε όλα αυτά και δημιούργησε τα Ομηρικά Έπη.

Το ανάλογο του Ομήρου στα μαθηματικά είναι ο Ευκλείδης. 300 χρόνια μετά τον Όμηρο, ο Ευκλείδης συγκέντρωσε όλες τις γνώσεις των μαθηματικών από τους Βαβυλώνιους μέχρι το Θαλή και τον Πυθαγόρα και συνέθεσε τα "Στοιχεία" του. Οι νέες ιδέες, οι αριθμοί, τα σχήματα. οι ιδιότητές τους είναι τα υλικά του οικοδομήματος του Ευκλείδη. Το συνταίριασμά τους είναι αυτό που δίνει την αισθητική απόλαυση και ικανοποιεί το μυαλό και την ψυχή του ανθρώπου.

Έτσι, Όμηρος και Ευκλείδης είναι αυτοί που άφησαν τη μεγαλύτερη κληρονομιά στο ανθρώπινο γένος: Τους δυο πόλους Ποίηση και Μαθηματικά που προσανατόλισαν την πνευματική δημιουργία του ανθρώπου. Αντί για ραψωδίες, τα Στοιχεία του Ευκλείδη χωρίζονται σε 13 βιβλία. Τα πρώτα 6 πραγματεύονται την επίπεδη γεωμετρία, στα επόμενα 3 αναπτύσσεται η αριθμοθεωρία, στο δέκατο οι ασύμμετροι και τα 3 τελευταία πραγματεύονται τη στερεομετρία. Η παρουσίαση της ύλης των "Στοιχείων" από τον Ευκλείδη είναι, όπως είπε ο Αϊνστάιν, Η ποίηση των Λογικών ιδεών".

Στα παραδείγματα που ακολουθούν νομίζω ότι η σαφέστερη και ομορφότερη διατύπωση και απόδειξη κάθε αλήθειας έχει την ομορφιά της ποιητική ς δημιουργίας. Μια κομψά διατυπωμένη απόδειξη είναι ένα ποίημα απ' όλες τις απόψεις εκτός από τον τρόπο με τον οποίο έχει γραφεί.

1. ΤΟ ΠΛΗΘΟΣ ΤΩΝ ΠΡΩΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Πρώτοι αριθμοί είναι οι αριθμοί που έχουν διαιρέτες μόνο το 1 και τον εαυτό τους. Έτσι οι αριθμοί 2,3,5,7,11,13,17,19 ... είναι πρώτοι. Πόσοι είναι; εύλογο ερώτημα.

Ο Ευκλείδης διατύπωσε την πρόταση: «Οι πρώτοι αριθμοί πλείους εισί παντός προταθέντος πλήθους πρώτων αριθμών». Αξίζει να προσεχθεί η διατύπωση της πρότασης, αποφεύγεται ο όρος «άπειρο πλήθος» γιατί η έννοια «άπειρο» είναι πολυσήμαντη. Ο Ευκλείδης έδωσε στα στοιχεία του μια απόδειξη απλή, γοητευτική που εισάγει στα μαθηματικά τη μέθοδο της «εις άτοπον απαγωγή» που την κατανοεί ακόμη και ένας μαθητής του δημοτικού σχολείου.

Παρακολουθήστε την:

Ας υποθέσουμε ότι βρήκαμε όλους τους πρώτους αριθμούς και μεγαλύτερός τους είναι ο μ.

Και να η «ποιητική» έμπνευση του Ευκλείδη! Βρίσκουμε τον αριθμό $A=2\cdot3\cdot5\cdot7 \ldots \mu + 1$

Ο αριθμός αυτός όταν διαιρεθεί μ' όλους τους πρώτους αριθμούς από τον 2 μέχρι τον μ αφήνει υπόλοιπο 1, επομένως δεν έχει διαιρέτη κανέναν από τους προταθέντες πρώτους αριθμούς. Άρα ο Α ή θα είναι πρώτος και επομένως μεγαλύτερος του μ ή θα είναι σύνθετος και θα έχει διαιρέτη κάποιον άλλον πρώτο αριθμό εκτός από τους προταθέντες 2,3, ... ,μ που θα είναι μεγαλύτερος του μ. Ώστε δεν τελειώνουν οι πρώτοι αριθμοί σε κάποιον μέγιστο μ αφού πάντα βρίσκουμε έναν μεγαλύτερό του. συνεπώς, όπως λέμε σήμερα, το πλήθος των πρώτων αριθμών είναι άπειρο ο.ε.δ. (όπως έγραφε στο τέλος κάθε απόδειξης ο Ευκλείδης).

2. ΤΑ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ

Κανονικό πολύγωνο είναι αυτό που έχει ίσες τις πλευρές, και ίσες ης γωνίες του. Απλούστερο το ισόπλευρο τρίγωνο. Υπάρχει κανονικό πολύγωνο με οποιοδήποτε πλήθος πλευρών, άσχετα αν κατασκευάζεται. Κανονικό πολύεδρο είναι το στερεό με ίσες τις έδρες του και τις στερεές του γωνίες. Στην εποχή του Πλάτωνα ήταν γνωστά πέντε κανονικά πολύεδρα: Το τετράεδρο. το εξάεδρο. το οκτάεδρο. το δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο. Ο Πλάτων έτρεφε έναν απέραντο θαυμασμό απέναντι σ' αυτά και δεν μπορούσε να φανταστεί ότι ο Θεός θα τα είχε αφήσει αχρησιμοποίητα. Στο κοσμολογικό του σύστημα τέσσερα ήταν τα στοιχεία που αποτελούσαν το σύμπαν: Η φωτιά, η γη, ο αέρας, και το νερό και καθένα απ' αυτά είχε ως εικόνα του ένα κανονικό πολύεδρο φωτιά - τετράεδρο, γη - εξάεδρο, αέρας - οκτάεδρο και νερό - εικοσάεδρο. Τι γίνεται με το πέμπτο, το δωδεκάεδρο; Ο Θεός το είχε κρατήσει για το σχήμα του σύμπαντος Σύμπαν Δωδεκάεδρο. Αν υπήρχαν και άλλα κανονικά πολύεδρα ποια θα ήταν η κοσμολογία; Απάντηση στο ερώτημα αυτό έδωσε στα «Στοιχεία» του ο Ευκλείδης. Με έξοχους συλλογισμούς απέδειξε ότι υπάρχουν μόνο πέντε ακριβώς τύποι κανονικών πολυέδρων.

3. $e^{\pi i} + 1 = 0$ (ΤΥΠΟΣ ΤΩΝ EULER - DE MOIVRE)

Ένας τύπος που κρύβει έναν ολόκληρο κόσμο. Υπάρχουν κάποιοι αριθμοί που πέρα από τη σημασία και τη χρησιμότητά τους, κρύβουν μια ολόκληρη ιστορία και μυθολογία.

Έτσι π.χ. στην αρχαιότητα το 1 δεν ήταν αριθμός αφού ήταν το Ον, ο δημιουργός του σύμπαντος και των αριθμών: Τίποτα δεν προηγείται αυτού του αριθμού και ότι ακολουθεί δεν είναι παρά η δική του αξία επ' άπειρον προστιθέμενη. Τα πράγματα ήταν πιο δύσκολα με το μηδέν, ενός αριθμού που είναι το σύμβολο της μη ποσότητας, του κενού, η αναπαράσταση της απουσίας του αριθμού. Οι αρχαίοι Έλληνες απέρριπταν το μηδέν, δεν υπήρχε μηδέν. κι αυτή ήταν η αιτία που η Δύση δεν μπόρεσε ν' αποδεχτεί το μηδέν για σχεδόν 2000 χρόνια. Εύστοχα γράφει ο ποιητής Παντελής Μπουκάλας. *Τόσοι θεοί μας ετοίμασαν το μηδέν. Καιρός του ανθρώπου.* Η ανακάλυψη του μηδενός αποτελεί αληθινή επανάσταση της ανθρώπινης σκέψης. Ο αριθμός π συνδέθηκε με τα προβλήματα του τετραγωνισμού του κύκλου, της τριχοτόμησης, της γωνίας και του διπλασιασμού του κύβου γύρω από τα οποία δημιουργήθηκε μια ολόκληρη μυθολογία. Κανένα άλλο μαθηματικό σύμβολο δε γέννησε τόσο μυστήριο, ρομαντισμό και ενδιαφέρον όσο ο αριθμός π. Ακόμη και σήμερα ασκεί μια περίεργη γοητεία ώστε με κάθε μοντέλο μεγάλου υπολογιστή να βρίσκουν και νέα δεκαδικά του ψηφία. Σήμερα έχουν υπολογιστεί 51 δισεκατομμύρια δεκαδικά ψηφία του π. "Έχουν γραφεί πολλά βιβλία με θέμα τον αριθμό π καθώς και ποιήματα που το πλήθος των γραμμάτων κάθε λέξης είναι κι ένα δεκαδικό ψηφίο του π.

Ο καθηγητής Νικόλαος Χατζηδάκης έγραψε το τετράστιχο:

Αεί ο Θεός ο Μέγας γεωμετρεί.
Το κύκλου μήκος, ίνα ορίση διαμέτρω
Παρήγαγεν αριθμόν απέραντον
Και ου φευ! Ουδέποτε όλου θνητοί θα εύρωσι.
π = 3,14159265358973238462 6

Ο αριθμός i, η φανταστική μονάδα, όπως ονομάστηκε, διεύρυνε την έννοια του αριθμού και δημιούργησε ένα καταπληκτικό οικοδόμημα, τη μιγαδική ανάλυση που απόρριψε το όνομα «φανταστικό» αφού βοήθησε στην κατανόηση και ερμηνεία του φυσικού κόσμου. Έτσι η προσωνυμία «φανταστικό»! έχει μόνο θαυμαστικό χαρακτήρα.

Ανάλογη με τη σημασία του π είναι και η σημασία και η χρησιμότητα του e.

$$e = \lim\left(1+\frac{1}{v}\right)^{v} \approx 2.718281830 \ldots.$$

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots.+\frac{1}{n!}+\ldots$$

Κάθε ένας από τους πέντε αριθμούς κι ένας μύθος, μια ολόκληρη θαυμαστή ιστορία. Και το εκπληκτικό! Ένας απλός τύπος: $e^{\pi i} + 1 = 0$ συνδέει αυτή την πεντάδα. Ένας τύπος, ένα καταπληκτικό ποίημα που στο γνώστη των μαθηματικών ασκεί μια απεριόριστη γοητεία.

4. Ο CANTOR ΜΑΣ ΟΔΗΓΕΙ ΣΤΟ ΘΑΥΜΑΣΤΟ ΚΟΣΜΟ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

Αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία στο ρυθμό του Βαλς. Φανταστείτε μια σάλα γεμάτη από αγόρια και κορίτσια. Ποια είναι περισσότερα; Ας τους μετρήσουμε είναι η ορθολογική απάντηση. Μια πιο ποιητική απάντηση είναι:

Ας τους καλέσουμε να χορέψουν στο ρυθμό ενός βαλς. Αν γίνουν όλοι ζευγάρι τότε τ' αγόρια είναι όσα και τα κορίτσια. Αυτό στα μαθηματικά λέγεται «ένα προς ένα» αντιστοιχία ανάμεσα στα στοιχεία δύο συνόλων και τα σύνολα αυτά είναι ισοδύναμα, έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Μια ιδέα απλή, «ποιητική», που λύνει δύσκολα προβλήματα με τρόπο κομψό, με λύσεις που ξαφνιάζουν και γοητεύουν ακριβώς όπως κι ένα ποίημα.

Ένα παράδειγμα:

Φυσικοί αριθμοί είναι οι: 1,2,3,...ν,...

Άρτιοι αριθμοί είναι οι: 2,4,6,...2ν,...

Ποιοι είναι περισσότεροι; Ίσως το ερώτημα είναι αφελές αλλά δεν μπορούμε να τους μετρήσουμε. Ας τους βάλουμε να «χορέψουν βαλς». Να τα ζευγάρια:

1,2,3,4,...ν,...

2,4,6,8,...2ν,...

Δεν περισσεύει κανένας, οι άρτιοι είναι όσοι και οι φυσικοί! Καταπληκτικό θεώρημα, μοντέρνα ποίηση που δεν έχει να ζηλέψει τίποτα από κάποιους στίχους π.χ. της Κικής Δημουλά:

Δαπανηρή ιδέα ο βίος.
Ναυλώνεις έναν κόσμο
Για να κάνεις το γύρο μιας βάρκας
Ένα ποίημα του Cantor γραμμένο με αριθμούς.

5. Ο ΑΛΜΠΕΡΤ ΑΪΝΣΤΑΙΝ ΣΥΝΑΝΤΑΕΙ ΤΟ ΔΙΟΝΥΣΙΟ ΣΟΛΩΜΟ

Θα τελειώσω την εισήγησή με μια αναφορά στον Αλμπέρτο Αϊνστάιν και στο Διονύσιο Σολωμό αφού το 2005 είχε οριστεί ως έτος Αϊνστάιν, - πέρασαν 100 χρόνια από το 1905 που διατύπωσε τη γενική θεωρία της σχετικότητας και 50 χρόνια από το θάνατό του στις 18 Απριλίου 1955 και σχεδόν 150 χρόνια από το θάνατο του Σολωμού (1857).

Άλμπερτ Αϊνστάιν: $E = mc^2$.

Η πιο διάσημη εξίσωση στην ιστορία της Επιστήμης, μια εξίσωση ποίημα.

Διονύσιος Σολωμός:

«*Πάντ' ανοιχτά, πάντ' αγρυπνα τα μάτια της ψυχής μου*»

ένας στίχος από τους Ελεύθερους Πολιορκημένους, ένας στίχος αξίωμα.

Κάποιες σκέψεις του Αϊνστάιν και του Σολωμού θα μας βοηθήσουν να ανακαλύψουμε τα κοινά τους χαρακτηριστικά. Ο Αϊνστάιν έγραψε:

«Εκεί όπου ο κόσμος παύει να είναι η σκηνή για τις προσωπικές ελπίδες και επιθυμίες, εκεί όπου εμείς, σαν ελεύθερα όντα, του παρατηρούμε με απορία, αναρωτιόμαστε γι 'αυτόν και του μελετάμε, εκεί είναι η είσοδος στο βασίλειο της Τέχνης και της Επιστήμης. Εάν μεταφράσουμε αυτό που παρατηρήσαμε και νιώσαμε με τη γλώσσα της λογικής, τότε κάνουμε επιστήμη. Εάν το δείξουμε με μορφές των οποίων οι σχέσεις δεν είναι προσιτές στην ευσυνείδητη σκέψη, αλλά αναγνωρίζονται με τη διαίσθηση και ως μεστές νοήματος, τότε κάνουμε τέχνη. Το κοινό στοιχείο και στην επιστήμη και στην τέχνη είναι η αφοσίωση σε κάτι που υπερβαίνει το προσωπικό».

Ο Σολωμός στους στοχασμούς του για τους ελεύθερους πολιορκημένους, απ' όπου είναι και ο στίχος αυτός, γράφει:

«*Όλο το ποίημα ας εκφράζει το νόημα σαν ένας κόσμος καθ 'εαυτόν, μαθηματικά διαβαθμισμένος, πλούσιος και βαθύς. Μόνο σ' αυτή τη γραμμή επιτρέπεται, με διαδοχικά ευρήματα, να προκαλέσει κανείς τις πιο μεγάλες και τρομερές εντυπώσεις*»

Ο Άγγλος ποιητής Σέλλεϋ έγραψε:

«*Η ποίηση είναι συγχρόνως το κέντρο και η περιφέρεια της γνώσης. Είναι αυτό που καταλαβαίνει όλη την επιστήμη και αυτό στο οποίο όλη η επιστήμη πρέπει να αναφέρεται. Είναι συγχρόνως η ρίζα και το λουλούδι όλων άλλων συστημάτων σκέψης*».

Ο Γερμανός φυσικός Βέρνερ Χάϊζενμπερκ (βραβείο Νόμπελ 1932) έγραψε:

«Μόνο δυο γλώσσες έχει ο άνθρωπος για να αντιμετωπίσει την πραγματικότητα, τα μαθηματικά και την ποίηση». Πολύ εύστοχα ο Νίκος Ταμπάκης (Μηχανικός φιλόσοφος) έγραψε*: Τη φράση του Χάιζεμπερκ προτιμώ να τη διαβάσω λίγο διαφορετικά: Μαθηματικά και ποίηση είναι τα δύο παράθυρά μας προς τον κόσμο. Η θέα που το καθένα τους προσφέρει είναι πολύ διαφορετική από το άλλο, όμως κατά έναν παράδοξο τρόπο, είναι συμπληρωματικές μεταξύ τους, γεγονός που αντανακλά και τη δική μας δίδυμη φύση: Λογική – Συναίσθημα».*

Μπορούμε τώρα να τα σχολιάσουμε και να τα συγκρίνουμε.

$E = mc^2$ μια απλή μαθηματική εξίσωση, η πιο διάσημη εξίσωση στην ιστορία της επιστήμης.

Μια εξίσωση που διατυπώθηκε στη γενική θεωρία της σχετικότητας, αποτέλεσμα φαντασίας και διαίσθησης. Η διαίσθηση. Μια μυρωδιά, ένας ήχος, μια εικόνα, μια ιδέα, μια σκέψη που φανερώνει ότι κάτι κρύβεται εδώ και σε βάζει στην περιπέτεια να το αποδείξεις αν είσαι μαθηματικός ή να το κάνεις ποίηση αν είσαι ποιητής. Τι κρυμμένο φανερώνει η εξίσωση $E = mc^2$*;*

Συνταρακτικά πράγματα: Μάζα, ενέργεια και φως είναι το ίδιο πράγμα!

Η ταχύτητα **c** του φωτός είναι η μεγαλύτερη ταχύτητα που μπορεί να υπάρξει στη φύση:

$$c = 3 \cdot 10^{10} \ {}^{cm}\!/_{\text{sec}}$$

(30 δισεκατομμύρια εκατοστά στο δευτερόλεπτο ή 300 χιλιάδες km το δευτερόλεπτο).

Η μάζα μπορεί να γίνει ενέργεια και η ενέργεια μάζα. Με απλά λόγια ένα τηγάνι όταν ζεσταθεί γίνεται βαρύτερο! Η αντιστοιχία μεταξύ μάζας και ενέργειας είναι τρομακτική. Ένα γραμμάριο μάζας αν γίνει ενέργεια θα μας δώσει περίπου 3.600.000 kwh που σημαίνει ότι καλύπτουν τις ανάγκες τους σε ενέργεια περίπου 3600 νοικοκυριά για ένα χρόνο.

Το ζήτημα είναι η χρήση της ενέργειας αυτής. Ευλογία ή κατάρα;

Οι βόμβες που ρίχτηκαν τον Αύγουστο του 1945 στη Χιροσίμα και το Ναγκασάκι ήταν κατάρα. Ο Αϊνστάιν είχε συνηγορήσει για την κατασκευή της ατομικής βόμβας. Την 1 Οκτωβρίου 1939 μαζί με άλλους επιστήμονες ζήτησε από το Ρούσβελτ να προχωρήσει στην κατασκευή της ατομικής βόμβας - Σχέδιο Μανχάταμ - με το φόβο μήπως προλάβουν οι Γερμανοί. Μετά το τέλος του πολέμου έγραψε:

«*Έκανα ένα λάθος στη ζωή μου - όταν υπέγραψα την επιστολή προς το πρόεδρο Ρούσβελτ υποστηρίζοντας την κατασκευή της ατομικής βόμβας. Ίσως όμως να μπορεί να μου συγχωρηθεί αυτό το λάθος γιατί όλοι, πιστεύαμε ότι υπήρχε μεγάλη πιθανότητα να εργάζονται και οι Γερμανοί πάνω σ' αυτό το πρόβλημα και ότι θα μπορούσαν να πετύχουν και να χρησιμοποιήσουν την ατομική βόμβα για να γίνουν η κυρίαρχη φυλή*».

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΑ

Η εξίσωση $E = mc^2$ είναι: Έμβλημα της ιδιοφυΐας, σύμβολο της δύναμης. φιλοσοφία και φαντασία συνώνυμο της τεχνικής γνώσης. προάγγελος της καταστροφής και της ευημερίας. Όλα αυτά συσκευασμένα σε μία μόνο γραμμή που μπορεί να χαράξει ένα μολύβι. Με πέντε σύμβολα *E, =, m, c, 2,* φανερώνει πολλά, ξαφνιάζει, είναι όμορφη έχει όλα τα χαρακτηριστικά ενός μεγάλου ποιήματος.

Ας μεταφερθούμε τώρα μερικά χρόνια πιο πίσω. 1826 Απρίλης μήνας στο Μεσολόγγι. Ύστερα από ένα χρόνο πολιορκίας από στεριά και θάλασσα άνδρες, γυναίκες και παιδιά πήραν τη μεγάλη απόφαση να κάνουν έξοδο. Παραδίπλα, στη Ζάκυνθο, ο Διονύσιος Σολωμός συμπάσχει κι αγωνίζεται κι αυτός μαζί με τους Μεσολογγίτες. Για τον ποιητή οι Μεσολογγίτες είναι «Ελεύθεροι Πολιορκημένοι» και ο ποιητής γράφοντας τους ελεύθερους πολιορκημένους είναι μαζί τους. Ο στίχος:

«*Πάντ' ανοιχτά πάντ' άγρυπνα τα μάτια της ψυχής μου*»

τα λέει όλα και για τον αγώνα των Μεσολογγιτών και για τη συμμετοχή του ποιητή. Πέντε λέξεις κι εδώ: *πάντα, ανοιχτά, άγρυπνα, μάτια, ψυχή.*

Τ' άγρυπνα μάτια αποδίδουν την αγωνία, τις στερήσεις, τον πόνο του κάθε πολιορκημένου και τα ανοιχτά μάτια της ψυχής αναδεικνύουν την προσδοκία για την σωτηρία και την ελευθερία.

Ένας στίχος με τις λέξεις ανοιχτά μάτια, άγρυπνα μάτια, μάτια ψυχής μας δίνει ολόκληρη ιστορία αγώνων και την αγάπη για την ελευθερία. Έχει την ίδια ομορφιά και ανάλογο μέγεθος και περιεχόμενο με την εξίσωση $E = mc^2$, μπορεί επομένως να ισχυριστεί κανείς ότι η εξίσωση $E = mc^2$ είναι ένα ποίημα γραμμένο με σύμβολα και όχι με λέξεις. μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνάντηση του Αϊνστάιν με το Σολωμό.

ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ – ΉΘΗ – ΚΡΑΤΟΣ. ΠΟΙΑ Η ΣΧΕΣΗ ΤΟΥΣ

Άννα Κωστούλα

Καθηγήτρια στη Μ. Εκπαίδευση
Δρ Ιστορίας και Φιλοσοφίας των Επιστημών

Συμφωνούμε όλοι πως όταν μιλάμε για βιβλίο στις επιστήμες ο νους μας πάει συνήθως σε ένα βιβλίο που δίνει τα βασικά για την κατανόηση ενός κλάδου. Για κάθε περίπτωση τα «βασικά» διαφέρουν. Άλλα είναι για μαθητές λυκείου ή για σπουδαστές. Και όταν μιλάμε για σπουδαστές, πρέπει να ξεκαθαρίσουμε αν εννοούμε σπουδαστές της φυσικής ή πολυτεχνικής σχολής.

Βιβλία με τα «βασικά» έχουμε στις μονοθεϊστικές θρησκείες. Για παράδειγμα η Βίβλος δίνει τα «βασικά» για τον χριστιανισμό και το κοράνιο για το Μωαμεθανισμό. Και στις δύο περιπτώσεις υπάρχει ένα βιβλίο όπου ο θεός έχει αποκαλύψει τα «βασικά» τα οποία ο πιστός προσεγγίζει με τη βοήθεια των ειδικών.

Όμως τι σημαίνει «βασικά» μιας επιστήμης, ενός κλάδου;

Όλοι κάναμε τα πρώτα μας βήματα στον ηλεκτρισμό ξεκινώντας από το πρώτο πείραμα του Θαλή με το κεχριμπάρι που στα σχολικά πειράματα έχει αντικατασταθεί από τον βακελίτη ή το πλαστικό κομμάτι ενός στυλό. Μετά περάσαμε στον Coulomb, στη συνέχεια στον Volta. Συνήθως ακολουθεί ο Faraday και μετά ο Maxwell. Η διδασκαλία αρχίζει με τον στατικό ηλεκτρισμό, περνά στην έννοια του δυναμικού και ηλεκτρικού ρεύματος και στο τέλος προστίθεται η ενότητα που αφορά στα ηλεκτρονικά. Διάβασα κάπου μια πρόταση να φύγει το κομμάτι του στατικού ηλεκτρισμού από τα διδακτικά βιβλία για να μείνει χρόνος για την ενότητα που αφορά στα ηλεκτρονικά. Εμφανέστατη η λογική αυτής της πρότασης. Ο στατικός ηλεκτρισμός είναι πολύ κοντά στις πραγματικές εμπειρίες των μαθητών, αλλά παρ' όλα αυτά εγκαταλείπεται για χάρη της εξοικείωσης με την τεχνολογία που κατακλύζει την καθημερινότητα.

Ο αντίλογος στο επιχείρημα που θέλει την κατάργηση της διδασκαλίας του θα μπορούσε να είναι πως ο στατικός ηλεκτρισμός, επειδή είναι πολύ πιο

κοντά στην καθημερινή εμπειρία, βοηθάει περισσότερο στο πέρασμα του μαθητευόμενου στον επιστημονικό τρόπο σκέψης. Η γνώση των βασικών αρχών που αφορούν τα ηλεκτρονικά, μια άλλη μορφή της καθημερινότητας, βοηθάει το άτομο να γίνει καλύτερος καταναλωτής ή, πιο ευγενικά, χειριστής της τεχνολογίας.

Άρα αυτά τα «βασικά» επιλέγονται και καθορίζονται με κάποιους στόχους. Αν στόχος είναι να αναδείξουμε την εξέλιξη μιας επιστήμης ή ενός κλάδου, τότε αυτό θα μπορούσε να γίνει με την παρουσίαση περισσότερων ιστορικών στοιχείων.

Όπως κι αν δούμε το θέμα μένουμε πάντα με το ερώτημα: ποια είναι τα «βασικά» σε έναν επιστημονικό κλάδο, και εδώ αρχίζουν οι δυσκολίες. Κάποιες περιπτώσεις έχουν αναδείξει ότι η απάντηση δεν είναι απλή. Τα «βασικά» για τον ηλεκτρισμό είναι η ιστορία με ποια τεχνική ο Coulomb κατάφερε να μετρήσει την έλξη των δύο φορτίων ή ποια η σχέση της θεωρίας του Γαλιλαίου για τη κίνηση με τους νόμους του Νεύτωνα.

Η περίπτωση του εγχειριδίου φυσικής για το γενικό λύκειο που βγήκε από την ομάδα Δαπόντε, Κασσέτα, Μαυρίκη και την αναστάτωση που προκάλεσε στο χώρο των εκπαιδευτικών λόγω της χρήσης ιστορικών στοιχείων, είναι μια ένδειξη στο πόσο περίπλοκη μπορεί να είναι η ερώτηση τι σημαίνει «τα βασικά» ενός κλάδου ή μιας ειδικότητας.

Στη συζήτηση που έγινε για τη χρήση της ιστορίας των επιστημών στη διδακτική μπήκε σύντομα το θέμα «ποια ιστορία και γιατί;» Διαπιστώθηκε πως πολλά ιστορικά στοιχεία αποσπούν την προσοχή του αναγνώστη – μαθητευόμενου από το «θέμα» και το ζήτημα είναι να αποκτήσει μια άποψη, να χτίσει συνήθειες στο πώς χειρίζεται κανείς τα προβλήματα και τα όρια μέσα στα οποία πρέπει να κινείται. Να ασκηθεί σε έναν τρόπο σκέψης.

Τα επιχειρήματα στην περίπτωση του εγχειριδίου που προαναφέραμε, ήταν πως η πολύ ιστορία αποσπούσε την προσοχή των μαθητών από τα βασικά, από την επιστήμη. Και πάλι πάμε σε κύκλους. Ποια είναι τα «βασικά» μιας επιστήμης και άρα, τι είναι επιστήμη.

Η περίπτωση του ηλεκτρισμού μπορεί να βοηθήσει στο ξεκαθάρισμα των «βασικών». Η σημερινή πρόταση για την κατάργησή του στατικού ηλεκτρισμού παίρνει υπόψη το χώρο της κατανάλωσης, των συσκευών που διαμορφώνουν την πραγματικότητα. Στόχος είναι να καλλιεργήσουν στους μαθητές την αίσθηση ότι γνωρίζουν τη λογική και άρα να κάνουν την τεχνολογία αυτού του τύπου αποδεκτή. Αυτό δεν σημαίνει ότι θα τους κάνει ικανούς να διορθώνουν τις συσκευές, όμως θα τους εξοικειώσει με την ορολογία και μια στοιχειώδη λογική σύνδεση. Μια εξοικείωση παρόμοια με αυτή που έχουμε όλοι μας με την τεχνολογία του αυτοκινήτου.

Ο Βάκωνας με το έργο του Novum Organum και μετά με την Νέα Ατλαντίδα είχε αναλάβει να εκπαιδεύσει τους συγχρόνους του στο νέο τρόπο μελέτης της φύσης.

Ο δε Γαλιλαίος διατείνονταν ότι το βιβλίο της φύσης είναι γραμμένο έχοντας ως αλφάβητο τα μαθηματικά δηλ. όλη η φύση είναι ένα βιβλίο. Συνεπώς, ο μαθητευόμενος μαθαίνει τη γλώσσα της. Η γλώσσα αυτή έχει ως εργαλεία της την πειραματική μέθοδο και τα μαθηματικά.

Άρα μιλάμε για συνήθειες στον τρόπο σκέψης. Και οι συνήθειες καλλιεργούν μια στάση για τα πράγματα, δηλ ιδέες.

Σε αυτό το σημείο τα εργαλεία των κοινωνιολόγων μπορούν ίσως να βοηθήσουν στο ξεκαθάρισμα κάποιων εννοιών. Επειδή το θέμα της μάθησης έχει να κάνει και με τη μετάδοση κάποιων συνηθειών στον τρόπο σκέψης βρίσκω ότι η θεωρία του κοινωνιολόγου Ferdinand Tönnies μπορεί να μας βοηθήσει. Ιδιαίτερα η εργασία του με τίτλο Το Έθιμο (die Sitte) που πρωτοεκδόθηκε το 1909[1]. Ο Tönnies, συνδέει το έθιμο με τη συνήθεια, και τη συνήθεια με τη συμπεριφορά, και η συμπεριφορά διαμορφώνει αυτό που ονομάζουμε βούληση, συμπεραίνει πως η βούληση στηρίζεται, καλλιεργείται από τα ήθη, δηλ. τις συλλογικές συνήθειες.

Η συνήθεια ενός ανθρώπου γίνεται θέληση και έτσι μετατρέπεται σε κάτι πολύ προσωπικό. Η θέληση είναι μια ψυχική κατάσταση, η οποία οδηγεί σε μια ορισμένη πράξη.

Στις μικρές κοινότητες το έθιμο βοηθάει το άτομο να ενσωματώσει την ιστορία του συνόλου στο οποίο ανήκει και με αυτό τον τρόπο να διαμορφώσει τα ατομικά του «θέλω». Η συνήθεια γίνεται νόμος και διαμορφώνει την ατομική βούληση.

Γιατί η βούληση έχει τις ρίζες της πάντα σε κάτι που «εύχεται» το άτομο. «Θέλω» και «εύχομαι να» πολλές φορές χρησιμοποιούνται εναλλακτικά. Οπότε η συνήθεια καθορίζει τη βούληση. Γίνεται δεύτερη φύση.

Οι θεσμοθετημένοι κανόνες μιας κοινωνίας -άγραφοι πάντα σε μικρές κοινωνίες- που καθορίζουν την συμπεριφορά των ατόμων, μεταφέρονται κυρίως μέσω του εθίμου, δηλ. από τη συνήθεια εκτέλεσης κάποιων ενεργειών ή κάποιων διαδικασιών. Αυτή η διαδικασία ορίζει την ηθική, τους κανόνες που προσδιορίζουν τη συμπεριφορά των ατόμων. Οι κανόνες, νόρμες, νόμοι ορίζουν σε ατομικό επίπεδο το «τι πρέπει να κάνω», το «τι οφείλω να κάνω», «το πρέπον» και άρα τη βούληση ενός ατόμου. Γιατί το «οφείλω να κάνω

[1] Tönnies, Ferdinand. Die Sitte, Frankfurt am Main Literarische Anstalt: Ruetten & Loening. (1909)

κάτι» αντιστοιχεί στο «θέλω να κάνω κάτι». Τουλάχιστον πρέπει να αντιστοιχεί. Όταν υπάρχει σύγκρουση, τότε η κοινότητα στην οποία ανήκει το άτομο αντιμετωπίζει προβλήματα αξιών ή διανύει περίοδο συγκρούσεων.

Τα έθιμα ενώνουν τους ανθρώπους. Γιατί τα ήθη και έθιμα κατά τον Tönnies βοηθούν στην ενσωμάτωση μιας φιλοσοφίας και άρα ενός ορισμένου τρόπου συμπεριφοράς η οποία έχει να κάνει με την ιστορία του κοινωνικού συνόλου. Τα ήθη καλλιεργούν την αίσθηση του ανήκειν. Γιαυτό και ο Tönnies τα χαρακτηρίζει κομμουνιστικά. Η συνήθεια που μεταφέρουν τα ήθη και τα έθιμα συνδέουν το άτομο με την ιστορία και σοφία των προγόνων τους.

Η μόδα, σύμφωνα με τον Tönnies, είναι ένας άλλος τρόπος επιβολής κανόνων συμπεριφοράς για αστικούς κυρίως χώρους. Είναι έθιμα σε ρευστή μορφή. Σε κάποιες περιπτώσεις η μόδα είναι ελαστική, σε άλλες δίνει αυστηρές προδιαγραφές[2].

Η εξέλιξη της κοσμοπολίτικης κοινωνίας στηρίζει τη μόδα. Η ανάπτυξη της μανιφατούρας, της βιομηχανίας, η μεγάλη παραγωγή προϊόντων, και ένα μεγάλο δίκτυο εμπορίου είναι τα βασικά στοιχεία αυτής της κοινωνικής οργάνωσης που ο Tönnies ονομάζει Gesellschaft δηλ. κοινωνία. Αυτή η μορφή οργάνωσης ενθαρρύνει τη μόδα και είναι η βάση της ανάπτυξης του καπιταλισμού και στη συνέχεια του σύγχρονου κράτους[3]. Σε αυτή την κοινωνία τα έθιμα, η παράδοση, βρίσκονται σε σύγκρουση με τη μόδα, τις συνεχείς αλλαγές, τον επιφανειακό τρόπο ύπαρξης[4].

Το κράτος ως η κεντρική οργάνωση αυτής της κοινωνίας αυτοπαρουσιάζεται ως μια ενιαία βούληση. Τη βούληση αυτή διευθετεί και εξισορροπεί το κράτος με νόμους και κανονισμούς αστυνομικού τύπου. Η οργάνωσή του τίθεται ανοιχτά ενάντια στην παράδοση. (βλέπε την περίπτωση της μαντίλας στην Γαλλία[5]). Ο κρατικός μηχανισμός επικαλείται τη λογική και όχι το έθιμο[6].

Το μόρφωμα του θεσμού που αντιπροσωπεύει το κράτος συνδέεται με την επιστημονική έννοια της προόδου.

Σύμφωνα με τον Tönnies για το κράτος οι σχέσεις των ανθρώπων διευθετούνται όχι από ηθικές αρχές αλλά από νόμους και διακανονισμούς που

[2] ό.π. σελ. 80
[3] ό.π. σελ. 86
[4] ό.π. σελ.87
[5] Εννοώ την απαγόρευση στις μαθήτριες από μουσουλμανικές χώρες που πήγαιναν στα γαλλικά σχολεία φορώντας την παραδοσιακή μαντίλα.
[6] ό.π. σελ. 88

μοιάζουν με αυτούς του εμπορίου. Οι νόμοι μετατρέπουν τον συμπολίτη σε πιθανό εχθρό ή *αντίδικο (Prozessgegner)*[7].

Η έμφαση στην ελεύθερη βούληση και συνεπώς στην ελευθερία του ατόμου, σύμφωνα με τον Tönnies, αναγκάζει τον πολίτη να παίρνει τις αποφάσεις του μέσω μηχανισμών εκλογίκευσης που έχουν σχέση με το συνειδητό μέρος ατόμου. Ενώ το έθιμο διαμορφώνει τις βαθύτερες συνήθειες και συνεισφέρει περισσότερο στην ελευθερία του ατόμου.

Η διδασκαλία των επιστημονικών εγχειριδίων απευθύνεται σε αυτόν τον μηχανισμό εκλογίκευσης και στη δημιουργία συνηθειών, καναλιών μέσα στα οποία θα ρέουν οι τρόποι σκέψης και άρα θα προσδιορίζουν τις επιθυμίες ή μάλλον –μέσω του μηχανισμού της λογικής – θα αναγνωρίζουν ως δικά τους τα σχέδια και τις εξελίξεις που προβάλλονται από τη πρόοδο του κλάδου.

Αυτό σημαίνει άσκηση σε μια έστω και εικονική διαδικασία ανακάλυψης. Η διαδικασία αυτή συνδέεται και με τη λειτουργία μιας κοινωνίας που δε στηρίζεται στα ήθη και έθιμα αλλά στη λογική του κράτους.

Το κράτος θέλει πολίτες οι οποίοι θα υπακούουν στους νόμους μέσω της λογικής. Οι πολίτες είναι μονάδες, απομονωμένοι, προστατευμένοι με τη λογική των νόμων.

Ο πολίτης γίνεται 'καλός' όταν μπορεί να λειτουργήσει με την λογική που διέπει τους νόμους. Ενώ τα έθιμα συνδέουν το άτομο με την ιστορία ενός συνόλου. (Η αντίθεση Αντιγόνης με τον Κρέοντα.)

Η ανάλυση του Tönnies μας βοηθά να δούμε τη σχέση αυτών των δύο ιστορικών φαινομένων που εμφανίζονται συγχρόνως στην ιστορία: το κράτος και ο επιστημονικός τρόπος σκέψης.

Η επιστημονική μέθοδος γίνεται η άσκηση με την οποία το άτομο μετατρέπεται σε πολίτη που ανταποκρίνεται στις ανάγκες του κράτους. Για παράδειγμα, το Novum Organum του Βάκωνα διδάσκει έναν τρόπο μελέτης της φύσης και άρα έναν τρόπο συμπεριφοράς. Γράφτηκε ως εγχειρίδιο, ως 'όργανον' μιας νέας λογικής. Επίσης, το γνωστό έργο του Νεύτωνα Principia λειτούργησε ως ένα παράδειγμα, δηλαδή ως εγχειρίδιο για τον τρόπο λειτουργίας της επιστημονικής μεθόδου στο σύνολό της.

Ως εγχειρίδια μπορούν να λειτουργήσουν και ένα σύνολο δραστηριοτήτων και γνώσης που διαμορφώνουν έναν κύκλο μαθητείας. Το εγχειρίδιο διαμορφώνει μια εθιμοτυπική διαδρομή σε έναν επιστημονικό κλάδο με στόχο

[7] Ό.π. σελ. 89-90

να ασκήσει τον μαθητευόμενο στο πώς να χειρίζεται κανείς τέτοια θέματα. Ο μαθητευόμενος μαθαίνει να αναγνωρίζει την διαδρομή.

Πολλοί μαθητές γυμνασίου έχουν πρόβλημα να ορίσουν τι είναι επιστημονικό. Όμως, όταν τους ζήτησα να μου φέρουν άρθρα που θεωρούσαν επιστημονικά έφεραν θέματα που δεν τους ήταν γνωστά, αλλά αναγνώριζαν τη διαδικασία ως επιστημονική.

Το εγχειρίδιο παρουσιάζει μια εθιμοτυπική διαδρομή σε έναν κλάδο της γνώσης με στόχο να ασκήσει τον μαθητευόμενο στο να αναγνωρίζει τη διαδρομή και κατά δεύτερο λόγο να χειρίζεται τα ενδεικνυόμενα θέματα με τον δέοντα τρόπο. Το εγχειρίδιο αναλαμβάνει να χτίζει συνήθειες οι οποίες βοηθούν τον αναγνώστη – μαθητευόμενο να αναγνωρίζει τις νέες διαδρομές, τις εξελίξεις του κλάδου. Η ανακάλυψη είναι κάτι μεν νέο, αλλά θα πρέπει να έχει και αναγνωρίσιμα χαρακτηριστικά τα οποία ο μαθητευόμενος στο τέλος της διαδρομής του θα μπορεί να αναγνωρίζει και άρα να αποδεχτεί το «νέο», δηλ. την ανακάλυψη. Να μπορεί δηλ. να αναγιγνώσκει στα φαινόμενα μια ορισμένη σειρά, μια ορισμένη λογική. Ο μαθητευόμενος ασκείται στο να μπορεί να αναγνωρίζει τους νόμους ως νόμους, δηλαδή ως κομβικά σημεία σε μια αλληλουχία συμπερασμάτων. Γιατί οι νέες ανακαλύψεις χρειάζονται αποδέκτες.

Το ρόλο του εγχειριδίου μπορεί να παίξει και μια σειρά πειραμάτων. Αυτό σημαίνει περιγραφή των εργαλείων, της εκτέλεσης και των αποτελεσμάτων. Αυτή είναι η περίπτωση του στατικού ηλεκτρισμού στο δεύτερο μισό του 18ου αιώνα ως την εποχή του Maxwell. Στην ιστορία της φυσικής βρίσκουμε ένα παράδειγμα ενός εγχειριδίου του οποίου η εισαγωγή δίνει μια αναλυτική περιγραφή όχι μόνο των στόχων που αφορούν στον κλάδο, αλλά και την γενικότερη φιλοσοφία του επιστημονικού εγχειρήματος. Είναι το History of Electricity του Priestley που πρωτοεκδόθηκε το 1767[8]. Ο συγγραφέας είναι ένας λόγιος, λάτρης του διαφωτισμού, και αργότερα ένας ένθερμος υποστηρικτής της γαλλικής επανάστασης. Γνωρίζει εβραϊκά, αρχαία ελληνικά, λατινικά, γαλλικά. Είναι δάσκαλος, όμως ασχολείται και με τον ηλεκτρισμό.

Ο ηλεκτρισμός προσφέρεται, γιατί δεν απαιτεί προηγούμενες γνώσεις και κυρίως δεν χρειάζεται μαθηματικά, όπως η Νευτώνεια φυσική. Δίνει την αίσθηση στους συμμετέχοντες ότι είναι μέλη της μεγάλης εκστρατείας για την κατάκτηση της φύσης από τη λογική.

[8] Οι αναφορές μου είναι από την Τρίτη έκδοση του 1777. Priestley, Joseph: The History and Present State of Electricity With Original Experiments. In: The Sources of Science, No18. Johnson Reprint Corporation New York and London, 1966

Ο ηλεκτρισμός παρουσιάζεται ως μια συλλογή πειραματικών δεδομένων τα οποία βέβαια δίνονται με τις αντίστοιχες τεχνικές περιγραφές. Οι θεωρητικές απόψεις είναι δευτερεύουσες. Λειτουργούν, όπως λέει στην εισαγωγή του ο ίδιος Priestley ως αφορμή για την παραγωγή δεδομένων. Είναι δηλ. υποθέσεις και δεν έχουν σταθεροποιηθεί σε νόμους. Ο νόμος του Coulomb διατυπώθηκε το 1785. Όμως την εποχή του Priestley αυτό το σύνολο γνώσης έχει πάρει μια μορφή. Διαφαίνονται κάποιες θεωρητικές εξελίξεις που αφορούν την αγωγιμότητα υλικών, τα χαρακτηριστικά του ηλεκτρισμού περιγράφονται μέσω πειραμάτων που προσδιορίζουν τον τρόπο παραγωγής του, χωρίς όμως να ορίζεται η φύση του.

Ο Priestley συγκεντρώνει αυτή τη γνώση σ' ένα βιβλίο το οποίο αποκαλεί History of Electricity. Το αποκαλεί Ιστορία, γιατί είναι μια περίληψη των πιο σημαντικών γεγονότων που αφορούν στο θέμα. Σημαντικά γεγονότα για αυτόν σημαίνουν όλα όσα έχουν βοηθήσει στην εξέλιξη του κλάδου. Το βιβλίο παίζει το ρόλο του εγχειριδίου στον τομέα του ηλεκτρισμού μέχρι την ανακάλυψη του ρεύματος. Μέχρι τα μέσα του 19ου αιώνα βρίσκουμε αναφορές στη Ιστορία του Ηλεκτρισμού του Priestley.

Ο Priestley γράφει μια εκτενή εισαγωγή στην οποία ο συγγραφέας εξηγεί τους στόχους και τη φιλοσοφία που πρέπει να συνοδεύει την ενασχόληση όχι μόνο με τον ηλεκτρισμό, αλλά και με την επιστήμη την οποία αποκαλεί Natural History.

Είναι ξεκάθαρο ότι ο συγγραφέας απευθύνεται στους πολίτες που έχουν το χρόνο και την οικονομική άνεση να επενδύσουν στα περάματα του ηλεκτρισμού. Αυτούς τους gentlemen of independent means (τους οικονομικά ανεξάρτητους) παροτρύνει ο συγγραφέας να μην ασχοληθούν με την ιστορία του πολιτισμού (civil history) – μια συνήθη ενασχόληση για την τάξη αυτή - αλλά με τα πειράματα του ηλεκτρισμού.

Το πρώτο του επιχείρημα είναι ότι ο ηλεκτρισμός είναι ένας νέος κλάδος, δεν προαπαιτεί μαθηματικές γνώσεις και έχει πολλές ανακαλύψεις ακόμα να γίνουν. Οι συσκευές είναι προσιτές για την τάξη τους και πολύ καλύτερες από την αγορά ενός βιβλίου. Το βιβλίο το διαβάζεις μια φορά και το αφήνεις, ενώ τα πειράματα μπορείς να τα επαναλάβεις, να τα μοιρασθείς με φίλους. Επίσης τα πειράματα καλλιεργούν την αίσθηση της συμμετοχής σε κάτι μεγαλειώδες όπως η ανακάλυψη των νόμων της φύσης. Έτσι ο μοναχικός πολίτης που εκτελεί τα πειράματα στο ιδιωτικό του εργαστήριο, αισθάνεται συνεργάτης στο μεγάλο εγχείρημα της προόδου.

Η αντιπαράθεση της Natural History με την ιστορία του πολιτισμού (Civil History) είναι πολύ σημαντική. Η Ιστορία του Πολιτισμού, γράφει ο Πρ, καλλιεργεί τα πάθη, γιατί επικεντρώνεται στις αδυναμίες των ανθρώπων σε

ακραίο βαθμό. Συνεπώς καλλιεργεί λάθος ήθη. Από την άλλη, η Ιστορία της Φύσης δεν αναστατώνει! Με την ανακάλυψη νόμων και άρα αρμονικών λειτουργιών ασκείται ο νους του ανθρώπου στο να βλέπει το μεγαλείο της φύσης. Είναι ένα μεγαλείο ήρεμο, ρυθμιζόμενο από νόμους που ασκούν το άτομο στο να ζει σε μια γαλήνη μακριά από τα πάθη. Η ευχαρίστηση που αποκομίζει ο μαθητευόμενος από την επιστήμη είναι ίδια με αυτή που παίρνει ατενίζοντας το μεγαλείο του θεϊκού.

Η δυνατότητα των συνδυασμών πολλαπλασιάζονται, γράφει ο Priestley, με την άσκηση στην επιστημονική μέθοδο. Η συνεχής πρόοδος και βελτίωση στο χρόνο (χωρίς πισωγυρίσματα) στηρίζει αυτή την αίσθηση της συνεχούς, απεριόριστης εξέλιξης στο μέλλον. Μια προοπτική πράγματι χωρίς όρια και άρα μεγαλειώδης.

"The power of association increases with the exercise in scientific subjects.

Pleasure from science, bears a considerable resemblance to that of the sublime, … for an object in which we see a perpetual progress and improvement is, as it were, continually rising in its magnitude; and moreover, when we see an actual increase, in a long period of time past, we cannot help forming an idea of an unlimited increase in futurity; which is a prospect really boundless, an sublime"[9].

Ο Priestley δίνει μια πολύ καλή περιγραφή της προόδου και της ιδεολογίας που τη συνόδευε τότε. Η πρόοδος παρουσιάζεται εδώ ως μια διαδικασία εξιδανίκευσης και άρα εξευγενισμού των συμμετεχόντων.

Η Ιστορία του πολιτισμού ασκεί τα πάθη μας με το να ασκεί τη φαντασία μας σε σκηνές μεγάλων δραμάτων. Παρακολουθεί την άνοδο αυτοκρατοριών η οποία αναπόφευκτα καταλήγει στην πτώση. Ο καλός πολίτης που μελετά την ιστορία δεν μπορεί παρά να σοκαρισθεί από τη μιζέρια και τις κακίες που προσβάλλουν την αίσθηση αρετής που έχει ο ενάρετος πολίτης[10].

---

[9] Ό.π. σελ. ΙΙ. Εισαγωγή.

[10] Ό.π. σελ. ΙΙΙ. Εισαγωγή: Η πολιτική Ιστορία ασχολείται και προβάλει τα πολύ δυνατά πάθη, πολλές αλλαγές, πολλά περιστατικά τέτοια "into which every man can easily and perfectly enter, and with such incidents, respecting happiness and misery, as we cannot help feeling, would alarm and affect us in a very sensible manner; and therefore, we are at present alarmed and affected by them to a considerable degree. Hence the pleasure we receive from civil history arises, chiefly from the exercise it affords our passions. The imagination is only entertained with scenes which occasionally start up like interludes, or episodes, in the great drama, to which we are principally attentive. We are presented, indeed with the prospect of gradual improvement during the rise or great empires; but, as we read on, we are obliged to contemplate the disagreeable reverse. (….) Besides, if a man has any sentiment of virtue and benevolence, he cannot help being shocked with

Η περιγραφή της επίδρασης που έχει η Ιστορία του Πολιτισμού αναδεικνύει το κύριο χαρακτηριστικό του ιδανικού πολίτη κατά τον Priestley είναι η απόσταση από τα πάθη. Άρα υπόσχεται στον πολίτη που θα ασκηθεί μέσω της ενασχόλησης με τα πειράματα του ηλεκτρισμού με την επιστημονική μέθοδο, προστασία από τα πάθη και την ταραχή των πολιτικών γεγονότων. Το άτομο του Priestley τρέφεται από μια αίσθηση συνεχούς αποκάλυψης της τελειότητας των νόμων της φύσης, δηλαδή της προόδου. Η αίσθηση αυτής της συμμετοχής σε αυτόν τον τύπο της προόδου έχει αντικαταστήσει την αίσθηση της συμμετοχής στα κοινά. Το κράτος, μάλλον ο κρατικός μηχανισμός φροντίζει να κρατά υπό έλεγχο τα πάθη και άρα ο πολίτης μένει μακριά από την ταραχή των πολιτικών γεγονότων.

Ο Priestley τα γράφει αυτά το 1767, περίπου 80 χρόνια μετά τα Principia του Νεύτωνα. το πρόγραμμα της πειραματικής μεθόδου δη. Της επιστημονικής μεθόδου, έχει κερδίσει τη μάχη. Στην Αγγλία μετά τον εμφύλιο του 1642, εμφανίζεται το πρώτο κοινοβούλιο στην Ευρώπη. Το κράτος έχει αρχίσει να αποκτά τα χαρακτηριστικά που το κάνουν αναγνωρίσιμο και σήμερα.

Το πεδίο μάχης για το άτομο είναι η συμμετοχή στην πρόοδο, είτε αυτή είναι η εμπορική, δηλ. οικονομική επιτυχία ή πιο αφηρημένη αυτή της επιστήμης.

Όλα τα άλλα θα τα φροντίσουν οι κρατικοί μηχανισμοί που αρχίζουν να διαμορφώνονται. Γιαυτό και ο Priestley επιχειρηματολογεί με επιμονή υπέρ της ενασχόλησης με τη Φυσική Ιστορία. Η Φυσική Ιστορία παρέχει ποικιλία ενώ συγχρόνως είναι ομοιόμορφη –λόγω μεθόδου. Οπότε, λέει ο Πρ, δεν προκαλεί την έντονη αλλαγή των συναισθημάτων ενώ διασκεδάζει και ευχαριστεί με τη συνεχή πρόοδο προς την τελειότητα. Οι συνεχείς ανακαλύψεις θυμίζουν συνεχώς στον συμμετέχοντα το μεγαλείο της Φύσης. Αυτό τον κάνει να αισθάνεται και αυτός μέτοχος αυτού του μεγαλείου.

“Natural History exhibits a boundless variety of scenes, and yet infinitely analogous to one another. *A naturalist has, consequently, all the pleasure which the contemplation of uniformity and variety can give the mind; and this is one of the most copious sources of our intellectual pleasures. He is likewise entertained with a prospect of gradual improvement, while he sees every object in nature rising by due degrees to its maturity and perfection. And while new plants, new animals, and new fossils are perpetually pouring in upon him, the most pleasing views of the unbounded*

---

a view of the vices and miseries of mankind; which, though they be not all, are certainly the most glaring and striking objects in the history of human affairs.

power, wisdom, and goodness of god are constantly present to his mind. But he has no direct view of human sentiments and human actions; which, by means of their endless associations, greatly heighten and improve all the pleasures of taste.[11]

Το βιβλίο γράφεται σε μια εποχή που ο ηλεκτρισμός έχει φθάσει σε ένα σημείο να έχει ένα σύνολο πειραμάτων που περιέγραφαν τη φύση του και τις ιδιότητές του χωρίς ακόμα να υπάρχει μια ενιαία θεωρία όσον αφορά τη φύση του. Ο Coulomb αποδεικνύει πειραματικά τον γνωστό με το όνομά του νόμο το 1785. Ο Priestley έχει επίγνωση αυτής της κατάστασης γι αυτό γράφει:

I cannot help thinking myself to have been peculiarly fortunate, in undertaking the history of electricity, at the most proper time for writing it, when the materials were neither too few, nor too many to make a history; and when they were so scattered, as to make the undertaking highly desirable, and the work peculiarly useful to Englishmen. (εισαγωγή σελ. viii) Και συνεχίζει στη σελ. xi: I likewise think myself exceedingly happy in my subject itself. Few branches of Natural Philosophy would, I think, make so good a subject for a history. Few can boast such a nr of discoveries, disposed of so fine a series, all compressed in so short a space of time, and all so recent, the principal actors in the scene being still living[12].

Ο ηλεκτρισμός είναι ένας κλάδος που αναπτύσσεται γρήγορα και είναι ένα δείγμα του τρόπου λειτουργίας της πειραματικής μεθόδου ή της μεθόδου του Βάκωνα. Η λέξη Ιστορία εδώ σημαίνει μια περιγραφή στο τι έχει γίνει στον ηλεκτρισμό και το τι πρόκειται να γίνει. Ιστορία, εξηγεί ο Priestley, δεν σημαίνει ότι θα περιγράψει όλες τις αποτυχίες και σκληρές διαμάχες ανάμεσα στους συμμετέχοντες για κάποιες απόψεις. Όχι γιατί δεν έχει το χώρο, αλλά γιατί ο χώρος που θέλει να δημιουργήσει δεν πρέπει να έχει διαμάχες που έχουν ως αρχή τον εγωισμό των συμμετεχόντων. Η Ιστορία παρουσιάζει μια αρμονική εικόνα αυτού του εγχειρήματος που εμείς ονομάζουμε επιστήμη και ο ίδιος το αναφέρει ως Πειραματική Φιλοσοφία. Ο συγγραφέας ενδιαφέρεται να μεταφέρει μαζί με τα πειράματα και ένα ήθος.

«all the disputes which have no way contributed to the discovery of truth, I would gladly cosign to eternal oblivion»[13]. Ο φιλόσοφος της πειραματικής φιλοσοφίας πρέπει να είναι ένας καλύτερος άνθρωπος.

---

[11] Ό.π. εισαγωγή σελ. III.
[12] Ό.π. σελ. viii, xi.
[13] Ό.π. σελ. Xi:

Το βιβλίο δίνει λεπτομερή περιγραφή των οργάνων και του τρόπου εκτέλεσης των πειραμάτων. Βασικά το βιβλίο παίρνει τη μορφή ενός εικονικού εργαστηρίου του ηλεκτρισμού στο οποίο παρουσιάζονται όλα τα πειράματα τα οποία μεταφέρουν κάποια σημαντικά χαρακτηριστικά που αφορούν στην φύση του ηλεκτρισμού και συζητά τις απόψεις που τις συνοδεύουν. Τα πειράματα του ηλεκτρισμού είχαν μπει στα σαλόνια της εποχής και κάποιοι έβγαζαν λεφτά επιδεικνύοντας κάποια από αυτά σε πανηγύρια ή σε δημόσιες διαλέξεις. Άρα οι αναγνώστες του Priestley είχαν κάποια εξοικείωση με το θέμα.

Ο Priestley όμως τους δίνει επιστημονική υπόσταση περιγράφοντας το τι έχει γίνει και τι μπορεί να γίνει. Το εικονικό εργαστήριο που περιγράφει δεν είναι ένας κλειστός χώρος. Είναι σε συνεχή εξέλιξη. Χρειάζεται συνεργάτες. Και οι συνεργάτες θα πρέπει να έρθουν στο χώρο με την κατάλληλη συμπεριφορά, το κατάλληλο ήθος. Γιαυτό το λόγο δεν εμφανίζει τις στείρες διαφωνίες αλλά μόνο αυτές που οδήγησαν στην αλήθεια. Επιμένει πως η ενασχόληση με τη Φυσική Ιστορία (όπως αποκαλεί την επιστημονική μέθοδο) διδάσκει στον συμμετέχοντα τη ομορφιά και γαλήνη. Ο αναγνώστης – μαθητευόμενος καθοδηγείται όχι μόνο στον τρόπο λειτουργίας αυτού του εργαστηρίου αλλά και σε έναν τρόπο ζωής τον οποίο ο συγγραφέας επιμένει να περιγράφει στην εισαγωγή του. Η σύγκριση με την Ιστορία των Πολιτισμών έχει ως στόχο να αναδείξει τις χάρες αυτού του νέου τρόπου μελέτης της φύσης που ο συγγραφέας συνδέει και με έναν τρόπο ζωής. Η Ιστορία του Πολιτισμού διδάσκει ωμά πάθη και δίνει μαθήματα αμφίβολης ηθικής. Ενώ ο μαθητής της Πειραματικής Φιλοσοφίας ασκείται στο πώς να συνεισφέρει στο υψηλό ιδεώδες: την αποκάλυψη των νόμων της φύσης.

Γενικά τα πειράματα που συνηθίζονταν τότε στον ηλεκτρισμό αποτελούσαν ένα σώμα γνώσης και άρα ένα ιεροτελεστικό με το οποίο εισάγονταν οι απλοί άνθρωποι στο χώρο της πειραματικής επιστήμης. Ήταν ένα μέσο προπαγάνδας της Πειραματικής Μεθόδου. Ο Priestley βέβαια βλέπει πέρα από την απλή εισαγωγή στην πειραματική επιστήμη. Ο διανοούμενος Priestley βλέπει την άσκηση στο πείραμα ως άσκηση συνηθειών οι οποίες καλλιεργούν τα χρηστά ήθη και συνεπώς προετοιμάζει το άτομο για τη ζωή ενός καλού πολίτη.

Και πάλι στην εισαγωγής γράφει:

“I find impossible to write a preface to this work, without discovering a little of the enthusiasm which I have contracted from an attention to it, by expressing my wishes, *that more persons, of a studious and retired life, would admit this part of experimental philosophy into their studies. They would find it agreeably to diversify a course of study, by mixing*

something of action with speculation, and giving some employment to the hands and arms, as well as to the head. Electrical experiments are, of all others, the cleanest, and the most elegant, that the compass of philosophy exhibits. They are performed with the least trouble, there is an amazing variety in them, they furnish the most pleasing and surprising appearances for the entertainment of one's friends and the expense of instruments may well be supplied, by a proportionable deduction which are generally read and laid aside, without yielding half the entertainment»[14].

Το βιβλίο στοχεύει σε ένα κοινό ενηλίκων από τα μεσαία στρώματα οι οποίοι είχαν τον χρόνο και τα λεφτά να ασχοληθούν με τον ηλεκτρισμό. Ήταν το κοινό των επιστημονικών διαλέξεων. Γιαυτό κι ο Priestley τονίζει πως η ενασχόληση με τα πειράματα είναι εν μέρει χειρονακτική χωρίς να είναι βρώμικη και επιπλέον προσφέρει μια ποικιλία στο πνεύμα τέτοια που δεν σοκάρει τα ήθη της αστικής τάξης, όπως κάνει η ιστορία του πολιτισμού που επιμένει να εξιστορεί πάθη. Το αντίθετο. Ασκεί το άτομο στη συνεργασία. Γιατί μπορεί το πείραμα να γίνεται σε ιδιωτικό χώρο όμως γίνεται για να κατατεθεί στο μεγάλο εργαστήριο της προόδου όπου όλοι καταθέτουν τα ευρήματά τους.

Είναι ξεκάθαρο πως ο αναγνώστης – μαθητευόμενος του Priestley είναι the gentleman of independent means. Η πειραματική Φιλοσοφία από την αρχή της εμφάνισής της στηρίζεται σε αυτό το κοινό. Την εποχή του διαφωτισμού είναι οι πιο ένθερμοι οπαδοί της.

Gladly would I indulge the hope, that we shall soon see these motives operating in a more extensive manner than they have hitherto done; that by the illustrious example of a few, a taste for natural science will be exited in many, in whom it will operate the most effectually to the advantage of science and of the world; and that all kinds of philosophical inquiries will, henceforward, be conducted with more spirit, and with more success than ever[15].

Τα επιχειρήματα του Priestley παίρνουν υπόψη τους τα ιδανικά αυτής της τάξης:

Υπόσχεται πως όσοι συμμετέχουν στην Πειραματική Φιλοσοφία καλλιεργούν την αίσθηση του θείου, γιατί τα πειράματα συνεισφέρουν στην αποκάλυψη των νόμων της φύσης η οποία είναι θεϊκή. Του προσφέρει μια αί-

[14] Ό.π. σελ. xii
[15] Ό.π. σελ. Xxii:

σθηση του ανήκειν γιατί εργάζεται πάντα έχοντας υπόψη του το έργο των άλλων, της μεγάλης αδελφότητας που εργάζονται για την πρόοδο.

Όμως εκτός από την καλλιέργεια των εξευγενισμένων αισθημάτων, ο Priestley υπόσχεται στον προσήλυτο πως θα μάθει να ξεχωρίζει τη θεωρία από τα δεδομένα. (facts). Στο τμήμα του βιβλίου που παρουσιάζει μια σειρά από προτάσεις για παραπέρα έρευνα γράφει πως μέσω των πειραμάτων θέλει οι αναγνώστες να μάθουν να ξεχωρίζουν τα δεδομένα από τη θεωρία: «…I propose to comprehend only *Known facts*; *that my younger readers may carefully distinguish between fact and theory; things which are too often confounded*»[16].

Σε δύο επίπεδα κινούνται οι 'υποσχέσεις' του Priestley μέσω της διδασκαλίας της Ιστορίας του Ηλεκτρισμού: αυτές που συνδέουν το άτομο με κάτι ευγενές και αφηρημένο όπως το θείο ή περίπου το θείο και δεύτερο αλλά πολύ σημαντικό: την άσκηση στο διαχωρισμό δεδομένων από θεωρίες. Ο ηλεκτρισμός στην εποχή του Priestley παρουσιάζεται μόνο με πειραματικά δεδομένα τα οποία βέβαια υπόγεια διαμόρφωναν μια θεωρία. Γιατί σε όλες τις επιστήμες, διατείνεται ο συγγραφέας. προχωρούμε από τις λεπτομέρειες στο γενικό. Είναι μια διαδικασία ευχάριστη για το νου, λέει ο Priestley, αλλά φαίνεται να είναι και η διαδικασία της φύσης. Γιαυτό ο συγγραφέας δίνει στην αρχή τις βασικές αρχές του ηλεκτρισμού περιγράφοντας τα πειράματα και μετά τις θεωρητικές προτάσεις:

In all science, we first ascend from particular to general. For nature exhibits nothing but particulars; and all general propositions, as well as general terms, are artificial things, being contrived for the ease of our conception and memory; in order to comprehend things clearly, and to comprise as much knowledge as possible in the smallest compass. It is no wonder then that we take pleasure in this process. Besides, we actually see in nature a vast variety of effects proceeding from the same general principles, operating in different circumstances; so that judging from appearances, that nature is every where uniform with itself, we are led, by analogy, to expect the same in all cases and think it an argument in favor of any system, if it exhibits a variety of effects springing from a few causes. For such variety in effects, and such simplicity in causes, we generally see in nature[17].

Άρα το βιβλίο είναι μια άσκηση σε μια διαδικασία από τα συγκεκριμένα στα γενικά και μια άσκηση στην ανακάλυψη μιας γενικής αιτίας, κεντρι-

[16] Ό.π. σελ. 2 μέρος ΙΙ.
[17] Ό.π. σελ. 2 μέρος ΙΙ.

κής, η οποία εδώ παρουσιάζεται ως μια φυσική διαδικασία. Φυσική ως αναφορά τον τρόπο λειτουργίας του εγκεφάλου και ως αναφορά τον τρόπο λειτουργίας της φύσης. Για τον Priestley, ο εγκέφαλος δουλεύει όπως και η φύση: από τη λεπτομέρεια στο γενικό (δηλ στο αίτιο). Η λειτουργία του εγκεφάλου, σύμφωνα με τον Priestley, ανακλά τη λειτουργία της φύσης. Η εξάσκηση στην πειραματική μέθοδο ενισχύει μια φυσική διαδικασία στον άνθρωπο, που υπονοείται ότι η προηγούμενη ανάπτυξή του η πολιτισμική είχε αγνοήσει. Η μεγάλη ποικιλία φυσικών φαινομένων προέρχονται από μια χούφτα αιτίες.

Ένα άλλο κομμάτι της διαδικασίας αυτής είναι μετά την ανακάλυψη των αιτιών η φιλοσοφία (δηλ. η επιστήμη) να γυρίζει πίσω για να εξηγήσει με τη βοήθεια των ανακαλυφθέντων νόμων τα υπάρχοντα φαινόμενα και να αποκαλύψει νέα. (to trace all its effects, and to predict other similar appearances from similar precious situations of things. By this means, *the true philosopher*, (επιστήμονας) knowing what will be the result of putting every thing, which the present system exhibits, into every variety *of circumstances, is master of all the powers of nature, and can apply them to all the useful purposes of life.* Thus does knowledge, as Bacon observes, become power; and thus is the philosopher capable of providing, in a more effectual manner, both for his own happiness and for that of others; and thereby of approving himself a good citizen, and an useful member of society.

Η μέθοδος που οδηγεί από τα συγκεκριμένα στα γενικά (δηλ. νόμους) ευχαριστεί το άτομο, επιχειρηματολογεί ο Priestley, γιατί η διαδικασία αυτή είναι ενδογενής. Το μυαλό του ανθρώπου από φυσικού του λειτουργεί με αυτόν τον τρόπο. Η Πειραματική Φιλοσοφία ενισχύει μια φυσική λειτουργία. Με άλλα λόγια ο Διαφωτισμός παρουσιάζεται ως προϊόν της φύσης. Ο άνθρωπος λειτουργεί όπως και η φύση στην οποία μια ποικιλία φαινομένων καταλήγουν να συνδέονται με μια χούφτα αίτια (νόμοι). "For such variety in effects, and such simplicity in causes, we generally see in nature"[18].

Αυτό που αποκαλεί ο Βάκωνας εξουσία ή έλεγχο της φύσης (power over nature) παρουσιάζεται ως μια διαδικασία απόρροια μιας άλλης: της φυσικής δομής των νόμων της φύσης. Μπαίνοντας στον μηχανισμό ο άνθρωπος – φιλόσοφος εισέρχεται και στο μηχανισμό του ελέγχου, της εξουσίας πάνω στη φύση. «και έτσι η γνώση μετατρέπεται σε εξουσία». Η είσοδος στον μηχανισμό αυτόν καθιστά τον επιστήμονα–φιλόσοφο ικανό να προσφέρει ευτυχία στον εαυτό του και στο σύνολο. Και με αυτόν τον τρόπο να αποδείξει

[18] Ό.π. σελ. 11-12.

ότι είναι καλός πολίτης, και χρήσιμο μέλος της κοινωνίας.[19] Τι είναι αυτό που μετατρέπει το άτομο σε καλό πολίτη και χρήσιμο μέλος της κοινωνίας; Η κατοχή των μηχανισμών της λειτουργίας της φύσης, που σημαίνει (για τη λογική του Priestley) σεβασμό και χρήση του δικού του μηχανισμού λειτουργίας του εγκεφάλου του, τον οποίο ασκεί στη μελέτη της φύσης, και μετά εφαρμόζει στην παραγωγή τεχνολογικών μηχανισμών. Αυτό γίνεται αυτοσκοπός και κοινωνική υποχρέωση. Και κάτι πολύ σημαντικό: ακολουθώντας αυτή τη διαδικασία ο ασκούμενος γίνεται ένας καλός πολίτης.

Γιατί γίνεται ένας καλός πολίτης; Μα γιατί έχει ενσωματώσει τη διαδικασία της ανακάλυψης των νόμων και αυτό τον έχει ασκήσει στον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί το κράτος. Διαμορφώνει συνήθειες σκέψης αντίστοιχες με αυτές που απαιτεί το κράτος από το άτομο. Με τη βοήθεια του επιστημονικού λόγου, με την άσκηση στην επιστημονική μεθοδολογία, αναπτύσσει μέσα του δομές σκέψης, δομές αιτιολόγησης των ενεργειών του, παρόμοιες με αυτές που διέπουν τους μηχανισμούς του κράτους. Τα πάθη μένουν απ' έξω. Το κράτος φροντίζει για τον έλεγχο των παθών. Και έτσι εξηγείται το μένος του διαφωτισμού ενάντια στο έθιμο. Ο Tönnies αναφέρει το ρητό που αποδίδει στον πατέρα του διαφωτισμού χωρίς να τον ονομάζει (εννοεί τον Καντ ή τον Βολτέρο;): «Το έθιμο είναι η λογική των ηλιθίων»[20].

Και επειδή το βιβλίο του Priestley είναι εικόνα του τρόπου λειτουργίας της Πειραματικής Φιλοσοφίας και άρα χωρίς πραγματικό τέλος, ο συγγραφέας καλεί τους αναγνώστες του να τον ενημερώσουν για τυχόν παραλήψεις ή για νέα πειράματα για την επόμενη έκδοση. Το εγχειρίδιο, η εικονική μαθητεία στην επιστήμη, έχει ως στόχο να κάνει το άτομο ικανό κατά κύριο λόγο να αναγνωρίζει τη διαδικασία με την οποία αποκαλύπτονται τα κύρια αίτια (δηλ. οι νόμοι) και κατά δεύτερο να τον καταστήσει ικανό για την ανακάλυψη. Η ανακάλυψη, λέει ο Priestley, είναι μια διαδικασία που ανήκει στον μηχανισμό της Πειραματικής Φιλοσοφίας και όχι στο άτομο. Το άτομο ασκείται κυρίως στην παραγωγή δεδομένων. Η έμφαση είναι στους μηχανισμούς παραγωγής.

Το εγχειρίδιο "History of Electricity" είναι συνειδητά γραμμένο ως ένα κομμάτι του βιβλίου της φύσης. Ένα μέρος αυτών των νόμων που αφορούν τον ηλεκτρισμό έχουν ανακαλυφθεί ή αποκρυπτογραφηθεί, αν θυμηθούμε το ρητό του Γαλιλαίου, ότι η φύση είναι ένα βιβλίο.

---

[19] Ό.π. σελ.13

[20] Το αναφέρει στα γαλλικά: "La coutume est la raison des sots", so sprach der Koenig der Aufklärung sein Verdikt. Dem entspricht im allgemeinen die Haltung der Wissenschaft zur Sitte. Tönnies, σελ. 92

Για να επιστρέψουμε στον Toennies: το έθιμο καλλιεργεί συνήθειες που πιάνουν ένα μεγάλο φάσμα του συναισθηματικού κόσμου και κυριολεκτικά γίνονται μέρος της σωματικής λειτουργίας του ανθρώπου. Το έθιμο είναι, λέει ο Tönnies, κομμουνιστικό, ενώ το κράτος καλλιεργεί μονάδες, τα άτομα, τα οποία προστατεύει με τους νόμους. Ο Priestley τονίζει την απόσταση από τα πάθη, την απόσταση από την ιστορία, την καλλιέργεια του μηχανισμού της ανακάλυψης νόμων–αιτιών. Αυτοί μετατρέπουν το άτομο σε καλό πολίτη.

ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙ

Σχολικά βιβλία μαθηματικών: Κριτικές προσεγγίσεις και ερευνητικές διαπιστώσεις

ΤΑ ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑ ΝΕΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΗΣ Α΄ ΤΑΞΗΣ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

Ευάνθης Χατζηβασιλείου

Δάσκαλος

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μελέτη των πολιτισμικών στοιχείων που διέπουν τα νέα βιβλία των μαθηματικών της Α΄ τάξης του Δημ. Σχολείου, εντάσσεται στον ευρύτερο προβληματισμό που αναπτύχθηκε στην εκπαιδευτική κοινότητα, με την εισαγωγή των νέων εγχειριδίων για όλα τα μαθήματα του Δημοτικού Σχολείου και ειδικότερα για τα βιβλία των μαθηματικών. Πρόκειται για μια μεγάλη προσπάθεια ανανέωσης του συνόλου των βιβλίων της υποχρεωτικής εκπαίδευση, που συνοδεύεται, όπως ισχυρίζονται οι αρμόδιοι φορείς (ΠΙ, ΥΠΕΠΘ), από τον εκσυγχρονισμό του περιεχομένου σπουδών και την αλλαγή της φιλοσοφίας και των μεθόδων της διδακτικής προσέγγισης των μαθημάτων του Δημοτικού Σχολείου.
Σε σχέση με τις πολιτισμικές διαστάσεις των βιβλίων οι προθέσεις της πολιτείας περιγράφονται στις προτάσεις του ΠΙ και στις αποφάσεις του ΥΠΕΠΘ, «*… η διεθνοποίηση του πολιτισμού και η παγκοσμιοποίηση της οικονομίας σε συνδυασμό με την ελαχιστοποίηση των αποστάσεων συντελούν στη δημιουργία κοινωνικού περιβάλλοντος με πολιτισμική ποικιλία. Γι' αυτό πρέπει να ελαχιστοποιηθεί το πιθανό ενδεχόμενο της επιβολής αφενός ενός μονοδιάστατου πολιτισμικού μοντέλου και αφετέρου η ενίσχυση φαινομένων ξενοφοβίας και ρατσισμού*» ΔΕΠΠΣ (2001). Σε μια πλουραλιστική δημοκρατική κοινωνία η ένταξη και η συμμετοχή όλων των πολιτισμικών ομάδων σ' ένα ενιαίο σύνολο και σε μια διαρκή διαδικασία αλληλεπίδρασης των ομάδων αυτών είναι το ζητούμενο.

Σήμερα η πολυπολιτισμική παρουσιάζεται ως μια σύγχρονη παιδαγωγική τάση στην εκπαίδευση. Μέσα στις προθέσεις της είναι να αλλάξει την κατεύθυνση των παραδοσιακών αναλυτικών προγραμμάτων στα οποία δεν υπάρχει σύνδεση των μαθηματικών με την κουλτούρα των μαθητών. Οι Banks & Banks (1995) θεωρούν την πολυπολιτισμική εκπαίδευση ως το

πεδίο μελέτης που είναι σχεδιασμένο να αυξήσει την εκπαιδευτική ισότητα[1] για όλους τους μαθητές. Παράγοντες πολιτισμικής διαφοροποίησης στο πλαίσιο μιας τάξης μπορεί να είναι η γλώσσα, η κοινωνική και γεωγραφική προέλευση, το φύλο, η θρησκεία (Bourdieu & Passeron, 1996).

Ένα σύστημα εκπαίδευσης ίσων ευκαιριών πρέπει να δίνει τη δυνατότητα σε όλους τους μαθητές για πρόσβαση στη γνώση χωρίς αποκλεισμούς και μειονεκτήματα.

Από την οπτική αυτή τα σχολικά μαθηματικά δεν αποτελούν ιδεολογικά και κοινωνικά, ουδέτερο σύνολο γνώσεων αλλά σύνολο γνώσεων που συγκροτείται από επιλεγμένα περιεχόμενα της επιστημονικής πρακτικής των μαθηματικών, συνδυασμένα με ιδεολογικά προσανατολισμένα πλαίσια αναφοράς, που προκύπτουν από επιλεγμένες αντιστοιχίσεις τους σε επιλεγμένες καταστάσεις της πραγματικότητας (Χασάπης, 1996). Με αυτή την έννοια τα σχολικά μαθηματικά συμβάλλουν στην αποτύπωση κα ενίσχυση κοινωνικά προσδιορισμένων αξιών και προτύπων.

Λαμβάνοντας υπόψη τις θέσεις που αναπτύχθηκαν στο ΔΕΠΠΣ σχετικά με τις πολιτισμικές διαστάσεις της διδασκαλίας, γεννάται το ερώτημα, κατά πόσο υλοποιούνται από τα νέα εγχειρίδια των μαθηματικών της Α΄ τάξης, οι προθέσεις της πολιτείας για μια μαθηματική εκπαίδευση που θα παρέχει πραγματικά ίσες ευκαιρίες σε όλους τους μαθητές, ανεξάρτητα από παράγοντες διαφοροποίησης όπως το φύλλο, το χρώμα, η καταγωγή, η προέλευση κλπ. Επίσης κατά πόσο πρόκειται για ένα πραγματικά πολυπολιτισμικό μοντέλο που όχι απλώς σέβεται τη διαφορετικότητα, αλλά αξιοποιεί τους πολιτισμικούς παράγοντες που διαφοροποιούν τους ανθρώπους προς όφελος όλων των εμπλεκομένων στη διδακτική διαδικασία.

Η παρούσα μελέτη επιχειρεί να αξιολογήσει τα νέα εγχειρίδια από την σκοπιά της διαπολιτισμικής τους διάστασης.

Για το σκοπό αυτό θα τέθηκαν τα παρακάτω ερωτήματα:

1. Τα φύλα, σύμφωνα με τις διατυπωμένες θέσεις περί ισότητας, αντιμετωπίζονται ισότιμα και ισοβαρώς, ξεπερνώντας τη στερεοτυπική σκέψη και αίροντας τις προκαταλήψεις για τη διάκριση των φύλων;
2. Η πολιτιστική ταυτότητα των μαθητών που προέρχονται από διαφορετικά πολιτισμικά περιβάλλοντα γίνεται σεβαστή και ενισχύεται στα πλαίσια μιας πολυπολοτισμικότητας που αποβαίνει προς όφελος όλων

[1] Η ισότητα είναι η πρώτη αξία που περιγράφεται στο NCTM, 2000, Principals & Standards for School Mathematics, p.11

των μαθητών και αναγνωρίζουν όλοι καταστάσεις από την καθημερινή ζωή;

3. Ανάμεσα στους μαθητές δεν γίνεται καμία διάκριση που να σχετίζεται με παράγοντες διάκρισης όπως είναι το φύλο, η φυλή, το κοινωνικό και οικονομικό status και ο τόπος διαμονής;

4. Η αγωγή και η πολιτισμική καλλιέργεια με την ευρύτερη και βαθύτερη έννοια του όρου, είναι η διαδικασία διαμόρφωσης και ανάπτυξης της προσωπικότητας του ανθρώπου και του ανθρώπου ως προσωπικότητα (Πατέλης, 2003). Οι αξίες που προωθούνται και τα πρότυπα που ενυπάρχουν στα βιβλία των μαθηματικών της πρώτης τάξης του Δημοτικού Σχολείου είναι συμβατά με τον παραπάνω σκοπό;

ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ

Από την ανάλυση περιεχομένου που διεξήχθη στα νέα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Α΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου (Βιβλία μαθητή, Τετράδια εργασιών και Βιβλίο δασκάλου), διαπιστώθηκαν στοιχεία διαπολιτισμικότητας σε σχέση με τους παρακάτω άξονες:

1. ΤΑ ΣΤΕΡΕΟΤΥΠΑ ΤΟΥ ΦΥΛΟΥ (ΕΜΦΥΛΑ)

Με τον όρο στερεότυπα περιγράφονται τα συναισθήματα αποδοχής ή απόρριψης ενός ατόμου ή μιας ομάδας, τα οποία πηγάζουν από πραγματική εμπειρία που παράγει συγκινησιακή αντίδραση (Αζίζη-Καλατζή, κα, 1996). Στην έννοια του στερεότυπου συμπεριλαμβάνονται μεταξύ άλλων και γνωστικές διεργασίες όπως η αυθαίρετη κατηγοριοποίηση και οι ατεκμηρίωτες γενικεύσεις (Γκότοβος, 1996) που δημιουργούνται βάσει αμφιλεγόμενων παρατηρήσεων και εμπειριών.

Σε ότι αφορά τα έμφυλα στερεότυπα, που αναπτύσσονται και καλλιεργούνται στην εκπαίδευση, μέχρι σήμερα αναπαράγονται στερεότυπες ταυτότητες θηλυκότητας και ανδρισμού σύμφωνα με παραδοσιακά ιεραρχικά κριτήρια (Δεληγιάννη & Ζιώγου, 1993).

Η ανάλυση των έμφυλων στερεοτύπων έγινε με τη βοήθεια τριών υποαξόνων:

i. Οι ρόλοι των δύο φύλων

Στην αρχή του βιβλίου του μαθητή (ΒΜ) και του τετραδίου εργασιών (ΤΕ), γίνεται παρουσίαση των συμβόλων που θα συνοδεύουν του μαθητές στις δραστηριότητές τους. Εκεί επιλέγεται ως σύμβολο της σκέψης ο Πυθαγόρας, ενώ αποκλείεται η Υπατία, αν και στις περισσότερες των περιπτώσεων

εμφανίζεται να εκτελεί πιο σύνθετες μαθηματικές διεργασίες από τον Πυθαγόρα πχ στο μάθημα 28 (ΒΜ, τ.α΄, σ. 71) η Υπατία υπολογίζει τις καραμέλες που μένουν κάνοντας μαθηματικούς υπολογισμούς (αφαίρεση), σε αντίθεση με τον Πυθαγόρα που κατεβαίνει μετρώντας προς τα κάτω.

Ένα άλλο σύμβολο που αρχικά προσδιορίζεται είναι αυτό της ομαδικότητας, το οποίο στοιχειοθετείται από τέσσερα παιδιά, δυο αγόρια και δυο κορίτσια. Εδώ αξιοποιούνται και τα δύο φύλα ισότιμα και μάλιστα εμφανίζεται και ένα παιδί άλλου χρώματος.

Στην κοινωνία μας έχει επικρατήσει το στερεότυπο της γυναίκας που είναι ευαίσθητη και έχει ρόλο να φροντίζει τους αδύναμους (πχ μικρά παιδιά). Το στερεότυπο αυτό αναπαράγεται τακτικά π.χ. στο μάθημα 1 (ΒΜ, τ.α΄, σ.12) όπου ένα κοριτσάκι κρατά στην αγκαλιά του ένα μικρό γατάκι με ιδιαίτερη φροντίδα και τρυφερότητα και επανέρχεται στο μάθημα 37 (ΤΕ, τ.γ΄, σ. 18) όπου η κυρία Μαρία είναι μαγείρισσα και νοικοκυρά που φτιάχνει γλυκά και τα μοιράζει στα παιδιά.

ii. Οι δραστηριότητες ανδρών και γυναικών

Από τη σελίδα 28 και έπειτα στο βιβλίο του δασκάλου γίνεται αναφορά αποκλειστικά στη γυναίκα δασκάλα της Α΄ τάξης και ποτέ στον άνδρα δάσκαλο.

Όσον αφορά τις δραστηριότητες των φύλων, είναι σαφές ότι οι πιο δυναμικές δραστηριότητες αποδίδονται στα αγόρια, πχ στο μάθημα 3 (ΒΜ, τ.α΄, σ.17) πέντε αγόρια – κανένα κορίτσι - παίζουν ποδόσφαιρο, ή στο μάθημα 37, (ΒΜ, τ.β΄, σ. 20) ένα αγόρι σηκώνει έξι τόμους βιβλία, κάτι που είναι υπερβολικό για κάθε παιδί. Αντίθετα τα κορίτσια παίζουν με κούκλες και άλλα στατικά παιχνίδια, πχ στο μάθημα 14 (ΒΜ, τ.α΄, σ. 41) αναφέρει ότι η Μαρίνα είχε δύο κούκλες…, και ακόμη εντονότερα στο μάθημα 20 (ΒΜ, τ.α΄, σ.55) η Υπατία επιθυμεί μια κούκλα, άλλο κορίτσι μια λούτρινη γατούλα και ένα αγόρι ένα ελικοπτεράκι).

Εξαίρεση αποτελεί το παράδειγμα του μαθήματος 41, (ΤΕ, τ.γ΄, σ. 27) όπου εμφανίζονται τρία κορίτσια να συμμετέχουν σε αγώνα δρόμου.

iii. Γενική εικόνα των φύλων

Στα υπό εξέταση βιβλία οι γυναίκες (κορίτσια) εμφανίζονται πιο μικρόσωμες και αδύναμες σε αντίθεση με τους άντρες (αγόρια) που είναι δυνατοί και μεγαλόσωμοι. Για παράδειγμα στο μάθημα 9 (ΒΜ, τ.α΄, σ.31), υπάρχει εικόνα που δείχνει τέσσερα παιδιά (τρία αγόρια και ένα κορίτσι) τα οποία

πρέπει να συγκριθούν ως προς το ύψος τους. Το κορίτσι είναι το πιο κοντό από όλα.

2. ΣΤΕΡΕΟΤΥΠΑ ΚΑΙ ΕΙΚΟΝΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΑΛΛΟΥΣ ΛΑΟΥΣ – ΕΘΝΟΚΕΝΤΡΙΣΜΟΣ

Μια από τις μορφές που μπορεί να πάρει ο εθνικισμός σε πολυπολιτισμικές κοινωνίες, μας λέει ο Giroux (1992), είναι η αγνόηση ης κουλτούρας των μειονοτήτων και η μη εκπροσώπησή τους. Αυτό ενισχύεται σε εκπαιδευτικά συστήματα στα οποία το αναλυτικό πρόγραμμα λειτουργεί ως όχημα μιας ενιαίας κουλτούρας.

Οι πολιτισμοί αποτελούν αυτοερμηνεία ομάδων ανθρώπων οι οποίοι από την κοινή συμβίωση δημιούργησαν ιστορία (Αζίζη-Καλατζή, κα, 1996) και κατά συνέπεια προσδίδουν ταυτότητα στους ανθρώπους μέσω της αλληλοαναγνώρισης της πολιτιστικής τους διαφορετικότητας.

Η έρευνα προσπάθησε να εντοπίσει στοιχεία που αφορούν πολιτισμικά χαρακτηριστικά άλλων λαών και άλλων εποχών.

i. Εκπροσώπηση άλλων φυλών – πολιτισμικές αναφορές σε άλλους λαούς

Στα βιβλία εμφανίζονται στοιχεία από άλλους λαούς και πολιτισμούς, σύγχρονους και παλαιότερους (Κίνα, Ιαπωνία, Αφρική), ξεκομμένα χωρίς ιδιαίτερες αναφορές και επισημάνσεις και χωρίς να εντάσσονται σε ένα πλαίσιο κοινωνικών συμφραζομένων που να τους δίνουν νόημα. Πχ στο μάθημα 32 (ΒΜ, τ.α΄, σ. 78) υπάρχει εικόνα που παριστάνει πίνακα ζωγραφικής αφρικανικής τεχνοτροπίας και στο μάθημα 34, (ΒΜ, τ.β’, σ. 14) παρουσιάζεται φωτογραφία του άβακα της Σαλαμίνας του 5ου πΧ αιώνα.

ii. Άλλες ομάδες πληθυσμού με διαφορετική πολιτισμική προέλευση

Η υποκατηγορία αυτή αφορά την εμφάνιση εκπροσώπων άλλων πολιτισμικών προελεύσεων, πέραν της κυρίαρχης ομάδας. Σε όλα τα βιβλία υπάρχουν ελάχιστες αναφορές σε πρόσωπα που εκπροσωπούν έναν άλλο πολιτισμό. Πρόκειται για την Ίλντα, τη Μόνικα, και τον Έρνεστ, παιδιά από άλλες χώρες που εμφανίζονται σε πολύ λίγες περιπτώσεις και χωρίς διακριτό ρόλο που να επιδρά σ’ αυτό η προέλευσή τους.

3. Η ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΕΥΣΗ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ – ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΟΜΑΔΩΝ (ΚΟΙΝΩΝΙΚΗ ΔΙΑΣΤΡΩΜΑΤΩΣΗ)

Στο πλαίσιο της κοινωνικής διαστρωμάτωσης τα μέλη μιας κοινωνίας αναγνωρίζουν στον εαυτό τους και στους άλλους κάποιο στίγμα ή ιεραρχική θέση στα πλαίσια μιας ιεραρχικής διάταξης των κοινωνικών υποκειμένων (Γκότοβος, 1996). Στα υπό μελέτη βιβλία των μαθηματικών η κοινωνική διαστρωμάτωση αποκρύπτεται και εμφανίζεται μόνο μια μεσαία προς εύπορη τάξη.

i. Οι κατώτερες ομάδες

Σε κανένα από τα βιβλία της Α΄ τάξης δεν υπάρχει εκπροσώπηση χαμηλής οικονομικής και κοινωνικής ομάδας.

ii. Η εύπορη τάξη

Σε αντίθεση με την παντελή έλλειψη κατώτερων στρωμάτων, στα βιβλία υπάρχουν πλείστα παραδείγματα που στοχεύουν στα υψηλά οικονομικά τμήματα του πληθυσμού. Στο μάθημα 41 (ΒΜ, τ.β΄, σ. 31) για παράδειγμα ένα παιδί κάνει ηλιοθεραπεία σε μια αριστοκρατική παραλία, κάτω από μια ομπρέλα και φορώντας γυαλιά ηλίου. Πρόκειται για μια παράσταση που αναγνωρίζεται ως μια εικόνα της καθημερινότητας μόνο από παιδιά των οποίων οι οικογένειες έχουν οικονομική ευχέρεια. Επίσης στο μάθημα 38 (ΒΜ, τ.β΄, σ. 22) τα παιδιά παίζουν πακ μαν, με ηλεκτρονικό υπολογιστή.

4. Η γεωγραφική κατανομή πληθυσμών που εκπροσωπούνται

Ένας άλλος παράγοντας διαφοροποίησης των μαθητών είναι η γεωγραφική προέλευση, που σχετίζεται με την κοινωνική θέση (status), το πολιτισμικό και μορφωτικό κεφάλαιο (Bourdieu & Passeron, 1996), την οικονομική κατάσταση, κα.

Πολλές από τις μελέτες αναφέρονται διεξοδικότερα στους κοινωνικούς παράγοντες, όπως είναι η κοινωνική τάξη, αλλά και ο τόπος διαμονής και η γεωγραφική προέλευση των μαθητών που καθορίζονται από το εισόδημα και τη θέση εργασίας της οικογένειας. Άλλωστε, ο τόπος προέλευσης των μαθητών παίζει σημαντικό ρόλο στη διαφοροποίηση των σχολείων που αντικατοπτρίζουν την περιοχή στην οποία βρίσκονται (Ηλιού,1984).

Στην μελέτη ταξινομήθηκαν τα στοιχεία ανάλυσης σε τρεις υποάξονες:

i. Αστικός πληθυσμός

Τα παιδιά των πόλεων αναγνωρίζουν αρκετά παραδείγματα από την καθημερινή τους ζωή. Στο μάθημα 19 (ΒΜ, τ.α΄, σ. 52) εμφανίζονται δυο πολυώροφες πολυκατοικίες των οποίων τους ορόφους πρέπει να συγκρίνουν οι μαθητές. Άλλη εικόνα πιθανόν άγνωστη για τα παιδιά τη επαρχίας, είναι αυτή του ανελκυστήρα στο μάθημα 60, (ΤΜ, τ.δ΄, σ. 27) με βάση την οποία οι μαθητές πρέπει να συγκρίνουν το βάρος ενός άντρα και μιας γυναίκας και να αποφασίσουν ποιος από τους δύο μπορεί να ανεβεί στο ασανσέρ.

ii. Αγροτικός πληθυσμός

Στο βιβλίο μπορούν να αναγνωρίσουν εικόνες από το οικείο περιβάλλον τους μαθητές με προέλευση από αγροτικές περιοχές. Παραδείγματα που σχετίζονται με τέτοιες περιοχές συναντάμε στο μάθημα 1, (ΒΜ, τ.α΄, σ.12,13) με τίτλο «περίπατος στο δάσος» που συνοδεύεται από τέσσερις εικόνες του δάσους. Στο μάθημα 15, (ΒΜ, τ.α΄, σ. 42) υπάρχει μια εικόνα ενός μικρού αγροτικού χωριού στην οποία εμφανίζονται οικόσιτα που βόσκουν και οπωροφόρα δέντρα.

iii. Απομακρυσμένες και δυσπρόσιτες περιοχές

Σε κανένα από τα βιβλία της πρώτης τάξης δεν υπάρχουν παραδείγματα από απομακρυσμένες και δυσπρόσιτες περιοχές,.

5. ΤΑ ΠΡΟΤΥΠΑ ΚΑΙ ΟΙ ΑΞΙΕΣ ΠΟΥ ΠΕΡΝΟΥΝ

Πρότυπο, κατά τον Πατέλη (2003), είναι κάποιο πρόσωπο ή κατάσταση που μπορεί να χρησιμεύει ως παράδειγμα προς μίμηση. Με αυτή την έννοια αναφερόμαστε σε πρότυπα ήθους ή αρετής, σε πρότυπο ευνομούμενης πολιτείας, σε πρότυπο δασκάλου, υπεύθυνου πολίτη, επιστήμονα κ.ο.κ.

Οι αξίες είναι έννοιες της καθημερινής συνείδησης, της φιλοσοφίας και των κοινωνικών επιστημών με τη βοήθεια της οποίας υποδηλώνεται η κοινωνική και ιστορική σημασία, το νόημα διαφόρων αντικειμένων του ανθρώπινου πολιτισμού, σχέσεων και δραστηριοτήτων. (Πατέλης, 2003).

Τα πρότυπα και οι αξίες που επιλέξαμε να αναζητήσουμε στα σχολικά εγχειρίδια της Α΄ τάξης του Δημοτικού σχολείου αφορούν:

i. Η οικογενειακή οργάνωση και δομή

Συχνά στο βιβλίο υπονοείται η οικογενειακή οργάνωση στα πρότυπα της πατριαρχικής. Στο μάθημα 4 (ΒΜ, τ.α΄, σ. 18) υπάρχει εικόνα που παρουσιάζει μια τετραμελή οικογένεια που στέκεται με τη σειρά πρώτος ο πατέρας έπειτα η μητέρα το αγόρι και το κορίτσι.

Στα θετικά του εγχειριδίου εντάσσεται το παράδειγμα της πολύτεκνης οικογένειας που παρουσιάζεται σε φωτογραφία στο μάθημα 13 του ΒΜ, τ.α΄, σ.38 και η οποία παραπέμπει σε μια διαφορετική οικογενειακή δομή από αυτή της μέσης ελληνικής οικογένειας με τους δύο συζύγους και τα ένα έως δύο παιδιά.

ii. Το χρήμα ως αξία και μέσω κοινωνικής ισχύος

Στηριζόμενο στην πρόθεση αξιοποίησης παραδειγμάτων από την καθημερινή ζωή των μαθητών, στο βιβλίο γίνεται κατάχρηση της χρήσης των χρημάτων (υπάρχουν περισσότερες από 40 δραστηριότητες και παραδείγματα). Στα παιδιά περνά έτσι μια αντίληψη για τα χρήματα ως κοινωνική αξία και ως μέσο κοινωνικής ισχύος.

iii. Οι διατροφικές συνήθειες των παιδιών και των οικογενειών τους

Σε ότι αφορά τις διατροφικές συνήθειες των παιδιών το βιβλίο είναι μοιρασμένο ανάμεσα σε υγιεινές (φρούτα, λαχανικά, κρέας, καρποί, αυγά, ψωμί) και μη (γλυκά κάθε είδους όπως καραμέλες, παγωτά, σοκολάτες κλπ) τροφές. Έτσι η πρώτη κατηγορία εμφανίζεται 24 φορές και η δεύτερη 26.

iv. Οι καταναλωτικές συνήθειες των παιδιών

Τα παιδιά εθίζονται μέσα από τα παραδείγματα του βιβλίου στην ανάπτυξη μιας καταναλωτικής συνήθειας και όχι ενός υγιούς καταναλωτικού κινήματος. Έτσι τα βρίσκουμε συχνά να καταναλώνουν ακατάλληλες τροφές, όπως γλυκά και καραμέλες, αλλά και να αγοράζουν παιχνίδια συχνά σε μεγάλες ποσότητες. Τα παιδιά εμφανίζονται ως καταναλωτές σε αρκετές περιπτώσεις πχ στο μάθημα 39, (ΒΜ, τ.β΄) τρία παιδιά θέλουν να αγοράσουν ένα μπαλόνι, στο μάθημα 55, (ΒΜ, τ.β΄) τρία παιδιά θέλουν να αγοράσουν ένα ποδήλατο και στο ίδιο μάθημα οι μαθητές πρέπει να ζωγραφίσουν τα νομίσματα που χρειάζονται για να αγοράσουν τέσσερα αντικείμενα (μολύβι, ξύστρα, αυτοκινητάκι και κολλητική ταινία).

v. Η προστασία του περιβάλλοντος

Στα βιβλία της πρώτης τάξης υπάρχουν αναφορές που σχετίζονται με την προστασία των ζώων. Είδη που απειλούνται με εξαφάνιση εμφανίζονται συχνά στις εικόνες. Αγριόπαπιες, αρκούδες, πιγκουΐνοι και ελέφαντες εμφανίζονται σε φωτογραφίες στις σελίδες 11, 18, 29, 35 του ΒΜ, τ.α΄ και στη σ. 72 του ΒΜ, τ.β΄.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Από την μελέτη των αποτελεσμάτων της ανάλυσης περιεχομένου που επιχειρήσαμε, καταλήγουμε στα παρακάτω συμπεράσματα:

Στα βιβλία των μαθητικών της πρώτης τάξης του Δημοτικού Σχολείου γίνεται προσπάθεια για ισότιμη συμμετοχή των δύο φύλων, κάτι που φαίνεται από τις σχεδόν παράλληλες εμφανίσεις αγοριών και κοριτσιών στα κείμενα και τις εικόνες. Η προσπάθεια αυτή όμως μένει, ως επί τω πλείστον, σε μια ποσοτική έκφραση της ισοτιμίας, διότι στα παραδείγματα που χρησιμοποιούνται εμφανίζονται συχνά έμφυλα στερεότυπα και προκαταλήψεις για τη διάκριση των φύλων. Χαρακτηριστικό δείγμα στερεοτυπικής σκέψης αποτελεί το παράδειγμα της Υπατίας και του Πυθαγόρα. Στην εισαγωγική σελίδα των βιβλίων, όπου υπάρχουν τα βιογραφικά των δύο μαθηματικών της αρχαιότητας, οι συγγραφείς διατείνονται ότι όλοι θαυμάζουν την Υπατία για το πνεύμα της, την ομορφιά, την σεμνότητα και την ευγλωττία της. Πλην όμως κανείς δεν την θαυμάζει για την σοφία και τις γνώσεις της. Ίσως αυτός να είναι ο λόγος για τον οποίο ο Πυθαγόρας γίνεται σύμβολο της σκέψης σε όλα τα βιβλία, αν και από τα περιεχόμενα φαίνεται ο Πυθαγόρας να καταφεύγει σε μετρήσεις για την επίλυση προβλημάτων ενώ η Υπατία σε σύνθετους νοερούς υπολογισμούς.

Επίσης δεν έχουν ξεπεραστεί στερεότυπα του κοινωνικού ρόλου των δύο φύλων. Έτσι τα κορίτσια εμφανίζονται να είναι ευαίσθητα και να ασχολούνται με την φροντίδα των άλλων πχ μαγείρεμα, νοικοκυριό. Αντίθετα τα αγόρια εμφανίζονται πιο δυναμικά, δραστήρια και δυνατά. Είναι χαρακτηριστικό της στερεοτυπικής σκέψης των συγγραφέων ότι στην πρώτη τάξη δουλεύει δασκάλα και όχι δάσκαλος.

Τέλος εμφανίζεται μια στερεοτυπική εικόνα της εξωτερικής εμφάνισης των φύλων με τα κορίτσια και τις γυναίκες να είναι πιο μικρόσωμες από τα αγόρια και τους άντρες.

Σε ότι αφορά την εμφάνιση εκπροσώπων και στοιχείων άλλων πολιτισμών αυτά είναι εξαιρετικά περιορισμένα σε αριθμό ξεκομμένα και αποσπασμα-

τικά από κάθε κοινωνικό – πολιτισμικό πλαίσιο, έτσι ώστε να μην παράγουν πολιτισμικά συμφραζόμενα και να μην επιδρούν στη γνώση.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η παρουσία ενός αλλοδαπού παιδιού (της Ίλντα) στην παρέα των παιδιών που συνοδεύει τις δραστηριότητες του βιβλίου, η παρουσία της οποίας είναι απλώς διακοσμητική και αποτελεί άλλοθι για να μην κατηγορηθούν οι συγγραφείς ότι αποκρύπτουν τη διαφορετικότητα. Πετυχαίνουν έτσι να μετατρέψουν την Ίλντα σε παρόν – απών άλλον, αφού αποκρύπτουν τα στοιχεία της κουλτούρας της οποίας φορέας είναι το παιδί αυτό. Σε κανένα από τα βιβλία δεν υπάρχει εκπροσώπηση της χαμηλής οικονομικής τάξης, των φτωχών που αγωνίζονται σε καθημερινή βάση για ένα κομμάτι ψωμί, και ένα κρεβάτι σε προφυλαγμένο μέρος. Πρόκειται για μια πραγματικότητα που επιμελώς αποκρύπτεται από τις σελίδες των σχολικών βιβλίων. Ίσως γιατί δεν συνάδει με το πρότυπο του μικροαστού, οικογενειάρχη, καταναλωτή που φαίνεται να διέπει την φιλοσοφία του βιβλίου. Αντίθετα συχνές είναι οι αναφορές σε εύπορες κοινωνικές ομάδες, με αστική - μικροαστική νοοτροπία.

Από την ανάλυση της γεωγραφικής κατανομής των πληθυσμών που εμφανίζονται στα βιβλία, φαίνεται ότι τα περισσότερα παραδείγματα αφορούν τους κατοίκους των πόλεων και ελάχιστα της επαρχίας. Από την άλλη δεν εκπροσωπούνται με κανένα παράδειγμα κάτοικοι δυσπρόσιτων ορεινών περιοχών και νησιώτες, σαν να μην υπάρχουν σχολεία και μαθητές σε τέτοιες περιοχές, ή σαν να μην έχουν οι πολίτες αυτοί, ίσα δικαιώματα με τους υπόλοιπους.

Κατά συνέπεια μέσα στα βιβλία, αν και γίνεται προσπάθεια να αντληθούν παραδείγματα από την καθημερινή ζωή των μαθητών έτσι ώστε αυτοί να αναγνωρίσουν την πραγματικότητα στην οποία ζουν και να νοηματοδοτήσουν τους αριθμούς και τις σχέσεις τους, εντούτοις αυτά περιορίζονται σε παραδείγματα του κυρίαρχου πολιτισμού και δεν αποτελούν καταστάσεις της πραγματικότητας για όλους τους μαθητές της επικράτειας.

Τέλος οι αξίες και τα πρότυπα που διαπερνούν τα νέα εγχειρίδια, προάγουν το μοντέλο μιας παγκοσμιοποιημένης, ταξικής κοινωνίας, στην οποία επικρατούν οι νόμοι της αγοράς και του κέρδους και όχι μιας κριτικής προσέγγισης του κόσμου και των παγκόσμιων προκλήσεων και μιας αυτόνομης ανάπτυξης της προσωπικότητας.

Έτσι το χρήμα και οι νόμοι της αγοράς προάγονται σε αξίες που έχουν κατακλύσει τα νέα εγχειρίδια. Οι μαθητές έχουν ή δεν έχουν χρήματα, χρειάζονται ακόμη τόσα χρήματα για να «αγοράσουν», παίζουν το παιχνίδι που λέγεται ταμίας... Όλα αυτά στα πλαίσια μιας καταναλωτικής παιδείας που δεν αντιμετωπίζει κριτικά τις ανθρώπινες ανάγκες και δεν προεκτείνει

τα ζητήματα της φτώχειας και της εκμετάλλευσης, του σεβασμού του φυσικού πλούτου της γης και της προστασίας του περιβάλλοντος, που αποτελούν τα μεγάλα ζητήματα για το μέλλον της ανθρωπότητας και του πλανήτη μας.

Κάνοντας μια συνολική αποτίμηση των εγχειριδίων σε σχέση με τα ερευνητικά ερωτήματα που θέσαμε, φαίνεται ότι ούτε τώρα κατέστη εφικτό να απαλλαγεί η εκπαίδευση από στερεότυπα και προκαταλήψεις που αφορούν τα φύλα, τη φυλή, την πολιτισμική και κοινωνική προέλευση, την καταγωγή, τον τόπο διαμονής. Η κουλτούρα της τάξης αντιμετωπίζεται ως ενιαία για όλους τους μαθητές και σύμφωνη με τις επιταγές της κυρίαρχης ομάδας. Η διαφορετικότητα αν και αναφέρεται, παρόλα αυτά δεν εντάσσεται στην διδακτική διαδικασία, αλλά παραμένει ως φολκλόρ ή ως αξιοθέατο. Όλα αυτά μέσα στη λογική του δυτικού τρόπου σκέψης και ζωής που εξυψώνει την ατομικότητα και οριοθετεί την προσωπικότητα στους κανόνες της αγοράς.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Banks, J.A., & Banks, C.A.M. (1995). *Handbook of research on multicultural education*, New York, McMillan.

Bourdieu, P., & Passeron, J., (1996). *Οι κληρονόμοι – Οι φοιτητές και η κουλτούρα*, Αθήνα, Ινστιτούτο του βιβλίου – Α. Καρδαμίστα

Αξίζι-Καλατζή, Α., Ζιώνου-Σιδέρη, Α., Βλάχου, Α., (1996). *Προκαταλήψεις και στερεότυπα – Δημιουργία και αντιμετώπιση*, Αθήνα, εκδόσεις ΓΓΛΕ

Γκότοβος, Α., (1996). *Ρατσισμός, Κοινωνικές, Ψυχολογικές και Παιδαγωγικές όψεις μιας ιδεολογίας και μιας πρακτικής*, Αθήνα, εκδ. ΓΓΛΕ

Δεληγιάννη, Β. & Ζιώγου, Σ., (1993). Εκπαίδευση και φύλο: Ιστορική διάσταση και σύγχρονος προβληματισμός, στο άρθρο της Οικονομίδου, Α., *Τελικά, τα αγόρια κλαίνε; Έμφυλες ταυτότητες στη λογοτεχνία για μικρές ηλικίες: μια πρώτη προσέγγιση*, στο http://keimena.ece.uth.gr/t1/arthra/tefxos1/oikonomidoy1.htm

Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΦΕΚ 1366 τΒ'/18-10-2001)

Ηλιού, Μ., (1984). *Εκπαιδευτική και κοινωνική δυναμική* Αθήνα, εκδ. Πορεία

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Α., Καψάλης, Α. & Πνευματικός, Δ., (2006). *Μαθηματικά Α' Δημοτικού – Μαθηματικά της φύσης και της ζωής – Βιβλίο δασκάλου*, Αθήνα, ΟΕΔΒ

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Α., Καψάλης, Α. & Πνευματικός, Δ., (2006). *Μαθηματικά Α' Δημοτικού – Μαθηματικά της φύσης και της ζωής –α΄ τεύχος*, Αθήνα, ΟΕΔΒ

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Α., Καψάλης, Α. & Πνευματικός, Δ., (2006). *Μαθηματικά Α' Δημοτικού – Μαθηματικά της φύσης και της ζωής –β΄ τεύχος*, Αθήνα, ΟΕΔΒ

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Α., Καψάλης, Α. & Πνευματικός, Δ., (2006). *Μαθηματικά Α' Δημοτικού – Μαθηματικά της φύσης και της ζωής –Τετράδιο εργασιών α΄ τεύχος*, Αθήνα, ΟΕΔΒ

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Α., Καψάλης, Α. & Πνευματικός, Δ., (2006). *Μαθηματικά Α' Δημοτικού – Μαθηματικά της φύσης και της ζωής –Τετράδιο εργασιών β΄ τεύχος*, Αθήνα, ΟΕΔΒ

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Α., Καψάλης, Α. & Πνευματικός, Δ., (2006). *Μαθηματικά Α' Δημοτικού – Μαθηματικά της φύσης και της ζωής –Τετράδιο εργασιών γ΄ τεύχος*, Αθήνα, ΟΕΔΒ

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Α., Καψάλης, Α. & Πνευματικός, Δ., (2006). *Μαθηματικά Α' Δημοτικού – Μαθηματικά της φύσης και της ζωής –Τετράδιο εργασιών δ΄ τεύχος*, Αθήνα, ΟΕΔΒ

Πατέλης, Δ., (2003). Περί προτύπων στην κοινωνία και στην εκπαίδευση – Φιλοσοφικές & μεθοδολογικές πτυχές, Προδημοσιευμένη εισήγηση για την 1η Εναλλακτική Ημερίδα Επιστημονικού Διαλόγου του περιοδικού *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, 29-11-2003, 1ο μέρος, τ. 130, Μάιος-Ιούνιος 2003, σελ.108-122, 2ο μέρος, τ. 131, Ιούλιος - Αύγουστος 2003, σελ. 148-163

Χασάπης, Δ., (1996). Τα πλαίσια αναφοράς των μαθηματικών εννοιών κατά τη διδασκαλία τους στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση και οι ιδεολογικοί τους προσανατολισμοί, *1ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, με θέμα: Τα μαθηματικά στην εκπαίδευση και στην κοινωνία*, 8 & 9 Μαρτίου 2002, επιμ. Χασάπης, Δ., Αθήνα

ΜΙΑ ΚΟΙΝΩΝΙΟΛΟΓΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΣΧΟΛΙΚΗΣ ΓΝΩΣΗΣ ΣΤΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ. ΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΤΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΗΣ Β΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Γεράσιμος Κουστουράκης ***Κώστας Ζαχάρος***

Τμήμα Επιστημών της Εκπαίδευσης και της Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία Πανεπιστήμιο Πατρών

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην εργασία αυτή επιχειρείται η προσέγγιση της σχολικής μαθηματικής γνώσης όσον αφορά τη διάσταση του βηματισμού περιχάραξης στα νέα και τα παλαιά εγχειρίδια μαθηματικών της Β' Δημοτικού.

Στο πρώτο τμήμα της εργασίας γίνεται μια σύντομη θεωρητική προσέγγιση της σχολικής γνώσης που βασίζεται στις θεωρητικές επεξεργασίες του κοινωνιολόγου Β. Bernstein για τον παιδαγωγικό λόγο. Στο δεύτερο μέρος αναφερόμαστε στη μεθοδολογική προσέγγιση της παρούσας έρευνας. Στο τρίτο μέρος παρουσιάζονται τα ευρήματα της εργασίας και γίνεται η αξιολόγησή τους. Τέλος, επιχειρείται στη βάση των ευρημάτων μας επιχειρείται η διατύπωση μελλοντικών ερευνητικών ερωτημάτων και το άνοιγμα μιας συζήτησης επιστημονικής συζήτησης στα θέματα που πραγματεύεται η έρευνα.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

Ο Basil Bernstein μας προσφέρει ένα χρήσιμο θεωρητικό εργαλείο για την ανάλυση του παιδαγωγικού λόγου (pedagogic discourse), καθώς και το αναγκαίο εννοιολογικό πλαίσιο προκειμένου να προσεγγίσουμε και να αναλύσουμε τις διαδικασίες μετάδοσης και απόκτησης της σχολικής γνώσης. Πρόκειται για διαδικασίες που συντελούνται σε συγκεκριμένα κοινωνικά πλαίσια όπως είναι το σχολείο και η σχολική τάξη (Bernstein, 1990 & 2000). Επιπλέον, η προσέγγιση του Bernstein μας επιτρέπει να εντοπίσουμε και να αναλύσουμε τις διάφορες μορφές αλληλεπίδρασης που ανα-

πτύσσονται μεταξύ των κοινωνικών υποκειμένων που εμπλέκονται στην παιδαγωγική διαδικασία.

Η μετάδοση του παιδαγωγικού λόγου συντελείται μέσω του *παιδαγωγικού κώδικα* (pedagogic code) που, σύμφωνα με τον Bernstein (1996, 2000), ενσωματώνει τα εξειδικευμένα πλαίσια μετάδοσης της γνώσης, καθώς επίσης, την επιλογή ή/και την παραγωγή των κατάλληλων κειμένων (texts) στα πλαίσια αυτά. Ο παιδαγωγικός κώδικας περιγράφει την οργάνωση της εκπαιδευτικής γνώσης όσον αφορά τόσο τη μετάδοσή της όσο και την απόκτησή της από τους μαθητές. Η μετάδοση της σχολικής γνώσης συνδέεται με τις έννοιες της ταξινόμησης (classification) και της περιχάραξης (framing). Η *ταξινόμηση* γίνεται αντιληπτή στο αναλυτικό πρόγραμμα από το διαχωρισμό της σχολικής γνώσης σε συγκεκριμένα γνωστικά αντικείμενα, που διαθέτουν ευδιάκριτα σύνορα (boundaries) και ένα συγκεκριμένο πεδίο αναφοράς (Bernstein, 1996, 2000), όπως είναι για παράδειγμα τα μαθήματα της Γλώσσας, των Μαθηματικών, της Φυσικής κ.λπ. Η *περιχάραξη* αναφέρεται στις επικοινωνιακές μορφές που αναπτύσσονται στα πλαίσια των παιδαγωγικών πρακτικών, καθώς και στους κοινωνικούς ελέγχους που λαμβάνουν χώρα κατά τη διάρκεια των επικοινωνιακών αλληλεπιδραστικών παιδαγωγικών σχέσεων (Bernstein, 1996, 2000).

Η απόκτηση της σχολική γνώσης από τους μαθητές συνδέεται με την κατοχή από αυτούς των *κανόνων αναγνώρισης* (recognition rules) και των *κανόνων πραγμάτωσης* (realization rules). Οι κανόνες αναγνώρισης αναφέρονται στην ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν τις ειδικές απαιτήσεις του πλαισίου μέσα στο οποίο βρίσκονται, ενώ οι κανόνες πραγμάτωσης περιγράφουν την ικανότητα παραγωγής του αιτούμενου «νόμιμου» κειμένου, όπως, για παράδειγμα, στην περίπτωση των μαθηματικών είναι η επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος, καθώς και η ικανότητα επεξήγησης από το μαθητή των στρατηγικών που ανέπτυξε για να το προσεγγίσει.

Ο Bernstein (1996, 2000) επεσήμανε ότι η επιτυχής κατάκτηση της σχολικής γνώσης από το μαθητή εξαρτάται, σε μεγάλο βαθμό, από την *αδύνατη περιχάραξη βηματισμού*. Από τη δημιουργία, δηλαδή, εκείνων των συνθηκών μάθησης, που δίνουν στο μαθητή τον απαραίτητο χρόνο για να προσεγγίσει, να επεξεργαστεί και να κατακτήσει τη νέα γνώση. Να σημειώσουμε ότι, η προώθηση μιας αδύνατης περιχάραξης βηματισμού συχνά δεν γίνεται αποδεκτή από όσους/όσες είναι επιφορτισμένοι/ες με τον σχεδιασμό της εκπαιδευτικής πολιτικής. Οι υπεύθυνοι για την εκπόνηση της εκπαιδευτικής πολιτικής προσεγγίζουν την εκπαίδευση με τα κριτήρια της οικονομίας της αγοράς και είναι αρνητικοί σε παιδαγωγικές πρακτικές που βασίζονται σε μια αδύνατη περιχάραξη βηματισμού εξαιτίας του οικονομικού κόστους που απαιτεί η εφαρμογή της (Bernstein, 1987).

Η διαμόρφωση των παιδαγωγικών πρακτικών που βασίζονται στην *ισχυρή περιχάραξη βηματισμού* ευνοεί μόνον τους μαθητές που έχουν πρόσβαση σε ένα δεύτερο, εξωσχολικό παιδαγωγικό πλαίσιο. Πρόκειται, δηλαδή, για μια δεύτερη ευκαιρία στην προσέγγιση και επεξεργασία της γνώσης, που προσφέρεται στους μαθητές συνήθως από την οικογένεια στο σπίτι (Bernstein, 1987, Morais, 2002).

Στην περίπτωση των νέων σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών που θα μας απασχολήσουν εδώ φαίνεται ότι υιοθετούνται μικτές εκπαιδευτικές πρακτικές όσον αφορά τη διδασκαλία και την αξιολόγηση. Πιο συγκεκριμένα, στο εισαγωγικό τμήμα των βιβλίων για το δάσκαλο δηλώνεται ότι στόχος της σύγχρονης μεταρρύθμισης της σχολικής μαθηματικής γνώσης είναι η προσαρμογή στα κριτήρια του διαγωνισμού PISA2000 (Καριωτάκης κ. ά., 2006). Πρόκειται για μια επιλογή που παραπέμπει σε μια τελική και με αυστηρά ποσοτικά κριτήρια διαπιστωτική αξιολόγηση όσον αφορά την κατοχή συγκεκριμένου είδους γνώσης από τους μαθητές. Παράλληλα, η διδακτική θεωρητική θεμελίωση του νέου παιδαγωγικού κώδικα γίνεται σύμφωνα με το μοντέλο του κονστρουκτιβισμού (constructivism) και με την αξιοποίηση θεωρητικών απόψεων της γνωστικής ψυχολογίας προκειμένου να τεκμηριωθεί η εικόνα μιας προοδευτικής αλλαγής με επιδίωξη την προώθηση της διερευνητικής μάθησης από την πλευρά του μαθητή (Kaput, 1991). Έχουμε, δηλαδή, τη συμπλοκή ποιοτικών και ποσοτικών κριτηρίων όσον αφορά την προώθηση της κατάκτησης της σχολικής μαθηματικής γνώσης από τους μαθητές και την αξιολόγησή της.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Σκοπός της έρευνας. Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να προσδιορίσει τις μορφές περιχάραξης του διδακτικού λόγου και ειδικότερα την περιχάραξη βηματισμού που επιλέγεται στη διδασκαλία των μαθηματικών της Β Τάξης Δημοτικού στις περιπτώσεις του παλαιού και νέου αναλυτικού προγράμματος.

Εργαλεία συλλογής των δεδομένων της έρευνας. Πηγές της έρευνας είναι το έντυπο εκπαιδευτικό υλικό των Μαθηματικών με το παλαιό αναλυτικό πρόγραμμα (ΜπC) και με το νέο αναλυτικό πρόγραμμα (ΜνC). Το υλικό αυτό περιέχει τα βιβλία που προορίζονται για το μαθητή και τα βιβλία του δασκάλου (εκδόσεις του Υπουργείου Παιδείας).

Η έρευνά μας θα επικεντρωθεί σε μια ενότητα μαθημάτων που αξιολογούνται ενιαία από το «2ο Κριτήριο Αξιολόγησης». Πρόκειται για τις διδακτικές ενότητες που αντιστοιχούν στα μαθήματα 8-16 του παλαιού αναλυτικού προγράμματος και στα μαθήματα 9-15 του νέου. Η επιλογή των συγκεκριμένων ενοτήτων μαθημάτων έγινε προκειμένου να εκτιμηθεί η προσπάθεια οικοδόμησης της μαθηματικής γνώσης στο κρίσιμο στάδιο της έναρξης της

φοίτησης των μαθητών στη Β' τάξη του Δημοτικού σχολείου. Κι αυτό μετά την παρέλευση του πρώτου σύντομου χρονικού διαστήματος προσαρμογής των μαθητών στην Β τάξη. Η διδασκαλία των ενοτήτων αυτών προσδιορίζεται χρονικά περίπου κατά την τρίτη εβδομάδα από την έναρξη του σχολικού έτους, δηλαδή στις αρχές Οκτωβρίου.

Η προσέγγιση του εκπαιδευτικού υλικού γίνεται με τη μέθοδο της ανάλυσης περιεχομένου. Ως μονάδα ανάλυσης λαμβάνουμε την «πρόταση» την οποία αποσυνδέουμε από τη γραμματολογική της υφή και την αντιστοιχίζουμε σε ένα ευέλικτο σημασιολογικό περιεχόμενο (semantic meaning: Krippendorff, 1980; Morais et al., 1999). Δηλαδή σε κάθε μονάδα ανάλυσης, που μπορεί να περιλαμβάνονται περισσότερες της μιας γραμματικές προτάσεις, είναι δυνατόν να παρέχονται ολοκληρωμένες οδηγίες ή επεξηγήσεις: για την ανάπτυξη της θεωρητικής γνώσης (βιβλίο Δασκάλου και Μαθητή), για τους τρόπους επίλυσης των ασκήσεων-δραστηριοτήτων (βιβλίο Δασκάλου και Μαθητή–Τετράδιο Εργασιών μαθητή), καθώς και για την καθοδήγηση του δασκάλου σχετικά με τον τρόπο διαμόρφωσης της διδακτικής του προσέγγισης (βιβλίο Δασκάλου).

Στην παρούσα εργασία μας απασχολεί η προσέγγιση του βηματισμού περιχάραξης και της πολυπλοκότητας ή όχι των διδακτικών δραστηριοτήτων με βάση τις οποίες προωθείται η παρουσίαση και επεξεργασία της σχολικής μαθηματικής γνώσης. Έτσι, οι μονάδες ανάλυσης που επισημάνθηκαν από τη μελέτη του ερευνητικού μας υλικού εντάχθηκαν σε μια από τις ακόλουθες κατηγορίες ανάλυσης:

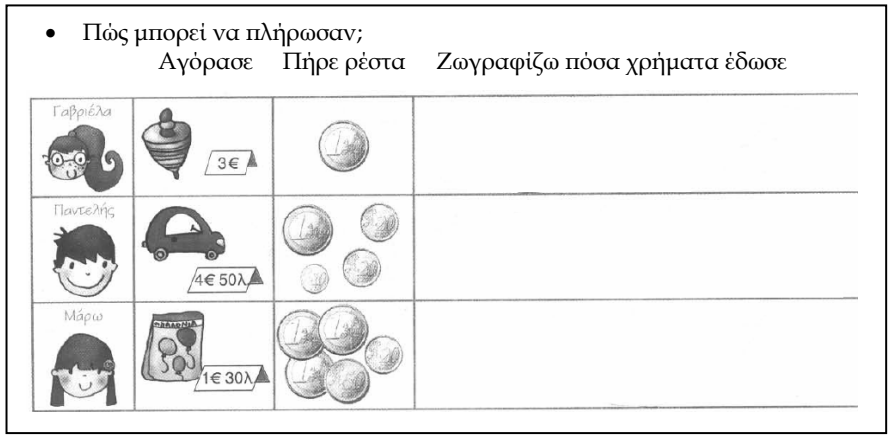
Ασθενής περιχάραξη (Π-): Στην κατηγορία αυτή εντάσσονται οι προτάσεις εκείνες που αναφέρονται στις εξής διδακτικές δραστηριότητες: επίδειξη από το δάσκαλο, επίλυση μιας απλής άσκησης ή πραγματοποίηση κάποιας απλής δραστηριότητας από το μαθητή, όπως λ.χ. η αντιστοίχιση ή μια απλή και εύκολη κατασκευή.

Ισχυρή περιχάραξη (Π+): Η κατηγορία αυτή περιλαμβάνει προτάσεις που αναφέρονται στην παρουσίαση της νέας γνώσης στο μαθητή, η οποία αποτελείται από απλά βασικά και συγκεκριμένα στοιχεία, την επίλυση ασκήσεων, δραστηριοτήτων ή προβλημάτων που απαιτούν απλές μαθηματικές πράξεις, συγκρίσεις ή συζητήσεις.

Πολύ ισχυρή περιχάραξη (Π++): Εδώ εντάσσονται οι περιπτώσεις: α) Της εκτίμησης ή αξιολόγησης της προϋπάρχουσας γνώσης των μαθητών και της κάλυψης των γνωστικών τους κενών προκειμένου να διδαχθεί η νέα γνώση. β) Δραστηριοτήτων στις οποίες απαιτείται πολύς διδακτικός χρόνος για να γίνει η παρουσίαση της νέας γνώσης στο μαθητή. Κι αυτό διότι προϋποτίθενται σύνθετες εξηγήσεις, σύνθετες συγκρίσεις ή γιατί η μαθηματική γνώση πρέπει να συνδεθεί με τα προηγούμενα. γ) Τέλος, περιπτώσεις επίλυσης δύσκολων προβλημάτων από το μαθητή.

Την περιχάραξη βηματισμού θα επιχειρήσουμε να τη διερευνήσουμε περαιτέρω μέσω της εκτίμησης της δυνατότητας των μαθητών να αναγνωρίζουν και να ερμηνεύουν τα προτεινόμενα πλαίσια αναφοράς. Για την εκτίμηση του συγκεκριμένου παράγοντα αντλήθηκαν ενδεικτικά προβλήματα από το Βιβλίο του Μαθητή Β Τάξης του MvC, τα οποία παρουσιάζονται στο Σχήμα 1. Εδώ η ερευνητική μας προσπάθεια εστιάστηκε στην επισήμανση και ανάλυση των δυσκολιών που αυτά παρουσιάζουν. Τα συγκεκριμένα προβλήματα εντάσσονται σε ενότητα που έχει ως στόχο τη γνωριμία των μαθητών με τα νομίσματα και την ανάπτυξη της ικανότητάς τους επίλυσης «πραγματικών» προβλημάτων με τη χρήση νομισμάτων.

Τα προβλήματα του Σχήματος 1 δόθηκαν σε έντεκα προπτυχιακές φοιτήτριες του Τμήματος Επιστημών της Εκπαίδευσης και της Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία του Πανεπιστημίου Πατρών, όπου στα πλαίσια των σπουδών τους παρακολουθούσαν μάθημα επιλογής, στο οποίο δίνεται έμφαση σε θέματα μεθοδολογίας της διδακτικής των μαθηματικών εννοιών. Πιο συγκεκριμένα, ζητήθηκε ώστε τα προβλήματα αυτά να απαντηθούν με τον τρόπο που προτείνεται στο σχολικό βιβλίο. Δηλαδή με τη γραπτή αναπαράσταση των νομισμάτων. Οι απαντήσεις δόθηκαν με στυλό για να υπάρχει η δυνατότητα καταγραφής των αρχικών απαντήσεων, στις περιπτώσεις που έχουμε διορθωτικές ενέργειες. Στις περιπτώσεις των διορθώσεων προσμετρήσαμε ως απαντήσεις και τις πρώτες, διορθωμένες λύσεις. Τέλος, ζητήθηκε να σχολιαστούν τα προβλήματα ως προς τη σαφήνεια, το βαθμό δυσκολίας και τη συμβατότητά τους με τους στόχους του νέου αναλυτικού προγράμματος μαθηματικών της Β Τάξης Δημοτικού.

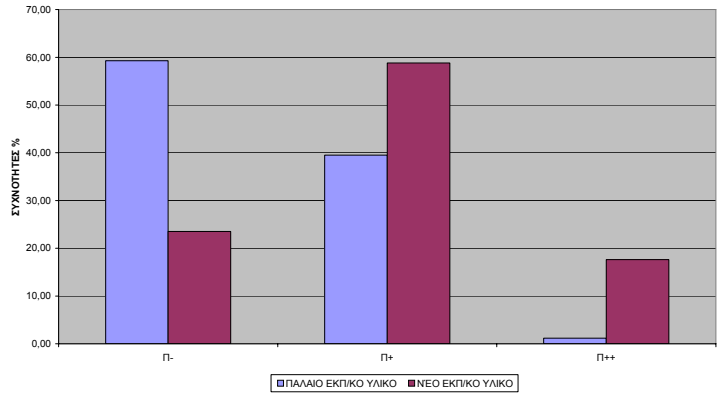


Σχήμα 1: *Βιβλίο του μαθητή Β Τάξης Δημοτικού (Καριωτάκης κ.ά., 2006, τεύχος Α, σ. 45).*

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ Η ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΟΥΣ

Η ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΥΛΗΣ ΤΟΥ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ

Στο Γράφημα παρουσιάζεται η ποσοστιαία αναλογία των περιπτώσεων περιχάραξης που αναφέρονται στην πολυπλοκότητα των διδακτικών ενεργειών για την οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης.



Γράφημα: *Βηματισμός και πολυπλοκότητα διδακτικών ενεργειών*

Από τη μελέτη των ποσοτικών δεδομένων συμπεραίνουμε τα εξής:

- Υπάρχει ουσιαστική διαφοροποίηση μεταξύ των ΜπC και ΜνC όσον αφορά την πολυπλοκότητα των διδακτικών ενεργειών που απαιτούνται να γίνουν για το πέρασμα της μαθηματικής γνώσης στους μαθητές. Το γεγονός αυτό συνδέεται και με τη στοχοθεσία του κάθε αναλυτικού προγράμματος και το εύρος της μαθηματικής γνώσης που πρέπει να έχουν κατακτήσει οι μαθητές όταν έχουν ολοκληρώσει τη φοίτησή τους στη Β' τάξη. Έτσι, σύμφωνα με το παλαιό αναλυτικό πρόγραμμα, κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους επιδιωκόταν ώστε οι μαθητές να προσεγγίσουν την ακολουθία των αριθμών από το 20 μέχρι το 100. Αντίθετα, με το νέο αναλυτικό πρόγραμμα η ύλη της Β' τάξης ξεκινά από το 100 και επεκτείνεται μέχρι το 1000. Το γεγονός αυτό δηλώνει τη διάθεση περισσότερου διδακτικού χρόνου στην περίπτωση του παλαιού αναλυτικού προγράμματος για την κατάκτηση και εμπέδωση της μαθηματικής γνώσης.
- Στην περίπτωση των ΜπC της Β Δημοτικού κυριαρχεί η ασθενής περιχάραξη (Π-: ποσοστό 59,30%) και ακολουθεί η Π+ (ποσοστό 39,53%), ενώ η περίπτωση της Π++ είναι ουσιαστικά αμελητέα (ποσοστό 1,16%). Παράδειγμα ασθενούς περιχάραξης (Π-), όσον αφορά την πολυπλοκότητα των διδακτικών ενεργειών, αποτελεί η περίπτωση της δραστηριότητας στο βιβλίο του μαθητή όπου ζητείται από τα παιδιά να κυκλώσουν τα γνωστά τους αντικείμενα «που μοιάζουν» (Αποστολίκας

κ.ά., 2002, σελ. 23), δηλαδή πιρούνια, κουτάλια, μαχαίρια, ποτήρια, μπάλες, αυτοκινητάκια, ποδηλατάκια, λουλούδια.

- Στην περίπτωση των ΜνC της Β' Δημοτικού κυριαρχεί η ισχυρή περιχάραξη (Π+: ποσοστό 58,82%) και ακολουθούν οι περιπτώσεις Π- (23,53%) και Π++ (17,65%).

Παράδειγμα ισχυρής περιχάραξης (Π+), όπου απαιτείται από τους μαθητές να πραγματοποιήσουν απλές μαθηματικές πράξεις, όπως είναι η πρόσθεση ή η αφαίρεση για την επίλυση ενός προβλήματος, είναι το εξής:

«Ο Νικόλας και η ομάδα του ζωγράφισαν 25 αυτοκινητάκια και τα τοποθέτησαν στο κολάζ τους. Πόσα πρέπει να ζωγραφίσουν ακόμα για να έχει το κολάζ 38 αυτοκινητάκια; Υπολογίζω και εξηγώ με αριθμούς:» (Καριωτάκης κ.ά., 2006, Τετράδιο Μαθητή, Κεφάλαιο 10, δραστηριότητα δ, σελ. 27).

Παραδείγματα πολύ ισχυρής περιχάραξης (Π++) έχουμε στις περιπτώσεις των ασκήσεων του Σχήματος 1, όπου για την επίλυση αυτών των προβλημάτων απαιτείται από τους μαθητές: α) η κατοχή των *κανόνων αναγνώρισης* (recognition rules) του πλαισίου των προβλημάτων και β) η συνδυαστική χρήση γνώσεων από τα πεδία των κοινωνικο-οικονομικών σχέσεων και των μαθηματικών.

Οι δυσκολίες ανάγνωσης του πλαισίου αναφοράς των προβλημάτων του Σχήματος 1 θα αναλυθεί περαιτέρω, ώστε να αναδειχθούν τα πρόσθετα προβλήματα μάθησης που δημιουργεί η περίπτωση της πολύ ισχυρής περιχάραξης βηματισμού που απαντάται στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα.

ΟΙ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗΣ ΤΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

Στις πρώτες σχολικές βαθμίδες η εισαγωγή στις μαθηματικές έννοιες επιχειρείται συνήθως μέσα από κατάλληλα εμπειρικά πλαίσια που προσομοιάζουν σε ρεαλιστικές καταστάσεις. Το νόημα των μαθηματικών εννοιών οικοδομείται ενεργά από το μαθητή ως μια σχέση μεσολάβησης (mediation) μεταξύ σημείων/συμβόλων (signs/symbols) από τη μια πλευρά και αντικειμένων/πλαισίων αναφοράς (objects/references) από την άλλη (Steinbring, 2005, 2006). Στις περιπτώσεις όμως που το πλαίσιο αναφοράς δεν είναι οικείο στους μαθητές και η «ανάγνωσή» του δεν είναι σαφής, δηλαδή οι μαθητές δεν κατέχουν τους κανόνες αναγνώρισης (recognition rules), τότε η οικοδόμηση της επιθυμητής μαθηματικής γνώσης καθίσταται προβληματική (Dowling, 1998, 2001, Bernstein, 2000). Το γεγονός αυτό καταδεικνύεται στην περίπτωση των προβλημάτων που επιλέχτηκαν από το σχολικό βιβλίο (Σχήμα 1). Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται οι λύσεις που δόθηκαν στα τρία προβλήματα από τους μεταπτυχιακούς φοιτητές του δείγματός μας. Σύμφωνα με την τυπολογία των σχολικών μαθηματικών, ως «σωστές» λύσεις για τα προβλήματα θεωρούνται: για το πρώτο, δύο νομίσματα των δύο ευρώ, για το δεύτερο, τρία νομίσματα των δύο ευρώ και για το τρίτο, ένα χαρτονόμισμα των πέντε ευρώ.

	Προτεινόμενες Λύσεις		Συχνότητες
1ο πρόβλημα	I	2 2	7
	II	1 1 1 1	3
	III	1	
	IV	1 1 1 50 50	1
2ο πρόβλημα	I	2 2 2	5*
	II	1 1 1 1 1 1	
	III	5 1	3
	IV	1 1 1 1 1	1
	VI	1 1 1 1 50 50 50 20λ 20λ 10λ	1
	VII	1 1 1 1 20λ 20λ 10λ	1*
	VIII	2 2 1 50 20λ 20λ 10λ	1

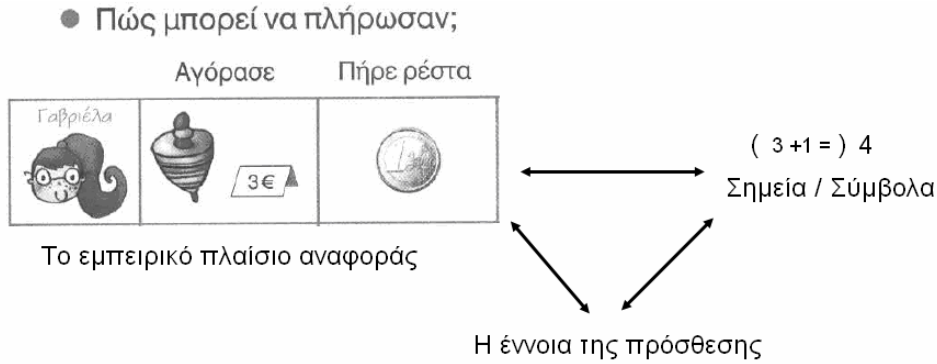
**Σε ένα υποκείμενο καταγράφονται δύο απαντήσεις (I και VII).*

3ο πρόβλημα	I	5	7*
	II	2 2 1	2*
	III	1 1 1 1 1	1
		1 1 1 1 50 30λ 20λ	1
		1 1 1 50 50 50 20λ 20λ 10λ	1

**Σε ένα υποκείμενο καταγράφονται δύο απαντήσεις (I και II).*

Πίνακας 1: *προτεινόμενες λύσεις από τους φοιτητές*

Το νόημα των εννοιών της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης οικοδομείται, για παράδειγμα στο πρώτο πρόβλημα, ως μια σχέση διαμεσολάβησης μεταξύ του εμπειρικού πλαισίου αναφοράς από τη μια πλευρά και των σημείων/συμβόλων από την άλλη. Έτσι, το εμπειρικό πλαίσιο αναφοράς, που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2, είναι το αντικείμενο με την αναγραφόμενη τιμή και τα ρέστα (1€), ενώ τα σημεία-σύμβολα είναι η πράξη της πρόσθεσης 3+1=4.



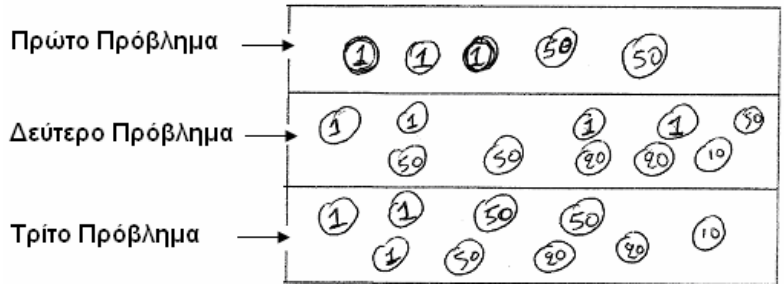
Σχήμα 2: *Το εμπειρικό πλαίσιο αναφοράς στο πρώτο πρόβλημα*

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η «σωστή» απάντηση προϋποθέτει ότι ο μαθητής γνωρίζει την έννοια των «ρέστων», κατανοεί ότι το άθροισμα της αξίας του αντικειμένου και των ρέστων ισούται με το συνολικό ποσό των χρημάτων που έδωσε και παράλληλα μπορεί να υπολογίζει σωστά το άθροισμα και τέλος, κατανοεί και αποδέχεται την κοινωνική σύμβαση σύμφωνα με την οποία, δεν δίνουμε νομίσματα τα οποία θα μας επιστραφούν ως ρέστα.

Συνεπώς, οι συνθήκες των συγκεκριμένων προβλημάτων προσδιορίζουν ότι η σωστή απάντηση οφείλει να προσμετρά τις πρακτικές μιας κοινωνικά ορθής οικονομικής συναλλαγής και όχι οποιεσδήποτε λύσεις, οι οποίες στα πλαίσια της τυπικής αριθμητικής θεωρούνται σωστές. Σε μια «ορθή» οικονομική συναλλαγή για την αγορά ενός αντικειμένου αξίας 3€, για να πάρουμε ρέστα 1€, απαιτείται να δώσουμε δύο κέρματα των 2€. Από μαθηματική όμως άποψη ισότητες, όπως, για παράδειγμα, 1+3=1+1+1+1 ή 1+3=1+1+1+0,50+0,50 κ.λπ., είναι εξίσου σωστές!

Η δυσλειτουργία του συγκεκριμένου πλαισίου αναφοράς αποτυπώνεται στις λύσεις που προτείνονται από τις φοιτήτριες του δείγματός μας. Αρκετές από

αυτές (4 στις 11 στο πρώτο πρόβλημα, 6 στις 11 στο δεύτερο και 4 στις 11 στο τρίτο) δίνουν λύσεις που θεωρούνται «προβληματικές» σε ένα κοινωνικό πλαίσιο συναλλαγών, ενώ οι περισσότερες από αυτές είναι μαθηματικά σωστές, όπως στην περίπτωση της επόμενης φοιτήτριας (Σχήμα 3):

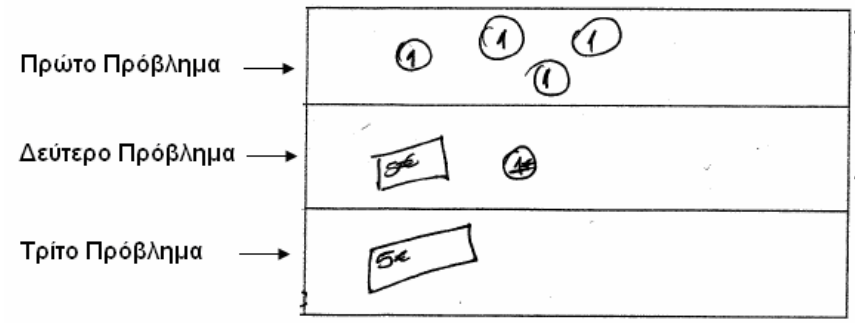


Σχήμα 3: *Μια «προβληματική» λύση*

Η συγκεκριμένη φοιτήτρια σχολιάζει τα προβλήματα ως εξής:

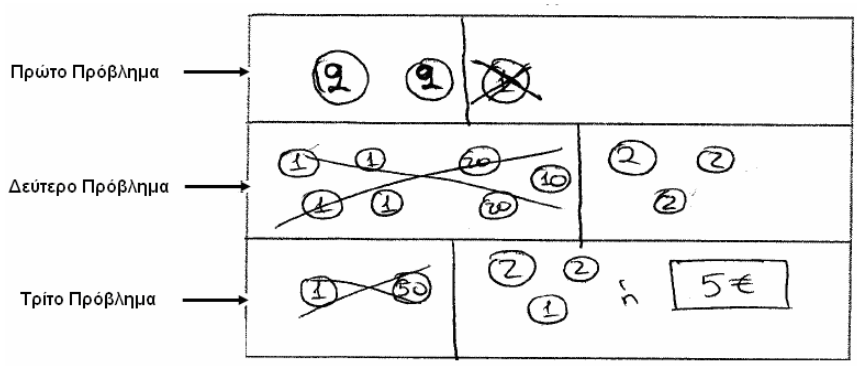
Φοιτήτρια: «Κατά τη γνώμη μου ήταν εύκολη η προσέγγιση του προβλήματος. Έχει να κάνει με την πρόσθεση. Προσθέτουμε αυτά που έδωσε για την αγορά και αυτά που πήρε ρέστα και βλέπουμε πόσα χρήματα έδωσε. Για τα παιδιά της Β Τάξης πιστεύω ότι θα ήταν εύκολο».

Κατά παρόμοιο τρόπο μια άλλη φοιτήτρια (Σχήμα 4), ενώ δίνει λύσεις μαθηματικά σωστές, στα δύο πρώτα προβλήματα δεν προσμετρά τους περιορισμούς του κοινωνικού πλαισίου, σύμφωνα με το οποίο δεν δίνουμε νομίσματα που θα μας επιστραφούν ως ρέστα.



Σχήμα 4: *Μια δεύτερη «προβληματική» λύση*

Οι δυσκολίες κατανόησης του πλαισίου οδηγεί συχνά σε διλήμματα που εκφράζονται από διορθωτικές παρεμβάσεις, όπως στην επόμενη περίπτωση (Σχήμα 5).



Σχήμα 5: *Αδυναμία κατανόησης του πλαισίου*

Η φοιτήτρια του προηγούμενου παραδείγματος περιγράφει τις δυσκολίες κατανόησης ως εξής:

Φοιτήτρια: «Στην αρχή θεώρησα ότι ήταν πολύ απλά προβλήματα, αλλά όταν τα παρατήρησα καλά, ιδιαίτερα στα ρέστα δυσκολεύτηκα πολύ. […] Όσον αφορά τα παιδιά της Β Δημοτικού, θεωρώ πως δεν θα λύσουν την άσκηση σωστά, καθώς είναι λίγο πονηρή και δεν θα προσέξουν τα ρέστα ώστε να βρουν το κατάλληλο χρηματικό ποσόν που δόθηκε».

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην παρούσα έρευνα επιχειρήθηκε, με βάση το θεωρητικό πλαίσιο του Bernstein για την περιχάραξη βηματισμού, που αναφέρεται στο διδακτικό λόγο, η συγκριτική αξιολόγηση του εκπαιδευτικού υλικού που αντιστοιχεί στο νέο και στο παλαιό αναλυτικό πρόγραμμα Μαθηματικών της Β Τάξης του Δημοτικού σχολείου.

Η ανάλυση της περιχάραξης βηματισμού στις δύο περιπτώσεις του εκπαιδευτικού υλικού, που εξετάσαμε, φανερώνει την ύπαρξη ουσιαστικής και σημαντικής διαφοροποίησης μεταξύ τους. Μάλιστα τα δύο αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών ακολουθούν εκ διαμέτρου αντίθετους δρόμους. Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση του ΜπΣ η προσέγγιση και η γνωστική επεξεργασία της μαθηματικής γνώσης γινόταν μέσα σε ένα εμπειρικό πλαίσιο αναφοράς με τη χρήση και αξιοποίηση γνωστών, σχετικά απλών και οικείων στους μαθητές εποπτικών μέσων και υλικών. Η οικειοποίηση της μαθηματικής γνώσης και η διδασκαλία των μαθηματικών με το ΜπΣ γινόταν, σε μεγάλο βαθμό, στο σχολείο. Αντίθετα, στην περίπτωση του νέου έντυπου υλικού είναι καταφανής η πρόθεση για τη συγκρότηση αφη-

ρημένης μαθηματικής σκέψης με την εφαρμογή ισχυρών μορφών βηματισμού περιχάραξης. Το πρόβλημα αυτό επιτείνεται με τις συχνές ασάφειες των εμπειρικών πλαισίων αναφοράς, που υπάρχουν στο περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων για το μαθητή, όπως στην περίπτωση των προβλημάτων που παρουσιάστηκαν.

Η έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών δείχνει ότι ο τρόπος που οι μαθητές αναπαριστάνουν νοητικά τις πληροφορίες που δίνονται στα προβλήματα βρίσκεται σε στενή συνάφεια με τις γνώσεις τους (Lesh et al., 1987; Kaput, 1991). Οι υπάρχουσες γνωστικές δομές των μαθητών δημιουργούν μορφές αναπαραστάσεων και πνευματικά πρότυπα που μορφοποιούν και καθοδηγούν τον τρόπο επίλυσης του κάθε προβλήματος. Δηλαδή, καθώς αναπτύσσεται η μαθηματική γνώση των μαθητών, τροποποιούνται και εμπλουτίζονται οι μορφές αναπαράστασης όπως και τα πνευματικά τους πρότυπα.

Οι αποσπασματικές γνώσεις και οι πληροφορίες που συχνά δίνονται στους μαθητές μέσω των εικόνων ή των γραφημάτων των σχολικών εγχειριδίων, καθώς και η ασάφεια και πολυσημία της ερμηνεία τους, δυσκολεύουν στη συγκρότηση της νέας γνώσης. Το γεγονός αυτό αναδεικνύει μια πρόσθετη παράμετρο της παιδαγωγικής πρακτικής που σχετίζεται με την μορφή του βηματισμού περιχάραξης. Πρόκειται για την ανάγκη ώστε ο σχεδιασμός των σχολικών εγχειριδίων να προσμετρά τις βασικές γνώσεις των μαθητών και να δίνει έμφαση στην ανάπτυξη της ικανότητας απόδοσης νοήματος και συνοχής στα αντικείμενα που πραγματεύονται (Glaser, 1991).

Η μελέτη εμπειρικών δεδομένων σχετικά με τη νέα σχολική μαθηματική γνώση δείχνουν ότι οι αλλαγές στη μαθηματική εκπαίδευση του Δημοτικού, παρά τη διατεινόμενη πρόθεση για ενσωμάτωση των σύγχρονων παιδαγωγικών και διδακτικών προσανατολισμών, είναι προβληματική και ανεπαρκής (π.χ. Ζαχάρος, 2007, Καφούση & Χαβιάρης, 2007). Το νέο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών της Β τάξης με τον προτεινόμενο βηματισμό περιχάραξης καθιστά ιδιαίτερα δύσκολη τη διδασκαλία της ύλης και την κατανόησή της από τους μαθητές. Επιπλέον, στο έντυπο υλικό που προορίζεται για το μαθητή συχνά απαντώνται ασάφειες και λάθη (Ζαχάρος, 2007, Καφούση & Χαβιάρης, 2007). Τα προηγούμενα, καθιστούν αναγκαία την προσφυγή σε ένα δεύτερο παιδαγωγικό πλαίσιο ενίσχυσης της διδασκαλίας, που συνήθως αναλαμβάνει η οικογένεια, γεγονός που πιθανόν θα επιτείνει τις ήδη υπάρχουσες εκπαιδευτικές ανισότητες (Koustourakis, 2007).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Bernstein, B. (1987) *On Pedagogic Discourses (Revised)* (Department of the Sociology of Education, Univesrity of London).

Bernstein, B. (1990) *Class, Codes and Control: The Structuring of Pedagogic Discourse*, Vol. 4 (London, Routledge).

Bernstein, B. (1996) *Pedagogy, Symbolic Control and Identity* (London, Taylor & Francis).

Bernstein, B. (2000) *Pedagogy, Symbolic Control and Identity. Theory, Research, Critique, Revised Edition* (Lanham, Rowman & Littlefield Publishers Inc.).

Dowling, P. (1998) *The Sociology of Mathematics Education. Mathematical Myths/Pedagogic Texts* (London, Falmer Press).

Dowling, P. (2001) Mathematics Education in Late Modernity: Beyond Myths and Fragmentation, in: B. Atweh, H. Forgasz & B. Nebres (Eds.) *Sociocultural Research on Mathematics Education* (pp. 19-36) (Mahwah, New Jersey, London, Lawrence Erlbaum Associates Publishers).

Glaser, R. (1991) The maturing of the relationship between the science of learning and cognition and educational practice, *Learning and Instruction,* 1 (2), 129-144.

Kaput, J. (1991) Notations and representations as mediators of constructive processes, in: E. Von Glasersfeld (Ed.) *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 53-74) (Dordrecht, Kluwer Academic Publishers).

Koustourakis, G. (2007) The new educational policy for the reform of the curriculum and the change of school knowledge in the case of Greek compulsory education. *International Studies in Sociology of Education*, 17(1-2), 129-144.

Krippendorff, K. (1980) *Content Analysis. An Introduction to its Methodology* (Newbury Park, Sage Publ.)

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987) Representations and Translations Among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving, in: C. Janvier (Ed.) *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp.33-40) (Hillsdale, Erlbaum).

Morais, A.M. (2002) Basil Bernstein at the Micro Level of the Classroom. *British Journal of Sociology of Education*, 23 (4), 559-569.

Morais, A.M., Neves, I.P. & Fontinas, F. (1999) Is There Any Change in Science Educational Reforms? A sociological study of theories of instruction. *British Journal of Sociology of Education*, 20 (1), 37-53.

Steinbring, H. (2005) *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective* (N.Y., Springer).

Steinbring, H. (2006) What Makes a Sign a *Mathematical Sing?* An Epistemological Perspective on Mathematical Interaction. *Educational Studies in Mathematics*, *61(1-2)*, 133-162.

Αποστολίκας, Γ., Διονυσοπούλου, Τ. & Σαλβάρας, Γ. (2002). *Μαθηματικά Δευτέρας Δημοτικού (Βιβλίο του Μαθητή, Βιβλίο για το Δάσκαλο).* Ο.Ε.Δ.Β.

Καριωτάκης, Γ., Μαραγκού, Α., Μπελίτσου, Ν. & Σοφού, Β. (2006), *Μαθηματικά Β Δημοτικού* (Βιβλία και Τετράδια Μαθητή και Βιβλίο Δασκάλου). Ο.Ε.Δ.Β.

Ζαχάρος, Κ. (2007). Ο ρόλος των εμπειρικών πλαισίων αναφοράς στην οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης. Η χρήση τους στα νέα σχολικά βιβλία μαθηματι-

κών της Β Τάξης Δημοτικού. *Διδακτική των Φυσικών Επιστημών. Έρευνα και Πράξη (Ε.ΔΙ.ΦΕ.)*, τόμος 20-21, σελ. 66-73.

Καφούση, Σ. & Χαβιάρης, Π. (2007). Μεταγνωστικές διαδικασίες και κοινωνική αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών στα μαθηματικά: ο ρόλος των σχολικών εγχειριδίων. Ημερίδα που διοργάνωσε η Ε.ΔΙ.Φ.Ε. και το Τ.Ε.Ε.Α.Π.Η., του Πανεπιστημίου Πατρών, την 27-2-2007, στο Πανεπιστήμιο Πατρών, με θέμα: «*Τα νέα Σχολικά Εγχειρίδια του Δημοτικού Σχολείου στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες. Κριτική Προσέγγιση*».

ΠΟΛΥ-ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΟΤΗΤΑ, ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟ ΤΗΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης

Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κατά τη διάρκεια των τελευταίων δεκαετιών πολλοί ερευνητές στο πεδίο της μαθηματικής εκπαίδευσης δέχονται και προωθούν τη θέση ότι είναι πολύ σημαντικό να δείξουμε καταρχήν στους καθηγητές του αντικειμένου και κατ'επέκταση στους μαθητές τους, τρόπους με τους οποίους η μαθηματική σκέψη και οι διάφορες εφαρμογές της αναπτύχθηκαν σε διαφορετικούς πολιτισμούς και σε διαφορετικές ιστορικές περιόδους. Αυτό μπορεί να αποτελέσει ακόμη ένα εργαλείο για τη διδασκαλία και μπορεί να επιτρέψει τη βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Το Παγκόσμιο Συνέδριο Ιστορίας των Επιστημών στο Μεξικό το 2001 έγινε υπό τον τίτλο της πολιτισμικής ποικιλομορφίας (Cultural Diversity) και ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά του ήταν ότι η ιστορία που δείχνει την ποικιλομορφία αντί για την καθολικότητα της μαθηματικής και επιστημονικής εξέλιξης προσθέτει μια πολύ ενδιαφέρουσα διάσταση στο αντικείμενο διότι δηλώνοντας ότι τα μαθηματικά έχουν μια ιστορία μπορεί να αλλάξει την εικόνα που έχει αυτή η επιστήμη στα μάτια των καθηγητών και κατά συνέπεια των μαθητών. Τα μαθηματικά, με την αποδοχή αυτής της θέσης, δεν συνοψίζονται πλέον σε ένα τελικό προϊόν αλλά πρόκειται για μια διαδικασία κατασκευής μέσα στον χρόνο και τον χώρο. Η χρήση στοιχείων Ιστορίας των μαθηματικών κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας μιας έννοιας ή μιας τεχνικής προσφέρει στον δάσκαλο/α και κατ' επέκταση στους μαθητές/τριες του/της δύο σημαντικές ευκαιρίες για περιπλάνηση σε δύο διαστάσεις. Ταξίδι στον χρόνο κατά την διάρκεια του οποίου αφήνουν κατά μέρος το καθεστώς της στερεότυπης γνώσης, «που ήρθε από τον ουρανό» για να τοποθετήσουν στην θέση της μια γνώση κατασκευασμένη από την ανθρωπότητα: οι μαθηματικές γνώσεις δεν ήταν πάντοτε εδώ, αλλά κατασκευάστηκαν και άλλαξαν μορφή κατά την διάρκεια της ιστορίας για να επιλύσουν προβλήματα και να γίνουν τα εργαλεία απάντησης σε σημαντικές ερωτήσεις. Ταξίδι στον

χώρο, διότι η ιστορία των μαθηματικών επιτρέπει να επανατοποθετήσουμε την ανθρώπινη κατασκευή στο πλαίσιο των διαφορετικών πολιτισμών: τα μαθηματικά είναι Βαβυλωνιακά, Αιγυπτιακά, Ελληνικά, Αραβικά και Ινδικά· είναι αυτά του Μεσαίωνα και της Αναγέννησης ή εκείνα του 17ου - 18ου αιώνα. Δηλώνοντας ότι τα μαθηματικά έχουν μια ιστορία επιτρέπει μια πολιτισμική προσέγγιση αυτής της επιστήμης(Cerquetti & als, 1997).

Η ιστορία που ενδιαφέρει τους καθηγητές είναι επιστημολογική, εννοιολογική και πολιτισμική και πριν φτάσει να γίνει ένα μέσο για τη διδασκαλία του αντικειμένου οφείλει να περάσει μέσα από την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Barbin, E. 1987, 1997, Fauvel, J. 1991, 2000, Fauvel, J., Van Maanen, J. 2000, El Idrissi, A. 1999, Lefort, X. 1990).

Οι λόγοι της προσπάθειας εισαγωγής της ιστορικής και πολιτισμικής διάστασης στην διδασκαλία των μαθηματικών είναι ποικίλοι και κυρίως εστιάζονται στους εξής:

- να γίνουν περισσότερο ανθρώπινα τα μαθηματικά,
- να τοποθετηθεί η μαθηματική γνώση στο πλαίσιο ενός πολιτισμού,
- να δοθούν κίνητρα στους μαθητές και να μετασχηματιστούν οι στάσεις τους απέναντι στο αντικείμενο,
- να δοθεί στους εκπαιδευτικούς η πλέον κατάλληλη μόρφωση – επιμόρφωση,
- να εντοπισθούν και να αναλυθούν επιστημολογικά εμπόδια καθώς και οι έννοιες που κατανοούν οι μαθητευόμενοι,
- να δειχθεί ότι τα μαθηματικά έχουν μια ιστορία και ότι επηρεάστηκαν από πολιτισμικούς και κοινωνικούς παράγοντες,
- να αποτελέσει ακόμη μια πρόταση για διαθεματική εργασία με τους μαθητές τους,
- να βελτιώσουμε και να εμπλουτίσουμε τις μαθηματικές γνώσεις των δασκάλων σε πεδία που περιλαμβάνονται στο αναλυτικό πρόγραμμα.

Οι μορφές και οι στρατηγικές που υιοθετήθηκαν είναι ποικίλες στην προσπάθεια εισαγωγής της πολιτισμικής και ιστορικής διάστασης στη διδασκαλία των μαθηματικών: εξιστόρηση, έκθεση, κατασκευή δραστηριοτήτων, κατασκευή ασκήσεων, αναπαραγωγή χειρογράφων, πορτραίτα, βιογραφίες, διαθεματικά σχέδια, χρησιμοποίηση πρωτότυπων κειμένων, χρησιμοποίηση νέων τεχνολογιών (Fauvel & Van Maanen, 2000).

Τα βασικά χαρακτηριστικά της παρέμβασης στα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών, στην επιμόρφωση των εκπαιδευτικών, στα σχολικά εγ-

χειρίδια κ.λπ. μπορεί να είναι ένας ακόμη δρόμος εργασίας και μελέτης ενάντια σε μια εθνοκεντρική άποψη και ταυτόχρονα μια είσοδος σε διαφορετικούς πολιτισμούς στο πλαίσιο της εκπαιδευτικής διαδικασίας αξιολογώντας τα διαφορετικά είδη και πεδία της μαθηματικής δραστηριότητας.

Η ιστορική μελέτη μπορεί να καλλιεργήσει προοπτική και να δώσει νέα ώθηση στους καθηγητές και στους μαθητές τους να διερευνήσουν το δικό τους παρελθόν και τον δικό τους πολιτισμό καθώς και τους αντίστοιχους πολιτισμούς των άλλων και να προσπαθήσουν να κατανοήσουν το γεγονός ότι, αυτά που έχουν κατασκευαστεί είναι ένα μέρος μιας καθολικής κληρονομιάς αντί για μιας κληρονομιάς μόνον εθνικού ή τοπικού χαρακτήρα. Τα μαθηματικά είναι κείμενο, επιγραφές, όργανα, βιβλία και τεχνικές κατασκευές οι οποίες παρήχθησαν σε διαφορετικά σημεία σε διαφορετικές ιστορικές περιόδους για ιδιαίτερους λόγους και η κατανόηση αυτών των λόγων μπορεί να μας βοηθήσει να συνδέσουμε μαθηματικές ιδέες σε κάτι περισσότερο καθολικό παρά μόνον σε σχέση με το άμεσο περιβάλλον τους (Fauvel & Van Maanen, 2000).

Η προσάρτηση στοιχείων από την ιστορία των μαθηματικών από διαφορετικούς πολιτισμούς και διαφορετικές μαθηματικές παραδόσεις στα σχολικά εγχειρίδια του επιστημονικού αντικειμένου με έναν λειτουργικό τρόπο είναι ένα από τα σημαντικότερα καθήκοντα της μαθηματικής κοινότητας διότι με αυτό τον τρόπο προσφέρουμε σε όλους τους μαθητές την δυνατότητα να τα μελετήσουν. Στη συνέχεια θα συζητήσουμε την προσπάθειά μας να εισάγουμε ιστορικά στοιχεία και μαθηματικές μεθόδους στο σχολικό εγχειρίδιο της Γ' τάξης του δημοτικού σχολείου στην Ελλάδα (Λεμονίδης & als, 2006 α, β).

Οι μέθοδοι που προτείνονται οφείλουν να έχουν λειτουργικό χαρακτήρα προσαρμοσμένα στο κείμενο και να βοηθούν τους μαθητές μεταξύ άλλων να εκτελέσουν μια πράξη και να κατανοήσουν καλύτερα μια μαθηματική έννοια. Η ιστορία μας δεν είναι βασισμένη στη προσέγγιση «ιστορίας προσωπικοτήτων» αλλά είναι βασισμένη στην προσέγγιση της «ιστορίας επίλυσης προβλημάτων». Αυτή είναι μια σημαντική παράμετρος των «Μαθηματικών της φύσης και της ζωής» (Lemonidis, 2005).

ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΑ ΚΑΙ ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟ ΤΗΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΤΗΣ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Στην Ελλάδα, όλοι οι μαθητές χρησιμοποιούν το ίδιο σχολικό εγχειρίδιο για τα μαθηματικά αλλά και για όλα τα υπόλοιπα διδακτικά αντικείμενα. Τα εγχειρίδια προσφέρονται δωρεάν από το Υπουργείο Παιδείας και επιλέγονται από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε παραδείγματα από το σχολικό εγχειρίδιο, το τετράδιο εργασιών του μαθητή καθώς και το βιβλίο του δασκάλου/ας (Λεμονίδης & als, 2006 α, β).

ΤΑΝΓΚΡΑΜ

Στο κεφάλαιο 3 μελετάμε το Τάνγκραμ. Σε αυτή την περίπτωση οι μαθητές παρατηρούν και να αναγνωρίζουν τα ίδια σχήματα παρά την αλλαγή της θέσης και του προσανατολισμού τους στην σελίδα – επίπεδο. Η δεξιότητα της αναγνώρισης όμοιων σχημάτων ασκείται μέσα στο συγκεκριμένο πλαίσιο της Κινέζικης μαθηματικής παράδοσης και πολιτισμού. Στο κεφάλαιο 42 θα κατασκευάσουν το τάνγκραμ από χαρτόνι, και θα μπορέσουν να ασκηθούν περαιτέρω.

Το πλαίσιο εισαγωγής του Τάνγκραμ είναι η μελέτη των γεωμετρικών επίπεδων σχημάτων και στερεών σωμάτων. Οι στόχοι και οι διδακτικές οδηγίες είναι ότι «οι μαθητές γνωρίζουν ήδη τα ονόματα των βασικών γεωμετρικών επίπεδων σχημάτων και στερεών σωμάτων. Σκοπός της εν λόγω παρέμβασης είναι θυμηθούν τα βασικά χαρακτηριστικά τους και να επεκτείνουν τις γνώσεις τους. Βασικός στόχος είναι οι μαθητές με την ολοκλήρωση της διδασκαλίας να αναγνωρίζουν και να απομονώνουν ένα σχήμα μέσα από μια σύνθεση η γεωμετρικών σχημάτων. Ένας ακόμη στόχος είναι να ασκήσουμε τους μαθητές, ώστε να αναγνωρίζουν τα σχήματα σε διάφορες θέσεις στο χώρο και όχι μόνο στην πρότυπη θέση. Είναι πολύ σημαντικό για τους μαθητές να ανακαλύπτουν εμπειρικά τις σχέσεις μεταξύ των σχημάτων. Προς αυτή την κατεύθυνση μπορούμε να αναπτύξουμε δραστηριότητες που επιτρέπουν τον χειρισμό γνωστών σχημάτων για την παραγωγή – σχηματισμό νέων».

Στο βιβλίο ασκήσεων του/της μαθητή/τριας, στην δραστηριότητα 2, οι μαθητές κατασκευάζουν δύο τρίγωνα από χαρτί και τα χρησιμοποιούν μαζί για να κατασκευάσουν άλλα σχήματα, ένα τετράγωνο και ένα ισοσκελές τρίγωνο.

Στη συνέχεια, στο κεφάλαιο 42, στο πλαίσιο διδασκαλίας των Παζλ, πλακόστρωτων και μωσαϊκών γίνεται ξανά χρήση του Τάνγκραμ για την προσέγγιση και εφαρμογή των οπτικών διαδικασιών της ανάλυσης και σύνθεσης γεωμετρικών σχημάτων. Όλες οι δραστηριότητες αναπτύσσουν τις γεωμετρικές οπτικές δεξιότητες οι οποίες θεωρούνται εξαιρετικά χρήσιμες. Εισάγουν τους μαθητές στην έννοια της επιφάνειας σε μια προεμβαδιακή κατάσταση και εμβαθύνουν στην μελέτη των ιδιοτήτων των σχημάτων. Σε αυτό το σημείο στο πλαίσιο της διαθεματικής προσέγγισης μπορούμε να αναφερθούμε

στον Κινέζικο πολιτισμό και στην δική του διαφορετική μαθηματική παράδοση.

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ

Στο κεφάλαιο 6 γίνεται εισαγωγή του Πυθαγόρειου Πίνακα. Οι μαθητές τον μελετούν και διαπιστώνουν ότι περιέχει πολλαπλάσια των αριθμών κάνοντας χρήση των γραμμών και των στηλών του. Παρατηρούν την ανάπτυξη των πολλαπλασιασμών με το 1, το 2, το 5 και το 10. Τους ζητάμε να βρουν με πόσους τρόπους και σε ποια σημεία μπορούμε να δούμε για παράδειγμα τον αριθμό 24 και να σημειώσουν τους διαφορετικούς πολλαπλασιασμούς.

Μπορούμε σε αυτό το σημείο στο πλαίσιο της διαθεματικής προσέγγισης να δώσουμε στοιχεία για τη ζωή και τις δραστηριότητες του Πυθαγόρα και της κοινότητάς του. Να μιλήσουμε για τα διαφορετικά είδη αριθμών που ανέπτυξε: άρτιοι, περιττοί, τετράγωνοι, τρίγωνοι και φυσικά το πολύ γνωστό θεώρημά του.

ΑΡΙΘΜΟΙ ΜΕΧΡΙ ΤΟ 3.0000

Στο κεφάλαιο 14, εργαζόμαστε στους αριθμούς μέχρι το 3.000 εισάγοντας το Ρωμαϊκό αριθμητικό σύστημα. Δείχνουμε στους μαθητές ότι εκτός από τα σύμβολα των μονάδων (1, 10, 100 και 1.000), υπάρχουν και σύμβολα για τους αριθμούς (5, 50 και 5000). Αυτή είναι μια εξέλιξη η οποία γίνεται για να αποφεύγεται η μεγάλη επανάληψη συμβόλων. Το ρωμαϊκο σύστημα αρίθμησης προχωρεί και πέρα από το Μ (1000). Σε σχέση με το Ινδο-αραβικό αριθμητικό σύστημα που χρησιμοποιούμε σήμερα οι μαθητές παρατηρούν ότι παρουσιάζει βασικά μειονεκτήματα όπως: έχει πολλά σύμβολα, επαναλαμβάνει συχνά το ίδιο σύμβολο και δεν υπάρχει μηδέν.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΟΥ «ΕΛΛΗΝΙΚΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ» ΣΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

Στο κεφάλαιο 29, συνεχίζουμε την πρακτική των μαθητών στον πολλαπλασιασμό με τη βοήθεια τετραγωνισμένου χαρτιού. Τους οδηγούμε να περνούν από το σχήμα του τετραγωνισμένου χαρτιού, όπου οι παράγοντες του γινομένου χωρίζονται ανά 10, στον αντίστοιχο πίνακα του πολλαπλασιασμού. Αυτό τον πολλαπλασιασμό τον ονομάζουμε «Ελληνικό πολλαπλασιασμό». Παρουσιάστηκε από τον Ευτόκιο-έλληνα σχολιαστή του 6ου αιώνα μ.Χ. (Mugler, 1972). Ο ελληνικός πολλαπλασιασμός αποτελεί ένα πολύ

καλό μέσο, για να εισάγουμε τους μαθητές στον αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού που χρησιμοποιούμε σήμερα.

Στο βιβλίο του μαθητή στην 1η δραστηριότητα οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες και τους ζητάμε να κόψουν και να σχηματίσουν στο τετραγωνισμένο χαρτί ένα ορθογώνιο με 24x35 τετραγωνάκια. Κόβοντας το ορθογώνιο τους ζητάμε να υπολογίσουν πόσα είναι τα τετραγωνάκια του. Οι μαθητές προτείνουν διάφορες λύσεις και τους συμβουλεύουμε να χαράξουν στο ορθογώνιο ώστε να σχηματιστούν τετράγωνα και ορθογώνια και με αυτό τον τρόπο να υπολογίσουν τον αριθμό των τετραγώνων. Μέσα από συζήτηση ο δάσκαλος/α οδηγεί τους μαθητές να χαράξουν και να χωρίσουν το ορθογώνιο με τον τρόπο που δείχνει ο πίνακας του βιβλίου, δηλ. να σχηματίσουν έναν πίνακα με 20 και 4 γραμμές και 30 και 5 στήλες. Τους ζητούμε να συγκρίνουν αυτό τον πίνακα με έναν άλλο που θα μπορούσε να κατασκευαστεί με βάση τη λογική που προτάθηκε στο προηγούμενο μάθημα, δηλ. έναν πίνακα με 10, 10 και 4 γραμμές και 10, 10, 10 και 5 στήλες. Στο τέλος παρουσιάζουμε τον τρόπο με τον οποίο πολλαπλασιάζονται δύο διψήφιοι αριθμοί με τον ελληνικό πολλαπλασιασμό.

Στόχος της δραστηριότητας 3 είναι να ασκήσει τους μαθητές στο να χρησιμοποιούν τον πίνακα, για να αναλύουν διψήφιους αριθμούς και να υπολογίζουν τα επιμέρους γινόμενα.

Στο τετράδιο εργασιών προτείνεται ο πολλαπλασιασμός διψήφιων αριθμών με μονοψήφιο και στην δραστηριότητα 2 καλούνται να συμπληρώσουν τα επιμέρους γινόμενα στον πίνακα. Στόχος είναι να παρατηρήσουν ότι τα γινόμενα που παρουσιάζονται δίπλα προκύπτουν από πολλαπλασιασμούς σε δύο κελιά του πίνακα. Στην επόμενη δραστηριότητα (αρ. 3) έχουμε πολλαπλασιασμούς διψήφιων και τριψήφιων αριθμών με μονοψήφιο με στόχο να ασκήσουν τους μαθητές σε ανάλυση των αριθμών και στη χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση.

Στο επόμενο κεφάλαιο εισάγουμε τον αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού και ένας από τους στόχους είναι η ερμηνεία των προϊόντων του αλγορίθμου τα οποία προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό κάθε ψηφίου του πολλαπλασιαστή με τον πολλαπλασιαστέο κάνοντας χρήση, ως βάση, τον πίνακα του πολλαπλασιασμού και να τα θεωρούν ως την πιο σύντομη έκφραση των γινομένων του πίνακα του πολλαπλασιασμού

Ο Ελληνικός πολλαπλασιασμός γίνεται πιο εύχρηστος από τους μαθητές και πιο εύκολος στην παρουσίασή του αν χρησιμοποιηθεί ένας πίνακας 2x2 για την ανάλυση του πολλαπλασιαστή και του πολλαπλασιαστέου. Οι δύο παράγοντες του γινομένου αναλύονται σε μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, κτλ. στις στήλες του πίνακα τοποθετείται η ανάλυση του πολλαπλασια-

στέου και στις γραμμές του πολλαπλασιαστή. Προτείνεται να τοποθετούνται ο πολλαπλασιαστής και ο πολλαπλασιαστέος σε αυτές τις θέσεις για να υπάρχει αντιστοιχία με τον κλασικό αλγόριθμο στον οποίο συνήθως τοποθετούμε τον μεγάλο αριθμό –τον πολλαπλασιαστέο- επάνω και τον μικρό αριθμό –τον πολλαπλασιαστή- κάτω πολλαπλασιάζοντας τον κάτω αριθμό επί τον επάνω.

Ο Ευτόκιος εκτελούσε τους επιμέρους πολλαπλασιασμούς με φθίνουσα σειρά. Πολλαπλασίαζε δηλαδή πρώτα τους μεγαλύτερους αριθμούς και μετά τους μικρότερους. Στον κλασικό αλγόριθμο ο πολλαπλασιασμός γίνεται από τα δεξιά προς τα αριστερά, δηλαδή τα ψηφία των αριθμών λαμβάνονται σε αύξουσα σειρά. Στον πίνακα βέβαια δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία θα πραγματοποιήσουμε τα επιμέρους γινόμενα.

Στο βιβλίο της Γ' τάξης ο Ελληνικός πολλαπλασιασμός χρησιμοποιείται ως ένα εισαγωγικό στάδιο για την εισαγωγή του τυπικού αλγορίθμου που χρησιμοποιούμε σήμερα καθώς και η θεσιακή αξία των ψηφίων των παραγόντων του πολλαπλασιασμού.

Τα παραπάνω παραδείγματα εισήχθησαν για να βοηθήσουν τους εκπαιδευτικούς να βρουν και άλλες διαφορετικές ιστορικές μεθόδους για την εκτέλεση υπολογισμών οι οποίες έχουν εφαρμογές που είναι σύγχρονες και κατάλληλες.

ΑΡΙΘΜΟΙ ΜΕΧΡΙ 7.000

Στο κεφάλαιο 40, για να επεκτείνουν τις γνώσεις τους μέχρι το 7.000 κάνουμε χρήση του αρχαίου ελληνικού αλφαβητικού αριθμητικού συστήματος.

Στο βιβλίο του μαθητή, στην δραστηριότητα 1 παρουσιάζεται αυτό το αριθμητικό σύστημα. Δεν πρόκειται για ένα αριθμητικό σύστημα θέσης και δεν περιέχει σύμβολο για το μηδέν. Στόχος δεν είναι οι μαθητές να απομνημονεύσουν αυτό το αριθμητικό σύστημα, αλλά να πειραματιστούν και να το δοκιμάσουν, μετατρέποντας αριθμούς από αυτό το σύστημα στο σύγχρονο Ινδο-αραβικό. Οι μαθητές καλούνται επίσης να κάνουν σύγκριση με το ρωμαϊκό σύστημα αρίθμησης, το οποίο μελέτησαν και χρησιμοποίησαν πριν από μερικά κεφάλαια.

ΜΟΤΙΒΑ

Στο κεφάλαιο 48 παρουσιάζουμε και ασκούμε τους μαθητές σε αριθμητικά και γεωμετρικά μοτίβα. Ειδικότερα στην δραστηριότητα 3 κάνουμε χρήση του τριγώνου του Πασκάλ το οποίο είναι ένα ιδιαίτερα γνωστό αριθμητικό τρίγωνο και έχει χρησιμοποιηθεί για την επίλυση προβλημάτων συνδυαστικής και πιθανοτήτων.

ΑΝΤΙ ΓΙΑ ΕΠΙΛΟΓΟ

Όλα αυτά τα παραδείγματα μας βοηθούν στο να εξετάσουμε διαφορετικές όψεις των μαθηματικών και της εξέλιξής τους μέσω της προσέγγισης επίλυσης προβλημάτων και της εκμάθησης μεθόδων υπολογισμών. Αυτή η προσέγγιση προσθέτει την πολυπολιτισμική διάσταση στη διδασκαλία του αντικειμένου. Αυτό μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να δουν τρόπους όπου σε διαφορετικές ιστορικές περιόδους, γεωγραφική χωροθέτηση, πολιτισμό και θεωρήσεων επηρέασαν τις εξελίξεις στα μαθηματικά (Fauvel & Van Maanen, 2000).

Επίσης μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τις έννοιες των υπολογισμών – πράξεων, όπως αυτή του πολλαπλασιασμού. Αυτή η προσέγγιση επιτρέπει τους δασκάλους/ες και τους μαθητές/τριες να σκεφθούν τα μαθηματικά ως ένα επιστημονικό αντικείμενο συνεχούς στοχασμού και δράσης επηρεασμένου από πειραματισμό και εφαρμογή πρακτικών καταστάσεων όπως είναι (ή οφείλει να είναι) πάντα το πλαίσιο διδασκαλίας του αντικειμένου στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση.

Κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών στην Γ' τάξη του δημοτικού στην Ελλάδα εμφανίζονται δυνατότητες εισαγωγής παραδειγμάτων από την ιστορία των μαθηματικών (Ρωμαϊκό σύστημα αρίθμησης, αρχαίο ελληνικό αλφαβητικό σύστημα αρίθμησης, ελληνικός πολλαπλασιασμός, τάνγκραμ, τρίγωνο του Πασκάλ, Πυθαγόρειος πίνακας) από διαφορετικές πολιτισμικές προοπτικές (Νικολαντωνάκης, 2005) και υποβοηθούν την εργασία και τη μελέτη στο πλαίσιο της διαθεματικής προσέγγισης. Μαθητές και δάσκαλοι είναι ικανοί να δουν με ποιόν τρόπο ένας πολιτισμός ή μια ομάδα ανθρώπων ή μια γεωγραφική περιοχή επηρέασε μια άλλη ή πρόσθεσε στην κατανόηση η οποία ήδη υπήρχε σε ένα διαφορετικό σκηνικό. Μπορούν να αναγνωρίσουν ότι τα μαθηματικά είναι μια ανθρώπινη κατασκευή και επιχείρηση και όχι ένα συνεχές κίνημα προς την τελειότητα.

Μελετώντας και κατανοώντας τις μεθόδους που αναπτύχθηκαν από άλλες ομάδες ως απάντηση στις ανάγκες τους μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναγνωρίσουν ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της μεθόδου που διδάσκεται

σήμερα και με αυτό τον τρόπο να κατανοήσουν καλύτερα μια έννοια. Ανοίγει τις δυνατότητες συγκρίσεων και την αναγνώριση της ποικιλομορφίας και μας επιτρέπει να δούμε ότι η ανταλλαγή ιδεών μπορεί να γίνει μέσα από την καλλιέργεια αμοιβαίας ανησυχίας να διερευνήσουμε μαθηματικές έννοιες στο περιβάλλον των ανθρώπων που τις χρησιμοποίησαν.

Μέσω αυτής της παρέμβασης αναδεικνύεται το γεγονός ότι η πολυπολιτισμικότητα είναι η αναγνώριση και ο εορτασμός της ποικιλομορφίας, ο σεβασμός και η αναγνώριση της αξίας της εργασίας και της παραγωγής των άλλων, η αναγνώριση διαφορετικών πλαισίων, αναγκών και σκοπών και η πραγματοποίηση ότι κάθε κοινωνία κάνει και έχει κάνει σημαντικές συνεισφορές στο σώμα της γνώσης που ονομάζουμε μαθηματικά. Αυτή η οπτική και προοπτική στη διδασκαλία των μαθηματικών επιτρέπει μια σημαντική συνεισφορά στην ανθρωπιστική και δημοκρατική παράδοση στην μαθηματική εκπαίδευση (Fauvel & Van Maanen, 2000).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Barbin, E., (1987). Dix ans d'histoire des mathématiques dans les IREM. B*ulletin de l'APMEP*, *nº 358*.

Barbin, E., (1997). Sur les relations entre Epistémologie, Histoire et Didactique, *Repères*, *nº 27*, 63-80.

Cerquetti-Aberkane, F., Rodriguez, A., Johan, P., (1997). *Les maths ont une histoire, activités pour le cycle 3*. Hachette Education.

El Idrissi, A., (1999). L'histoire des mathématiques dans la formation des enseignants: application à la trigonométrie. Στο Radelet, R., Janssens, D., (eds) *Proceedings of the 3rd European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics education* (vol. II, σελ. 219-223). Université catholique de Louvain, Belgique.

Fauvel, J., (1991). Using history in teaching mathematics. *For the Learning of mathematics*, *vol. 11.2*, 3-6.

Fauvel, J.G., Van Maanen, J. (2000). *History in mathematics Education: the ICMI study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lefort, X., (1990). History of mathematics in adult continuing education, Στο Fauvel., J., (ed.), *History in the mathematics classroom* (σελ. 85-96), *Vol. 1*. Leicester: The Mathematical Association.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Ε., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος, Ι. & Σπανακά, Α., (2006 α). *Μαθηματικά Γ' Τάξης Δημοτικού Σχολείου: Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής. Βιβλίο για τον Δάσκαλο*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Ε., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος, Ι. & Σπανακά, Α., (2006 β). *Μαθηματικά Γ' Τάξης Δημοτικού Σχολείου: Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής. Βιβλίο για τον μαθητή*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Lemonidis, Ch., (2005). *Les mathématiques de la nature et de la vie: une conception pour l'enseignement des mathématiques. Présentation d'un exemple extrait de la formation des enseignants*. Colloque COPIRELEM 30, 31- Mai, Strasbourg 2005.

Mugler Ch., (1972). *Archimède IV, Commentaires d' Eutocius et Fragments*, C.U.F., Paris.

Νικολαντωνάκης, Κ., (2005). Η πράξη του πολλαπλασιασμού στο πλαίσιο ενός προγράμματος επιμόρφωσης Δασκάλων Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης (σελ. 147-157). *Πρακτικά 4ου Διεθνούς Συνεδρίου Διδακτικής των Μαθηματικών*, Π.Τ.Δ.Ε. Επιμ. Κ. Τζανάκης, Μ. Κούρκουλος, Γ. Τρούλης, Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ρέθυμνο.

ΤΑ ΑΝΟΙΧΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΗΣ Ε΄ ΤΑΞΗΣ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ. ΜΙΑ ΠΡΩΤΗ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΑΠΟΠΕΙΡΑ

Παρασχίδης Κυριαζής

Σύμβουλος Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης 3ης Περιφέρειας Ξάνθης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η λύση προβλημάτων αποτελεί ένα από τα πιο πολυσυζητημένα θέματα στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Η ανάγκη να ενσωματώσει η εκπαίδευση τη λύση προβλήματος ως βασικό συστατικό του Α.Π. αποτελεί κυρίαρχο θέμα σε πολλά εθνικά πρότυπα (AAAS 1993, NCSS 1997, NCTE 1996, NCTM 1989, 1991). Αυτό συμβαίνει γιατί η λύση προβλήματος μπορεί να αποτελέσει τον πυρήνα του Α.Π. που συνδέει διάφορα γνωστικά πεδία, έννοιες, στρατηγικές και δεξιότητες. Επομένως, η αναθεώρηση των Α.Π. πρέπει να περιλαμβάνει ολοκληρωμένα μαθησιακά περιβάλλοντα, τα οποία θα ενθαρρύνουν τους/τις μαθητές –ριες[1] να χρησιμοποιούν διανοητικές ικανότητες ανώτερης τάξης και ιδιαίτερα ικανότητες λύσης προβλημάτων (Jamie Kirkley, 2003).

Την αρχή αυτή φαίνεται να συμμερίζονται και οι συγγραφείς των νέων βιβλίων των Μαθηματικών του Δημοτικού, καθόσον στο Βιβλίο του Δασκάλου (ΒτΔ) της Ε΄ Δημοτικού τονίζεται ότι οι στόχοι εκμάθησης κυρίως των αλγόριθμων των τεσσάρων πράξεων και των τύπων χωρίς κατανόηση μετατοπίζονται προς την εκμάθηση λύσης προβλημάτων με μία ή πολλές λύσεις. Ο χρόνος που διατίθεται γι' αυτή τη γνωστική περιοχή των μαθηματικών είναι περίπου το 1/6 των συνολικών διδακτικών ωρών στο Α.Π. των μαθηματικών κάθε τάξης και αφορά σε προβλήματα της καθημερινής ζωής που έχουν νόημα για τα παιδιά, προβλήματα συνηθισμένα ή πιο πρωτότυπα που κινητοποιούν τη λογική των παιδιών και την ικανότητά τους να σκέφτονται (Χριστόδουλος Κακαδιάρης, Νατάσσα Μπελίτσου, Γιάννης Στεφανίδης, Γεωργία Χρονοπούλου 2006).

Τα λεγόμενα ανοιχτά προβλήματα (open ended problems) τα συναντάμε σε αρκετά κεφάλαια, τόσο στο Βιβλίο του Μαθητή (ΒτΜ) όσο και στα Τετράδιο

[1] Εφεξής μαθητές

Εργασιών (ΤΕ) της Ε΄ Δημοτικού και αποτελούν, κατά τη γνώμη μου, μία από τις πιο ενδιαφέρουσες καινοτομίες των νέων βιβλίων (Χριστόδουλος Κακαδιάρης, Νατάσσα Μπελίτσου, Γιάννης Στεφανίδης, Γεωργία Χρονοπούλου 2006). Ως ανοιχτό πρόβλημα ορίζεται ένα πρόβλημα που έχει πολλές σωστές απαντήσεις και πολλούς τρόπους να φτάσεις στις σωστές απαντήσεις. Τα πλεονεκτήματα των ανοιχτών προβλημάτων, σύμφωνα με το Sawada (1977) είναι πέντε: Α) Οι μαθητές συμμετέχουν περισσότερο ενεργητικά στο μάθημα και εκφράζουν τις ιδέες του πιο συχνά, γιατί η λύση ανοιχτών προβλημάτων παρέχει ελεύθερο, υπεύθυνο και υποστηρικτικό περιβάλλον, όπου η ύπαρξη πολλών σωστών λύσεων δίνει στον κάθε μαθητή την ευκαιρία να φτάσει στη δική του σωστή απάντηση. Επιπλέον οι μαθητές είναι περίεργοι για τις άλλες λύσεις, τις οποίες μπορούν να συγκρίνουν με τις δικές τους και αργότερα να συζητήσουν πάνω σ' αυτές. Β) Οι μαθητές έχουν περισσότερες ευκαιρίες να κάνουν συνειδητή χρήση της μαθηματικής τους γνώσης και των δεξιοτήτων τους. Εφόσον υπάρχει πληθώρα λύσεων, οι μαθητές μπορούν να επιλέγουν το δικό τους δρόμο προς την απάντηση, δημιουργώντας έτσι ο καθένας τη δική του μοναδική λύση. Γ) Κάθε μαθητής -ρια[2] μπορεί να ανταποκριθεί στο πρόβλημα με το δικό του αποκλειστικό τρόπο. Δ) Το μάθημα μπορεί να προσφέρει στους μαθητές μία εμπειρία συλλογισμού. Η σύγκριση των διαφορετικών λύσεων και η συζήτηση πάνω σ' αυτές κινητοποιεί τους μαθητές να επιχειρηματολογήσουν υπέρ των λύσεών τους, με αποτέλεσμα να αναπτύσσουν τη μαθηματική τους σκέψη. Ε) Παρέχονται πολλές ευκαιρίες στους μαθητές να βιώσουν την ευχαρίστηση της ανακάλυψης και την επιδοκιμασία των συμμαθητών τους (What is the Open – Ended Problem Solving). Η διδασκαλία ανοιχτών προβλημάτων μπορεί να συνεισφέρει στην ανάπτυξη πολλών προσωπικών δεξιοτήτων, όπως: α) ανάπτυξη κριτικής σκέψης μέσα από την αναζήτηση της σωστής ερώτησης για την εύρεση λύσης, β) ανάπτυξη δημιουργικής σκέψης μέσα από την εύρεση μοναδικών λύσεων σε κριτικές ερωτήσεις γ) σωστή διαχείριση του χρόνου, όταν ζητείται η ολοκλήρωση της λύσης μέσα στον προβλεπόμενο χρόνο (How to Run an Open – Ended Problem).

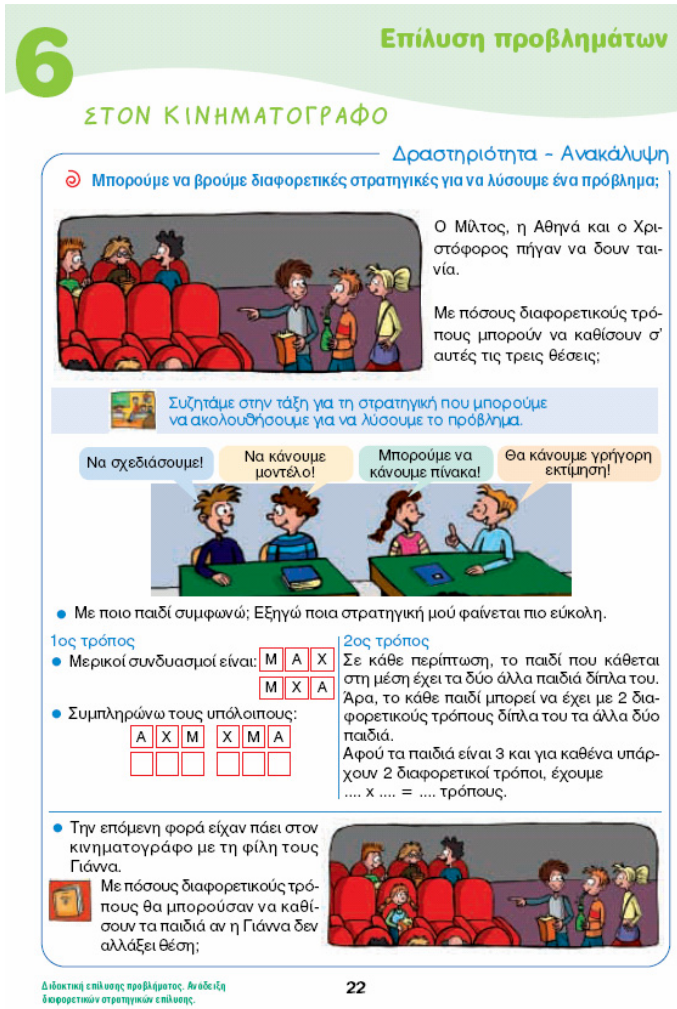
Για το σχεδιασμό μιας δραστηριότητας επίλυσης ενός ανοιχτού προβλήματος δεν υπάρχει ένα συγκεκριμένο μοντέλο αλλά κάποιες γενικές κατευθύνσεις όπως: Α) Η περιγραφή του προβλήματος, η οποία παρέχει ένα περιβάλλον διερεύνησης και τονίζει τη σημασία του προβλήματος για το μαθητή. Β) Η αξιολόγηση της προηγούμενης γνώσης, η οποία παρέχει στο διδάσκοντα τη δυνατότητα να αντιληφθεί διάφορες παρανοήσεις των μαθητών και να σχεδιάσει κατάλληλες δραστηριότητες με σκοπό να τις διορθώσει. Γ) Η ομαδική εργασία, η οποία ενθαρρύνει τους μαθητές να συνεργά-

[2] Εφεξής μαθητής

ζονται και να συζητούν, εξηγώντας με κατανοητό τρόπο τις έννοιες και τον τρόπο σκέψης τους στους συμμαθητές τους. Με αυτό τον τρόπο κατανοούν και τις απόψεις των άλλων, αμφισβητούν, αν χρειαστεί, το κύρος των δικών τους απόψεων και αναθεωρούν και αναδιαμορφώνουν τις αντιλήψεις τους. Επιπλέον μπορούν να εσωτερικεύσουν και να ενσωματώσουν τη διαδικασία μοντελοποίησης, παρατήρησης και σκέψης στο προσωπικό τους ρεπερτόριο. Δ) Η ατομική εργασία, η οποία καλλιεργεί την προσωπική ευθύνη του μαθητή να εκτελέσει σωστά την εργασία του και Ε) Η επέκταση των δραστηριοτήτων με εφαρμογή όσων έμαθαν οι μαθητές σε νέα ή συγγενικά περιβάλλοντα (Open – Ended Problem Solving Activities. A Description).

Η πληθώρα των ανοιχτών προβλημάτων που συναντάμε στα εγχειρίδια των μαθηματικών της Ε΄ Δημοτικού αποτελούν, όπως προαναφέραμε, μία σημαντική καινοτομία, αλλά υποστηρίζονται ελάχιστα στο ΒτΔ με αποτέλεσμα να υπονομεύεται εξαρχής η εισαγωγή τους. Ενώ θα περίμενε κανείς, π.χ., μία ιδιαίτερη εισαγωγική αναφορά στο βιβλίο του δασκάλου, προκειμένου να ενημερωθούν και οι εκπαιδευτικοί για την αξία και τη σπουδαιότητα αυτού του είδους των προβλημάτων, δε συναντάμε τίποτα ιδιαίτερο σχετικά με αυτά τα προβλήματα, εκτός από μία παράγραφο που αναφέρει: «Τα παιδιά... αποκτούν άνεση να λύνουν σύνθετα προβλήματα σε διαφορετικά πλαίσια, προβλήματα που μπορεί να έχουν πολλές ή μοναδική λύση, και να εκφράζουν με σαφήνεια τη σκέψη τους χρησιμοποιώντας κατάλληλο λεξιλόγιο». (ΒτΔ σελ. 6).

Τα ανοιχτά προβλήματα της Ε΄ δημοτικού μπορούμε να τα κατηγοριοποιήσουμε: Α) Ανάλογα με τη χρήση τους: Άλλοτε προτείνονται ως καθαρά ανοιχτά προβλήματα, με στόχο να διερευνήσουμε αν οι μαθητές είναι ικανοί να διαχειρίζονται προβλήματα που επιδέχονται παραπάνω από μία λύσεις, αν έχουν αναπτύξει τη συνδυαστική σκέψη και αν μπορούν να αναγνωρίσουν έναν κανόνα σε ένα μοτίβο και να τον επεκτείνουν (ΒτΔ σελ. 58, ΒτΜ σελ. 22, ΤΕ τεύχος α΄, σελ. 17).



6 Επίλυση προβλημάτων

ΣΤΟΝ ΚΙΝΗΜΑΤΟΓΡΑΦΟ

Δραστηριότητα - Ανακάλυψη

Μπορούμε να βρούμε διαφορετικές στρατηγικές για να λύσουμε ένα πρόβλημα;

Ο Μίλτος, η Αθηνά και ο Χριστόφορος πήγαν να δουν ταινία.

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν σ' αυτές τις τρεις θέσεις;

Συζητάμε στην τάξη για τη στρατηγική που μπορούμε να ακολουθήσουμε για να λύσουμε το πρόβλημα.

Να σχεδιάσουμε! Να κάνουμε μοντέλο! Μπορούμε να κάνουμε πίνακα! Θα κάνουμε γρήγορη εκτίμηση!

- Με ποιο παιδί συμφωνώ; Εξηγώ ποια στρατηγική μού φαίνεται πιο εύκολη.

1ος τρόπος

- Μερικοί συνδυασμοί είναι: M A X / M X A
- Συμπληρώνω τους υπόλοιπους: A X M X M A / _ _ _ _ _ _

2ος τρόπος

Σε κάθε περίπτωση, το παιδί που κάθεται στη μέση έχει τα δύο άλλα παιδιά δίπλα του. Άρα, το κάθε παιδί μπορεί να έχει με 2 διαφορετικούς τρόπους δίπλα του τα άλλα δύο παιδιά.
Αφού τα παιδιά είναι 3 και για καθένα υπάρχουν 2 διαφορετικοί τρόποι, έχουμε .... x .... = ... τρόπους.

- Την επόμενη φορά είχαν πάει στον κινηματογράφο με τη φίλη τους Γιάννα.

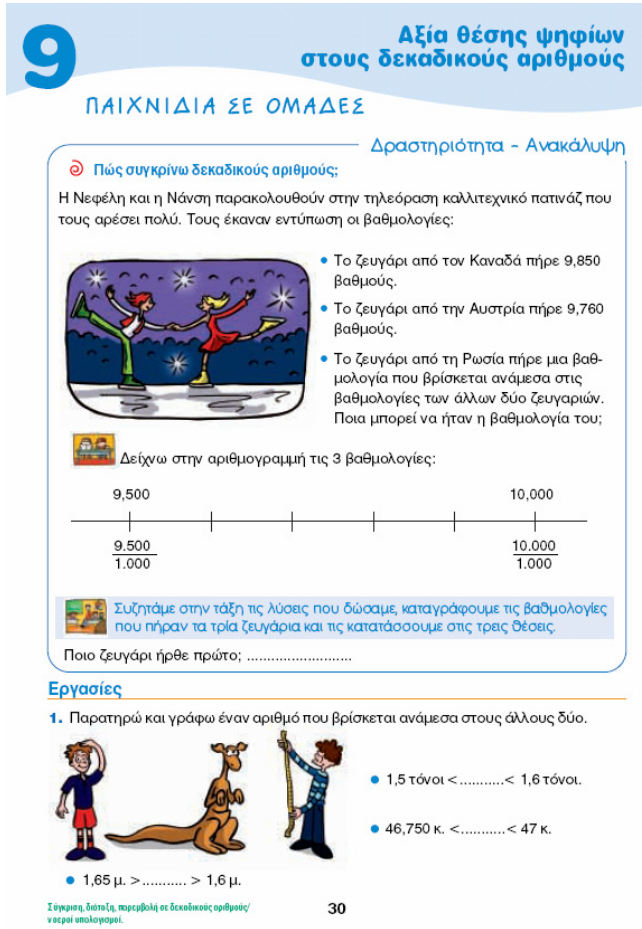
Με πόσους διαφορετικούς τρόπους θα μπορούσαν να καθίσουν τα παιδιά αν η Γιάννα δεν αλλάξει θέση;

Διδακτική επίλυσης προβλήματος. Αναδείξη διαφορετικών στρατηγικών επίλυσης.

22

Άλλοτε προτείνονται ως προβλήματα που επιδέχονται μεν πολλές λύσεις, αλλά επιδιώκουν άλλους στόχους, π.χ. την κατανόηση των ποσοστών (ΒτΜ σελ. 65). Β) ανάλογα με το σύνολο των λύσεων: Σε μερικά προβλήματα υπάρχουν συγκεκριμένες λύσεις, τις οποίες οι μαθητές μπορούν να αναζητήσουν με βάση κάποιο μοτίβο και τον κανόνα που προκύπτει από αυτό. Η δραστηριότητα του κινηματογράφου (ΒτΜ σελ. 22) ανήκει στην κατηγορία αυτών των προβλημάτων. Παρατηρούμε στην εικόνα ότι, ενώ πρόκειται για μία δραστηριότητα – ανακάλυψη, το βιβλίο καθοδηγεί ασφυκτικά τους μαθητές στον τρόπο με τον οποίο θα φτάσουν στις λύσεις, χωρίς να τους αφήνει πολλά περιθώρια να ερευνήσουν και να βρουν μόνοι τους όλους τους δυνατούς συνδυασμούς και να τους ανακοινώσουν στην τάξη. Στα περισσό-

τερα ανοιχτά προβλήματα οι λύσεις είναι πάρα πολλές και οι μαθητές επιλέγουν δύο τρεις λύσεις στην τύχη. Η δ΄ εργασία στο ΤΕ τεύχος α΄, σελ. 17: «Η Γιάννα έχει 50 κέρματα που η συνολική τους αξία είναι μεγαλύτερη από 5 ευρώ και λιγότερη από 6 ευρώ. Τι κέρματα μπορεί να έχει; Προτείνω 2 διαφορετικές λύσεις» είναι ένα πρόβλημα με πολύ μεγάλο αριθμό λύσεων. Πρόκειται για ένα κακό, κατά τη γνώμη μου, πρόβλημα, γιατί οι μαθητές μαντεύουν δύο λύσεις, χωρίς να αναζητούν το μοτίβο, βάσει του οποίου θα προκύψει ο τρόπος εύρεσης όλων των δυνατών συνδυασμών. Γ) ανάλογα με το είδος του προβλήματος. Συναντάμε, π.χ., προβλήματα συνδυαστικής, όπως οι δραστηριότητες στον κινηματογράφο, προβλήματα εύρεσης ισεμβαδικών παραλληλογράμμων ή ισοπεριμετρικών σχημάτων, προβλήματα ανισοτήτων, προβλήματα σχηματισμού ισόψηφων αριθμών με συγκεκριμένα ψηφία, προβλήματα εύρεσης ενδιάμεσων δεκαδικών αριθμών, προβλήματα ίσων αθροισμάτων, ανοιχτά παιχνίδια κ.λπ.



9 Αξία θέσης ψηφίων στους δεκαδικούς αριθμούς

ΠΑΙΧΝΙΔΙΑ ΣΕ ΟΜΑΔΕΣ

Δραστηριότητα - Ανακάλυψη

Πώς συγκρίνω δεκαδικούς αριθμούς;

Η Νεφέλη και η Νάνση παρακολουθούν στην τηλεόραση καλλιτεχνικό πατινάζ που τους αρέσει πολύ. Τους έκαναν εντύπωση οι βαθμολογίες:

- Το ζευγάρι από τον Καναδά πήρε 9,850 βαθμούς.
- Το ζευγάρι από την Αυστρία πήρε 9,760 βαθμούς.
- Το ζευγάρι από τη Ρωσία πήρε μια βαθμολογία που βρίσκεται ανάμεσα στις βαθμολογίες των άλλων δύο ζευγαριών. Ποια μπορεί να ήταν η βαθμολογία του;

Δείχνω στην αριθμογραμμή τις 3 βαθμολογίες:

9,500 ——— 10,000

9.500 / 1.000 ——— 10.000 / 1.000

Συζητάμε στην τάξη τις λύσεις που δώσαμε, καταγράφουμε τις βαθμολογίες που πήραν τα τρία ζευγάρια και τις κατατάσσουμε στις τρεις θέσεις.

Ποιο ζευγάρι ήρθε πρώτο; .....

Εργασίες

1. Παρατηρώ και γράφω έναν αριθμό που βρίσκεται ανάμεσα στους άλλους δύο.

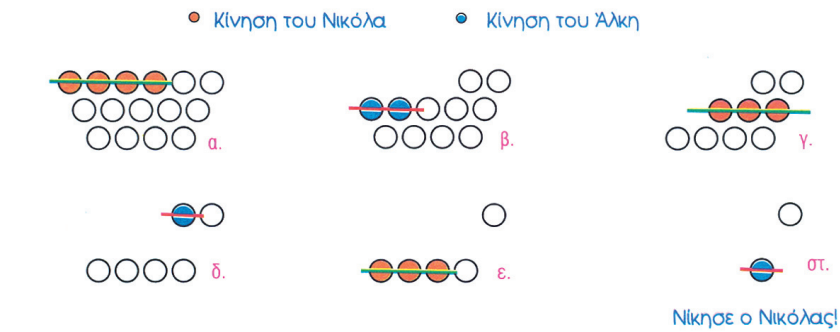
- 1,5 τόνοι < .....< 1,6 τόνοι.
- 46,750 κ. < .....< 47 κ.
- 1,65 μ. > ..... > 1,6 μ.

Σύγκριση, διάταξη, παρεμβολή σε δεκαδικούς αριθμούς/ νοεροί υπολογισμοί.

30

Οι οδηγίες που παρέχει το ΒτΔ κατά κεφάλαιο για τη διαχείριση των ανοιχτών προβλημάτων είναι τις περισσότερες φορές ελάχιστες έως ανύπαρκτες. Στη δραστηριότητα του κινηματογράφου το ΒτΔ θέτει ως πρόβλημα επέκτασης όλους τους δυνατούς συνδυασμούς με τους οποίους μπορούν να καθίσουν 4 παιδιά και δίνει ως απάντηση 24, χωρίς να εξηγεί με ποιες στρατηγικές μπορεί να βρεθεί το αποτέλεσμα αυτό. Το ίδιο συμβαίνει και με τη δ΄ εργασία του ΤΕ τεύχος α΄, σελ. 17, όπου προτείνονται δύο λύσεις και στη συνέχεια αναφέρει ότι υπάρχουν πολλές λύσεις (ΒτΔ σελ. 59). Εξαίρεση αποτελεί η εργασία του ΒτΜ στο 21ο κεφάλαιο «Στατιστική Μέσος Όρος», όπου το ΒτΔ παρέχει σαφείς οδηγίες για το ποιες στρατηγικές μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε, προκειμένου να φτάσουμε σε κάποιες λύσεις (ΒτΔ σελ. 107). Με παρόμοιο τρόπο το ΒτΔ (σελ. 183) παρέχει πολύ χρήσιμες και σωστές οδηγίες για το πώς παίζεται το κινέζικο παιχνίδι που προτείνει το ΒτΜ στη σελίδα 127.

Παιχνίδι NIM. Το NIM είναι αρχαίο κινέζικο παιχνίδι. Παίζουν δύο παίχτες. Τοποθετούμε 15 πούλια σε τρεις σειρές. Σε κάθε κίνηση κάθε παίχτης παίρνει όσα πούλια θέλει από μία μόνο σειρά. Νικητής είναι όποιος πάρει το τελευταίο πούλι. Δείτε πώς έπαιξε ο Νικόλας με τον Άλκη:



Παίζουμε κι εμείς. Κάθε φορά ξεκινά άλλος παίχτης πρώτος. Προσέχουμε τη στρατηγική που θα ακολουθήσουμε.

Συμπερασματικά, λοιπόν, μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι η απόπειρα εισαγωγής ανοιχτών προβλημάτων στα εγχειρίδια της Ε΄ τάξης ακυρώνεται διότι: α) δεν τονίζεται στο ΒτΔ η σημασία και η παιδαγωγική και μαθηματική τους αξία, β) οι εκπαιδευτικοί δεν είναι κατάλληλα προετοιμασμένοι για τη διδασκαλία τέτοιων προβλημάτων και το ΒτΔ δεν παρέχει ουσιαστική βοήθεια, εκτός από ελάχιστες εξαιρέσεις και γ) πολλά ανοιχτά προβλήματα

έχουν πάρα πολλές λύσεις και οι μαθητές είναι αδύνατο να βρουν μόνοι τους στρατηγικές εύρεσης όλων των δυνατών συνδυασμών. Το ότι ζητούνται μόνο μερικές λύσεις και όχι το μοτίβο βάσει του οποίου μπορεί να προκύψουν όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί θεωρώ ότι υπονομεύει τη δυναμική του προβλήματος.

Η έρευνα

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στις 19-12-2007 με 19 μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού. Η πλειοψηφία των μαθητών προέρχεται από εργατικά στρώματα, ενώ και τέσσερις μαθητές είναι παιδιά μεταναστών. Στο μάθημα συμμετείχαν μόνο δεκαπέντε μαθητές, γιατί οι υπόλοιποι τέσσερις προτίμησαν να ασχοληθούν με καρτέλες αυτοκινήτων και ζωγραφική τεράτων. Μόνο προς το τέλος του μαθήματος, όταν έβαλα ένα πρόβλημα με αυτοκίνητα και μηχανές, ένας από τους τέσσερις αποφάσισε να ασχοληθεί με το πρόβλημα. Το μάθημα ξεκίνησε με καταιγισμό ιδεών για το τι θεωρούν ότι είναι τα μαθηματικά σε σχέση με όσα διδάχτηκαν στο σχολείο, αλλά και με βάση τη χρήση τους στην καθημερινή ζωή. Στη συνέχεια παίξαμε ένα παιχνίδι εύρεσης δύο αριθμών, το οποίο ενθουσίασε τα παιδιά, και ακολούθησε μία σειρά δραστηριοτήτων που τις πρότεινα και αυτές ως παιχνίδι. Η πλειοψηφία των μαθητών ανταποκρίθηκε στις προτεινόμενες δραστηριότητες, εκτός από την ομάδα των τεσσάρων αγοριών. Η πρώτη δραστηριότητα ήταν ένα ανοιχτό πρόβλημα, το οποίο ζητούσε από τους μαθητές να σχηματίσουν όλους τους δυνατούς δυαδικούς συνδυασμούς με κέρματα των 5, 10 και 20 λεπτών. « Έχω στην τσέπη μου κέρματα των 5,10 και 20 λεπτών. Αν βγάλω από την τσέπη μου δύο κέρματα στην τύχη ποια κέρματα θα μπορούσα να έχω βγάλει;». Τη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές την χαρακτήρισαν ως πρόβλημα, γιατί τη θεώρησαν αρκετά δύσκολη. Παρόλα αυτά βρήκαν όλους τους συνδυασμούς οχτώ μαθητές, από τους οποίους πέντε τους έγραψαν με μία σειρά και οι υπόλοιποι τρεις ανακατεμένους. Πέντε μαθητές επανέλαβαν κάποιους συνδυασμούς και μόνο δύο έγραψαν μερικούς συνδυασμούς.

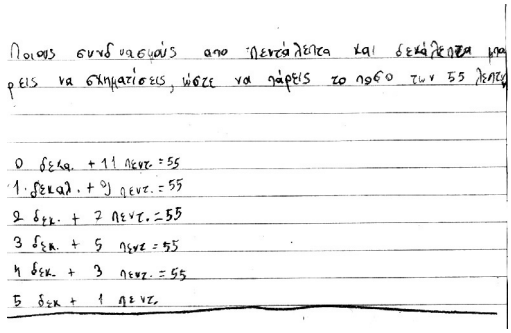
Στη συνέχεια ακολούθησαν κάποιες εύκολες ασκήσεις, οι οποίες βαθμιαία δυσκόλευαν και ορισμένες κατέληγαν σε ανοιχτά προβλήματα:

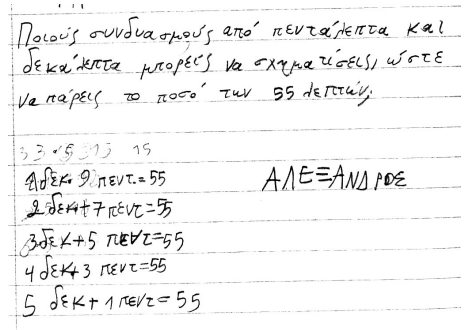
ΑΣΚΗΣΗ: Υπολόγισε ποιο ποσό μας δίνουν 3 πεντάλεπτα και 4 δεκάλεπτα.

Στην άσκηση αυτή δε συνάντησαν καμία δυσκολία οι μαθητές και την έλυσαν είτε με οριζόντιες είτε με κάθετες πράξεις. Οι ερωτήσεις που συνόδευαν αυτή την άσκηση ήταν οι εξής:

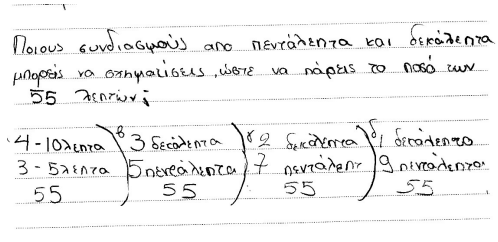
1. Μπορεί το ποσό των 55 λεπτών να σχηματιστεί μόνο με πεντάλεπτα; (ναι – όχι, γιατί;)
2. Μπορεί το ποσό των 55 λεπτών να σχηματιστεί μόνο με δεκάλεπτα; (ναι – όχι, γιατί;)
3. Ποιους συνδυασμούς από πεντάλεπτα και δεκάλεπτα μπορείς να σχηματίσεις, ώστε να πάρεις 55 λεπτά; (Τους βρήκες όλους τους συνδυασμούς; Γιατί πιστεύεις ότι τους βρήκες όλους;)

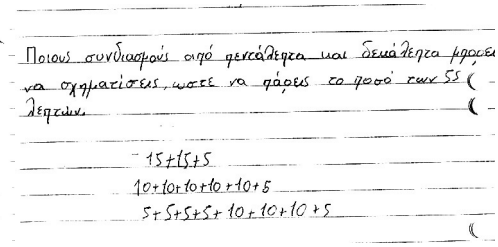
Το πρόβλημα αυτό επιδέχεται πέντε συνδυασμούς, που τους βρήκαν δέκα μαθητές. Από αυτούς οι έξη έγραψαν τους συνδυασμούς με μία σειρά και οι τέσσερις υπόλοιποι χωρίς σειρά.





Εύρεση όλων των συνδυασμών με μία σειρά.



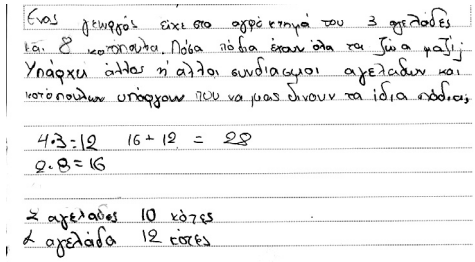


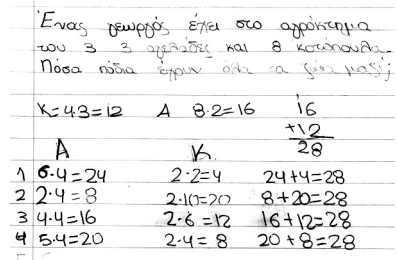
Εύρεση μερικών συνδυασμών, οι πρώτοι με μία σειρά, οι δεύτεροι στην τύχη.

Στο τέλος ως πρόβλημα επέκτασης έθεσα την εξής δραστηριότητα: «Ένας γεωργός έχει στο αγρόκτημά του 3 αγελάδες και 8 κοτόπουλα. Πόσα πόδια έχουν όλα τα ζώα μαζί; Υπάρχει άλλος ή άλλοι συνδυασμοί αγελάδων και κοτόπουλων που να μας δίνουν 28 πόδια;». Προκειμένου να κινητοποιήσω το ενδιαφέρον και των μαθητών που ασχολούνταν με τη ζωγραφική, έθεσα ως εναλλακτική δραστηριότητα και το εξής πρόβλημα: Ένας μηχανικός έχει στο γκαράζ του 3 αυτοκίνητα και 8 μηχανές. Μπορείς να βρεις πόσες είναι οι ρόδες που έχουν μαζί τα αυτοκίνητα και οι μηχανές; Υπάρχει άλ-

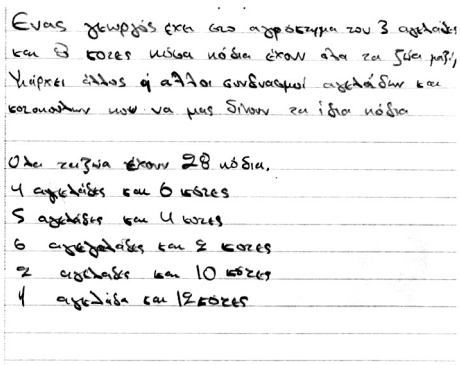
λος ή άλλοι συνδυασμοί αυτοκινήτων και μηχανών που να μας δίνει τον ίδιο αριθμό ροδών;». Τελικά από τους τέσσερις αδιάφορους μαθητές ένας ενδιαφέρθηκε και μάλιστα έλυσε σωστά το πρόβλημα.

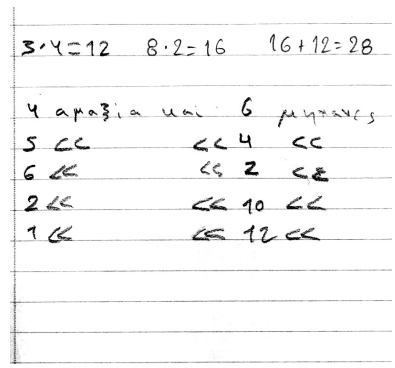
Η απάντηση στην ερώτηση είναι πολύ εύκολη (3*4 + 8*2 = 28), γι' αυτό και την βρήκαν όλοι εκτός από έναν που έγραψε 3 + 8 =11 και έναν άλλο που υπολόγισε σωστά 3*4 = 12 και 8*2 = 16, αλλά στην πρόσθεση 12 και 16 βρήκε 22. Στη δεύτερη ερώτηση τρεις μαθητές δεν απάντησαν, ένας έδωσε ένα λανθασμένο συνδυασμό (4*4 + 7*2), πέντε έδωσαν μερικούς συνδυασμούς και εφτά βρήκαν όλους τους συνδυασμούς, είτε με μία σειρά είτε μπερδεμένους.





Εύρεση μερικών συνδυασμών, οι πρώτοι με μία σειρά, οι δεύτεροι μπερδεμένοι.





Εύρεση όλων των συνδυασμών με την ίδια ακριβώς σειρά. Το δεύτερο γραπτό αφορά στην εναλλακτική δραστηριότητα.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η πλειοψηφία των μαθητών εργάστηκε ατομικά, γιατί θεώρησε κάθε δραστηριότητα ως ένα ενδιαφέρον μαθηματικό παιχνίδι, στο οποίο άξιζε ο κό-

πος να ερευνήσει για την εύρεση της λύσης. Επειδή οι προτεινόμενες δραστηριότητες ήταν πρωτόγνωρες για τα παιδιά, μερικά στην αρχή δυσκολεύτηκαν και ζήτησαν, μετά από προτροπή μου, βοήθεια από το διπλανό τους. Μετά όμως από κάθε ενασχόληση με το προτεινόμενο πρόβλημα οι μαθητές ανακοίνωναν στην τάξη τον τρόπο λύσης και ακολουθούσε συζήτηση πάνω στον τρόπο σκέψης τους. Ήδη από την επεξεργασία του πρώτου προβλήματος μερικοί μαθητές τόνισαν ότι τους συνδυασμούς πρέπει να τους παίρνουμε με μία σειρά, ώστε να μπορούμε να τους βρούμε όλους. Και οι σειρές που πρότειναν ήταν είτε να πάρουμε αρχικά τα όμοια κέρματα (5-5, 10-10, 20-20) και μετά τα διαφορετικά (5-10, 1-20, 10-20) είτε να ξεκινήσουμε με τους συνδυασμούς του 5, μετά του 10 και στο τέλος του 20 (5-5, 5-10, 5-20, 10-10, 10-20, 20-20). Έχει μεγάλο ενδιαφέρον επίσης η περίπτωση του μαθητή που ασχολήθηκε με το μάθημα μόνο στο τέλος, στο πρόβλημα με τις ρόδες των αυτοκινήτων και των μηχανών. Μία μαθήτρια σχολίασε ότι πρόκειται για το ίδιο πρόβλημα, γιατί οι αριθμοί δεν άλλαζαν. Για το συγκεκριμένο, όμως, μαθητή το πρόβλημα απέκτησε νόημα, μόνο όταν είχε σχέση με αυτοκίνητα και μηχανές, δηλαδή με αντικείμενα του άμεσου ενδιαφέροντός του. Ίσως θα ήταν δυνατόν να κινητοποιήσω το ενδιαφέρον και των άλλων μαθητών αν τους έθετα παρόμοια προβλήματα με τέρατα που είχαν, π.χ., δύο και τέσσερα αυτιά. Η έρευνα θα μπορούσε να συνεχιστεί με παρόμοια, αλλά δυσκολότερα προβλήματα, όπως να βρεθούν όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί αγελάδων και κοτόπουλων που έχουν συνολικά 60 πόδια ή να ζητήσουμε να φτιάξουν δικά τους προβλήματα και να τα παρουσιάσουν στην τάξη. Ακόμη πιο ενδιαφέρον θα είχε να προτείνουμε να φτιάξουν προβλήματα με τέρατα που έχουν 3 και 5 πόδια, να δίνουν το σύνολο των ποδιών και να ζητούνται πάλι όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί. Όλες αυτές οι δραστηριότητες αντιστοιχούν στις λεγόμενες διοφαντικές εξισώσεις τύπου αx + βψ = γ, τις οποίες θυμάμαι ότι είχα διδαχθεί στην Α΄ Λυκείου. Μήπως, λοιπόν, είναι πρόωρο να επιχειρούμε κάτι παρόμοιο σε πολύ μικρότερες ηλικίες; Η απάντηση είναι ανεπιφύλαχτα όχι, αν πρόκειται για δραστηριότητες που έχουν μορφή γρίφου ή παιχνιδιού, που παροτρύνουν σε μία περιπέτεια έρευνας και ανακάλυψης και έτσι αποκτούν νόημα για όλα τα παιδιά.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

How to Run an Open – Ended Problem. www.tjhsst.edu/~jleaf/probsolve/ index.htm

JAMIE KIRKLEY, 2003. Principles for Teaching Problem Solving, PLATO learning, Inc., Indiana University.

Open – Ended Problem Solving Activities. A Description. http://shs. westport.k12.ct.us/msvl/science/capt/handbook

What is the Open–Ended Problem Solving. http://www.wiste.niuc.edu/ users/aki/open-ended

Χριστόδουλος Κακαδιάρης, Νατάσσα Μπελίτσου, Γιάννης Στεφανίδης, Γεωργία Χρονοπούλου, 2006. Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού, Βιβλίο Δασκάλου, ΟΕΔΒ, Αθήνα Χριστόδουλος Κακαδιάρης, Νατάσσα Μπελίτσου, Γιάννης Στεφανίδης, Γεωργία Χρονοπούλου, 2006. Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού, Βιβλίο του Μαθητή, ΟΕΔΒ, Αθήνα

Χριστόδουλος Κακαδιάρης, Νατάσσα Μπελίτσου, Γιάννης Στεφανίδης, Γεωργία Χρονοπούλου, 2006. Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού, Τετράδιο Εργασιών, ΟΕΔΒ, Αθήνα

ΟΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΕΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΤΑ ΝΕΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΗΣ ΣΤ΄ ΤΑΞΗΣ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

Χρήστος Ταξίδης

Δάσκαλος

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η πολυπολιτισμικότητα των σύγχρονων κοινωνιών, έχει δημιουργήσει νέα πραγματικότητα και νέες προκλήσεις στην επίστημη και την εκπαίδευση τόσο σε παγκόσμιο όσο και σε εθνικό επίπεδο. Για αρκετά χρόνια οι εμπλεκόμενοι στην πολυπολιτισμική εκπαίδευση επικέντρωσαν την προσοχή τους στο γνωστικό αντικείμενο της γλώσσας. Τα μαθηματικά μέχρι πρόσφατα θεωρούνταν ως γνώση ανεξάρτητη του πολιτισμικού πλαισίου και ως εκ τούτου, δεν απασχόλησαν όσους ασχολούνταν με την πολυπολιτισμική εκπαίδευση.

Τις τελευταίες δεκαετίες έχουμε στροφή στην αντίληψη για τα μαθηματικά και την μαθηματική εκπαίδευση. Η ανεπάρκεια των απαντήσεων σε ζητήματα σχολικής αποτυχίας από τις ψυχολογικές προσεγγίσεις, οι οποίες δίνουν έμφαση στο μαθητή ως άτομο, καθώς και η αμφισβήτηση των μοντέρνων μαθηματικών με τον αυστηρά φορμαλιστικό χαρακτήρα, λειτούργησαν ως κινητήρια δύναμη για την αναζήτηση προσεγγίσεων που λαμβάνουν υπόψη παραμέτρους κοινωνικές, πολιτικές και κυρίως πολιτισμικές. (Σταθοπούλου & Μηλιώνης, 2005, σελ. 87).

Ο Alan J. Bishop στο άρθρο «Critical issues in researching cultural aspects of mathematics education», σημειώνει ότι η μαθηματική γνώση είναι ένα πολιτισμικό προϊόν και ότι η διδασκαλία μαθηματικών και η εκμάθηση διαμορφώνονται πολιτισμικά. Ο D' Ambrosio και άλλοι συγγραφείς (Gerdes, Ascher, Zaslavsky, Bishop, Barton, κ.α.)ασχολήθηκαν με τη διερεύνηση πολιτισμικών, πολιτικών και κοινωνικών παραγόντων σε σχέση με τα μαθηματικά. Οι περισσότεροι από αυτούς χαρακτηρίζουν την προσέγγιση τους ως Εθνομαθηματικά. (Σταθοπούλου, 2005, σελ. 52). Βασική πεποίθηση των Εθνομαθηματικών είναι ότι η ενδυνάμωση των μαθητών προϋποθέτει ότι το σχολικό αναλυτικό πρόγραμμα πρέπει να βασίζεται στην

ίδια την κουλτούρα, τα πολιτισμικά υλικά και τις δραστηριότητες των κοινοτήτων των ίδιων των παιδιών. (Gerdes, 1996) Η εστίαση σε μια συσχέτιση χρήσης της πολιτισμικής κουλτούρας των ίδιων μαθητών και της δικής τους ιστορίας των μαθηματικών έχει ιδωθεί ως παράγοντας ο οποίος μπορεί όχι μόνο να διευκολύνει τη μάθηση (λόγω γειτνίασης με τα προσωπικά ενδιαφέροντα, καταβολές και εμπειρίες των μαθητευόμενων), αλλά κυρίως να επιδρά στην αύξηση της αυτοεκτίμησης και αυτοπεποίθησης των μαθητών ως πολίτες των δικών τους κοινοτήτων. (Χρονάκη, 2005, σελ. 49-50). Τα μαθηματικά δεν είναι ελεύθερα αξιών και πολιτισμού. Τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών των μαθηματικών θα πρέπει να γίνουν πολιτισμικά απαντητικά, προκειμένου να ενθαρρυνθεί η συμμετοχή των μαθητών που προέρχονται από πολιτισμικές μειονοτικές ομάδες. Με την έννοια πολιτισμός δεν υπονοείται μόνο το έθνος, αλλά και η κοινωνικοοικονομική και θρησκευτική ποικιλομορφία, το φύλο, η φυλή, και οι φυσικά και διανοητικά ανάπηροι μαθητές (Bishop, 2002).

Με αφορμή την εισαγωγή των νέων σχολικών βιβλίων στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση της χώρας μας, που πραγματοποιήθηκε κατά το σχολικό έτος 2006-2007, ερευνήσαμε κατά πόσο η πολιτισμική διάσταση είναι παρούσα τόσο στα νέα εγχειρίδια όσο και στα νέα αναλυτικά προγράμματα σπουδών. Συγκεκριμένα ασχοληθήκαμε με τα νέα σχολικά εγχειρίδια της ΣΤ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου, και εξετάσαμε αν υπάρχει πολυπολιτισμικός προσανατολισμός στα βιβλία και κατά πόσο αυτά απευθύνονται σε όλες τις ομάδες μαθητικού πληθυσμού της χώρας.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Τα ερευνητικά ερωτήματα που διατυπώθηκαν ήταν: Υπάρχει ίση εκπροσώπηση των δύο φύλων στα νέα σχολικά εγχειρίδια; Προβάλλονται στερεότυπες αντιλήψεις για τα δύο φύλα; Πώς εμφανίζεται ο άνδρας και πώς η γυναίκα; Ποιες εικόνες και αναπαραστάσεις υπάρχουν για τον διαφορετικό «άλλο» που δεν ανήκει στο Δυτικό Πολιτισμό; Εκπροσωπούνται ομάδες πληθυσμού που προέρχονται από διαφορετικά πολιτισμικά πλαίσια; Ποιες αξίες και πρότυπα προάγονται; Ποιες οικονομικές, καταναλωτικές και διατροφικές συνήθειες προωθούνται; Ποιες κοινωνικές ομάδες είναι παρούσες και ποιες αποκλείονται; Υπάρχει εκπροσώπηση ατόμων με ειδικές ανάγκες, διαφορετικών πολιτισμικών ομάδων, όπως οι τσιγγάνοι, αλλοδαποί, παλλινοστούντες, άτομα με διαφορετικό θρήσκευμα; Ποιες ιδεολογικές διαστάσεις είναι παρούσες; Εκπληρώνονται κοινωνικοί στόχοι, όπως ισότητα, ίσες ευκαιρίες μάθησης, δικαιοσύνη;

ΣΤΟΧΟΙ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Να διαπιστώσουμε κατά πόσο τα νέα βιβλία μαθηματικών προωθούν την ισότητα στη μαθηματική εκπαίδευση και προσφέρουν ίσες ευκαιρίες σε όλους τους μαθητές ανεξάρτητα φυλής, φύλου και κοινωνικής τάξης. Να ανακαλύψουμε πολιτικές, κοινωνικές και οικονομικές δομές που προωθούν τα βιβλία των μαθηματικών. Να διερευνήσουμε ποιες αξίες, ιδεολογία, και συνήθειες προωθούνται.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΥΛΛΟΓΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Η μέθοδος διερεύνησης που χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα είναι η ανάλυση περιεχομένου. Η επιλογή της μεθόδου αυτής έγινε γιατί μπορεί να βοηθήσει αποτελεσματικά τον εκπαιδευτικό να διερευνήσει συστηματικά και να κατανοήσει τα ρητά και άρρητα μηνύματα που περιέχουν τα σχολικά εγχειρίδια και τα αντίστοιχα βοηθήματα για τους εκπαιδευτικούς. (Κούκου & Χαράμης στο Μπαγάκης, 2002, σελ. 226-230). Διατυπωθήκαν τα ερευνητικά ερωτήματα και έγινε η επιλογή του υλικού που πρόκειται να αναλυθεί. Ως υλικό προς διερεύνηση και ανάλυση ορίστηκαν τα βιβλία του ΟΕΔΒ (2005): Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού, Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού Τετράδιο εργασιών, τεύχος α΄, τεύχος β΄, τεύχος γ΄, τεύχος δ΄, και Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού Βιβλίο Δασκάλου. Ακολούθησε η διαμόρφωση ενός συστήματος κατηγοριών (άξονες), που αποτέλεσε τη βάση ανάλυσης του υλικού και κωδικοποίησής του.

Προκειμένου να εντοπιστούν τα στοιχεία που θα ενταχθούν στις παραπάνω κατηγορίες ορίσαμε ως μονάδες ανάλυσης τις εξής: εικόνες, σχήματα και σχηματικές αναπαραστάσεις, λέξεις και φράσεις που χρησιμοποιούνται στα βιβλία. Η επεξεργασία και ανάλυση των δεδομένων έγινε με μεικτή μέθοδο (ποσοτική και ποιοτική). Τέλος έγινε η ερμηνεία των δεδομένων και δόθηκαν απαντήσεις στα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν.

1.ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΕΝΦΥΛΩΝ ΣΤΕΡΕΟΤΥΠΩΝ

Στερεοτυπική σκέψη ονομάζεται στην κοινωνική ψυχολογία εκείνη η σκέψη, η οποία με αφετηρία την ταξινόμηση ενός ατόμου σε μια κοινωνική κατηγορία (π.χ. λευκός, Έλληνας, Βόρειος, Ασιάτης, νέος, γέρος, άνδρας, γυναίκα, κ.τ.λ.), οδηγείται σε ατεκμηρίωτες γενικεύσεις ως προς τις ιδιότητες που υποτίθεται ότι έχει κάθε άτομο που ανήκει σε μια ή περισσότερες από τις παραπάνω κατηγορίες. Η στερεοτυπική σκέψη είναι εργαλείο της στερεοτυπικής αντίληψης του «άλλου» και με τη σειρά της οδηγεί στο στε-

ρεότυπο, δηλαδή σε μια γενίκευση για το πώς συγκροτείται ο κάθε φορά «άλλος»(Γκότοβος, 1996, σελ. 16).

Το σχολείο επηρεάζει, διαμορφώνει ταυτότητες. Το σχολικό περιβάλλον είναι ένας χώρος με όλα τα ενδημικά στοιχεία δημιουργίας ταυτοτήτων (Αζίζι-Καλατζή κ.α. 1996, σελ.45).

Τα εγχειρίδια είναι πομποί ισχυρών μηνυμάτων για τους μαθητές. (Γκότοβος, 1996, σελ. 68). Μέσα λοιπόν από αυτά πολλές φορές αναπαράγονται στερεότυπα και προκαταλήψεις τα οποία στη συνέχεια εσωτερικοποιούνται από τους μαθητές.

1Α. ΡΟΛΟΙ ΤΩΝ ΔΥΟ ΦΥΛΩΝ

Στο Β.Δ (βιβλίο δασκάλου) σελίδα 12 αναφέρεται σχετικά με τις δραστηριότητες «…μελέτη καταστάσεων από το περιβάλλον και τα ενδιαφέροντα του παιδιού της ηλικίας αυτής, ώστε μέσα από προβληματισμό να οδηγηθεί στην αναγκαιότητα της συγκεκριμένης γνώσης.». Αυτό δεν συμβαίνει στην πρώτη δραστηριότητα σελ.15 του 4ου κεφαλαίου Β.Μ (βιβλίο μαθητή). Απευθύνεται σε όλα τα παιδιά με μια δραστηριότητα που ταιριάζει μόνο σε αγόρια με συγκεκριμένες καταναλωτικές συνήθειες (παιχνίδι Υπερατού). Γίνεται, λοιπόν, διάκριση φύλων και αποκλείονται τα κορίτσια. Απευθύνεται σε μαθητές με συγκεκριμένο πολιτισμικό και γλωσσικό κεφάλαιο που γνωρίζουν τις έννοιες της ταχύτητας, της ισχύος, του κυβισμού, τις μονάδες μέτρησής τους, καθώς και τον τρόπο με τον οποίο μπορούν να συγκρίνουν χαρακτηριστικά αυτοκινήτων, σκαφών, αεροπλάνων, κ.λ.π.

Στο 28ο κεφάλαιο, σελ.68, Β.Μ. στις δύο εφαρμογές παρουσιάζεται το στερεότυπο του φύλου. Στην μία η Μαργαρίτα προσέχει το μικρό ανιψάκι της, ενώ στην αμέσως επόμενη ο Δημοσθένης γράφει τις εργασίες του στον υπολογιστή. Το κορίτσι ετοιμάζεται για το ρόλο της μητέρας, ενώ το αγόρι για μια πετυχημένη θέση στην αγορά εργασίας.

Στη σελ 11, Τ.Ε.α (τετράδιο εργασιών), αναπαράγονται τα στερεότυπα για τα δύο φύλα αφού στο 1ο πρόβλημα ο Σωτήρης και ο Λευτέρης εμφανίζονται να διαπρέπουν στον σχολικό αθλητισμό, ενώ στην ίδια σελίδα στο δεύτερο πρόβλημα η Εύη και η Βίκυ ετοιμάζουν γλυκά στην κουζίνα.

1Β. ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΑ ΚΑΙ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΔΡΩΝ- ΓΥΝΑΙΚΩΝ

Στο 29ο κεφάλαιο, σελ. 70, Β.Μ. στην 1η εφαρμογή, παρουσιάζεται διευθύντρια σε δημοτικό σχολείο, ξεπερνώντας το στερεότυπο του φύλου, που θέ-

λει τους άνδρες να ασκούν διοίκηση και να καταλαμβάνουν διευθυντικές θέσεις στα σχολεία.

Τα επαγγέλματα και οι δραστηριότητες των ανδρών όπως παρουσιάζονται στα βιβλία είναι: Β.Μ.: Φούρναρης (σελ. 45), δάσκαλος (σελ. 53 &112) αντιπρόσωπος αυτοκινήτων (σελ. 56, & 106), αθλητής (σελ. 65), αμπελουργός (σελ. 86), μηχανικός της ύδρευσης σελ. 93), έμπορος παιχνιδιών (σελ. 126), αρχιτέκτονας (σελ. 160), αστρονόμος (σελ. 130), διευθυντής σχολείου (σελ. 87), ζωγράφος, γλύπτης (σελ. 139). Στο Τ.Ε.α, παρουσιάζεται ως αρχιμάγειρας (σελ.21, προβλ. 1), και ως δάσκαλος (σελ. 33, προβλ. 1). Στο Τ.Ε.β, ο άνδρας εμφανίζεται ως διευθυντής σχολείου (σελ. 12), και ως γιατρός (σελ. 40). Στο Τ.Ε.γ, οι άνδρες εμφανίζονται ως φοιτητές (σελ. 8), παραγωγοί κρασιού (σελ. 10), τουρίστας (σελ. 12), στρατιώτης (σελ. 12), καθηγητής μαθηματικών (σελ. 19), ψαράς (σελ28),

Τα επαγγέλματα που αποδίδονται στις γυναίκες είναι: Β.Μ.: Διευθύντρια σχολείου (σελ. 70), γραμματέας (σελ. 116), αρχαιολόγος (σελ. 167). Μπέιμπι σίτερ (σελ. 68). Στο Τ.Ε.β, παρουσιάζεται πάλι ως γραμματέας (σελ. 41) και στο Τ.Ε.γ[3], ως διευθύντρια σχολείου (σελ. 17).

1Γ. Η ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΤΟΥ ΑΝΔΡΑ ΚΑΙ ΤΗΣ ΓΥΝΑΙΚΑΣ

Στο κεφάλαιο 31ο, σελ.32, Τ.Ε.β, η δραστηριότητα με προεκτάσεις με τίτλο «Η Ισότητα των δυο φύλων», αποτελεί θετική προσέγγιση και μπορεί σε συνδυασμό με τα θέματα για συζήτηση να γίνει ένα σχέδιο εργασίας.

Στο κεφάλαιο 41, σελ. 15, Τ.Ε.γ, στο 2ο πρόβλημα γίνεται αναφορά στις μαθητικές εκλογές. Αναφέρεται χαρακτηριστικά: «Τα παιδιά της Στ΄ τάξης έκαναν εκλογές για να ορίσουν πρόεδρο της τάξης…. Η Δήμητρα πήρε 13 ψήφους και ο Νικόλας 12…». Καταργείται το στερεότυπο που θέλει τα αγόρια να κατέχουν αρχηγικές θέσεις σε χώρους όπως αυτές του σχολείου και παρουσιάζεται ένα κορίτσι ως πρόεδρος της τάξης.

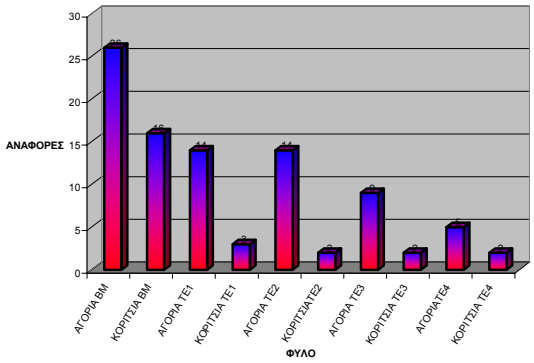
Στα Τ.Ε.δ, οι άνδρες φαίνεται να κατέχουν οικονομική δύναμη και περιουσιακά στοιχεία αφού στη σελ. 23 στο πρώτο πρόβλημα αναφέρεται: «Στο εξοχικό του ο κ. Κείσαρης θέλει να στρώσει τον κήπο…». Κάτι ανάλογο συμβαίνει στο ίδιο βιβλίο και στη σελ. 27, 2ο πρόβλημα: «Στο εξοχικό του ο κ. Παπάντος θέλει να κατασκευάσει…».

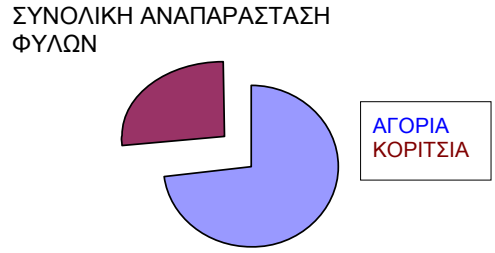
Στη σελ. 19. δραστ.2, γίνεται αναφορά στην εθνική ομάδα ποδηλασίας η οποία είναι ανδρική ομάδα, όπως προκύπτει από την εικόνα που συνοδεύει το πρόβλημα και στη σελ. 95, δραστ.2, ο αγώνας μπάσκετ μεταξύ

δημοτικών σχολείων της Θεσσαλονίκης είναι αγώνας μπάσκετ αγοριών, αφού οι καλύτεροι παίκτες είναι ο Αχιλλέας και ο Σωτήρης.

1Δ. ΑΡΙΘΜΟΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΤΩΝ ΔΥΟ ΦΥΛΩΝ

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε σε γραφήματα τις αναπαραστάσεις των δύο φύλων όπως εμφανίζονται στα βιβλία μαθητού και στα τέσσερα τετράδια εργασιών. Στη μελέτη αυτή ελέγχθηκαν το περιεχόμενο (λέξεις, φράσεις) και η εικονογράφηση των προβλημάτων των Τετραδίων εργασιών καθώς και οι δραστηριότητες και εφαρμογές του βιβλίου του μαθητή.





Οι αναφορές για τα αγόρια ήταν 68 (Β.Μ. 26, ΤΕα 14, ΤΕβ 14, Τγ 9, ΤΕδ 5) και για τα κορίτσια 25 (Β.Μ. 16, ΤΕα 3, ΤΕβ 2, Τγ 2, ΤΕδ 2).
Όπως γίνεται φανερό οι ανδρικές αναπαραστάσεις είναι τριπλάσιες στα εγχειρίδια μαθηματικών, από τις γυναικείες αναπαραστάσεις.

2. ΣΤΕΡΕΟΤΥΠΙΚΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΩΝ «ΑΛΛΩΝ» ΛΑΩΝ, ΦΥΛΩΝ

Υπάρχουν εκείνοι που προτείνουν ότι τα μαθηματικά είναι «ελεύθερα πολιτισμού» και ότι «δεν έχει σχέση ποιος κάνει τα μαθηματικά οι στόχοι παραμένουν οι ίδιοι. Αυτοί είναι άνθρωποι που δεν καταλαβαίνουν τη φύση του πολιτισμού και το βαθύ αντίκτυπό του στη γνώση." (Ladson-Billings, 1997, σελ. 700) Σύμφωνα με τον Bishop (2002), «τα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών που υπάρχουν στις διάφορες χώρες του κόσμου δεν εμφανίζονται να ανταποκρίνονται πολιτισμικά δεδομένου ότι είναι εντυπωσιακά παρόμοια». Μια από τις αιτίες λοιπόν αποτυχίας των μαθητών που προέρχονται από διαφορετικά πολιτισμικά περιβάλλοντα στο μάθημα των μαθηματικών είναι το πολιτισμικό χάσμα που αυτοί βιώνουν μέσα στις τάξεις και τα εγχειρίδια των μαθηματικών.

Η πολιτιστική θεωρία (theorie culturaliste), παραθέτει πλήθος καθοριστικών παραγόντων που επεμβαίνουν στη γένεση των εκπαιδευτικών ανισοτήτων. Η θεωρία αυτή επικαλείται, ανάμεσα στ' άλλα, τις εκπαιδευτικές προσδοκίες και τις πολιτιστικές αξίες των διαφόρων κοινωνικών ομάδων, το διαφορετικό κλίμα που διαμορφώνουν οι οικογένειες, τους κοινωνικογλωσσικούς κώδικες (Γκότοβος κ.α., 1996, σελ.198).

Την έννοια του «άλλου», την ορίσαμε σύμφωνα με όσα αναφέρει ο Γκότοβος, (1996). «Ο ¨άλλος¨ μπορεί να είναι ένα σύνολο ατόμων- μια κοινωνική κατηγορία- με τα οποία το υποκείμενο (φορέας των πολιτισμικών στοιχείων) έχει συχνή αλληλεπίδραση. Μπορεί όμως να είναι ένας πολύ μακρινός άλλος, να μένει σε άλλη χώρα ή σε άλλη ήπειρο. Η αλληλεπίδραση με τον ¨άλλον¨(με τη συγχρονική ή την ιστορική έννοια) δεν είναι απαραίτητη για την εμφάνιση στη συνείδηση του υποκειμένου των παραδοχών, των πεποιθήσεων και των στάσεων απέναντι του. Παραδοχές, πεποιθήσεις και στάσεις απέναντι στους Κινέζους π.χ. μπορεί να έχει κανείς χωρίς ποτέ να γνωρίζει έστω και ένα Κινέζο». (Γκότοβος, 1996, σελ.36). Επιλέξαμε να διερευνήσουμε κατά πόσο τα νέα εγχειρίδια θεωρούν τα μαθηματικά Δυτικά και Ευρωκεντρικά, πώς αντιμετωπίζουν το διαφορετικό όταν αυτό σχετίζεται με το χρώμα του δέρματος και κατά πόσο αντιπροσωπεύονται πολιτισμοί άλλων λαών που δεν ανήκουν στο δυτικό. Τέλος εξετάσαμε κατά πόσο στα εγχειρίδια υπάρχουν στερεότυπα απέναντι στον διαφορετικό «άλλο».

2Α. ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΔΥΤΙΚΩΝ ΛΑΩΝ

Στο κεφάλαιο 11, βιβλίο μαθητή, σελ. 29, στην 1η δραστηριότητα που αφορά το συνολικό πληθυσμό της γης, η πηγή που χρησιμοποιείται δεν είναι η πλέον κατάλληλη αφού είναι «The World Factbook 2003, CIA».

Θετική είναι η δραστηριότητα με προεκτάσεις του 50ου μαθήματος του Τ.Ε.γ, που παρουσιάζει τους μαθητές της Στ΄ τάξης του 64ου Δημ. Σχολ. Θεσσαλονίκης, να επικοινωνούν και να ανταλλάσουν δώρα με παιδιά του ελληνο-ουγγαρέζικου σχολείου της Βουδαπέστης.

2Β. ΣΤΕΡΕΟΤΥΠΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΦΥΛΩΝ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟΥ ΧΡΩΜΑΤΟΣ

Στο κεφάλαιο 16, σελ. 39, Β.Μ. με τίτλο «Έχουμε πολλά κοινά μεταξύ μας». αν και ο τίτλος είναι θετικός, ωστόσο ανατρέπεται από την εικόνα η οποία είναι μια στερεοτυπική αναπαράσταση του ισχυρού, πολιτισμένου λευκού, έναντι ανθρώπων με διαφορετικό χρώμα. Ο λευκός άνθρωπος παρουσιάζεται με σύγχρονη ενδυμασία, ενώ ο Ασιάτης παρουσιάζεται με την

εθνική ενδυμασία των Κινέζων και ο μαύρος άνθρωπος με εμφάνιση πρωτόγονης αφρικανικής φυλής.

2Γ. ΕΚΠΡΟΣΩΠΗΣΗ ΑΛΛΩΝ ΜΗ ΔΥΤΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

Στο νέο βιβλίο γίνεται αναφορά σε διάφορους λαούς (Ινδούς, Άραβες, Κινέζους Αιγυπτίους, κλπ.)και αναλύεται η συνεισφορά τους στα μαθηματικά. Παραδείγματα αποτελούν: το εισαγωγικό σημείωμα στο βιβλίο μαθητή με τίτλο «Αριθμοί και πράξεις», στο κεφάλαιο 17 σελ 41, και το εισαγωγικό κεφάλαιο των εξισώσεων σελ. 60.

Σε πολλές περιπτώσεις αγνοούνται αξίες και συνήθειες άλλων πολιτισμών και παρουσιάζονται ως πρότυπο Ευρωπαϊκές αξίες και συνήθειες, σελ 28 Τ.Ε.α, όπου με τον τίτλο «Τι επίπτωση θα έχει στη ζωή μας, ακόμη ένα δισεκατομμύριο άνθρωποι στον πλανήτη; ….,θα έπρεπε κάποιες χώρες να ευαισθητοποιηθούν προκειμένου να μειωθεί η ταχύτητα αύξησης του συνολικού πληθυσμού της Γης;», ενοχοποιούνται αναπτυσσόμενες χώρες, ενώ κανένας λόγος δεν γίνεται για την αλόγιστη σπατάλη φυσικών πόρων, για τις δυτικές συνήθειες υπερκατανάλωσης, για την εντατικοποίηση της καλλιέργειας της γης στις δυτικές κοινωνίες, για τη μόλυνση του περιβάλλοντος, για την εκμετάλλευση των φτωχών χωρών του τρίτου κόσμου από τις πλούσιες Δυτικές χώρες και τόσα άλλα που επηρεάζουν τη ζωή στον πλανήτη.

3. ΑΞΙΕΣ ΚΑΙ ΠΡΟΤΥΠΑ

Ο τρόπος που ορίζουμε μια κατάσταση προσδιορίζει, αν όχι κατευθύνει, τα προσωπικά, κοινωνικά και πολιτικά φαινόμενα που συμβαίνουν γύρω μας. Ταυτόχρονα, αυτοί οι ίδιοι ορισμοί αποτελούν μηχανισμούς μετάδοσης ιδεολογικών δομών και παράγουν κοινωνικά μηνύματα. (Αζίζι-Καλατζή κ.α., 1996, σελ. 30)

Οι ορισμοί που δημιουργεί το άτομο βασίζονται σε κάποιες αξίες πεποιθήσεις που το ίδιο έχει εσωτερικοποιήσει. Η κοινωνικοποίηση δίνει στο παιδί αξίες, νόρμες, τρόπους σκέψης και αντίληψης (Blackledge & Hunt, 2004, σελ. 259) Η μετάδοση αξιών και πεποιθήσεων γίνεται μέσα από τα αναλυτικά προγράμματα και τα εγχειρίδια του σχολείου.

Πολύ συχνά η εκπαίδευση θεωρείται απλώς μετάδοση ουδέτερων γνώσεων στους μαθητές. Οι γνώσεις αυτές θα πρέπει να μεταβιβαστούν στους μαθητές με τον οικονομικότερο και αποτελεσματικότερο τρόπο ώστε αυτοί να αποκτήσουν τα εφόδια που θα τους καταστήσουν ανταγωνιστικούς στο συ-

νεχώς μεταβαλλόμενο κόσμο. Πόσο όμως ουδέτερη είναι η γνώση; Ποιανού γνώση επιλέγεται να διδαχθεί; Υπάρχει ένα σύστημα διασύνδεσης μεταξύ γνώσης και εξουσίας; Ο τρόπος επιλογής και νομιμοποίησης της γνώσης περιθωριοποιεί τους δασκάλους, τους μαθητές και την τοπική κοινωνία.(Apple, 2002, σελ.7).

Ο Apple, αναφέρει: τόσο ιστορικά όσο και πολιτιστικά, ορισμένες κανονιστικές έννοιες νόμιμης κουλτούρας και αξιών οι οποίες μπαίνουν στα αναλυτικά προγράμματα. (Apple, 1986, σελ 169). Ο ίδιος θεωρεί ότι ένας άλλος τρόπος μετάδοσης είναι μέσω του κρυφού αναλυτικού προγράμματος, που σύμφωνα με το Jackson είναι κανόνες και αξίες που, έμμεσα, αλλά αποτελεσματικά, διδάσκονται στα σχολεία αλλά δεν αναφέρονται στους σκοπούς και τους στόχους της εκπαίδευσης. (Apple, 1986, σελ 172)

Σύμφωνα με τον Bishop (1988), τα σχολικά μαθηματικά δεν είναι ελεύθερα αξιών. Ο ίδιος περιγράφει έξι σύνολα αξιών, που αποτελούν τις κύριες αξίες που υιοθετήθηκαν από τους μαθηματικούς που ανέπτυξαν αυτό που αποκαλείται «Δυτικά μαθηματικά». Στόχος μας είναι να διερευνήσουμε τις αξίες που προωθούνται μέσα από το περιεχόμενο (κείμενα και εικόνες) των νέων σχολικών εγχειριδίων της Στ΄ τάξης. Διερευνούμε καθημερινές συνήθειες της οικογένειας, οικονομικά πρότυπα που προβάλλονται, διατροφικές και καταναλωτικές συνήθειες που προωθούνται, καθώς και αξίες για την οικολογία και το περιβάλλον.

3Α. ΤΑ ΠΡΟΤΥΠΑ ΠΟΥ ΠΡΟΩΘΟΥΝΤΑΙ

Μέσα από το περιεχόμενο των προβλημάτων προωθείται συγκεκριμένη γλώσσα, τα Αγγλικά σελ 14, ΤΕβ, προβ. 3ο. Στο ίδιο πρόβλημα τα σχολεία αξιολογούνται ανάλογα με τον αριθμό επιτυχόντων στο διαγωνισμό Αγγλικών.

Στο κεφάλαιο 4, σελ. 14, Τ.Ε.γ, άσκηση 4, είναι θετικό το ότι ζητείται από τους μαθητές να κρίνουν διαφημιστικά μηνύματα και να εκφράσουν τη γνώμη τους για το κατά πόσο είναι σωστά ή παραπλανούν τον καταναλωτή. Οι μαθητές αναπτύσσουν κριτική σκέψη και μαθαίνουν να μην παρασύρονται από διαφημιστικά μηνύματα.

Προωθούνται καταναλωτικές συνήθειες της αστικής τάξης, αφού στο κεφ. 52, σελ. 38, ΤΕγ , στη δραστηριότητα με τίτλο «Κόστος ζωής»,εμφανίζεται η Μαρία να έχει ατομικά μηνιαία έξοδα 1150 Ευρώ. Τα έξοδα κατανέμονται σε εξόφληση αυτοκινήτου, ασφάλεια ζωής, λογαριασμό κινητού, έξοδα για διασκέδαση, πιστωτική κάρτα κ.λ.π. Η λύση στο πρόβλημά της, που προ-

τείνει το βιβλίο του Δασκάλου (σελ. 132), είναι η εύρεση δεύτερης δουλειάς.

3Β. ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΕΣ ΣΥΝΗΘΕΙΕΣ ΤΗΣ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΜΕΛΩΝ ΤΗΣ

Στο 26ο κεφ. σελ 63, Β.Μ.. η 2η δραστηριότητα παραπέμπει σε συνήθειες, ενδυμασία και εμφάνιση, συγκεκριμένης κοινωνικής ομάδας. Οι καλοκαιρινές διακοπές, η πρόσθεση σιδερώτυπης στάμπας σε μπλουζάκια, δεν είναι συνήθειες όλων των παιδιών. Οι παραπάνω ισχυρισμοί ενισχύονται και από την εικόνα της δραστηριότητας. Η γλώσσα της δραστηριότητας είναι πολύπλοκη και η χρήση της έννοιας της αντίστροφης ενέργειας μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές σε παρανοήσεις, αφού είναι όρος που χρησιμοποιήθηκε στα προηγούμενα μαθήματα με άλλη έννοια «αντίστροφη πράξη», «αντίστροφοι αριθμοί».

Στην ανακεφαλαίωση, σελ. 72, Β.Μ..το 1ο πρόβλημα με τίτλο «το πάρτι» παρουσιάζει ένα μπουφέ με γλυκά. Το παραπάνω πρόβλημα δεν ανταποκρίνεται στην καθημερινή ζωή και τα ενδιαφέροντα όλων των μαθητών, αλλά προωθεί συνήθειες συγκεκριμένης κοινωνικής τάξης. Το ίδιο συμβαίνει και στο 32ο κεφάλαιο, σελ. 79, Β.Μ στη δραστηριότητα, «κόστος σύνδεσης στο Internet».

3Γ. ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΠΡΟΤΥΠΑ

Χρησιμοποιούνται πρότυπα όπως αυτό του Bill Gates, στο 6ο κεφάλαιο σελ. 17, Τ.Ε.α, 1ο πρόβλημα όπου ζητείται από τους μαθητές να υπολογίσουν «πόσα χρήματα κέρδιζε το 2003 ο Bill Gates σε 1λεπτό, 1ώρα, 1μέρα,...», νομιμοποιώντας στα παιδιά και εθίζοντάς τα από μικρά στο κέρδος, προβάλλοντας ταυτόχρονα τον ιδιοκτήτη της Microsoft, ως κοινωνικό πρότυπο.

3Δ. ΔΙΑΤΡΟΦΙΚΕΣ ΣΥΝΗΘΕΙΕΣ ΠΟΥ ΠΡΟΩΘΟΥΝΤΑΙ

Στο 19ο κεφάλαιο σελ. 45, στο βιβ. μαθ. οι φράσεις «Οι φίλοι μου κι εγώ λατρεύουμε την πίτσα. Αυτό είναι καλό, γιατί ξέρουμε πάντα τι φαγητό να παραγγείλουμε.», ανατρέπουν κάθε προσπάθεια που γίνεται στο σχολείο ώστε οι μαθητές να αποκτήσουν σωστές διατροφικές συνήθειες. Οι δραστηριότητες που προτείνονται στη συνέχεια είναι αντίθετες με το νομικό καθεστώς περί λειτουργίας σχολικών κυλικείων και προωθούν συγκεκριμένες καταναλωτικές συνήθειες.

3Ε. ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΙΚΕΣ ΣΥΝΗΘΕΙΕΣ ΠΟΥ ΠΡΟΩΘΟΥΝΤΑΙ

Στο 41ο κεφάλαιο, σελ. 98, βιβ. μαθ. θετική είναι η αναφορά και η ανάγνωση των λιπαρών σε συσκευασία γιαουρτιού, που προωθεί σωστές καταναλωτικές συνήθειες.

Στο 42ο κεφάλαιο, σελ. 99, Β.Μ. η 2η δραστηριότητα αναφέρεται στα μικρά γράμματα των διαφημίσεων και των διαφημιστικών φυλλαδίων ενημερώνοντας τους μαθητές ότι αυτά είναι πολλές φορές που διαμορφώνουν την τιμή του διαφημιζόμενου προϊόντος. Τα παιδιά μαθαίνουν να σκέπτονται κριτικά πριν προβούν στην αγορά οποιουδήποτε προϊόντος.

Θετικό το πρόβλημα σελ. 106, βιβ. μαθ. με τίτλο «Εκπτώσεις», όπου παρουσιάζεται μαθήτρια να κάνει έρευνα αγοράς πριν αγοράσει ένα προϊόν. Η δραστηριότητα δίνει τη δυνατότητα να συζητήσουμε το θέμα με τους μαθητές και συμβάλλει στη διαμόρφωση ενός κριτικά σκεπτόμενου καταναλωτή.

3ΣΤ. ΟΙΚΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

Στο 40ο κεφάλαιο, σελ. 95, βιβ. μαθ. χρησιμοποιείται στην 1η δραστηριότητα περιβαλλοντικό θέμα «δεντροφύτευση που έκαναν παιδιά δημοτικού σχολείου», δίνοντας τη δυνατότητα να ευαισθητοποιήσουμε τα παιδιά σε περιβαλλοντικά ζητήματα.

4. Η ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΕΥΣΗ ΤΩΝ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΟΜΑΔΩΝ

Ο Bernstein υποστηρίζει ότι οι ταξικές αξίες επηρεάζουν το μοντέλο κοινωνικοποίησης των παιδιών (Blackledge, Hunt, 2004, σελ. 71). Ο Miliband αναφέρει ότι τα σχολεία επιτελούν ένα ρόλο επιβεβαίωσης της ταξικής θέσης για την πλειοψηφία των παιδιών της εργατικής τάξης. Σ' αυτήν τη διαδικασία υπάρχουν εξαιρέσεις, οι οποίες όμως τείνουν να ενισχύουν την αίσθηση της προσωπικής ανεπάρκειας πολλών παιδιών κατώτερων τάξεων. Επειδή ορισμένοι από τους ομοίους τους πετυχαίνουν στην εκπαίδευση, τα παιδιά αυτά συνήθως πιστεύουν ότι η δική τους αποτυχία οφείλεται σε κάποιο δικό τους ελάττωμα. Η εκπαίδευση μεταδίδει τις «αξίες της μεσαίας τάξης», δηλαδή επιβάλλει στα παιδιά της εργατικής τάξης «μια κουλτούρα, κάποιες αξίες, ακόμα και μια γλώσσα που τους είναι ξένα». Η εκπαίδευση ενσταλάζει επίσης στους μαθητές αυτό που ο Durkheim ονόμαζε «θεμελιώδεις αξίες» της κοινωνίας. Οι θεμελιώδεις αξίες όμως που το σχολείο μεταδίδει είναι, για τον Miliband, αυτές που εγκρίνονται από τις κυρίαρχες δυνάμεις της κοινωνίας (Blackledge, Hunt, 2004, σελ. 241). Ο Bourdieu υποστηρίζει ότι η εκπαίδευση συντελεί στη διατήρηση και τη νομιμοποίηση

μιας άνισης και ταξικά διαιρεμένης κοινωνίας και ότι, αν υποτίθεται ότι η εκπαίδευση λειτουργεί ως σύστημα μετάδοσης ιδεών και γνώσης, τότε είναι ανεπιτυχής. (Blackledge, Hunt, 2004, σελ. 256)

Η σχέση ανάμεσα στο σχολείο και τις κοινωνικές διακρίσεις είναι διπλή: πρώτον, το εκπαιδευτικό σύστημα μπορεί να συμβάλει στην κοινωνική διάκριση μέσω της επιλεκτικής του λειτουργίας και δεύτερον το σχολείο, ευνοεί την κοινωνική διάκριση ως στοιχείο της ιδεολογίας του, είτε της επίσημης (αναλυτικά προγράμματα εγχειρίδια), είτε της ανεπίσημης (οργάνωση τάξεων, διάταξη καθισμάτων εγγραφές μαθητών). (Γκότοβος, 1996, σελ. 64).

Μελετούμε κατά πόσο στα εγχειρίδια των μαθηματικών λαμβάνονται υπόψη τα παραπάνω ώστε να αντιπροσωπεύονται ισότιμα όλες οι κοινωνικο-πολιτισμικές ομάδες μαθητών.

4Α. ΑΣΤΙΚΗ ΤΑΞΗ- ΧΡΗΣΗ ΓΛΩΣΣΙΚΟΥ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ο γλωσσικός κώδικας που χρησιμοποιείται είναι άγνωστος σε πολλούς μαθητές και ανήκει σε συγκεκριμένη κοινωνική ομάδα. Π.χ σελ 19, δραστ.2η με τη χρήση των εννοιών «χορηγός, χορηγία, κόστος», (κεφάλαιο 43ο Β.Μ., σελ. 101) με τη χρήση των εννοιών mg, ml, χρήση αγγλικών λέξεων «skateboard» (σελ. 141, Β.Μ.) και «prime numbers» σελ. 37. Τ.Ε.α, με τη φράση «…Πόσο συχνά σερφάρετε στο ιντερνετ…» (εφαρμ. Σελ. 102).

Στο κεφάλαιο 46, προτείνεται από το βιβλίο του δασκάλου Σελ. 118, η δημιουργία και εκτύπωση πινάκων και γραφημάτων στο Microsoft Excel. Πόσοι μαθητές έχουν τις δεξιότητες να χειρίζονται το συγκεκριμένο πρόγραμμα και να δημιουργούν γραφήματα;

4Β. ΟΜΑΔΕΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟ ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΟ ΚΑΙ ΓΛΩΣΣΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ (ΤΣΙΓΓΑΝΟΙ, ΜΕΤΑΝΑΣΤΕΣ, ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΚΑΙ ΑΛΛΟΔΑΠΟΙ)

Στο 27ο κεφάλαιο, σελ.65, Β.Μ. είναι θετική η χρήση του μοντέλου της ζυγαριάς που εισάγεται για να διδάξουμε τις εξισώσεις. Το μοντέλο αυτό θα βοηθήσει τους μαθητές ακόμη και αυτούς που προέρχονται από διαφορετικά πολιτισμικά περιβάλλοντα να κατανοήσουν την έννοια της ισότητας στα μαθηματικά.

Στο 32ο κεφάλαιο, σελ. 79, Β.Μ.. είναι θετική η χρήση οπτικού μοντέλου, καθώς και η χρήση χρώματος στην εικόνα που αναπαριστά τα «χιαστί» γινόμενα μιας αναλογίας.. Ενώ στο ίδιο κεφάλαιο, η χρήση διπλού όρου

«χιαστί» και «σταυρωτά» γινόμενα, μπορεί να οδηγήσει τα παιδιά σε παρανοήσεις.

Στη σελ. 137, στο 56ο κεφάλαιο, Β.Μ.. 1η δραστηριότητα ζητείται από τους μαθητές να διακρίνουν κάποιο κανονικό σχήμα στην εικόνα. Η έννοια «κανονικό» δεν έχει διδαχθεί και έχει διαφορετική σημασία στην καθημερινή γλώσσα από αυτή που έχει στα μαθηματικά.

Στο κεφάλαιο 2, Τ.Ε.α στο πρώτο πρόβλημα ο μαθητής προσεγγίζει βιωματικά τη μαθηματική γνώση, με την επινόηση και χρήση μονάδας μέτρησης διαφορετικής από την επίσημη. Αυτό είναι θετικό για παιδιά από διαφορετικό πολιτισμικό περιβάλλον τα οποία είναι ευκολότερο να κατανοήσουν με τον τρόπο αυτό τις μονάδες μέτρησης.

Στο κεφάλαιο 45, σελ. 23, Τ.Ε,γ στη δραστηριότητα με προεκτάσεις με θέμα «Ξενοφοβία», μέσα από ένα απόσπασμα από το βιβλίο του Χεκίμογλου, Ε. δίνεται μια μοναδική ευκαιρία να ασχοληθούμε με θέμα επίκαιρο στις μέρες μας..

4Γ. ΕΚΠΡΟΣΩΠΗΣΗ ΑΤΟΜΩΝ ΜΕ ΕΙΔΙΚΕΣ ΑΝΑΓΚΕΣ

Δυστυχώς τα άτομα με ειδικές ανάγκες δεν απεικονίζονται στα βιβλία μαθηματικών της Στ΄ τάξης. Η απουσία αυτή δηλώνει τον αποκλεισμό των ατόμων αυτών από τα μαθηματικά.

4Δ. Η ΕΙΚΟΝΑ ΤΗΣ ΤΡΙΤΗΣ ΗΛΙΚΙΑΣ

Αναπαραστάσεις για την Τρίτη ηλικία υπάρχουν μόνο στο Βιβλίο του Μαθητή σελ. 39, όπου ο παιδίατρος παρουσιάζεται ως κύριος προχωρημένης ηλικίας και στο Τ.Ε.β, σελ. 8, 2ο πρόβλημα, όπου η γιαγιά μοιράζει σοκολάτες στα εγγόνια της. Η γιαγιά και ο παππούς δεν υπάρχουν πια στις αναπαραστάσεις της οικογένειας.

5. ΙΔΕΟΛΟΓΙΚΕΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΠΑΡΟΥΣΕΣ

Όπως αναφέρει ο Apple, το σχολείο είναι ενεργητική δύναμη, που χρησιμοποιείται ακόμα για να νομιμοποιεί οικονομικές και κοινωνικές μορφές και ιδεολογίες που συνδέονται στενά με αυτό. (Apple, 1986, σελ. 91). Ο ίδιος επισημαίνει ότι τα σχολεία διδάσκουν ένα κρυφό αναλυτικό πρόγραμμα που φαίνεται μοναδικά κατάλληλο για τη διατήρηση της ιδεολογικής ηγεμονίας των ισχυρότερων τάξεων (Apple, 1986,σελ 95). Τα μαθηματικά ως μέρος του σχολικού προγράμματος είναι φορέας

ιδεολογικών μηνυμάτων. Τα μηνύματα αυτά μεταδίδονται και μέσα από το περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων άλλοτε φανερά και άλλοτε κρυφά αφού υπονοούνται. Στο κεφάλαιο αυτό θα διερευνήσουμε τα ιδεολογικά μηνύματα που προωθούνται στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Στ΄ τάξης και τις νομιμοποιήσεις που αυτά παρέχουν.

5Α. ΝΟΜΙΜΟΠΟΙΗΣΗ ΠΑΙΔΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στο πρώτο κεφάλαιο του βιβλίου του μαθητή (σελ. 9), 1η δραστηριότητα αναφέρεται ότι οι μαθητές δημοτικού σχολείου της Θεσσαλονίκης στα πλαίσια ευρωπαϊκού προγράμματος αναζήτησαν στοιχεία για ανηλίκους εργαζόμενους στην Ελλάδα. Παραθέτει πίνακα με τους εργαζόμενους ανήλικους ηλικίας από 10-18 ετών και ζητά τους μαθητές να απαντήσουν με βάση τον πίνακα σε μια σειρά ερωτήσεων. Οι μαθητές ασχολούνται με ένα κοινωνικό θέμα εξετάζοντάς το μόνο από την πλευρά των μαθηματικών χωρίς να αγγίζουν τις κοινωνικο-πολιτιστικές διαστάσεις του.

5Β. ΚΡΑΤΟΣ ΚΑΙ ΥΠΟΧΡΕΩΣΕΙΣ ΑΠΕΝΑΝΤΙ ΣΤΟΥΣ ΠΟΛΙΤΕΣ

Στο 7ο κεφάλαιο με την 1η δραστηριότητα νομιμοποιείται η μεταφορά των βιβλίων από τους μαθητές ενώ η πολιτεία πληρώνει μεταφορείς για αυτή την εργασία.

Στο 36ο κεφάλαιο, σελ. 87, βιβ. μαθ. στην πρώτη δραστηριότητα τα παιδιά συγκεντρώνουν χρήματα για να εμπλουτίσουν την σχολική βιβλιοθήκη κάτι το οποίο θα έπρεπε να χρηματοδοτείται από το κράτος.

Στο 2ο πρόβλημα, σελ. 19, Τ.Ε.α, νομιμοποιείται η παροχή πόρων από τους γονείς για την εκπαίδευση των παιδιών «Ο σύλλογος γονέων… αγόρασε για το σχολείο τρεις υπολογιστές…».

Στο 9ο κεφάλαιο σελ. 24, Τ.Ε.α, στη δραστηριότητα με προεκτάσεις «Η μεγαλύτερη κρεμαστή γέφυρα του κόσμου», ζητείται από τους μαθητές να υπολογίσουν πόσο πρέπει να χρεώνονται τα διόδια κατά τη διέλευση από τη γέφυρα Ρίου-Αντιρίου, ώστε να γίνει απόσβεση του ποσού κατασκευής. Με τη δραστηριότητα αυτή νομιμοποιείται η άμεση φορολόγηση του πολίτη για έργα που κατασκευάστηκαν με δικά του χρήματα (στην πλειοψηφία). Η δραστηριότητα αποφεύγει να κάνει λόγο για το ότι τα έσοδα από την εκμετάλλευση της γέφυρας θα τα παίρνει για τα 20 επόμενα χρόνια η Γαλλική κατασκευάστρια εταιρία, η οποία συμμετείχε στη χρηματοδότηση του έργου με ποσοστό 9% .

5Γ. ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΠΟΥ ΠΡΟΩΘΟΥΝΤΑΙ

Στο 10ο κεφάλαιο, σελ. 26, Τ.Ε.α, πρόβλημα 3, νομιμοποιείται η ωρομίσθια εργασία διότι, αν και, οι υπάλληλοι εργάζονται 8 ώρες τη μέρα είναι ωρομίσθιοι.

5Δ. ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΗΣ ΚΟΙΝΩΝΙΑΣ- ΠΡΟΤΥΠΑ

Στα προβλήματα γίνεται έντονη αναφορά σε επιχειρήσεις όπως σελ. 41 Τ.Ε.β, σελ. 72 & 125 ΒΜ. Στην 1η εφαρμογή του 52ου κεφαλαίου, Β.Μ.σελ. 125, χρησιμοποιείται ένα παιχνίδι ρόλων. Συγκεκριμένα αναφέρεται: «Είσαι έμπορος παιχνιδιών και σκέφτεσαι να εισάγεις παιχνίδια από την Κίνα. Τι πρέπει να υπολογίσεις, για να βρεις πόσο πρέπει να πουλήσεις κάθε παιχνίδι στην ελληνική αγορά και να έχεις κέρδος;» Ο μόνος στόχος που διαφαίνεται από την παραπάνω εφαρμογή είναι ο εθισμός των παιδιών στο κέρδος και τον ανταγωνισμό μέσα από ένα παγκοσμιοποιημένο εμπόριο. Με τη χρησιμοποίηση της φράσης στην 5η απάντηση που δίνεται «Στο τελικό κόστος θα προσθέσω τι επιθυμητό κέρδος», προωθείται η ιδέα της ελεύθερης αγοράς όπου ο καθένας μπορεί να καθορίζει από μόνος του το κέρδος. Τα παιδιά παραπλανούνται με το εύκολο κέρδος, αλλά ούτε λόγος για άλλους παράγοντες που ελέγχουν την οικονομία όπως: μεγάλο κεφάλαιο, καρτέλ, πολυεθνικές επιχειρήσεις.

Η τελευταία απάντηση που χρησιμοποιείται στο παραπάνω πρόβλημα «Η τιμή πώλησης στην Ελλάδα είναι ανταγωνιστική σε σχέση με τα ελληνικά παιχνίδια;», προωθεί τον ελεύθερο ανταγωνισμό στην οικονομία των χωρών.

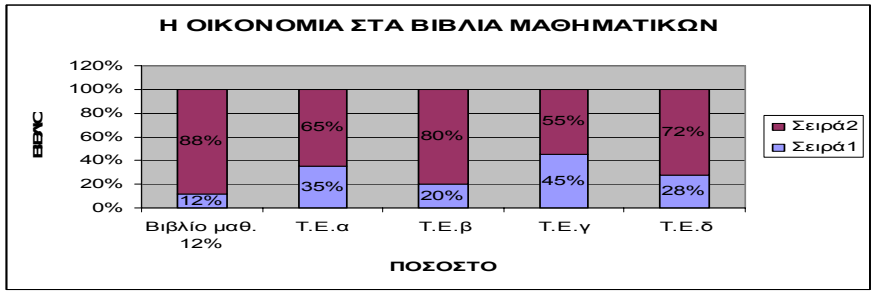
5Ε. Η ΠΑΡΟΥΣΙΑ ΧΡΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΣΥΝΑΛΛΑΓΩΝ ΣΤΑ ΒΙΒΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Στο Τ.Ε.α, σελ. 26, 2ο πρόβλημα παρουσιάζεται πίνακας με το μέσο όρο των ετήσιων εξόδων νοικοκυριού στην Ελλάδα για το έτος 1999. Πηγή των στοιχείων είναι η ΕΣΥΕ. Με μια πρώτη ματιά τα έξοδα της οικογένειας ανέρχονται σε 16.598,04 Ευρώ το χρόνο δηλαδή 1383 ευρώ το μήνα. Αναρωτήθηκε κανείς πόσες οικογένειες στην Ελλάδα το 1999, είχαν μηνιαία έσοδα πάνω από 1400 ευρώ ώστε να εμπεριέχονται στο μέσο όρο; Πόσες και ποιες οικογένειες εκπροσωπούνται στο παραπάνω δείγμα, πόσες και ποιες αποκλείονται; Αν εξετάσουμε τα είδη των εξόδων, τα έξοδα για οινοπνευματώδη ποτά και καπνό είναι 607,13 ευρώ περίπου τα ίδια με τα έξοδα για αναψυχή και πολιτισμό (816 ευρώ). Ο πολιτισμός εμφανίζεται να έχει την ίδια αξία με τον καπνό και το οινόπνευμα. Τα έξοδα για την υγεία

είναι 1.131 Ευρώ και αποτελούν περίπου το 7% των συνολικών εξόδων. Τι έγινε λοιπόν η κοινωνική ασφάλιση; Μήπως με την αναφορά αυτή νομιμοποιείται η κρατική πολιτική στα θέματα υγείας και πρόνοιας; Τα έξοδα για «ξενοδοχεία, καφενεία και εστιατόρια» είναι 1552 Ευρώ. Με το συγκεκριμένο πρόβλημα όχι μόνο αποκλείουμε μαθητές κατώτερων εισοδημάτων, αλλά θέτουμε και προτεραιότητες και πρότυπα στους μαθητές αντίθετα με αυτά που μέχρι τώρα προωθούσε το σχολείο. Το πρόβλημα δεν θα είχε τόσα αρνητικά αν ακολουθούσε ανάλογη συζήτηση στη δραστηριότητα με προεκτάσεις.

Κάτι ανάλογο συμβαίνει και στο Τ.Ε.γ, σελ. 38, στη δραστηριότητα με προεκτάσεις «Κόστος ζωής» που σχολιάστηκε παραπάνω. Τα μηνιαία έξοδα της Μαρίας είναι 1176 Ευρώ και τα έσοδα 1150 Ευρώ. Προωθούνται ο δανεισμός, η ασφάλεια ζωής, η χρήση κινητού και πιστωτικής κάρτας και η διασκέδαση. Απουσιάζουν ο πολιτισμός, το βιβλίο, το θέατρο και ο κινηματογράφος.

Σε μια ποσοτική καταγραφή βρήκαμε ότι στο βιβλίο του μαθητή το 12% των δραστηριοτήτων και εφαρμογών έχουν ως θέμα την οικονομία και τις χρηματικές συναλλαγές, το 35% των προβλημάτων στο Τ.Ε.α, ασχολούνται με τα χρήματα ενώ τα ποσοστά για τα υπόλοιπα βιβλία είναι 20%, 45%, και 28% αντίστοιχα για τα Τ.Ε. β,γ,δ, τεύχη.



Η σειρά μπλε χρώματος απεικονίζει τις δραστηριότητες του βιβλίου που συνδέονται με χρήματα, και οικονομικές δραστηριότητες. Το κόκκινο χρώμα απεικονίζει τις δραστηριότητες ανά βιβλίο που αναφέρονται σε άλλα θέματα.

Σε μεγάλο ποσοστό τα παιδιά εξασκούνται λύνοντας προβλήματα που αφορούν στην οικονομία. Τα νέα εγχειρίδια συνεχίζουν να συνδέουν μαθηματικά με οικονομία παραλείποντας άλλες δραστηριότητες της καθημερινής ζωής όπου εφαρμόζονται τα μαθηματικά.

ΓΕΝΙΚΑ ΣΧΟΛΙΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Σύμφωνα με τους Powell & Frankenstein τα άτομα και οι διάφορες κοινότητες θεωρούν, μιλούν και ενεργούν σαν να έχουν μη μαθηματικά μυαλά. Στην περίπτωση των γυναικών, οι ερευνητές έχουν εξερευνήσει τους δομικούς, συναισθηματικούς και πολιτισμικά ρυθμισμένους γνωστικούς παράγοντες που οδηγούν τις γυναίκες να θεωρούν ότι οι άνδρες έχουν περισσότερη μαθηματική ικανότητα. Οι Tobias (1978) & Dowling (1990) ερεύνησαν τα κρυμμένα μηνύματα για το φύλο, τη φυλή και την τάξη στο περιεχόμενο και τις εικόνες των εγχειριδίων των μαθηματικών. Ο Beckwith (1993) συνόψισε τις μελέτες της επιρροής των μέσων στις αντιλήψεις των παιδιών για τις υποτιθέμενες ανώτερες μαθηματικές ικανότητες των αγοριών. Ο Ερνεστ (1976), καταλήγει στο συμπέρασμα ότι αυτές οι πεποιθήσεις είναι «το αποτέλεσμα πολλών λεπτών (και όχι τόσο λεπτών)δυνάμεων, περιορισμών, στερεοτύπων, ρόλων του φύλου, των στάσεων των γονιών, των δασκάλων και της ομάδας των συνομηλίκων καθώς και άλλων πολιτισμικών και ψυχολογικών περιορισμών». (Powell, Frankenstein, 1997, κεφ.12)

Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι περιορισμοί, τα στερεότυπα των φύλων, οι ρόλοι των φύλων, καθώς και τα κρυμμένα μηνύματα σχετικά με τα φύλα που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια, έρχονται να ενισχύσουν το μύθο ότι τα μαθηματικά είναι «Δυτικά και ανδρικά». Επηρεάζουν και δημιουργούν φραγμούς στη μαθηματική εκπαίδευση των κοριτσιών και είναι μια από τις αιτίες αποτυχίας πολλών κοριτσιών.

Παρά την προσπάθεια της συγγραφικής ομάδας τα στερεότυπα των φύλων είναι έντονα στις εικόνες και τα κείμενα των νέων βιβλίων. Οι στερεότυπες αντιλήψεις για τα φύλα και τους ρόλους τους, εκτός λίγων εξαιρέσεων, παραμένουν.

Οι μελέτες έχουν δείξει ότι το κοινωνικό και πολιτισμικό υπόβαθρο κάποιου ατόμου καθορίζει σε σημαντικό βαθμό αν αυτός θα έχει καλή απόδοση ή όχι στα μαθηματικά. (Lamb 1997, Marjoribanks 1987, Secada 1992, στο Gates 2001, σελ. 38).

Ο Zevenbergen (…) ισχυρίζεται ότι οι μαθητές μπαίνουν στην τάξη των μαθηματικών με ένα κοινωνικοπολιτιστικό υπόβαθρο. Οι σπουδαστές των οποίων το κοινωνικοπολιτιστικό υπόβαθρο είναι σύμφωνο με αυτό του πολιτισμού που κυριαρχεί, είναι πιθανότερο να επιτύχουν μέσω των πρακτικών που ενσωματώνονται στην τάξη συμπεριλαμβανομένων και των γλωσσικών πρακτικών. Ο Bishop αναφέρει ότι για πολλά παιδιά σε όλο τον κόσμο η εμπειρία εκπαίδευσης μαθηματικών στα σχολεία δεν είναι πολιτισμικά σύμφωνη με τη δική τους εμπειρία. Στην περίπτωση αυτή δημιουργείται μια κατάσταση πολιτισμικής σύγκρουσης και η εκπαιδευτική διαδικασία

καταλήγει σε μια διαδικασία αποενσωμάτωσης. (Bishop, 2002). Το πολιτισμικό υπόβαθρο των μαθητών είναι ένας από τους καθοριστικούς παράγοντες για την επιτυχία στα μαθηματικά. Θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη η κουλτούρα όλων των μαθητών/τριών, τόσο κατά το σχεδιασμό της εκπαιδευτικής διαδικασίας στην τάξη, όσο και κατά τον σχεδιασμό των αναλυτικών προγραμμάτων. Τα σχολικά εγχειρίδια θα πρέπει να είναι όσο το δυνατό πιο πλουραλιστικά και να ενσωματώνουν πολιτισμικά στοιχεία, συνήθειες, αξίες, των διαφορετικών πολιτισμικών ομάδων που φοιτούν στο σχολείο. Στην κατεύθυνση αυτή τα νέα εγχειρίδια κάνουν αναφορές σε περισσότερους πολιτισμούς. Ωστόσο οι αναφορές αυτές είναι επιφανειακές και περιορίζονται περισσότερο στα Δυτικά πρότυπα. Γίνεται μια στερεοτυπική αναφορά σε ανθρώπους άλλου χρώματος, εμφανίζοντας τους λευκούς να υπερέχουν πολιτισμικά έναντι των μαύρων και των Ασιατών. Οι διαφορετικές πολιτισμικές ομάδες δεν εκπροσωπούνται στα βιβλία, μια και απουσιάζουν από αυτά οι αξίες, οι καθημερινές συνήθειες, οι ιδέες και η κουλτούρα τους.

Ο Bishop (2002), υποστηρίζει ότι τα μαθηματικά δεν είναι ελεύθερα αξιών. Στη διερεύνηση που έγινε στα νέα εγχειρίδια των μαθηματικών τα ευρήματα μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι οι αξίες και τα πρότυπα που προωθούνται είναι αυτά της αστικής τάξης. Κάτι ανάλογο συμβαίνει και με καθημερινές συνήθειες της οικογένειας, διατροφικές και καταναλωτικές συνήθειες. Προωθούνται δυτικές συνήθειες και αξίες στη διατροφή, στην ένδυση, στην καθημερινή ζωή, στα εφόδια και προσόντα που πρέπει να έχει κάθε μαθητής, στην κατανάλωση, στις ανάγκες κ.λ.π. Οι μαθητές εθίζονται στην εύκολη απόκτηση αγαθών μέσω δανεισμού και στο έτοιμο φαγητό. Οι καθημερινές συνήθειες είναι συνήθειες της αστικής τάξης, ενώ οι συνήθειες των υπόλοιπων κοινωνικοπολιτισμικών ομάδων αγνοούνται. Με τον τρόπο αυτό τα μαθηματικά ενισχύουν τους είδη προνομιούχους ενώ λειτουργούν ως φίλτρο για τους μη προνομιούχους. Κοινωνικοί στόχοι όπως ίσες ευκαιρίες μάθησης, ισότητα και δικαιοσύνη στην εκπαίδευση μένουν ανεκπλήρωτοι.

Η σύνδεση με την οικονομία είναι έντονη, όπως άλλωστε και στα παλιά βιβλία μαθηματικών. Η διαφορά είναι ότι πέρα από τα χρήματα, τις οικονομικές συναλλαγές επιχειρείται μέσω των μαθηματικών η σύνδεση του σχολείου με τις επιχειρήσεις και την αγορά εργασίας. Πολλά προβλήματα αναφέρονται σε έξοδα επιχειρήσεων, σε κέρδη, σε απόσβεση επενδύσεων, σε τραπεζικές συναλλαγές, ενώ προωθούνται δυτικές συνήθειες και αξίες όπως ο δανεισμός και η αγορά με πιστωτική ή δόσεις. Οι μαθητές συνηθίζουν να εξετάζουν τα υπερκέρδη επιχειρήσεων, τις ελαστικές μορφές εργασίας των εργαζομένων, την παροχή ιδιωτικών πόρων στην εκπαίδευση και

προετοιμάζονται για μια ανταγωνιστική κοινωνία όπου θέση θα έχουν οι ισχυροί. Μέσα από μια σειρά προβλημάτων περνάμε στους μαθητές την ιδέα της ελεύθερης αγοράς και του οικονομικού ανταγωνισμού. Προωθούνται οι ιδέες του κέρδους, του εύκολου χρήματος, τα πρότυπα ανθρώπων με οικονομική δύναμη. Τα παιδιά συνηθίζουν στην ιδέα ενός κράτους όπου κοινωνική πρόνοια απουσιάζει, η εκπαίδευση γίνεται πρόβλημα των ίδιων των πολιτών και χρηματοδοτείται από αυτούς, τα δημόσια έργα αποπληρώνονται από τους πολίτες.

Τέλος, θετικό είναι πως μέσα από τις δραστηριότητες των βιβλίων αναπτύσσεται η οικολογική συνείδηση των μαθητών, η φροντίδα για το περιβάλλον, για τα είδη των ζώων και των φυτών που χάνονται και για τα μεγάλα οικολογικά προβλήματα που απασχολούν τον πλανήτη, όπως η μόλυνση του περιβάλλοντος, ή έλλειψη νερού, η υπεραλίευση των θαλασσών κ.α.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Αζίζη-Καλατζη, Α., Ζώνιου-Σιδέρη, Α.& Βλάχου, Α. (1996), Προκαταλήψεις και στερεότυπα Δημιουργία και αντιμετώπιση, Αθήνα, έκδ. Γ.Γ.Λ.Ε.

Apple, M. (1986). Ιδεολογία και αναλυτικά προγράμματα, Θεσσαλονίκη, Παρατηρητής.

Apple, M. (2002). Εκσυγχρονισμός και Συντηρητισμός στην Εκπαίδευση, Αθήνα, Μεταίχμιο.

Blackledge, D. & Hunt, B. (2004). Κοινωνιολογία της εκπαίδευσης, Αθήνα, Μεταίχμιο.

Bell, J. (2001). Μεθοδολογικός σχεδιασμός παιδαγωγικής και κοινωνικής έρευνας, εκ. Gutenberg.

Bishop, A. J. (1988). Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bishop, A. (2002), Critical issues in researching cultural aspects of mathematics education.

Bourdieu, P. & Wacquant, L. J. D. (1992). An invitation to reflexive sociology, Cambridge: Polity.

Bourdieu, P. Passeron, J. C. de saint Martin, M. (1994a). Academic Discourse: Linguistic misunderstanding and professorial power (Richard Teese, Trans), Stanford : Stanford University Press.

Cohen, L. & Manion, L. (1994). Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας, εκδ. Μεταίχμιο.

Γκότοβος, Α. & Μαυρογιώργος, Γ. & Παπακωνσταντίνου, Π. (1986). Κριτική παιδαγωγική και εκπαιδευτική πράξη, Αθήνα, Gutenberg.

Γκότοβος, Α. (1996). Ρατσισμός Κοινωνικές, Ψυχολογικές και παιδαγωγικές όψεις μιας ιδεολογίας και μιας πρακτικής, Αθήνα, εκδ. Γ.Γ.Λ.Ε.

D' Ambrosio, U. (2002). Ethnomathematics: An overvie, Presentation in the 2nd Conference on Ethnomathematics, Ouro Preto, August, 4-7.

ΔΕΠΠΣ (ΦΕΚ 1366 τΒ΄/18-10-2001)

Gerdes, P. (1996), Ethnomathematics and Mathematics Education, in A.J. Bishop et al. (eds), International Hanbook of Mathematics Education, (pp.909-943)

Gates, P, (2001), Issues in Mathematics Teaching, publ. RoutledgeFalmer

Κασσώτη, Ο, & Κλιαπης, Π, & Οικονόμου, Θ, (2006), Μαθηματικά Στ΄Δημοτικού Τετράδιο εργασιών τεύχος α β, γ, δ, και Μαθηματικά Στ΄ΔημοτικούΒιβλίο δασκάλου, εκδ. Ελληνικά Γράμματα.

Ladson-Billings, G. (1997), It doesn't add up: African American students' mathematics achievement. Journal for Research in Mathematics Education, 28, 697-708

Μπαγιάκης, Γ, (2002), Ο εκπαιδευτικός ως ερευνητής, εκδ. Μεταίχμιο.

Οικονόμου, Α, Σακονίδης, Χ, Τζεκάκη, Μ, (2000), Αξιολόγηση των μαθηματικών γνώσεων Μαθητών ΣΤ΄Δημοτικού και Γ΄Γυμνασίου στο Τζεκάκη, Μ, Δεληγιωργάκος, Ι, (Eds) ΄Ερευνα για εναλλακτικές διδακτικές προσεγγίσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών, Αθήνα: ΥΠΕΠΘ-ΚΕΕ

Powell, A. & Frankenstein, M. (1997). Ethnomathematics, Challenging Eurocentrism in Mathematics Education. State University of New York Press.

Rowlands, S. & Carson, R. (2002). Where would formal, academic mathematics stand in a curriculum informed by ethno mathematics? A critical review of ethno mathematics, at Educational Studies in mathematics 50: 79-102, 2002. Klower Academic Publishers, Printed in Netherlands.

Σταθοπούλου, Χ. (2005). Εθνομαθηματικά, Εκδ. Ατραπός

Σκουμπουρδή, Χ. & Σταθοπούλου, Χ. Ο ρόλος της μαθηματικής εκπαίδευσης στη σύγχρονη πολυπολιτισμική κοινωνία.

Σταθοπούλου, Χ. & Μηλιώνης, Χ. (2005). Εθνομαθηματικά και πολυπολιτισμική εκπαίδευση, 4ο Διήμερο Διαλόγου για τη διδασκαλία των μαθηματικών, Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 2005.

Χρονάκη, Α, (2005), Η έννοια του κοινωνικού ως πολιτισμική ιστορική και ως πολιτική στη σύγχρονη μελέτη της μαθηματικής εκπαίδευσης,4ο Διήμερο Διαλόγου για τη διδασκαλία των μαθηματικών, Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 2005.

Zevenbergen, R, Classroom Interactions and Linguistic Capital: A Bourdieuian Analysis of the Construction of Social Difference in Mathematics Education

Η ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

Δημήτρης Χασάπης ***Μαρία Βλάχου***

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης *Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση*

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Όπως όλες οι έρευνες δείχνουν, ο ρόλος του διδακτικού βιβλίου στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι κυρίαρχος. Το διδακτικό βιβλίο προσδιορίζει τα θέματα και τη σειρά με την οποία θα διδαχθούν και οργανώνει τη διδασκαλία των μαθηματικών υποβάλλοντας τις αντίστοιχες δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων και ασκήσεων. Ο Van Dormolen (1986) διακρίνει, μάλιστα, ως κύριες διδακτικές λειτουργίες του σχολικού βιβλίου μαθηματικών τις εξής δύο: μια λειτουργία «αναλυτικού προγράμματος» δια της οποίας το βιβλίο οργανώνει το μαθηματικό περιεχόμενο της διδασκαλίας σε μια λογική σειρά και μια αντίστοιχη λειτουργία «εννοιολογικής ανάπτυξης» δια της οποίας το βιβλίο οργανώνει τη μαθησιακή διαδικασία αποτυπώνοντας στη δομή και στο περιεχόμενο του την ανάπτυξη των νοητικών δομών του μαθητή.

Τα διδακτικά βιβλία, επομένως, απευθύνονται τυπικά στους μαθητές ως υποστηρικτικά της διδασκαλίας των μαθηματικών, αλλά ουσιαστικά χρησιμοποιούνται από τους δασκάλους για την οργάνωση και του περιεχομένου και της διαδικασίας της διδασκαλίας.

Πολλές σχετικές έρευνες σε εκπαιδευτικούς διαφόρων χωρών καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι οι δάσκαλοι προτιμούν την ασφάλεια του διδακτικού βιβλίου από την αυτονομία οργάνωσης της διδασκαλίας τους, η οποία για την προετοιμασία της απαιτεί πολλές, πλέον της διεξαγωγής της, εργασίες, επιλογές και υπευθυνότητες (Love & Pimm, 1996). Άλλωστε, η τάση που επικρατεί στα σύγχρονα διδακτικά βιβλία μαθηματικών να περιλαμβάνουν μια αναλυτική παρουσίαση των θεωρητικών εννοιών, των μεθόδων και των τεχνικών συνοδευόμενη από παραδείγματα, όπως επίσης και πλήθος ερωτήσεων, ασκήσεων και προβλημάτων, καθιστά εκ των πραγμάτων κάθε διδακτικό βιβλίο «*ένα δάσκαλο από μόνο του*» (van Dormolen 1986, σ. 141). Στη βάση μιας τέτοιας πραγματικότητας, τα διδακτικά βιβλία καθορίζουν

απολύτως το περιεχόμενο των σχολικών μαθηματικών και προσδιορίζουν σε μεγάλο βαθμό το πλαίσιο της διδασκαλίας τους.

Από ένα μεγάλο αριθμό διαθέσιμων ερευνών για τη χρήση των διδακτικών βιβλίων στη διδασκαλία των μαθηματικών προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα, συνοπτικά διατυπωμένα:

- το περιεχόμενο της διδασκαλίας των μαθηματικών στην πρωτοβάθμια και στον κατώτερο κύκλο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης καθορίζεται πρωτίστως από το διδακτικό βιβλίο, το οποίο κυρίως αναπαράγει (Barr 1988, Foxman 1999, Freeman & Porter 1989, Grouws & Smith 2000, Reys et al. 2003, Robitaille & Travers 1992).

- Μαθηματικές έννοιες, μέθοδοι και τεχνικές, οι οποίες δεν περιλαμβάνονται στο διδακτικό βιβλίο μαθηματικών σε σπάνιες περιπτώσεις διδάσκονται από τους εκπαιδευτικούς (Freeman & Porter 1989, Reys et al. 2003).

- Οι διδακτικές πρακτικές των δασκάλων διαμορφώνονται από τις αντίστοιχες προσεγγίσεις του διδακτικού βιβλίου (Foxman 1999, Grouws & Smith 2000, Reys et al. 2003).

Οι δάσκαλοι αναφέρουν ως κύρια πηγή πληροφόρησης τους και καθοδήγησης της διδασκαλίας τους το διδακτικό βιβλίο μαθηματικών (Schmidt et al. 2001, Weiss et al. 2001).

Σ' αυτό το θεωρητικό πλαίσιο, η έρευνα της οποίας οι κύριες διαπιστώσεις παρουσιάζονται στη συνέχεια, επιχείρησε να καταγράψει ουσιώδεις όψεις της χρήσης του διδακτικού βιβλίου των μαθηματικών από δασκάλους και μαθητές του Ελληνικού Δημοτικού σχολείου. Η κατανόηση απόψεων για το διδακτικό βιβλίο, προσεγγίσεων του διδακτικού βιβλίου και χρήσης του στη διδασκαλία των μαθηματικών αποτελεί προϋπόθεση για οποιαδήποτε εγχείρημα βελτίωσης της αποτελεσματικότητας της προς όφελος των μαθητών και μαθητριών.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Η έρευνα η οποία παρουσιάζεται εδώ διεξήχθη σε 22 Δημοτικά σχολεία της περιοχής Θεσσαλονίκης κατά το σχολικό έτος 2005-2006 με τη μέθοδο της δομημένης παρατήρησης της διδασκαλίας των μαθηματικών. Πραγματοποιήθηκαν συστηματικές παρατηρήσεις σε ένα τμήμα Α΄ τάξης, έξι τμήματα Β΄ τάξης, τρία Γ΄ τάξης, επτά Δ΄ τάξης και πέντε τμήματα Ε΄ τάξης, με κριτήριο επιλογής την εύκολη πρόσβαση. Σε καθένα από τα τμήματα αυτά διεξήχθησαν παρακολουθήσεις του μαθήματος των μαθηματικών για μία

εβδομάδα (τέσσερα δίωρα) και καταγράφτηκαν παρατηρήσεις για τον τρόπο χρήσης του διδακτικού βιβλίου από τον δάσκαλο κατά τη διάρκεια του μαθήματος.

Η παρατήρηση εντοπίσθηκε πρωτίστως στα παρακάτω στοιχεία:

- Πότε και για ποιο κυρίως λόγο χρησιμοποιείται το βιβλίο των μαθηματικών από το δάσκαλο (και αντίστοιχα από τους μαθητές) κατά τη διάρκεια του μαθήματος των μαθηματικών,
- Πώς και με ποιες λεκτικές διατυπώσεις ο δάσκαλος προτρέπει ή παραπέμπει στη χρήση του βιβλίου των μαθηματικών.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ

Η ανάλυση των παρατηρήσεων ανέδειξε τον πρωταρχικό ρόλο που αποδίδουν οι δάσκαλοι της έρευνας στο διδακτικό βιβλίο για την οργάνωση και τη διεξαγωγή της διδασκαλίας των μαθηματικών. Οι δάσκαλοι στο σύνολό τους, για την επίτευξη των στόχων της διδασκαλίας, φαίνεται ότι οργανώνουν τις διδακτικές τους ενέργειες και τις μαθητικές δραστηριότητες με βάση το σχολικό εγχειρίδιο του μαθητή. Ωστόσο διαπιστώθηκαν κάποιες διαφοροποιήσεις μεταξύ των δασκάλων ως προς τον τρόπο χρήσης του σχολικού εγχειριδίου στην διδακτική προσέγγιση της κάθε ενότητας.

Στην προσπάθειά μας να διερευνήσουμε τα ερωτήματα της παρούσας έρευνας θα αναφερθούμε στη συνέχεια, πιο συγκεκριμένα, στους λόγους για τους οποίους φαίνεται ότι οι δάσκαλοι χρησιμοποιούν το σχολικό εγχειρίδιο και σε ποιες φάσεις της διδασκαλίας τους στην τάξη, παραθέτοντας ενδεικτικά και τις αντίστοιχες λεκτικές διατυπώσεις με τις οποίες προτρέπουν ή παραπέμπουν τους μαθητές στη χρήση του.

Οι δάσκαλοι χρησιμοποιούν το σχολικό εγχειρίδιο:

1. ΣΤΗΝ ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

- ***για έλεγχο των ασκήσεων*** του βιβλίου που είχαν ανατεθεί στο προηγούμενο μάθημα ***για το σπίτι*** και εντοπισμό πιθανών δυσκολιών των παιδιών.
- *Ανοίξτε όλοι τα βιβλία και κάποιος να διαβάσει την άσκηση που είχαμε για το σπίτι.* (Δ΄ τάξη)
- *Ποιες από τις ασκήσεις του βιβλίου δεν προλάβαμε να κάνουμε;* (Ε΄ τάξη)

Η δεύτερη από τις παραπάνω λεκτικές διατυπώσεις του δασκάλου οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ένας από τους λόγους ανάθεσης από το δάσκαλο εργασιών του βιβλίου για το σπίτι αποτελεί η έλλειψη χρόνου για την ολοκλήρωση της ενότητας.

- ***για ανάκληση, επανάληψη, ανακεφαλαίωση ή επισήμανση*** στοιχείων που διδάχτηκαν σε προηγούμενη ενότητα με σκοπό τη σύνδεση των προηγούμενων γνώσεων με το νέο γνωστικό αντικείμενο που πρόκειται να διδαχθεί:
- *Γιατί μιλήσαμε την προηγούμενη φορά;* (Ε΄ τάξη)
- *Πάτε στο βιβλίο και βρείτε τη σελίδα που έχει τους δεκαδικούς* (προηγούμενο μάθημα). (Ε΄ τάξη)
- *Γυρίστε στην επανάληψη…*(Ε΄ τάξη)
- *Δες το βιβλίο* (σε προηγούμενη ενότητα για την πράξη της διαίρεσης) (Δ΄ τάξη)
- **για *εισαγωγή σε καινούρια ενότητα***, παραπέμποντας στον τίτλο και/ή στη σελίδα του νέου μαθήματος
- *Για ανοίξτε το βιβλίο και δείτε το επόμενο μάθημα.*(Β΄ τάξη)
- *Ανοίξτε τα βιβλία και τα τετράδιά σας για να προχωρήσουμε.*(Δ΄ τάξη)
- *Βγάλτε τα βιβλία σας.* (Ε΄ τάξη)
- *Σε ποια σελίδα βρίσκεται το μάθημα;* (Ε΄ τάξη)
- *Ανοίξτε τα βιβλία σας να αρχίσουμε το μάθημα στη σελίδα 53.* (Ε΄ τάξη)
- *Ανοίξτε τα βιβλία στη σελίδα 60.* (Δ΄ τάξη)
- *Θα πάμε σήμερα στη σελίδα …*(Β΄ τάξη)
- *Πάμε στη σελίδα 48.* (Δ΄ τάξη)

2. ΣΤΗΝ ΤΕΛΕΥΤΑΙΑ ΦΑΣΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

- **για *εκτέλεση των εργασιών*** (ασκήσεων και προβλημάτων) *εφαρμογής* και εμπέδωσης του βιβλίου και έλεγχο με αυτόν τον τρόπο της κατανόησης από τους μαθητές της νέας έννοιας:
- *Ασκήσεις!...* (Δ΄ τάξη)
- *Θα πάμε τώρα στην πίσω σελίδα να κάνουμε τις ασκήσεις.* (Β΄ τάξη)
- *Κάντε την άσκηση του βιβλίου να δω τι καταλάβατε.* (Δ΄ τάξη)
- *Κάντε παιδιά τη διαίρεση…*(Δ΄τάξη)

- *Μελετείστε την επόμενη άσκηση του βιβλίου.* (Δ΄ τάξη)
- *Για να δούμε την επόμενη άσκηση.* (Β΄ τάξη)
- *Κάντε τις ασκήσεις της επόμενης σελίδας.* (Β΄ τάξη)
- *Διάβασε το πρόβλημα στη σελίδα 17.Πώς θα το βρούμε;* (Ε΄ τάξη)
- *Πάρε και το βιβλίο σου μαζί (για εκτέλεση άσκησης στον πίνακα)* (Δ΄ τάξη)
- *Ν' ακούσω το πρόβλημα 6.* (Γ΄ τάξη)
- *Γυρίστε στη σελίδα 135 να λύσετε το 2ο πρόβλημα στο τετράδιό σας και όσοι τελειώσετε θα κάνετε και το 6ο πρόβλημα.* (Γ΄ τάξη)
- *Λύστε το επόμενο πρόβλημα.* (Γ΄ τάξη)
- *Διαβάστε σιωπηρά το πρώτο πρόβλημα και προσπαθήστε να το λύσετε.* (Γ΄ τάξη)
- *Όποιος το έγραψε κοιτάζει το επόμενο πρόβλημα.* (Γ΄ τάξη)
- *Για ν' ανοίξουμε το βιβλίο να κάνουμε την πρώτη και τη δεύτερη άσκηση.* (Δ΄ τάξη)
- *Κάνε μας αυτή την άσκηση.* (Ε΄ τάξη)
- *Πάμε στο βιβλίο να κάνουμε τις ασκήσεις.* (Δ΄ τάξη)
- *Ανοίγουμε τα βιβλία στις ασκήσεις.* (Δ΄τάξη)
- *Τώρα ανοίξτε τα βιβλία και λύστε τις ασκήσεις.* (Α΄ τάξη)
- *Ανοίγουμε τα βιβλία και λύνουμε τις ασκήσεις.* (Α΄ τάξη)
- *1ο αντίστροφο!* (Δ΄ τάξη)
- *Πάμε στο πρόβλημα 2 απ' τη σελίδα 51.* (Δ΄ τάξη)
- *Διάβασε το πρόβλημα. Σελίδα 51, πρόβλημα 2!* (Δ΄ τάξη)
- ***για ανάθεση εργασιών*** *του βιβλίου για το σπίτι*
- *Ανοίξτε τα βιβλία για να σημειώσετε τις ασκήσεις.* (Ε΄ τάξη)
- *Το άλλο πρόβλημα για την επόμενη φορά.* (Γ΄ τάξη)
- *Οι ασκήσεις 3 και 4 του βιβλίου για το σπίτι.* (Δ΄ τάξη)
- *Ανοίξτε το βιβλίο να σας βάλω ασκήσεις για το σπίτι.* (Ε΄ τάξη)
- *Το 2 για το σπίτι.* (Γ΄ τάξη)

3. ΣΕ ΟΛΗ ΤΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

- ***για τη διδασκαλία της νέας έννοιας και επεξεργασία της καινούριας ενότητας.*** Πιο συγκεκριμένα το βιβλίο χρησιμοποιείται για την:
- παρουσίαση του αρχικού προβλήματος,
- επίλυσή του – επίδειξη από το δάσκαλο στον πίνακα ή επίλυση από τους μαθητές μέσω διερεύνησης στην τάξη με τη βοήθεια του δασκάλου,
- εξαγωγή του κανόνα ή συμπεράσματος από το δάσκαλο ή μέσω συζήτησης στην τάξη
- εκτέλεση των εργασιών εφαρμογής του βιβλίου από τους μαθητές

Σε ορισμένες περιπτώσεις παρατηρήθηκε το φαινόμενο της ανάγνωσης του βιβλίου από τους μαθητές από την αρχή μέχρι και την ολοκλήρωση της διδασκαλίας με το δάσκαλο να παρέχει τις απαραίτητες διευκρινίσεις ή εξηγήσεις όπου θεωρεί ότι είναι απαραίτητο. Στις περιπτώσεις αυτές τα βιβλία παρέμεναν ανοιχτά σε όλη τη διάρκεια του μαθήματος, ενώ σε άλλες αφού διατηρούνταν κλειστά κατά την διδασκαλία της νέας έννοιας χρησιμοποιούνταν από τους μαθητές μόνο για την εκτέλεση των εργασιών εφαρμογής:

- *Ανοίγουμε τα βιβλία στις ασκήσεις. (Δ΄ τάξη)*

  Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις ακολουθήθηκε η δομή και οι δραστηριότητες του βιβλίου με τη σειρά που παρέχονταν σ' αυτό:

- *Σοφοκλή, διάβασε…*(Δ΄ τάξη)
- *Να συμπληρώστε τώρα ομαδικά το «σκεφτόμαστε».* (Δ΄ τάξη)
- *Θοδωρή, πάμε στην αντιστοίχηση…*(Δ΄ τάξη)
- *Για πάμε λίγο στο πρόβλημα που έχει στο βιβλίο.* (Ε΄ τάξη)

  Η παρατήρηση έδειξε ότι οι δάσκαλοι παραπέμπουν επίσης κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας τους μαθητές στο βιβλίο και για τους παρακάτω λόγους:

- για **υπαγόρευση** στο συμμαθητή τους **του προβλήματος** που πρόκειται να λυθεί στον πίνακα
- *Ποιος θα μας διαβάσει το πρόβλημα 5, σελίδα 54;* (Ε΄ τάξη)
- *Ανοίξτε τα βιβλία να διαβάσετε την άσκηση στον Χ που θα σηκωθεί.*(Δ΄ τάξη)

- για **υπενθύμιση των δεδομένων** του προβλήματος, του θεωρητικού μέρους ή του κανόνα στις περιπτώσεις που οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες κατανόησης της θεωρίας ή επίλυσης προβλημάτων
- *Διαβάστε το πρόβλημα της θεωρίας που έχει λυμένο το βιβλίο.* (Ε΄ τάξη)
- *Διαβάστε τώρα το συμπέρασμα του προβλήματος στο βιβλίο.* (Ε΄ τάξη)
- *Κοιτάξτε μέσα τι λέει. Κοίταξε μέσα.* (Δ΄ τάξη)
- *Το βιβλίο λέει…*(Δ΄ τάξη)
- *Δείτε μέσα και προσέξτε τι λέει.* (Δ΄ τάξη)
- *Τι ζητάει το βιβλίο σου; Δες τι ζητάει το βιβλίο σου.* (Δ΄ τάξη)
- *Δείτε στο βιβλίο σας πώς αναλύει τις δεκάδες και τις… και κάντε και σεις το ίδιο στις ασκήσεις.* (Β΄ τάξη)
- *Να διαβάσεις τον πολλαπλασιασμό, υπάρχει στην τελευταία σελίδα του βιβλίου.* (Γ΄ τάξη)
- για **επαλήθευση** του αποτελέσματος ή επιβεβαίωση για τον ορθό τρόπο επίλυσης παρατηρώντας το παράδειγμα – λυμένο πρόβλημα του βιβλίου που οδηγεί στην εξαγωγή του κανόνα ή συμπεράσματος
- *Στο βιβλίο σας το έχει δίπλα, το ίδιο είναι.* (Ε΄ τάξη)
- *Ανοίξτε το βιβλίο να δείτε ότι το ίδιο βρήκαμε.* (Ε΄ τάξη)
- *Εκεί μας έχει πώς κάνουμε…*(Ε΄ τάξη)
- *Ανοίξτε το βιβλίο να δείτε πώς το λύνει και μέσα.* (Ε΄ τάξη)
- *Κοιτάξτε εκεί που λέει «σκεφτόμαστε» μας έχει και το δεύτερο τρόπο με τον οποίο λύνεται..* (Ε΄ τάξη)
- *Θέλω να σκεφτείτε, όπως σκεφτήκαμε και στο παράδειγμα του βιβλίου, όπως αυτό που διαβάσατε πριν.* (Ε΄ τάξη)
- *Έχεις κάνει λάθος. Κοίτα στο αρχικό πρόβλημα τι σου δίνει αυτός* (το βιβλίο). *Εσύ βρήκες άλλο.* (Δ΄ τάξη)
- *Όχι, θα το κάνετε ακριβώς όπως το έχει το βιβλίο.* (Δ΄ τάξη)
- *Όπως την έχει το βιβλίο* (θα συμπληρώσετε την άσκηση) (Δ΄ τάξη)
- για την **επιβολή της πειθαρχίας**
- *Μη μιλάτε! Προσέχετε τι λέει το βιβλίο.* (Δ΄ τάξη)
- *Κοιτάξτε όλοι στο βιβλίο και σκεφτείτε το πρόβλημα.* (Δ΄ τάξη)
- *Προσέξτε όλοι μέσα στο βιβλίο.* (Δ΄ τάξη)

Κατά συνέπεια **οι μαθητές χρησιμοποιούν το σχολικό εγχειρίδιο.**

- ***Ως τετράδιο εργασιών για το σχολείο και το σπίτι***
- *Οι υπόλοιποι λύνετε το πρόβλημα επάνω στο βιβλίο.* (Δ΄ τάξη)
- *Γράψτε τη λύση εκεί από κάτω.*(Δ΄ τάξη)
- *Όλες οι ασκήσεις πάνω στο βιβλίο.*(Δ΄ τάξη)
- ***Συμβουλευτικά,*** όταν αντιμετωπίζουν δυσκολίες κατά την εκτέλεση των εργασιών τους.
- *Δείτε μέσα και προσέξτε τι λέει.* (Δ΄ τάξη)
- *Τι ζητάει το βιβλίο σου; Δες τι ζητάει.* (Δ΄ τάξη)
- ***ως μέσο επιβεβαίωσης του αποτελέσματος και του ορθού τρόπου σκέψης***
- *Μα, κύριε, στο βιβλίο κοιτάξτε πώς το έχει.* (Ε΄ τάξη)

Όπως μπορεί να διαπιστώσει κανείς ο τρόπος χρήσης του βιβλίου και οι λεκτικές διατυπώσεις του δασκάλου που αφορούν στο σχολικό εγχειρίδιο κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας υποδηλώνουν την εγκυρότητα, την αυθεντία και αξιοπιστία του σχολικού βιβλίου. Αξιοσημείωτη είναι η περίπτωση στην οποία αν και μια μαθήτρια προτείνει έναν πιο απλό και πιο σύντομο τρόπο επίλυσης προβλήματος από τον προτεινόμενο του βιβλίου η δασκάλα απορρίπτει την πρόταση της μαθήτριας με την ακόλουθη διατύπωση:

- *Όχι, θα το κάνετε ακριβώς όπως το έχει το βιβλίο.*(Δ΄τάξη)

Η αξία που αποδίδουν ορισμένοι δάσκαλοι στο σχολικό εγχειρίδιο ως αποκλειστικό μέσο διεξαγωγής της διδασκαλίας πέραν του πίνακα της τάξης, υποδηλώνεται και από την επιμονή ή απαίτηση της χρήσης του από τους μαθητές ως τετράδιο εργασιών ακόμα κι όταν ο περιορισμένος χώρος του βιβλίου δεν το επιτρέπει:

- *Οι υπόλοιποι λύνετε το πρόβλημα επάνω στο βιβλίο.* (Δ΄ τάξη)
- *Γράψτε τη λύση εκεί από κάτω.* (Δ΄ τάξη)
- *Όλες οι ασκήσεις πάνω στο βιβλίο.* (Δ΄ τάξη)
- *Γράψτε τα στο βιβλίο! Θα ελέγξω.* (Δ΄ τάξη)

Ενδιαφέρουσα είναι η απουσία των ανθρώπινων υποκειμένων/των συγγραφέων που ομιλούν και η χρήση στη θέση τους του άψυχου υποκειμένου *το βιβλίο* που χαρίζει αντικειμενικότητα στις δηλώσεις παραπέμποντας στην επιστημονική κοινότητα ή δημιουργεί ίσως υποχρέωση συμμόρφωσης προς τις υποδείξεις και τα πρότυπα που προβάλλονται σ' αυτό παραπέμποντας στην απρόσωπη αρχή του θεσμού της πολιτείας. Η γνώση που το βιβλίο

προσφέρει είναι η εγκεκριμένη, η αδιαμφισβήτητη, εκείνη που «πρέπει» να την ενστερνιστεί ο μαθητής με τη διαμεσολάβηση όμως του δασκάλου. Ο δάσκαλος ως διαμεσολαβητής της γνώσης του βιβλίου παρέχει επιπλέον διευκρινίσεις και παραδείγματα στους μαθητές όπου κρίνει απαραίτητο. Σε κάποιες περιπτώσεις φαίνεται να είναι επίσης εκείνος που θα επικυρώσει με το λόγο του τις δηλώσεις του βιβλίου, θα ελέγξει το περιεχόμενό του και θα δώσει την τελική συγκατάθεσή του στους μαθητές:

- *Γράψτε το, είναι σωστό…*(Δ΄ τάξη)
- *Εμείς το λύσαμε με δύο τρόπους, στο βιβλίο έχει μόνο του δεύτερο που κάναμε. Αν δε μας ζητάει και τους δύο τρόπους θα κάνουμε του πιο εύκολο.* (Δ΄ τάξη)
- *Την απορρίπτουμε* (δε θα εκτελεστεί, δηλαδή, η πρώτη άσκηση του βιβλίου) *γιατί υποτιμά τη νοημοσύνη μας* (Ε΄ τάξη)

Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι σε αρκετές περιπτώσεις το βιβλίο φάνηκε να ταυτίζεται με το μάθημα, αφού η παρατήρηση έδειξε ότι το πρώτο μέλημα των παιδιών με την έναρξη του μαθήματος ήταν να ανοίξουν τα βιβλία τους στο επόμενο μάθημα ακόμη και χωρίς την προτροπή του/της δασκάλου/ας. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει η διατύπωση δασκάλου στο τέλος του μαθήματος,

- *Τώρα θα κλείσουμε τα βιβλία μας, γιατί έχουμε άλλο μάθημα.* (Γ΄ τάξη)

καθώς και οι διατυπώσεις προτροπής των περισσότερων δασκάλων στην αρχή της διδασκαλίας:

- *Για ανοίξτε το βιβλίο και δείτε το επόμενο μάθημα.* (Β΄ τάξη)
- *Βγάλτε τα βιβλία σας.* (Ε΄ τάξη)
- *Σε ποια σελίδα βρίσκεται το μάθημα;* (Ε΄ τάξη)
- *Ανοίξτε τα βιβλία σας να αρχίσουμε το μάθημα στη σελίδα 53.* (Ε΄ τάξη)
- *Θα πάμε σήμερα στη σελίδα …*(Β΄ τάξη)

Το σχολικό βιβλίο φαίνεται να αποτελεί το κύριο μέσο για τη διδασκαλία του μαθήματος των μαθηματικών για τους περισσότερους δασκάλους του δείγματος που ακολουθούν πιστά τη δομή και το περιεχόμενό του εφαρμόζοντας τις προτεινόμενες σ' αυτό δραστηριότητες.

Ωστόσο, κάποιοι από τους δασκάλους σε ορισμένες ενότητες:

- δεν ακολούθησαν τη σειρά των ασκήσεων του βιβλίου (δύο δάσκαλοι της Ε΄ τάξης)
- παρέλειψαν ασκήσεις που δεν θεώρησαν απαραίτητες για την επίτευξη των διδακτικών στόχων (δάσκαλος Ε΄ τάξης)

- δεν προχώρησαν σε επόμενο κεφάλαιο, αλλά επανέλαβαν τη διδαχθείσα ύλη με ασκήσεις που ετοίμασαν οι ίδιοι –στηριζόμενοι όμως στις ασκήσεις του διδακτικού εγχειριδίου– όταν θεώρησαν πως οι έννοιες που διδάχτηκαν δεν κατανοήθηκαν πλήρως από τους μαθητές.(δασκάλα Γ΄ και δάσκαλος Δ΄ τάξης)

Από την παρατήρηση φάνηκε επίσης ότι οι δάσκαλοι χρησιμοποίησαν το σχολικό εγχειρίδιο ως οδηγό για την προετοιμασία και οργάνωση του μαθήματος, χωρίς ή με μικρής έκτασης *χρήση άλλου συμπληρωματικού υλικού*, ενώ καθοριστικό ρόλο στην όλη διεξαγωγή της διδασκαλίας είχε η χρήση του πίνακα της τάξης. Ορισμένοι δάσκαλοι χρησιμοποίησαν *φωτοτυπημένες ασκήσεις* που είχαν ετοιμάσει οι ίδιοι για επιπλέον εξάσκηση στην τάξη ή για εμπέδωση στο σπίτι, παρόμοιες με εκείνες του βιβλίου ή με τους ίδιους με τους προβλεπόμενους διδακτικούς στόχους. Σε μια περίπτωση παρατηρήθηκε χρήση ανακλαστικού προβολέα για προβολή διαφανειών και εφαρμογή δραστηριοτήτων που είχε σχεδιάσει ο ίδιος ο εκπαιδευτικός (Ε΄ τάξης) για την διδασκαλία της νέας έννοιας και την διερεύνησή της από τους μαθητές. Σε μικρότερες κυρίως τάξεις παρατηρήθηκε σε κάποιες ενότητες πέραν του σχολικού εγχειριδίου χρήση εποπτικού υλικού σε εισαγωγικές δραστηριότητες για την παρουσίαση του αντικειμένου μάθησης, όπως καραμέλες, πλαστικά ποτήρια, καλαμάκια, μαγνητάκια, ψεύτικα νομίσματα. Η επιλεκτική χρήση εποπτικού υλικού σε συγκεκριμένες ενότητες ίσως να υποδηλώνει την αντίληψη των δασκάλων για τις δυσκολίες που πιθανόν να δημιουργεί στους μαθητές της μικρότερης ηλικίας η κατανόηση εννοιών, όπως η έννοια «φορές» (βιβλίο Α΄ τάξης), η προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης (βιβλίο Β΄ τάξης), η έννοια της διαίρεσης (βιβλίο Γ΄ τάξης). Οι συγκεκριμένοι δάσκαλοι χρησιμοποίησαν κυρίως δικές τους εισαγωγικές δραστηριότητες και δικά τους προβλήματα για την παρουσίαση της καινούριας έννοιας, ενώ παρέπεμψαν τους μαθητές στα βιβλία τους μόνο στη φάση της εκτέλεσης των εργασιών εφαρμογής και εμπέδωσης:

- *Θα πάμε σήμερα στη σελίδα… αλλά δε κάνουμε ακόμη από το βιβλίο. Θα κάνουμε τώρα πολλά παραδείγματα στον πίνακα και αν μας περισσέψει χρόνος θα πάμε στο βιβλίο.* (Β΄ τάξη)

Εξετάζοντας γενικότερα τις λεκτικές διατυπώσεις με τις οποίες οι δάσκαλοι προτρέπουν τους μαθητές τους στη χρήση του σχολικού εγχειριδίου διαπιστώνουμε την κυρίαρχη χρήση της προστακτικής έγκλισης στο δεύτερο ενικό και πληθυντικό πρόσωπο, καθώς και τη χρήση του πρώτου πληθυντικού προσώπου:

- *Κάντε τις ασκήσεις…* (Β΄ τάξη)
- *Διάβασε το πρόβλημα στη σελίδα…*(Ε΄ τάξη)

- *Θα πάμε τώρα στην πίσω σελίδα να κάνουμε τις ασκήσεις.* (Β΄ τάξη)
- *Ανοίγουμε τα βιβλία και λύνουμε τις ασκήσεις.* (Α΄ τάξη)

Η χρήση της προστακτικής έγκλισης από το δάσκαλο προς τους μαθητές υποδηλώνει τις ασύμμετρες σχέσεις ισχύος μεταξύ δασκάλου και μαθητών (βλ. σχετικά Fairclough, 1989), ενώ με τη χρήση του πρώτου πληθυντικού προσώπου από το δάσκαλο εκφράζεται η προσδοκία του δασκάλου για ταύτιση των μαθητών με τις θέσεις του. Πρόκειται για μια προσπάθεια μείωσης της απόστασης δασκάλου μαθητών, έτσι ώστε να δημιουργηθούν πιο ευνοϊκές προϋποθέσεις για την επιτέλεση των δραστηριοτήτων που προτείνονται.(βλ. Fairclough, 1989:127, για την ιδεολογική λειτουργία του «συλλογικού» *εμείς*).

ΣΧΟΛΙΑ ΚΑΙ ΔΙΑΠΙΣΤΩΣΕΙΣ

Από την ανάλυση των παρατηρήσεων φάνηκε ότι οι δάσκαλοι του δείγματος καθοδηγούνται σε μεγάλο βαθμό από το σχολικό εγχειρίδιο για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Στην πλειοψηφία τους οργανώνουν τις διδακτικές τους ενέργειες με βάση το σχολικό εγχειρίδιο του μαθητή ακολουθώντας τη δομή και το περιεχόμενό του. Η καθοδήγηση της διδασκαλίας, όπως υποστηρίζεται από παιδαγωγούς, αποτελεί μία από τις λειτουργίες των σχολικών εγχειριδίων (Καψάλης & Χαραλάμπους, 1995). Μέσω της συγκεκριμένης επιλογής και διάταξης του περιεχομένου τα διδακτικά βιβλία προδιαγράφουν την πορεία της διδασκαλίας προσφέροντας σημαντική βοήθεια στο δάσκαλο για την καθημερινή προετοιμασία του μαθήματος, εξασφαλίζοντας οικονομία χρόνου[1] και παρέχοντας ασφάλεια από μεθοδολογικής απόψεως[2].

Για τους περισσότερους δασκάλους του δείγματος το βιβλίο αποτελεί την κύρια πηγή που θα τους παράσχει το υλικό και τις δραστηριότητες που θα χρησιμοποιήσουν στην τάξη για την υλοποίηση των στόχων του αναλυτικού προγράμματος. Στους μαθητές παρέχονται κατά κύριο λόγο οι ίδιες ασκήσεις ή ερωτήσεις μέσω του σχολικού εγχειριδίου, παρά την ανομοιογένεια της τάξης. Δεδομένης της ύπαρξης ενός και μοναδικού εγχειριδίου μαθηματικών για κάθε τάξη, που αντιμετωπίζει με ενιαίο τρόπο τους μαθητές

[1] Η έλλειψη χρόνου αναφέρεται συχνά αναφέρεται από τους δασκάλους ως ανασταλτικός παράγοντας για το σχεδιασμό του μαθήματος και την κατασκευή από τους ίδιους συμπληρωματικού υλικού (βλ. Haggarty & Pepin, 2002).

[2] Την προφύλαξη από ανασφάλειες και πρόχειρους σχεδιασμούς προβάλλουν και τα βιβλία του δασκάλου για τα μαθηματικά ως έναν από τους λόγους για τους οποίους παρέχουν

καθίσταται φανερή η ανάγκη διαφοροποίησης της σχολικής εργασίας και εξατομίκευσης της διδασκαλίας από το δάσκαλο, η οποία μπορεί να επιτευχθεί με τη χρήση και άλλων διδακτικών μέσων πέραν του σχολικού εγχειριδίου, καθώς και επιπλέον συμπληρωματικού υλικού.

Σύμφωνα με τα βιβλία των μαθηματικών για το δάσκαλο, που αποτελούν εγχειρίδια οδηγιών για την οργάνωση της διδασκαλίας, «το βιβλίο του μαθητή είναι οργανικά ενταγμένο στη διδακτική διαδικασία» (Αθανασάκης, κ.ά. 1994) και «λειτουργικά δεμένο με το βιβλίο του δασκάλου, που διευκολύνει τόσο τον προγραμματισμό όσο και τη διεξαγωγή της διδασκαλίας κάθε ενότητας» (Αλβανός, 1996). Εξετάζοντας τα βιβλία για το δάσκαλο διαπιστώνει κανείς μέσω των διακηρύξεών τους το ρόλο που κατασκευάζεται γι' αυτόν ως προς τη χρήση των σχολικών εγχειριδίων (βλ. Vlachou, 2007). Με την πρόταση λύσεων, οι οποίες, όπως υποστηρίζουν οι συγγραφείς, είναι ολοκληρωμένες και επιστημονικά θεμελιωμένες, με τη χρήση φράσεων, όπως «η πλέον ενδεδειγμένη λύση…», ο «ορθότερος και αποτελεσματικότερος τρόπος…», καθώς και στοιχείων επιστημονικού λόγου, με την παράθεση σύγχρονων διδακτικών και ψυχολογικών αρχών, κατασκευάζεται ο δάσκαλος ως εκείνος που έχει ανάγκη ενημέρωσης, ως εκτελεστής των προτεινόμενων οδηγιών και των προδιαγεγραμμένων δραστηριοτήτων, οι οποίες προβάλλονται ως οι πλέον κατάλληλες για την επιτυχία του διδακτικού του έργου. (βλ. Αποστολίκας κ.ά., 1992, Αθανασάκης, κ.ά. 1994). Στην αντιμετώπιση του δασκάλου ως διεκπεραιωτή εντολών, ρόλου που περιορίζει την παιδαγωγική του αυτονομία[3], προβάλλεται η ανάγκη της ενδυνάμωσής του, της απόκτησης περισσότερης επίγνωσης της *επαγγελματικής του συνείδησης*[4] πίσω από τις ενέργειες και τις πρακτικές του (Yung, 2002). Η αξιοποίηση των δυνατοτήτων που παρέχει το σχολικό εγχειρίδιο προκειμένου να υποστηριχθούν οι στόχοι του αναλυτικού προγράμματος στο οποίο η συγγραφή του εγχειριδίου βασίζεται, προϋποθέτει εκπαιδευτικούς που διαθέτουν πλήρη επιστημονική-παιδαγωγική και διδακτική κατάρτιση, υιοθετούν κριτική στάση απέναντι σ' αυτό και προσαρμόζουν τις διδακτικές τους ενέργειες στις συνθήκες της τάξης. Η διοργάνωση προγραμμάτων επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών θα μπορούσε να βοηθήσει προς την κατεύ-

μεθοδολογικές υποδείξεις και προτείνουν συγκεκριμένες δραστηριότητες στο δάσκαλο (βλ. Αποστολίκας, Σαλβαράς & Διονυσοπούλου, 1992).

[3] Οι παιδαγωγοί αναγνωρίζουν δύο αντιμαχόμενους ρόλους του εκπαιδευτικού: το ρόλο του ως παιδαγωγού και το ρόλο του ως δημόσιου υπαλλήλου – εκφραστή της επίσημης εκπαιδευτικής πολιτικής που οφείλει να εκτελεί τα καθήκοντά του και να διαμεσολαβεί για τη μεταβίβαση της κοινωνικής γνώσης στη νέα γενιά. (βλ. Δημητρόπουλος & Καλούρη-Αντωνοπούλου, 2003, Κωνσταντίνου, 2004, Κουτσελίνη, 1997)

[4] Η *επαγγελματική συνείδηση* αναφέρεται στην δέσμευση του δασκάλου να βελτιώνει διαρκώς τις πρακτικές του προς το συμφέρον των μαθητών (Yung, 2002).

θυνση αυτή, έτσι ώστε το σχολικό εγχειρίδιο να αποτελέσει ένα πραγματικό εργαλείο διδασκαλίας και μάθησης, το οποίο όμως δε θα έχει αποκλειστική χρήση στην τάξη, αφού η συνεπικουρία και άλλων διδακτικών μέσων θα μπορούσε να ενισχύσει τις λειτουργίες του και να αυξήσει την αποτελεσματικότητά του.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΈΣ ΑΝΑΦΟΡΈΣ

Barr, R. (1988), Condition influencing content taught in nine fourth-grade mathematics classroom, *The Elementary School Journal, 8*8(4), 387-411.

Fairclough, N. (1989). Language and Power. London: Longman.

Foxman, D. (1999), Mathematics textbooks across the world: Some evidence from the third international mathematics and science study, Slough: National Federation for Educational Research.

Freeman, D. J., & Porter, A. C. (1989). Do Textbooks Dictate the Content of Mathematics Instruction in Elementary Schools? *American Educational Research Journal, 2*6(3), 403-421.

Grouws, D. A., & Smith, M. S. (2000). NAEP findings on the preparation and practices of mathematics teachers. In E. A. Silver & P. A. Kennedy (Eds.), Results from the seventh mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress, Reston, VA: NCTM, 107–139.

Haggarty, L. & Pepin, B. (2002). "An Investigation of Mathematics Textbooks and their Use in English, French and German Classrooms: who gets an opportunity to learn what?". *British Educational Research Journal* 28(4), pp.566-590.

Love, E., & Pimm, D. (1996). 'This is so': a text on texts. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education,* vol. 1, Dordrecht: Kluwer, 371-409

Reys, R., Reys, B., Lapan, R., Holliday, G., & Wasman, D. (2003), Assessing the impact of standards-based middle grades mathematics curriculum materials on student achievement, *Journal for Research in Mathematics Education, 3*4(1), 74-95.

Robitaille, D. F., & Travers, K. J. (1992). International studies of achievement in athematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning,* New York: Macmillan, 687–709.

Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Houang, R. T., Wang, H., Wiley, D. E., Cogan, L. S., et al. (2001), Why schools matter: a cross-national comparison of curriculum and learning, San Francisco: Jossey-Bass.

van Dormolen, J. (1986). Textual analysis. In B. Christiansen, G. Howson & M. Otte (Eds.), Perspectives on mathematics education, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 141-171

Vlachou, M. (2007). The discourse of primary school teachers for assessment in mathematics. In στο B. Hudson (Ed.). Researching the Teaching and Learning of Mathematics II, Universitatswerlag Rudolf Trauner, Linz.

Weiss, I. R., Banilower, E. R., McMahon, K. C., & Smith, P. S. (2001), Report of the 2000 National Survey of Science and Mathematics Education, Chapel

Hill, NC: Horizon Research, Inc.http://2000survey.horizon-research.com/reports/status.php

Yung, B. H.-W. (2002), Same assessment, different practice: professional consciousness as a determinant of teachers' practice in a school-based assessment scheme, *Assessment in Education* 9(1), 97-117.

Δημητρόπουλος Ε. & Καλούρη-Αντωνοπούλου, Ο. (2003). Παιδαγωγική Ψυχολογία. Από τη Θεωρία Μάθησης στην Εκπαίδευση Νέων και Ενηλίκων. Αθήνα: Έλλην.

Καψάλης, Α. & Χαραλάμπους, Δ. (1995). Σχολικά εγχειρίδια: Θεσμική εξέλιξη και σύγχρονη προβληματική. Αθήνα: Έκφραση.

Κουτσελίνη, Μ. (1997). Σύγχρονες τάσεις και προοπτικές των Αναλυτικών Προγραμμάτων. Η εγκυρότητά τους για εκπαίδευση που προσανατολίζεται στον 21ο αιώνα.Στο 10ο Πανελλήνιο Εκπαιδευτικό Συνέδριο Δ.Ο.Ε., Π.Ο.Ε.Δ «Τα αναλυτικά προγράμματα στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση», Ιωάννινα, 17-18/4/96, Αθήνα: Επιστημονικό Βήμα ΔΟΕ, 57-65.

Κωνσταντίνου, Χ. (2004). Η αξιολόγηση της επίδοσης του μαθητή ως παιδαγωγική και σχολική πρακτική. Αθήνα: Gutenberg.

Σχολικά βιβλία

Αθανασάκης, Α., Αλεξανδράκης, Γ., & Δήμου, Γ. (1994[12]). Μαθηματικά Γ΄ τάξης. Βιβλίο για το δάσκαλο. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Αλβανός, Γ., Αποστολίκας, Γ., Δήμου, Γ., κ.ά. (1996[10]). Μαθηματικά ΣΤ΄ τάξης. Βιβλίο για το δάσκαλο. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Αλβανός, Γ. (2000). Μαθηματικά Ε΄ τάξης. Βιβλίο για το δάσκαλο. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Αποστολίκας, Γ., Διονυσοπούλου, Τ. & Σαλβαράς, Γ., (1992[11]). Μαθηματικά Α΄ τάξης. Βιβλίο για το δάσκαλο. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Αποστολίκας, Γ., Σαλβαράς, Γ. & Διονυσοπούλου, Τ. (1992[10]). Μαθηματικά Β΄ τάξης. Βιβλίο για το δάσκαλο. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

--- (2000). Μαθηματικά Δ΄ τάξης. Βιβλίο για το δάσκαλο. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΩΣ "ΕΠΙΠΕΔΗ" ΣΧΟΛΙΚΗ ΓΝΩΣΗ: ΑΛΛΑΓΗ «ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ», ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΜΒΙΒΑΣΜΟΙ ΣΤΑ ΝΕΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Τάσος Πατρώνης και ***Μαρία Καίσαρη***

Πανεπιστήμιο Πάτρας, Τμήμα Μαθηματικών

Οι αλλαγές στο παγκόσμιο σκηνικό της οικονομίας και της παραγωγής κατά τις τελευταίες δεκαετίες, καθώς και η αλλαγή δομικού προτύπου ή "παραδείγματος" στις κοινωνικές οργανώσεις, από την *ιεραρχική οργάνωση* και *απόλυτη εξειδίκευση* στο *δίκτυο* και την *πολλαπλή λειτουργία των υποδομών* (Castells, 1996 και Harnecker, 2007) επιφέρουν ανάλογες αλλαγές, όσο και αντιστάσεις, στο σκηνικό της εκπαίδευσης. Οι καπιταλιστικές επιχειρήσεις, τα πολιτικά κόμματα, ακόμα και τα ίδια τα κράτη ή οι διακρατικές ενώσεις τείνουν να οργανώνονται σε σχήμα "δικτύου", αντί "πυραμίδας" ή αντί "κέντρου" με αντίστοιχη "περιφέρεια". Ως αποτέλεσμα έχουμε μια γενική διάρρηξη των *συνόρων* κάθε είδους: συνόρων γεωπολιτικών (πραγματικών ή συμβολικών), συνόρων ανάμεσα σε κοινωνικές ομάδες ή κουλτούρες ή ανάμεσα σε τομείς της γνώσης (Beck et al, 2003, Maingain & Dufour, 2007). Στην εισήγησή μας περιγράφουμε μια περίπτωση των αλλαγών αυτών (όσο και των αντιστάσεων ή των συμβιβασμών) στην ειδική περιοχή της Μαθηματικής Εκπαίδευσης: πρόκειται για το πλαίσιο παραγωγής, το στυλ γραφής, τη δομή και το περιεχόμενο των πρόσφατα γραμμένων εγχειριδίων για τα Μαθηματικά στο Γυμνάσιο.

Η προσέγγισή μας είναι ερμηνευτική και συνδυάζει την ανάλυση του περιεχομένου των νέων σχολικών βιβλίων και των προγραμμάτων σπουδών με την ερμηνεία δεδομένων που προέρχονται από προηγούμενα σχολικά βιβλία ή από άρθρα σχετικά με τις τελευταίες εκπαιδευτικές αλλαγές, είτε από άτυπες συνεντεύξεις (στο στυλ της προσωπικής εκμυστήρευσης) με μέλη των συγγραφικών ομάδων (πρβλ. και Μπονίδης, 2004). Τα συμπεράσματά μας διακρίνονται σε δύο επίπεδα ερμηνείας:

1. Στο επίπεδο των επιστημικών και παιδαγωγικών χαρακτηριστικών των βιβλίων (ή, με άλλα λόγια, στο επίπεδο του εμφανιζόμενου "προϊόντος" της συγγραφής) έχουμε πρώτα μια γενική *αλλαγή "παραδείγματος"*, που ήταν ήδη σχεδόν ορατή και στα προηγούμενα σχολικά βιβλία, αλλά τώρα πλέον αποκρυσταλλώνεται: Από μια, λίγο-πολύ περιχαρακωμένη και λογικά ιεραρχημένη μαθηματική γνώση (που περιείχαν τα αντίστοιχα σχολικά βιβλία ως τα μέσα της δεκαετίας του 1980), περνάμε σε μια "επίπεδη" και "δικτυακή" δόμηση της μαθηματικής γνώσης γύρω από λογικά ισότιμα μεταξύ τους "***μαθηματικά γεγονότα***". Με τον όρο αυτόν εννοούμε μαθηματικές προτάσεις, οι οποίες: α) εμφανίζονται στα εγχειρίδια χωρίς κανέναν επιστημικό προσδιορισμό (δηλ. χωρίς να είναι καθόλου φανερό αν πρόκειται για ορισμούς, αξιώματα, θεωρήματα, ή άμεσες συνέπειες των προηγουμένων), β) έχουν έναν άμεσα γενικευτικό χαρακτήρα (που δηλώνεται, συνήθως έπειτα από μια εισαγωγική δραστηριότητα, με τη φράση «γενικά ισχύει…») και γ) έχουν βασικά μια υπολογιστική λειτουργία και χρήση σε λυμένα παραδείγματα και ασκήσεις. Είναι νωρίς ακόμη να εκτιμήσουμε τις συνέπειες αυτής της "επίπεδης" δόμησης του περιεχομένου των εγχειριδίων στον τρόπο της διδασκαλίας στην τάξη, καθώς και στη σκέψη των παιδιών. Είναι όμως ήδη έκδηλα τα σημάδια μιας εντατικοποίησης, όσο αφορά στους υπολογισμούς, και μιας "έκλειψης" της λογικής ή διαισθητικής επιχειρηματολογίας.

2. Στο επίπεδο των κοινωνικών και ιδεολογικών δεσμεύσεων (ή, με άλλα λόγια, στο επίπεδο της διαδικασίας "παραγωγής" των εγχειριδίων) υπήρξαν σημαντικές παραχωρήσεις, όσο και αντιστάσεις, στις απαιτήσεις του νέου "παραδείγματος". Κάθε συγγραφική ομάδα εργάστηκε χωριστά και ίσως ανταγωνιστικά με τις άλλες, στο πλαίσιο ενός διαγωνισμού με μάλλον αδόκιμη οργάνωση και κριτήρια, με αποτέλεσμα για κάθε τάξη να έχει παραχθεί ένα βιβλίο με διαφορετικό στυλ και διαφορετικά ιδεολογικά συμφραζόμενα. Φαίνεται ότι το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο έπαιξε περισσότερο ένα ρόλο "διαιτητή", επιβάλλοντας συμβιβαστικές λύσεις αντί να επεξεργαστεί δημιουργικά τις αντιθέσεις και να εκφράσει μια ενιαία παιδαγωγική άποψη. Π.χ. οι συγγραφείς των βιβλίων όλων των τάξεων υποχρεώθηκαν να χωρίσουν το περιεχόμενο των βιβλίων τους σε δύο μέρη (Άλγεβρα-Γεωμετρία). Αυτή η "διχοτόμηση" για το Γυμνάσιο συμβαίνει για πρώτη φορά από τη Μεταρρύθμιση της δεκαετίας του 1960 και μπορεί να ερμηνευτεί ως ιδεολογική δέσμευση κατά της νεωτερικής αντίληψης της "ενότητας" των Μαθηματικών, ως γνωστικού αντικειμένου που συγκροτείται με τη βοήθεια μιας ενοποιούσας γλώσσας ή δομής. Ο ισχυρισμός ότι με μια τέτοια απόφαση κατοχυρώνεται μια ήδη λανθά-

νουσα διδακτική πρακτική θυμίζει ανάλογα επιχειρήματα για de facto διχοτομήσεις κρατών ή πόλεων στο παιχνίδι της Γεωπολιτικής.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Beck, U., Bonss, W. & Law, C., "The Theory of Reflexive Modernization: Problematic, Hypotheses and Research Programme", *Theory, Culture and Society*, 2003, vol.20(2), 1-33.

Castells, M., *The Rise of the Network Society*, Blackwell, 1996.

Harnecker, M., *Πραγματοποιώντας το Αδύνατο: Η Αριστερά στο κατώφλι του 21ου Αιώνα*, εκδ. Οδυσσέας, 2007.

Maingain, A., Dufour, B., *Διδακτικές Προσεγγίσεις της Διαθεματικότητας*, εκδ. Πατάκη, 2007.

Μπονίδης, Κ., *Το περιεχόμενο του σχολικού βιβλίου ως αντικείμενο έρευνας*, εκδ. Μεταίχμιο, 2004.

ΤΑ ΝΕΑ ΒΙΒΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΤΑ ΤΡΙΑ «ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ» Η Η ΚΡΥΜΜΕΝΗ ΑΝΤΙ-ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ

Ελένη Λυμπεροπούλου ***Μαλβίνα Παπαδάκη***

Πόση σημασία έχει, αλήθεια, ένα σχολικό βιβλίο και ειδικότερα ένα σχολικό βιβλίο Μαθηματικών; Είναι γενικά αποδεκτό από πολλούς ερευνητές ότι τα σχολικά βιβλία παίζουν σπουδαίο ρόλο στην διαμόρφωση της σκέψης των μαθητών και ότι καθορίζουν την αντίληψη και τις πεποιθήσεις τους για τα Μαθηματικά. Με την ολοένα και περισσότερο συμπλήρωσή τους με διδακτικό υλικό, καθορίζουν επίσης και αυτή καθεαυτή τη διδασκαλία. Επιδρούν επομένως πολύ έντονα και με πολλούς τρόπους. Αν λάβει κανείς υπόψη του ακόμη ότι στη χώρα μας έχουμε ένα και μοναδικό σχολικό βιβλίο, τότε η επίδρασή τους γίνεται μεγαλύτερη. Έχει επομένως αξία και νόημα μια κριτική αξιολόγησή τους.

Αναφερόμαστε στα βιβλία των Μαθηματικών για το Γυμνάσιο, που κυκλοφόρησαν για πρώτη φορά το σχολικό έτος 2007-2008. Η ανάλυση που θα επιχειρηθεί να γίνει στα πλαίσια αυτής της εργασίας θα είναι ως προς την μορφή, τη δομή, τη γλώσσα και το περιεχόμενό τους. Ας σημειώσουμε εξαρχής εδώ, πως κανένα από τα προηγούμενα τρία χαρακτηριστικά δεν είναι άμοιρο ιδεολογίας (Chassapis, 1997). Τα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών, όπως και τα υπόλοιπα σχολικά βιβλία, δεν μπορεί αν είναι ουδέτερα. Ενισχύουν το κυρίαρχο σύστημα αξιών και τα πρότυπα σκέψης μιας συγκεκριμένης κοινωνίας.

Η ανάλυσή μας εστιάζεται στο βιβλίο Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι οι γενικές παρατηρήσεις και τα συμπεράσματα δεν περιλαμβάνουν και τα βιβλία των Μαθηματικών των άλλων δύο τάξεων (Β΄ και Γ΄) τα οποία γραμμένα και αυτά κάτω από την ίδια συγκυρία, ακολουθώντας το ίδιο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών, έχουν λίγο ως πολύ την ίδια φιλοσοφία.

Τα προβλήματα της διδασκαλίας πρέπει να αναλύονται και να εκφράζονται θεωρητικά ώστε να οδηγούμαστε σε επιλογές που μεταφράζονται σε πραγματοποιήσιμες μεθόδους. Οι θεωρητικές επιλογές στην προκειμένη περίπτωση περιέχονται και αναλύονται εκτενέστατα στα Προγράμματα Σπουδών (Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών, Δ.Ε.Π.Π.Σ και Ανα-

λυτικό Πρόγραμμα Σπουδών, Α.Π.Σ.) στο αντίστοιχο ΦΕΚ (φύλλο εφημερίδας της Κυβερνήσεως) και στο Τεύχος του επιμορφωτικού υλικού.

Η Γενική Παιδεία θα πρέπει να συμβάλει όχι στην συσσώρευση και απομνημόνευση έτοιμων γνώσεων, αλλά στην ευρύτερη εξοικείωση με βασικά στοιχεία των διαφόρων γνωστικών αντικειμένων και στην ανάπτυξη γνωστικών και μεταγνωστικών δεξιοτήτων που εξασφαλίζουν τη δυνατότητα κατανόησης και ερμηνείας εννοιών, φαινομένων και διαδικασιών. (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) Ή αλλιώς: *Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην ανάγκη καλλιέργειας της κριτικής ικανότητας... για προσαρμογή των νέων στα διαρκώς εξελισσόμενα εργασιακά περιβάλλοντα και τις μεταβαλλόμενες κοινωνικές συνθήκες. Εξάλλου, τα προβλήματα των σύγχρονων κοινωνιών στη μετάλλαξή τους σε τεχνολογικές χαρακτηρίζονται ως σύνθετα και αλληλένδετα, γεγονός που παραπέμπει στην ανάγκη ολιστικής αντιμετώπισής τους σε αντίθεση με την παραδοσιακή τάση των προγραμμάτων σπουδών να ομαδοποιούν ή να κατακερματίζουν τη γνώση σε ποικίλα γνωστικά αντικείμενα* (Μακρή – Μπότσαρη, 2006).

Η ανάγκη, λοιπόν, *ολιστικής αντιμετώπισης των προβλημάτων των σύγχρονων κοινωνιών* είναι αυτή που επιβάλλει την ολιστική αντίληψη για τη γνώση; Αυτή η ανάγκη οδηγεί στην διεπιστημονική – διαθεματική προσέγγιση, δηλαδή*: την ανάπτυξη της ικανότητας για δημιουργία διασύνδεσης μεταξύ των επιστημονικών πεδίων αλλά και μεταξύ των αλληλεξαρτώμενων συστημάτων της καθημερινότητας, έτσι ώστε να παρέχεται η δυνατότητα στους μαθητές να χρησιμοποιούν μια ποικιλία τρόπων σκέψης και επικοινωνίας, αλλά και να επιλύουν ευρύτερα νοούμενα «επιστημονικά προβλήματα»* (Μακρή – Μπότσαρη, 2006). Με ποια μέθοδο θα γίνουν όλα αυτά;

Στην κατεύθυνση αυτή δημιουργήθηκε και αναπτύχθηκε η εποικοδομητική θεωρία «constructivism», η οποία ορίζει τη μάθηση ως μια κοινωνικά προσδιορισμένη δραστηριότητα που επιτυγχάνεται μέσα σε κατάλληλα, λειτουργικά και ενθαρρυντικά περιβάλλοντα (Μακρή - Μπότσαρη, 2006)

Επιλέγεται, δηλαδή, ρητώς η κονστρουκτιβιστική διδακτική προσέγγιση; Εδώ θα πρέπει να διευκρινιστεί αν πρόκειται για την περίφημη καθοδηγούμενη επανανακάλυψη (κονστρουκτιβισμός) ή για την καθοδηγούμενη επανεφεύρεση (ρεαλιστικά Μαθηματικά) (Κολέζα, 2007). Πώς συγκεκριμενοποιούνται όλα αυτά για τα Μαθηματικά του Γυμνασίου;

Στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Α.Π.Σ.), οι ειδικοί σκοποί για τα Μαθηματικά συγκεκριμενοποιούνται όπως παρακάτω:

- *Η απόκτηση βασικών μαθηματικών γνώσεων και ικανοτήτων*
- *Η καλλιέργεια της μαθηματικής γλώσσας ως μέσου επικοινωνίας αλλά και περιγραφής πραγματικών φαινομένων και καταστάσεων*
- *Η κατανόηση της δομής των Μαθηματικών*
- *Η παραγωγή συλλογισμών και αποδεικτικών διαδικασιών*

- *Η εφαρμοσιμότητα και η πρακτική χρήση των Μαθηματικών από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα*
- *Η θετική στάση απέναντι στα Μαθηματικά*

Η ολιστική αντίληψη της γνώσης περιορίζεται στην *εφαρμοσιμότητα και πρακτική χρήση των Μαθηματικών,* η μέθοδος για την καθοδηγούμενη επανανακάλυψη της γνώσης απουσιάζει εντελώς, και η διαθεματική – διεπιστημονική προσέγγιση, αναφέρεται στο Α.Π.Σ. σπανίως, στο τέλος κάθε κεφαλαίου.

Ειδικότερα, ας δούμε το κεφάλαιο για τους Δεκαδικούς αριθμούς. Στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών, στη στήλη *Ενδεικτικές Δραστηριότητες* αναφέρεται:

- *Να βάλετε δεκαδικούς σε αύξουσα τάξη*
- *Να στρογγυλοποιήσετε το 96,84351 στο δέκατο, εκατοστό κλπ*
- *A* ——45 cm——— *B χωρίζουμε το ΑΒ σε 30 ίσα τμήματα:* $\frac{45}{30}$ *= 1,5cm*
- *0,9 να συμπληρώσετε* ώστε να είναι ο πιο μεγάλος *δεκαδικός με διαφορετικά ψηφία.*

Εδώ, το Α.Π.Σ. γίνεται πολύ συγκεκριμένο και περιοριστικό. Αξίζει να σημειωθεί ότι για πρώτη φορά στο Α.Π.Σ. αναφέρεται ο όρος *δραστηριότητα.* Σε μια πρώτη ανάγνωση αναρωτιέται κανείς πώς υλοποιείται η ιδέα της καθοδηγούμενης επανανακάλυψης. Μήπως με αυτές τις δραστηριότητες; Ο όρος Δραστηριότητα επεξηγείται και αναπτύσσεται στο βιβλίο του εκπαιδευτικού της Α΄ Γυμνασίου.

Ως δραστηριότητα είναι δυνατόν να ορίσουμε μια κατάσταση – πρόβλημα ή τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος..... η λειτουργία μιας δραστηριότητας χρησιμεύει αφενός για την κατασκευή από τους ίδιους τους μαθητές της νέας γνώσης και αφετέρου για να δώσει την ευκαιρία ποικίλων εφαρμογών των ήδη αποκτηθεισών γνώσεων. Εργασία πάνω σε μια μαθηματική δραστηριότητα σημαίνει κυρίως προσδιορίζω το πρόβλημα, εικάζω για το αποτέλεσμα, πειραματίζομαι με τη βοήθεια παραδειγμάτων, συνθέτω ένα συλλογισμό, διατυπώνω μια λύση, ελέγχω το αποτέλεσμα και αξιολογώ την ορθότητα τους σε συνάρτηση με το αρχικό πρόβλημα.

ΓΙΑ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΤΗΣ Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πριν ασχοληθούμε με την ανάλυση της μορφής, της δομής, της γλώσσας και του περιεχομένου των νέων σχολικών βιβλίων των Μαθηματικών για το Γυμνάσιο, θα θέσουμε κάποιες γενικές αρχές, που πρέπει να διέπουν τα σχολικά βιβλία.

- Ένα σχολικό βιβλίο έχει, ή καλύτερα πρέπει να έχει, τα χαρακτηριστικά ενός καλού βιβλίου. Ενός βιβλίου δηλαδή, που το απολαμβάνουν οι αναγνώστες του. Ενός βιβλίου που διδάσκει χωρίς να χειραγωγεί, ενός βιβλίου που ανοίγει δρόμους και ορίζοντες και θέτει παραπέρα ερωτήματα, ενός βιβλίου που συναρπάζει η γλώσσα του, στο οποίο μπορεί να ανατρέξει κανείς προκειμένου να ξαναθυμηθεί ή να χρησιμοποιήσει κάτι και γιατί όχι για να καταλάβει κάτι. Ενός βιβλίου που «διδάσκει» ευχάριστα, αποκαλύπτοντας μυστικά και ξετυλίγοντας γνώσεις τις οποίες ο αναγνώστης σιγά – σιγά κατακτά. Το σχολικό βιβλίο πρέπει να είναι ταυτόχρονα ανάγνωσμα και σημείο αναφοράς.
- Οι συγγραφείς, επιπλέον, κάθε σχολικού βιβλίου και επομένως και ενός σχολικού βιβλίου Μαθηματικών, πρέπει να έχουν αποφασίσει πού κατά κύριο λόγο απευθύνονται. Στον καθηγητή των Μαθηματικών που θα το διδάξει ή στο μαθητή για να τον βοηθήσει να κατακτήσει τις γνώσεις των Μαθηματικών. Είναι βέβαιο πως δεν μπορεί να κάνει και τα δύο μαζί. Ή δεν μπορεί να κάνει ισότιμα και τα δύο. Γιαυτό, άλλωστε ο νομοθέτης θέλει δύο βιβλία ξεχωριστά: Το ένα είναι το βιβλίο του μαθητή και το άλλο είναι αυτό του καθηγητή.
- Το σχολικό βιβλίο θα πρέπει να υποστηρίζει τον καθηγητή και όχι να τον περιορίζει. Μήπως όμως η αυστηρή δομή και το προκαθορισμένο διδακτικό υλικό που περιέχει, το ίδιο για όλες τις έννοιες και σε όλες τις παραγράφους, οδηγεί και κατευθύνει προς ένα μοναδικό μοντέλο διδασκαλίας;

Όλα αυτά αποτελούν ζητήματα με τα οποία πρέπει να ασχοληθεί μια κριτική αξιολόγηση των βιβλίων.

Ας ξεκινήσουμε, λοιπόν, την ανάλυσή μας με την…

…ΜΟΡΦΗ

Η μορφή ενός βιβλίου και επομένως και ενός σχολικού βιβλίου γενικά, αλλά και ενός σχολικού βιβλίου Μαθηματικών ειδικότερα, έχει να κάνει με την εμφάνιση του βιβλίου αλλά και τον τρόπο με τον οποίο είναι στημένες οι σελίδες του, οι παράγραφοι και τα κεφάλαια από τα οποία αποτελείται.

Έτσι, αυτό που ξεχωρίζει πρώτα – πρώτα και αυτό δεν αφορά μόνο τα βιβλία των Μαθηματικών είναι ότι ξαφνικά όλα μαζί μεγάλωσαν. Απέκτησαν μεγάλο μέγεθος, το μέγεθος της σελίδας Α4. Διατήρησαν βέβαια τον αριθμό των σελίδων που οι προδιαγραφές επέβαλαν. Ποιων σελίδων όμως; Σελίδων διπλάσιων σχεδόν των σελίδων που μέχρι τώρα ξέραμε στα σχολικά βιβλία. Και διερωτάται κανείς: Αυξήθηκε τόσο πολύ η ύλη, που κάτι τέτοιο ήταν απαραίτητο; Μάλλον όχι. Η ύλη έμεινε σε γενικές γραμμές η ίδια. Απλούστατα τα βιβλία φορτώθηκαν με εικόνες, οι ασκήσεις έχουν όλες έτοιμο το

γεωμετρικό σχήμα, επινοήθηκαν λυμένα παραδείγματα, επιβλήθηκαν ερωτήσεις «σωστού λάθους».

Η εισβολή του χρώματος είναι ένα άλλο χαρακτηριστικό των σχολικών βιβλίων των τελευταίων χρόνων, άρα και των βιβλίων των Μαθηματικών. Τα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών έγιναν ξαφνικά πολύχρωμα, απέκτησαν πολυχρωμία. Από εκεί που είχαμε στις σελίδες τους κείμενο με χρώμα τους τίτλους, και φόντο σε κανόνες, τύπους και στη διατύπωση μαθηματικών προτάσεων, όπου έπρεπε δηλαδή να τονίσουν κάτι, αιφνιδίως, τα πράγματα άλλαξαν. Το χρώμα εισέβαλε παντού. Με τον τρόπο αυτό το βιβλίο μετατρέπεται σε εικόνα – επικοινωνία – θέαμα.

Συγκεκριμένα, στο βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου μετράμε έξι διαφορετικά χρώματα.: *καφέ* ο τίτλος κάθε παραγράφου, με *πράσινο* δηλώνονται οι δραστηριότητες, *κόκκινο με κίτρινα γράμματα* το «Θυμόμαστε – Μαθαίνουμε», που είναι με *γαλάζιο* φόντο (5ο χρώμα στην ίδια σελίδα), με *πορτοκαλί* για τα «Παραδείγματα – Εφαρμογές». Τα προηγούμενα χρώματα, το ένα κατόπιν του άλλου, μπορεί να επαναλαμβάνονται και στην υπόλοιπη εικονογράφηση της σελίδας. Έτσι, τα χρώματα συμβάλουν στη διακόσμηση της σελίδας, ξεχωρίζουν τους τίτλους, τους υπότιτλους και τις υποενότητες μεταξύ τους. Όλα όμως προβάλλονται χωρίς να καταλαβαίνει κανείς τι είναι κύριο και τι δευτερεύον, τι να ξεχωρίσει, πού βρίσκεται η ουσία. Και όπως είπαμε επαναλαμβάνονται πανομοιότυπα σε κάθε παράγραφο του βιβλίου.

Η επανάληψη και η υπερβολή είναι δύο θεμελιώδεις (όσο και απλοί) τρόποι επιβολής των εικόνων στη ζωή μας. Μια διαφήμιση στην τηλεόραση – εμπορική είτε πολιτική- θα επαναληφθεί εκατοντάδες φορές μέχρι να την εμπεδώσουμε καλά, είτε το θέλουμε είτε όχι (Πατρώνης, 1998)

Είναι χαρακτηριστικές οι σελίδες «Ανακεφαλαίωση». Εκεί η εναλλαγή των χρωμάτων είναι τόσο συχνή, που το γενικό αποτέλεσμα προκαλεί σύγχυση, εκεί οι γνώσεις που προηγήθηκαν έχουν γίνει μηνύματα, σε κουτάκια με χρώμα ή χωρίς χρώμα.

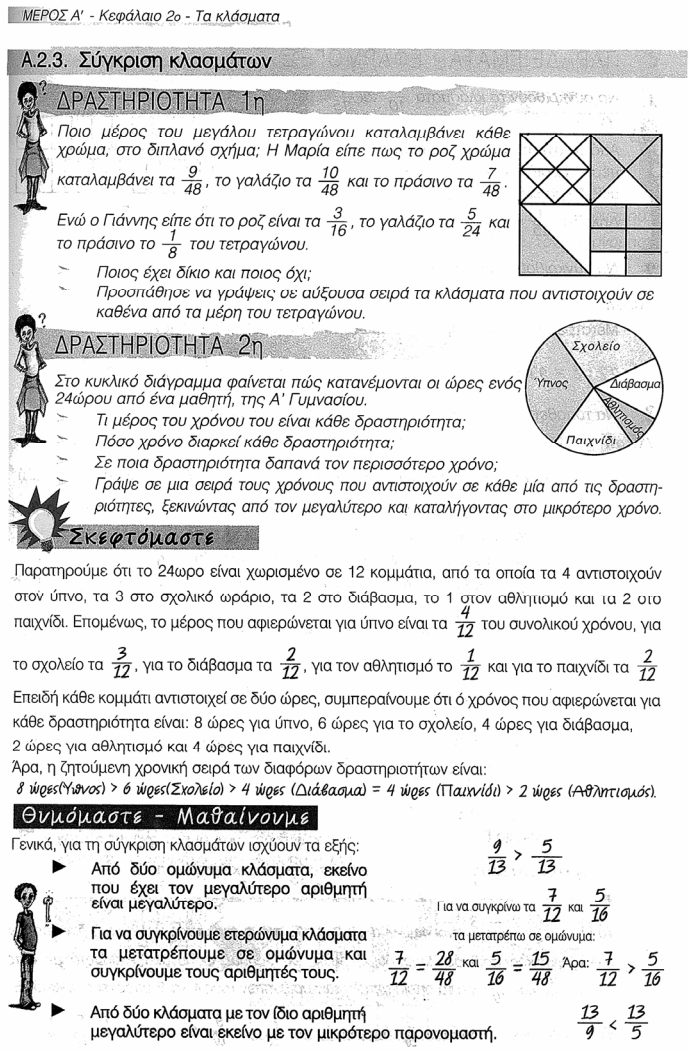
Η εικονογράφηση δεν είναι λοιπόν πια μόνο το καθαρό γεωμετρικό σχήμα και οι όποιες μαθηματικές σχέσεις. Στις σελίδες των σχολικών βιβλίων συναντούμε εικόνες και εικονίδια, που διανθίζουν το περιεχόμενο και δημιουργούν μια πιο ευτράπελη – ευχάριστη διάθεση στον αναγνώστη ή σε αυτόν που θα το φυλλομετρήσει.

Έτσι η βινιέτα του «Θυμόμαστε – Μαθαίνουμε» έχει πάντα ένα αγοράκι με τα χέρια στις τσέπες, ανέμελο δηλαδή (;) με ένα κλειδί, για να ανοίξει τι άραγε; Ενώ στις «Δραστηριότητες» υπάρχει πάντα ένα κοριτσάκι με μοντέρνα φούστα, προβληματισμένο, με τα χέρια στη μέση. Να επιχειρήσουμε να κάνουμε συνειρμούς αντιστοίχισης φύλου με στάσεις και ικανότητες;

Στα «Παραδείγματα- Εφαρμογές» το ίδιο αγοράκι, ενώ στο «Σκεφτόμαστε – Μαθαίνουμε» ένας γλόμπος. Στα «Ιστορικά σημειώματα» μια σειρά από βιβλία.

Η σχέση του κειμένου και της εν γένει εικονογράφησης – δηλαδή των τίτλων, των ζωγραφιών, των εικόνων για τις δραστηριότητες, είναι σε βάρος του πρώτου, του κειμένου.

Στη σελίδα που παραθέτουμε, έστω και ασπρόμαυρη, αξίζει να αναρωτηθεί κανείς τι μέσα από όλον αυτό τον βομβαρδισμό χρωμάτων, εικόνων, πράξεων, σκέψεων και κανόνων πρέπει να αποκομίσει ο μαθητής.



ΜΕΡΟΣ Α' - Κεφάλαιο 2ο - Τα κλάσματα

Α.2.3. Σύγκριση κλασμάτων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Ποιο μέρος του μεγάλου τετραγώνου καταλαμβάνει κάθε χρώμα, στο διπλανό σχήμα; Η Μαρία είπε πως το ροζ χρώμα καταλαμβάνει τα $\frac{9}{48}$, το γαλάζιο τα $\frac{10}{48}$ και το πράσινο τα $\frac{7}{48}$.

Ενώ ο Γιάννης είπε ότι το ροζ είναι τα $\frac{3}{16}$, το γαλάζιο τα $\frac{5}{24}$ και το πράσινο το $\frac{1}{8}$ του τετραγώνου.

- *Ποιος έχει δίκιο και ποιος όχι;*
- *Προσπάθησε να γράψεις σε αύξουσα σειρά τα κλάσματα που αντιστοιχούν σε καθένα από τα μέρη του τετραγώνου.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Στο κυκλικό διάγραμμα φαίνεται πώς κατανέμονται οι ώρες ενός 24ώρου από ένα μαθητή, της Α' Γυμνασίου.

- *Τι μέρος του χρόνου του είναι κάθε δραστηριότητα;*
- *Πόσο χρόνο διαρκεί κάθε δραστηριότητα;*
- *Σε ποια δραστηριότητα δαπανά τον περισσότερο χρόνο;*
- *Γράψε σε μια σειρά τους χρόνους που αντιστοιχούν σε κάθε μία από τις δραστηριότητες, ξεκινώντας από τον μεγαλύτερο και καταλήγοντας στο μικρότερο χρόνο.*

Σκεφτόμαστε

Παρατηρούμε ότι το 24ωρο είναι χωρισμένο σε 12 κομμάτια, από τα οποία τα 4 αντιστοιχούν στον ύπνο, τα 3 στο σχολικό ωράριο, τα 2 στο διάβασμα, το 1 στον αθλητισμό και τα 2 στο παιχνίδι. Επομένως, το μέρος που αφιερώνεται για ύπνο είναι τα $\frac{4}{12}$ του συνολικού χρόνου, για το σχολείο τα $\frac{3}{12}$, για το διάβασμα τα $\frac{2}{12}$, για τον αθλητισμό το $\frac{1}{12}$ και για το παιχνίδι τα $\frac{2}{12}$

Επειδή κάθε κομμάτι αντιστοιχεί σε δύο ώρες, συμπεραίνουμε ότι ό χρόνος που αφιερώνεται για κάθε δραστηριότητα είναι: 8 ώρες για ύπνο, 6 ώρες για το σχολείο, 4 ώρες για διάβασμα, 2 ώρες για αθλητισμό και 4 ώρες για παιχνίδι.

Άρα, η ζητούμενη χρονική σειρά των διαφόρων δραστηριοτήτων είναι:

8 ώρες(Ύπνος) > 6 ώρες(Σχολείο) > 4 ώρες (Διάβασμα) = 4 ώρες (Παιχνίδι) > 2 ώρες (Αθλητισμός).

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Γενικά, για τη σύγκριση κλασμάτων ισχύουν τα εξής:

- Από δύο ομώνυμα κλάσματα, εκείνο που έχει τον μεγαλύτερο αριθμητή είναι μεγαλύτερο. $\frac{9}{13} > \frac{5}{13}$
- Για να συγκρίνουμε ετερώνυμα κλάσματα τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα και συγκρίνουμε τους αριθμητές τους. Για να συγκρίνω τα $\frac{7}{12}$ και $\frac{5}{16}$ τα μετατρέπω σε ομώνυμα: $\frac{7}{12} = \frac{28}{48}$ και $\frac{5}{16} = \frac{15}{48}$ Άρα: $\frac{7}{12} > \frac{5}{16}$
- Από δύο κλάσματα με τον ίδιο αριθμητή μεγαλύτερο είναι εκείνο με τον μικρότερο παρονομαστή. $\frac{13}{9} < \frac{13}{5}$

…Η ΔΟΜΗ

Το βιβλίο των Μαθηματικών για την Α΄ Γυμνασίου είναι χωρισμένο σε δέκα (10) κεφάλαια, επτά (7) για την Αριθμητική – Άλγεβρα και τρία (3) για την Γεωμετρία.

Κάθε κεφάλαιο είναι χωρισμένο σε δύο – το μικρότερο – έως δεκατρείς – το μεγαλύτερο- παραγράφους.

Κάθε παράγραφος, που καταλαμβάνει από δύο έως τέσσερις σελίδες είναι χωρισμένη πάντα σε πέντε μέρη:

- *Δραστηριότητες*
- *Θυμόμαστε – Μαθαίνουμε*
- Παραδείγματα – Εφαρμογές
- Ασκήσεις – Προβλήματα
- Δραστηριότητες για το σπίτι

Το τελευταίο από τα παραπάνω μέρη συναντάται πολύ σπάνια, παρόλο που είναι αυτό που θα μπορούσε κανείς να χαρακτηρίσει ως ευκαιρία για «διαθεματικότητα». Οι δραστηριότητες φαίνεται να είναι ο μοναδικός χειρισμός της διδασκαλίας που προσπαθεί το βιβλίο να καθιερώσει.

Η δομή ενός βιβλίου, όπως και αυτή που μόλις περιγράψαμε ποτέ δεν είναι κάτι ουδέτερο. Πάντα, περισσότερο ή λιγότερο υπηρετεί μια άποψη, αναδεικνύει μια συγκεκριμένη ιδεολογία.

Οι δραστηριότητες, στην αρχή πάντα κάθε παραγράφου, οδηγούν στην εισαγωγή και προσέγγιση της έννοιας που ακολουθεί, της καινούργιας γνώσης. Αποτελούν βέβαια συνεισφορά και κληρονομιά της «ευρετικής» στη διδακτική των Μαθηματικών, όπως και οι συγγραφείς ομολογούν στο βιβλίο του εκπαιδευτικού.

Ακολουθεί το «Θυμόμαστε – Μαθαίνουμε». Εκεί, συνοπτικά και επιγραμματικά, χωρίς καμία αναφορά στις δραστηριότητες που προηγούνται, υπάρχει με σύμβολα, και αφαιρετική γλώσσα η όποια θεωρία έχει προκύψει.

Παρακάτω, στα Παραδείγματα – ασκήσεις, συναντάμε αποσπασματικά περιπτώσεις εφαρμογής ή χρήσης των όσων προηγήθηκαν, περιπτώσεις που συχνά συμπληρώνουν τη θεωρία και παρατίθενται εδώ ατάκτως.

Για παράδειγμα, στην παράγραφο 3.1 του 3ου κεφαλαίου, περί δεκαδικών Αριθμών, το οποίο παρουσιάζουμε αναλυτικά παρακάτω, στο μέρος αυτό, συναντάμε για πρώτη και τελευταία φορά περιοδικούς δεκαδικούς αριθ-

μούς και μάλιστα με περίοδο16 ψηφία (!) όπως το $\frac{520}{67}$, ή το κλάσμα ως διαίρεση που εμφανίζεται και αυτό για πρώτη και τελευταία φορά. Το κλάσμα ορίζεται ως τελεστής στο βιβλίο.

Στο σχεδόν πάντα τελευταίο μέρος κάθε παραγράφου, υπό τον τίτλο «Ασκήσεις – Προβλήματα», συναντάμε απλές επαναλήψεις ερωτήσεων που συναντήσαμε στα λυμένα παραδείγματα ή ερωτήσεις αντιστοίχισης και σωστού – λάθους. Ασκήσεις, δηλαδή, που απαιτούν την επανάληψη κανόνων και εντολών.

Τέλος, δεν πρέπει να παραλείψουμε να αναφέρουμε τον σαφή διαχωρισμό Αριθμητικής – Άλγεβρας και Γεωμετρίας. Εδώ είναι ενδεικτικό ότι το μοναδικό επιχείρημα για αυτόν τον διαχωρισμό είναι το αίτημα χρόνων της πλειοψηφίας των καθηγητών, ως εάν να πρόκειται για συνδικαλιστικό ζήτημα και όχι για παιδαγωγικό χειρισμό. Προς δόξα των παλαιών επιχειρημάτων κατά του κατακερματισμού της ύλης

...Η ΓΛΩΣΣΑ

Βασική διαπίστωση είναι ότι το 2ο ενικό πρόσωπο έχει καθιερωθεί. Το συναντάμε στις δραστηριότητες όσο και στις ασκήσεις. Γιατί άραγε; Μήπως οι συγγραφείς θεωρούν ότι το 2ο ενικό καταργεί την απόσταση μαθητή – καθηγητή και παροτρύνει τον μαθητή να πάρει ενεργότερο μέρος, να δράσει;

Η ΠΡΩΤΗ ΑΥΤΑΠΑΤΗ Η «ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΑΞΙΩΜΑ»

Η ξύλινη γλώσσα με τα σύμβολα επανήλθε δριμύτερη. Οι δραστηριότητες εκτελούνται, τελειώνουν, ξεχνιόνται και ο φορμαλισμός του τύπου α+β=β+α εμφανίζεται. Το *Θυμόμαστε – Μαθαίνουμε* κάθε παραγράφου περιέχει κανόνες, τύπους ή ορισμούς γραμμένους με γενικούς αριθμούς και σύμβολα. Το πέρασμα από την συγκεκριμένη κατάσταση του πραγματικού κόσμου των δραστηριοτήτων στις αφηρημένες σχέσεις αμέσως μετά, γίνεται με τεράστιο άλμα.

Η σχεδόν παντελής απουσία κειμένου δεν αναπληρώνεται από τα λυμένα παραδείγματα και επιγραμματικά σημεία θεωρίας, που προσπαθούν να πείσουν ότι προέκυψαν από τις δραστηριότητες. Αυτή η έλλειψη καταργεί τον ρόλο του μαθητή ως αναγνώστη του βιβλίου που έχει στα χέρια του. Έτσι η συμμετοχή γίνεται ψευδαίσθηση..

Η δεύτερη αυταπάτη ή «παιδαγωγικό αξίωμα».

…ΤΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

Κατά την προετοιμασία των νέων σχολικών βιβλίων Μαθηματικών του Γυμνασίου κυοφορούνταν επί μια πενταετία η ιδέα της «Διαθεματικότητας». Κατά τον τοκετό όμως η ιδέα αυτή εξαφανίστηκε και στη θέση της μπήκε η ιδέα της «κατασκευής της γνώσης». Η ιδέα της διαθεματικότητας μπήκε στα ψιλά, στο τέλος ορισμένων παραγράφων.

Οι δραστηριότητες περιέχουν καταστάσεις του πραγματικού κόσμου σχεδόν πάντα. Είναι προβλήματα καθημερινότητας, καταστάσεις του σχολείου, της οικογένειας, προβλήματα που εμπλέκουν την Ευρωπαϊκή Ένωση, την Unisef, προβλήματα αγοροπωλησιών, προβλήματα με συνταγές ή πίτσες. Αλλού, κυρίως σε μεγαλύτερες τάξεις, συναντάμε ασκήσεις Μαθηματικών με εμβαδά, πράξεις με κλάσματα κλπ. Προβλήματα φορτισμένα άμεσα ιδεολογικά: στη διαίρεση το πρόβλημα αναφέρεται στην παρέλαση (σελ. 25), στα ποσοστά μιλά για εκπτώσεις 60% και αυξήσεις μισθών 14% (σελ. 80).

Ενδιαφέρον επίσης από την πλευρά της ιδεολογίας έχει η σελίδα 10, η πρώτη σελίδα μετά τα περιεχόμενα που απευθύνεται στους μαθητές. Εκεί τίθεται το ερώτημα «Θέλεις να έχεις ή να ξέρεις;». Το θέτει ο θείος που φεύγει για το Παρίσι. Τυπικός θείος σε ελληνική οικογένεια να ισχυριστούμε; Αλλά γιατί δίλημμα; Δεν μπορεί κανείς να θέλει και να έχει και να ξέρει; Ούτε ανήθικο είναι, ούτε ευτελές!

Έτσι, ιστορίες και σενάρια με πραγματικές καταστάσεις προσπαθούν να καλύψουν εγγενείς δυσκολίες μαθηματικών εννοιών. Επιχειρούν να χρυσώσουν το χάπι. Να ξεχαστούν παρανοήσεις και παρερμηνείες, ώστε αυτόματα να διορθωθούν όλα τα ζητήματα της εκπαίδευσης.

Η Τρίτη αυταπάτη ή «παιδαγωγικό αξίωμα».

ΟΙ ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ

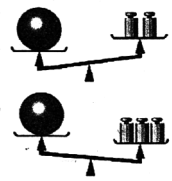
Προσπαθήσαμε να υλοποιήσουμε με όσο το δυνατό πιστότερο τρόπο την παράγραφο του σχολικού βιβλίου της Α΄ Γυμνασίου Α.3.1 *Δεκαδικά κλάσματα-Δεκαδικοί αριθμοί- Διάταξη δεκαδικών αριθμών-Στρογγυλοποίηση* με προτεινόμενη διάρκεια διδασκαλίας 2 διδακτικές ώρες. Το μάθημα αυτό έγινε με τους μαθητές του A_2 τμήματος του 2ου Πειραματικού Γυμνασίου Αθηνών.

Η παράγραφος αρχίζει με 3 δραστηριότητες:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Αν βάλουμε στη ζυγαριά 2 σταθμά, θεωρώντας το ένα από αυτά ως μονάδα μέτρησης, διαπιστώνουμε ότι η μπάλα είναι βαρύτερη και αν βάλουμε 3 από τα ίδια, ότι είναι ελαφρότερη.

- *Τι είδους σταθμά χρειαζόμαστε, εκτός από αυτά που διαθέτουμε, για να έχουμε μεγαλύτερη ακρίβεια ~~ακρίβεια~~ στη μέτρησή μας;*
- *Τι μορφή θα έχει ο αριθμός, που εκφράζει το αποτέλεσμα της μέτρησης του βάρους της μπάλας;*



① Αν είχαμε 2 σταθμά του ίδιου βάρους και 1 με το μισό του η ζυγαριά θα γινόταν ισορροπία.

② Αν η μπάλα ήταν τα $\frac{2}{3}$ του βάρους τα σταθμά θα ήταν $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$ του $\frac{2}{3}$

Μια άλλη απάντηση:

Στο 2ο σχέδιο, θα αφαιρέσουμε το 1 σταθμό και θα προσθέσουμε μισό σταθμό για να σταθεροποιηθεί η ζυγαριά.
Στο 1ο σχέδιο, θα προσθέσουμε μόνο μισό σταθμό.

Άλλη απάντηση:

Να έχουν λιγότερο βάρος τα σταθμά για να μπορέσουμε να βρούμε το ακριβές βάρος της μπάλας.

Άλλη απάντηση:

α) Χρειαζόμαστε 2,5 σταθμά για να ισορροπήσει η ζυγαριά.
β) Θα έχει μορφή δεκαδικού αριθμού.

Αυτές οι δραστηριότητες *έχουν στόχο την κατανόηση της αναγκαιότητας εισαγωγής και χρήσης των δεκαδικών κλασμάτων και δεκαδικών αριθμών, ως υποδιαιρέσεων των φυσικών αριθμών* (Βιβλίο εκπαιδευτικού).

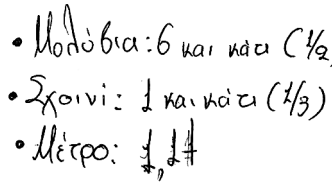
Ποια αναγκαιότητα κατανοούν οι μαθητές μέσα από την πρώτη δραστηριότητα; Οι απαντήσεις τους είναι τουλάχιστον ενδεικτικές:

- Οι περισσότεροι χρησιμοποιούν τα κλάσματα που προηγουμένως έχουν διαπραγματευτεί. Μιλούν για το μισό, είναι ενδιαφέρον να δούμε την απάντηση που μιλά για τα 2/3 του βάρους.
- Κάποιοι μαθητές προσπάθησαν να λύσουν το πρόβλημα προσθέτοντας τις μπάλες και τα σταθμά: οι δύο μπάλες ζυγίζουν όσο τα πέντε σταθμά.
- Τέλος πολλοί λίγοι μαθητές απαντούν χρησιμοποιώντας δεκαδικό αριθμό.

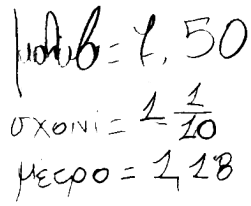
Στη δεύτερη δραστηριότητα που παραθέτουμε παρακάτω, η αναγκαιότητα της χρήσης των δεκαδικών γίνεται μάλλον καταναγκασμός από την στιγμή που εμφανίζεται το μέτρο. Παρ' όλα αυτά, κάποιοι μαθητές «αντιστέκονται» και χρησιμοποιούν κλάσματα: «1 και κάτι (1/3)» ή «σχοινί 1 και 1/10». Κάποιοι μαθητές όταν μετρούσαν το θρανίο τους με το σχοινί πήραν το υποδεκάμετρο για να μετρήσουν το επιπλέον του ενός μέτρου μήκος. Κάποιο άλλοι, για να μετρήσουν αυτό το επιπλέον μήκος, δίπλωσαν το σχοινί του ενός μέτρου σε ίσα μέρη για να βρουν σε κλάσμα το μέρος του σχοινιού που περίσσευε. Στην τρίτη δραστηριότητα πρόκειται πλέον για μήκος, δίνεται μάλιστα το μήκος του ΑΒ σε cm, κάποιοι μάλιστα μαθητές παρατήρησαν ότι το πραγματικό μήκος είναι περίπου 4,5 cm (γιατί άραγε;) και έκαναν την διαίρεση 5:8 = 0,625.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

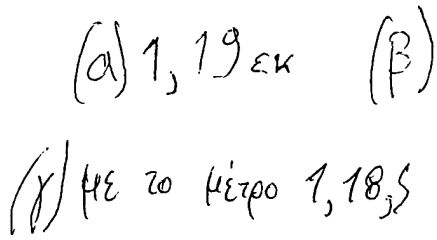
Προσπάθησε να μετρήσεις το μήκος του θρανίου σου με μονάδα μέτρησης:
(α) το μολύβι σου, (β) ένα σχοινί μήκους ενός μέτρου και (γ) με ένα μέτρο.
- *Στην προσπάθειά σου, στις τρεις διαφορετικές μετρήσεις, για να δώσεις ένα αποτέλεσμα όσο γίνεται πιο ακριβές, τι είδους προβλήματα αντιμετωπίζεις;*

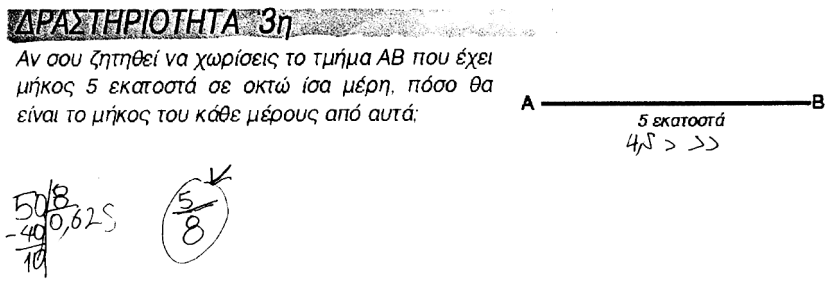


Μια άλλη απάντηση:



Άλλη απάντηση:





Αυτό είναι το πρώτο μέρος των δραστηριοτήτων που, σύμφωνα με το βιβλίο του εκπαιδευτικού, αναφέρεται στην αναγκαιότητα της χρήσης των δεκαδικών.

Ακολουθούν, όπως βλέπουμε, άλλες δύο δραστηριότητες οι οποίες, σύμφωνα πάντα με το βιβλίο του εκπαιδευτικού στοχεύουν στην έννοια *διάταξη των θέσεων δεκαδικής τάξης των ψηφίων* στους δεκαδικούς αριθμούς. Στη 4η δραστηριότητα, μάλιστα, *η συγκριτική ενασχόληση των μαθητών με διαφορετικούς δεκαδικούς αριθμούς αναμένεται να επιφέρει την απαιτούμενη εμπειρία, μέσα από την οποία θα προκύψουν οι κανόνες που ακολουθούν.* Η 5η δραστηριότητα η οποία χαρακτηρίζεται ως *κουίζ, αναμένεται να ενισχύσει την κατανόηση της έννοιας των δεκαδικών αριθμών.*

Γραφή, ανάγνωση και στρογγυλοποίηση δεκαδικών αριθμών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4η

Στον διπλανό πίνακα υπάρχουν διάφοροι δεκαδικοί αριθμοί.

- *Προσπάθησε να τους διαβάσεις και να τους γράψεις ολογράφως.*
- *Ποιος από αυτούς είναι ο μεγαλύτερος και ποιος ο μικρότερος;*
- *Προσπάθησε να τους τοποθετήσεις σε αύξουσα σειρά.*
- *Στρογγυλοποίησε τους αριθμούς (α) στη μονάδα και (β) στο εκατοστό.*

Χιλιάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Υποδιαστολή	Δέκατα	Εκατοστά	Χιλιοστά	Δεκάδες χιλιοστά	Εκατοντ. χιλιοστ.	Εκατομμυριοστά
1	5	1	3	,	0	0	3			
		2	7	,	1	8	0	6		
			0	,	4	0	5	9	0	8
	9	5	0	,	4	2	0			
8	5	0	0	,	7					
1	5	4	5	,	8	6	4	5	2	
9	5	2	8	,	9					
9	8	0	1	,	5	1	3	3		
4	6	3	7	,	2	5	2			
1	5	1	3	,	0	0	4			
1	5	1	3	,	1					

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 5η

Στον δεκαδικό αριθμό □0, □9 λείπουν δύο ψηφία του.

- *Συμπλήρωσε τα κενά έτσι, ώστε κανένα ψηφίο του αριθμού να μην είναι ίδιο με άλλο.*
- *Βρες ποιος είναι ο μεγαλύτερος ή ο μικρότερος δεκαδικός που μπορείς να γράψεις;*

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Στο δεκαδικό μέρος οι τάξεις είναι τα δέκατα, τα εκατοστά, τα χιλιοστά, τα δεκάκις χιλιοστά, τα εκατοντάκις χιλιοστά, τα εκατομμυριοστά κ.λπ.
- Στο ακέραιο μέρος οι τάξεις είναι σε μονάδες, δεκάδες κ.λπ.
- Δέκα μονάδες μίας τάξης είναι μια μονάδα μεγαλύτερης τάξης.
- Σε κάθε δεκαδικό αριθμό διακρίνουμε το **ακέραιο μέρος** και το **δεκαδικό μέρος** του. Αυτά διαχωρίζονται από την **υποδιαστολή**.

- Αν δύο δεκαδικοί αριθμοί αρχίζουν από ψηφίο της ίδιας τάξης, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει το μεγαλύτερο ψηφίο στην αρχική τάξη. *8,97453 < 9,432*
- Αν δύο δεκαδικοί αριθμοί αρχίζουν από ψηφίο της ίδιας τάξης, μεγαλύτερος είναι εκείνος που έχει το αμέσως επόμενο ψηφίο μεγαλύτερο. *105,3842 > 105,37896*
- Για να **στρογγυλοποιήσουμε** ένα δεκαδικό αριθμό:
  - Προσδιορίζουμε τη δεκαδική τάξη στην οποία θα γίνει η στρογγυλοποίηση.
  - Εξετάζουμε το ψηφίο της αμέσως μικρότερης τάξης.
  - Αν αυτό είναι **μικρότερο του 5**, το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία των μικρότερων τάξεων μηδενίζονται.
  - Αν είναι **μεγαλύτερο ή ίσο του 5**, το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία των μικρότερων τάξεων μηδενίζονται και το ψηφίο της τάξης στρογγυλοποίησης **αυξάνεται κατά 1**.

957,3842 ➡ 957,384
957,3842 ➡ 957,38
957,3842 ➡ 957,4
957,3842 ➡ 957
957,3842 ➡ 960
957,3842 ➡ 1000

Στο συγκεκριμένο βιβλίο έχουν γίνει κάποιες επιλογές επιστημολογικής τάξεως πολύ διαφορετικές απ' αυτές των προηγούμενων βιβλίων. Οι δεκαδικοί και οι πράξεις τους προηγούνταν μέχρι τώρα των κλασμάτων. Εδώ, οι δεκαδικοί εισάγονται μετά τα κλάσματα ως ένας περιορισμός του συνόλου Q+ . Περνάμε δηλαδή σε ένα υποσύνολο του Q+ που είναι το D+. Το μόνο που μένει να δικαιολογήσουμε είναι το γιατί αυτή η προτίμηση στα δεκα-

δικά κλάσματα. Αυτή η προτίμηση στα δεκαδικά κλάσματα θέλει να παρουσιάζεται ως αναγκαιότητα. Ποια αναγκαιότητα; Οι μαθητές μπόρεσαν να αντεπεξέλθουν στο πρόβλημα και χωρίς την χρήση των δεκαδικών. Η αναγκαιότητα προέκυψε μάλλον ως υποχρέωση (ή καταναγκασμός;) από την στιγμή που έπρεπε να μετρήσουν μήκη χρησιμοποιώντας το μέτρο (και το υποδεκάμετρο).

Αξίζει να αναρωτηθούμε αν αυτή η χρήση των δεκαδικών προκύπτει ως μαθηματική αναγκαιότητα ή κοινωνική σύμβαση, με την έννοια του ότι διεθνώς για την μέτρηση του βάρους ή του μήκους χρησιμοποιούνται μονάδες με δεκαδικές υποδιαιρέσεις. Υπό την πίεση της ανάγκης, λοιπόν, εισάγεται η έννοια του δεκαδικού αριθμού ως μέτρο μεγεθών και μόνον: Μια πρωτομαθηματική έννοια που χρησιμοποιείται μόνο στην πρακτική, για να λύνονται ορισμένα προβλήματα. Δυστυχώς ή ευτυχώς σε επόμενο κεφάλαιο χρησιμοποιούνται και διαφορετικά:

Το 0,3 = 30/100 = 30% είναι ένας δεκαδικός που καμία σχέση δεν έχει με την προηγούμενη αναγκαιότητα!

Ας επανέλθουμε, όμως, στις δραστηριότητες: Τι ανακαλύπτουν οι μαθητές στις 3 πρώτες δραστηριότητες; Ποιο *κτίσιμο* της γνώσης προκύπτει; Όσον αφορά στην τέταρτη δραστηριότητα βλέπουμε καθαρά την έννοια της επανανακάλυψης να «γλιστρά» και να τείνει προς την έννοια της επανάληψης. Αν οι μαθητές δεν είχαν διδαχθεί την έννοια αυτή στο δημοτικό σχολείο, τι θα ανακάλυπταν μέσω τις δραστηριότητας αυτής;

Οι παρατηρήσεις αυτές μας οδηγούν σε ένα νέο όρο αυτόν της ψευδοδραστηριότητας. Θεωρούμε ότι αυτή η χρήση της κατάστασης-πρόβλημα ή δραστηριότητας, που αναφέρεται στις επίσημες διακηρύξεις των Δ.Ε.Π.Π.Σ. και Α.Π.Σ., οδηγεί αναγκαστικά στο επόμενο βήμα του βιβλίου, το περίφημο *Θυμόμαστε- Μαθαίνουμε.*

Το *Θυμόμαστε-Μαθαίνουμε* είναι χαρακτηριστικό, σε όλο το βιβλίο δείγμα γραφής, το οποίο κωδικοποιεί ορισμούς, ορολογίες, πράξεις, ιδιότητες και ενέργειες που οι μαθητές θα πρέπει να αποστηθίσουν για να αντεπεξέλθουν στις υποχρεώς,εις τους. Αξίζει να σημειωθεί ότι στο συγκεκριμένο παράδειγμα το *Θυμόμαστε-Μαθαίνουμε* αραδιάζει τους κανόνες διάταξης των δεκαδικών αλλά και της στρογγυλοποίησής τους.

Οι μαθητές αντί να είναι αποδέκτες έτοιμων (ready-made) μαθηματικών, αντιμετωπίζονται ως ενεργοί συμμετέχοντες στης εκπαιδευτική διαδικασία, στην οποία αναπτύσσουν όλα τα είδη μαθηματικών εργαλείων από μόνοι τους. Σύμφωνα με τον Freudenthal, το να χρησιμοποιούμε επιστημονικά δομημένα αναλυτικά προγράμματα, στα οποία οι μαθητές αντιμετωπίζουν έτοιμα (ready-made) μαθηματικά είναι μία ***αντι-διδακτική αντιστροφή****.*

*Βασίζεται στην λανθασμένη υπόθεση ότι τα αποτελέσματα της μαθηματικής σκέψης, περιχαρακωμένα ως αντικείμενα διδασκαλίας μπορούν να μεταφερθούν απευθείας στους μαθητές (*Panhuisen, 2000*).*

Στο συγκεκριμένο βιβλίο έχουμε να κάνουμε μ΄ ένα ακόμη πιο επικίνδυνο είδος **αντι-διδακτικής αντιστροφής:** Καλλιεργείται η ψευδαίσθηση της ανακάλυψης, της ενεργητικής συμμετοχής του μαθητή που στο τέλος υποχρεώνεται μέσα από τα περίφημα *Θυμόμαστε- Μαθαίνουμε* να αποστηθίσει τα ready-made μαθηματικά.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Οι τρεις αυταπάτες-«παιδαγωγικά αξιώματα» οδηγούν σ΄ ένα εντελώς πρωτότυπο είδος **αντι-διδακτικής αντιστροφής.**

Μέσα από ψευδοδραστηριότητες η πράξη του κάνω μαθηματικά μετατρέπεται σε μία άδεια πρακτική που δεν έχει άλλο μέτρο παρά τον εαυτό της. Η ασυνέχεια στην σχέση θεωρίας και πράξης που εδώ μεταφράζεται ως ασυνέχεια των ψευδοδραστηριοτήτων και θεωρίας *(Θυμόμαστε-Μαθαίνουμε)* οδηγεί στον κατακερματισμό της περίφημης ολότητας των Δ.Ε.Π.Π.Σ. όπου η πράξη γίνεται μηχανική και η θεωρία αυθαίρετη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΈΣ ΑΝΑΦΟΡΈΣ

Chassapis, D. (1997) The Social Ideologies of School Mathematics Applications: A case Study of Elementary School Textbooks, *For learning of Mathematics,* 17 (3)

Dowling, P. (1996) A sociological Analysis of School Mathematics texts *Educational Studies in Mathematics*, 31 (4)

Freudenthal, H (1983) Didactical Phenomenology of Mathematical Structures, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland

Koulaidis, V & Tsatsaroni, A (1996) A pedagogical Analysis of Science Text Books : How can we proceed ? *Research in Science Education*, 26 (1) 55-71

Panhuisen, M (2000) Mathematics Education in Netherlands: A guided tour, Freudenthal Institute Cd-rom for ICME 9

Βαρδουλάκης, Ι., κ.α (2007) Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου Βιβλίο Εκπαιδευτικού, ΟΕΔΒ

Βαρδουλάκης, Ι., κ.α (2007) Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, ΟΕΔΒ

Καλαβάσης,Φ (2007) Τα νέα σχολικά βιβλία, Πρακτικά 24ου Πανελλήνιου Συνέδριου Μαθηματικής Παιδείας, Κοζάνη

Κολέζα, Ε (2007) Σχολικά Εγχειρίδιο των Μαθηματικών: Γνωσιακή & Κοινωνιολογική Ανάλυση, Ευκλείδης γ΄, γ5-66

Κολέζα, Ε Ο ρόλος των Δραστηριοτήτων στη διδασκαλία των Μαθηματικών, (1997), Πρακτικά 14ου Πανελλήνιου Συνέδριου Μαθηματικής Παιδείας, Μυτιλήνη

Λυμπεροπούλου, Ε Παπαδάκη, Μ (2006) Τα καινούργια βιβλία των Μαθηματικών του Δημοτικού, Σύγχρονη Εκπαίδευση, !4

Μακρή – Μπότσαρη, Ε (2006) Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών, Τεύχος Επιμορφωτικού Υλικού, ΥΠ.Ε.Π.Θ

Πατρώνης, Τ (1998), Περί σκοτεινών φόνων και άλλων προβληματικών καταστάσεων, Εκδόσεις Σύγχρονη Εκπαίδευση

Φ.Ε.Κ. τεύχος Β΄ αρ. φύλλου 303/13-03-03, Παράρτημα, Τόμος Α΄

Χρονοπούλου, Α (2006) Μαθηματικά & «Διαθεματικότητα» ή πως η ιδεολογία της αγοράς προωθείται μέσα στα σχολικά βιβλία Μαθηματικών Στ΄ Δημοτικού, Σύγχρονη Εκπαίδευση, 147

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Στάμη Τσικοπούλου

Μέλος της συγγραφικής ομάδας του βιβλίου της Γ΄ Γυμνασίου

ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΜΕΣΩ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

Η εισαγωγή των νέων σχολικών βιβλίων των Μαθηματικών στο Δημοτικό και στο Γυμνάσιο θέτει, μια σειρά από ερωτήματα και προβληματισμούς, σχετικά με τη είδος της μαθηματικής εκπαίδευσης που επιδιώκουν να υποστηρίξουν. Τα βιβλία αυτά γράφηκαν σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ) εξειδικεύοντας τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών των Μαθηματικών της υποχρεωτικής Εκπαίδευσης (2002). Τα Α.Π.Σ προτείνουν τη σύνδεση των Μαθηματικών με καθημερινά πλαίσια και άλλες επιστημονικές περιοχές, τη χρήση μοντέλων καθώς και μια κατασκευαστική αντίληψη οικοδόμησης της μαθηματικής γνώσης. Η αποτελεσματικότητα και οι περιορισμοί των παραπάνω προσεγγίσεων έχουν απασχολήσει τους ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών τις τελευταίες δεκαετίες. Τα αποτελέσματα των ερευνών αυτών έχουν επηρεάσει τα αναλυτικά προγράμματα, τα διδακτικά εγχειρίδια και τις διδακτικές πρακτικές σε πολλές χώρες.

Τα αναλυτικά προγράμματα των Μαθηματικών όλων σχεδόν των προηγμένων χωρών υιοθετώντας την άποψη ότι τα Μαθηματικά είναι κατ' αρχήν μια ανθρώπινη δραστηριότητα ("Mathematics as a human activity") διαμορφώθηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε η επίλυση προβλήματος να αποτελεί κεντρικό πυρήνα γύρω από τον οποίο σχεδιάζεται και πραγματοποιείται η διδασκαλία των Μαθηματικών (Κολέζα, 1998). Το περιεχόμενο και οι πρακτικές των σχολικών Μαθηματικών επιλέγονται και δομούνται γύρω από κατάλληλες δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων, μέσα από τις οποίες παρέχονται ευκαιρίες κατασκευής μαθηματικών εννοιών και απόδοσης μαθηματικών νοημάτων στις αντίστοιχες εμπειρίες.

Το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας, που δίνει έμφαση στα αποτελέσματα της μαθηματικής δημιουργίας και στον τρόπο παρουσίασής της, αμφισβητείται. Γιατί τόσο το τελικό «προϊόν» της μαθηματικής δημιουργίας όσο και ο τρόπος παρουσίασής του υποβαθμίζει τη διαδικασία μέσω της

οποίας φτάνουμε σε αυτό. Οι σύγχρονες αντιλήψεις σχετικά με τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών θεωρούν τα μαθηματικά όχι μόνο το αποτέλεσμα αλλά και τη δραστηριότητα μέσω της οποίας παράγεται το αποτέλεσμα αυτό. Με αυτή την έννοια τα Μαθηματικά δεν αποτελούν ένα σύστημα γνώσεων αλλά και μια διαδικασία σύλληψης, οργάνωσης και τεκμηρίωσης των γνώσεων αυτών. Αν δεχθούμε όμως την άποψη αυτή τότε η διδασκαλία των Μαθηματικών, δεν πρέπει να αφορά μόνο γνώσεις και κατάκτηση ενός συγκεκριμένου επιπέδου ικανοτήτων αλλά να περιλαμβάνει και **διαδικασίες μάθησης**. Οι στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης, εκφράζονται πληρέστερα με όρους δραστηριοτήτων, παρά με όρους παρατηρήσιμων συμπεριφορών. Η διδασκαλία πρέπει να οργανώνεται στη βάση μιας αρμονικής συνύπαρξης ενός σχεδιασμού κατάλληλων και πλούσιων δραστηριοτήτων και ενός προγραμματισμού μιας επιθυμητής τελικής συμπεριφοράς. Επιδιώκοντας τους γενικούς στόχους της Μαθηματικής Εκπαίδευσης, μέσω καταλλήλων δραστηριοτήτων, οι μαθητές μαθαίνουν να ερευνούν, να αιτιολογούν, να επιχειρηματολογούν υπέρ της λύσης που προτείνουν και να εκφράζονται στη μαθηματική γλώσσα εκτιμώντας την ισχύ της ως εργαλείο επικοινωνίας (Δ.Ε.Π.Π.Σ).

Τι θεωρούμε όμως ως μαθηματική δραστηριότητα; Ποια είναι τα χαρακτηριστικά της; Ποιά είναι τα διάφορα στάδια διαλεκτικής αλληλεπίδρασης του μαθητή με το πρόβλημα και το περιβάλλον της τάξης σε μια μαθηματική δραστηριότητα και ποιος είναι ο ρόλος του καθηγητή;

Θα προσπαθήσουμε στη συνέχεια, να απαντήσουμε στα ερωτήματα αυτά δίνοντας παραδείγματα δραστηριοτήτων από το σχολικό βιβλίο της Γ' Γυμνασίου και παρουσιάζοντας συγχρόνως τους στόχους που αυτές επιδιώκουν κατά τη διδασκαλία συγκεκριμένων εννοιών.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Με τον όρο δραστηριότητα θεωρούμε κάθε ανθρώπινη ενέργεια (δράση) που έχει ένα κίνητρο και ένα στόχο(σκοπό). Ο στόχος μπορεί να πραγματοποιείται από ένα άτομο ή μια ομάδα, με τη διαμεσολάβηση κάποιων εργαλείων όπως φυσικά υλικά, την ίδια τη γλώσσα ή μαθηματικά εργαλεία.

Σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση, μαθηματική δραστηριότητα είναι η δράση που πρέπει το άτομο ή η ομάδα να αναπτύξουν για να επεξεργαστούν ποσοτικές ή χωρικές σχέσεις. Επομένως κάθε επιμέρους ενότητα, εργασία, πρόβλημα, ερώτηση αποτελεί εργαλείο που είναι δυνατόν να εμπλέξει το μαθητή σε μαθηματική δραστηριότητα. (Πόταρη, 2007).

Σύμφωνα με τους Boaler (2003) και Kilpatric (2001) η μαθηματική δραστηριότητα πρέπει να στοχεύει στην:

- Κατανόηση εννοιών, διαδικασιών και σχέσεων. (*Εννοιολογική κατανόηση*)
- Εκτέλεση διαδικασιών-τεχνικών με ευελιξία, ακρίβεια, καταλληλότητα. (*Διαδικαστική άνεση*)
- Ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων.(*Στρατηγική ικανότητα*)
- Ανάπτυξη λογικών συλλογισμών, επεξηγήσεων και αιτιολογήσεων. (*Προσαρμοστική δικαιολόγηση*)
- Καλλιέργεια θετικής στάσης για τα Μαθηματικά και την αναγνώριση τους ως χρήσιμου εργαλείου σε διάφορες ανθρώπινες καταστάσεις. (*Αποδοτική διάθεση*)

Ένα μαθητής ισχυροποιείται «μαθηματικά» όταν διαθέτει τις απαιτούμενες για το επίπεδό του μαθηματικές γνώσεις και ικανότητες και μπορεί συγχρόνως να τις συνδέσει με παραγωγικό τρόπο σε νέα πλαίσια. Τότε μόνο θα μπορεί να σκεφτεί τα Μαθηματικά ως ένα σύνολο συνδεδεμένων ιδεών, και να πάψει να τα θεωρεί ως μια συλλογή αποσυνδεμένων, τυποποιημένων εννοιών και διαδικασιών που στόχος του είναι να τις απομνημονεύσει ώστε να μπορεί να τις αναπαραγάγει στις διάφορες ασκήσεις στις εξετάσεις.

Μια μαθησιακή δραστηριότητα επομένως προκύπτει από την εμπλοκή του μαθητή σε μια ευρύτερη κατάσταση – πρόβλημα (situation-problem), συνώνυμος όρος της δραστηριότητας. Συνήθως αναφέρουμε ως «δραστηριότητα» την κατάσταση στην οποία εμπλέκεται ο μαθητής και όχι την ίδια του τη δράση με εργαλείο αυτό το πρόβλημα-κατάσταση για να πετύχει κάποιο στόχο.

Η δραστηριότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί:

- Είτε για την κατασκευή από τους ίδιους τους μαθητές της νέας γνώσης.
- Είτε για να δώσει την ευκαιρία ποικίλων εφαρμογών των ήδη αποκτηθεισών γνώσεων.

Ούτε οι καταστάσεις που απαιτούν χειρισμούς, ούτε οι μαθηματικές σπαζοκεφαλιές ή τα παιχνίδια χωρίς συγκεκριμένο στόχο, ούτε τα ανοιχτά προβλήματα που αποσκοπούν στην εμπέδωση μιας ήδη αποκτηθείσας γνώσης, ούτε οι οποιεσδήποτε δραστηριότητες που κατευθύνονται από το διδάσκοντα εντάσσονται στις καταστάσεις – προβλήματα (Κολέζα, 1998).

Ο Guy Brousseau (1991) διακρίνει στη μαθηματική δραστηριότητα διάφορα στάδια διαλεκτικής αλληλεπίδρασης του μαθητή με το πρόβλημα και το περιβάλλον της τάξης, στα οποία αντιστοιχούν διάφοροι τύποι διδακτικών καταστάσεων.

- *Καταστάσεις δράσης*, που ευνοούν την ανάπτυξη των αντιλήψεων των μαθητών εφόσον είναι σχετικές με μια ενέργεια, όπως για παράδειγμα η σχεδίαση ενός συγκεκριμένου σχήματος.

- *Καταστάσεις διατύπωσης*, που ευνοούν την προσπάθεια για ρητή περιγραφή ή ανακοίνωση, προς τους άλλους, των αντιλήψεων ή των αποφάσεων του μαθητή.
- *Καταστάσεις επικύρωσης*, που απαιτούν από το μαθητή να θεμελιώσει, να αποδείξει τους ισχυρισμούς του και να εκφράσει σαφώς τις σχέσεις της διαδικασίας που χρησιμοποιεί για την επίλυση του προβλήματος.
- *Καταστάσεις "επισημοποίησης"* που αποσκοπούν στο να δώσουν το χαρακτήρα "καθιερωμένης" γνώσης (δηλαδή γνώσης αποδεκτής από την κοινότητα), σε ορισμένες από τις προσωπικές γνώσεις που χρησιμοποιήθηκαν κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων των μαθητών.

Στη διδακτική κατάσταση, όπως την εννοεί ο G. Brousseau σύμφωνα με τον Γαγάτση (2001), ο μαθητής πρέπει να τίθεται μπροστά σε ένα πρόβλημα ή σε μια αλυσίδα προβλημάτων που τρέπει να προσπαθήσει να τα λύσει. Στην προσπάθεια του αυτή, κινητοποιεί τα αποθέματα της γνώσης που διαθέτει, τους τρόπους και τα συστήματα δράσης που έχει χρησιμοποιήσει με επιτυχία μέχρι τότε για να έχει το βέλτιστο αποτέλεσμα. Αυτές οι δραστηριότητες, αυτές οι αποφάσεις που θα πάρει ο μαθητής για να πετύχει το βέλτιστο αποτέλεσμα διαμορφώνουν το "προσχέδιο" της έννοιας που χρησιμοποιείται για τη λύση του προβλήματος και οδηγούν στην έννοια που απαιτείται και στην αποτελεσματική χρησιμοποίηση της. Μετά από αυτές τις πρώτες ενέργειες, ο μαθητής αναζητά τρόπους διατύπωσης της έννοιας και των ενεργειών που έχει κάνει ώστε να μπορεί να τις συγκρατήσει συνοπτικά διατυπωμένες στη μνήμη του ή και να μπορεί να τις ανακοινώσει στους συμμαθητές του. Στη συνέχεια επειδή χρειάζεται να πείσει το σχολικό περιβάλλον του για την ορθότητα των αποφάσεων και των προτάσεων του χρειάζεται να τεκμηριώσει το κύρος τους. Οι δραστηριότητες που πείθουν για την ορθότητα της έννοιας που προτείνεται για την λύση της προβληματικής κατάστασης συνήθως τις ονομάζουμε απόδειξη. Αφού ολοκληρωθεί η προσπάθεια αναζήτησης, διατύπωσης και τεκμηρίωσης του κύρους της έννοιας που απαιτείται για τη βέλτιστη αντιμετώπιση του προβλήματος που δόθηκε, τότε η έννοια αποκτά - με την παρέμβαση του καθηγητή - το χαρακτήρα "καθιερωμένης" γνώσης (π.χ ορισμός). Με αυτόν τον τρόπο η έννοια που κατασκευάζει ο μαθητής, για να αντιμετωπίσει την προβληματική κατάσταση μπροστά στην οποία βρίσκεται, συνδέεται με τη σημασία της σε μια συγκεκριμένη κατάσταση.

Ένα απ' τα ζητούμενα της σύγχρονης Διδακτικής των Μαθηματικών και της Κατασκευαστικής Θεωρίας γνώσης, είναι η εύρεση κατάλληλων διδακτικών καταστάσεων- προβλημάτων και πλαισίων, που θα παρακινήσουν τους μαθητές να εμπλακούν στην επίλυση τους. Μέσ' απ' αυτά, προσπαθώντας να οργανώσουν τις προσωπικές τους εμπειρίες θα κατασκευάσουν ενεργά τους δικούς τους μαθηματικούς τρόπους γνώσης, με βάση τις ήδη υπάρχουσες άτυπες γνώσεις τους. Θα τους οδηγούν δηλαδή σε μια τεχνητή γένεση της

έννοιας αυτής γιατί η διδασκαλία μιας μαθηματικής έννοιας, δεν μπορεί να γίνεται με την μορφή που τη συναντάμε στα καθαρά Μαθηματικά. Πρέπει πριν διδαχθεί στο σχολικό περιβάλλον να πάρει τη συγκεκριμένη μορφή ενός ενδιαφέροντος προβλήματος, να μετασχηματιστεί έτσι ώστε να γίνεται κατανοητή η σημασία της από τους μαθητές. Τα φαινόμενα μέσω των οποίων αποκτούν περιεχόμενο οι μαθηματικές έννοιες, πρέπει ν' αποτελέσουν τη βάση στήριξης μιας μαθησιακής - διδακτικής διαδικασίας που στοχεύει στην κατάκτηση αυτών των εννοιών.

Εργασία πάνω σε μια μαθηματική δραστηριότητα σημαίνει κυρίως προσδιορίζω το πρόβλημα, εικάζω για το αποτέλεσμα, πειραματίζομαι με τη βοήθεια παραδειγμάτων, συνθέτω ένα συλλογισμό, διατυπώνω μια λύση, ελέγχω τα αποτελέσματα και αξιολογώ την ορθότητα τους σε συνάρτηση με το αρχικό πρόβλημα.

Μια δραστηριότητα σύμφωνα με το Δ.Ε.Π.Π.Σ, πρέπει:

- Να είναι κατανοητή από όλους τους μαθητές και να μην επιτρέπει παρανοήσεις και υπονοούμενα.
- Να αφήνει περιθώρια για έρευνα και αυτενέργεια.
- Να ενθαρρύνει τη συνεργατικότητα και την ομαδική εργασία προτρέποντας τους μαθητές σε νοητικό ανταγωνισμό.
- Να μην επιτρέπει άμεση προσέγγιση σε μια μοναδική λύση.
- Το πρόβλημα από το οποίο προκύπτει η δραστηριότητα να είναι πλούσιο σε εμπλεκόμενες έννοιες, να είναι αρκετά σημαντικό αλλά όχι δύσκολο, ώστε να μπορεί να αντιμετωπιστεί από όλους τους μαθητές.
- Η επεξεργασίας του προβλήματος να μπορεί να γίνει, όπου είναι δυνατό σε δύο τουλάχιστον πλαίσια μεταξύ των οποίων ο μαθητής θα μπορέσει να κάνει τις κατάλληλες αντιστοιχίσεις.

Η ΟΙΚΟΔΟΜΗΣΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΓΝΩΣΗΣ

Σύμφωνα με τα προηγούμενα η μαθηματική γνώση δεν μεταδίδεται, αλλά κατασκευάζεται από το μαθητή με βάση τις άτυπες γνώσεις που διαθέτει από τις μαθηματικές και μη μαθηματικές του εμπειρίες. Η μάθηση μιας μαθηματικής έννοιας ή διαδικασίας αναπτύσσεται σταδιακά σε διαδοχικά επίπεδα αφαίρεσης. Η μετάβαση από ένα γνωστικό επίπεδο σε ένα άλλο υψηλότερο πραγματοποιείται μέσω του «προσωπικού αναστοχασμού» (ανάλυση και αξιολόγηση των προσωπικών "σκέψεων και ενεργειών) και της κοινωνικής αλληλεπίδρασης με τα υπόλοιπα μέλη της τάξης (συζήτηση και αξιολόγηση των διαφορετικών λύσεων που προσφέρθηκαν).

Επομένως ο ρόλος του μαθητή δεν είναι να ακούει παθητικά τον δάσκαλο και να αναπαράγει τον τρόπο σκέψης του ή να εφαρμόζει «έτοιμους» τρό-

πους λύσης μαθηματικών προβλημάτων που προτείνονται σ' ένα σχολικό εγχειρίδιο, αλλά να

- παρουσιάζει, να εξηγεί και να δικαιολογεί τις δικές του λύσεις στα μαθηματικά προβλήματα.
- ακούει και να προσπαθεί να κατανοεί τις εξηγήσεις των συμμαθητών του.
- εκφράζει τις διαφωνίες του όταν οι λύσεις του ή τα αποτελέσματα των λύσεων του διαφέρουν από αυτά των συμμαθητών του.
- να συνεργάζεται με τους συμμαθητές του ώστε να μοιράζονται την ευθύνη των ενεργειών τους. (Coobb, Wood & Yackel , 1991).

Αντίστοιχα ο ρόλος του δασκάλου δεν είναι να μεταφέρει τη μαθηματική γνώση στους μαθητές του με εξηγήσεις και παραδείγματα αλλά

- να κατανοεί πως σκέφτονται οι μαθητές του.
- να διευκολύνει και να προωθεί τη μαθηματική συζήτηση στην τάξη μέσα από κατάλληλες ερωτήσεις.
- να αναδιατυπώνει τις εξηγήσεις των μαθητών προσπαθώντας να τις φέρει κοντά στις επίσημες μαθηματικές γνώσεις.
- να επιλέγει δραστηριότητες, οι οποίες μπορούν να εξασφαλίσουν την ομαλή πορεία εξέλιξης των μαθηματικών ιδεών των μαθητών.
- να θέτει τις διαφωνίες ως προβλήματα που θα πρέπει να λυθούν από τους ίδιους.
- να βοηθά τους μαθητές να αναπτύξουν τη συνεργασία τους στις ομάδες. (Cobb et al, 1992),

Τα παλιότερα χρόνια για μια σωστή μάθηση θεωρείτο απαραίτητη η καλή παρουσίαση από το δάσκαλο. Ο εκπαιδευτικός μαθηματικός ήταν ο **επαγγελματίας της διδασκαλίας τ**ων μαθηματικών, δηλαδή ο καλός γνώστης της ύλης και της συστηματικής μετάδοσης της, σήμερα, ο εκπαιδευτικός μαθηματικός είναι **ο επαγγελματίας της μάθησης των μαθηματικών**. Δηλαδή ο ικανός να δημιουργήσει τις συνθήκες που θα διευκολύνουν τους μαθητές του να αναπτύξουν μαθηματική σκέψη, να δουν τη χρησιμότητα και την αξία της μαθαίνοντας να τη χρησιμοποιούν. Θα πρέπει ταυτόχρονα να επινοεί, να σχεδιάζει και να εισάγει στην πρακτική του διδακτικές καταστάσεις διαμέσου των οποίων ευνοείται η μετάβαση από την ατομική/συλλογική εμπειρία στην ατομική/συλλογική γνώση με την αξιοποίηση της αλλαγής πλαισίων και ρόλων (Καλαβάσης, 2003). Η έμφαση μεταφέρεται από τη σωστή αναπαραγωγή αυτού που κάνει ο δάσκαλος στην πετυχημένη οργάνωση της εμπειρίας του μαθητή από τον ίδιο.

Παραδείγματα εισαγωγικών δραστηριοτήτων από το βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου

Παράδειγμα 1ο

1.5 Αξιοσημείωτες ταυτότητες (σελ 42)

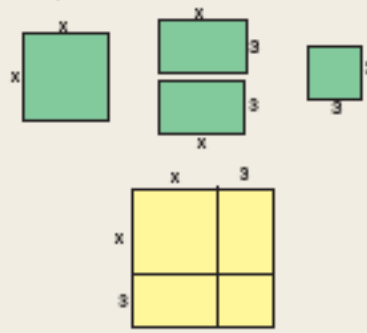
Διδακτικοί στόχοι της ενότητας: Οι μαθητές πρέπει:

– Να θυμηθούν ποια ισότητα λέγεται ταυτότητα.
– Να γνωρίζουν ποιες είναι οι βασικές ταυτότητες.
– Να μάθουν να αποδεικνύουν μια απλή ταυτότητα.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Ποιες από τις ισότητες $3x = 12$, $x + y = 7$, $4a = 3a + a$, $x(x + 2) = x^2 + 2x$, αληθεύουν για όλες τις τιμές των μεταβλητών τους;

2. α) Να βρείτε το συνολικό εμβαδόν των πράσινων σχημάτων.
β) Ποια από τις παρακάτω παραστάσεις εκφράζει το εμβαδόν του κίτρινου τετραγώνου;
i) $x^2 + 9$ ii) $(x + 3)^2$
iii) $x^2 + 6x$ iv) $6x + 9$
γ) Να συγκρίνετε το συνολικό εμβαδόν των πράσινων σχημάτων με το εμβαδόν του κίτρινου τετραγώνου.



ΣΧΟΛΙΑ

Η δραστηριότητα 2:

- Είναι κατανοητή από όλους του μαθητές. Η εκφώνηση είναι διατυπωμένη με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτρέπει την ελεύθερη έκφραση των ιδεών των μαθητών και δεν προδιαθέτει για τη μέθοδο που πρέπει να ακολουθηθεί ή για τη λύση της.
- Επιτρέπει τον έλεγχο της ορθότητας ή μη των απαντήσεων μέσα από τη ίδια τη δραστηριότητα.
- Οι δρόμοι που οδηγούν στην επιβεβαίωση της διαίσθησης περί της ισότητας των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι πολλοί. Η επικύρωση και αποδοχή μιας λύσης στηρίζεται σε γνωστές προτάσεις (π.χ ιδιότητες των δυνάμεων, επιμεριστική ιδιότητα κλπ) ή σε εμπειρικές διαδικασίες (π.χ

σύγκριση των εμβαδών των πράσινων σχημάτων με εκείνων που απαρτίζουν το κίτρινο τετράγωνο).

- Το πρόβλημα από το οποίο προκύπτει η δραστηριότητα είναι πλούσιο σε εμπλεκόμενες έννοιες(υπολογισμός εμβαδού ορθογωνίου και τετραγώνου από τις διαστάσεις του, αναγνώριση συμβολικής έκφρασης εμβαδού δοσμένου τετραγώνου, σύγκριση αλγεβρικών παραστάσεων).
- Η επεξεργασία του προβλήματος μπορεί να γίνει σε δύο πλαίσια (αλγεβρικό- γεωμετρικό) (γεωμετρική ερμηνεία της ταυτότητας).

Παράδειγμα 2ο

1.2 Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων (σελ. 198)

Διδακτικός στόχος της υπο-ενότητας «Ίσα τμήματα μεταξύ παραλλήλων ευθειών»: Οι μαθητές πρέπει να μάθουν πότε παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία που τις τέμνει.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

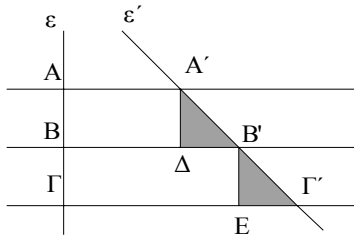
1. Να χαράξετε μια ευθεία ε κάθετη στις γραμμές του τετραδίου σας και να διαπιστώσετε ότι τρεις διαδοχικές γραμμές του τετραδίου ορίζουν στην ευθεία ε ίσα ευθύγραμμα τμήματα.
2. Αν χαράξετε μια άλλη ευθεία ε′ που δεν είναι κάθετη στις γραμμές του τετραδίου, τότε οι τρεις προηγούμενες διαδοχικές γραμμές ορίζουν ίσα τμήματα και στην ε′;

Στη διδασκαλία όπως αναφέρει και ο Freudental αντί να ξεκινήσει κάποιος από την παρουσίαση της έννοιας και να αναζητήσει στη συνέχεια υλικό που να συγκεκριμενοποιεί αυτή την έννοια, πρέπει πρώτα να αναζητήσει τα φαινόμενα που αναγκάζουν το μαθητή να συγκροτήσει το νοητό αντικείμενο που μαθηματικοποιείται από τη συγκεκριμένη έννοια. Οι γραμμές των σχολικών τετραδίων είναι το πιο γνωστό παράδειγμα που συγκεκριμενοποιεί το μαθηματικό περιεχόμενο της ενότητας αυτής. Ξεκινώντας ο μαθητής, από παρατήρηση και ανάλυση καταστάσεων που του είναι οικίες, είναι ευκολότερο να αντιμετωπίσει μαθηματικές έννοιες, να τις αναγνωρίσει και να τις χρησιμοποιεί σε μια ποικιλία καταστάσεων.

Με την παραπάνω δραστηριότητα επιδιώκεται να αξιοποιηθούν οι προϋπάρχουσες γνώσεις[1] των μαθητών (οι γραμμές του τετραδίου τους είναι πα-

[1] Οι προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών, σχετίζονται τόσο με τις άτυπες γνώσεις τους (Ο όρος άτυπες γνώσεις χρησιμοποιείται για να περιγράψει τις αυτοσχέδιες στρατηγικές λύσεων που έχουν στη διάθεση τους οι μαθητές) όσο και με τις θεσμοθετημένες γύρω από το μαθηματικό αυτό θέμα

ράλληλες και ισαπέχουν η μια από την άλλη, η κατακόρυφη γραμμή που είναι συνήθως χαραγμένη προκειμένου να στοιχίζεται αριστερά το κείμενο, είναι κάθετη στις παράλληλες γραμμές) για την οικοδόμηση της νέας γνώσης. «*…με τη χάραξη διαφόρων ευθειών οι οποίες τέμνουν τις γραμμές του τετραδίου τους επιδιώκεται να διαπιστώσουν οι μαθητές ότι παράλληλες ευθείες, εφόσον ισαπέχουν, θα ορίζουν ίσα τμήματα σε οποιαδήποτε ευθεία της τέμνει. Ο διδάσκων μπορεί να τους οδηγήσει στην απόδειξη αν φέρουν τις*



Α΄Δ ⊥ ΒΒ΄ και Β΄Ε ⊥ΓΓ΄ και συγκρίνουν τα ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται. Με την εξέταση της ειδικής αυτής περίπτωσης προετοιμάζονται οι μαθητές και για την απόδειξη της πρότασης στη γενική της περίπτωση, όταν οι τέμνουσες είναι τυχαίες.» (Βιβλίο Εκπαιδευτικού, σελ. 82).

Παράδειγμα 3ο

5.3 Έννοια της πιθανότητας (σελ. 174)

Διδακτικοί στόχοι της ενότητας: Οι μαθητές πρέπει να**:**

- Μάθουν τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας
- Γνωρίζουν τους βασικούς κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Επιλέγουμε στην τύχη ένα αυτοκίνητο του οποίου ο αριθμός κυκλοφορίας είναι ζυγός και καταγράφουμε το τελευταίο ψηφίο του.

– Ο Γιώργος ισχυρίζεται ότι είναι πιθανότερο να είναι μικρότερο του 6 παρά να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 6. Είναι σωστός ο ισχυρισμός του;

και οι οποίες έχουν προκύψει όχι μέσα από συστηματική διδασκαλία, αλλά από την επαφή τους με τις μαθηματικές έννοιες που χρησιμοποιούνται κυρίως στη καθημερινότητα τους.

Οι άτυπες γνώσεις των μαθητών, ως ανεπίσημες μέθοδοι εργασίας τους στα Μαθηματικά, θεωρούνται σήμερα ως το σημείο εκκίνησης για τη διδασκαλία των σχολικών μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών.

ΣΧΟΛΙΑ

«*Με την παραπάνω δραστηριότητα δίνεται ευκαιρία στους μαθητές να διατυπώσουν μέσα από την εμπειρία τους την εικασία ότι μεταξύ δύο ενδεχομένων πιθανότερο να συμβεί είναι εκείνο που έχει περισσότερες δυνατότητες πραγματοποίησης. Στη προσπάθεια να επαληθεύσουν την εικασία αυτή θα οδηγηθούν στον κλασικό ορισμό της πιθανότητας».(Απ Α={0, 2, 4,}, Β={6, 8}, Ρ(Α=)3/5, Ρ(Β)=2/5, επομένως ο ισχυρισμός του Γιώργου είναι σωστός».* (Βιβλίο Εκπαιδευτικού, σελ. 71).

Ο ρόλος των δραστηριοτήτων είναι τέτοιος ώστε να δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να δράσουν σε εμπειρικό επίπεδο, να παρατηρήσουν και μέσα από επαγωγικούς συλλογισμούς να διαμορφώσουν το "προσχέδιο" της έννοιας που χρησιμοποιείται για τη λύση του προβλήματος. Γι αυτό και στη συγκεκριμένη εισαγωγική δραστηριότητα, αλλά και σε όλες τις υπόλοιπες, δεν ζητείται η διατύπωση ενός ορισμού, παρόλο που αυτός είναι ο στόχος της ενότητας, αφού από τη φύση του ο ορισμός είναι μια μεταγνωστική διαδικασία που απαιτεί συζήτηση και λεκτική περιγραφή, ώστε να εντοπιστούν οι ελάχιστες ιδιότητες που απαιτούνται να καθορίσουν το αντικείμενο.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΗΣ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

- Η εισαγωγική δραστηριότητα δεν είναι δεσμευτική για το διδάσκοντα είναι απλώς ενδεικτική και συνεπώς μπορεί να αντικατασταθεί με κάποια άλλη που εκείνος κρίνει κατάλληλη για το επίπεδο και τις δυνατότητες των μαθητών της τάξης του. (Βιβλίο Εκπαιδευτικού, σελ. 9)
- Με τη δραστηριότητα επιδιώκεται να δημιουργηθεί ένας προβληματισμός μεταξύ των μαθητών γύρω από το θέμα που διαπραγματεύεται και γι αυτό δε συνοδεύεται από τη λύση της.(Βιβλίο Εκπαιδευτικού, σελ. 9)
- Κάθε εισαγωγική δραστηριότητα στηρίζεται στην ανάπτυξη πολλαπλών ερωτημάτων, τα οποία αποσκοπούν στην ενεργοποίηση της σκέψης του μαθητή. Υπάρχουν όμως και περιορισμοί στην αυτενέργεια του μαθητή καθώς οι ερωτήσεις τον καθοδηγούν να ακολουθήσει συγκεκριμένα βήματα στη σκέψη του προκειμένου, να καταλήξει στον επιδιωκόμενο στόχο, αφού το σχολικό εγχειρίδιο θέλει να εξασφαλίσει την ύπαρξη «ορθής» και «ακριβούς» μαθηματικής γνώσης. Έτσι σε πολλές περιπτώσεις η αλληλουχία των ερωτήσεων προσομοιάζει μάλλον στη μαιευτική μέθοδο, η οποία θεωρεί ότι μια κατάλληλη σειρά ερωτήσεων οδηγεί στα επιθυμητά συμπεράσματα. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τη διαισθητική

γνώση που αναπτύσσεται λόγω των άτυπων γνώσεων των μαθητών από τη μια μεριά και από τη φύση των εργαλείων από την άλλη και η κατασκευαστική προσέγγιση στις περιπτώσεις αυτές μετατρέπεται σε ανακαλυπτική διαδικασία. Η ανακαλυπτική μάθηση όμως είναι κατασκευαστική. Το ΔΕΠΠΣ άλλωστε εκθέτει ως «μεθοδολογικές προσεγγίσεις κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών» και τις δύο προσεγγίσεις (έμφαση στο αποτέλεσμα και έμφαση στη διαδικασία) προτείνοντας τη σύνθεση τους με το σκεπτικό ότι «τόσο η πρώτη όσο και η δεύτερη προσέγγιση είναι από μόνες τους ατελείς. Η πρώτη γιατί είναι αρκετά περιοριστική ενώ στη δεύτερη, η δραστηριότητα από μόνη της δεν αντανακλά τον πλούτο της μαθησιακής εμπειρίας»

- Ευκαιρίες για ανάπτυξη μαθησιακών δραστηριοτήτων στην τάξη δίνουν και οι «Ερωτήσεις Κατανόησης». Ιδιαίτερα εκείνες που προσπαθούν να αναδείξουν και να αξιοποιήσουν τα συνηθισμένα λάθη των μαθητών.
- Ανεξάρτητα από το πόσο επιτυχημένη είναι η όχι μια δραστηριότητα αυτό που την καθιστά παιδαγωγικά αποτελεσματική δεν είναι τόσο η ίδια η δραστηριότητα όσο οι ικανότητες που αναπτύσσονται μέσα από αυτήν (Johnston and all, 2005).
- Οι μαθησιακές δραστηριότητες που προτείνονται αποκτούν τη δική τους δυναμική στη σχολική τάξη που πολλές φορές μπορεί να διαφοροποιείται από την προβλεπόμενη από το ΑΠΣ και τις προθέσεις της συγγραφικής ομάδας.
- Ένα διδακτικό εγχειρίδιο μπορεί να παράγεται στηριζόμενο στις γνώσεις που προέρχονται από τις έρευνες όσων ασχολούνται με τη Διδακτική των Μαθηματικών είναι όμως ένα στατικό διδακτικό υλικό που αποκτά υπόσταση μέσα στη σχολική τάξη. Αυτό σημαίνει ότι ο εκπαιδευτικός με την κατάλληλη υποστήριξη, θα δώσει τις δικές του ερμηνείες και θα διαμορφώσει διδακτικές καταστάσεις τέτοιες που θα υποστηρίξουν τη μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών του. Από τις διάφορες έρευνες όμως που έχουν δει κατά καιρούς το φως της δημοσιότητας(π.χ. ΥΠΕΠΘ-ΚΕΕ) προκύπτει ότι οι δάσκαλοι και οι καθηγητές δεν έχουν διαμορφώσει άποψη για τα στάδια (φάσεις) που πρέπει να ακολουθεί μια σύγχρονη διδασκαλία. Ούτε η ολιγόωρη επιμόρφωση στα νέα βιβλία των μαθηματικών μπορεί να θεωρηθεί ικανοποιητική. Το σχολικό βιβλίο όμως καθορίζει τη διδασκαλία για πολλούς εκπαιδευτικούς αφού κατά τον Μπαρκάτσα, το 84% των εκπαιδευτικών στηρίζεται σε αυτό στην καθημερινή του πρακτική. Πως όμως θα μπορέσουν να ανταποκριθούν στις νέες απαιτήσεις χωρίς βοήθεια; Η εφαρμογή του κονστρουκτιβισμού στην πράξη απαιτεί από τους εκπαιδευτικούς γνώση του αντικει-

μένου της διδασκαλίας, περισσότερο από οποιαδήποτε άλλη διδακτική προσέγγιση. Η κονστρουκτιβιστική διδασκαλία στηρίζεται στις δραστηριότητες των μαθητών, στην επίλυση πλούσιων και ενδεχομένως ανοικτών προβλημάτων, σε διερευνητικό projects σε πρωτότυπες ιδέες. Σε αυτά τα είδη δραστηριοτήτων οι εκπαιδευτικοί πρέπει όχι μόνο να γνωρίζουν καλά το αντικείμενο που διδάσκουν, αλλά να είναι σε θέση να υιοθετούν μια ποικιλία προσεγγίσεων αυτού του θέματος (παιδαγωγική προσέγγιση). (Κολέζα, 2007)

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Το νέο σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Γ' Γυμνασίου επιδιώκει με τις ποικίλες εισαγωγικές δραστηριότητες που περιέχει

- την αξιοποίηση των προϋπαρχουσών γνώσεων των μαθητών πάνω σε ένα μαθηματικό θέμα για την οικοδόμηση της νέας γνώσης,
- την ανάπτυξη μαθηματικής συζήτησης μεταξύ των μελών της τάξης και
- τον αναστοχασμό των μαθητών πάνω στις ενέργειες τους, καθώς διαπραγματεύονται τα μαθηματικά τους νοήματα.

Η ανάλυση των χαρακτηριστικών που καλείται να έχει ένα σύγχρονο σχολικό βιβλίο που ενδιαφέρεται να εισάγει ένα νέο πνεύμα στη μαθηματική εκπαίδευση αλλά και η κριτική μελέτη των νέων σχολικών βιβλίων είναι μια σύνθετη δουλειά. Προϋποθέτει την αξιολογική εξέταση όλων των στοιχείων που η διεθνής εμπειρία θεωρεί ότι διαμορφώνουν την ποιότητα του διδακτικού βιβλίου για τα Μαθηματικά. (Τζεκάκη, 2007). Είναι αυτονόητο όμως ότι η τελική αξιολόγησή των βιβλίων σχετίζεται με το αν η χρήση και η λειτουργία τους στη σχολική τάξη βελτιώνει ουσιαστικά τη μαθηματική εκπαίδευση και αναβαθμίζει τις μαθηματικές γνώσεις των μαθητών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Boaler, J. (2002). Exploring the nature of mathematical activity: using theory, research and 'working hypotheses' to broaden conceptions of mathematics knowing, Educational Studies in Mathematics, 51, pp.3-21.

Boaler, J. (2003). Learning from teaching: Exploring the relationship between reform curriculum and equity, Journal for Research in Mathematics Education, 33(4), pp.239 - 258.

Brousseau, G. (1991). Θεμέλια και Μέθοδοι της Διδακτικής των Μαθηματικών στο: Α Γαγάτσης (1991), Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών, Εκδόσεις Κυριακίδη.

Kilpatric, J. (2001). Understanding mathematical literacy: the contribution of research, Educational Studies in mathematics, 47, pp.101-116.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., (1991), A constructivist approach to second grade mathematics. In E. von Glaserfeld (Ed), Radical constructivism in mathematics Education, pp. 157-176.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E.& McNeal, B.(1992). Characteristics of classroom mathematics traditions: an interactional analysis. American Educational Research Journal, 29(3), 573-604.

J, Johnston-Wilder& J, Mason (2005). Developing Thinking in Geometry, Sage Publications, London .

Γαγάτσης Αθ. (1995). Διδακτική των Μαθηματικών, Θεωρία - Έρευνα, Εκδόσεις ART of TEXT ΑΕ , Θεσσαλονίκη.

Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (2002), http://www.pi-schools.gr. - ΑΠΣ , ΦΕΚ τεύχος Β΄ αρ φύλλου 303/13-03-03.

Καλαβάσης, Φρ. (2003). Προϋποθέσεις για το σχεδιασμό μιας μαθησιακής διαδρομής στα μαθηματικά, Πρακτικά 20ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Εκπαίδευσης, ΕΜΕ.

Κλαουδάτος, Ν.(1999).Τι σημαίνει για τη Μαθηματική Εκπαίδευση «Ενεργητική Στάση ως προς τα Μαθηματικά», Επιθεώρηση Επιστημονικών και Εκπαιδευτικών Θεμάτων, Α(2) σελ 62-77, περιοδική έκδοση Π.Ι.

Κολέζα Ε.(1997).Ο ρόλος των δραστηριοτήτων στη διδασκαλία των Μαθηματικών, Πρακτικά 14ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Ε.Μ.Ε., Μυτιλήνη.

Κολέζα Ε. (2007). Προγράμματα Σπουδών για τα Μαθηματικά: Το…μετέωρο βήμα της μεταρρύθμισης, Πρακτικά 24ου Συνεδρίου Μαθημ. Παιδείας ,ΕΜΕ.

Πόταρη, Δ. (2007).Ο μετασχηματισμός της δραστηριότητας σε μαθηματική στα νέα σχολικά εγχειρίδια του Δημοτικού, Διδασκαλία Φυσικών Επιστημών: Έρευνα και Πράξη, τεύχος 20-21, θεματική ενότητα: Σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών, σελ. 44-51.

Τζεκάκη, Μ. (2007). Νέα σχολικά βιβλία για τα Μαθηματικά, Διδασκαλία Φυσικών Επιστημών: Έρευνα και Πράξη, τεύχος 20-21, θεματική ενότητα: Σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών, σελ. 52-58.

Χαβιαρής, Π.- Καφούση, Σ.(2007). Μεταγνωστικές διαδικασίες και κοινωνική αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών στα μαθηματικά: Η περίπτωση των σχολικών εγχειριδίων Ε΄ και Στ΄ Δημοτικού, Έρευνα και Πράξη, τεύχος 20-21, θεματική ενότητα : Σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών, σελ. 59-65.

ΠΡΟΛΕΓΟΜΕΝΑ ΜΙΑΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΤΩΝ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΩΝ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ευγενία Κολέζα *Καθηγήτρια Παν. Ιωαννίνων*

Ευάγγελος Φακούδης *Μαθηματικός-Γυμνάσιο Σουφλίου*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία δύο χρόνια έγινε πράξη η αλλαγή των σχολικών βιβλίων των μαθηματικών σε Δημοτικό και Γυμνάσιο και η εφαρμογή του Δ.Ε.Π.Π.Σ. και του Α.Π.Σ. Αυτό αναμένεται να φέρει σημαντικές αλλαγές στη μαθηματική εκπαίδευση αφού οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν κύρια το σχολικό εγχειρίδιο ως το βασικότερο εργαλείο πάνω στο οποίο στηρίζουν τη διδασκαλία τους. Η αξιολόγηση λοιπόν και η κριτική στάση στα σχολικά εγχειρίδια είναι όχι μόνο χρήσιμη αλλά αναγκαία. Εμείς, έχοντας την πρόθεση να ασχοληθούμε με την έννοια της συνάρτησης γιατί διαπερνά τυπικά και άτυπα όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης, δημιουργεί ένα πλούσιο πεδίο αναπαραστάσεων, ενοποιεί πολλές περιοχές των μαθηματικών, αλλά και άλλων γνωστικών πεδίων, κάναμε μια ανασκόπηση στην διεθνή βιβλιογραφία για την έννοια της συνάρτησης και την εισαγωγή της στα παγκόσμια αναλυτικά προγράμματα την οποία σας παρουσιάζουμε σήμερα.

Η ΔΙΑΧΡΟΝΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ- ΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ

Τα Μαθηματικά δεν αφορούν μόνο στη μελέτη αριθμών και σχημάτων, αλλά επίσης τη μελέτη σχέσεων και κανονικοτήτων (Steen, 1990). Η συνάρτηση ως μια μορφή σχέσης είναι βασικό στοιχείο για τα Μαθηματικά, με ευρύτατες εφαρμογές στις άλλες επιστήμες και την καθημερινή ζωή. Η έννοια της συνάρτησης «γεννήθηκε ως αποτέλεσμα μιας μακρόχρονης αναζήτησης ενός μαθηματικού μοντέλου των φυσικών φαινομένων που περιλαμβάνουν μεταβλητές ποσότητες» (Sfard, 1991 σελ. 14).

Τις ρίζες της έννοιας της συνάρτησης όπως τη γνωρίζουμε σήμερα πρέπει να τις αναζητήσουμε μάλλον στον 14ο αιώνα στις εργασίες του Γάλλου μαθηματικού Nicole Oresme. Ο Oresme γύρω στο 1350 περιέγραφε τους νόμους της φύσης ως *μορφές εξάρτησης μιας ποσότητας σε σχέση με μια άλλη*,

θέτοντας έτσι τις βάσεις για την έννοια της συνάρτησης. Κατά τη διάρκεια του 17ου αιώνα, καθώς οι επιστήμονες ανακάλυπταν όλο και περισσότερα στοιχεία για τους φυσικούς νόμους και καθώς οι μαθηματικοί άρχισαν να συνδέουν την άλγεβρα και τη γεωμετρία, η ιδέα της συνάρτησης έγινε όλο και περισσότερο αναγκαία. Ο Galileo, στη μελέτη της κίνησης, συνέλαβε την έννοια της συνάρτησης *ως σχέση μεταβλητών,* ενώ ο Descartes, στο La Géométrie (1637), στη μελέτη της αλγεβρικής έκφρασης των καμπύλων, έφερε την έννοια της συνάρτησης στην κατασκευή μιας καμπύλης. Στο πλαίσιο της ανάπτυξης της αναλυτικής γεωμετρίας, η λέξη «συνάρτηση» διατυπώνετο σε σχέση με μια γεωμετρική έννοια. Ο Leibniz, το 1692, εισήγαγε τη λέξη συνάρτηση για να «καθορίσει ένα γεωμετρικό αντικείμενο που συνδέεται με μια καμπύλη, παραδείγματος χάριν, μια εφαπτομένη είναι συνάρτηση μιας καμπύλης» (Kleiner, 1989 σελ. 283). Το 18ο αιώνα, καθώς τα μαθηματικά άρχισαν να απομακρύνονται από τη γεωμετρική ιδέα και να εστιάζουν προς την αλγεβρική έκφραση, η έννοια της συνάρτησης αντιμετωπίσθηκε κάτω από μια νέα οπτική. Το 1718 ο Johann Bernoulli εισάγει τον πρώτο τυπικό ορισμό της συνάρτησης: «Ονομάζουμε συνάρτηση μιας μεταβλητής μια ποσότητα που συντίθεται με οποιοδήποτε τρόπο από αυτήν τη μεταβλητή και από σταθερές» (Shuard & Neill, 1977 σελ. 18). Το 1748 ο Euler διατύπωσε έναν ορισμό της συνάρτησης που βελτίωσε το 1755. Αυτός ο ορισμός της συνάρτησης υπογράμμιζε *μια σχέση εξάρτησης* μεταξύ ποσοτήτων: «Εάν... κάποιες ποσότητες εξαρτώνται από άλλες κατά τέτοιο τρόπο ώστε εάν αυτές αλλάζουν και οι πρώτες υφίστανται την ίδια αλλαγή, οι πρώτες ποσότητες καλούνται συναρτήσεις των τελευταίων ποσοτήτων» (Kleiner, 1989 σελ. 284).

Η προσέγγιση στις συναρτήσεις κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου ήταν αλγεβρική με έμφαση στην αλγοριθμική εξάρτηση μεταξύ των μεταβλητών και τη χρήση εξισώσεων ή τύπων ως μορφές αναπαράστασης. Το 1829 ο Dirichlet (Kleiner 1989σελ. 291) διατύπωσε έναν ορισμό της συνάρτησης που έδινε έμφαση στη σχέση αντιστοιχίας μεταξύ των *μεταβλητών ποσοτήτων:* «Μια μεταβλητή y είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής x, ορισμένης στο διάστημα $a < x < b$, εάν σε κάθε τιμή της μεταβλητής x σε αυτό το διάστημα αντιστοιχεί μια τιμή της μεταβλητής y. Επίσης, είναι άσχετο με ποιο τρόπο αυτή η αντιστοίχηση καθιερώνεται». Σε αυτόν τον ορισμό *η έμφαση μετατοπίζεται από μια σχέση συμμεταβλητότητας που εκφραζόταν στον ορισμό του Euler σε μια σχέση αντιστοίχησης.* Εντούτοις ο κανόνας της αντιστοίχησης δεν είναι σαφής σε αυτόν τον ορισμό, και κατά συνέπεια ο ορισμός επέτρεπε σε όλα τα είδη των σχέσεων να είναι συναρτήσεις.

Περίπου εκατό χρόνια αργότερα το 1939, με την εμφάνιση της αφηρημένης άλγεβρας, οι Bourbaki γενίκευσαν τον ορισμό του Dirichlet. Η συνάρτηση ορίστηκε ως μια *αντιστοιχία μεταξύ δύο συνόλων* (Kleiner, 1989 σελ. 299).

Ο φορμαλιστικός συνολοθεωρητικός ορισμός των Bourbaki είναι πολύ διαφορετικός από τον αρχικό ορισμό της συνάρτησης ως μορφή εξάρτησης μεταβλητών. Ο ορισμός των Direchlet-Bourbaki επιτρέπει να γίνει η συνάρτηση αντιληπτή ως αυθύπαρκτο μαθηματικό αντικείμενο κάτι που δεν επέτρεπε ο αρχικός ορισμός. Εντούτοις, αυτός ο σύνολο-θεωρητικός ορισμός είναι πάρα πολύ αφηρημένος για μια αρχική εισαγωγή της έννοιας στους μαθητές και είναι ασυμβίβαστος με την εμπειρία τους στον πραγματικό κόσμο.

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΩΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΚΑΙ ΩΣ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση ως παράδειγμα, η Sfard (1991) αναλύει τη διπλή φύση των μαθηματικών εννοιών: αναγνωρίζει σε αυτές μια λειτουργική (:διαδικασία) και μια δομική (:αντικείμενο) όψη. Σύμφωνα με την Sfard οι έννοιες γίνονται αντιληπτές αρχικά ως διαδικασία, για παράδειγμα μέσα από υπολογιστικές διαδικασίες, και στη συνέχεια κατανοούνται ως αντικείμενο. Η δομική αντίληψη μιας έννοιας αναπτύσσεται μέσω τριών βημάτων: της *εσωτερίκευσης*, της *συμπύκνωσης*, και της πραγμοποίησης.

Κατά την εσωτερίκευση, «ο μαθητής εξοικειώνεται με τις διαδικασίες-συνήθως υπολογιστικές -που θα οδηγήσουν στη γένεση της νέας έννοιας» (σελ. 18). Κατά τη φάση της συμπύκνωσης, ο μαθητής καθίσταται «όλο και περισσότερο ικανός να σκεφθεί μια διαδικασία συνολικά, χωρίς να περάσει στις λεπτομέρειες» (σελ. 19). Στην περίπτωση της συνάρτησης, οι μαθητές βρίσκονται στη φάση της συμπύκνωσης όταν μπορούν να διερευνήσουν μια συνάρτηση, να φτιάξουν τη γραφική της παράσταση, να συγκρίνουν ή να αναγνωρίσουν συναρτήσεις.

Για παράδειγμα (Sfard 1991, Sfard & Linchevski, 1994) ενώ κάποιος μπορεί να θεωρήσει την έκφραση 3(x+5)+1 σαν αλγόριθμο, με τον οποίο μπορεί να παραγάγει διάφορα αποτελέσματα, στη φάση της συμπύκνωσης κάποιος μπορεί επίσης να θεωρήσει την ίδια έκφραση ως αυτοτελή αριθμό. Η έκφραση θεωρείται συγχρόνως η διαδικασία και το αποτέλεσμα της διαδικασίας.

Οι δυσκολίες των μαθητών να κατανοήσουν ταυτόχρονα και τις δυο αυτές έννοιες μιας έκφρασης έχουν αναφερθεί ως «δίλημμα διαδικασίας-προϊόντος» («process-product dilemma») (Davis, 1975).

Γενικά η όλη διαδικασία μετάβασης από τη «λειτουργική» («operational») στη «δομική» («structural») αντίληψη μιας μαθηματικής έννοιας είναι μια διαδοχή τριών βημάτων. Πρώτα πρέπει να υπάρξει μια διαδικασία που θα εκτελεστεί από τους μαθητές σε ήδη οικεία αντικείμενα, έπειτα θα προκύψει η θεώρηση αυτής της διαδικασίας ως ένα συμπαγές και ανεξάρτητο όλο, και τελικά θα αποκτηθεί η ικανότητα αντίληψης αυτής της νέας οντότητας ως ένα συνεχές αυτοτελές αντικείμενο. Ενώ η εσωτερίκευση και η συμπύκνωση είναι βαθμιαίες διαδικασίες -η Sfard (1991 σελ. 19) τις χαρακτηρίζει ως «βαθμιαίες, ποσοτικές, παρά ποιοτικές αλλαγές» -, η πραγμοποίηση είναι ένα ξαφνικό ποιοτικό άλμα από αυτό που αρχικά γίνεται αντιληπτό ως διαδικασία, σε ένα νοητικό αντικείμενο, μια αυτοτελής οντότητα που κατέχει ορισμένες ιδιότητες. Η πραγμοποίηση συμβαίνει όταν «μια διαδικασία σταθεροποιείται σε αντικείμενο, σε μια στατική δομή» (σελ.19). Δεδομένου ότι η πραγμοποίηση είναι ένα δύσκολο νοητικό βήμα-η Sfard προτείνει (1) οι νέες έννοιες να μην εισάγονται μέσα από δομικές περιγραφές τους, και (2) οι δομικές αντιλήψεις να μην παρουσιάζονται όσο οι μαθητές μπορούν να κάνουν και χωρίς αυτές.

Η μετατροπή της έννοιας της συνάρτησης από διαδικασία σε αντικείμενο είναι ο τελικός στόχος της διδασκαλίας των συναρτήσεων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Στην πραγματικότητα, η παρουσίαση των συναρτήσεων στα σχολικά εγχειρίδια είναι μια καταγραφή αυτής της διαδικασίας.

ΣΤΟΧΟΣ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ: «ΝΟΗΤΙΚΕΣ ΕΙΚΟΝΕΣ» Η ΟΡΙΣΜΟΙ;

Η κατανόηση του ορισμού δεν διασφαλίζει ούτε υπονοεί την κατανόηση μιας έννοιας. Για να κατανοήσει κάποιος μια έννοια πρέπει να *διαμορφώσει* την «εικόνα της έννοιας» (:concept image). Η «εικόνα» μιας έννοιας συγκροτείται από το σύνολο των «νοητικών εικόνων» (mental pictures) που έχει κάποιος για μια έννοια και από το σύνολο των ιδιοτήτων που αποδίδει στην έννοια. «Κατά συνέπεια μια γραφική παράσταση μιας συγκεκριμένης συνάρτησης και τα σύμβολα y=f(x) μπορεί να περιλαμβάνονται (μαζί με πολλά άλλα πράγματα) στη «νοητική εικόνα» κάποιου για την έννοια της συνάρτησης. Εκτός από τη νοητική εικόνα μιας έννοιας, στο μυαλό ενός ατόμου μπορεί να υπάρξει ένα σύνολο ιδιοτήτων που συνδέθηκαν με την έννοια. Παραδείγματος χάριν, κάποιος μπορεί να σκεφτεί ότι οι συναρτήσεις πρέπει πάντα να ορίζονται με τη βοήθεια των αλγεβρικών εκφράσεων. Αυτό το σύνολο ιδιοτήτων μαζί με τη νοητική εικόνα θα το ονομάζουμε «εικόνα της έννοιας» (concept image)» (Vinner, 1983 σελ. 293). Δηλαδή, η «εικόνα μιας έννοιας» περιλαμβάνει *όλες τις μη λεκτικές εκφράσεις της*

έννοιας, οπτικές αναπαραστάσεις, εντυπώσεις και εμπειρίες που δημιουργούνται στο μυαλό μας με την αναφορά του ονόματος της έννοιας (Vinner, 1992).

Ο Vinner(1983) τόνισε ότι το πρώτο πράγμα που πρέπει κάποιος να μάθει προκειμένου να κατανοήσει μια έννοια δεν είναι ο ορισμός της έννοιας, αλλά η απόκτηση εμπειρίας σε σχέση με την έννοια, η οποία και θα συμβάλει στη συγκρότηση της «εικόνας» της έννοιας. Σύμφωνα με τον Vinner κατά τη διαδικασία εκτέλεσης των γνωστικών στόχων, το μυαλό «συμβουλεύεται» περισσότερο την «εικόνα», παρά τον ορισμό της έννοιας.

Οι απόψεις του Vergnaud (1990) σχετικά με την νοητική διαμόρφωση των μαθηματικών εννοιών, δεν διαφέρουν στην ουσία από αυτές του Vinner. Για να μελετήσει και να κατανοήσει τον τρόπο που οι μαθηματικές έννοιες αναπτύσσονται νοητικά μέσω της ενδοσχολικής και εξωσχολικής εμπειρίας, ο Vergnaud πρότεινε τη θεώρηση μιας έννοιας (:concept) ως σύζευξη τριών συνόλων: C = (S, I, R), όπου:

S: είναι το σύνολο καταστάσεων που καθιστούν την έννοια χρήσιμη και σημαντική.

I: είναι το σύνολο λειτουργικών σταθερών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τα άτομα για την διερεύνηση αυτών των καταστάσεων.

R: είναι το σύνολο των συμβολικών, γλωσσικών, γραφικών ή κινητικών αναπαραστάσεων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αναπαραστήσουν τις σταθερές, τις καταστάσεις και τις διαδικασίες (σελ. 6). Τρεις μορφές αναπαράστασης της έννοιας της συνάρτησης αναφέρονται συνήθως: *η αριθμητική* (χρήση πινάκων), η *γεωμετρική* (χρήση γραφικών παραστάσεων), και η *συμβολική* (χρήση εξισώσεων).

Το σύνολο των καταστάσεων που αναδεικνύουν τη σημασία και το πεδίο εφαρμογής μιας μαθηματικής έννοιας συγκροτούν αυτό που ο Freudenthal (1971, 1973, 1982, 1983) ονόμασε «φαινομενολογική πηγή» της έννοιας. Σύμφωνα με την φαινομενολογική προσέγγιση του Freudenthal, η διδασκαλία ενός μαθηματικού αντικειμένου, για παράδειγμα μιας μαθηματικής έννοιας, πρέπει να ξεκινάει ενσωματώνοντας εκείνα τα φαινόμενα από τον φυσικό κόσμο ή την καθημερινότητα, που επιδέχονται οργάνωσης μέσω της συγκεκριμένης έννοιας, η κατανόηση της οποίας αποτελεί το στόχο της διδασκαλίας. Έτσι αντί να αναζητάμε αόριστα υλικό για να παρουσιάσουμε μια δεδομένη έννοια, η διδακτική φαινομενολογία προτείνει να αναζητήσουμε και να διερευνήσουμε εκείνες τις καταστάσεις ή τα φαινόμενα που προσφέρουν στο μαθητή την ευκαιρία, μέσω της «μαθηματικοποίησης», να κατασκευάσει την επιθυμητή έννοια.

«Όλες οι σφαίρες της πρακτικής (τα ακαδημαϊκά μαθηματικά είναι μια από αυτές), στις οποίες χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά, είναι, σε γενικές γραμμές, πηγές νοήματος μιας έννοιας. Ποιες διαστάσεις του νοήματος μιας έννοιας θα έπρεπε οι σχεδιαστές του προγράμματος σπουδών να λάβουν υπόψη; Το νόημα και η σημασία της έννοιας μέσα στο θεωρητικό δίκτυο των ακαδημαϊκών μαθηματικών, η ιστορική γένεση και η ανάπτυξή της, οι χρήσεις της για την επίλυση προβλήματος μέσα και έξω από τα μαθηματικά, οι αρχικές διαισθητικές ερμηνείες της έννοιας, οι ρίζες της στην καθημερινή σκέψη και γλώσσα, όπως και τα διάφορα εργαλεία και οι αναπαραστάσεις της έννοιας. Το πώς αυτές οι πηγές αξιοποιούνται και το σχετικό βάρος κάθε μιας εξαρτάται από την κοινωνική έννοια που αποδίδεται στην μαθηματική εκπαίδευση. Η εφαρμογή των προγραμμάτων σπουδών από τους δασκάλους διαμορφώνεται από τις πεποιθήσεις τους, ειδικότερα, από αυτό που θεωρούν σημαντικές πτυχές του νοήματος μιας έννοιας» (Biehler, 2005 σελ. 61)

Το νόημα μιας έννοιας μπορεί να μεταβληθεί σε σχέση με νέες εφαρμογές της έννοιας, νέες εννοιολογικές σχέσεις ή διαφορετικές αναπαραστάσεις. Το σύνολο των καταστάσεων, φαινομένων ή εφαρμογών που προσδίδουν νόημα σε μια έννοια είναι αυτό που ο Vergnaud (1990),αποκάλεσε εννοιολογικά πεδία (*conceptual fields),* η Boero(1992) *σημασιολογικά πεδία (semantic fields)* και ο Biehler (2005) σημασιολογικά τοπία (*semantic landscape*s).

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Στην αναζήτηση καταστάσεων που μπορούν να λειτουργήσουν ως «άτυπα σημεία εκκίνησης» στα οποία θα στηριχθεί η γνωστική ανάπτυξη έχουν αναφερθεί πολλοί ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης. Μεταξύ αυτών, ο Tall (στο Bishop et al., 1996) υποστηρίζει ότι οι μαθητές πρέπει πρώτα να βιώσουν μια ποιοτική, σφαιρική, εισαγωγή στη μαθηματική έννοια, μέσα από την οποία θα προκύψει η ανάγκη για μια πιο τυπική περιγραφή της έννοιας. Η σύνδεση των πραγματικών καταστάσεων με την γραφική τους αναπαράσταση είναι, για τον Tall, πρωταρχικός στόχος. Εντούτοις, υποστηρίζει ότι η σχέση μεταξύ των γραφικών παραστάσεων και των πραγματικών φαινομένων είναι κατ' ανάγκη περιορισμένη σε μια σύντομη εισαγωγική φάση, γιατί το βάρος πρέπει να δοθεί στις συναρτήσεις και τις γραφικές παραστάσεις σε ένα καθαρά μαθηματικό πλαίσιο. Αντίθετα με τον Tall, ο Kaput (1994), δίνει μεγαλύτερη έμφαση στη σχέση μεταξύ μαθηματικών συμβολικών συστημάτων όπως είναι οι γραφικές παραστάσεις και της καθημερινής πραγματικότητας. Επισημα*ίνει τ*ην ύπαρξη χάσματος μεταξύ αυτού που ονομάζει «νησί των τυπικών μαθηματικών» και της «ηπειρωτικής

χώρας» της πραγματικής ανθρώπινης εμπειρίας. Διευκρινίζει ότι η ύπαρξη του χάσματος οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στη διαφορά μεταξύ των *μαθηματικών συναρτήσεων* που ορίζονται από τους αλγεβρικούς τύπους, και των *εμπειρικών συναρτήσεων* που περιγράφουν τα καθημερινά φαινόμενα της ζωής. Ο Kaput (1989) υποστηρίζει επίσης ότι «δεν υπάρχει κανένα απόλυτο νόημα για τη μαθηματική λέξη συνάρτηση, αλλά μάλλον ολόκληρος νοηματικός ιστός υφασμένος από πολλές φυσικές και νοητικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων και από σχέσεις μεταξύ αυτών των αναπαραστάσεων» (σελ. 168). Η κατανόηση της συνάρτησης, επομένως, μπορεί να επιτευχθεί μέσα από την κατανόηση των διαφόρων μορφών αναπαράστασής της, και του τρόπου περάσματος από μια μορφή αναπαράστασης σε μια άλλη, διότι «η γνωστική σύνδεση των αναπαραστάσεων δημιουργεί ένα σύνολο που είναι περισσότερο από το άθροισμα των μερών του» (σελ. 179).

Μια ενδιαφέρουσα ιδέα για μια πρώτη προσέγγιση στις συναρτήσεις συνίσταται στο να ζητηθεί από τους μαθητές να σκιαγραφήσουν ποιοτικά καμπύλες που περιγράφουν χαρακτηριστικά γνωρίσματα κάποιων διαδικασιών, κάτι που εφάρμοσε στις αρχές του προηγούμενου αιώνα ο Hofler (1910), υιοθετώντας την άποψη του Klein για ανάδειξη των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της συνάρτησης. Για παράδειγμα, η κατάσταση που διερευνάται μπορεί να είναι η μορφή εξάρτησης της στάθμης του νερού με το χρόνο, όταν διάφορα μπουκάλια γεμίζουν ομοιόμορφα. Στο πλαίσιο μιας τέτοιας κατάστασης, οι μαθητές ενδέχεται να ρωτήσουν εάν είναι δυνατό να βρεθεί πάντα ένας τύπος για κάθε καμπύλη που χαράσσουν με ποιοτικό διαισθητικό τρόπο. Η αναπαράσταση μιας καμπύλης από έναν τύπο είναι ένας από τους βασικούς διδακτικούς στόχους στη διδασκαλία της συνάρτησης.

Το λογισμικό που διατίθεται σήμερα διευρύνει το σύνολο των δραστηριοτήτων που μπορούν να εμπλουτίσουν τη διδασκαλία. Συγχρόνως, όμως, θέτει σημαντικά ζητήματα στα οποία ο Balacheff (1993) αναφέρεται ως «υπολογιστική μεταφορά» («computational transposition»), και που μπορούν να προκαλέσουν εννοιολογικές συγκρούσεις. Πρόκειται για μετατοπίσεις νοήματος που οφείλονται στο μετασχηματισμό της γνώσης σε ένα άλλο αναπαραστασιακό σύστημα. Για το λογισμικό, για παράδειγμα, οι συναρτήσεις δεν είναι αφηρημένες μαθηματικές οντότητες, αλλά ένας πεπερασμένος κατάλογος αριθμών ή pixels που δίνουν μια κατά προσέγγιση τιμή.

Η παραδοσιακή προσέγγιση για την εισαγωγή στις αλγεβρικές εκφράσεις είναι υπολογιστική. Εντούτοις, λόγω της πολυπλοκότητας της εκτέλεσης τέτοιων υπολογισμών, αυτή η διαδικαστική όψη της συνάρτησης γρήγορα αντικαθίσταται με την άποψη της συνάρτησης ως αντικείμενο με αυτόματο πέρασμα στις εξισώσεις. Οι Schwartz και Yerushalmy (1992) θεωρούν ότι,

μέσω της δυνατότητας των πολλαπλώς συνδεδεμένων αναπαραστάσεων που προσφέρει η τεχνολογία, οι μαθητές μπορούν να συνεχίσουν να βλέπουν τις αναπαραστάσεις ως διαδικασία. Οι εξισώσεις μπορούν να αντιμετωπισθούν ως σύγκριση δύο συναρτήσεων, f(x)=g(x), με ανάλογη ερμηνεία των λύσεων των εξισώσεων. Η σύνδεση διαφόρων μορφών αναπαράστασης προσφέρει στους μαθητές την απαραίτητη ποιοτική και ποσοτική ανατροφοδότηση για την ενίσχυση της κατανόησης των συμβολικών χειρισμών τους.

Η ΔΙΑΧΡΟΝΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ

Αν υιοθετηθεί ο ορισμός των Bourbaki στο σχολείο, πρέπει να διδαχθούν πρώτα τα σύνολα και οι σχέσεις. Η επιλογή αυτή οδηγεί σε μια θεωρητική προσέγγιση των συναρτήσεων που οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν. Έρευνες έχουν δείξει ότι οι μαθητές κατανοούν τις μαθηματικές έννοιες όταν αυτές εισάγονται με τρόπους που ακολουθούν την ιστορική τους εξέλιξη. Η ιστορική εξέλιξη της έννοιας της συνάρτησης δείχνει ότι η συγκεκριμένη έννοια κατανοήθηκε αρχικά λειτουργικά ως σχέση μεταξύ μεταβλητών μεγεθών. Επιπλέον, τα εγχειρίδια που ορίζουν συχνά τη συνάρτηση ως σύνολο διαταγμένων ζευγών αρχίζουν συνήθως τη συζήτηση με τη σχέση και εισάγουν τη συνάρτηση ως ειδικό είδος σχέσης. Αλλά η σχέση είναι πιο αφηρημένη από τη συνάρτηση. Κατά συνέπεια η υποτιθέμενη παιδαγωγική αξία να πρέπει να μαθευτεί η σχέση πριν από τη συνάρτηση είναι, σύμφωνα με τη γνώμη του Thorpe (1989), λανθασμένη. Ο Freudenthal (1973) επίσης υποστήριξε έντονα ότι «για την εισαγωγή στη συνάρτηση, οι σχέσεις μπορούν να παραλειφθούν» (σελ. 392).

Στην πορεία των αιώνων, η αντίληψη σχετικά με τη συνάρτηση άλλαξε:

- από ένα πραγματικό φαινόμενο που βιώνεται μέσω της μελέτης, παραδείγματος χάριν της κίνησης, σε μια αυθαίρετη έννοια.
- από μια σχέση εξάρτησης μεταξύ μεταβλητών, σε μια αντιστοιχία μεταξύ αυθαίρετων συνόλων
- από μια διαδικαστική, σε μια δομική θεώρηση.
- από μια γεωμετρική, σε μια συμβολική αναπαράσταση.

Εντούτοις, η σημασία της για τα μαθηματικά και τις επιστήμες γενικότερα, δεν αμφισβητήθηκε ποτέ. « *Οι συναρτήσεις και τα μοτίβα είναι ένα από τα κεντρικά θέματα των μαθηματικών γενικά*» (NCTM, 1989 σελ. 98). «Η έννοια της συνάρτησης είναι πιθανώς η σημαντικότερη ιδέα στα μαθημα-

τικά… ενσωματωμένη σε πολλά σημεία των προγραμμάτων άλγεβρας και γεωμετρίας σήμερα» (Froelich, Bartkovich, & Foerester 1991 σελ. 1).

Εκείνο που αμφισβητήθηκε και προκάλεσε έντονες αντιπαραθέσεις ήταν ο τρόπος παρουσίασής της στα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών και στα σχολικά εγχειρίδια.

Η προνομιούχος θέση της συνάρτησης στα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών, οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στον Felix Klein καθηγητή των μαθηματικών στο πανεπιστήμιο του Gottingen στη Γερμανία. Το 1893 σε μια διάλεξη που έδωσε στο International Congress of Mathematicians στο Chicago, υπογράμμισε τη ζωτική σημασία της έννοιας της συνάρτησης για τα σχολικά μαθηματικά. Κατά τη διάρκεια του International Conference of Mathematicians στη Ρώμη το 1908, επανέλαβε ότι η έννοια της συνάρτησης «δεν ήταν, απλά μια μαθηματική μέθοδος, αλλά η καρδιά και η ψυχή της μαθηματικής σκέψης» (Hamley, 1934 σελ. 53). Την άποψη αυτή συμμερίστηκαν σημαντικοί μαθηματικοί εκείνης της εποχής, όπως ο H. Moore, ο D. E. Smith και ο E. R. Hendrick. Οι δυο τελευταίοι, διετέλεσαν ιδρυτικά στελέχη της National Committee on Mathematical Requirements (NCMR), η οποία το 1923 σε μια αναφορά με τίτλο «Η έννοια της συνάρτησης στα μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης» υπογράμμιζαν τον κομβικό ρόλο της συγκεκριμένης έννοιας και των γραφικών αναπαραστάσεων για τα σχολικά μαθηματικά. (NCMR 1923, σελ. 38). Η συνάρτηση θεωρήθηκε ως «ενοποιητική» έννοια στη λογική ότι μπορούσε να συνδέσει όχι μόνο διάφορες περιοχές των μαθηματικών, αλλά να λειτουργήσει ως ενοποιητικός κρίκος γι' αυτό που σήμερα θα ονομάζαμε διεπιστημονική προσέγγιση. Εντούτοις, την εποχή εκείνη, υπήρχε δυσκολία στην υλοποίηση μιας τέτοιας πρωτοποριακής πρότασης. Παρά το ότι ήδη από το 1920 είχε δημιουργηθεί το NCTM, υπό την αιγίδα αρχικά της MAA, οι διαφορές μεταξύ ερευνητών μαθηματικών και εκπαιδευτικών μαθηματικών εμπόδισαν να πραγματοποιηθεί η συγκεκριμένη μεταρρυθμιστική πρόταση.

Επιπλέον, σύμφωνα με τον Kleiner (1989), το πρόβλημα με την έννοια της συνάρτησης, την περίοδο εκείνη ήταν ότι δεν υπήρχε συναίνεση ως προς τον τρόπο που θα εισαγόταν: με μια γεωμετρική μορφή (υπό μορφή καμπύλης), αλγεβρικά (υπό μορφή τύπου-«αναλυτική έκφραση»), ή λογικά (υπό μορφή ορισμού);

Το 1938 εμφανίζεται ένα κείμενο του E. R. Hedrick στο *The American Mathematical Monthly*, με τίτλο *Function Concept in Elementary Teaching and in Advanced Mathematics*, που αναλύει λεπτομερώς το ρόλο των συναρτήσεων στα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών στοιχειώδους και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Επιπλέον συνιστά ένα είδος απάντησης στις

απόψεις των οπαδών της προοδευτικής εκπαίδευσης (με τους Dewey και Kilpatrick ως βασικότερους εκπροσώπους) σχετικά με τη χρησιμότητα του μαθηματικού τρόπου σκέψης στην καθημερινή ζωή: «Μπορούμε να ενσωματώσουμε τη μαθηματική διδασκαλία με τη ζωή και με την επιστήμη; Μπορούμε πράγματι ... εάν επιλέξουμε την έννοια της συνάρτησης ως κεντρικό θέμα» (Hedrick, 1938 σελ. 448).

Θεωρούμε αυτό το κείμενο εξαιρετικής σημασίας λόγω του ότι παρέχει ιδέες για τον τρόπο ενσωμάτωσης της έννοιας της συνάρτησης ακόμα και στα σύγχρονα εγχειρίδια, γι' αυτό και θα σχολιάσουμε αρκετά σημεία του.

Ο Hedrick προσδιορίζει τη συνάρτηση ως μια μορφή εξάρτησης μιας ποσότητας από άλλες ποσότητες, άποψη που διαφέρει από τον συνολοθεωρητικό ορισμό των Bourbaki. Από τη στιγμή που επιλέγεται αυτός ο ορισμός, γράφει ο Hedrick, προκύπτουν δυο ερωτήματα:

(1) Από ποιες ποσότητες εξαρτάται η ποσότητα που διερευνούμε; και

(2) Ποιος είναι ο ακριβής τρόπος εξάρτησης;

Υποστηρίζει ότι η καλλιέργεια της «*λειτουργικής σκέψης*» των μαθητών επιτυγχάνεται οποιαδήποτε από τις δύο αυτές ερωτήσεις τεθούν και συζητηθούν στη τάξη.

Μισόν αιώνα μετά τον Hedrick, οι ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης φαίνεται να διατυπώνουν την ίδια άποψη: «Η μάθηση των συναρτήσεων και η επιτυχής χρησιμοποίησή τους για την επίλυση προβλημάτων απαιτεί μια διανοητική ικανότητα που συνίσταται στα εξής: (1) Παρατήρηση, τεκμηριωμένη αναζήτηση, δημιουργία και αναπαραγωγή των εξαρτήσεων μεταξύ των μεταβλητών, και (2) Διατύπωση και έλεγχος παραδοχών σχετικά με το είδος της εξάρτησης. Αυτή η διανοητική ικανότητα ονομάζεται «*λειτουργική σκέψη*» (*functional thinking)* και ήταν βασική έννοια για τη μαθηματική εκπαίδευση ήδη από το 1905» (Vollrath, 1986 σελ. 387)

Για τον Hedrick, η λειτουργική σκέψη μπορεί να τεθεί ως στόχος ακόμα και στην στοιχειώδη εκπαίδευση, χωρίς απαραίτητα να γίνει χρήση της λέξης «συνάρτηση». Εάν ένα μήλο κοστίζει 20 σεντς, πόσο θα κοστίσουν τα πέντε; Κάθε τέτοια ερώτηση στην αριθμητική συσχετίζει δυο ή περισσότερες ποσότητες. Το πρόβλημα μπορεί να φαίνεται υπερβολικά απλό, εντούτοις ξεκινώντας από τέτοιες απλές καταστάσεις γεννιέται η ιδέα της αλληλεξάρτησης δυο ποσοτήτων στο μυαλό. Επιπλέον η επιλογή του στοιχείου που καθορίζει την απάντηση δεν είναι πάντα προφανής. Η ερώτηση: «Τι χρειάζεται να ξέρουμε;», είναι κρίσιμη για τη συνειδητοποίηση των αλληλοεξαρτημένων ποσοτήτων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση: Την τιμή του ενός μήλου

και τον αριθμό των μήλων. Χρειάζεται, δηλαδή, να συνειδητοποιήσουμε ποιες είναι οι ποσότητες που συσχετίζονται.

Η περίπτωση της άλγεβρας δεν είναι πολύ διαφορετική. Η κλασική, παραδοσιακή διδασκαλία δίνει κυρίως έμφαση σε φορμαλισμούς που απέχουν πολύ από τη λειτουργική σκέψη. Και όμως, η λειτουργική σκέψη θα μπορούσε να αναπτυχθεί με κατάλληλο διδακτικό χειρισμό των εξισώσεων. Στην πραγματικότητα η αναζήτηση οποιασδήποτε εξίσωσης κινητοποιεί τη λειτουργική σκέψη. Η τιμή του αγνώστου επιδιώκεται πάντα μέσω κάποιων άλλων ποσοτήτων που συσχετίζονται με τον άγνωστο. Φτιάχνουμε την εξίσωση εκφράζοντας *πάντα* τη σύνδεση μεταξύ των γνωστών και άγνωστων ποσοτήτων. Αυτός είναι ο βασικός στόχος της διδασκαλίας των εξισώσεων. Οι μαθητές δυσκολεύονται να λύσουν προβλήματα εξισώσεων διότι δεν κατανοούν το κείμενο που περιγράφει τον τρόπο σύνδεσης των ποσοτήτων.

Οι απόψεις αυτές του Hedrick για τη διδασκαλία της άλγεβρας έχουν βρει στις μέρες μας σχεδόν απόλυτη εφαρμογή. Σήμερα, υπάρχει πολύ ενδιαφέρον για την παρουσίαση και διδασκαλία της άλγεβρας μέσα από μια προσέγγιση που στηρίζεται στην ιδέα της συνάρτησης (function-based approach). Το εγχείρημα διευκολύνεται από τα εργαλεία που παρέχονται από την τεχνολογία, δεδομένου ότι η συμπεριφορά των συναρτήσεων μπορεί να εξερευνηθεί με ποικίλους τρόπους χρησιμοποιώντας κατάλληλο λογισμικό υπολογιστών: «Οι υπολογιστές παρέχουν στους δασκάλους και τους μαθητές νέα εργαλεία που τους βοηθούν στην κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των ποσοτήτων, μέσω της χρήσης γραφικών, και αλγεβρικών αναπαραστάσεων. Συνεπώς, η τεχνολογία παρέχει ένα όχημα στους μαθητές για να αναπτύξουν μια βαθύτερη κατανόηση των συναρτήσεων επιτρέποντας μια εστίαση στην αναπαράσταση χωρίς κουραστικούς υπολογισμούς» (Cooney & Wilson, 1993 σελ. 146).

Κάτω από την επίδραση της θεωρίας των Ρεαλιστικών Μαθηματικών, η διερεύνηση και ανάδειξη της σχέσης μεταξύ ποσοτήτων επιχειρείται κυρίως μέσα από πραγματικά προβλήματα, επιλογή που μπορεί να συμβάλει ουσιαστικά σε μια σημαντική δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην άλγεβρα: «οι περισσότεροι μαθητές δεν γίνονται ποτέ ιδιαίτερα ικανοί στην άλγεβρα και ακόμη και εκείνοι που τα καταφέρνουν στο χειρισμό των συμβολικών εκφράσεων, συχνά μπλοκάρουν όταν βρίσκονται αντιμέτωποι με έναν στόχο που απαιτεί την εφαρμογή εκείνων των δεξιοτήτων σε καταστάσεις ρεαλιστικής πολυπλοκότητας» (Fey, 1989 σελ. 199)

Τα καινούργια προγράμματα σπουδών για τα μαθηματικά στην Ολλανδία, αλλά και εκείνα που προορίζονται για Αμερικανούς μαθητές και γράφτηκαν λαμβάνοντας υπ' όψη τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά (RME) και τα

Standards του NCTM (MiC curriculum) εστιάζουν την άλγεβρα «στη μελέτη των σχέσεων μεταξύ των ποσοτήτων, με τη χρήση λεκτικών περιγραφών (φυσική γλώσσα), πινάκων, γραφικών παραστάσεων και τύπων, δίνοντας εκτενή προσοχή στο ρόλο των μεταβλητών. Η άλγεβρα χρησιμοποιείται ως γλώσσα για να περιγράψει τις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων (functional perspective) και για την περιγραφή αριθμητικών ή γεωμετρικών κανονικοτήτων (generalization perspective)»(van der Kooij 2001, σελ. 38). Βασικός στόχος της διδασκαλίας είναι η μελέτη των σχέσεων μεταξύ των μεταβλητών (η μελέτη της συμμεταβλητότητας). Οι μαθητές μαθαίνουν πώς να περιγράφουν αυτές τις σχέσεις με ποικίλες αναπαραστάσεις, και πως να συνδέουν τις αναπαραστάσεις. Συγκεκριμένα στο πρόγραμμα σπουδών «Mathematics in Context» (MiC curriculum) οι ενότητες της άλγεβρας είναι οργανωμένες γύρω από τρία θέματα.

Το πρώτο θέμα ονομάζεται *Εκφράσεις και Τύποι* και περιλαμβάνει την αναγνώριση, την ανακάλυψη, και έπειτα την περιγραφή γεωμετρικών και αριθμητικών κανονικοτήτων. Οι βασικές έννοιες που απαιτούνται για τα αλγεβρικά μοτίβα είναι: μεταβλητές, τυπικές εκφράσεις, εξισώσεις, και ανισότητες.

Το δεύτερο θέμα *Εξισώσεις και Ανισότητες* εστιάζει στους περιορισμούς στις τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή. Οι περιορισμοί που επιβάλλονται από την κατάσταση που περιγράφεται στο πρόβλημα οδηγούν στις εξισώσεις και τις ανισότητες που αναπαριστούν το πρόβλημα. Εξετάζονται κυρίως γραμμικές εξισώσεις και οι μαθητές *μαθαίνουν* να ερμηνεύουν και να επικυρώνουν τη λύση λαμβάνοντας υπόψη το πλαίσιο της μαθηματικής εξίσωσης ή της ανισότητας, καθώς επίσης και το πραγματικό πλαίσιο του προβλήματος. *Το θέμα Γραφικές Παραστάσεις* εξετάζει τις δυναμικές διαδικασίες. Μια δυναμική διαδικασία εστιάζει στην αλλαγή, ειδικά στην αλλαγή κατά τη διάρκεια του χρόνου.

Για τον Hedrick, στη γεωμετρία, η λειτουργική σκέψη εμφανίζεται στη μορφή των τύπων. Το ότι το εμβαδόν ενός τετραγώνου είναι το τετράγωνο της πλευράς του είναι μια χαρακτηριστική περίπτωση. Υπάρχουν και άλλες ενδιαφέρουσες ιδέες στη γεωμετρία. Για παράδειγμα, αν το τρίγωνο καθορίζεται από δύο πλευρές και τη περιεχόμενη γωνία, οι άλλες πλευρές *πρέπει να είναι συναρτήσεις* των τριών δεδομένων στοιχείων. Αυτή είναι, για τον Hedrick, πραγματική γεωμετρία.

Στην αναλυτική γεωμετρία, τώρα, αυτό που έχει σημασία είναι να μπορεί κάποιος να δείξει γραφικά το είδος της σχέσης που περιγράφεται από μια εξίσωση. Δεν χρειάζεται να επιλέξει κάποιος δύσκολες εξισώσεις για να

ασκηθούν οι μαθητές στη λειτουργική σκέψη. Αρκούν εξισώσεις της μορφής xy =k, y =nx, y =(ax+b)/(cx+d), y =sinx, κλπ.

Εάν αυτές οι εξισώσεις συνδεθούν και με αντίστοιχες καταστάσεις από τη φυσική, τότε η λειτουργική σκέψη θα ενισχυθεί ακόμη περισσότερο.

Σύμφωνα με τον Hedrick η καλλιέργεια της λειτουργικής σκέψης μπορεί να γίνει σε όλα τα επίπεδα της εκπαίδευσης. Για παράδειγμα, στη Β΄ λυκείου υπάρχουν αναφορές σε εφαπτομένη κύκλου, έλλειψης και υπερβολής (κυρίως εξισώσεις εφαπτόμενων). Η κατασκευή τους δεν γίνεται με χρήση ειδικών οργάνων κατασκευής εφαπτόμενων, αλλά μέσα από ιδιότητες που αποκαλύπτονται στις ιδιότητες των γραμμών. Δεν υπάρχει αναφορά στον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης. Αυτό που έχει σημασία είναι να κατανοήσουν οι μαθητές ότι η παράγωγος μιας συνάρτησης αναπαριστά το ρυθμό μεταβολής. Η εύρεση των εξισώσεων των εφαπτόμενων στις καμπύλες δεν είναι από μόνη της ιδιαίτερα σημαντική: το σημαντικό είναι η εύρεση της κλίσης της εφαπτομένης και η συνειδητοποίηση του νοήματός της. Αλλά ακόμα και στη μελέτη της ευθείας στη Β΄ Γυμνασίου δεν γίνεται καμία σύνδεση της κλίσης με την πρακτική της αξία. Είναι εύκολο να ισχυρίζεται ένα εγχειρίδιο ότι δίνει έμφαση στη λειτουργική σκέψη, αλλά όταν τα παραδείγματα που δίνονται είναι οι γνωστές ελλείψεις και υπερβολές, μπορεί κάποιος να αμφισβητήσει αυτές τις καλές προθέσεις. Από την άλλη, υπάρχουν πολλά καλά παραδείγματα που βασίζονται στις ψ=αx, ψ=α, ψ=e^x, ψ=ημx, όπου υπάρχει μεγαλύτερη πιθανότητα οι μαθητές να αποκτήσουν λειτουργική σκέψη. Εάν για παράδειγμα υπάρξει συζήτηση για ρυθμούς μεταβολής (δηλ παραγώγους), και παραγώγους συναρτήσεων θέσης και ταχύτητας (δηλ νέες συναρτήσεις), υπάρχει περισσότερη πιθανότητα εξάσκησης της λειτουργικής σκέψης

ΞΑΝΑΓΥΡΙΖΟΝΤΑΣ ΣΤΗΝ ΑΡΧΗ. ΤΕΛΙΚΑ, ΠΩΣ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΟΝΤΑΙ ΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ;

Στις αρχές του προηγούμενου αιώνα, ο Felix Klein στο βιβλίο του «Elementary mathematics from a higher standpoint», υποστήριξε ως απαραίτητη μια επανεισαγωγή των γεωμετρικών και οπτικών πτυχών των μαθηματικών εννοιών, με το σκεπτικό ότι μια καθαρά φορμαλιστική προσέγγιση δεν μπορεί να παρέχει μια αποδεκτή βάση για τη μαθηματική εκπαίδευση των μαθητών. Μια ιδιαίτερη έκφραση αυτής της μεταρρυθμιστικής ιδέας ήταν η έμφαση στη «λειτουργική σκέψη» ως ένας από τους σημαντικότερους στόχους των σχολικών μαθηματικών.

Περίπου σαράντα χρόνια μετά, με τη μεταρρύθμιση των νέων μαθηματικών η παραδοσιακή πτυχή της έννοιας της συνάρτησης ως «σχέσης μεταξύ με-

γεθών» υποτιμήθηκε. Είναι χαρακτηριστική η δήλωση του Max Beberman (1958),επικεφαλής της Committee on School Mathematics (UICSM), που ανέλαβε να αποκαταστήσει το κύρος των καθαρών μαθηματικών, απαλλάσσοντας τα από κάθε ασάφεια οφειλόμενη στη συσχέτισή τους με την καθημερινή λογική: «Από τη σκοπιά της σημειολογίας όπου κάθε ουσιαστικό οφείλει να έχει ένα σημαίνον μας οδήγησε να δώσουμε ακριβείς περιγραφές των σχέσεων και των συναρτήσεων. Η συνήθης ασάφεια που περιβάλλει τη λέξη συνάρτηση εξαφανίζεται όταν ένας μαθητής συνειδητοποιεί ότι μια συνάρτηση είναι μια οντότητα, ένα σύνολο διαταγμένων ζευγών, στα οποία δυο ζεύγη δεν έχουν κοινό πρώτο μέλος» (σελ. 22). Ο ανωτέρω ορισμός μοιάζει έντονα με αυτόν των Bourbaki.

Η κίνηση των «Νέων Μαθηματικών» στις δεκαετίες του ’60 και ’70, συνέδεσε τις συναρτήσεις με τη συνολοθεωρία, ορίζοντάς τες ως αντιστοιχία μεταξύ δύο συνόλων ή ως σύνολα διαταγμένων ζευγών. Οι υποστηρικτές της κίνησης χρησιμοποίησαν το επιχείρημα της ακρίβειας και γενίκευσης που προσφέρει ένας τέτοιος ορισμός. Σύμφωνα με αυτή τη λογική, αν και ένας πίνακας, μια γραφική παράσταση, ή μια λεκτική περιγραφή περιγράφουν μια συνάρτηση, τίποτα από αυτά δεν μπορεί να θεωρηθεί συνάρτηση. Αντίθετα, οι επικριτές της κίνησης στήριζαν τη διαφωνία τους-μεταξύ άλλων-, στο επιχείρημα ότι «αυτή η προσέγγιση δίνει στους μαθητές μια «στατική» αίσθηση της έννοιας της συνάρτησης και δεν εξετάζει την αφθονία των λειτουργικών σχέσεων που είναι ως στόχος πολύ σημαντικότερος» (Cooney, 1996).

Κάποιοι (Thorpe,1989 σελ. 13) χαρακτήρισαν την έμφαση στον συνολοθεωρητικό ορισμό της συνάρτησης σαν ένα από τα «μεγάλα» λάθη της κίνησης των «Νέων Μαθηματικών».

Ο Vinner (1983, 1992) υποστήριξε ότι οι ορισμοί μπορεί να αποτελέσουν εμπόδιο στη μάθηση των μαθηματικών εννοιών και ότι υπάρχει μια σύγκρουση μεταξύ της αυστηρής δομής των μαθηματικών και τη γνωστική διαδικασία της απόκτησης μιας μαθηματικής έννοιας. Οι μαθητές μπορεί να είναι ικανοί να διατυπώσουν έναν ορισμό μιας έννοιας, αλλά το να κατανοήσουν το νόημα μιας έννοιας είναι ένα πολύ δύσκολο γνωστικό εγχείρημα.

Είκοσι χρόνια μετά την κίνηση των «Νέων Μαθηματικών», το 1980, το NCTM δημοσίευσε την *Agenda For Action* που καθόρισε ως εστιακό σημείο στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών την επίλυση προβλήματος. Σχετικά με την συνάρτηση, αποφασίσθηκε «να διασφαλισθεί μια ισχυρή εννοιολογική βάση πριν να παρουσιασθεί η συνάρτηση με την τυπική

γλώσσα και τον τυπικό συμβολισμό…η μελέτη των συναρτήσεων πρέπει να στηριχθεί στις εμπειρίες των μαθητών (NCTM Standard, 1989 σελ. 154).

Οι ερευνητές συμφωνούν στο ότι οι μαθητές πρέπει να έχουν την ευκαιρία να εκτιμήσουν το βαθμό στον οποίον οι συναρτήσεις μπορούν να περιγράφουν σχέσεις στον πραγματικό κόσμο, και οι οποίες μπορούν να απεικονισθούν μέσω των γραφικών παραστάσεων, πριν περάσουν σε πιο φορμαλιστικές θεωρήσεις. «Οι μαθητές πρέπει να ενδιαφερθούν για τη μεταβλητότητα και την αναζήτηση κανονικοτήτων, πριν να παρουσιασθούν οι ορισμοί και οι κλασικές συναρτήσεις» (Sierpinska, 1992 σελ. 32). Οι Dreyfus και Eisenberg (1982) ομοίως πρότειναν να εισαχθούν οι συναρτήσεις κατά τέτοιο τρόπο ώστε να χρησιμοποιηθούν η διαίσθηση και η εμπειρία των μαθητών. Το πόσο αυτό είναι εφικτό δεδομένης της προ-παιδείας των δασκάλων τους στην κουλτούρα των συνολοθεωρητικών μαθηματικών, αποτελεί ζήτημα προς διερεύνηση.

Εύκολα μπορεί να παρατηρήσει κάποιος ότι ο τρόπος που προτείνεται να εισάγεται σήμερα η συνάρτηση δεν διαφέρει -σε γενικές γραμμές- από εκείνον που αναπτύχθηκε αρχικά από τον Γαλιλαίο όταν μελέτησε τα φυσικά προβλήματα της κίνησης. Οι σύγχρονες τάσεις στη μελέτη της συνάρτησης στα σχολικά μαθηματικά όπως η μοντελοποίηση, η ανάλυση στοιχείων, η σύνδεση με τον πραγματικό κόσμο και οι διεπιστημονικές εφαρμογές δεν είναι νέες ιδέες. Ούτε και ο στόχος της εσωτερικής σύνδεσης των μαθηματικών εννοιών μέσω της συνάρτησης είναι καινούργιος. Είχε διατυπωθεί από τον Klein το 1908, πριν από ακριβώς εκατό χρόνια. Εκείνο που έχει αλλάξει, ίσως, είναι οι συνθήκες που φαίνεται να ευνοούν σήμερα την πραγματοποίηση του στόχου. Η παροχή εργαλείων από τη σκοπιά της τεχνολογίας και η επίσημη αποδοχή μέσω των προγραμμάτων σπουδών αυτού του τύπου προσέγγισης αποτελούν ευοίωνες προϋποθέσεις. Επειδή, όμως, η έρευνα έχει δείξει ότι ο τρόπος που διδάσκεται μια έννοια έχει άμεση σχέση με τον τρόπο που αυτή η έννοια παρουσιάζεται στα εγχειρίδια και με τις γνώσεις, αντιλήψεις και πεποιθήσεις των δασκάλων και καθηγητών απαιτείται συστηματική διερεύνηση και των δυο αυτών παραμέτρων.

ΑΝΤΙ ΕΠΙΛΟΓΟΥ

Η έννοια της συνάρτησης είναι μια σύνθετη έννοια. Κατ' αρχήν γιατί υπάρχουν πολλοί τρόποι αναπαράστασής της (γραφικές παραστάσεις, βελοδιαγράμματα, τύποι, πίνακες, συμβολικές εκφράσεις, λεκτικές περιγραφές, διατεταγμένα ζεύγη) καθένας από τους οποίους υποστηρίζει και μια διαφορετική πτυχή της έννοιας. Η κατανόηση της έννοιας προϋποθέτει την κατασκευή πολλαπλών αλληλοσυνδεόμενων (με την έννοια της ικανότητας με-

τάφρασης από μια μορφή αναπαράστασης σε μια άλλη) νοητικών αναπαραστάσεων. Δεύτερον, η έννοια της συνάρτησης εμπεριέχει ένα σύνολο άλλων εννοιών (πεδίο ορισμού, πεδίο τιμών, αντιστροφή, σύνθεση κλπ) και συνδέεται άμεσα με άλλες έννοιες (ποσότητα, μεταβλητή, λόγος κλπ) των οποίων το νόημα δεν είναι προφανές για τους μαθητές. Δεν μπορείς να συζητήσεις για τη συνάρτηση χωρίς αναφορά σε αυτές τις έννοιες. Τρίτον υπάρχουν πολλοί ορισμοί για τη συνάρτηση (σχέση εξάρτησης, αντιστοίχηση, σύνολο διατεταγμένων ζευγών) που παρά το γεγονός ότι είναι μαθηματικά ισοδύναμοι, δεν είναι γνωστικά ισοδύναμοι.

Όλες αυτές οι δυσκολίες κάνουν τη διατύπωση μιας διδακτικής πρότασης -και κατά προέκταση την διατύπωση μιας άποψης για τον τρόπο παρουσίασης της έννοιας στα σχολικά εγχειρίδια-, ένα εξαιρετικά δύσκολο εγχείρημα.

Τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών- σε σχέση με την έννοια της συνάρτησης- θα μπορούσαν να αναλυθούν ως προς την «μαθηματική» και ως προς την «παιδαγωγική» τους διάσταση. Συγκεκριμένα, όσον αφορά το μαθηματικό περιεχόμενο η ανάλυση θα μπορούσε να γίνει ως προς τους εξής άξονες:

1) Τυπικές και άτυπες μορφές διαπραγμάτευσης της έννοιας στις διάφορες βαθμίδες της εκπαίδευσης
2) Τρόπος σύνδεσης λειτουργικής και δομικής φύσης της έννοιας
3) Μορφές αναπαράστασης και τρόποι σύνδεσης αυτών των μορφών
4) Εσωτερικές συνδέσεις με άλλες μαθηματικές περιοχές (εξισώσεις, ανισώσεις, μοτίβα, γεωμετρία κ.α.),
5) Εξωτερικές συνδέσεις με άλλα επιστημονικά πεδία όπως οι Φυσικές επιστήμες, η Οικονομία κ.α.
6) Χρήση της έννοιας σε πραγματικά προβλήματα (π.χ. μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων μέσω συναρτήσεων),

Όσον αφορά την «παιδαγωγική» διάσταση ενδιαφέρον θα ήταν να διερευνηθεί το κατά πόσο είναι συνεπή τα νέα σχολικά εγχειρίδια με τη θεωρία μάθησης του κοινωνικού κονστρουκτιβισμού που υιοθετείται από το Π.Ι. Ποιος είναι ο ρόλος της γλώσσας που *χρησιμοποιούν; (*για παράδειγμα «προστάζουν» ή «προτρέπουν», επιβάλουν ορισμούς και διαδικασίες ή καθοδηγούν σε μια διαδικασία επανεφεύρεσης, διευκολύνουν τη συνεργατική μάθηση ή περιορίζονται σε ατομικές αλγοριθμικές δραστηριότητες;) Ποιες είναι οι γλωσσικές απαιτήσεις και πόσο αντιστοιχούν στις ικανότητες και τις εμπειρίες των μαθητών; Ποιους ρόλους αναδεικνύουν για καθηγητές και

μαθητές; Υπάρχει επιβολή ενός μονοδιάστατου πολιτισμικού πλαισίου ή αναδεικνύουν ένα πλουραλιστικό πλαίσιο με στοιχεία από διάφορες κοινωνικοπολιτισμικές ταυτότητες;

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Balacheff, N. (1993). Artificial intelligence and real teaching. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology* (131-15). Berlin: Springer.

Beberman, M. (1958). *An emerging program of secondary mathematics*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Biehler, R. (2005). Reconstruction of Meaning as a Didactical Task: The Concept of Function as an Example, in *Meaning in Mathematics Education*, 61-81, Springer US

Bishop, A.J., Clements, K., Keitel, Ch., Kilpatrick, J. and Laborde, C. (Eds.) (1996). *International Handbook on Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Boero, P. (1992). The crucial role of semantic fields in the development of problem solving skills in the school environment. In J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos & D. Femandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies: Research in contexts of practice* (pp. 77-91). Berlin: Springer.

Cooney, T. J., & Wilson, M. R. (1993). Teachers' thinking about functions: Historical and research perspectives. In T. A. Romberg, E. Fennema, & T. P. Carpenter (Eds.) *Integrating research of the graphical representation of functions*. (pp. 131- 158). Hillsdale, NJ: Lawrence Eribaum.

Cooney, T. (1996). Developing a topic across the curriculum: functions. In T. Cooney, S. Brown, J. Dossey, G. Schrage, & E. Wittman. (Eds.), Mathematics, pedagogy, and secondary teacher education. (pp. 27 - 96), Portsmouth, NH: Heinemann.

Davis, R. B. (1975). Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations. *Journal of Children's mathematical Behavior* 1(3), 7–35.

Dreyfus, T, & Eisenberg, T. (1982). Intuitive functional concepts: A baseline study on intuitions. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*, 360-380.

Fey, J. (1989). School Algebra for the year 2000. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), Research issues in the learning and teaching of algebra (pp.199 - 213), Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics* 3, 413–435.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*, Dordrecht: Reidel..

Freudenthal, H. (1982). Variables and functions. In *Proceedings of the Workshop on Functions,* Organized by the Foundation for Curriculum Development, Enschede.

Freudenthal, H.(1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* D. Reidel, Dordrecht.

Froelich, G. W., Bartkovich, K. G., & Foerester, P. A. (1991). Connecting mathematics. In C. R. Hirsch (Eds.) *Curriculum and evaluation standards for school mathematics addenda series, grades 9 - 12.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hamley (1934). *Functional and Relational Thinking in Mathematics*. New York: Teachers College Press.

Hedrick, E. R. (1938). Function Concept in Elementary Teaching and in Advanced Mathematics. *The American Mathematical Monthly,* 45(7), 448-455.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.) *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 167-194). Reston, VA: NCTM.

Kaput. J.J.(1994). The representational roles of technology in connecting mathematics with authentic experience. In R. Biehler, R.W. Scholz, R. Sträßer, B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 379–397). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht,

Kleiner, I.(1989). Evolution of the Function Concept: a Brief Survey. *College Math. Jour.* 20, 282-300.

National Committee on Mathematical Requirements. (1923). *The reorganization of mathematics in secondary education.* Oberlin, OH: Mathematical Association of America.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The Author.

Schwartz, J & Yerushalmy, M. (1992). Getting students to function in and with algebra. . In Harel, G and Dubinsky, E. (Eds.). *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy* (pp.261-289). West LaFayette. IN: Mathematical Association of America..

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 191-228.

Sfard, A.(1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1–36.

Sierpinska, A. (1992). On Understanding the notion of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 25-58). MAA Notes no. 25. Washington DC: Mathematical Association of America.

Shuard, H. & Neill, H. (1977). *The mathematics curriculum: From graphs to calculus*. London: Blackie.

Steen, L. A. (Ed.) (1990). *On the shoulders ofgiants*. Washington: National Academy Press.

Thorpe, J. (1989). Algebra: What should be teach and how should we teach it? In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp.11-24). *Reston,* VA: NCTM.

Van der Kooij, H. (2001). Modelling and algebra: How 'pure' shall we be? In J.F. Matos, W. Blum (Eds.) *Modelling and Mathematics Education ICTMA9: Applications in Science and Technology* (pp 171-184).Horwood Publishing, Chichester, England.

Vergnaud, G. (1990). Epistemology and psychology of mathematics education. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 14-30). Cambridge: Cambridge University Press.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notation of function. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology* 14(3), 293-305.

Vinner, S. (1992). The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. In G. Hard & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 195-2 13). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Vollrath, H. J. (1986). Search strategies as indicators of functional thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 17(4), 387-400.

ΑΝΟΙΓΕΙ Ο ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΤΗΝ ΠΟΡΤΑ ΤΗΣ ΣΧΟΛΙΚΗΣ ΤΟΥ ΤΑΞΗΣ ΣΤΑ ΝΕΑ ΒΙΒΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ;

Ελισσάβετ Καμπάνη

Σχολική Σύμβουλος Μαθηματικών Γ΄ Διεύθυνση Αθήνας

Η παρούσα εργασία εξετάζει τον τρόπο με τον οποίο τρεις καθηγητές του Γυμνασίου ενσωματώνουν στην καθημερινή διδακτική πρακτική τους τα νέα βιβλία Μαθηματικών. Διερευνώνται οι διαφορές που υπάρχουν από τάξη σε τάξη, η ενδεχόμενη διάσταση ανάμεσα στις δηλώσεις και στην πρακτική των καθηγητών και η ετοιμότητα υιοθέτησης καινοτομιών που περιέχονται στα βιβλία. Διαπιστώνεται ότι, κάθε καθηγητής αναδεικνύει και χρησιμοποιεί εκείνες τις πλευρές του βιβλίου που βρίσκονται πλησιέστερα στα ενδιαφέροντά του, ενώ ελάχιστα επηρεάζεται ως προς τη διδακτική του μεθοδολογία.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τη σχολική χρονιά 2007 – 2008 εισάγονται στο Γυμνάσιο τα νέα βιβλία των Μαθηματικών προτείνοντας μια διαφορετική φιλοσοφία από τα προηγούμενα. Μια φιλοσοφία που θεωρεί την κατάκτηση της γνώσης ως «διαδικασία δόμησης», υιοθετεί την «ενεργητική συμμετοχή» του μαθητή, τη «διαθεματικότητα» και την «επίλυση του προβλήματος». Συγκεκριμένα, στο βιβλίο του καθηγητή που συνοδεύει το βιβλίο της Α΄ τάξης αναφέρεται ότι «βασικό άξονα διδασκαλίας πρέπει να αποτελούν η εξερεύνηση καταστάσεων, η ανακάλυψη νέων γνώσεων, η ερμηνεία των ήδη αποκτημένων γνώσεων και η βαθύτερη κατανόηση και συσχέτιση τους». Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι, η εισαγωγή των βιβλίων δίνει την επίσημη αφορμή για να ανοίξει μια μεγάλη συζήτηση μεταξύ των καθηγητών (και όχι μόνο) που να αφορά σε θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών και εφαρμογής τους στη σχολική τάξη.

Η σημασία του εγχειριδίου των Μαθηματικών στη διδασκαλία είναι διεθνώς αναγνωρισμένη. Έρευνα δείχνει ότι «το σχολικό βιβλίο αποτελεί θεμέλιο της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Κατά μέσο όρο, τα δύο τρίτα των καθηγητών (της έρευνας) έχουν ως κύρια βάση για τα μαθήματά τους το βιβλίο ενώ

για το ένα τρίτο λειτουργεί ως συμπληρωματική πηγή πληροφοριών» (TIMSS Video Study 2007). Στη Σουηδία διεξάγεται ένας ευρύς διάλογος σχετικά με την υπερβολική εξάρτηση της διδασκαλίας από το σχολικό βιβλίο. Στα πλαίσιά του αξιολογήθηκαν τα σχολεία και προέκυψε ότι, περισσότερο από κάθε άλλο γνωστικό αντικείμενο, η διδασκαλία των Μαθηματικών βασίζεται στα σχολικά βιβλία (Johansson, 2006). Συγκεκριμένα, «για τους μαθητές και τους καθηγητές τα Μαθηματικά είναι αυτά που αναγράφονται στο σχολικό βιβλίο και το περιεχόμενο όπως και η οργάνωση της διδασκαλίας καθορίζονται σε μεγάλο βαθμό από αυτό» (Johansson, 2006). Όμως, και σε επίπεδο διδακτικής, τα βιβλία αποτελούν για τους καθηγητές βασική πηγή πληροφοριών σχετικά με το πώς πρέπει να παρουσιαστεί το μαθηματικό περιεχόμενο (Schmidt et al., 2001)

Δεδομένης της σημασίας των βιβλίων των Μαθηματικών για τη διδασκαλία και της πρόσφατης ανανέωσής τους στη χώρα μας, τόσο στο περιεχόμενο όσο και στη φιλοσοφία, είναι φυσικό να μας απασχολεί το κρίσιμο ερώτημα: Θα τους ανοίξουν οι καθηγητές την πόρτα της σχολικής τάξης; Τα στοιχεία δείχνουν ότι στην εφαρμογή της κάθε καινοτομία συναντά πολλές δυσκολίες, γι᾽ αυτό η πρακτική στην τάξη πολύ λίγο έχει αλλάξει τα τελευταία 100 χρόνια (TIMSS Video Study).

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να διερευνήσουμε αν τα νέα βιβλία, ως φορείς μιας διαφορετικής εκπαιδευτικής φιλοσοφίας και της αντίστοιχης διδακτικής προσέγγισης, επηρεάζουν και σε ποιο βαθμό την πρακτική των καθηγητών στην τάξη.

Γιατί αποτυγχάνουν να εφαρμοστούν στην πράξη οι προσπάθειες αυτών που σχεδιάζουν την εκπαιδευτική πολιτική; Κάθε προσπάθεια για τη βελτίωση της διδασκαλίας και της μάθησης πρέπει απαραίτητα να περάσει από ένα κοινό δρόμο, αυτόν της τάξης. Εκεί ο ρόλος του καθηγητή είναι κρίσιμος, καθώς αυτός θα προσαρμόσει τη σχεδιασμένη πορεία μάθησης στις πραγματικές συνθήκες της τάξη του, όπου θα εμφανιστεί και η αλληλεπίδρασή του με τους μαθητές (Leikin & Levav - Waynberg, 2007). Συνεπώς, πρέπει να πεισθεί ο καθηγητής για την αξία των αλλαγών σε τέτοιο βαθμό, ώστε να καταστεί πρόθυμος να εγκαταλείψει πρακτικές χρόνων. Το ερώτημα είναι, πώς θα πεισθεί;

Εδώ εμφανίζεται ο πρώτος αδύναμος κρίκος: η επικοινωνία. Πρόκειται για την αδυναμία αυτών που σχεδιάζουν τις αλλαγές να επικοινωνήσουν ουσιαστικά με τους καθηγητές που πρόκειται να τις υλοποιήσουν. Έρευνες δείχνουν ότι, τα εκπαιδευτικά προγράμματα που σχεδιάζονται για να ανοίξουν τους διαύλους της επικοινωνίας, συχνά αποτυγχάνουν, γιατί δεν δημιουργούν στους καθηγητές το απαιτούμενο υπόβαθρο ώστε να γεφυρωθεί το χά-

σμα μεταξύ θεωρίας και πράξης (Leikin & Levav-Waynberg, 2007, Tirosh and Graeber 2003).

Η συνήθης πρακτική στη χώρα μας είναι να χρησιμοποιούνται οι λεγόμενοι «πολλαπλασιαστές», δηλαδή πρόσωπα που διαθέτουν κάποια τυπικά προσόντα και μετά από ελάχιστη (και συχνά ακατάλληλη) επιμόρφωση καλούνται να μεταφέρουν τις πληροφορίες στους μάχιμους εκπαιδευτικούς. Στη διαδικασία αυτή όμως παρεμβαίνει το «προσωπικό φίλτρο» κάθε πολλαπλασιαστή (πεποιθήσεις, απόψεις για το θέμα, ικανότητα επικοινωνίας, κ.ά.) και τα αποτελέσματα δεν είναι πάντα τα αναμενόμενα. Χωρίς την κατάλληλη βιωματική επιμόρφωση των πολλαπλασιαστών και στη συνέχεια των εκπαιδευτικών και δίχως να τους δοθεί η ευκαιρία να παρακολουθήσουν και να σχολιάσουν ανάλογες διδασκαλίες, οι πληροφορίες που (υποθέτουμε ότι) πήραν στην επιμόρφωση πιθανά θα μείνουν ανενεργές.

Υπάρχουν επίσης οι δυσκολίες εφαρμογής της θεωρίας στην πράξη, δηλαδή ένα χάσμα ανάμεσα στις προτάσεις για αλλαγές που βασίζονται στη θεωρία και στην πρακτική της διδασκαλίας των Μαθηματικών στην τάξη. Αυτό οφείλεται στις διαφορετικές «πρώτες ύλες» (Lave and Wenger 1991) που χρησιμοποιούν οι διάφορες κοινότητες επαγγελματιών που ασχολούνται με την εκπαίδευση, τόσο στην εκπαιδευτική ιεραρχία όσο και στις γενικότερες εκπαιδευτικές μας δομές (ΥΠΕΠΘ, Πανεπιστημιακοί ερευνητές, Π.Ι., Σχολικοί Σύμβουλοι, Κ.Ε.Ε., και τέλος οι ίδιοι οι καθηγητές). Όσο δεν αναπτύσσεται ένα κοινό σύστημα πεποιθήσεων, κανόνων και προτεραιοτήτων μεταξύ αυτών των κοινοτήτων, θα είναι δύσκολο, αν όχι αδύνατο, να εισάγουμε στην τάξη των μαθηματικών αλλαγές που προτείνουν τα μέλη μιας από αυτές τις κοινότητες (Leikin & Levav - Waynberg, 2007).

Τέλος, βασική προϋπόθεση για την αλλαγή της στάσης του καθηγητή, είναι η ανάλυση και επανεξέταση της τρέχουσας πρακτικής του στην τάξη. Η προσπάθεια αλλαγής δίχως την ανάλυση της πρακτικής δεν έχει πιθανότητες να πετύχει (TIMSS video study). Εστιάζοντας στη διδασκαλία διερευνούμε συνήθως χαρακτηριστικά της όπως, την οργάνωση της τάξης, το αναλυτικό πρόγραμμα, τα βιβλία και τα μέσα που χρησιμοποιούνται. Πέρα από αυτά, υπάρχει η αλληλεπίδραση εκπαιδευτικού – μαθητών μέσα στην τάξη που στην πράξη μπορεί να αποδειχθεί περισσότερο δυναμική και καθοριστική από τα χαρακτηριστικά που αναφέραμε. Για παράδειγμα, ακόμα και σε περιπτώσεις που το αναλυτικό πρόγραμμα ή το βιβλίο περιλαμβάνουν «πλούσιες» δραστηριότητες, οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιώντας τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας τους καταλήγουν να τις μετασχηματίσουν υποβαθμίζοντας έτσι τους διδακτικούς στόχους και τις δυνατότητες τους (TIMSS Video Study).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Επελέγησαν τρεις καθηγητές με αρκετά χρόνια υπηρεσίας, από την περιοχή της Αθήνας, που παρουσιάζουν χαρακτηριστικές διαφορές μεταξύ τους. Όσον αφορά στη φιλοσοφία των νέων βιβλίων, ο καθένας συμφωνεί με επιμέρους στοιχεία της. Ο ένας έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη διαθεματικότητα, ο άλλος εντάσσει τον ΗΥ στη διδασκαλία του και ο τρίτος έχει μεταπτυχιακές σπουδές στη Διδακτική των Μαθηματικών. Οι καθηγητές διαφέρουν επομένως και ως προς το βαθμό αποδοχής των νέων βιβλίων. Η επιλογή τους δεν έγινε με κριτήριο την εμπειρία ή την αποτελεσματικότητά τους, αλλά με βάση την προθυμία τους να δεχτούν κάποιον να παρακολουθήσει ένα συνηθισμένο καθημερινό μάθημα, χωρίς καμιά ιδιαίτερη προετοιμασία.

Στην κάθε περίπτωση, πήραμε συνέντευξη από τον καθηγητή και ακολούθως παρακολουθήσαμε και μαγνητοφωνήσαμε δύο συνεχόμενες διδακτικές του ώρες.

Η συνέντευξη είχε στόχο να διερευνήσει το αν οι καθηγητές αισθάνονται ότι η καινούρια φιλοσοφία των νέων βιβλίων επηρεάζει τη διδακτική τους πρακτική ή την επαγγελματική τους ανάπτυξη και σε ποια κατεύθυνση. Επίσης, να εξετάσει το βαθμό αποδοχής και την αλληλεπίδραση των καθηγητών με τα νέα βιβλία (μαθητή και καθηγητή). Τέλος, στόχος ήταν η εξέταση του κατά πόσον αισθάνονται αυτόνομοι να επιλέξουν αν θα χρησιμοποιήσουν το νέο υλικό ή αν θα δώσουν συμπληρωματικό δικό τους.

Η παρακολούθηση των μαθημάτων είχε στόχο να διερευνήσει τη σύμπτωση/διαφορά θεωρίας και πράξης, δηλαδή αν οι δηλωμένες απόψεις των καθηγητών μπορούν να ανιχνευθούν μέσα από τη λειτουργία τους στη σχολική τάξη. Οι δύο διδακτικές ώρες ήταν διαδοχικές για κάθε καθηγητή. Μαγνητοφωνήσαμε και στη συνέχεια αναλύσαμε το σύνολο του μαθήματος. Στα στοιχεία αυτά ήρθαν να προστεθούν οι σημειώσεις πεδίου, σχετικά με τη λειτουργία της τάξης και του καθηγητή.

Τα ερευνητικά μας ερωτήματα ήταν:

Πώς τα βιβλία επηρεάζουν τον τρόπο διδασκαλίας;

Πώς τα βιβλία επηρεάζουν την παρουσίαση της ύλης;

Πότε και πώς τα βιβλία χρησιμοποιούνται στους διάφορους τρόπους διάταξης και οργάνωσης της τάξης;

Τι μπορεί να περιμένουμε από τέτοια δείγματα συνηθισμένων μαθημάτων; Σε κάποιο βαθμό, τα μαθήματα αυτά αποκαλύπτουν τις διαφορές που

υπάρχουν από τάξη σε τάξη και αποτυπώνουν την (πιθανή) διάσταση ανάμεσα στις δηλώσεις και την πρακτική των καθηγητών.

ΟΙ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ

Ο καθηγητής Α διδάσκει στη Β Γυμνασίου. Έχει 10 χρόνια υπηρεσίας και πριν διοριστεί ετεροαπασχολείτο σε χώρο εκτός εκπαίδευσης. Ενδιαφέρεται ιδιαίτερα να αναδείξει τη σχέση των Μαθηματικών με άλλες επιστήμες, όπως για παράδειγμα τη Φυσική. Συχνά, κατά τη διάρκεια του μαθήματος αναφέρεται στη χρησιμότητα των Μαθηματικών στη ζωή. Ενδιαφέρεται επίσης να παρακολουθήσει μαθήματα συναδέλφων άλλων ειδικοτήτων ή να συνεργαστεί μαζί τους (για παράδειγμα, με το φιλόλογο για την ετυμολογία μαθηματικών όρων).

Η γνώμη του για τα βιβλία των τριών τάξεων είναι θετική. Τα θεωρεί ως «καλή προσπάθεια» και πιστεύει ότι «του δίνουν περισσότερες δυνατότητες».

Παρακολούθησε την επιμόρφωση για τα νέα βιβλία που έγινε το Σεπτέμβριο αλλά θεωρεί ότι δεν του έδωσε τίποτα «…αν εξαιρέσει κανείς τα διαθεματικά που για μένα είχαν ενδιαφέρον… αλλά (με αυτά) στο τμήμα που ήμουνα δεν ασχολήθηκε καθόλου ο επιμορφωτής. Όλες οι μέρες φύγανε με το να λέμε σε πόσες ώρες να καλύπτουμε κάθε κεφάλαιο, τι θα έκανε ο καθένας, και άλλα ανάλογα…»

Γνωρίζει τα βιβλία του καθηγητή, τα έχει μάλιστα περάσει στον ΗΥ του, όπως και τα βιβλία του μαθητή, και χρησιμοποιεί μέρη τους στο διδακτικό υλικό που φτιάχνει για τους μαθητές του. Δηλώνει ότι «το βιβλίο του καθηγητή το χρησιμοποιώ περισσότερο για να κοντρολάρω τις ώρες, το διαβάζω κιόλας,…. το χρησιμοποιώ για να δω τους στόχους και για το χρόνο».

Ο καθηγητής Β έχει 20 χρόνια υπηρεσίας και υπηρετεί σε διαπολιτισμικό σχολείο. Διδάσκει στην Α΄ και Γ΄ τάξη. Έχει μεταπτυχιακό δίπλωμα στη Διδακτική των Μαθηματικών και ήταν επιμορφωτής για τα νέα βιβλία.

Η άποψή του είναι πως «και τα 3 βιβλία είναι σε θετική κατεύθυνση, επί το καλύτερο, γι΄αυτό που εγώ θεωρώ καλύτερο». Πιστεύει ότι βοηθήθηκε ιδιαίτερα στο μεταπτυχιακό για να ωριμάσει σαν καθηγητής, όμως τώρα «αυτά τα βιβλία ήρθαν και δέσανε με μερικά πράγματα που τα είχα σαν στόχο, τι πρέπει να γίνει, πώς να γίνει το μάθημα. Σε μερικές απόψεις (δεν είναι το ιδανικό) έρχονται και ταιριάζουνε, συμφωνούνε με μερικές αρχές που άλλαξα στη διδασκαλία μου μετά το μεταπτυχιακό. Όπως, για παράδειγμα, να δίνω στα παιδιά ερεθίσματα να σκέφτονται».

Η διδασκαλία του στηρίζεται πολύ στο βιβλίο, πολύ περισσότερο που οι μαθητές του αντιμετωπίζουν προβλήματα με την ελληνική γλώσσα. Επιμένει οι μαθητές να διαβάζουν και να κατανοούν τους κανόνες.

Αισθάνεται αυτόνομος σε τέτοιο βαθμό ώστε την περσινή χρονιά, με τη σύμφωνη γνώμη του Σχολικού του Συμβούλου, δίδαξε το κεφάλαιο των ρητών αριθμών από το Αμερικάνικο βιβλίο Μαθηματικών Mathematics in Context.

Ο καθηγητής Γ έχει 23 χρόνια υπηρεσίας και διδάσκει στη Γ τάξη. Ασχολείται συστηματικά με τον Η/Υ και συχνά εντάσσει στο μάθημά του εφαρμογές τις οποίες προβάλλει με τη βοήθεια projector στον πίνακα. Δουλεύει πολύ στην τάξη και με πρόσθετο διδακτικό υλικό που δημιουργεί μόνος του.

Δεν παρακολούθησε την επιμόρφωση για τα νέα βιβλία[1] όμως, πριν ακόμα κυκλοφορήσουν τα είχε μελετήσει αναλυτικά και είχε εντοπίσει λάθη και παραλείψεις. Η γνώμη του είναι πως «συγκρίνοντας τα νέα βιβλία με τα παλιά βλέπω ότι δεν έχει αλλάξει σχεδόν τίποτα. Είναι διαφορετικά ως προς το πνεύμα … που πάνε να εισάγουν το κάθε θέμα, αυτές οι δραστηριότητες κλπ, αλλά όχι σε υπερθετικό βαθμό, δε βλέπω τεράστιες διαφορές». Φαίνεται ότι προτιμά τα προηγούμενα βιβλία για μια σειρά λόγους: Τα προηγούμενα εγχειρίδια «είχαν παραδείγματα μέσα, υπήρχε η θεωρία δομημένη πιο καλά … πηγαίναμε επαγωγικά στο συμπέρασμα και κάποιες αποδεικτικές διαδικασίες, τώρα ένα ξερό "θυμάμαι και μαθαίνω". Οδηγούν τα παιδιά στην παπαγαλία». Επίσης, θεωρεί θετική την ύπαρξη ενός τεύχους με τις λύσεις των ασκήσεων του βιβλίου[2] γιατί «είναι βοήθημα, ανοίγει το παιδάκι και τσεκάρει, μπορεί να δει και μια άλλη λύση. Θα πεις μπορεί να αντιγράψει. Αυτός που θέλει, θα αντιγράψει και από το συμμαθητή του ή από το φροντιστήριο. Το λυσάρι τον βοηθά να επιβεβαιώσει ότι βρήκε το σωστό». Τέλος, θεωρεί ότι τα βιβλία αυτά δεν του δίνουν ένα κίνητρο για να βελτιωθεί, «αισθάνομαι ακριβώς το αντίθετο, δηλαδή τα πολλά χρώματα, ο τρόπος που είναι γραμμένα, με φέρνουν σα να διδάσκω στο Δημοτικό, σα να διδάσκω σε παιδιά πολύ μικρής ηλικίας».

ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΕΥΡΗΜΑΤΩΝ

Οι τύποι διάταξης και οργάνωσης που είδαμε στις τάξεις των τριών καθηγητών περιλάμβαναν μετωπική διάταξη, διάλεξη του καθηγητή, λεκτική αλ-

[1] Διότι ήταν απασχολημένος με Διευθυντικά καθήκοντα στο σχολείο του και δεν είχε την ευκαιρία.
[2] Που δεν υπάρχει για τα νέα βιβλία

ληλεπίδραση της τάξης με τον καθηγητή, καθοδηγούμενη δουλειά των μαθητών και ατομική εργασία τους.

Μας ενδιέφερε να καταγράψουμε και να αναλύσουμε το πώς διαφέρει η διδασκαλία από τάξη σε τάξη και τη χρήση του βιβλίου στην κάθε περίπτωση.

ΒΙΒΛΙΑ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

1. Σύμφωνα με τις δηλώσεις του, ο καθηγητής Α έχει ευαισθητοποιηθεί στη Διδακτική λόγω προσωπικών εμπειριών. Έχει τρία παιδιά δυσλεκτικά και για να τα βοηθήσει καταβάλει ιδιαίτερες προσπάθειες (σε ατομικό επίπεδο). Γνωρίζει και χρησιμοποιεί διδακτικό υλικό που υπάρχει στο διαδύκτιο και γι' αυτό δεν ενθουσιάστηκε με το περιεχόμενο των βιβλίων, που το θεωρεί ως ένα βαθμό γνωστό.

Η επίδραση των βιβλίων στη διδακτική του πρακτική θεωρεί ότι είναι ασυνείδητη «όχι, δεν είναι εμφανής (η επιρροή) αλλάζει κάθε μέρα, δεν το καταλαβαίνω κι εγώ, στο τέλος αυτού του βιβλίου θα έχω αλλάξει. Γιατί προσπαθώ με βάση το βιβλίο να... ακολουθώ κατά κάποιο τρόπο πιο πιστά αυτό από το άλλο βιβλίο».

Ο συγκεκριμένος εκπαιδευτικός δεν έχει αντίστοιχο θεωρητικό υπόβαθρο και επιμορφώθηκε (κατά δήλωσή του) πλημμελώς το Σεπτέμβριο. Εντούτοις, η γνώμη του για τα βιβλία είναι θετική και, όπως λέει, προσπαθεί να τα αξιοποιήσει με τον καλύτερο τρόπο.

Η λειτουργία του καθηγητή Α στην τάξη – όπως παρατηρήθηκε - αποκαλύπτει ότι, δεν αρκούν οι προθέσεις και η θετική στάση απέναντι στην αλλαγή για την αποτελεσματική εφαρμογή της. Οι διδασκαλίες του εμφανίζουν μια αντίφαση ανάμεσα στις προθέσεις και στην πρακτική. Ο καθηγητής επιθυμεί να εντάξει στη διδασκαλία του νέα στοιχεία από το βιβλίο και το επιχειρεί, χωρίς να αλλάζει τη διδακτική του προσέγγιση. Συγκεκριμένα, εργάζεται (στα μαθήματα που παρακολουθήσαμε) με φύλλο εργασίας στο οποίο ενσωματώνει κάποια δραστηριότητα του βιβλίου για «να την αναδείξει και να την κατανοήσουν τα παιδιά, επειδή είναι ωραία». Παράλληλα, δεν δίνει χρόνο στους μαθητές να σκεφτούν τις ερωτήσεις και απαντά ο ίδιος ή κάποιος πολύ καλός μαθητής, πριν προλάβει να σκεφτεί η τάξη.

Η δραστηριότητα που χρησιμοποιεί είναι το μοντέλο της ζυγαριάς για τη διδασκαλία των ιδιοτήτων της ισότητας. Δεύτερος στόχος του μαθήματος είναι η επίλυση πρωτοβάθμιων εξισώσεων. Όπως φαίνεται στο απόσπασμα που ακολουθεί, ο καθηγητής για την επίλυση της εξίσωσης αναφέρεται απλά στην «ισορροπία στη ζυγαριά», χωρίς να τη συνδέει, παραβάλλοντας

την, με την ουσία των ιδιοτήτων της ισότητας. Περιορίζεται απλά στο γνωστό αλγόριθμο της επίλυσης των εξισώσεων.

«Εδώ παιδιά σας δείχνω τι επιτρέπεται σε μια ισότητα, είναι χρήσιμο να βλέπουμε την εξίσωση σα μια ζυγαριά που βρίσκεται σε ισορροπία. Για να καταλάβουμε, σε μία εξίσωση κάνουμε ότι και σε μία ζυγαριά για να διατηρήσουμε την ισορροπία. Βλέπουμε εδώ ότι το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι να προσθέσουμε έναν αριθμό, αν α=β τότε α+γ=β+γ, στην ουσία στη ζυγαριά τι θα προσθέταμε; Το ίδιο βάρος. Μπορούμε να βγάλουμε το ίδιο βάρος και να διατηρηθεί η ισορροπία, μπορούμε να διπλασιάσουμε κλπ…

Μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση 2x-3=4-x+2, όπως θα προσπαθούσαμε να διατηρήσουμε την ισορροπία σε μια ζυγαριά; Τι θα κάναμε εδώ για να απομονώσουμε αυτό το x; θα μπορούσα να προσθέσω τον αριθμό 3 και στα δύο μέλη, δεν θα μπορούσα; Και αυτό το κάνω για να μην έχω πολλούς αριθμούς, τι άλλο μπορώ να κάνω και στα δύο μέλη; Να προσθέσω τον αριθμό x; καταλαβαίνετε γιατί το κάνω; 2x+x=3x τώρα διαιρώ με τον αριθμό 3…»

Η διδακτική του προσέγγιση κυριαρχείται από το άγχος του με το χρόνο. Ο καθηγητής αισθάνεται να τον κυνηγάει ο χρόνος, με αποτέλεσμα να αποθαρρύνει τη σκέψη και την ενεργό συμμετοχή των περισσοτέρων παιδιών. Για παράδειγμα, όταν ένας μαθητής λύνει στον πίνακα μια εξίσωση, ονομάζει τα βήματα και λύνει τις απορίες ο ίδιος, δίχως να επιστρέφει στην τάξη το ερώτημα για ν' απαντηθεί. Από τη μέση της διδακτικής ώρας και μετά λύνει μόνος του τις ασκήσεις στον πίνακα για «να ολοκληρώσουν πριν χτυπήσει το κουδούνι».

2. Ο καθηγητής Β έχει εξειδίκευση στη Διδακτική και αναδεικνύει αυτή τη διάσταση των βιβλίων. Δηλώνει πως αξιολογεί κυρίως την δυνατότητα που προσφέρουν τα νέα βιβλία στους μαθητές να οικοδομήσουν οι ίδιοι ενεργητικά τις γνώσεις τους. Για τον εαυτό του κρατά ένα δευτερεύοντα καθοδηγητικό ρόλο, «αφού (τα βιβλία) δίνουν την πρωτοβουλία στα παιδιά, στο ξεκίνημα του μαθήματος, αυτό για μένα είναι πάρα πολύ σπουδαίο. Οι έννοιες βγαίνουν κάπως από τα παιδιά, με το δάσκαλο βέβαια, αλλά όχι ν' αρχίσει ο δάσκαλος να λέει, τα παιδιά πρέπει να ξεκινάνε». Σύμφωνα με τον ίδιο, η διδασκαλία του επηρεάστηκε θετικά από τα νέα βιβλία και συγκεκριμένα, «ενώ είχα σα στόχο την αλλαγή στον τρόπο διδασκαλίας μου και τις προηγούμενες χρονιές[3], τώρα είναι πολύ βοηθητικό γιατί σε καθοδηγεί και το ίδιο το βιβλίο».

[3] Μετά το τέλος των μεταπτυχιακών του σπουδών

Η παρατήρηση της λειτουργίας του καθηγητή Β στην τάξη επιβεβαιώνει, σε μεγάλο βαθμό, τη συνέπεια ανάμεσα στις δηλώσεις και στις πράξεις του. Θέτει το πρόβλημα και αφήνει χρόνο στους μαθητές να σκεφτούν, στη συνέχεια οι διάφορες προτάσεις των παιδιών καταγράφονται στον πίνακα και η τάξη ελέγχει ποιες είναι οι σωστές και γιατί.

Η χρήση του βιβλίου είναι άμεση στη διδασκαλία του [4]. Οι μαθητές διαβάζουν το «θυμάμαι και μαθαίνω» δυνατά μέσα στην τάξη. Όταν ξεχνάνε κάτι ο καθηγητής τους παραπέμπει να ψάξουν στο βιβλίο να βρουν την απάντηση μόνοι τους. Η γνώμη του είναι πως «το βιβλίο είναι το παν στην εκπαίδευση, άλλοι λένε ο δάσκαλος, εγώ θεωρώ το βιβλίο, γι΄ αυτό πρέπει να είναι πολύ προσεγμένο».

Ο ίδιος έχει μελετήσει αναλυτικά, πριν ακόμα κυκλοφορήσουν[5], όλα τα βιβλία, μαθητή και καθηγητή. Πιστεύει ότι «το βιβλίο καθηγητή είναι πολύ χρήσιμο, το είχα μελετήσει από την αρχή, δεν το κοιτάω καθημερινά, είναι πολύ καλό και καθοδηγητικό. Της Β΄ και Γ΄ τάξης ιδιαίτερα. Παίρνω έτοιμο το φύλο εργασίας και το δίνω στα παιδιά».

3. Ο καθηγητής Γ, σύμφωνα με τις δηλώσεις του, δίνει μεγάλη έμφαση στο γνωστικό μέρος (και λιγότερη στις διδακτικές προσεγγίσεις) και θεωρεί πως τα βιβλία δεν τον επηρέασαν στον τρόπο διδασκαλίας του. «Όπως δίδασκα με τα παλιά βιβλία διδάσκω και με τα νέα, απλά σαν εργαλείο τα νέα βιβλία δεν με βοηθάνε ιδιαίτερα, μάλλον προβλήματα μου δημιουργούνε». Εντοπίζει θετικά σημεία (όπως τις ερωτήσεις κατανόησης), όμως αισθάνεται ότι ο χρόνος τον πιέζει και δεν προλαβαίνει να τα αξιοποιήσει.

Παρ΄όλη την αντίθεσή του με τα βιβλία, η διδακτική του πρακτική - όπως φάνηκε από τις διδασκαλίες του - δίνει προτεραιότητα στη σκέψη του μαθητή. Αφήνει να γίνει το λάθος και ρωτά τους μαθητές να επικυρώσουν την απάντηση ή να τη διορθώσουν « …κάνω εσκεμμένα λάθη μερικές φορές και αφήνω λίγο διάστημα, οπότε πετιούνται μερικά παιδάκια με το χέρι και τους κεντρίζω το ενδιαφέρον. Αυτό είναι κάτι που κάνω από μόνος μου». Ενθαρρύνει έτσι την μαθηματική συζήτηση μέσα στην τάξη. Για παράδειγμα, χρησιμοποιεί τον ΗΥ στη διδασκαλία του και προκαλεί τους μαθητές να πειραματιστούν και να κάνουν εικασίες. Δίνει πρωτοβουλίες για ενεργητική συμμετοχή στη μαθησιακή διαδικασία. Η διδασκαλία του είναι

[4] Ιδιαίτερα στην Α Γυμνασίου όπου οι μαθητές έχουν μεγαλύτερη δυσκολία με την ελληνική γλώσσα.

[5] Τα βιβλία ήταν διαθέσιμα στο Internet

μετωπική με συνεχή διάλογο με τους μαθητές και δίνει έμφαση στην ενεργοποίηση όλων των παιδιών.

ΟΙ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

Η δραστηριότητα θεωρείται ως έννοια κλειδί, γύρω από την οποία αρθρώνονται σχεδόν όλες οι σύγχρονες διδακτικές προσεγγίσεις (βιβλίο εκπ/κού Α΄τάξης). Αυτός είναι ο λόγος που, και στα τρία βιβλία, κάθε ενότητα ξεκινά με μια δραστηριότητα. Οι αντιλήψεις όμως των συγγραφικών ομάδων των βιβλίων για την έννοια είναι διαφορετικές, με αποτέλεσμα η σύγχυση να περνά και στις τάξεις. Συγκεκριμένα, άλλοτε οι δραστηριότητες δίνονται ως προβλήματα προς λύση (Α΄ και Γ΄ τάξη) και άλλοτε δίνονται λυμένες μέσα στο βιβλίο, γεγονός που ακυρώνει το ρόλο τους (Β΄ τάξη).

Η σύγχυση αυτή ανιχνεύεται και στα λόγια των καθηγητών οι οποίοι, ενώ θεωρούν ότι υιοθετούν τις δραστηριότητες, υποβαθμίζουν τους διδακτικούς στόχους και ακυρώνουν τις δυνατότητές τους. Καθηγητής Α: «σωστά τις λύνει (τις δραστηριότητες) το βιβλίο (της Β΄τάξης), για κάποιον που θα το διαβάσει και μετά θα πάει στις ασκήσεις. Το βιβλίο καθοδηγεί το παιδί. Οι δραστηριότητες είναι πολύ καλές και έχουν και δύσκολες ασκήσεις (εμβαδά)». Καθηγητής Γ: «και με τα παλιά βιβλία είχα και ΄γω τη δραστηριότητα την εισαγωγική που έκανα, απλή όμως. Στοχεύαμε κάπου με τα παιδιά, ξεκινώντας το μάθημα, τι θα κάνουν και γιατί και τι επιβάλει την εισαγωγή αυτής της έννοιας. Δεν βλέπω να έχω διαφορές. Οι δραστηριότητες που έκανα και κάνω και τώρα δεν ήτανε για να τις κάνουν τα παιδιά στο θρανίο αλλά τις κάναμε όλοι μαζί στον πίνακα. Δεν υπάρχει χρόνος να κάνεις κάτι δίνοντας χρόνο στα παιδιά».

Η ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

Ένα κοινό σημείο των τριών καθηγητών είναι η αυτονομία που αισθάνονται μέσα στην τάξη, σε σχέση με τη χρήση των βιβλίων. Καθηγητής Γ: «Πάντα αισθανόμουνα αυτόνομος», «την ύλη την εξατομικεύω (ως προς εμένα), δηλαδή μου δίνανε κάποια ύλη να διδάξω και την έφερνα πάντα στα μέτρα τα δικά μου», καθηγητής Α: «ναι αισθάνομαι πολύ αυτόνομος, τώρα έχω ανακαλύψει και τις δυνατότητες του βιβλίου…σήμερα πήρα από το βιβλίο τις ζυγαριές που έβαλα στο φύλο εργασίας, υπάρχει στο βιβλίο αλλά χάνεται, δεν θα τις κοιτάξει το παιδί. Το κάνω συχνά με ένα φύλο εργασίας, χρησιμοποιώ υλικό του βιβλίου και σχηματάκια που έχει».

Ακόμα, οι καθηγητές αισθάνονται ελεύθεροι να μη διδάξουν κάποια από τα περιεχόμενα του βιβλίου, που θεωρούν ότι θα τους εκτρέψουν από τις προ-

τεραιότητές τους και πρώτη προτεραιότητα είναι ο χρόνος. Καθηγητής Γ: «Δεν έχω δοκιμάσει (δραστηριότητες) ποτέ, ούτε πρόκειται να τις δοκιμάσω γιατί είμαι με το άγχος του χρόνου, ειδικά φέτος που είναι η πρώτη χρονιά που εισάγονται τα βιβλία προσπαθώ να εφαρμόσω το πρόγραμμα όπως το έχει δώσει το ΠΙ», «δεν αισθάνομαι δεσμευμένος, έχω ελευθερία κινήσεων. Δεν έχω κάνει φύλο εργασίας».

Το αξιοπρόσεκτο είναι πως ο αποκλεισμός αυτός, κάποιων από τα περιεχόμενα του βιβλίου, λόγω έλλειψης χρόνου συμπαρασύρει τους καθηγητές να αποκλείσουν και στοιχεία του βιβλίου που οι ίδιοι τα αξιολογούν ως θετικά (π.χ. ερωτήσεις κατανόησης ή ιστορικά σημειώματα). Καθηγητής Γ: «Ερωτήσεις κατανόησης δεν μπορώ να κάνω, να κάτι σημαντικό που είναι μέσα στο βιβλίο, δεν έχω όμως χρόνο. Τις δίνω να τις επεξεργαστούν σπίτι και μετά όσες δεν μπορούν να κάνουν τα παιδιά ή όσες κρίνω εγώ ότι πρέπει να τις κάνω… (τις συζητάνε στην τάξη). Αυτό είναι κάτι που μου άρεσε πολύ, οι ερωτήσεις κατανόησης». Ακόμα, καθηγητής Α: «ενδιαφέρον έχουν οι εικόνες, τα ιστορικά στοιχεία, για κάποιον που τα διαβάζει, αν τα κάνει ο καθηγητής αυτά. Αν τα κάνει ο καθηγητής θα χάσει…δεν θα προλάβει την ύλη. Έχουμε μια πίεση και άγχος να διδαχθούν αυτά που πρέπει».

Όλοι οι καθηγητές δηλώνουν ότι συμπληρώνουν το βιβλίο σε ένα βαθμό, ο καθένας με τις δικές του στοχευμένες επιλογές, κυρίως ως προς τις ασκήσεις. Καθηγητής Β: «Είχα εμπλουτίσει τη διδασκαλία τις προηγούμενες χρονιές με ερωτήσεις κρίσεως και το είχαν για παιχνίδι τα παιδιά και το ζητούσαν, τώρα υπάρχει μες το βιβλίο». Καθηγητής Γ: «χρησιμοποιώ τα εξωσχολικά βιβλία για να βρω κάποια άσκηση η οποία θα οξύνει την κρίση, όχι τίποτα άλλο, μ᾽ αρέσει να έχουν παγιδούλες όλα τα θέματα μέσα, να σκέφτεται ο μαθητής πριν απαντήσει. (τα βιβλία) Δεν έχουν πολλά τέτοιας μορφής θέματα, τα οποία συχνά τα φτιάχνω και μόνος μου, είναι απλό, όπως και μέσα στην τάξη φτιάχνω. Τους βάζω «παγιδούλες[6]» και το συζητάμε και πιστεύω ότι αυτό τους μένει». Καθηγητής Α: «τα σαββατοκύριακα δίνω ασκήσεις στα παιδιά, βέβαια δεν τις λύνουν όλοι, τα παιδιά που έχουν ένα καλό επίπεδο τις λύνουν. Επίσης μπορεί να τους δίνω μια άσκηση της εβδομάδας, έχει ο ΘΑΛΗΣ και οι άλλοι διαγωνισμοί, που κάποια παιδιά μπορούν να ασχοληθούν, για τους καλούς, για τους άλλους νομίζω ότι θα πρέπει να δίνουμε και πιο εύκολες ασκήσεις από του βιβλίου».

[6] Π.χ. σκόπιμα λάθη που καλούνται οι μαθητές να ανακαλύψουν και να διορθώσουν, ως αφορμή για συζήτηση.

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

Είναι χαρακτηριστικό ότι οι εκπαιδευτικοί, ανεξάρτητα από τη γνώμη τους για τα βιβλία και την ποιότητά τους, πιστεύουν ότι πρέπει να ολοκληρωθεί η διδασκαλία της ύλης. Τα επιχειρήματα που συνειδητά ή ασυνείδητα δίνει ο καθένας είναι ότι, τα βιβλία:

- εξασφαλίζουν τη συνέχεια από τάξη σε τάξη. Καθηγητής Γ: «Θεωρώ ότι το σχολικό βιβλίο – ανεξάρτητα αν είναι καλό ή όχι – ο μαθητής πρέπει να το ξέρει καλά, θα βασιστούν σε αυτό τα επόμενα βήματά του. Πάει στη Β'Λυκείου, στη Γ'Λυκείου, θέλει κάποια έννοια, έναν ορισμό, πού θα ανατρέξει[7]; Αισθάνομαι δέσμευση, αυτά που έχει το βιβλίο μέσα πρέπει να τα πω οπωσδήποτε. Όσο το δυνατόν περισσότερα, αν όχι να γίνουν όλα στην τάξη – που δεν γίνονται – να δοθούν σαν άσκηση στο σπίτι». Καθηγητής Β: «….να μάθουν την ορολογία και να μάθουν αυτά που ξεχνούν σε ποιο σημείο του βιβλίου βρίσκονται, για να μπορούν να τα ξαναβρίσκουν».
- δίνουν το ρυθμό στη διδασκαλία. Καθηγητής Γ: «ειδικά φέτος που είναι η πρώτη χρονιά που εισάγονται τα βιβλία προσπαθώ να εφαρμόσω το πρόγραμμα όπως το έχει δώσει το ΠΙ (να μείνει πιστός στις ώρες διδασκαλίας) γιατί τις έβαλα κάτω τις ώρες και βλέπω ότι δεν βγαίνουν».
- παρέχουν ίσες ευκαιρίες. Καθηγητής Β: «Το βιβλίο πρέπει να διδαχθεί για θέμα ίσης μεταχείρισης, εδώ τα παιδιά μας δεν ξέρουν και πολύ καλά ελληνικά και εγώ θεωρώ ότι πρέπει να το κάνουνε ακόμα και αν δεν πολυκαταλαβαίνουνε κάτι, ας έχουν μια επαφή. Πρέπει πανελλαδικά να έχουν τα παιδιά την ίδια ευκαιρία και όσα μπορούν να έχουν παραπάνω ας έχουνε».

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο, τα νέα βιβλία διευκολύνουν το έργο των καθηγητών. Από τις συνεντεύξεις φάνηκε ότι μένουν πιστοί στο βιβλίο, στο βαθμό που εξασφαλίζει στον καθένα όλες τις παραμέτρους που θέλει να περιλάβει στη διδασκαλία του. Γενικά, θεωρούν ότι τα βιβλία αυτά είναι πλουσιότερα σε περιεχόμενο (ερωτήσεις κατανόησης, δραστηριότητες, ιστορικά σημειώματα, διαθεματικές εργασίες, προτάσεις διδασκαλίας με ΗΥ κλπ). Κάθε καθηγητής μπορεί «να δει» και να αναδείξει στοιχεία και πλευ-

[7] Αναφέρεται κυρίως στη θεωρία

ρές του βιβλίου που τον ενδιαφέρουν και να αγνοήσει άλλες, με δικαιολογία πάντα το μέγεθος της ύλης και την πίεση του χρόνου.

Ως προς τη διδακτική πρόταση, τα νέα βιβλία θέτουν ζητήματα (για ενεργητική μάθηση, δραστηριότητες, επίλυση προβλήματος, συνεργασία, ομαδική εργασία κ.ά.) δίχως να έχουν τη δύναμη να μεταβάλλουν, από μόνα τους, τις παγιωμένες πρακτικές των εκπαιδευτικών. Η διδακτική μεθοδολογία του κάθε καθηγητή διατηρείται, σε μεγάλο βαθμό, παρά την αλλαγή των βιβλίων. Καθένας προσφέρει το ιδιαίτερο - δικό του - περιβάλλον μάθησης. Υπάρχουν βέβαια καθηγητές που, δίχως να επηρεάζονται από τα βιβλία, έχουν πρακτικές προς την επιθυμητή κατεύθυνση, όπως φαίνεται από τον τρόπο με τον οποίο δουλεύουν με τους μαθητές τους (π.χ. ο καθηγητής Γ). Μόνο στην περίπτωση του καθηγητή με μεταπτυχιακές σπουδές στη Διδακτική φαίνεται ότι το βιβλίο αποτελεί κίνητρο για σταθεροποίηση των (αποκτημένων στο Πανεπιστήμιο) πρακτικών.

Παρά τις σχετικές αναφορές στα βιβλία του εκπαιδευτικού της Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου, κανείς από τους τρεις καθηγητές δεν παρουσίασε ούτε αναφέρθηκε σε άλλο τύπο οργάνωσης της τάξης, πλην του παραδοσιακού - μετωπικού. Έτσι, δεν μπορέσαμε να διερευνήσουμε το ρόλο των βιβλίων σε άλλες μορφές διάταξης και οργάνωσης της τάξης (π.χ. στην ομαδοσυνεργατική διδασκαλία).

Τελικά, φαίνεται πως οι καθηγητές ανοίγουν την πόρτα της τάξης τους στο μαθηματικό περιεχόμενο των νέων εγχειριδίων αλλά κλείνουν έξω πολλά από τα ζητήματα διδακτικής μεθοδολογίας. Τι χρειάζεται για να αρχίσουν να μεταβάλουν την πρακτική τους προς την κατεύθυνση που υπαινίσσονται τα καινούρια βιβλία; Πώς θα αρχίσουν να υιοθετούν μια φιλοσοφία που θεωρεί την απόκτηση της γνώσης ως «διαδικασία δόμησης» και υιοθετεί την «ενεργητική συμμετοχή» του μαθητή;

Πολλοί καθηγητές βρίσκονται μπροστά σε μια πρόκληση: καλούνται να εφαρμόσουν κάτι που στην πράξη δεν έχουν ποτέ οι ίδιοι διδαχθεί, βιώσει ούτε καν παρακολουθήσει.

Πιστεύουμε ότι για να στραφούν οι εκπαιδευτικοί προς την επιθυμητή κατεύθυνση απαιτείται μια ουσιαστική, βιωματική επιμόρφωση. Τότε και μόνο θα μπορέσουν να σκεφτούν με ποιο τρόπο θα ενσωματώσουν αυτό που οι ίδιοι βίωσαν και διδάχθηκαν κατά την επιμόρφωση τους στη δική τους διδακτική πρακτική. Εν τέλει, η «ενεργός συμμετοχή των καθηγητών» αποτελεί προϋπόθεση για την ενεργό συμμετοχή των μαθητών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Jacobs, J., Garnier, H., Gallimore, R., Hollingsworth, H., Givvin, K., Rust, K., et al. (2003). TIMSS 1999 video study. Technical report: Mathematics. Washington, D.C.: National Center for Education Statistics.

Johansson, M.(2006), Textbooks as instruments. Three teacher's way to organize their mathematics lessons. Nordic Studies in Mathematics Education, 11 (3), 5-30.

Lave, J. & Wenger, E. (1991), Situated learning: Legitimate peripheral participation. Cambridge: Cambridge University Press.

Leikin, R. & Levav - Waynberg, A. (2007), Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory – based recommendations and school practice in the use of connecting tasks, Educational Studies in Mathematics, 66, 349-371.

Schmidt, W.H., McKnight, C.C., Houang, R.T., Wang, H., Wiley, D.E., Cogan, L.S., et al (2001). Why schools matter: a cross – national comparison of curriculum and learning. San Francisco: Jossey – Bass.

Tirosh, D & Graeber, A.(2003), Challenging and changing mathematics teaching classroom practices, in A. J. Bishop, M. A. Clements, D Brunei, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), The second international handbook of mathematics education (pp. 643-687), Dordrecht, The Nederlands: Kluwer.

ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙΙ

Σχολικά βιβλία μαθηματικών: Ιστορικές θεωρήσεις

ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΤΟΥ ΓΛΥΖΩΝΙΟΥ ΣΤΟΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ ΤΟΥ ΚΟΥΜΑ: Ο ΡΟΛΟΣ ΚΑΙ Η ΠΟΡΕΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΠΕΡΙΟΔΟ ΤΗΣ ΟΘΩΜΑΝΙΚΗΣ ΚΑΤΟΧΗΣ

Μαρία Τερδήμου

Μαθηματικός, Διδάκτωρ Φιλοσοφίας
Πειραματικό Λύκειο Ηρακλείου

Όλοι μας ξέρομε ότι εκτός από τους δασκάλους και τα σχολεία η δεύτερη βασική συνιστώσα της παιδείας ενός λαού είναι το βιβλίο Την αναζήτηση μας για την πορεία του μαθηματικού εγχειριδίου στον τουρκοκρατούμενο ελληνισμό θα την ξεκινήσομε την εποχή λίγο μετά την Άλωση. Το τέλος της διαδρομής θα είναι οι προεπαναστατικές δεκαετίες και τα λεγόμενα νεωτερικά σχολεία, που διαπνέονταν από το διαφωτιστικό πνεύμα και στα οποία η παρεχόμενη επιστημονική παιδεία γνώρισε τις καλύτερες της στιγμές.

Οι μαρτυρίες για την έλλειψη διδακτικών εγχειριδίων, εκτός από τα γνωστά εκκλησιαστικά (Οκτώηχος, Μηναία, Ψαλτήρι, Απόστολοι), μετά την πτώση της Κωνσταντινούπολης είναι πολλές. Τα περισσότερα χειρόγραφα βιβλία καταστράφηκαν τις ημέρες της Άλωσης και τα υπόλοιπα αφέθηκαν να σαπίσουν και να χαθούν, ή μεταφέρθηκαν στην Δύση μαζί με τους λογίους που βρήκαν καταφύγιο σ' αυτήν. Κατά τον 15ο και 16ο αιώνα, εκτός από τα εκκλησιαστικά βιβλία που αναφέραμε παραπάνω, μεγάλη κυκλοφορία γνώρισαν και οι λαϊκές φυλλάδες, βυζαντινής προέλευσης[1].

Είκοσι επτά (27) συνολικά εκδόσεις και επανεκδόσεις εντύπων επιστημονικών, κυρίως μαθηματικών, βιβλίων[2] γίνονται κατά τη διάρκεια του 17ου αιώνα, βιβλία, όμως, τα οποία απευθύνονται σε ένα πολύ περιορισμένο αριθμό ατόμων και όχι στο ευρύ κοινό. Είναι οι άνθρωποι οι οποίοι, κυρίως, ζουν στη Δύση ή έστω στις παρυφές του υπόδουλου ελληνισμού και αποτελούν τους εκφραστές μιας "λογίας παράδοσης". Έργα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών, Ευκλείδη, Αρχιμήδη, Διοφάντου, Απολλωνίου, Νι-

[1] Γ. Καράς, (1991) σσ. 25, 31, 32
[2] Γ. Καράς, ό.π., σ. 62.

κομάχου, καθώς και Βυζαντινών δηλαδή των Ψελλού, Πλανούδη, Αργυρού, Ραβδά, Βαρλαάμ, κ.ά., επανεκδίδονται στην Δύση, και κάποια από αυτά (του Νικομάχου, του Θέωνα, του Θεοδοσίου, του Ευτοκίου, του Πρόκλου, του Ψελλού), κυκλοφορούν και στον ελλαδικό χώρο[3] υπό μορφή χειρογράφου, ανάμεσα στους λίγους λογίους και προφανώς όχι ως διδακτικά εγχειρίδια στα υποτυπωδώς οργανωμένα σχολεία.

Σε γενικές γραμμές, τα κύρια χαρακτηριστικά της λογίας παράδοσης κατά τους μεταβυζαντινούς αιώνες, είναι ο στείρος σχολαστικισμός και η υποβάθμιση, εκτός ελαχίστων εξαιρέσεων, των θετικών επιστημών, γεγονός το οποίο συντηρείται και από τις δύσκολες συνθήκες και την απομόνωση που επιβάλλει η τουρκική κατοχή. Το Οικουμενικό Πατριαρχείο, υπό την άμεση εποπτεία του οποίου βρισκόταν πάντα το έργο της παιδείας, στην προσπάθεια του να διασώσει τη συνέχεια του ελληνισμού, καλλιεργεί μια ιδεολογία παραδοσιακή και εν μέρει άκαμπτη, η οποία γίνεται και η κυρίαρχη του ελληνισμού.

Παράλληλα, όμως, με τη λογία παράδοση, υπάρχει και η λεγόμενη "κοινή παράδοση", και σ' αυτήν ανήκουν όλα τα συγγράμματα, τα οποία κύριο σκοπό έχουν την εξυπηρέτηση των εμπορευματικών συναλλαγών, μέσα από την παρουσίαση ουσιαστικά μόνο των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων με ακεραίους και κλασματικούς αριθμούς[4]. Αντιπροσωπευτικό δείγμα είναι η γνωστή *Λογαριαστική* του Γλυζωνίου, της οποίας ο αριθμός των εκδόσεων και επανεκδόσεων[5], είκοσι περίπου από το 1568 έως το 1818, φανερώνει την ευρεία χρήση του εγχειριδίου κατά τη διάρκεια των τριών αιώνων. Στη συνέχεια του κειμένου μας να αναφερθούμε με περισσότερες λεπτομέρειες σε αυτό, το πιο δημοφιλές εγχειρίδιο της εποχής της Τουρκοκρατίας.

Τους πρώτους αιώνες μετά την Άλωση ιδρύονται και λειτουργούν σχολεία στα Ιωάννινα, στην Κωνσταντινούπολη[6], στη Χίο[7], στην περιοχή των Αγράφων[8]. Στο καταστατικό των περισσοτέρων προβλέπεται και η διδασκαλία των "επιστημών", δηλαδή της Φυσικής και των Μαθηματικών, η οποία βέβαια, περιορίζεται σε στοιχεία Αριθμητικής, χρήσιμα στην καθημερινή πρακτική και στις υποτυπώδεις ανάγκες του εμπορίου. Ένα εγχειρίδιο που διδάχθηκε στα Ιωάννινα ήταν το *Εισαγωγή της Μαθηματικής,* που μετέ-

[3] Γ. Καράς, ό.π., σσ. 50, 78
[4] Γ. Καράς ό.π. σσ. 49-50.
[5] Τ.Ε. Σκλαβενίτης, (1988), σσ. 74-75.
[6] Η Πατριαρχική Σχολή αρχίζει να λειτουργεί ουσιαστικά από το 1556 και μετά
[7] Το 1650 ιδρύεται σχολείο των καθολικών, το οποίο στις αρχές του 17ου αι. αριθμεί περί τους 250 μαθητές, στην πλειονότητά τους ορθοδόξους, αριθμός τεράστιος για τα δεδομένα της εποχής.
[8] Από το 1642 λειτουργεί η Σχολή Καρπενησίου που ιδρύεται από τον Ευγένιο Γιαννούλη τον Αιτωλό, Μ. Παρανίκας (1867) σ. 90, Κ. Σάθας, (1868) σ. 327.

φρασε από τα λατινικά ο Αναστάσιος Παπαβασιλείου ή Παπαβασιλόπουλος, το 1695.

Περνάμε τώρα στον 18ο αιώνα όταν νέοι κοινωνικοί και οικονομικοί όροι διαμορφώνονται στην ελληνική επικράτεια ως απόρροια, εκτός των άλλων, της συνάντησης με τη δυτική σκέψη, λόγω των αυξανομένων εμπορικών συναλλαγών και της επανόδου των Ελλήνων λογίων, οι οποίοι έχουν σπουδάσει σε ευρωπαϊκά πανεπιστήμια. Αποτέλεσμα των όρων αυτών είναι η δημιουργία καινοφανών αντιλήψεων και νέας πνευματικής συνείδησης ανάμεσα στον υπόδουλο ελληνισμό. Όλο και περισσότερο γίνεται αντιληπτό ότι, στο εξής, η κοινωνία θα βελτιώνεται μόνο με τη γνώση που παρέχεται από τη συστηματική εκπαίδευση και θεραπεία των επιστημών, και όχι από την εμπειρική σχέση με τα πράγματα, η οποία δεν θεωρείται πια επαρκής.

Το έργο της παιδείας τίθεται πλέον σε οργανωμένη βάση και η προτεινόμενη εκπαίδευση αρχίζει να διαμορφώνει ειδικότητες.

Από τις πρώτες δεκαετίες του αιώνα αρχίζουν οι προσπάθειες για την ίδρυση σχολείων και βιβλιοθηκών, τη μετάφραση ή συγγραφή και έκδοση μαθηματικών εγχειριδίων που να εξυπηρετούν, κυρίως, τις εκπαιδευτικές ανάγκες.

Στα Μαθηματικά εκδίδονται 29 τίτλοι, εκ των οποίων τα 18, κατά τον 19ο αιώνα. Τα έντυπα αυτά είναι καθαρά αριθμητικά (11) γεωμετρικά (7), αλγεβρικά (2). Κάποια περιέχουν Αριθμητική και Άλγεβρα από κοινού (5) και σε λίγα υπάρχει και Απειροστικός Λογισμός (2).

Μια απλή ανάγνωση του καταλόγου των 29 μαθηματικών εγχειριδίων είναι αρκετή για να διαπιστώνει κανείς ότι από αυτά τα 11 είναι μεταφράσεις από δυτικοευρωπαϊκά έργα και τα υπόλοιπα αποτελούν ερανίσματα, όπως ρητά αναγράφεται στον τίτλο ή στον πρόλογο των περισσοτέρων.[9] Εκτός από αυτά όμως, και αρκετά άλλα έργα, τα οποία παρέμειναν σε χειρόγραφη μορφή, είναι, επίσης, αποτέλεσμα συμπιληματικής ή μεταφραστικής εργασίας.

Η διαπίστωση αυτή ούτε περιέργεια ούτε εντύπωση προξενεί. Είναι μάλιστα και αναμενόμενη. Σε μια εποχή, κατά την οποία γίνεται προσπάθεια να αναβαθμισθεί η παιδεία και να αφυπνισθούν τα πνεύματα, οι λόγιοι συνειδητοποιούν, ότι αυτό που προέχει δεν είναι μόνον και ούτε κυρίως η παραγωγή πρωτότυπης συγγραφικής εργασίας, αλλά η μεταφορά της γνώσης, με τη μορφή μεταφράσεων ή ερανισμάτων, από την Ευρώπη. Γνωρίζουν, ότι η

[9] Τα περισσότερα από τα έργα της εποχής αυτής είναι "παραφράσεις, επιτομές, απανθίσματα ή απλώς μεταφράσεις δυτικοευρωπαϊκών έργων, από όλους τους τομείς της θεωρητικής και επιστημονικής γνώσεως", G.P.Henderson, (1977), σ. 17.

σύγχρονη ευρωπαϊκή σκέψη σε συνδυασμό με την προγονική κληρονομιά μπορούν να αναμορφώσουν το πνευματικό κλίμα, που επί αιώνες επικρατούσε στον υπόδουλο ελληνισμό.

Κύριο κριτήριο των λογίων για την επιλογή των πρωτοτύπων είναι εάν αυτά αποτελούν μια σύγχρονη πρόταση, εάν ανταποκρίνονται όσο το δυνατόν περισσότερο στη δική τους αντίληψη περί επιστήμης, εάν μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως διδακτικά εγχειρίδια και κάποιες φορές (αυτό ισχύει κυρίως για τα αριθμητικά εγχειρίδια) εάν είναι τέτοια, ώστε να μπορούν να απευθυνθούν στο ευρύ κοινό και να λειτουργήσουν βοηθητικά στην επίλυση καθημερινών εμπορικών προβλημάτων.

Ο σκοπός της μετάφρασης είναι κοινός για όλους και διαχρονικός: η ωφέλεια του Γένους. Αυτό που αλλάζει με την πάροδο των δεκαετιών είναι η οπτική ματιά κάτω από την οποία οι λόγιοι συγγραφείς – μεταφραστές αντιλαμβάνονται την ωφέλεια αυτή.

Κατά την περίοδο που μελετάμε, ανάμεσα στους λογίους διαμορφώνονται δύο, εκ πρώτης όψεως, αντίθετες τάσεις. Σχηματικά, μπορούν να αναφερθούν ως η "παραδοσιακή" και η "νεωτερική". Η πρώτη βασίζεται στην πεποίθηση ότι μέσα από τη μελέτη των αρχαίων θα συνειδητοποιήσουν οι Έλληνες το αδιάσπαστον της πνευματικής τους παράδοσης, ενώ η δεύτερη στο ότι μόνο "τα φώτα" της Ευρώπης θα μπορέσουν να προαγάγουν τη γνώση και κατά συνέπεια να δημιουργήσουν την απαραίτητη αυτογνωσία στον υπόδουλο ελληνισμό. Τέλος, υπάρχει και μια τρίτη ενδιάμεση τάση, την οποία εκπροσωπούν οι λόγιοι, που, μολονότι πρόσκεινται στις ανακαινιστικές απόψεις της Ευρώπης, προσπαθούν να συνδυάσουν το δυτικό πνεύμα με την ελληνική πνευματική κληρονομιά.

Στον τομέα των Μαθηματικών, η παραδοσιακή αντίληψη εδράζεται στην προσπάθεια αναβίωσης των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών. Για τους εκπροσώπους αυτής της τάσης, τα Μαθηματικά αποτελούν το υπόβαθρο όλων των επιστημών και πεποίθηση τους είναι ότι η αναβίωση και η διάδοση τους θα αποτελέσει τη βάση για την αναγέννηση των επιστημών στην Ελλάδα. Δηλαδή, το μαθηματικό βιβλίο λειτουργεί και ως μέσο ανάκαμψης του ελληνισμού, με κύριο χαρακτηριστικό την επιχειρούμενη διασύνδεσή του με τους αρχαίους προγόνους. Χρηστικό εργαλείο γι' αυτή την προσπάθεια αποτελεί και η γλώσσα, διότι τόσο τα κυρίως κείμενα, όσο και οι πρόλογοι των εγχειριδίων αυτών είναι γραμμένοι σε επιμελημένη γλώσσα της εποχής. Είναι συγγράμματα τα οποία, ναι μεν σε χειρόγραφη, κυρίως, μορφή χρησιμοποιήθηκαν και ως διδακτικά εγχειρίδια, αλλά τόσο το υψηλού επιστημονικού επιπέδου περιεχόμενο τους όσο και η γλωσσική τους μορφή τα κάνουν να απευθύνονται κυρίως στους λογίους της εποχής.

Το πλέον αντιπροσωπευτικό εγχειρίδιο αυτής της τάσης είναι η μνημειώδης *Οδός Μαθηματικής* του Μεθοδίου Ανθρακίτη, μετάφραση από τα λατινικά, της οποίας δεν γνωρίζομε το πρωτότυπο, που εκδόθηκε το 1749 από τον Μπαλάνο Βασιλόπουλο, στον οποίο ανήκει και το μεγαλύτερο μέρος του προλόγου. Η *Οδός* είναι ένα εγχειρίδιο των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών και των πρώιμων βυζαντινών, στο οποίο παρουσιάζονται τα βιβλία του Ευκλείδη, του Πρόκλου, του Θεοδοσίου, του Υψικλή και του Ανθέμιου[10]. Ο πρόλογος είναι καθαρά ιστορικός, εμποτισμένος από την ιδέα της αναγέννησης των αρχαίων Μαθηματικών. Στην ίδια κατηγορία μπορούμε να εντάξομε τον Μπαλάνο Βασιλόπουλο[11], τον Κοσμά Μπαλάνο, τον Ευγένιο Βούλγαρη και τον Δημήτριο Ραζή[12].

«Προσφωνώ και προσφέρω το ανά χείρας πόνημα των περιφήμων εκείνων προγόνων, εις κοινόν όφελος ημών των Απογόνων …» (Ιωνάς Σπαρμιώτης) Πρόκειται εδώ για τις Κωνικές Τομές, δηλαδή για ένα κομμάτι της ελληνικής πνευματικής κληρονομιάς, και ο μεταφραστής τονίζοντας το, μας δηλώνει και την αιτία του εγχειρήματος, που προφανώς είναι η επαναφορά, έστω και μέσω της Δύσης, της αρχαιοελληνικής μαθηματικής παιδείας[13].

Η νεωτερική τάση, από μια μερίδα λογίων βασίζεται στη μεταφορά των νέων μαθηματικών θεωριών που αναπτύσσονται στη Δύση, και από μια άλλη, στη συγγραφή ή μετάφραση, κατά το δυνατόν, απλουστευτικών συγγραμμάτων, με σκοπό την εύκολη πρόσβαση, σε αυτά του ευρέος αναγνωστικού κοινού και τη δυνατότητα λειτουργίας τους ως απλά διδακτικά εγχειρίδια. Είναι η εποχή που το διαφωτιστικό πνεύμα της Ευρώπης έχει κάνει την εμφάνιση του και στον ελληνισμό και οι αντιλήψεις περί εκπαίδευσης έχουν αρχίσει να διαφοροποιούνται. Δίδεται έμφαση στα θετικά μαθήματα, κυρίως Μαθηματικά και Φυσική, με τα Μαθηματικά να αναγνωρίζονται ως «πρωτίστη απασών των επιστημών». Και αυτό γιατί οι επιστήμες αυτές θεωρούνται φορέας του υψίστου σκοπού της παιδείας, που είναι ο φωτισμός του Γένους. Στο πλαίσιο αυτό το ευκτέον είναι η όσο το δυνατόν μεγαλύτερη διάδοση των μαθηματικών γνώσεων και βέβαια τα αριθμητικά εγχειρίδια μπορούν να παίξουν, έστω και εν μέρει, ευκολότερα τον ρόλο αυτό.

---

[10] Στους δύο τελευταίους αποδίδονται τα λεγόμενα "ψευδοευκλείδεια", δηλαδή το 14ο και 15ο από τα Βιβλία των *Στοιχείων*

[11] με τα εγχειρίδια *Μέθοδος Γεωμετρικώς χωρούσα* (1756), που αποτελεί, μελέτη και απόπειρα επίλυσης του αρχαίου Δηλίου προβλήματος, και *Έκθεσις Ακριβεστάτη της Αριθμητικής* (1803) που γράφτηκε σαράντα χρόνια πριν από την έκδοση.

[12] Κ. Μπαλάνος με το έργο *Έκθεσις Συνοπτική Αριθμητικής Αλγέβρας και Χρονολογίας* (1798), Ραζής με το *Γεωμετρία νέα τάξει τε και μεθόδω* του Καμετίου (Camett, 1787)

[13] Εδώ, βέβαια, η έννοια του οφέλους δεν ταυτίζεται απόλυτα με αυτήν του διαφωτιστικού πνεύματος, διότι το κεφάλαιο των Κωνικών Τομών έχει αρκετές δυσκολίες, ώστε να μην απευθύνεται στο ευρύ αναγνωστικό κοινό, αλλά ούτε και στους μαθητές των σχολείων

"Της του γένους ωφελείας δεύτερα ποιησάμενος, τήνδε την βίβλο εκ του Γερμανικού εις την υμετέραν μεταφράσαι διάλεκτον ουκ απώκνησα"[14] δηλώνει ο Ζήσης Κάβρας, και ο Ψαλίδας αποφαίνεται: "Εγώ δε βλέποντας την χρήσιν και ωφέλειαν των μαθηματικών εις το κοινόν, ... ηθέλησα να μεταφράσω τα Μαθηματικά του διδασκάλου της Μαθηματικής[15] λόγια με τα οποία δικαιολογούν την απόπειρα μετάφρασης μαθηματικών έργων. Για τη μετάφραση, μάλιστα, του Ψαλίδα συνεπικουρεί και ο Κούμας όταν γράφει: "Αλλά όμως ο Ψαλίδας δια των Μαθηματικών στοιχείων του Μετζβουργίου τα οποία μετέφρασε και παρέδιδεν, ωφέλησε πολύ τους συμπατριώτες του"[16].

Οι συγγραφείς αυτοί ανήκουν στην νεωτερική τάση και τα μαθηματικά εγχειρίδια που γράφουν ή μεταφράζουν όπως και οι τίτλοι τους μαρτυρούν, είναι συνήθως απλές Αριθμητικές, και ο λόγος συγγραφής ή μετάφρασης τους είναι η πλατειά διάδοση των αριθμητικών γνώσεων. Είναι γραμμένα σε απλή γλώσσα της εποχής, ώστε να γίνονται εύκολα κατανοητά και να λειτουργούν και ως διδακτικά εγχειρίδια[17]. Εκφράζοντας το ίδιο νεωτερικό πνεύμα, δηλαδή την μεταφορά της σύγχρονης δυτικής μαθηματικής σκέψης, αλλά προσφέροντας ένα επίπεδο μαθηματικής γνώσης πολύ υψηλότερο είναι τα συγγράμματα των Χρησταρή, Κούμα και Δούγκα[18]. Των δύο τελευταίων, μάλιστα, θεωρούνται από τα σημαντικότερα μαθηματικά εγχειρίδια της προεπαναστατικής περιόδου

Να αναφερθούμε τέλος και στην τελευταία κατηγορία των λογίων, οι οποίοι, μέσα από τα συγγράμματα τους, προσπαθούν να συνδυάσουν το παραδοσιακό με το νεωτερικό πνεύμα, προβάλλοντας, δηλαδή, το δικό τους, αυτό της σύνθεσης. Την τάση αυτή εκπροσωπεί, κυρίως, ο Νικηφόρος Θεοτόκης με το δεύτερο, μετά την *Οδό Μαθηματικής* του Ανθρακίτη, μνημειώδες μαθηματικό σύγγραμμα του 18ου αιώνα, το *Στοιχείων μαθηματικών εκ παλαιών και νεωτέρων συνερανισθέντων* (1799). Ο τίτλος του εγχειριδίου είναι

[14] Ζ. Κάβρας, (1800), "Τω Εντευξομένω", σ. VII.
[15] Αθ. Ψαλίδας, (1794), "Τω αναγιγνώσκοντι", σ. ιδ.
[16] Κ. Κούμας, (1832), σ. 575.
[17] Στη νεωτερική τάση μπορούμε να συμπεριλάβουμε τους λογίους: Δημήτριο Δάρβαρη (*Πρόχειρος Αριθμητική,* 1803), Αθανάσιο Σταγειρίτη (*Επιτομή Αριθμητικής*, 1810), Αθανάσιο Ψαλίδα (*Αριθμητική εις χρήσιν των ελληνικών σχολείων* 1794, μετάφραση από τα γερμανικά), Ιωάννη Ε. Καστοριανό (*Στοιχείων της Αριθμητικής δοκίμιον,* 1797) και Γεώργιο Λασσάνη (*Η διά φωνής Αριθμητική,* 1820, μετάφραση από τα γερμανικά
[18] Ζήσης Κάβρα, *Στοιχεία της Αριθμητικής και Αλγέβρης*, 1800, μετάφραση από τα γερμανικά έργου του Euler, Μιχαήλ Χρησταρής *Στοιχεία της Αριθμητικής και Αλγέβρας*, 1788, μετάφραση από τα γερμανικά έργου του Metzburg, Κωνσταντίνος Κούμας *Σειρά στοιχειώδους των μαθηματικών και φυσικών πραγματειών*, 1807, Στέφανος Δούγκας *Στοιχεία Αριθμητικής και Αλγέβρης*, 1816.

ενδεικτικός της διάθεσης του συγγραφέα να τονίσει τη σύνθεση της ελληνοκεντρικής με την ευρωπαϊκή διάσταση, αφού το περιεχόμενο του ανήκει τόσο στην αρχαιοελληνική μαθηματική γνώση, Αριθμητική, Ευκλείδειος Γεωμετρία, Αρχιμήδεια θεωρήματα, όσο και στη δυτική, Άλγεβρα, Απειροστικός λογισμός. Είναι έργο το οποίο σε χειρόγραφη μορφή και κατά ένα μέρος του βέβαια[19], διδάχθηκε αρκετά.

Ο όρος Γεωμετρία, την εποχή αυτή, υπονοεί κατά κύριο λόγο την Ευκλείδειο. Ένα έργο Γεωμετρίας που χρησιμοποιήθηκε εκτενώς από τους λογίους είναι αυτό του Andrea Tacquet (1612-1660) *Elementa geometriae planae et solidae, et selecta ex Archimede theoremata*, που εκδόθηκε στην Αμβέρσα το 1654[20]. Στα ελληνικά το μετέφρασε για πρώτη φορά ο Ευγένιος Βούλγαρις (*Στοιχεία Γεωμετρίας*), κατά το διάστημα 1753-59[21](από την έκδοση που έγινε στην Κανταβριγία το 1710) και σε έντυπη μορφή κυκλοφόρησε μόλις το 1805.

Το γεγονός, ότι η μετάφραση έγινε από την έκδοση του 1710 και όχι από την αρχική, φαίνεται, ότι δεν είναι τόσο τυχαίο. Εικάζομε, πως αυτό οφείλεται στο ότι ο Tacquet ήταν ιησουίτης, ενώ στην έκδοση του 1710 την επιμέλεια έχει κάνει ο William Whiston (όπως αναγράφεται και στον τίτλο "…μετά σημειώσεων του Ουίστωνος"), γυιός Άγγλου πάστορα, δηλαδή προτεστάντης. Αν το συνδυάσομε, μάλιστα, με το γεγονός, ότι και οι δύο άλλες μεταφράσεις του Βούλγαρη, δηλαδή αυτή του εγχειριδίου του Segner, καθώς και η εικαζομένη του έργου του Wolf, αφορούν σε προτεσταντικά συγγράμματα μπορούμε να πούμε, ότι ο συγγραφέας προσπαθεί να βρίσκεται μέσα σε πλαίσια θρησκευτικής νομιμότητας, αν λάβομε υπ' όψιν τις σχέσεις της Ορθοδοξίας με τους προτεστάντες και τις τριβές της με τους ιησουίτες . Δηλαδή, ένα επιπλέον κριτήριο για την επιλογή διδακτικών εγχειριδίων προς μετάφραση είναι και η εναρμόνιση με το θρησκευτικό καθεστώς της εποχής.Να συμπληρώσομε ότι πολύ συχνά οι μεταφραστές επεμβαίνουν στο έργο που μεταφράζουν, κατά την κρίση τους πάντα, ώστε το εγχειρίδιο να γίνει όσο το δυνατόν πιο κατανοητό. Για παράδειγμα, στον πρόλογο του μαθηματικού έργου του Metzburg που μετάφρασε ο Ψαλίδας και εκδόθηκε στη Βιέννη το 1794, σημειώνει «…Εις ταύτα, λοιπόν, τινά μεν επρόσθεσα τινά δε αφήρεσα,…»[22] και σε κάποιο από τα σωζόμενα χειρόγραφα εγχειριδίου του Wolf[23] που μετέφρασε ο Νικόλαος Ζερζούλης

[19] Το έργο του Θεοτόκη περιέχει και στοιχεία Απειροστικού Λογισμού τα οποία δεν διδάχθηκαν.
[20] Έκανε πολλές επανεκδόσεις μέχρι το 1810 και μεταφράστηκε στα ελληνικά, τα αγγλικά και τα ιταλικά C.C.Gillispie (1970) vol. XIII, σ. 235.
[21] Κ. Κούμας, (1832) σ. 562.
[22] Α. Ψαλίδας, (1794)., "Τω Αναγιγνώσκοντι", σσ. ιδ, ιε.
[23] Είναι το έργο *Elementa matheseos universae* (Άλλη 1730) που περιλαμβάνει δύο τόμους

αναφέρεται ότι την μετάφραση συμπλήρωσε με "ταις αναγκαίαις προσθήκαις και εξ άλλων (συγγραφέων)"[24].

Να έρθουμε τώρα σε κάτι, κατά την άποψη μας, αρκετά σημαντικό: καθ' όλη τη διάρκεια των μεταβυζαντινών αιώνων και μέχρι πριν την Επανάσταση, η διδασκαλία όλων των μαθημάτων, των Μαθηματικών συμπεριλαμβανομένων, γινόταν κυρίως με τη βοήθεια χειρογράφων–μαθηματαρίων τα οποία διατηρούσαν οι μαθητές αλλά και οι δάσκαλοι, και τα οποία πολλές φορές κυκλοφορούσαν επί μεγάλο χρονικό διάστημα πριν φτάσουν στο τυπογραφείο, αν και τις περισσότερες φορές δεν έπαιρναν έντυπη μορφή. Ο αριθμός των μαθηματικών χειρογράφων του 18ου και των αρχών του 19ου αιώνα, τα οποία μέχρι στιγμής έχουν καταγραφεί, 155 επώνυμα και 94 ανώνυμα, βεβαιώνει του λόγου το αληθές.

Θα πρέπει να αναφέρομε επίσης, ότι συχνά υπάρχουν διαφορές στην ύλη ενός εγχειριδίου ανάμεσα στην χειρόγραφη και στην έντυπη μορφή του. Με βάση το υλικό που έχομε για έρευνα, μια πρώτη γενική παρατήρηση που μπορούμε να κάνομε είναι, ότι άλλοτε είναι θεματικά πλουσιότερο το έντυπο, που είναι και η πιο συνηθισμένη περίπτωση, και άλλοτε το χειρόγραφο. Τα έντυπα, εκτός από την διδακτική τους αποστολή, απευθυνόταν, πολύ συχνά, και σε λογίους, κάποιοι από τους οποίους ήταν δάσκαλοι, επομένως ο εμπλουτισμός τους με ύλη υψηλοτέρου επιπέδου ήταν δικαιολογημένος. Άλλοτε, όταν προορισμός του βιβλίου ήταν η διάδοση του στο ευρύ αναγνωστικό κοινό, φαινόμενο των τελευταίων δεκαετιών της προεπαναστατικής περιόδου, ο συγγραφέας περιόριζε σκόπιμα την ύλη σε σχέση με τα χειρόγραφα, τα οποία χρησιμοποιούνταν μόνο για διδασκαλία. Η περίπτωση αυτή αφορά κυρίως σε εγχειρίδια Αριθμητικής, που ήταν ο πλέον εύκολος, κατανοητός και χρηστικός κλάδος των Μαθηματικών

Μια λέξη κλειδί που αρκετά συχνά χρησιμοποιούμε είναι η λέξη «χρηστικός» καθώς και κάποιες συνώνυμες της και προφανώς δεν είναι τυχαίο. Αμέσως τώρα, θα εξετάσομε έναν χώρο στον οποίο τόσο η Αριθμητική όσο και η Γεωμετρία βρίσκουν πολλές εφαρμογές και δικαιολογούν απόλυτα την χρήση του παραπάνω όρου, τον χώρο του εμπορίου και της τεχνολογίας.

Προς τα τέλη του 17ου αιώνα, οι Έλληνες λόγων προνομίων που παίρνουν από την Οθωμανική Αυτοκρατορία, κατορθώνουν να ελέγξουν σε μεγάλο βαθμό το εμπόριο και τη διπλωματία. Η δημιουργία της τάξης των εμπόρων συμβαδίζει με την εμφάνιση της ανάγκης για απόκτηση των απαραιτήτων

Elementa arithmeticae και *Elementa geometricae* χρησιμοποιήθηκε αρκετά από Έλληνες λογίους.

[24] Γ. Καράς, (1992), σ. 81.

για την εξάσκηση του εμπορίου γνώσεων. Και όσο προχωρούν οι δεκαετίες του 18ου αιώνα, στην αντίληψη των λογίων το εμπόριο πρέπει να έχει "τον αυτόν λόγο με τας λοιπάς τέχνας και επιστήμας" και πρέπει να διδάσκεται όπως και "πάσα άλλη επιστήμη"[25]. Σε πολλά σημεία των εμπορικών εγχειριδίων επισημαίνεται η ανάγκη διδασκαλίας της "εμπορικής τέχνης" σε ένα καθαρά επιστημονικό επίπεδο, ενώ το 1814 στην Οδησσό ιδρύεται η "Ελληνεμπορική Σχολή"[26].

Επί αιώνες, το βασικότερο βοήθημα για την απόκτηση των στοιχειωδών αριθμητικών γνώσεων που απαιτούνταν στο εμπόριο ήταν η γνωστή μας *Λογαριαστική* του Μανουήλ Γλυζωνίου, με τις 20 συνολικά εκδόσεις από το 1568 έως το 1818[27]. Το εγχειρίδιο αυτό είναι μια πρακτική Αριθμητική, της οποίας το περιεχόμενο ανταποκρίνεται στις εμπορευματικές ανάγκες της παραδοσιακής οικονομίας κατά την εποχή αυτή. Εκτός από τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις, περιέχει και σελίδες με πληροφορίες για μονάδες βάρους, νομίσματα, αποστάσεις, υπολογισμό κερδών κ.λπ. Το *Γλυτζούνι*, όπως ήταν γνωστό το βιβλίο αυτό, είναι στην ουσία η ελληνική εκδοχή των abaci, που κυκλοφορούσαν στην Ευρώπη και ιδιαιτέρως στην Ιταλία, κατ' εξοχήν εμπορική χώρα[28].

Από το 1568 έως και το 1820 κυκλοφόρησαν περίπου 20 εμπορικά εγχειρίδια, και κάποια από αυτά πραγματοποίησαν δύο ή τρεις εκδόσεις. Με τον όρο "εμπορικά εγχειρίδια", εννοούμε τα ζυγόμετρα, τους πίνακες ισοτιμιών και τις Αριθμητικές οι, οποίες περιείχαν και στοιχεία που αφορούσαν στα εμπορικά πράγματα.

Η επόμενη Αριθμητική αυτού του είδους κυκλοφορεί το 1769 στην Άλλη (έχουν προηγηθεί οι εκδόσεις τριών εμπορικών εντύπων το 1645, το 1708 και το 1746) και είναι το *Εγχειρίδιον Αριθμητικόν …οι οποίοι μέλλουσιν εις του Καίσαρος του τόπου να πραγματευτούν* του Κωνσταντίνου Τζεχάνη[29], το οποίο πραγματεύεται τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις με ακεραίους αριθμούς και κλάσματα, τη μέθοδο των τριών, των πέντε, των επτά και της συ-

---

[25] Από το εγχειρίδιο *Διδασκαλία εντελής συστηματική απάσης της Εμπορικής Επιστήμης προς χρήσιν των εμπόρων*, μετάφραση από τα γερμανικά, Ιάσιο 1817, σ. 2.

[26] Μ. Παρανίκας (1867), σ. 182.

[27] Παπαδόπουλος 2481-2498

[28] Τ. Σκλαβενίτης,(1988) σ. 74. Να εξηγήσομε τι ακριβώς σημαίνει η λέξη abaco: τους αντίστοιχους αιώνες στην Ευρώπη υπήρχαν τα βιβλία abaci, τα οποία απευθυνόταν σε μαθητές εμπορικών σχολείων, τα λεγόμενα σχολεία abaci, και περιείχαν λίγα στοιχεία Αριθμητικής, με πολλά, όμως, παραδείγματα εφαρμογών από την καθημερινή ζωή. Διδάσκονταν από τους δασκάλους abaci, ο πιο γνωστός από τους οποίους ήταν ο Fibonacci. Αυτά, σε αντίθεση με τα βιβλία algorismus, στα οποία ο τρόπος αριθμητικών υπολογισμών ήταν ο ινδοαραβικός, δεν περιείχαν παραδείγματα και χρησιμοποιούνταν από μαθητές των εκκλησιαστικών σχολείων

[29] Παπαδόπουλος 5878.

ντροφίας. Το τελευταίο κεφάλαιο έχει τίτλο: "Περί της λεγομένης Ιταλικής Πράξεως, και περί του, πως χρειάζεται συντόμως τα χέρια των Παράδων, των Πιτακίων και Μαργιασίων να γένουν γρόσια και Φλορίντζια". Ο τίτλος είναι άκρως διευκρινιστικός για το περιεχόμενο.

Με την πάροδο των δεκαετιών, νέα εμπορικά κέντρα ιδρύονται στα Ιωάννινα, τη Χίο, την Πάτρα, κ.λπ.[30] και οι συναλλαγές με εμπορικούς οίκους του εξωτερικού πληθαίνουν. Αποτέλεσμα όλων αυτών των διαφοροποιήσεων είναι οι αυξημένες ανάγκες των ανθρώπων που καταγίνονται με το εμπόριο σε γνώσεις, οι οποίες ξεπερνούν πλέον αυτές που προσφέρει το *Γλυτζούνι* και τις κάπως περισσότερες της *Αριθμητικής* του Τζεχάνη. Τα αριθμητικά εγχειρίδια, που κυκλοφορούν προς το τέλος του αιώνα και τις αρχές του νέου, περιέχουν περισσότερη ύλη Αριθμητικής και είναι εμπλουτισμένα με καταλόγους νομισμάτων ξένων χωρών, αναλογίες μεταξύ νομισμάτων και μονάδων μετρήσεως κ.λπ. Σε πολλά σημεία των προλόγων τονίζεται "Η μεγάλη ωφέλεια, την οποία προξενεί η Αριθμητική εις κάθε επάγγελμα και μάλιστα εις το των πραγματευτών…» και χαρακτηρίζεται κρηπίς της εμπορίας, «διότι ουχ ήττον χρήζει η οικία θεμελίου, ή η εμπορία Αριθμητικής"[31].

Είναι φανερό, ότι σε μια εποχή (αρχές του 19ου αιώνα) κατά την οποία τα Μαθηματικά έχουν πλέον αποκτήσει ένα νέο θεωρητικό χαρακτήρα, έχουν δηλαδή περάσει στον χώρο της επιστήμης, η σχέση τους με την καθημερινή ανθρώπινη πρακτική δεν έχει εκλείψει.

Η άμεση σύνδεση της Αριθμητικής με το εμπόριο δεν αναφέρεται μόνο στους προλόγους των αριθμητικών εγχειριδίων αλλά και σε περιοδικά της εποχής. Για παράδειγμα, σε τεύχος του 1818 του *Λογίου Ερμή* διαβάζομε ότι εκδόθηκε "επιτέλους μία σύντομος και εύληπτος Αριθμητική δια τα τέκνα των πραγματευτών"[32].

Μια χαρακτηριστική περίπτωση αυτής της αντιμετώπισης των Μαθηματικών είναι αυτή που κυριαρχεί στα σχολεία του παροικιακού ελληνισμού της δυτικής και κεντρικής Ευρώπης[33] Οι στόχοι της παρεχομένης παιδείας στα σχολεία αυτά είναι διαφορετικοί από εκείνους των τουρκοκρατούμενων

---

[30] Ο ελληνικός εμπορικός στόλος, ο οποίος στις αρχές του 18ου αιώνα περιοριζόταν στην ακτοπλοϊα, ιδιαίτερα μετά τη συνθήκη του Κιουτσούκ Καιναρτζή (1774), αυξάνεται σε όγκο και χωρητικότητα Ν. Σβορώνος, (1992), σ. 52.

[31] Δ. Δάρβαρις, *Πρόχειρος Αριθμητική*, Βιέννη 1803, Πρόλογος σ. 3, Προοίμιον σ. vii. (Α. Βρεττός Β 354). Το 1797 κυκλοφορεί στη Βιέννη και το εγχειρίδιο του Εμμανουήλ Καστοριανού *Στοιχείων Αριθμητικής δοκίμιον* (Λαδάς-Χατζηδήμος ΙΙ 73)

[32] *Λόγιος Ερμής*, τεύχος 15ης Σεπτεμβρίου 1818, σ. 523.

[33] Είναι τα σχολεία της Βιέννης, της Πέστης, του Σεμλίνου, της Τεργέστης, και της Οδησσού που ιδρύθηκαν την τελευταία δεκαετία του 18ου αιώνα ή την πρώτη του 19ου.

περιοχών. Η εκμάθηση της ελληνικής γλώσσας, η ενίσχυση του θρησκευτικού φρονήματος και η προετοιμασία των νέων για την άσκηση του εμπορίου αποτελούν τον απώτερο σκοπό της εκπαιδευτικής δραστηριότητας. Στα πλαίσια αυτά, είναι φυσικό να μην διδάσκονται τα "επιστημονικά" θεωρητικά μαθήματα. Και ο μόνος μαθηματικός κλάδος που θεωρείται απαραίτητος είναι η Αριθμητική, για την παροχή γνώσεων χρησίμων στα εμπορικά πράγματα[34]. Δηλαδή ο ρόλος του μαθηματικού εγχειριδίου και στην περίπτωση αυτή είναι καθαρά χρησιμοθηρικός και μάλιστα με την απολύτως στενή έννοια του όρου.

Αν ο βοηθητικός, για το εμπόριο, μαθηματικός κλάδος είναι, κατά κύριο λόγο, η Αριθμητική, η τεχνική σκέψη της εποχής υποβοηθείται και από τη Γεωμετρία και την Τριγωνομετρία. Ο Κούμας, σημειώνει ότι "Η Γεωμετρία είναι μάθημα αναγκαιότατον εις πάντα πολίτην …χρείαν ταύτης έχουσιν οι τεχνίται, λέγω οικοδόμοι, τορνευταί, μηχανουργοί…"[35].

Συνείδηση γίνεται πλέον και η ανάγκη χρήσης των Μαθηματικών στη ναυτιλία, μια και "η σφαιρική Γεωμετρία…αυτή είναι η πηγή και το θεμέλιο όλης της …ναυτιλίας, οπού χωρίς τη βοήθεια της κανένα σχεδόν ναυτιλιακό πρόβλημα δεν ημπορεί παντάπασιν να λυθεί"[36].

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της αντίληψης, η οποία μάλιστα σε κάποιους εμφανίζεται και κατά το πρώτο μισό του αιώνα, αποτελεί ο Μεθόδιος Ανθρακίτης, ο οποίος στο δεύτερο τόμο του τρίτομου έργου *Οδός Μαθηματικής*, αφιερώνει ένα μεγάλο μέρος στις εφαρμογές των Μαθηματικών, περισσότερο της Γεωμετρίας, στην πρακτική ζωή. Αναφέρεται σε κατασκευές γεωμετρικών οργάνων, όπως γωνιομέτρων, διαβητών, τοπογραφικών οργάνων, κ.λπ. και συνεχίζει με πρακτικά προβλήματα χρήσης των οργάνων αυτών (διοπτεύσεις, μέτρηση ύψους πύργου κ.λπ.). Και όλα αυτά σε ένα έργο που δεν έχει καμία σχέση με απλά χρήσιμα εγχειρίδια

Αρκετά από τα μαθηματικά εγχειρίδια που εκδόθηκαν, διδάχθηκαν, τα περισσότερα υπό μορφή χειρογράφου, στα σχολεία της εποχής, κυρίως στα δύο σημαντικά εκπαιδευτικά ιδρύματα των Ιωαννίνων, την Μπαλαναία και τη Μαρουτσαία Σχολή, την Αθωνιάδα Σχολή και την Πατριαρχική Ακαδημία, τις δύο Ηγεμονικές Ακαδημίες του Ιασίου και του Βουκουρεστίου, στην Ευαγγελική Σχολή της Σμύρνης και στα νεωτερικά σχολεία, δηλαδή το Φιλολογικό Γυμνάσιο της Σμύρνης και την Ακαδημία των Κυδωνιών.

---

[34] Ένα από τα εγχειρίδια που χρησιμοποιήθηκαν στην διδασκαλία ήταν το *Δοκίμιον Στοιχείων της Αριθμητικής* του Καστοριανού.
[35] Κ. Κούμας (1832) σ. 3.
[36] Χ. Κουταλεύς, χειρόγραφο Σφαιρικής Γεωμετρίας, Πετρούπολη 1806, "αφιερωτικό σημείωμα". Πρβλ. Γ. Καράς, (1992) σ. 115.

Αρκετά από τα συγγράμματα αυτά κριτικάρονται από λογίους της εποχής, όπως για παράδειγμα από τον Μοισιόδακα, κατά την άποψη του οποίου η επιλογή του Βούλγαρη να διδάξει το σύγγραμμα του Segner που ο ίδιος είχε μεταφράσει, υπήρξε λανθασμένη, διότι το έργο αυτό ήταν "από πάντων των νεωτερικών συγγραμμάτων το μάλλον δυσκαταληπτότερον..."[37]. Από όλους τους μαθηματικούς κλάδους, η Αριθμητική παραμένει κυρίαρχη καθ' όλη τη διάρκεια της Τουρκοκρατίας, σε όλο τον ελληνισμό, ακόμη και όταν τα Μαθηματικά αποκτούν έναν καθαρά θεωρητικό χαρακτήρα και έχουν μια επιστημονική αντιμετώπιση εκ μέρους των λογίων. Από ένα σύνολο 200 περίπου επωνύμων και ανωνύμων χειρογράφων τα 85, δηλαδή ένα ποσοστό 42.5% είναι καθαρά αριθμητικά. Τα καθαρά γεωμετρικά είναι 65, δηλαδή ένα ποσοστό 32.5% και ανήκουν κυρίως, όσα βέβαια είναι χρονολογημένα, στον 18ο αιώνα, όταν το διαφωτιστικό κίνημα δεν έχει ακόμη εξαπλωθεί και η μαθηματική γνώση είναι προσκολλημένη στην αρχαιοελληνική μαθηματική παράδοση, δηλαδή την Γεωμετρία.

Στοιχεία Άλγεβρας, θα εμφανισθούν αρχικά σχετικά νωρίς, μέσα από το έντυπο του Segner σε μετάφραση του Βούλγαρη (1767), αλλά το πρώτο καθαρά αλγεβρικό σύγγραμμα θα είναι αυτό του Lacaille, που μετέφρασαν οι Ασάνης-Σπαρμιώτης (1797). Η Άλγεβρα, της οποίας η ελληνική καταγωγή μνημονεύεται στα περισσότερα εγχειρίδια, θα διδαχθεί σε αρκετά από τα σχολεία της εποχής, ιδιαίτερα κατά τις πρώτες δεκαετίες του 19ου αιώνα και θα εδραιωθεί στα εκπαιδευτικά προγράμματα, ως ισότιμο μέλος, μαζί με την Αριθμητική και τη Γεωμετρία. Τα καθαρά αλγεβρικά χειρόγραφα είναι πολύ λιγότερα (19) των προηγουμένων.

Η εμφάνιση του Απειροστικού Λογισμού, δηλαδή των σύγχρονων Μαθηματικών, στα επιστημονικά πράγματα θα γίνει με αρκετή καθυστέρηση σε σχέση με την Ευρώπη, προς το τέλος του αιώνα, αρχικά από τον Νικηφόρο Θεοτόκη και στη συνέχεια από τον Κωνσταντίνο Κούμα. Παρουσιάζει στοιχεία, τόσο από τη νευτώνεια παράδοση, όσο και από αυτή του Leibnitz και θα αποτελέσει ένα σημαντικό βήμα προς τον εκσυγχρονισμό στον χώρο των επιστημών Η μοναδική, όμως, μαρτυρία περί διδασκαλίας του μαθήματος αυτού είναι του Κ. Κούμα στο Φιλολογικό Γυμνάσιο της Σμύρνης το οποίο ανήκει στα λεγόμενα νεωτερικά σχολεία.

Ανεξάρτητα από την βραχύχρονη ύπαρξη του (1808-1819), το Φιλολογικό Γυμνάσιο της Σμύρνης υπό τη διεύθυνση του Κ. Κούμα, υπήρξε ένα από τα καλύτερα οργανωμένα σχολεία της εποχής. Η συνεισφορά του στην ελληνική παιδεία και ειδικά στις θετικές επιστήμες υπήρξε τεράστια. Τα Μαθηματικά που διδάχθηκαν ήταν πραγματικά υψηλού επιπέδου. Το οκτάτομο

[37] Ι. Μοισιόδαξ, (1780) σσ. 42, 43.

έργο του Κούμα *Σειρά Στοιχειώδους των Μαθηματικών και Φυσικών πραγματειών* (Βιέννη, 1807) σίγουρα είναι το πιο σύγχρονο ελληνικό επιστημονικό σύγγραμμα που έχει εκδοθεί τα προεπαναστατικά χρόνια.

Φτάσαμε στο τέλος της διαδρομής μας που συμπίπτει με την εποχή της Ελληνικής Επανάστασης, όταν οποιαδήποτε προσπάθεια αναβάθμισης της νεοελληνικής εκπαίδευσης η οποία είχε πάρει σάρκα και οστά κατά τις τελευταίες προεπαναστατικές δεκαετίες με όλα τα θετικά και ελπιδοφόρα αποτελέσματα που είχε σταματά. «Η εποχή της ακμής και της δύναμης κορυφώνεται και σπάει με τον αγώνα» αποφαίνεται ο Κ.Θ. Δημαράς και ο Ν. Σωτηράκης θεωρεί ότι «ο κύκλος της προεπαναστατικής αναγέννησης με κέντρο τις επιστήμες έκλεισε τελειωτικά και οι πρώτες προσπάθειες του ανεξάρτητου κράτους έγιναν και έμειναν έξω από τον κύκλο αυτό…»[38] Όμως η κληρονομιά έμεινε μια και η διαμόρφωση της σύγχρονης ελληνικής επιστημονικής σκέψης και κατ΄ επέκτασιν της μαθηματικής, έχει τις απαρχές της στη δυτική επιστημονική παιδεία του 18ου αιώνα, όπως αυτή μετακενώθηκε από τους Έλληνες διαφωτιστές

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Κάβρας, Γ. 1800 *Στοιχεία της Αριθμητικής και Αλγέβρης,* Ιένα

Καράς, Γ. 1991. *Οι θετικές επιστήμες στον ελληνικό χώρο (15ος -19ος αι.),* Αθήνα

Καράς Γ. 1992 *Οι Επιστήμες στην Τουρκοκρατία* τόμ. Α, Αθήνα

Κούμας Κ. 1832 *Ιστορία των* ανθρωπίνων *πράξεων τομ. ΙΒ, Οι Έλληνες*, Βιέννη

Μοισιόδαξ Ι. 1780 *Απολογία* Βιέννη

Παρανίκας Μ. 1867 *Σχεδίασμα,* Κωνσταντινούπολη

Σάθας Κ., 1868 *Νεοελληνική Φιλολογία, Βιογραφίαι* Αθήνα

Σβορώνος Ν, 1992. *Επισκόπηση της νεοελληνικής ιστορίας,* Αθήνα

Σκλαβενίτης 1988 "Τα εμπορικά εγχειρίδια της Βενετοκρατίας και της Τουρκοκρατίας". Μελέτη από το έργο *Προσεγγίσεις στις νοοτροπίες των βαλκανικών λαών, Οικονομικές αντιλήψεις και συμπεριφορές,* Αθήνα

Σωτηράκης Ν. 1930 *Βενιαμίν Λέσβιος, Βιογραφία* Μυτιλήνη

Ψαλίδας Αθ.1794, *Αριθμητική*, Βιέννη

C.C.Gillispie, 1970 *Dictionary of scientific biography*, New York, τόμ. XIII

G.P.Henderson 1977, *Η αναβίωση του ελληνικού στοχασμού,* Αθήνα

[38] Σωτηράκης (1930) σ. 42

ΤΟ ΕΥΣΥΝΟΠΤΟΝ ΣΥΝΤΑΓΜΑ ΤΟΥ 1008: ΤΟ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΟ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟ ΤΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Γιάννα Κατσιαμπούρα

Δρ Ιστορίας των Επιστημών

Το *Ευσύνοπτον σύνταγμα εις τας τέσσαρας επιστήμες* είναι το παλαιότερο διδακτικό εγχειρίδιο των μαθηματικών επιστημών (αριθμητική, γεωμετρία, μουσική, αστρονομία) που σώζεται ολόκληρο από τους βυζαντινούς χρόνους.[1] Γραμμένο το 1008, σε μια εποχή της οποίας έχει προηγηθεί ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον τόσο για την εκπαίδευση ως θεσμό εκ μέρους της επίσημης κοσμικής εξουσίας, όσο και η αναζωπύρωση της συζήτησης για τις μαθηματικές επιστήμες ανάμεσα κυρίως στην ομάδα των Βυζαντινών λογίων, αφ' ενός απεικονίζει μια προσπάθεια για τη συγκρότηση ενός διδακτικού εγχειριδίου με τη μορφή τετρακτύος,[2] ώστε να καλύπτονται οι εκπαιδευτικές ανάγκες όσων συνέχιζαν τις σπουδές τους σε ανώτερο επίπεδο, αφ' ετέρου επιτρέπει να δει κανείς ποιες θεωρούνταν αυτές οι ανάγκες, ώστε να σχηματίσει μια εικόνα του πολιτισμικού φορτίου του συγκεκριμένου κοινωνικού σχηματισμού. Τέλος, μας επιτρέπει να σχηματίσουμε μια εικόνα του τι νομιμοποιούνταν ως περιεχόμενο των επιστημών, ποιο δηλαδή ήταν το κυρίαρχο επιστημονικό παράδειγμα, μέσω του ιδεολογικού μηχανισμού της εκπαίδευσης, στην ιστορικό κοινωνικό σχηματισμό του Βυζαντίου, αλλά και ποια εκπαιδευτική μεθοδολογία προκρινόταν.

ΓΕΝΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ

Το κείμενο του 1008 αποδεικνύεται χαρακτηριστικό παράδειγμα προσπάθειας παρουσίασης επιστημονικού λόγου για την εποχή του, προϊόν της

[1] Εκδόθηκε από τον J.L. Heiberg και δημοσιεύθηκε το 1929, μετά το θάνατό του, με τον τίτλο *Anonymi, Logica et Quadrivium*, Heiberg J.L. (ed.), *Anonymi, Logica et Quadrivium, cum Scholiis Antiquis*, Det Kgl. Videnskabernes Selskab., Historisk-filologiske Meddelelser XV, 1, Kopenhagen 1929.

συζήτησης που βρισκόταν σε εξέλιξη και των εκπαιδευτικών αναγκών που παρουσιάζονταν σε μια κοινωνία, της οποίας ο εκπαιδευτικός μηχανισμός αποτελούσε αναπόσπαστο μέρος. Η μελέτη του περιεχομένου του *Ευσύνοπτου συντάγματος* επιβεβαιώνει την επιβίωση των επιστημονικών αρχών της ύστερης Αρχαιότητας και την προσπάθεια επικαιροποίησής τους στη βυζαντινή εποχή.

Στις αρχές του 11ου αιώνα, αν κρίνουμε από τα χειρόγραφα που έχουν διασωθεί, το περιεχόμενο και το πλήθος τους, ήταν γνωστά τα περισσότερα από τα επιστημονικά έργα που είχαν συγγραφεί μέχρι και την εποχή της ύστερης Αρχαιότητας, έστω και από νεότερους υπομνηματισμούς στη χειρότερη περίπτωση. Το *Ευσύνοπτου σύνταγμα* αποτελεί μια επιτομή αυτών των έργων, ενώ συχνές ονομαστικές αναφορές των αρχαίων συγγραφέων προφανώς στοχεύουν στο να ενισχύσουν την αξιοπιστία και την εγκυρότητά του. Είναι ενδεικτικό δε ότι πολύ συχνά ο συγγραφέας αναφέρει τον όρο «επίτομος» για να χαρακτηρίσει το έργο του, ώστε να καταστήσει ακόμη πιο έκδηλο τον εγχειριδιακό χαρακτήρα του. Στο χαρακτήρα αυτόν του έργου οφείλεται και ο έκδηλος διδακτισμός και ο απλουστευτικός χαρακτήρας του. Η δομή του κειμένου φανερώνει αφ' εαυτής ότι ο ρόλος του *Ευσυνόπτου συντάγματος* ήταν εισαγωγικός και λειτουργούσε σε συνδυασμό με τα κύρια έργα των αρχαίων επιστημόνων που χρησιμοποιεί ως βάση του, δηλαδή του Νικόμαχου, του Ευκλείδη και του Πτολεμαίου.

Εν συνόλω, το *Ευσύνοπτου σύνταγμα* είναι ένα κείμενο αντιπροσωπευτικό της εποχής του, τόσο ως προς το επιστημονικό φορτίο του, όσο και ως προς τις γενικότερες αντιλήψεις που πρεσβεύει. Το περιεχόμενό του είναι απολύτως στο πνεύμα μιας περιόδου κατά την οποία το μεγαλύτερο μέρος των μαθηματικών έργων της ύστερης Αρχαιότητας είχαν ανακτηθεί και βρίσκονταν εν χρήσει. Το κείμενο παραπέμπει συνεχώς στον Ευκλείδη και τον Πτολεμαίο, ενώ αναφέρει και τον Αρχιμήδη, όπως και τον Πυθαγόρα και τον Πλάτωνα, ενώ χωρίς να τον αναφέρει ονομαστικά έχει δεχθεί κύριες επιρροές από τα *Αριθμητικά* του Νικόμαχου του Γερασηνού. Η αναφορά γίνεται απευθείας στους αρχαίους, που πιθανόν να σημαίνει ότι προσέδιδε περισσότερο κύρος και αξιοπιστία στο κείμενο και ότι οι σπουδαστές θα έπρεπε να αποκτήσουν γνώση τουλάχιστον των ονομάτων τους. Η συχνή δε αναφορά στον Πλάτωνα μπορεί να συνδεθεί με την μετέπειτα μελέτη του, που εμφανίστηκε ως κύριο ιδεολογικό ρεύμα στην Κωνσταντινούπολη μετά τα μέσα του 11ου αιώνα, με κύριο εκπρόσωπο τον Μιχαήλ Ψελλό.

---

[2] Για την ιστορία του προγράμματος της τετρακτύος στη βυζαντινή εκπαίδευση, βλ. Γιάννα Κατσιαμπούρα, *Πρόσληψη, μετάδοση και λειτουργία των επιστημών στους μεσοβυζαντινούς χρόνους και το Quadrivium του 1008*, διδ. διατριβή, Πάντειον Πανεπιστήμιο, Αθήνα 2004.

Με μια περιεχομενική ανάλυση, θα δούμε ότι όσοι περάτωναν τις σπουδές αυτού του επιπέδου θα ήταν σε θέση να εκτελούν τουλάχιστον μια σειρά μετρήσεις. Οι μέθοδοι καταμέτρησης κατέχουν τη μερίδα του λέοντος στη διάρθρωση της ύλης. Κι αυτό είναι πιθανόν ενδεικτικό και των αναγκών που θεωρούσαν ότι εμφανίζονται στο ευρύτερο κοινωνικό πλαίσιο. Άλλωστε, ειδικά η κατοχή γνώσεων αστρονομίας θεωρούνταν εκ των ων ουκ άνευ, τόσο για τον υπολογισμό του χρόνου και του Πάσχα, όσο και για τη ναυσιπλοΐα. Το περιεχόμενο του *Ευσύνοπτου συντάγματος* επιβεβαιώνει αυτή την τάση. Οι συνεχείς αναφορές δε σε πιο ειδικά και εκτεταμένα βασικά έργα, όπως του Ευκλείδη και του Πτολεμαίου, όπως και η συχνή υπενθύμιση της συνοπτικότητάς του, καθιστά σαφέστερο τον εγχειριδιακό και εισαγωγικό χαρακτήρα του έργου. Πρόκειται, όπως φαίνεται, για μια πραγματεία που γράφηκε με συγκεκριμένους διδακτικούς στόχους, την προσφορά γνώσης βασικών αρχών για την πρακτική αξιοποίησή τους και την καθοδήγηση για περαιτέρω μελέτη.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

Στο κείμενο ακολουθείται μια συγκεκριμένη δομή, που εξειδικεύεται σε κάθε ενότητα: ορισμοί, βασικές αρχές, τρόποι υπολογισμού, κατακλείδα για την αξία της επιστήμης.

Ξεκινώντας από την αριθμητική, ο συγγραφέας εξηγεί την επιλογή του με την αξία που προσδίδει στην επιστήμη αυτή και τον κυρίαρχο ρόλο που αυτή διαδραματίζει σε σχέση με τις υπόλοιπες: «*Αύτη καθηγεμών και πρωταίτιος άτε και απλουστέρα και στοιχειώδης και προς εκείνας* [τις υπόλοιπες μαθηματικές επιστήμες] *και απλουστέρα και στοιχειώδης και προς εκείνας ευθέως διαβιβάζουσα*». Η άποψη αυτή που εκφράζεται με εμβληματικό τρόπο παραπέμπει ευθέως στην άποψη περί αριθμητικής του Νικόμαχου του Γερασηνού, όπως εκφράζεται στα *Αριθμητικά*.[3]

Η άποψη για την αριθμητική ως θεμέλιο των επιστημών επαναλαμβάνεται στο εγχειρίδιο, για να τονιστεί η σημασία της. Στην ενότητα περί γεωμετρίας

[3] *Τίνα ουν αναγκαίον πρωτίστην των τεσσάρων τούτων μεθόδων εκμανθάνειν; ή δηλονότι την φύσει πασών προϋπάρχουσαν και κυριωτέραν αρχής τε και ρίζης και οιονεί προς τας άλλας μητρός λόγον επέχουσαν. έστι δε αύτη η αριθμητική ου μόνον, ότι έφαμεν αυτήν εν τη του τεχνίτου θεού διανοία προϋποστήναι των άλλων ωσανεί λόγον τινά κοσμικόν και παραδειγματικόν, προς ον απερειδόμενος ο των όλων δημιουργός ως προς προκέντημά τι και αρχέτυπον παράδειγμα τα εκ της ύλης αποτελέσματα κοσμεί και του οικείου τέλους τυγχάνειν ποιεί, αλλά και ότι φύσει προγενεστέρα υπάρχει, όσω συναναιρεί μεν εαυτή τα λοιπά, ου συναναιρείται δε εκείνοις*». *Nicomachi Geraseni Pythagorei introductionis arithmeticae libri II*, Hoche Ric. (ed.), Bibliotheca Scriptorum Graecorum Teubneriana, Teubner, Lipsiae 1866, 1, 4.

διαβάζουμε: «*αριθμητικής* […], *ην αρχήν είναι των επιστημών ωρίσαντο και θεμέλιον, και ταύτης εκτός μηδεμίαν εκείνων συστήναι δύνασθαι*». Η άμεση παραπομπή στη νικομάχεια αξιολόγηση των επιστημών είναι ακόμη μία ένδειξη της επιρροής που ασκεί ο Νικόμαχος. Επιρροή η οποία είναι εμφανής από τους ορισμούς των αριθμών που είναι άμεσα επηρεασμένοι από τη μυστικιστική πυθαγόρεια αντίληψη που διακονούσε ο Νικόμαχος, καθώς και από τις αναφορές στον Πυθαγόρα.

Οι αρχικοί ορισμοί που δίνονται στο εγχειρίδιο προσπαθούν να συνδυάσουν την αρχαία ελληνική αντίληψη περί των αριθμών με τη χριστιανική κοσμοθεωρία. Έτσι, ο αριθμός ένα, παραδείγματος χάρη, ορίζεται με βάση την ομοιότητά του με το θείο.[4]

Η διάρθρωση της ύλης προσπαθεί να πληροί τους εκπαιδευτικούς στόχους για τους οποίους είχε συγγραφεί. Έτσι, για την ευκολότερη πρόσληψη του περιεχομένου, σε κάθε νοηματική ενότητα προτάσσεται ο ορισμός και ακολουθεί μια πιο εξειδικευμένη παρουσίαση ενώ ακολουθούν παραδείγματα για πληρέστερη κατανόηση.

Το γεγονός ότι το εγχειρίδιο απευθυνόταν στους σπουδαστές της ανώτερης βαθμίδας της βυζαντινής εκπαίδευσης συνάγεται από το επίπεδο δυσκολίας του περιεχομένου. Ο συγγραφέας θεωρεί ότι οι αναγνώστες διαθέτουν ήδη κάποιες γνώσεις, τουλάχιστον ενός βασικού επιπέδου, τουλάχιστον έχουν διδαχθεί τις βασικές αριθμητικές πράξεις και τους λογαριασμούς, έτσι προχωρεί στην παρουσίαση πιο ειδικών θεμάτων, καταβάλλεται δηλαδή προσπάθεια για μεγαλύτερη εμβάθυνση, αν και σε περιορισμένη έκταση. Ότι είναι δε περιορισμένο το επίπεδο στο οποίο κινείται, φροντίζει και ο ίδιος να τι κάνει εμφανές, όταν στο τέλος της ενότητας αναφέρει: «*πέρας* […] *ο κατά σύνοψιν λόγος των περί αριθμητικής ήδη λαβέτω των κατά μέρος αριθμητικών θεωρημάτων ως ου πεπερασμένων την έκθεσιν παραιτούμενος*».[5] Στο *Ευσύνοπτο σύνταγμα* διακρίνεται μια προσπάθεια περαιτέρω ανάλυσης, αφού δίνεται ιδιαίτερη σημασία στην παρουσίαση τόσο των ευρετικών μεθόδων όσο και των μεθόδων κατασκευής. Είδαμε ότι παρουσιάζονται λεπτομερώς τόσο οι αρχές κατηγοριοποίησης των αριθμών, όσο και η εύρεση των μεταξύ τους σχέσεων. Επίσης εν εκτάσει ασχολείται το έργο με τη μέθοδο κατασκευής των σχημάτων, ενώ ιδιαίτερο βάρος δίνεται στις αναλογίες μεταξύ των αριθμών. Ίσως δεν θα ήταν παρακινδυνευμένο να πούμε ότι οι ανάγκες της εποχής επηρέασαν το περιεχόμενο της διδασκαλίας, αφού εί-

[4] Αφού θεωρείται «*η μονάς αριθμός ουκ ούσα γεννητική εστιν αριθμών πηγή και ρίζα και αφορμή πλήθους παντός εικόνα σώζουσα θείου, ο μηδέν ον των όντων, έστιν δ' ουν όμως των όντων ποιητικόν*».

[5] Heiberg J.L. (ed.), *Anonymi, Logica et Quadrivium,*ό.π., σ. 65.

ναι γνωστό ότι οι αναλογίες μπορούν να αξιοποιηθούν στον κατασκευαστικό τομέα. Ωστόσο δεν υπάρχει παρουσίαση προβλημάτων προς επίλυση, ώστε να ελέγχεται η κατανόηση εκ μέρους των σπουδαστών και να ζητείται πρωτοβουλία εκ μέρους τους. Κι αυτό είναι ένα ζήτημα προς διερεύνηση.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η κατακλείδα της ενότητας, στην οποία ο συγγραφέας παρουσιάζει την άποψή του για τις επιστήμες. Ξεφεύγοντας από το στενό «επιστημονικό» πλαίσιο στο οποίο είχε περιοριστεί μέχρι τώρα, καταβάλλει μια προσπάθεια για να παρουσιάσει εν συντόμω κάποιες από τις αρχές της κοσμοθεωρίας του. Η παρουσίαση βασικών αρχών και απόψεων είναι μία από τις συμβατικές υποχρεώσεις των συγγραφέων επιστημονικών έργων κατά παράδοση. Τέτοιου είδους απόψεις παρουσιάζει και ο Πτολεμαίος, παραδείγματος χάρη, και μάλιστα αρκετά εκτεταμένα στο Προοίμιο της *Μαθηματικής συντάξεως*.[6] Στο υπό εξέταση κείμενο, ο άγνωστος συγγραφέας, απ' αφορμή την πραγμάτευση περί σφαίρας, βρίσκει ευκαιρία να εκφράσει την άποψή του περί επιστήμης και σχέσης της με το θείο και το αιώνιο. Η άποψή του φαίνεται να έχει πλατωνικές επιρροές, όταν μιλά για «*απομόργματα*» και για τη σχέση των αιώνιων αληθειών και της δυνατότητας πρόσληψής τους από τον άνθρωπο.

Η ενότητα περί γεωμετρίας εκκινεί με τον ίδιο τρόπο παρουσίασης. Δηλαδή προτάσσοντας τους ορισμούς όσων θεωρούνται βάση για την περαιτέρω μελέτη. Οι εναρκτήριοι ορισμοί αφορούν τις βασικές αρχές της γεωμετρίας, όπως π.χ. το σημείο, την ευθεία, κ.ο.κ. Αυτό συνάδει απολύτως με το εκπαιδευτικό πρόγραμμα στο Βυζάντιο, άρα και με το σκοπό που έρχεται να καλύψει η συγγραφή του εγχειριδίου. Οι σπουδαστές, σύμφωνα με το εκπαιδευτικό «πρόγραμμα», δεν είχαν ξαναέρθει σε επαφή με αρχές της γεωμετρίας, άρα έπρεπε η διδασκαλία να ξεκινήσει εκ του μηδενός.

Η παρουσίαση ακολουθεί εν μέρει την αντίστοιχη που πραγματοποιεί ο Ευκλείδης στα *Στοιχεία* του. Το α΄ βιβλίο των *Στοιχείων* εκκινεί με σειρά είκοσι τριών ορισμών.[7] Προηγούνται και εκεί οι ορισμοί του σημείου, της γραμμής και της επιφάνειας. Ο ανώνυμος συγγραφέας δεν ακολουθεί με ακρίβεια τον αρχαίο μαθηματικό, αλλά προσπαθεί να χρησιμοποιήσει όσο το δυνατόν απλούστερους ορισμούς.

Στη συνέχεια, ενώ τα *Στοιχεία* δίνουν όλους τους ορισμούς εξαρχής, ο συγγραφέας του *Ευσυνόπτου συντάγματος* αναλύει κάθε αντικείμενο πραγμάτευσης. Αυτό προφανώς θεωρεί ότι ανταποκρίνεται περισσότερο στο ρόλο

---

[6] Ptolemaeus, *Syntaxis mathematica*, I, ed. J.L. Heiberg, Bibliotheca Scriptorum Graecorun et Romanorum, Teubner, Lipsiae 1898, «Προοίμιον».

[7] Βλ. Σταμάτης Ε.Σ., *Ευκλείδου Γεωμετρία. Στοιχεία Βιβλία 1,2,3,4*, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα 1975.

του εγχειριδίου του ως διδακτικού. Το περιεχόμενο δε της ενότητας περί γεωμετρίας βασίζεται κυρίως στο α΄ βιβλίο των *Στοιχείων*.

Η παρουσίαση, λοιπόν, εκτείνεται κλιμακωτά κατά βαθμό δυσκολίας του αντικειμένου. Από τους ορισμούς των πρώτων στοιχείων περνά στα σχήματα, στις σχέσεις μεταξύ τους και στη μέθοδο υπολογισμού του μεγέθους τους. Άξιο προσοχής είναι το γεγονός των πολλαπλών παραπομπών στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Συχνά, δεν προχωρεί μέχρι τέλους τις αποδείξεις αλλά για περαιτέρω εμβάθυνση παραπέμπει ευθέως στα *Στοιχεία* (π.χ. όταν αναφέρεται στο διπλασιασμό ευθειών γράφει «ως πόρισμα ιθ΄ κεφαλαίου στοιχείου έκτου Ευκλείδου»[8]). [9] Το γεγονός αυτό, της συχνής αναφοράς των *Στοιχείων* και της συνεχούς παραπομπής σε αυτά σημαίνει ότι το έργο βρισκόταν σε χρήση και αποτελούσε εύχρηστο εργαλείο, τουλάχιστον για τους διδασκάλους. Αυτό επιβεβαιώνει τη διάδοση του κειμένου, του οποίου το πρώτο ολοκληρωμένο αντίγραφο είναι αυτό του 888.[10] Άρα πιθανόν η διδασκαλία να γινόταν σε συνδυασμό, τα *Στοιχεία* να χρησιμοποιούνταν όταν κάποιος ήθελε να εμβαθύνει στα θέματα που έθετε το *Ευσύνοπτον σύνταγμα*, γι' αυτό και όπως προειπώθηκε το περιεχόμενο εκτείνεται κυρίως στο α΄ βιβλίο, το εισαγωγικό του ευκλείδειου έργου.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι στην ενότητα αυτή συναντώνται συνεχείς αναφορές σε αρχαίους φιλοσόφους. Για να προσδώσει βαρύτητα στην αρχή της μη ύπαρξης περισσότερων των πέντε στερεών που να αποτελούνται από ισόπλευρα και ισογώνια επίπεδα, αναφέρει ένα επίγραμμα που ο συγγραφέας ισχυρίζεται ότι διατυπώθηκε «*τοις παλαιοίς*», από την Αρχαιότητα:

«*Σχήματα πέντε Πλάτωνος, α Πυθαγόρας σοφός εύρε,*
Πυθαγόρας σοφός εύρε, Πλάτων δ' αρίδηλα δίδαξεν,
Ευκλείδης επί τοίσι κλέος περικαλλές έτευξεν»[11]

Είναι ενδιαφέρον τόσο η ιστορική απόδοση της πατρότητας της διατύπωσης της εν λόγω αρχής όσο και η αναφορά του ίδιου του επιγράμματος καθ' εαυτού. Η αυθεντία των αρχαίων φιλοσόφων είναι αδιαπραγμάτευτη και δεν υπάρχει καμία επιφύλαξη όσον αφορά την αναφορά τους.

---

[8] Heiberg J.L. (ed.), *Anonymi, Logica et Quadrivium,*ό.π., σ. 90.

[9] Τα *Στοιχεία* αναφέρει επίσης θέλοντας να προσδώσει κύρος στο λόγο του και να τον καταστήσει περισσότερο αξιωματικό ή ακόμη κι όταν θεωρεί ότι ο λόγος του αρχαίου γεωμέτρη είναι δυσνόητος και προσπαθεί να τον καταστήσει σαφέστερο Γράφει, φερ' ειπείν, πραγματευόμενος τις παραλληλίες: «ως εν στοιχείω πρώτω λε΄ Ευκλείδου κεφάλαιον, ο και ημείς επί το σαφέστερον διαγράψομεν», Heiberg J.L. (ed.), *Anonymi, Logica et Quadrivium,*ό.π., σ. 81.

[10] Βλ. Γιάννα Κατσιαμπούρα, *Πρόσληψη, μετάδοση*…, ό.π.

[11] Heiberg J.L. (ed.), *Anonymi, Logica et Quadrivium,*ό.π., σ. 87.

Ακόμη περισσότερο, όταν έχει προηγηθεί μια εκτεταμένη αναφορά στη μυστικιστική κοσμολογία του Πλάτωνα, που παραπέμπει στο διάλογο *Τίμαιος*. Στον *Τίμαιο* ο Πλάτων αναφέρει: «*Πρώτου μεν δη πυρ και γη και ύδωρ και αήρ ότι σώματά εστι, δήλου που και παντί· το δε του σώματος είδος παν και βάθος έχει. το δε βάθος αυ πάσα ανάγκη την επίπεδου περιειληφθέναι φύσιν· η δε ορθή της επιπέδου βάσεως εκ τριγώνων συνέστηκεν. τα δε τρίγωνα πάντα εκ δυοίν άρχεται τριγώνοιν, μίαν μεν ορθήν έχοντος εκατέρου γωνίαν, τας δε οξείας· ων το μεν έτερου εκατέρωθεν έχει μέρος γωνίας ορθής πλευραίς ίσαις διηρημένης, το δ' έτερου ανίσοις άνισα μέρη νενεμημένης. ταύτην δη πυρός αρχήν και των άλλων σωμάτων υποτιθέμεθα κατά τον μετ' ανάγκης εικότα λόγον πορευόμενον· τας δ' έτι τούτων αρχάς άνωθεν θεός οίδεν και ανδρός ος αν ακείνω φίλος η*».[12] Ο άγνωστος συγγραφέας του *Ευσύνοπτου συντάγματος*, αφού αναφερθεί στον πρωταρχικό ρόλο των τριγώνων, παραπέμπει προς επίρρωσιν στα λεχθέντα του Πλάτωνα: «*ταύτη τοι και Πλάτων μυστικόν τινά λόγον τω τριγώνω εναποκρύπτεσθαι έλεγεν οία πανταίτιον και ποιητικόν των σχημάτων απάντων αναφαινόμενον*».[13]

Τα προαναφερθέντα θα μπορούσαν εδώ να συσχετιστούν και με όσα αναφέρει ο συγγραφέας και φανερώνουν και τη δική του μυστικιστικοφανή αντίληψη του κόσμου. Αυτή είναι εμφανής όταν αναφέρεται, παραδείγματος χάριν, στις αναλογίες, στις οποίες θεωρεί ότι μπορεί να διακριθεί η «ποιητική σοφία», η σοφία του Δημιουργού: «*η τοις ποιήμασιν ενθεωρουμένη ποιητική σοφία κατά το εγχωρούν ανθρώποις διαγινώσκεται*».[14]

Ο Πλάτων αναφέρεται και σε μια άλλη περίπτωση. Κι εδώ είναι αξιοπερίεργο το πλαίσιο μέσα στο οποίο αναφέρεται, δηλαδή η ρητή αναφορά στη θρησκεία του Δωδεκάθεου. Ο συγγραφέας αναφερόμενος στο διπλασιασμό του κύβου, παραθέτει την ιστορία με το χρησμό του Απόλλωνα στους Αθηναίους και πώς ο Πλάτων κατάφερε να το επιλύσει το πρόβλημα και να σώσει τους συμπολίτες του από το λοιμό.[15] Η παράθεση δε της ιστορίας γίνεται χωρίς καμία προσπάθεια απαξίωσης της αρχαίας θρησκείας και με ύφος που δεν αμφισβητεί το αληθές του επεισοδίου. Βέβαια, εδώ θα έπρεπε να σχολιαστούν κάποια ζητήματα. Το πρώτο αφορά το γεγονός ότι ο άγνωστος συγγραφέας δεν ταυτίζει το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου με το «Δήλιον πρόβλημα», όπως είναι γνωστό από την Αρχαιότητα. Η ονομασία «Δήλιον» δε προέρχεται από το θρύλο που ανέφερε ότι ο λοιμός είχε ενσκήψει στη Δήλο, οι κάτοικοί της είχαν πάρει το χρησμό για το διπλασιασμό του βωμού και οι ίδιοι απευθύνθηκαν στον Πλάτωνα να τους

[12] Πλάτων, *Τίμαιος*, εις.-μτφρ.-σχ. Β. Κάλφας, Πόλις, Αθήνα 1995, 53c-d.
[13] Heiberg J.L. (ed.), *Anonymi, Logica et Quadrivium,*ό.π., σ. 83.
[14] Heiberg J.L. (ed.), *Anonymi, Logica et Quadrivium,*ό.π., σ. 99.
[15] Heiberg J.L. (ed.), *Anonymi, Logica et Quadrivium,*ό.π., σ. 92.

λύσει το πρόβλημα. Ο δε Πλάτων τους εξήγησε ότι ο θεός απλώς τους κατηγορούσε γιατί αμελούσαν τη μελέτη της γεωμετρίας.[16] Δεν ξέρουμε, ωστόσο, από πού προέρχεται η εκδοχή που αναφέρει ο συγγραφέας του *Ευσυνόπτου συντάγματος*. Ένα δεύτερο σχόλιο αφορά το γεγονός ότι δεν αναφέρεται πουθενά ότι το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου θεωρούνταν άλυτο με τις γνωστές μεθόδους από την Αρχαιότητα και απασχολούσε τους μαθηματικούς μέχρι τους νεότερους χρόνους.[17] Το ίδιο πρόβλημα είναι γνωστό και ως «*πρόβλημα παρεμβολής δύο μέσων αναλόγων*», λόγω της λύσης που επινόησε ο Ιπποκράτης ο Χίος (470-400 π.Χ.), όπως αναφέρει ο Ευτόκιος στα σχόλια στο *Περί σφαίρας και κυλίνδρου*: «*επενόησεν ότι, εάν ευρεθή δύο ευθειών γραμμών, ων η μείζου της ελάσσονός εστι διπλασία, δύο μέσας ανάλογον λαβείν εν συνεχεί αναλογία, διπλασιασθήσεται ο κύβος*».[18] Ο συγγραφέας εδώ ακολουθεί αυτή τη συγκεκριμένη μέθοδο των μέσων αναλόγων για το διπλασιασμό.

Για να επανέλθουμε στην αναφορά των χρησμών, αξίζει να σημειωθεί ότι σε μια εποχή που έχει αλλάξει το κοσμοείδωλο, είναι εντυπωσιακό το γεγονός πως ό,τι συνδέεται με έναν λόγο περί επιστήμης δεν τίθεται εν αμφιβόλω, όσον αφορά τουλάχιστον μια συγκεκριμένη κοινωνική κατηγορία, αυτή των λογίων, στην οποία προφανώς ανήκει και ο άγνωστος συγγραφέας.

Στη χορεία των επιστημόνων που αναφέρονται στο έργο ανήκει και ο Αρχιμήδης. Σε μια προσπάθεια να κάνει περισσότερο εύληπτη τη χρήση της μεθόδου της διόπτρας και για να επιμείνει στην αξία της, ο συγγραφέας παραθέτει τη χρήση της από τον Αρχιμήδη, που την εφάρμοσε για να καταμετρήσει το ύψος της πυραμίδας. Τέλος, στους αναφερόμενους επιστήμονες εντάσσεται και ο Θέων, σχολιαστής του Πτολεμαίου, αλλά και ο ίδιος ο Πτολεμαίος.

---

[16] Η ιστορία με αυτή τη μορφή διασώζεται με διαφορές από τον Θέωνα τον Σμυρναίο και τον Πλούταρχο. Μια ιστορία με ίδιο μοτίβο αλλά πρωταγωνιστή τον βασιλιά Μίνω αναφέρει και ο Ευτόκιος. Βλ. Λάμπρου Μ., «Μια προσπάθεια διπλασιασμού του κύβου την εποχή της Τουρκοκρατίας και το κείμενο της Αντιπελάργησης», στο ΚΝΕ/ΕΙΕ, *Οι επιστήμες στον ελληνικό χώρο,* Τροχαλία, Αθήνα 1997, σ. 149-177.

[17] Μάλιστα κάποια στιγμή, το 1775, η Ακαδημία των Παρισίων ανακοίνωσε την απόφασή της να μην δεχθεί άλλες προτάσεις για τη λύση του προβλήματος. Σε μια πολύ συζητημένη προσπάθεια επίλυσης του «Δήλιου» επιδόθηκε κατά τη διάρκεια του Νεοελληνικού Διαφωτισμού, το 1756, ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος, με το έργο *Μέθοδος Γεωμετρικώς χωρούσα περί ευρέσεως των δύο μέσων συνεχώς εξής ανάλογον γραμμών*. Βλ., Λάμπρου Μ., «Μια προσπάθεια διπλασιασμού του κύβου την εποχή της Τουρκοκρατίας και το κείμενο της Αντιπελάργησης», ό.π.

[18] *Archimedis opera omnia cum commentaries Eutocii,* Heiberg L.G. (ed.), Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana, Teubner, Lipsiae 1910,

Οι αναφορές στους αρχαίους και την Αρχαιότητα φαίνεται να μην είναι απόλυτα συμβατές με την κοσμοθεωρία του συγγραφέα, όπως την εκθέτει στην τελευταία παράγραφο της ενότητας. Αφού παρέθεσε όσα θεώρησε επαρκή για τη γεωμετρία, καταλήγει στο συμπέρασμα ότι μέσω της επιστήμης μόνο δεν είναι κανείς να διακρίνει τον Θεό, χρειάζεται και η αρετή, προφανώς η χριστιανική αρετή και πίστη. Γιατί η επιστήμη από μόνη της δεν αρκεί, από μόνη της η μαθηματική γνώση μπορεί να είναι εσφαλμένη, ενώ η αρετή μπορεί να υπάρξει και αφ' εαυτής: «ως *αρετής άνευ μαθηματικήν του παντός αμαρτάνειν, μαθηματικής δε χωρίς την αρετήν και καθ' αυτοίν του παντός ευμοιρείν*».[19] Θα μπορούσε κανείς να πει ότι η κατακλείδα της ενότητας αποτελεί τρόπον τινά δήλωση πίστεως του άγνωστου συγγραφέα, που θεωρεί απαραίτητο να παρεμβάλλει και κάποιες χριστιανικές αρχές σ' ένα κείμενο που στηρίζεται εξ ολοκλήρου στην κληρονομιά των εθνικών. Κι όσο κι αν ξενίζει τον σημερινό αναγνώστη, μάλλον πρέπει να θεωρείται άλλο ένα δείγμα της βυζαντινής εκλεκτικιστικής αντίληψης.

Η ενότητα περί αστρονομίας εκκινεί κι αυτή, χωρίς εισαγωγικές παρατηρήσεις ή αξιολογήσεις, με ορισμούς, προχωρώντας βαθμιαία σε δυσκολότερες επεξεργασίες. Έτσι, οι πρωταρχικοί ορισμοί αφορούν τη σφαίρα, το κέντρο της και τη διάμετρο, ενώ επίσης θεμελιακό θεωρείται το γεωκεντρικό σύστημα του οποίου περιγράφονται εξαρχής οι βασικές αρχές. Από εκεί και πέρα περνά στις πρωταρχικές αρχές της κίνησης του συστήματος: το σημείο στο οποίο επικεντρώνεται αφορά την κίνηση και τις μεταβαλλόμενες θέσεις των πέντε πλανητών, του ηλίου και της σελήνης. Αναφερόμενος δε στις αρχές που διέπουν την κίνηση της σελήνης, προχωρεί σε μια σχετικά απαξιωτική κριτική για τους «παλαιούς», γιατί θεωρεί ότι δεν ανέλυσαν επαρκώς ορισμένα σημεία, που αφορούν την πορεία της στον επίκυκλο και γιατί διαφέρει ως προς τη φαινόμενη κίνηση από τους υπόλοιπους πλανήτες: «ο γαρ περί τούτου λόγος, ουκ οίδ' όπως, τοις παλαιοίς σεσιώπηται».[20] Σε αυτό το σημείο βλέπουμε να καταβάλλεται προσπάθεια για εξέλιξη των έως τώρα δεδομένων επεξεργασιών, με περαιτέρω μελέτη. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η μη φαινόμενη κίνηση της σελήνης ερμηνεύεται με το συνδυασμό κινήσεων που έχουν ως αποτέλεσμα τη διαμόρφωση της τελικής εικόνας της κίνησης προς τα μπρος.

Τους κανόνες της κίνησης και της κατάληψης εναλλασσόμενων θέσεων από τους πλανήτες, τον ήλιο και τη σελήνη, ακολουθεί η ερμηνεία του φαινομένου των εκλείψεων. Οι εκλείψεις έπαιζαν σημαντικό ρόλο στην επιστημονική συζήτηση που διεξαγόταν στο Βυζάντιο, τόσο ως περίεργα φαινόμενα

[19] Heiberg J.L. (ed.), *Anonymi, Logica et Quadrivium,*ό.π., σ. 103.
[20] Heiberg J.L. (ed.), *Anonymi, Logica et Quadrivium,*ό.π., σ. 106.

που επιζητούσαν τη φυσική τους εξήγηση, όσο και ως σημεία, η πρόβλεψή τους δε έφτασε να αποτελεί τη λυδία λίθο για την καταξίωση κάποιων ως επιστημόνων, όπως συνέβη με την περίπτωση της διαμάχης του Νικηφόρου Γρηγορά και του Βαρλαάμ Καλαβρού, τον 14ο αιώνα.[21] Και στο υπό εξέταση έργο βλέπουμε να δίδεται ιδιαίτερη σημασία στην ερμηνεία του φαινομένου.

Το ρόλο που είδαμε να παίζουν δε τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη στην ενότητα περί γεωμετρίας, παίζουν στην παρούσα ενότητα της αστρονομίας οι κανόνες του Πτολεμαίου. Όσον αφορά τους υπολογισμούς, η παραπομπή γίνεται στις αντίστοιχες στήλες των πτολεμαϊκών πινάκων, που σημαίνει κι εδώ ότι και η *Μαθηματική σύνταξις* και οι *Πρόχειροι κανόνες* ήταν εύκολο να βρεθούν και να μελετηθούν.

Το υπό μελέτη κείμενο, βεβαίως, λόγω του χαρακτήρα του ως επιτομής, είναι πολύ πιο συνοπτικό αλλά και πολύ λιγότερο επεξηγηματικό συγκριτικά, εξ ου προφανώς και η ανάγκη συνεχούς παραπομπής στην πηγή. Η δομή του μοιάζει δε περισσότερο σε εκείνη των *Προχείρων κανόνων*.[22] Πρόκειται λοιπόν περί ενός εγχειριδίου που στον τομέα της αστρονομίας λειτουργεί ως οδηγός χρήσης κανόνων, γεγονός που μπορεί να σημαίνει ότι συνήθως συνοδευόταν κατά τη διδασκαλία από το πρωτότυπο πτολεμαϊκό έργο. Προαναφέρθηκε ότι η ίδια μέθοδος πιθανόν να ακολουθούνταν και στην περίπτωση των ευκλείδειων *Στοιχείων*. Μια σημαντική προσπάθεια, και απολύτως αναγκαία, που καταβάλλει ο άγνωστος συγγραφέας είναι αυτή της επικαιροποίησης του πτολεμαϊκού έργου και της ένταξής του στο βυζαντινό σύστημα υπολογισμού του χρόνου. Εμφανίζεται λοιπόν μια λεπτομερής παρουσίαση της αιγυπτιακής καταμέτρησης του χρόνου, την οποία χρησιμοποιούσε ο Πτολεμαίος, ώστε ο Βυζαντινός αναγνώστης να έχει τη δυνατότητα μετατροπής.

Το τελευταίο μέρος της ενότητας διαθέτει τελείως διαφορετικό χαρακτήρα. Αφιερώνεται στην παρουσίαση της ιδιοσυστασίας των ουράνιων σωμάτων, και των επιδράσεων που ασκούν στα επίγεια. Έτσι απαριθμούνται οι ποιότητες και οι συνδυασμοί τους που διαμορφώνουν εν τέλει το χαρακτήρα κάθε σώματος, όπως και οι επιδράσεις τους τόσο εξαιτίας της ποιότητας όσο και του συνδυασμού της με τις διαφορετικές θέσεις στο ζωδιακό. Αυτό το τελευταίο μέρος, που δεν συνδέεται άμεσα με τη μαθηματική αστρονομία

[21] Για τη συγκεκριμένη διαμάχη βλ. και Γ. Κατσιαμπούρα, «Νικηφόρος Γρηγοράς εναντίον Βαρλαάμ Καλαβρού: μια πολιτική διαμάχη με ένδυμα την πρόβλεψη των εκλείψεων», *Νεύσις*, τχ. 13, 2004, σ. 138-148

[22] *Κλαυδίου Πτολεμαίου Προχείρων κανόνων διάταξις και ψηφοφορία*, στο Ptolemaeus, *Opera Astronomica Minora*, ed. J.L. Heiberg, Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum, Teubner, Lipsiae 1907.

του προηγούμενου μέρους, θα μπορούσε επίσης να ξενίσει τον σημερινό αναγνώστη. Ωστόσο, είναι ακόμη μία απόδειξη της στενής αλληλεξάρτησης αστρονομίας και αστρολογίας, με τη σημερινή έννοια του όρου, στην περίοδο της ύστερης Αρχαιότητας αλλά και στη βυζαντινή.

Ο συγγραφέας του *Ευσυνόπτου συντάγματος* εντάσσει κι αυτός βέβαια και το προαναφερθέν αντικείμενο στην επιστήμη, την οποία θεωρεί, κατά δήλωσή του, πολύ δύσκολο ζήτημα, ακριβώς λόγω των πολλών και διαφορετικών πτυχών της: «*ποικίλα μεν ουν διά ταύτα και δυσκατάληπτα τα της επιστήμης, και των δυσχερών αι είη ταύτα πάντα και έτι τα τούτων πλείω· ουδέ γαρ διά πάντων ο λόγος αφίκετο*»[23] γράφει, αναγνωρίζοντας ότι και η δική του προσπάθεια δεν είναι δυνατόν να εξαντλήσει το θέμα.

Έπειτα από αυτό, και γνωρίζοντας προφανώς ότι το τελευταίο μέρος της πραγμάτευσής του περικλείει τον κίνδυνο παρερμηνειών όσον αφορά τη δυνατότητα και τη δικαιολόγηση των προγνώσεων, ο συγγραφέας αισθάνεται υποχρεωμένος να εκφράσει την αντίθεσή του σε αυτούς που θεωρούν ότι μπορούν να προβούν σε εκτίμηση των εξελίξεων. Μάλιστα αναφέρεται με σκαιό τρόπο εναντίον τους: «*αλλά σκαιούς και αμαθείς λογιστέον τους τα τοιαύτα λέγειν επιχειρούντας, οι πορισμόν βίου την τερατολογίαν ποιούμενοι προφήται δοκείν αντί του αστρονόμοι βιάζονται, προφητικής επιπνοίας κα ικάριτος επιστήμης φύσιν ου διαστέλλουτες*».[24]

Όλο το υπόλοιπο κείμενο είναι αφιερωμένο στην αντίκρουση των ισχυρισμών για την ύπαρξη δυνατότητας πρόγνωσης και για όσων παρασύρονται από τέτοιες απόψεις, ενώ η κατακλείδα είναι ένας ύμνος στη λογική: «*μήποτε τούτο δόξαιμεν, ει μη το κάλλιστον δώρου των ευ ημίν, την ηγεμονίαν του λογικού, σφαλερώς παραιτοίμεθα*».[25] Είναι ενδιαφέρουσα η κατακλείδα αυτή, για τη διαφορά που παρουσιάζει με εκείνες των υπόλοιπων ενοτήτων. Ενώ σε εκείνες εξαίρονται ο θείος λόγος και η χριστιανική αρετή, εδώ αναδεικνύεται η λογική σκέψη, που θεωρείται το σημαντικότερο ανθρώπινο χάρισμα.

ΑΝΑΖΗΤΩΝΤΑΣ ΤΟΝ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ

Το κείμενο γνώρισε μεγάλη διάδοση, αν κρίνουμε από τον αριθμό των αντιγράφων που διασώθηκαν,[26] και ακολούθησε την πορεία πολλών άλλων έρ-

[23] Heiberg J.L. (ed.), *Anonymi, Logica et Quadrivium,*ό.π., σ. 120.
[24] Heiberg J.L. (ed.), *Anonymi, Logica et Quadrivium,*ό.π., σ. 120 κ.ε.
[25] Heiberg J.L. (ed.), *Anonymi, Logica et Quadrivium,*ό.π., σ. 122.
[26] Ο Heiseberg αναφέρει μεταξύ άλλων τον cod. Palatin. Heidelberg gr. 281, του 1040, που προαναφέρθηκε για το βιβλιογραφικό του σημείωμα, ο οποίος φαίνεται ότι κάποια στιγμή

γων της βυζαντινής περιόδου: μετά την άλωση της Κωνσταντινούπολης από τους Οθωμανούς, το 1453, βρέθηκε στη Δύση, μαζί με το μεγάλο κύμα των ανθρώπων της διασποράς, και συμπεριλήφθηκε στα έργα των Βυζαντινών συγγραφέων που άρχισαν να εκδίδονται τέλη του 15ου-αρχές του 16ου αιώνα.[27]

Ο Αριστόβουλος Αποστόλης (π.1468-1535), γνωστότερος ως Αρσένιος Μονεμβασίας του Αποστόλη, ήταν αυτός που εξέδωσε για πρώτη φορά στην Αναγέννηση το εγχειρίδιο με τον τίτλο *Ευσύνοπτον σύνταγμα εις τας τέσσαρας επιστήμας*[28]. Στον πρόλογο της έκδοσης ο Αρσένιος διατυπώνει υποθέσεις για τον συγγραφέα του έργου, ο οποίος ήταν άγνωστος, και καταλήγει να το αποδώσει στον Μιχαήλ Ψελλό ή σε κάποιον Ευθύμιο, αγνώστων λοιπών στοιχείων. Η υπόθεση αυτή, ωστόσο, του Αρσενίου στις επόμενες εκδόσεις γίνεται βεβαιότητα, όπως στις τυπογραφικές εκδόσεις του 1532[29] και του 1545,[30] που στηρίζονται στο αντίγραφο του Αρσενίου.[31] Το κείμενο από

πέρασε στα χέρια του Leonardo Justiniani (αφού σε κάποιο σημείο του αναγράφεται: «η βίβλος αύτη Leonardi Justinianai εστι». Άλλοι κώδικες είναι ο Mutin. Estens. III C 11, ο Laurentian. Gr. LXXXVII, ο Parisin. Gr. 2448, ο Riccardian. Gr. 31, ο Vatican. Gr. 15, όπου επαναλαμβάνεται η υπογραφή του Γρηγορίου, ο Vatican. Gr. 698, ο Vatican. Gr. 1026, πάλι με την υπογραφή του Γρηγορίου αλλά με μικρές διαφορές στο βιβλιογραφικό σημείωμα, οι Parisin. Gr. 1931, 2136 (που αποδίδει το έργο στον Ψελλό), 2465, 3067 κ.ά.

[27] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την παράδοση του κειμένου, βλ. Γιάννα Κατσιαμπούρα, «Από την Κωνσταντινούπολη στη Βενετία: εκδόσεις και αναγνώσεις ενός βυζαντινού Quadrivium», στο *Βυζάντιο-Βενετία-Νεώτερος ελληνισμός. Μια περιπλάνηση στον κόσμο της ελληνικής επιστημονικής σκέψης*, Πρακτικά Συνεδρίου, με επιμέλεια Ε.Νικολαΐδη-Γ.Βλαχάκη, Εθνικό Ίδρυμα Ερευνών, Αθήνα 2004, σ. 139-146

[28] Και το αφιέρωσε στον καρδινάλιο Νικόλαο Ραδούλφο (Niccolò Ridolfi), προστάτη του και φημισμένο βιβλιόφιλο. Και στις δύο έντυπες εκδόσεις, του 1532 και του 1545, το έργο εμφανίζεται με το εξής μότο: «Τω αιδεσιμοτάτω και θειωτάτω Καρδινέλει τω Ρεδούλφω, τω μουσών και χαρίτων τροφίμω, Αρσένιος ο μονεμβασίας Αρχιεπίσκοπος, εν κυρίω χαίρειν πάντοτε».

[29] *Του σοφωτάτου Ψελλού, σύνταγμα ευσύνοπτον εις τας τέσσαρας μαθηματικάς επιστήμας, Αριθμητικήν, Μουσικήν, Γεωμετρίαν και Αστρονομίαν* (*Doctissimi Pselli opus dilucidum in quattuor Mathematicas difciplinas, Arihmeticam, Muficam, Geometriam & Aftronomiam*), Venetiis, MDXXXII.

[30] Του σοφωτάτου Ψελλού, σύνταγμα ευσύνοπτον εις τας τέσσαρας μαθηματικάς επιστήμας, Αριθμητικήν, Μουσικήν, Γεωμετρίαν και Αστρονομίαν (Doctissimi Pselli opus dilucidum in quattuor Mathematicas difciplinas, Arihmeticam, Muficam, Geometriam & Aftronomiam), Parisiis, Excudebat Iacobus Bogardus, 1545.

[31] Και στο κείμενο προτάσσεται πάντα η αφιέρωση-μότο στον καρδινάλιο Ραδούλφο: «*Τω αιδεσιμοτάτω, και θειωτάτω Καρδινέλει τω Ρεδούλφω, τω μουσών, και χαρίτων τροφίμω, Αρσένιος ο μονεμβασίας Αρχιεπίσκοπος, εν κυρίω χαίρειν πάντοτε*». Προς τον καρδινάλιο Ραδούλφο (Νικ. Ridolfi) σώζονται επιστολές του Αρσενίου, όπου φαίνεται ότι τον αντιμετώπιζε ως προστάτη του και ζητούσε τη βοήθειά του. Βλ. Μανούσακας Μ.Ι., «Αρσενίου Μονεμβασίας του Αποστόλη επιστολαί ανέκδοτοι (1521-1534)», *Επετηρίς του Μεσαιωνικού Αρχείου*, τ. 8/9, 1958/9, Αθήνα 1961, σ. 14-15, 29-31, 33-34. Από τις επιστολές αυτές φαίνεται ότι ο Ραδούλφος χρηματοδοτούσε την έκδοση έργων που επιμελούνταν ο Αρσένιος.

εδώ και πέρα –και για αρκετούς αιώνες– αποδίδεται στον Μιχαήλ Ψελλό. Η συζήτηση περί του συγγραφέα του άνοιξε πάλι στο β΄ μισό του 19ου αιώνα, όταν δόθηκε προσοχή στην εσωτερική χρονολόγηση του κειμένου, δηλαδή στις ενδείξεις που έδινε το ίδιο για την εποχή της συγγραφής του: στην ενότητα περί Αστρονομίας, αναφέρεται «*προστιθέντες της τετραετηρίδας, αίτινες εισίν από της βασιλείας ψηφιζόμενοι Φιλίππου άχρι του δεύρο, ήγουν του ςφις΄ έτους συη*».[32] Ο συγγραφέας τοποθετεί τη χρονολογία συγγραφής («δεύρο») στο έτος 6516 από κτίσεως κόσμου, σύμφωνα με τη βυζαντινή χρονολόγηση, δηλαδή στο έτος 1008.

Το παλαιότερο σωζόμενο χειρόγραφο του εγχειριδίου είναι ο cod. Palatin. gr. 281, membran. Ser. a του 1040.[33] Σε αυτό, που όπως φανερώνουν τα παλαιογραφικά δεδομένα είναι γραμμένο από έναν άνθρωπο, αναφέρεται ως συγγραφέας κάποιος Ρωμανός, από τη Σελεύκεια, ασηκρήτις,[34] δηλαδή ανώτερος αξιωματούχος του δικαστικού κλάδου.[35] Η υπογραφή αυτή αντιγράφεται και σε μετέπειτα κώδικες, όπως στον Laur. gr. Acqu. 64 από τον 16ο αι.[36]

Σε μια άλλη ομάδα χειρογράφων το κείμενο αποδίδεται σε κάποιον μοναχό Γρηγόριο. Της άποψης να αποδοθεί η συγγραφή του κειμένου στον άγνωστο μοναχό Γρηγόριο συνηγορεί και το γεγονός ότι ο συγγραφέας φαίνεται, μέσα από τις εκφράσεις και τις λέξεις που χρησιμοποιεί, να έχει αρκετές θεολογικές γνώσεις, αφού είναι απρόσμενο σε τέτοιου είδους κείμενα να συναντώνται εκφράσεις χριστιανικές, πόσο μάλλον παραπομπές σε ιερά κείμενα, όπως συμβαίνει στην εισαγωγή του κεφαλαίου για τη μουσική.

Με μια ανάλυση λόγου μπορούμε να συνάγουμε ορισμένες πληροφορίες για τον άγνωστο συγγραφέα, όπως διαφαίνονται από τα γραφόμενά του. Φαίνεται να είναι ένας λόγιος που κινείται με άνεση στο χώρο των μαθηματικών επιστημών. Διαθέτει γνώσεις του περιεχομένου βασικών έργων αλλά και ιστορικές πληροφορίες, που τις εντάσσει στο κείμενό του με άνεση.

---

[32] Heiberg J.L. (ed.), *Anonymi, Logica et Quadrivium,*ό.π., σ. 108, στ. 13-14.

[33] Ήδη η χρονολόγηση αυτού του αντιγράφου το 1040 οδήγησε στην αμφισβήτηση της συγγραφής του από τον Ψελλό, που γεννήθηκε το 1018.

[34] Βλ. Diller A., "The Byzantine Quadrivium", *Isis*, τ. 36, 1946, σ. 132. Ο Ρόζε επίσης αναφέρεται στην υπογραφή «ασηκρήτις», Rose V., "Pseudo-Psellus und Gregorius monachus", *Hermes*, *Zeitschrift für Classische Philologie*, Berlin 1867, σ. 465-467, εδώ σ. 267.

[35] «*εγράφη η βίβλος αύτη διά χειρός Νικολάου καλλιγράφου μηνί ιαννουαρίω ιδ ινδικτιώνος ογδόης έτους σφμη εκ πολλών πονημάτων Ρωμανού ασηκρήτις και κριτού του Σελευκείας συλλεγείσα του και αυθέντου μου. Οι αναγιγνώσκοντες εύχεσθε υπέρ αυτού*», Heiberg J.L. (ed.), *Anonymi, Logica et Quadrivium,* ό.π., σ. V.

[36] Βλ. Najock D., *Drei anonyme griechische Tractate über die Musik. Eine Kommentierte Neuausgade des Bellermannschen Anonymus*, Göttinger musikwissenschaftliche Arbeiten 2, Göttingen 1972, σ. 20.

Ωστόσο, προσπαθεί να κρατήσει τις ισορροπίες μεταξύ της αναφοράς των εθνικών και της χριστιανικής κοσμοθεωρίας, γι' αυτό φροντίζει επανειλημμένως να προβάλλει τη χριστιανική αρετή. Αν και βαθύτατα πεισμένος για τη σημασία της λογικής στην ανθρώπινη ζωή, όπως τονίζει συχνά, κυρίως με αφορμή τις μεταφυσικές ερμηνείες στις οποίες προσπαθεί να αντιπαρατεθεί. Τελικά, ένας αντιπροσωπευτικός Βυζαντινός λόγιος, με τις αντιφάσεις που ίσχυαν ως γενικό χαρακτηριστικό. Παραδείγματος χάρη, από τη μία οι νικομάχειες ερμηνείες των αριθμών και η ενασχόληση με το ζωδιακό όπως και με την ιδιοσυστασία των πλανητών, από την άλλη η επίθεση στους «κομπάζοντες» αστρολόγους.

Εν κατακλείδι, θα μπορούσε να ειπωθεί ότι το *Ευσύνοπτον σύνταγμα* του 1008 και ο ανώνυμος συγγραφέας του προσφέρουν μια χαρακτηριστική εικόνα του τομέα των μαθηματικών επιστημών στις αρχέα του 11ου αιώνα, τόσο όσον αφορά τις γνώσεις όσο και τις γενικότερες αντιλήψεις και την κοσμοθεωρία.

ΕΝΟΤΗΤΑ IV

Έντυπο υλικό διδασκαλίας μαθηματικών

Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΣΕΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

Ιωάννα Γεωργίου

Καθηγήτρια Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
Μεταπτυχιακή Φοιτήτρια (έρευνα)

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η πολύ-πολιτισμική εκπαίδευση έχει βγει στο προσκήνιο τα τελευταία χρόνια και αυτό δεν μπορεί να θεωρηθεί τυχαίο. Οι ανάγκες της σύγχρονης κοινωνίας είναι τέτοιες που απαιτούν τον εμπλουτισμό της εκπαίδευσης με στοιχεία από διάφορους πολιτισμούς. Παράλληλα με την ανάγκη αυτή, εκφράζονται απόψεις πως η ιστορία της κάθε επιστήμης θα έπρεπε να αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της διδακτικής της και στο σχολείο. Χωρίς η μία τάση να αποκλείει την άλλη – αντίθετα μάλλον συμπληρώνοντάς την – δημιουργήθηκαν κάποιες σημειώσεις για διδασκαλία των μαθηματικών μέσα από τις δύο αυτές σκοπιές. Οι σημειώσεις χρησιμοποιούνται ως βιβλίο για τη διδασκαλία μαθηματικών «κοινού κορμού» στη Β' Λυκείου ιδωτικού αγγλόφωνου σχολείου στην Κύπρο. Η ύλη στηρίζεται στο αναλυτικό πρόγραμμα μαθηματικών κοινού κορμού του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου και του Υπουργείου Παιδείας. Τα κεφάλαια είναι στην πλειψηφία τους αντίστοιχα με αυτά του βιβλίου που διανείμεται στα δημόσια σχολεία[1]. Το περιεχόμενο των κεφαλαίων όμως είναι σημαντικά διαφοροποιημένο εφ' όσον σε κάθε κεφάλαιο αναφέρεται και αναλύεται ως έναν βαθμό η προέλευση της έννοιας που εξετάζεται στο εν λόγω κεφάλαιο, οι λόγοι που οδήγησαν στην εμφάνισή της και η χρήση της στη μετέπειτα εξέλιξη του κόσμου στις διάφορες κουλτούρες, με έμφαση, όπου είναι δυνατόν, στην χρήση που έχει το εργαλείο αυτό στον σύγχρονο κόσμο. Κάθε κεφάλαιο ακολουθείται από ένα μικρό κεφάλαιο-διάλειμμα, στο οποίο αναπτύσσονται διάφορα θέματα «παραλογοτεχνίας» των μαθηματικών. Μετά από μια σύντομη επισκόπηση κάποιων σημαντικών κομματιών της σχετικής βιβλιο-

[1] Βλ. περιεχόμενα στο παράρτημα

γραφίας, αναλύονται οι σημειώσεις αυτές ανά κεφάλαιο, μαζί με κάποια παραδείγματα από κάθε κεφάλαιο.

Σχετικά με την μεθοδολογία που ακολουθείται, η μέθοδος έρευνας-δράσης θεωρήθηκε η καταλληλότερη λόγω της φύσης της προσέγγισης. Προβλήματα όπως η αρνητική στάση των μαθητών προς τα μαθηματικά, η αδιαφορία τους προς το μάθημα ή οι χαμηλές τους επιδόσεις κάνουν σαφές ότι κάτι πρέπει να *αλλάξει.* Απαιτείται μια μέθοδος που όχι απλά να εντοπίζει και να καταγράφει το πρόβλημα, αλλά και να αποπειράται να το διορθώσει ή να το εξαλείψει. Σε αυτό ακριβώς στοχεύει η έρευνα-δράση[2]. Άλλος ένας λόγος που η μέθοδος αυτή θεωρείται κατάλληλη αποτελεί το γεγονός ότι η διδάσκουσα είναι και η ερευνήτρια, είναι δηλαδή ενσωματωμένη στο χώρο του σχολείου όπου ζουν και μαθαίνουν τα παιδιά. Με μια ευρεία σειρά εργαλείων συλλογής στοιχείων, όπως η παρατήρηση, η καθημερινή καταγραφή γεγονότων, οι προσωπικές συνεντεύξεις, τα ερωτηματολόγια και άλλα, όχι μόνο συγκεκριμενοποιείται το πρόβλημα αλλά γίνονται και διαρκείς προσπάθειες αυτό να εξαλειφθεί.

Οι μαθητές που παρακολουθούν το μάθημα αυτό γνωρίζουν ότι πρόκειται περί πειραματικού μαθήματος και συχνά εκφράζονται για το πώς αισθάνονται αναφορικά με διάφορα κομμάτια του μαθήματος. Η αλληλεπίδραση αυτή μεταξύ καθηγήτριας-ερευνήτριας και μαθητών είναι πολύτιμη. Τα στοιχεία συλλέγονται για να διερευνηθεί το αν η προσέγγιση μέσω της ιστορίας και του πολιτισμού μπορεί να συμβάλει στην βελτίωση της εικόνας των μαθηματικών, στις επιδόσεις των μαθητών και στο ενδιαφέρον που δείχνουν για το μάθημα.

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Την μεστή μορφή της ιδέας για σύνδεση των μαθηματικών με τους διάφορους πολιτισμούς παρουσίασε ο Βραζιλιάνος μαθηματικός εισάγοντας το 1985 την έννοια των «Εθνομαθηματικών», Εκεί, όριζε τα εθνομαθηματικά ως το αντικείμενο πάνω στο οποίο οι στέκονται οι γέφυρες μεταξύ ιστορικών και ανθρωπολόγων από τη μια και μαθηματικών από την άλλη, με σκοπό την αναγνώριση της ύπαρξης διαφόρων «ειδών» μαθηματικών[3]. Η Zaslavsky κατά τη διάρκεια των πολυετών ερευνών της σε χώρες της Αφρικής κατέ-

[2] Για λεπτομέρειες σχετικά με την έρευνα-δράση, μπορεί κανείς να ανατρέξει σε οποιοδήποτε εγχειρίδιο Μεθόδων Έρευνας για τις κοινωνικές επιστήμες ή πιο συγκεκριμένα για την εκπαίδευση. Για παράδειγμα: Gray, D. (2004) Doing Research in the Real World, Sage, London

[3] Βλέπε Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics, στο βιβλίο Schools, Mathematics and Work, Harris, M.(ed.) The Falmer Press

ληξε σε πολύ ενδιαφέρουσες ανακαλύψεις σχετικά με την μαθηματική παράδοση στις χώρες που επισκέφτηκε, τα μαθηματικά που χρησιμοποιούσαν οι άνθρωποι αυτοί στην καθημερινή τους ζωή, τα παιχνίδια που έπαιζαν και τον τρόπο που διδάσκονταν μαθηματικά[4]. Οι Shan και Bailey[5] συζητούν για την χρήση των μαθηματικών στην καθημερινότητά και πως τα βιβλία των μαθηματικών μπορούν να είναι προκατειλημμένα ή μεροληπτικά ως προς συγκεκριμένες ομάδες ανθρώπων.

Τα προβλήματα αποδοχής και διάδοσης τέτοιων πεποιθήσεων έχουν εντοπιστεί και αναλυθεί από τον Bishop σε πολλά άρθρα του αλλά και σε βιβλία[6]. Σε ένα άρθρο του μάλιστα του 2001στο περιοδικό Issues of Mathematics Teaching, αναρωτιέται από τον τίτλο ακόμα, «Τι αξίες διδάσκεις όταν διδάσκεις μαθηματικά;» για να ακολουθήσει σωρία αντιδράσεων σχετικά με την εγκυρότητα της ερώτησής του. Ποιος δάσκαλος ή καθηγητής μαθηματικών πιστεύει ότι όντως διδάσκει κάποιες αξίες πρωτ' απ' όλα, για να αξίζει να διερωτάται και ποιες είναι αυτές; Ο Joseph[7] δίνει έμφαση στο γεγονός ότι τα μαθηματικά διδάσκονται από μια καθαρά ευρωπαϊκό-κεντρική μεριά, ενώ η οποιαδήποτε συνεισφορά άλλων λαών, όπως των Αιγυπτίων, των Βαβυλωνίων, των Αράβων, των Ινδών και άλλων παραγκωνίζεται τελείως. Ο Cotton[8] αναφέρεται σε μια άλλη όψη του προβλήματος, σχετική με το πώς τα μαθηματικά μπορούν να κατασκευάσουν ή και να αλλοιώσουν την εικόνα που έχουμε για τον κόσμο.

Όλα αυτά έχουν σαν στόχο την αποδοχή της περιπλοκότητας της μαθηματικής παιδείας και εκπαίδευσης και του πλούτου των προσεγγίσεων που έχει κανείς διαθέσιμες και των κριτηρίων για την επιλογή του. Η μαθηματική παιδεία από παραδοσιακή και στεγνά επιστημονική, μπορεί να διαφοροποιήσει το ρόλο της στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση, και να δώσει στους μαθητές όχι μόνο τα εργαλεία – των οποίων την αξία κανείς ποτέ δεν μπορεί να αρνηθεί – αλλά και τα «από πού», «πως», «γιατί», «πότε» και ούτω καθεξής. Κάπως έτσι, σε πολύ αδρές γραμμές, μπορεί να περιγραφεί και ο στόχος ενός προγράμματος διδασκαλίας των μαθηματικών με στοιχεία ιστορίας και πολιτισμού.

---

[4] Βλέπε Zaslavsky, C. (1973) Africa Counts; Number and Pattern in African Culture, Lawrence Hills

[5] Βλέπε Shan, S.J., Bailey, P. (1991) Classroom Mathematics for Equality and Justice, Trentham Books

[6] Bishop, A.J. (1991) Mathematical Enculturation: A Cultural Perspective on Mathematics Education, Kluwer Academic Publishers

[7] Joseph, G.G. (1991) The Crest of the Peacock; Non- European Roots of Mathematics, Penguin Books

[8] Cotton, T. (2001) Mathematics Teaching in the Real World στο βιβλίο Gates, P.(ed.) *Issues in teaching mathematics*, Routledge Falmer

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Υλικό που απευθύνεται στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση (πιθανώς με κάποια κομμάτια να είναι εφαρμόσιμα και στην πρωτοβάθμια ή ακόμα και τριτοβάθμια) και που έχει χρησιμοποιηθεί για την συγγραφή των συγκεκριμένων σημειώσεων[9] (οι οποίες βεβαίως χρήζουν διαφόρων βελτιώσεων) αποτελείται συνοπτικά από την βιβλιογραφία που ακολουθεί. Από τα βιβλία αυτά έχουν χρησιμοποιηθεί πληροφορίες για να συνθέσουν το σκηνικό της παρουσίασης μιας μαθηματικής έννοιας ή και κάποιες προτεινόμενες δραστηριότητες.

1. *Dictionary of Mathematics* (1989, 1998, 2003) Penguin Reference, Penguin Books
2. Katz, J.V. (1993) *A history of Mathematics; an introduction*, Harper Collins College Publishers New York
3. Sesiano, Jacque (2000) *Islamic Mathematics across Cultures; the history of the Non-Western Mathematics* Selin H. (ed.) Kluwer Academic Publishers Dordrecht Boston London
4. Wesley, A (1993) *Multiculturalism in Mathematics, Science, and Technology: Readings and Activities* Addison-Wesley Publishing Company
5. Wright, P. (1999) (ed.) *The Maths and the Human Rights Resource Book; Bringing Human Rights into the secondary mathematics classroom* Amnesty International UK
6. *Historical Topics for the Mathematics Classroom* (1969,1989) The National Council of teachers of Mathematics
7. Eagle M.R. (1995) *Exploring Mathematics Through History*, Cambridge University Press Bicester Oxon
8. Lumpkin, B., Strong, D. (1995) *Multicultural Science and Math Connections; Middle School Projects and Activities* J. Weston Walch Publisher Portland, Maine

Το πρώτο κεφάλαιο αφορά στην εισαγωγή των μαθητών στην ιδέα πίσω από τη δημιουργία αυτών των σημειώσεων και αυτού του σχεδιασμού. Ενημερώνονται ότι το υλικό το οποίο θα διδαχθούν αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο κομμάτι του στα μαθηματικά που διδάσκονται τα παιδιά της β' λυκείου του δημόσιου σχολείου, αλλά μέσα από ένα πρίσμα το οποίο δείχνει από πού προέκυψαν οι συγκεκριμένες έννοιες οι οποίες πραγματεύονται, σε τι χρησιμεύουν, που εφαρμόστηκαν στο παρελθόν σε διάφορους πολιτισμούς και

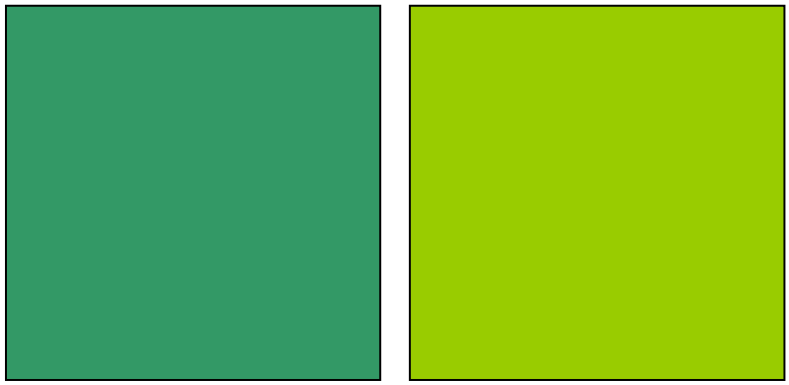
[9] Τίτλος σημειώσεων: Mathematics through History and Culture

που εφαρμόζονται σήμερα, στο δικό μας πολιτισμό (αν συμβαίνει αυτό). Τους γίνεται λοιπόν ξεκάθαρος ο σκοπός του μαθήματος αυτού. Σαν μια πρώτη δραστηριότητα εισαγωγής στο μάθημα τους ζητείται να τοποθετήσουν κάποια σημαντικά γεγονότα της παγκόσμιας ιστορίας σε μια χρονική γραμμή, με σκοπό να αποκτήσουν μια εποπτική αίσθηση του βάθους χρόνου κατά τον οποίο η επιστήμη των μαθηματικών εξελίσσεται, από πού έχει ξεκινήσει, που έχει φτάσει και συνεπώς και ότι συνεχίζει να εξελίσσεται, κάτι που για πολλούς μαθητές δεν είναι καθόλου προφανές. Η γραμμή έχει ως αρχή της το 2000 π.Χ. και φτάνει ως το 2000 μ.Χ. Λόγω περιορισμού του διαθέσιμου χώρου στη σελίδα, η γραμμή είναι καμπυλωμένη. Για να την μετρήσουν χρησιμοποιούν μαλλί και για να τοποθετήσουν την γέννηση του Χριστού πάνω στην γραμμή, διπλώνουν το κομμάτι μαλλί στα δύο. Η δραστηριότητα αυτή είναι σημαντική, αφού αρκετά σημεία της διδασκαλίας που πρόκειται να ακολουθήσει ασχολούνται με αρχαία μαθηματικά ή με μαθηματικά στο Μεσαίωνα και είναι σημαντικό να έχουν οι μαθητές μια αίσθηση για το πότε συμβαίνουν όλα αυτά, έτσι ώστε να μπορούν να κάνουν συσχετίσεις με αυτά που μαθαίνουν σήμερα.

Το δεύτερο κεφάλαιο αποτελείται από ένα μικρό άρθρο της εφημερίδας ΤΑ ΝΕΑ, ημερομηνίας 02/03/05, γραμμένο από τον Δρ. Τεύκρο Μιχαηλίδη και κάποιες ερωτήσεις που το ακολουθούν. Το άρθρο αυτό διηγείται μια μικρή «ιστορία»: Ο Θανάσης ξυπνάει στις εφτά και οι κινήσεις του παρακολουθούνται μέχρι λίγο μετά τις 08:30 αφού έχει φτάσει στη δουλειά του. Κάθε τι που κάνει ο Θανάσης μέσα σε αυτή τη λίγη ώρα έχει πίσω του στοίβες μαθηματικών εργαλείων, και στοχεύει στο να δείξει στους μαθητές πως τα μαθηματικά χρησιμεύουν σε πολλούς διαφορετικούς τομείς της ζωής. «*Σε δέκα λεπτά το ψυγείο και το φουρνάκι του που λειτουργούσαν με fuzzy logic – παρακλάδι της πλειότιμης συμβολικής λογικής, που ήταν υπεύθυνη και για την ασφαλή λειτουργία του ABS στο αυτοκίνητό του – του εξασφάλισαν ένα πλούσιο πρωινό.*» Σημαντικό κομμάτι αυτού του μαθήματος είναι οι ερωτήσεις που ακολουθούν: «Για ποιο λόγο νομίζετε πως γράφτηκε αυτό το κείμενο;» «Ποια κομμάτια των μαθηματικών αναφέρονται, ποια γνωρίζατε ήδη;»

Το τρίτο κεφάλαιο ασχολείται με το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Αν και στο αντίστοιχο κεφάλαιο επανάληψης του σχολικού υπάρχουν και συστήματα πρώτου βαθμού, έγινε επιλογή να επικεντρωθεί το μάθημα γύρω από το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Τα ζητήματα που συζητούνται στο κεφάλαιο αυτό ξεφεύγουν σημαντικά από εκείνα σε μια κλασσική διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Μετά την σύντομη υπενθύμιση του Θεωρήματος, εξετάζεται η χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος «πριν τον Πυθαγόρα». Αφού συζητηθεί το ότι οι Βαβυλόνιοι και οι Κινέζοι χρησιμοποιούσαν το

Θεώρημα αυτό σε κατασκευές και υπολογισμούς πολύ πριν γεννηθεί ο Πυθαγόρας[10], η μορφή που γνώριζαν οι Βαβυλώνιοι ως Πυθαγόρειο Θεώρημα γίνεται αφορμή για και εκτέλεση μιας σχετικής δραστηριότητας. Οι Βαβυλώνιοι συσχέτιζαν το τετράγωνο με τη διαγώνιό του – κάτι σαν ειδική περίπτωση του θεωρήματος. Η δραστηριότητα έχει να κάνει με το να κοπούν κατάλληλα και να τοποθετηθούν διαφορετικά δύο ίσα τετράγωνα για να σχηματίζουν ένα τρίτο τετράγωνο.



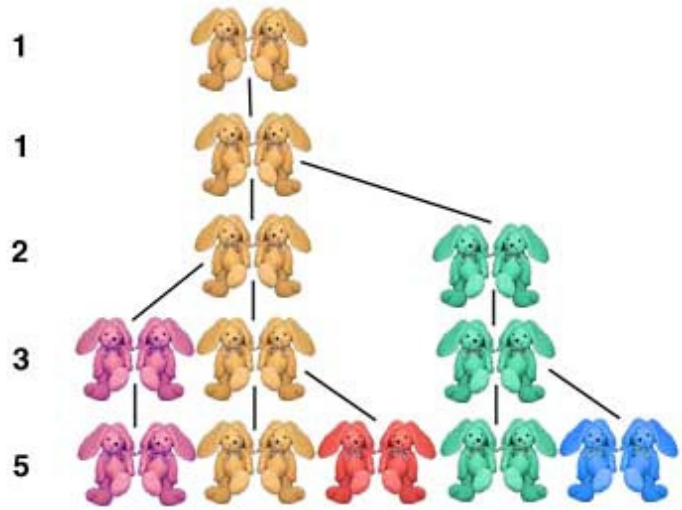
Ακολουθεί μια έτοιμη δραστηριότητα σχετικά με «το θεώρημα του γνώμονα» στην Ινδία και αμέσως μετά η συζήτηση στρέφεται γύρω από τον Πυθαγόρα και τους Πυθαγόρειους. Οι μαθητές διαβάζουν κάποια πράγματα για τις πεποιθήσεις των πυθαγόρειων και για τις μαθηματικές τους πρακτικές. Στο κομμάτι αυτό του κεφαλαίου γίνεται χρήση αλγεβρικών τύπων για παραγωγή Πυθαγόρειων τριάδων. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα σε ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές ένα και ένα, η υποτείνουσα θα πρέπει να έχει μήκος $\sqrt{2}$, το οποίο όμως δεν μπορεί να μετρηθεί με ακρίβεια χρησιμοποιώντας χάρακα. Έτσι εισάγεται η έννοια των αρρήτων αριθμών. Με την ευκαιρία της αναφοράς των αρρήτων, παρουσιάζονται στους μαθητές κάποια σημαντικά απειροσυνόλα αριθμών (φυσικοί, ακέραιο, ρητοί, πραγματικοί). Το κεφάλαιο κλείνει με την ανάθεση εργασίας για έρευνα, αντί του παραδοσιακού διαγωνίσματος, του οποίου η χρήση απλά περιορί-

[10] Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη σημασία της ανάπτυξης της αντίληψης των συμβολών διαφόρων λαών στους μαθητές βλέπε: Williams, J. (1993) Multicultural Mathematics; Teaching Mathematics from a Global Perspective, Oxford University Press και Gerdes, P.(1994) Reflections on Ethnomathematics, For the learning of Mathematics 14(2) 19-22 FLM Publishing Association

ζεται λόγω της εισαγωγής και κάποιων εναλλακτικών μεθόδων αξιολόγησης. Τα θέματα τα οποία προτείνονται είναι βιογραφίες του Πυθαγόρα ή του Ευκλείδη, οι Πυθαγόριοι ή κάποιο άλλο θέμα σχετικό με το κεφάλαιο, που θα επιλέξουν οι μαθητές.

Το κεφάλαιο 4 αποτελεί το «διάλειμμα» μετά το κεφάλαιο 3 και παρουσιάζει τις αναπαραστάσεις των αριθμών με τη χρήση των δακτύλων. Οι μαθητές μαθαίνουν ότι το αριθμητικό σύστημα που έχουμε δεν υπήρχε από πάντα, και ότι ακόμα και σήμερα εναλλακτικές μορφές αναπαράστασης των αριθμών υπάρχουν και είναι δυνατόν να χαρακτηριστούν μέχρι και απαραίτητες. Η συγκεκριμένη αυτή παρουσίαση μπορεί να δωθεί και σε μαθητές πολύ μικρότερης ηλικίας με σκοπούς καλύτερης κατανόησης ενός αριθμητικού συστήματος ή την απόκτηση μιας πιο ευρείας αίσθησης των συμβόλων.

Η εισαγωγή στο κεφάλαιο των ακολουθιών γίνεται με τη βοήθεια της διάσημης σχεδόν ακολουθίας Fibonacci και των αμέτρητων εφαρμογών της στη φύση και την τέχνη. Ο τρόπος σύμφωνα με τον οποίο παράγεται η ακολουθία εισάγεται με τον πληθυσμό των κουνελιών (βλ. εικόνα), και ακολούθως χρησιμοποιείται και αναδρομικός τύπος.



Ακολουθεί ο υπολογισμός του αριθμού φ, της χρυσής αναλογίας, γίνονται κάποιες διαιρέσεις όρων για να φανεί πως το πηλίκο τους προσεγγίζει έναν συγκεκριμένο αριθμό. Αντί για επίλυση ασκήσεων στο σπίτι, ζητείται από τους μαθητές να βρουν παραδείγματα φυσικών αντικειμένων ή καλλιτεχνικών έργων στα οποία ενυπάρχει είτε η ακολουθία ή ο αριθμός φ. Πιθανές πηγές αποτελούν τα βιβλία ή οι εγκυκλοπαίδειες, μα την ισχυρότερη πηγή

αποτελεί φυσικά το διαδίκτυο[11]. Η μελέτη της αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου ακολουθεί την έκθεση του Malthus, ενός από τους πρώτους οικονομολόγους, ο οποίος είχε προβλέψει πως λόγω του γεωμετρικής προόδου ρυθμού αύξησης του πληθυσμού, και του αριθμητικής προόδου ρυθμού αύξησης της παραγωγής του φαγητού, ο κόσμος θα πέθαινε από πείνα και μέχρι τα μέσα του 19ου αιώνα, ο πληθυσμός θα είχε μειωθεί δραματικά. Το θέμα χρησιμοποιεί μαθηματικά εργαλεία, είναι όμως καθαρά κοινωνικοπολιτικό, και αυτό δίνει εξαιρετικές ευκαιρίες για συζήτηση στην τάξη. Οι έννοιες τα αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου είναι ακόμα άγνωστες στους μαθητές, οπότε δίνονται κάποιοι σύντομοι ορισμοί για να γίνει υπόθεση του Malthus πιο κατανοητή. Ακολουθούν ερωτήσεις όπως «τι πιστεύετε εσείς για την αύξηση του πληθυσμού και την παραγωγή φαγητού;» «Είχει ο Malthus δίκιο;» «Γιατί νομίζετε απέτυχαν οι προβλέψεις του;».

Το τρίτο κομμάτι του κεφαλαίου αυτού αποτελείται από την αριθμητική πρόοδο, κάποιο σύντομο τυπολόγιο και ασκήσεις για εύρεση όρων της προόδου παρόμοιες με αυτές που υπάρχουν στο βιβλίο του υπουργείου. Για να διατηρηθεί όσο γίνεται πιο ζωντανή η σύνδεση με την καθημερινή ζωή, εκτός από την επίλυση των ασκήσεων οι μαθητές ρωτούνται τι θα μπορούσαν αυτοί οι αριθμοί να αντιπροσωπεύουν. Ιδέες όπως κόστος ενοικίασης αυτοκινήτου (αρχικό κόστος συν ένα σταθερό ποσό ανά μέρα που περνά), δίνονται στις σημειώσεις για να ενεργοποιήσουν την σκέψη των μαθητών και να δώσουν τις δικές τους ιδέες από τις δικές τους εμπειρίες. Η εισαγωγή στη μέθοδο για εύρεση αθροίσματος γίνεται μέσω του Gauss και της γνωστής ιστορίας του ευφυούς υπολογισμού του αθροίσματος αριθμών από το 1 ως το 100 (αριθμητική πρόδος με πρώτο όρο 1 και διαφορά 1). Αυτό που πέτυχε ο Gauss, ως μικρός μαθητής ήταν να υπολογισει εύκολα ένα μεγάλο άθροισμα. Αυτός είναι και ο λόγος ύπαρξης των τύπων, αφού η εύρεση ενός μεγάλου αθροίσματος *μπορεί* να γίνει με διαδοχικές προσθέσεις, αλλά πόσο θα κόστιζε κάτι τέτοιο σε χρόνο, σε περιπτώσεις πρόσθεσης μεγάλου πλήθους όρων (για να μην αναφερθεί η πιθανότητα σφάλματος); Η δομή του κομματιού της γεωμετρικής προόδου είναι αντίστοιχη. Η αξιολόγηση στο κεφάλαιο αυτό γίνεται με διαγώνισμα. Στο διαγώνισμα δεν εξετάζεται μόνο η ικανότητα επίλυσης ασκήσεων, αλλά και η ακολουθία Fibonacci (πως ορίζεται, που υπάρχουν εφαρμογές της), η πρόβλεψη Malthus

[11] Το μάθημα διαθέτει και ιστοσελίδα, όπου οι μαθητές μπορούν να ανατρέξουν για κάποιους συνδέσμους ή νέα για το μάθημα, έτσι έχουν κάποια στοιχεία για να ξεκινήσουν την αναζήτησή τους. Η ιστοσελίδα φιλοξενείται στο: http://www2.warwick.ac.uk/fac/soc/wie/staff/staff_interests/ hom/ioanna/

(τι έλεγε, πέτυχε ή όχι και γιατί), διαχωρισμός μεταξύ αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου κλπ.

Το διάλειμμα μετά το κεφάλαιο 5 είναι απόσπασμα μιας διάλεξης ενός καθηγητή μαθηματικών σε κάποιο πανεπιστήμιο. Η διάλεξη ξεκινά με την φράση «θα σας πω πώς να κερδίσετε ένα εκατομμύριο δολλάρια». Παραθέτονται εφτά άλυτα μαθηματικά προβλήματα, των οποίων οι μελλοντικοί λύτες, εάν υπάρξουν θα πάρουν ένα εκατομμύριο δολλάρια. Τέτοιες πληροφορίες σχετικά με την κουλτούρα των ίδιων των μαθηματικών καταφέρνουν να «σπάσουν» την εικόνα των παντοδύναμων και απρόσιτων επιστημόνων αφού οι προκλήσεις υπάρχουν ακόμα και για αυτούς. Ακόμα όμως και αν ειδωθεί σαν μια απλή ενημέρωση για το που βρίσκονται τα μαθηματικά σήμερα, ότι εξακολουθούν να διευρύνονται και ότι εξακολουθούν να «παράγονται» νέα μαθηματικά, είναι από μόνη της ενδιαφέρουσα.

Το κεφάλαιο 6 πραγματεύεται στοιχεία τριγωνομετρίας. Αν και στο σχολικό βιβλίο το κεφάλαιο των λογαρίθμων προηγείται αυτού της τριγωνομετρίας, αυτό δεν ήταν δυνατό να γίνει εδώ αφού η ιστορική προσέγγιση δεν το επέτρεπε. Η τριγωνομετρία μετρά αιώνες ζωής παραπάνω από τους λογαρίθμους και μάλιστα η γέννηση των λογαρίθμων οφείλεται τουλάχιστον εν μέρει στις ανάγκες της τριγωνομετρίας για απλοποίηση εκτεταμένων υπολογισμών. Οι αναφορές στην τριγωνομετρία μέσα στο κεφάλαιο των λογαρίθμων έκαναν απαραίτητη την αλλαγή της σειράς. Μετά από μια σύντομη υπενθύμιση των εννοιών του ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης, οι μαθητές μαθαίνουν ότι η τριγωνομετρία προέκυψε σαν επιστημονικός τομέας λόγω των θρησκευτικών αναγκών των ανθρώπων. Οι εκλείψεις, το κτίσιμο των ναών σε συγκεκριμένες θέσεις, και άλλα κοινωνικά κατεστημένα έκαναν την γνώση της αστρονομίας επιτακτική. Το εργαλείο της αστρονομίας ήταν η τριγωνομετρία. Αρχικά το ημίτονο (μισή χορδή) ήταν το μοναδικό τριγωνομετρικό εργαλείο της τριγωνομετρίας. Κυριολεκτικά σημαίνει μισή χορδή, αλλά η λέξη που χρησιμοποιείται στα αγγλικά, sine, προέρχεται από απανωτές κακές μεταφράσεις[12]. Κατά την εισαγωγή του συνημιτόνου – το οποίο ιστορικά προέκυψε αιώνες αργότερα – ως το ημίτονο της συμπληρωματικής γωνίας, οι μαθητές εξασκούνται στην ιδιότητα αυτή. Ακολουθεί ο νόμος των ημιτόνων. Αρχικά ο νόμος των ημιτόνων υπήρχε για σφαιρικά

[12]Ξεκίνησε από το Σανσκριτικό jya-ardha (μισή χορδή). Ο Aryabhata (Ινδός μαθηματικός και συγγραφέας) το συντόμευε σε jya ή jiva. Σε μετέπειτα ματαφράσεις στα Αραβικά, η λέξη αποδώθηκε απλά φωνιτικά σε jiba, που δε σήμαινε τίποτα. Τα Αραβικά όμως γράφονται χωρίς φωνήεντα, έτσι τα σύμφωνα jb ερμηνεύτηκαν ως jaib, που σημαίνει στήθος. Όταν κατά τον 12^{ο} αιώνα μεταφράστηκαν στα Λατινικά, η λέξη αποδόθηκε με την ισοδύναμή της, sinus, η οποία επίσης σήμαινε στήθος αλλά και θαλάσσιος κόλπος. Η λατινική λέξη sinus έγινε τελικά ‘sine’.

τρίγωνα, αλλά στο μάθημα οι μαθητές εξασκούνται μόνο στον νόμο ημιτόνων για επίπεδα τρίγωνα. Τέλος εισάγονται ο νόμος συνημιτόνου και το εμβαδόν τριγώνου.Στο κεφάλαιο της τριγωνομετρίας, οι μαθητές εξετάζονται με ερευνητική εργασία, η οποία ανακοινώνεται μετά τον κανόνα των ημιτόνων και αφορά στη σημασία της αστρονομίας για τους αρχαίους πολιτισμούς. Ο διαθέσιμος χρόνος είναι μέχρι το τέλος του κεφαλαίου (2-3 βδομάδες). Σημαντική θεωρείται και η παρουσίαση της εργασίας τους στην τάξη και γι' αυτό λαμβάνουν ξεχωριστή βαθμολογία.

Στο κεφάλαιο 8 (κεφάλαιο-διάλειμμα), οι μαθητές γνωρίζονται με ένα κομμάτι της κινέζικης μαθηματικής παράδοσης. Το φύλλο εργασίας (βλέπε παράρτημα, Chinese Magic Squares) έχει παρθεί από ένα βιβλίο διδασκαλίας μαθηματικών μέσα από την ιστορία τους.

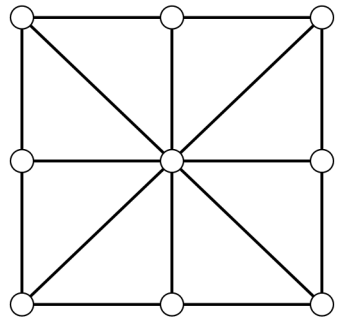
Στο κέφάλαιο εννιά ακολουθούν οι λογάριθμοι. Αρχικά γίνεται επανάληψη στις ιδιότητες των δυνάμεων. Μετά γίνεται μια πολύ σύντομη εισαγωγή της έννοιας του λογαρίθμου (ο λογάριθμος $\log_a n$ απαντά στην ερώτηση: σε ποια δύναμη πρέπει να υψώσω το α για να γίνει n;). Μέσα από την ιστορία του Napier, ο οποίος μελετούσε για χρόνια μέχρι να καταφέρει να συντάξει κάποιους πίνακες οι οποίοι μετέτρεπαν τους πολλαπλασιασμούς σε προσθέσεις (βασική ιδιότητα των λογαρίθμων: $\log(ab) = \log a + \log b$), δημιουργείται μια παράλληλη διήγηση για την γέννηση των λογαρίθμων και εισάγεται η πρώτη και σημαντικότερη ίσως ιδιότητά τους. Ακολουθούν οι υπόλοιπες ιδιότητες και κάποιες ασκήσεις παρμένες από το βιβλίου του λυκείου, για παράδειγμα η εύρεση των αριμθητικών τιμών των παραστάσεων:

$$\log_2 8 - \log_3 \sqrt{27} + \log_5 25$$
$$\log 1 + \log 100 - \log \frac{1}{100}$$
$$2\log_a 5 + \log_a 4 - 2\log_a 10$$
$$\log_a a^2 + \log_a \sqrt{a}$$

Στο τέλος του κεφάλαιο αυτού οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν και το δικό τους slide rule, ένα ευφυές κατασκεύασμα που ουσιαστικά αντικαταστάθηκε χρόνια αργότερα από την υπολογιστική μηχανή. Οι λογάριθμοι είναι ένα αρκετά πιο σύγχρονο κατασκεύασμα και η προσδοκία είναι ότι οι μαθητές θα κατορθώσουν να κατανοήσουν ότι η αδιάκοπη μελέτη και ανάπτυξη αφορά στην διευκόλυσης αρκετές φορές των υπολογισμών και στην εύρεση πιο σύγχρονων και αποδοτικών εργαλείων. Στο κεφάλαιο αυτό οι

μαθητές εξετάζονται με διαγώνισμα, οι ερωτήσεις του οποίου αναφέρονται στον Napier και σε κλασσικές ασκήσεις.

Ακολουθεί η κατασκευή ενός παιχνιδιού στρατηγικής, του Tapatan, από την Κένυα. Οι μαθητές κατασκευάζουν το ταμπλό του του παιχνιδιού (βλ. εικόνα παρακάτω) και βάφουν τα φασόλια-πιόνια με μαρκαδόρους για να ξεχωρίζουν. Τέτοια παραδοσιακά παιχνίδια στρατηγικής διαφόρων χωρών αποτελούν ευχάριστες και δημιουργικές λύσεις για τα τελευταία μαθήματα πριν τις διακοπές λόγου χάρη. Άλλες επιλογές είναι το αφρικανικό oware ή παιχνίδια της σειράς smile[13].



Στο κεφάλαιο 10, τα προβλήματα του καταναλωτή γίνονται κατά κάποιο τρόπο προβλήματα του πολίτη. Ο Wright (βλ. παραπάνω βιβλίο 5) ξεκινάει κάθε θεματική ενότητα του βιβλίου του με ένα άρθρο από την διακύρηξη των ανθρωπίνων δικαιωμάτων και μετά χρησιμοποιεί μαθηματικά για να το εξερευνήσει. Το μοτίβο αυτό ακολουθείται και στα δύο πρώτα κομμάτια του κεφαλαίου 10. (Λόγοι και Αναλογίες, Ποσοστά και μερισμός).

Ο λόγος των μητέρων που πεθαίνουν προς τα παιδιά που γεννιούνται ζωντανά, ευαισθητοποιεί τους μαθητές σε θέματα της παγκόσμιας κοινωνίας και τους επιτρέπει να εφαρμόσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις για να καταλήξουν σε συμπεράσματα αναφορικά με ένα τόσο ευαίσθητο θέμα. Τα ποσοστά και ο μερισμός διδάσκονται σε σχέση με το πρόβλημα παραγωγής και πώλησης καφέ. Οι μαθητές συγκρίνουν τα ποσοστά είσπραξης των ανθρώπων που παράγουν τον καφέ σε υποβαθμισμένες χώρες, με εκείνα των εξαγωγέων, των μεταφορέων, των εταιριών που ετοιμάζουν τον καφέ για κατανάλωση και τέλος των πωλητών λιανικής[14].

---

[13] Η σειρά smile δημιουργήθηκε από Άγγλους δάσκαλους και περιέχουν πολλές ιδέες για μαθηματικές δραστηριότητες.

[14] Η φωτογραφία του βάζου καφέ είναι από την TimesOnline (2006). Η φωτογραφία σε αυτό το βάζο πιθανόν να έχει κοστίσει εκατομμύρια στην εταιρία καφέ, ενώ οι παραγωγοί πολλές φορές ζημιώνουν.

Οι μαθητές κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις που παρουσιάζουν τις αλλαγές στην τιμή του καφέ ανά τα χρόνια και ενημερώνονται για πιο δίκαιους τρόπους πληρωμής των παραγωγών. Χρησιμοποιούν μερισμό για να βρουν πόσα κέρδισε η καθεμιά από τις παραπάνω ομάδες εμπλεκόμενες στην παραγωγή και διακίνηση καφέ σε κάποιες χρονιές. Ο τόκος, ο σύνθετος τόκος και ο φόρος εισάγονται τέλος ως χαρακτηριστικό ή και αναγκαιότητα της κοινωνίας και ως τέτοιο πραγματεύονται, με τρόπο τελείως παρόμοιο εκείνου του βιβλίου του λυκείου.

Το «διάλειμμα» μετά από το κεφάλαιο 10 αναφέρεται σε οπτικές απάτες που έχουν την αρχή τους στη γεωμετρία ή και στην προοπτική. Έτσι γίνεται η εισαγωγή στο επόμενο κεφάλαιο, που είναι η γεωμετρία. Αρχικά οι μαθητές ενημερώνονται για τη χρήση κάποιων βασικών μεθόδων στην αρχαιότητα και ακολούθως για τις αρχές της συστηματικής γεωμετρίας στην αρχαία Ελλάδα. Τέλος μαθαίνουν ότι η προοπτική σαν εργαλείο της τέχνης έχει τις ρίζες της στην γεωμετρία και εξασκούνται για λίγο στην εφαρμογή της.

Το τελευταίο κεφάλαιο του βιβλίου είναι επηρεασμένο από μια καθαρά σύγχρονη τάση συσχέτισης των μαθηματικών με τη λογοτεχνία. Αν και ο τίτλος είναι παρμένος από βιβλίο «μαθηματικής λογοτεχνίας» του 19ου αιώνα, εντούτις η *Επιπεδοχώρα* ήταν βιβλίο μοναδικό στο είδος του μέχρι πρόσφατα. Σκοπός του τελευταίου κεφαλαίου είναι να γνωρίσουν οι μαθητές το λογοτεχνικό αυτό είδος μέσα από μικρά αποσπάσματα του Flatland[15]. Μια τέτοια προσέγγιση είναι δυνατόν να εγείρει κάποιο ενδιαφέρον στους μαθητές εφόσον έρχονται σε επαφή κάποιες μαθηματικές έννοιες,

[15] Abbot, (1884) Flatland; Romance of many dimensions, Dover Publications

συγκαλυμμένες μέσα σε ένα φανταστικό πλαίσιο. Η προτεινόμενη βιβλιογραφία αποτελείται από σύγχρονα βιβλία με ιστορίες που μπορούν να συναρπάσουν τους μαθητές αφού οι ήρωές τους καλούνται να λύσουν μυστήρια και να εξιχνιάσουν φόνους, σενάρια αρκετά συνηθισμένα στην κουλτούρα της νέας γενιάς, χρησιμοποιώντας παράλληλα μαθηματικά. Έτσι, κλείνοντας τον πρώτο αυτό κύκλο σημειώσεων με αυτό τον τρόπο, παρέχονται στους μαθητές ιδέες για καλοκαιρινά αναγνώσματα που ίσως και να τους συμφιλιώσουν πιο πολύ με την ιδέα των μαθηματικών. Κάποια από τα βιβλία που προτείνονται είναι: «Το θεώρημα του παπαγάλου», «Ο θείος Πέτρος και η εικασία του Γκόλντμπαχ», «Η ακολουθία της Οξφόρδης» και άλλα.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Αν και υπάρχουν ήδη κάποια αποτελέσματα, ο πρώτος κύκλος διδασκαλίας του μαθήματος αυτού δεν έχει ακόμα κλείσει, έτσι δεν μπορεί να γίνει οποιαδήποτε παρουσίασή τους ακόμα. Μελλοντική αναφορά στο ζήτημα θα μπορεί να περιλαμβάνει αποτελέσματα αξιολογήσεων, αντιδράσεις των μαθητών, στοιχεία από τις συζητήσεις στην τάξη, αλλαγές που έγιναν στις σημειώσεις λόγω της σχολικής εμπειρίας και άλλα. Έτσι θα υπάρχει η δυνατότητα συζήτησης με στοιχεία αν η νέα αυτή προσέγγιση έγινε δεκτή από τους εν λόγω μαθητές ή εάν η παραδοσιακή διδασκαλία είναι τόσο ριζωμένη που είναι δύσκολο να αλλάξουν οι πεποιθήσεις τους.

Οι υπάρχουσες σημειώσεις αλλάζουν και βελτιώνονται συνεχώς. Εάν τα αποτελέσματα στο τέλος της χρονιάς είναι ενθαρρυντικά για τη συνέχιση μιας τέτοιας προσέγγισης, επόμενος στόχος θα είναι η ετοιμασία αντίστοιχων σημειώσεων για τη Γ' Λυκείου. Το αναλυτικό πρόγραμμα του υπουργείου προτείνει στατιστική, συνδιαστική, πιθανότητες, πολύεδρα, στερεά από περιστροφή, προβλήματα του καταναλωτή και στοιχεία ανάλυσης. Κάποια από τα κεφάλαια αυτά προσφέρονται ιδιαίτερα για συνδέσεις με την καθημερινή ζωή, κάποια για ιστορική αναδρομή και κάποια για πιο καθαρά ή θεωρητικά μαθηματικά. Καθένα από αυτά τα κεφάλαια θα εμπλουτιστεί και θα ξαναγραφτεί, στοχεύοντας πάντα σε μαθηματικά πιο προσιτά και κατανοητά, με λόγο ύπαρξης και ξεκάθαρους στόχους.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

	Table of Contents…….....……	4
1.	Introduction……....	5
2.	An ordinary morning……....	.7
3.	Pythagoras, his Theorem and the Pythagoreans……	9
	3.1 Pythagoras's theorem before Pythagoras……..….	11
	3.2 Pythagoras and the Pythagoreans…….	22
	3.3 Moving towards irrational number via Pythagoras's theorem….	23
	Project:……	25
4.	Break after chapter 3……...	26
5.	Sequences……	27
	5.1 Generally about sequences…….	27
	5.2 The Fibonacci Sequence (Math Academy)……..	27
	5.3 Malthus and An Essay on the Principle of Population……	32
	5.4Arithmetic sequence…….	33
	5.5 Geometric sequence……	43
6.	Brake after chapter 5……..	51
7.	Trigonometry……	52
	7.1 Development of trigonometry…….	56
	Project:……..	61
	7.2 Extending the rules; cosine rule and the area of a triangle…..	67
8.	Brake after chapter 7……	74
9.	Logarithms…….	75
	9.1 Generally about logarithms……..	75
	9.2 Napier and the creation of logarithm……..	76
	The slide rule……..	80
10.	Consumer problems……	82
	10.1 Ratio and proportion……	82
	10.2 Percentages and Partition…….	86
	10.3 Interest and Compound interest……...	92
	10.4 Tax…….	95
11.	Brake after chapter 10……	99
12.	Geometry……	101
	12.1 Ancient Geometry……	101
	12.2 The fifth postulate……	103
	Project:……	104
	12.3 Perspective……..	105
13.	Flatland……..	108
	Suggested Readings……..	113
14.	References/ Bibliography…….....	1

folio 2

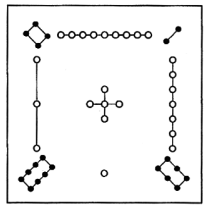
Chinese magic squares

Numbers have often been thought to have mystical properties, and particular arrangements of numbers to have special powers. The arithmetical properties of magic squares have, by now, been studied exhaustively, but in antiquity they were probably more valued as charms or for divination.

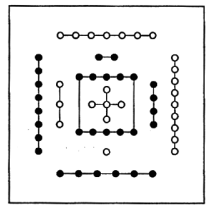
Writing in 1892, Rouse Ball tells that after magic squares became known in Europe, a silver plate engraved with a magic square was sometimes prescribed as a charm against the plague. He also notes that large passenger ships generally have one on deck for scoring such games as shuffleboard!

There are legends in China about their origin. Emperor Yu the Great, controller of the rivers, is supposed to have been given two figures by miraculous animals rising out of the waters. A turtle came out of the River Lo to give him the red Lo Shu diagram. A dragon-horse from the Yellow River gave him the green Ho Thu diagram.

- See what you can make of these diagrams:



Lo Shu



Ho Thu

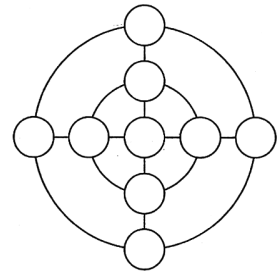
In Chinese thought the Yin and the Yang are complementary life forces. You will notice that the even, or Yin, numbers are shown by black spots. The odd, or Yang, numbers are shown by white spots. The Lo Shu diagram turns out to be the now well-known magic square containing the numbers one to nine. They are arranged so that each row, column and diagonal sums to the same total of 15.

The properties of the Ho Thu are less obvious, though you will probably find some patterns and connections. It makes most sense in the light of symbolic links which were made between numbers, elements, seasons, etc. Wood, fire, metal and water relate to spring, summer, autumn and winter and to the numbers 8, 7, 9, 6. Earth at the centre is number 5. Some early Chinese writing, which has a similar tone to the magical secrets of the Pythagoreans, says:

> *7 × 9 makes 63. 3 governs the Great Bear. This constellation governs the dog. Therefore the dog is born after only 3 months. ...*
>
> *2 × 9 makes 18. 8 governs the wind. The wind governs the insects, etc.*

Later, interest focused on the number relationships themselves, rather than links with the occult. Chinese writers devised 4 by 4 magic squares (of which we now know there are 880) and higher orders. They constructed other 'magic' figures such as a wheel and a cube. By trial and error this is very tedious, but reasoning does help.

- You could try to fill a wheel in such a way that the totals along each spoke are the same and the totals around each circle are the same.



The four-spoke wheel requires nine consecutive numbers. Guesswork may suggest a solution, but in fact there are three possibilities. Find the total of the digits from 1 to 9. If these are fitted onto four spokes, what could be left over to go in the centre? What pairs are possible for the spokes? How can these be arranged to give equal totals around the circles?

- Can you extend the reasoning to an eight-spoke wheel?

© Cambridge University Press 1995

ΛΕΣΧΗ ΑΝΑΓΝΩΣΗΣ: ΜΕ ΑΦΟΡΜΗ ΕΝΑ ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ ΑΠΟ ΤΑ ΝΕΑ ΒΙΒΛΙΑ ΤΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κατερίνα Καλφοπούλου

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα νέα βιβλία του Γυμνασίου, ακολουθούν τη σύγχρονη τάση στη διδασκαλία των Μαθηματικών, που στόχο έχει να αλλάξει τον καθιερωμένο φορμαλιστικό τρόπο διδασκαλίας που επικρατούσε μέχρι τώρα, εντάσσοντας τα Μαθηματικά στο ιστορικό και κοινωνικό τους πλαίσιο, καταδεικνύοντας τα έτσι ως ένα από τα κύρια πολιτισμικά συστατικά κάθε εποχής και κάθε κοινωνίας. Η τάση αυτή περνάει και στα ιστορικά σημειώματα, που στα προηγούμενα σχολικά βιβλία ήταν παραθετικά, δηλαδή βρίσκονταν στο τέλος κάθε κεφαλαίου, ενώ τώρα γίνονται «προσαρμοστικά» ή περίπου, καθώς εμφανίζονται σε καίρια σημεία κάθε κεφαλαίου και ενσωματώνονται στη διδακτέα ύλη. Με τη συνεχή και πυκνή εμφάνιση των ιστορικών σημειωμάτων ο διδάσκοντας οφείλει να αναπροσαρμόσει το συνήθη τρόπο παρουσίασης των μαθηματικών εννοιών και να εντάξει στο πλαίσιο της διδασκαλίας του ιστορικές αναφορές που συνήθως οδηγούν σε διαθεματικές προσεγγίσεις.

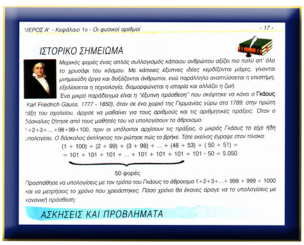
Πόσο όμως είμαστε εξοικειωμένοι με τέτοιας μορφής δραστηριότητες και πώς μπορούμε παράλληλα να καλύψουμε την ύλη που, επιπλέον, έχει αυξηθεί;

Πόσο επαρκή θα χαρακτηρίζαμε τα ιστορικά σημειώματα που έχουν προστεθεί στα σχολικά εγχειρίδια και πόσο αποτελεσματικά στην ερμηνεία των μαθηματικών εννοιών και στην παροχή επιπλέον γνώσεων;

Πιστεύω πως οι στείρες εγκυκλοπαιδικές γνώσεις που μπορεί να αποκτήσει κανείς με την παθητική ανάγνωση των ιστορικών σημειωμάτων και αμφίβολης χρησιμότητας είναι και εύκολα λησμονιούνται. Το καίριο ερώτημα είναι: Πώς θα αξιοποιηθούν με τον καλύτερο δυνατό τρόπο τα ποικίλα ιστορικά σημειώματα και πώς θα δημιουργήσουν ένα περιβάλλον ενεργητικής και συμμετοχικής μάθησης τόσο των μαθητών και των μαθητριών όσο και των εκπαιδευτικών;

Οι απαντήσεις σε αυτά τα ερωτήματα πιθανόν να προκύψουν μετά από πειραματισμούς και πρακτικές δοκιμές και να είναι ποικίλες και αντιφατικές, όπως συνήθως συμβαίνει σε κάθε νεωτερισμό. Ωστόσο μια πρόταση για έγκυρη και αποτελεσματική προσέγγιση των ιστορικών σημειωμάτων είναι **οι παράλληλες δραστηριότητες**, που δεν αντικαθιστούν την τυπική διδασκαλία, αλλά λειτουργούν συμπληρωματικά και διαμορφώνουν ένα πλαίσιο άτυπης, ψυχαγωγικής και διαδραστικής μάθησης. Οι παράλληλες δραστηριότητες, οι λεγόμενες **παρα-μαθηματικές δραστηριότητες**, όπως η ομάδα «Θαλής και Φίλοι» αποκαλεί τις **λέσχες ανάγνωσης μαθηματικής λογοτεχνίας** που προτείνει, διοργανώνει και υποστηρίζει για τρίτη συνεχή χρονιά, είναι ομάδες μαθητών συναφών ηλικιών, που συντονίζονται από έναν τουλάχιστον καθηγητή και συναντιούνται σε τακτά χρονικά διαστήματα για να συζητήσουν ένα λογοτεχνικό βιβλίο με θέμα από τα Μαθηματικά, που έχουν διαβάσει και να διοργανώσουν δραστηριότητες γύρω από αυτήν την ανάγνωση. Ερωτήματα όπως το: «πώς διοργανώνει κάποιος μια τέτοια λέσχη και τι δραστηριότητες θα μπορούσε να πραγματοποιήσει γύρω από την ανάγνωση» ακούγονται συχνά από εκπαιδευτικούς που ενημερώνονται για τις δραστηριότητες της ομάδας Θαλής και Φίλοι. Η νέα δομή των σχολικών βιβλίων, ωστόσο, οδηγεί νομοτελειακά, θα λέγαμε, σε αυτονόητες απαντήσεις.

ΜΕ ΑΦΟΡΜΗ ΕΝΑ ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ



ΜΕΡΟΣ Α' - Κεφάλαιο 1ο - Οι φυσικοί αριθμοί - 17 -

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Μερικές φορές ένας απλός συλλογισμός κάποιου ανθρώπου αξίζει πιο πολύ απ' όλο το χρυσάφι του κόσμου. Με κάποιες έξυπνες ιδέες κερδίζονται μάχες, γίνονται μνημειώδη έργα και δοξάζονται άνθρωποι, ενώ παράλληλα αναπτύσσεται η επιστήμη, εξελίσσεται η τεχνολογία, διαμορφώνεται η ιστορία και αλλάζει η ζωή.

Ένα μικρό παράδειγμα είναι η "έξυπνη πρόσθεση" που σκέφτηκε να κάνει ο **Γκάους** *(Karl Friedrich Gauss, 1777 - 1850), όταν σε ένα χωριό της Γερμανίας γύρω στα 1789, στην πρώτη τάξη του σχολείου, άρχισε να μαθαίνει για τους αριθμούς και τις αριθμητικές πράξεις. Όταν ο δάσκαλος ζήτησε από τους μαθητές του να υπολογίσουν το άθροισμα: 1+2+3+....+98+99+100, πριν οι υπόλοιποι αρχίσουν τις πράξεις, ο μικρός Γκάους το είχε ήδη υπολογίσει. Ο δάσκαλος έκπληκτος τον ρώτησε πώς το βρήκε. Τότε εκείνος έγραψε στον πίνακα:*

$$(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (48 + 53) + (50 + 51) =$$
$$= \underbrace{101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 + 101}_{50 \text{ φορές}} = 101 \cdot 50 = 5.050$$

Προσπάθησε να υπολογίσεις με τον τρόπο του Γκάους το άθροισμα 1+2+3+...+ 998 + 999 + 1000 και να μετρήσεις το χρόνο που χρειάστηκες. Πόσο χρόνο θα έκανες άραγε να το υπολογίσεις με κανονική πρόσθεση;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Με αφορμή ένα ιστορικό σημείωμα, όπως αυτό που υπάρχει στο βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου, στη σελίδα 17, και αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο ο δεκάχρονος Γκάους υπολόγισε το άθροισμα: 1 + 2 + 3 + ... + 100, έχουμε τη δυνατότητα να βάλουμε τα θεμέλια για μια λέσχη ανάγνωσης ή τουλάχιστον να δημιουργήσουμε τις κατάλληλες προϋποθέσεις.

Η M.B.W. TENT παρουσιάζει τη ζωή του Κάρλ Φρίντριχ Γκάους σε ένα μυθιστόρημα που ταυτίζεται με μια αληθινή βιογραφία του Πρίγκιπα των Μαθηματικών. Καθηγήτρια των Μαθηματικών στην Αλαμπάμα των Η.Π.Α., δηλώνει η ίδια για το βιβλίο της: « Αυτή η βιογραφία είναι αποτέλεσμα της συναναστροφής μου με τους μαθητές. Εκείνοι ήθελαν να πληροφορηθούν περισσότερα και εγώ με τη σειρά μου έψαξα και έμαθα όλες τις λεπτομέρειες.»

Αντιστρέφοντας τη διαδικασία που οδήγησε την Tent στη συγγραφή του βιβλίου της, μπορούμε να θέσουμε εμείς ερωτήματα στους μαθητές μας, όπως:

«Πού γεννήθηκε ο Καρλ Φρίντριχ Γκάους; Τι συνθήκες επικρατούσαν στο Δουκάτο του Μπράουνσβαϊκ; Σε ποια σχολεία φοίτησε ο Γκάους και ποιοι είχαν τη δυνατότητα να φοιτούν στα σχολεία αυτά;» και να τους παραπέμψουμε για τις απαντήσεις στα αντίστοιχα κεφάλαιο του βιβλίου «ο πρίγκιπας των ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ», που καλό είναι να υπάρχει, σε πρώτη φάση τουλάχιστον, στη σχολική βιβλιοθήκη. Έχει δημιουργηθεί ήδη το κατάλληλο κλίμα για μια παρα-μαθηματική δραστηριότητα. Τα θέματα που διαπραγματεύεται το βιβλίο είναι ποικίλα και όχι αμιγώς μαθηματικά. Κοινωνικά θέματα, όπως οι συνθήκες της εκπαίδευσης το 1800, που περιγράφει παραστατικά η M. Tent, τόσο στο Δημοτικό, το Κατερινέουμ, το σχολείο του Herr Μπίτνερ, όπου συνέβη και το περιστατικό που περιγράφεται στο ιστορικό σημείωμα, όσο και στο κολλέγιο Καρολίνουμ, στο οποίο φοιτά στη συνέχεια ο Γκάους με την υποστήριξη του δούκα Κάρολου Φερδινάνδου, μας δίνουν τη δυνατότητα έρευνας για τις συνθήκες της εκπαίδευσης στην Ευρώπη τους δύο προηγούμενους αιώνων. Οι κοινωνικοπολιτικές συνθήκες που επικρατούν στην Ευρώπη την περίοδο του Γκάους, η Γαλλική επανάσταση, οι πόλεμοι του Ναπολέοντα είναι θέματα που προσφέρονται για διαθεματικές δραστηριότητες.

Από μαθηματικής σκοπιάς τα θέματα που θίγονται στο βιβλίο, όπως:

1. Το άθροισμα 1 + 2 + 3 + . . . + 100
2. Τρίγωνοι αριθμοί (επέκταση σε φίλους αριθμούς κ.λ.π)
3. ΕΚΠ (α, β) x ΜΚΔ (α, β) = α x β
4. Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες, κ.α.

παρέχουν την ευκαιρία για αμιγώς μαθηματικές δραστηριότητες που συγχρονίζονται με τα περιεχόμενα του βιβλίου της Α΄ Γυμνασίου.*

* σελίδες 17, 24, 27, 182, αντίστοιχα.

Η ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Στην πρώτη φάση της δραστηριότητας, αναθέτουμε την αναζήτηση απαντήσεων στις ερωτήσεις που θέσαμε σε ισάριθμες «αντιπροσωπευτικές» ομάδες τεσσάρων ατόμων, (κάθε ομάδα αναλαμβάνει να απαντήσει ένα ερώτημα), που βοηθάμε και συντονίζουμε να διενεργήσουν την έρευνά τους και να παρουσιάσουν την εργασία τους στην υπόλοιπη τάξη.

Οι κύριοι λόγοι που δεν είναι απαραίτητη η συμμετοχή όλων των μαθητών είναι:

1. Διαφοροποίηση της δραστηριότητας από τα συνήθη καθήκοντα του μαθήματος για το σπίτι.
2. Η προαιρετική συμμετοχή των μαθητών στη δραστηριότητα.
3. Η άμιλλα που αναπτύσσεται μεταξύ των ομάδων που συμμετέχουν ενεργοποιεί τους μαθητές που δεν εξέφρασαν επιθυμία συμμετοχής.

Για την αποτελεσματικότερη δραστηριοποίηση συμμετεχόντων και μη μαθητών θα πρέπει να τηρηθεί χρονοδιάγραμμα για την εργασία και να προκαθοριστεί ο τρόπος παρουσίασης της. Ορίζουμε ένα διάστημα δυο εβδομάδων και αναθέτουμε στους μαθητές που δε συμμετέχουν να ετοιμάσουν ερωτήσεις που θα θέσουν στους συμμαθητές τους τη μέρα της παρουσίασης. Με αυτόν τον τρόπο δε μένει κανένας πραγματικά αμέτοχος και την ώρα του μαθήματος που αφιερώνουμε στην παρουσίαση πετυχαίνουμε:

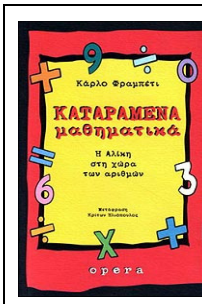
1. Την ενεργή συμμετοχή όλων των μαθητών.
2. Τη διατύπωση ερωτημάτων που οδηγούν σε παραπέρα προβληματισμούς και σε αναζήτηση περισσότερων στοιχείων.
3. Τη δυνατότητα να ανανεώσουμε τη δραστηριότητα με τη συμμετοχή περισσότερων ομάδων και τέλος
4. Να δημιουργήσουμε και τυπικά μια λέσχη ανάγνωσης μαθηματικής λογοτεχνίας.

Σ.Σ. Υλικό για δραστηριότητες για το βιβλίο «Ο πρίγκιπας των Μαθηματικών» της M. Tent, υπάρχει στο www.thalesandfriends.org

Η ΕΜΠΕΙΡΙΑ ΜΑΣ ΑΠΟ ΤΗ ΛΕΣΧΗ ΠΟΥ ΛΕΙΤΟΥΡΓΗΣΑΜΕ

Η λέσχη μας πραγματοποίησε δεκατρείς συναντήσεις. Λειτουργούσε Κυριακή πρωί, 11.30 με 13.00, στο Βαφοπούλειο Πνευματικό Κέντρο και συμμετείχαν 10 μαθητές Γυμνασίου. Ο συντονισμός γινόταν από μαθηματικό και φιλόλογο.

«Τα καταραμένα μαθηματικά» του Κάρλο Φραμπέτι, από τις εκδόσεις ΟΠΕΡΑ, με τον εναλλακτικό τίτλο «Η Αλίκη στη χώρα των αριθμών», ήταν το βιβλίο που μελετήσαμε στη λέσχη μας.



Η Αλίκη στη χώρα των θαυμάτων, μεταφέρεται από τον Φραμπέτι στη θαυμαστή χώρα των αριθμών. Ο Τσαρλς Λούτγουϊτζ Ντότζσον, συγγραφέας της πρώτης Αλίκης, δανείζει το ψευδώνυμο του, Λιούις Κάρολ, στον μαθηματικό που ξεναγεί τη δεύτερη Αλίκη στις περιπέτειες των αριθμών. Ενδείκνυται για όλες τις τάξεις του Γυμνασίου.

Ο Φραμπέτι αντιμέτωπος με την μικρή, πεισματάρα Αλίκη που απεχθάνεται τα Μαθηματικά επιχειρεί από την αρχή μια κατά μέτωπο επίθεση θέτοντας την ερώτηση:

«έκατσες καμιά φορά να σκεφτείς πώς θα ήταν ο κόσμος αν δεν είχαμε τους αριθμούς, αν δεν μπορούσαμε να μετρήσουμε;».

Η ερώτηση αποτελεί το εισιτήριο για ένα ταξίδι στο μαγευτικό κόσμο των αριθμών.

Ξεκινώντας από την ανάγκη που ώθησε στην απαρίθμηση και τη γέννηση των αριθμητικών συστημάτων, διασχίζουμε, συντροφιά με τη μικρή Αλίκη, το δάσος των πρώτων αριθμών, συναντάμε τον Ερατοσθένη να τους «κοσκινίζει» και μετά από διάφορες περιπέτειες καταλήγουμε σε ένα χαοτικό λαβύρινθο, όπου καλούμαστε να βρούμε την έξοδο και το ταξίδι συνεχίζεται με πολλά απρόοπτα

Θα ήθελα εδώ να παραθέσω περιληπτικά τις δραστηριότητες που αναπτύξαμε στη λέσχη μας.

- Στην πρώτη μας συνάντηση η συζήτηση επικεντρώθηκε γύρω από τη μαθηματική λογοτεχνία που, ως έννοια, είναι ανοίκεια στους μαθητές. Προχωρήσαμε θέτοντας την ερώτηση που θέτει ο Φραμπέτι στην αρχή του βιβλίου: « έκατσες καμιά φορά να σκεφτείς πώς θα ήταν ο κόσμος αν δεν είχαμε τους αριθμούς, αν δεν μπορούσαμε να μετρήσουμε;». Η συζήτηση που ακολούθησε, διάρκειας περίπου μιας ώρας, έφερε στο φως ποικίλες - όχι πάντα προβλέψιμες- απαντήσεις.

Το συμπέρασμα που διατυπώθηκε από τους περισσότερους μαθητές τελικά ήταν πως η κοινωνία μας θα ήταν ένα «κομφούζιο», χωρίς τους αριθμούς.

Για να επισφραγίσουμε το συμπέρασμά των μαθητών διαβάσαμε το παρακάτω απόσπασμα από τον διάλογο του Πλάτωνα:

Σωκράτης: Ἀλλά μην λογιστική τε και αριθμητική περί αριθμόν πάσα. Γλαύκων: Και μάλα.

Σωκράτης: Ταύτα δε γε φαίνεται αγωγά προς αλήθειαν.

Γλαύκων: Υπερφυώς μεν ουν.

- Στη δεύτερη συνάντηση τα παιδιά είχαν διαβάσει τις σελίδες 14-24 και έγινε συζήτηση για την «απαρχή της αρίθμησης» και την εφεύρεση της γραφής από τους Σουμέριους.
- Στην τρίτη συνάντηση, είχαν ήδη διαβαστεί από το σπίτι οι σελίδες 25-35, κάναμε την πρώτη προσέγγιση με τους πρώτους αριθμούς και τη μεγάλη ιστορία τους.

Έγινε ιστορική αναφορά στους μαθηματικούς:

Ευκλείδη, Μερσέν, Φερμά, Όυλερ, Γκάους, Μαρί Ζερμαίν, Ρίμαν και αποδείξεις ή αναφορές σε θεωρήματα σχετικά με τους πρώτους αριθμούς και τη χρήση τους στην κρυπτογραφία.

- Τα παιδιά είχαν διαβάσει τις σελίδες 36-50 και κατά τη διάρκεια της συνάντησης έγινε συζήτηση για το σύνολο των φυσικών αριθμών, για τη διάκρισή τους σε άρτιους και περιττούς.

Αναζητήθηκαν «πρότυπα» που ικανοποιούν οι αριθμοί αυτοί και αποδείχτηκε γεωμετρικά η ισότητα $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2\nu - 1) = \nu^2$.

Στη συνέχεια, με χρήση γεωμετρικού σχήματος δημιουργήσαμε το άθροισμα $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ldots+\frac{1}{2^{\nu-1}}$ και βρίσκοντας ένα «πρότυπο» υπολογίσαμε ότι είναι ίσο με $2-\frac{1}{2^{\nu-1}}$.

Ολοκληρώσαμε τις δραστηριότητες με τη διατύπωση αλγορίθμων σε φυσική γλώσσα, που τους μεταφράσαμε σε αλγεβρική γλώσσα και τους επαληθεύσαμε πειραματικά, χωρίς να προβούμε σε αυστηρή απόδειξη, κάτι που θα γίνει στην επόμενη συνάντηση.

Στόχοι των παραπάνω δραστηριοτήτων ήταν:

1. να γίνει κατανοητή η φράση «αναζήτηση προτύπων» και να συζητηθούν οι διαφορετικές αποδεικτικές μέθοδοι.
2. να εξοικειωθούν με την αλγεβρική γλώσσα και τις αλγεβρικές πράξεις.

Παρατηρήσεις: τα παιδιά έδειξαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την «αρχαιοελληνική» παράσταση των αριθμών με κουκίδες με αποτέλεσμα να ασχοληθούμε-εκτός προγράμματος-με τους τρίγωνους και τους τετράγωνους αριθμούς, κάτι που βοήθησε ιδιαίτερα στο να κατανοήσουν τι σημαίνει «πρότυπο» στα Μαθηματικά.

- Στην πέμπτη συνάντηση Ασχοληθήκαμε αρχικά με τον αριθμό μηδέν, κάνοντας μια σύντομη αναφορά στη μεγάλη ιστορία του και στη συνέχεια ασχοληθήκαμε με τρία παράδοξα που προκύπτουν από τις «ιδιαιτερότητες» του μηδενός.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον είχε το ακόλουθο:

Δώσαμε τον ορισμό του ν!=1.2.3….(ν-1)ν και ζητήσαμε από τα παιδιά να μαντέψουν με τι ισούται το 0! Κανένα δεν κατάφερε να μαντέψει σωστά και όταν αποδείξαμε ότι 0!=1, έμειναν έκπληκτα.

$$(\text{απόδειξη: } \nu! = (\nu-1)!\nu \Leftrightarrow \frac{\nu!}{\nu} = (\nu-1)! \text{ και για } \nu=1, \text{ προκύπτει } 0!=1)$$

Στη συνέχεια και ακολουθώντας τη σειρά του βιβλίου (σελ. 51- 60), μιλήσαμε για τον Ερατοσθένη (αναφέραμε πως υπολόγισε την περιφέρεια της γης και προτείναμε στα παιδιά να διαβάσουν στις διακοπές το βιβλίο «τα αστέρια της Βερενίκης» του Γκετζ). Τέλος, επανερχόμενοι στο βασικό μας θέμα που είναι οι πρώτοι αριθμοί, «κοσκινίσαμε» τους αριθμούς από 1 ως 100 (κάτι που ήταν πραγματικά διασκεδαστικό) και αναφέραμε απλούς αλγορίθμους για την πιστοποίηση πρώτων, όπως: Παρατηρούμε ότι αν ένας αριθμός Ν δεν είναι πρώτος τότε έχει (τουλάχιστον) δύο διαιρέτες μεγαλύτερους από 1. Παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση τουλάχιστον ένας διαιρέτης είναι μικρότερος από την τετραγωνική ρίζα του αριθμού. Έτσι για να ελέγξουμε αν ο Ν είναι πρώτος αρκεί να ελέγξουμε αν διαιρείται με κάποιον πρώτο μικρότερο του $\sqrt{N}$, αν ναι, είναι σύνθετος, αν όχι είναι πρώτος.

• Για την έκτη συνάντηση το κεφάλαιο του βιβλίου που είχαν να διαβάσουν τα παιδιά είχε τον τίτλο «ο λαβύρινθος».

Τα παιδιά ήρθαν όπως πάντα διαβασμένα, αλλά τα περισσότερα σχεδόν είχαν την ίδια ένσταση! Διαφωνούσαν με τη συμβουλή που έδωσε ο μαθηματικός στην Αλίκη, «μπαίνοντας στο λαβύρινθο, για να βγεις σίγουρα από αυτόν-όχι κατά ανάγκη από το συντομότερο δρόμο-πιάνεις με το ένα σου χέρι τον έναν από τους δύο τοίχους και προχωράς συνεχώς, χωρίς στιγμή να τον αφήσεις…»

Σκόπιμα συζητήσαμε αρκετή ώρα, χωρίς να μπορούμε να τους μεταπείσουμε, επικαλούμενοι μόνο τη θέση του μαθηματικού.

Στη συνέχεια δώσαμε φωτοτυπίες με λαβυρίνθους και ζητήσαμε να δοκιμάσουν. Η δοκιμή τους έπεισε και μας έδωσε τη δυνατότητα να εξηγήσουμε πως συχνά η αντίληψη μας και η διαίσθηση μας οδηγούν σε λάθος συμπεράσματα, αφού περιορίζονται σε αυτό που λέμε «Ευκλείδεια Γεωμετρία». Επικυρώσαμε τη θέση μας κόβοντας ταινίες Μέμπιους, (που, παρόλο που τις κόβουμε στη μέση, ως τελικό αποτέλεσμα έχουμε μία ταινία(!) και όχι δύο όπως θα ήταν «λογικό» και αναμενόμενο). Μετά από αυτό είχαν σχεδόν πειστεί… πως όλα πια είναι πιθανά στον περίεργο κόσμο των Μαθηματικών.

Τέλος παρουσιάσαμε σε power point με τίτλο «τοπολογία-λουκουμάδες και η…μπάλα του ποδοσφαίρου», το πρόβλημα των εφτά γεφυρών, με εκτενή αναφορά σε τοπολογικούς χώρους, τοπολογικούς χάρτες, περίεργες τοπολογικές επιφάνειες, όπως το μπουκάλι του Klein, το φλυτζάνι του καφέ και τον λουκουμά, που τοπολογικά τουλάχιστον, τα δύο τελευταία, είναι ένα και το αυτό και καταλήξαμε στο «μπακμινστερφουλερένιο» ή ημικανονικό 32-εδρο ή ακόμη απλούστερα στη γνωστή σε όλους μας μπάλα του ποδοσφαίρου.

• Στη συνάντηση αυτή, δεχτήκαμε την επίσκεψη συναδέλφων με δύο μαθητές της δικής τους ομάδας, από το Γυμνάσιο Βασιλικών και για πρώτη φορά ξεφύγαμε από το «πλάνο» μας. Δεν ασχοληθήκαμε με θέματα που αναφέρονται στις σελίδες 69-90 του βιβλίου, τις οποίες είχαν διαβάσει τα παιδιά.

Μετά από…ψηφοφορία, αποφασίσαμε να μιλήσουμε για τα «πλατωνικά στερεά», που είχαν αναφερθεί στην προηγούμενη συνάντηση.

Προσεγγίσαμε το θέμα ξεκινώντας από το επίπεδο, μιλώντας για σχήματα (ευθύγραμμα, καμπυλόγραμμα, μικτόγραμμα, πολύγωνα και τέλος κανονικά πολύγωνα) στη συνέχεια περάσαμε στο χώρο και στα στερεά (κύλινδρος, σφαίρα κ.α.), για να καταλήξουμε στα πολύεδρα και στα πέντε κανονικά πολύγωνα, τα γνωστά ως πλατωνικά στερεά. Αναφερθήκαμε στον Πλάτωνα και στο έργο του «Τίμαιος», όπου αντιστοιχίζει τα πέντε κανονικά πολύεδρα με τα «στοιχεία» (κύβος-γη, τετράεδρο-φωτιά, οκτάεδρο-αέρας, εικοσάεδρο-νερό, δωδεκάεδρο-υλικό των αστερισμών). Μιλήσαμε για τις ιδιότητες των στερεών αυτών (εγγραφή του ενός στο άλλο και εγγραφή όλων σε σφαίρα), και πως ο Κέπλερ τις χρησιμοποίησε για την περιγραφή του ηλιακού μας συστήματος και τέλος «μετρήσαμε» τις έδρες, τις ακμές και τις κορυφές τους και επιβεβαιώσαμε τον τύπο του Όυλερ: $K + E - A = 2$.

Τα παιδιά αποφάσισαν να μελετήσουν τα «αναπτύγματα» των πλατωνικών στερεών και να τα συζητήσουμε ή και να τα κατασκευάσουμε στην επόμενη συνάντηση.
Κλείσαμε τη συνάντηση με τα ημικανονικά στερεά του Αρχιμήδη και φυσικά το αγαπημένο μας μπακμινιστερφουλερένιο…

• Στην ένατη συνάντηση « το δάσος των αριθμών », το κεφάλαιο που είχαμε να διαπραγματευτούμε, κάνει αναφορά στο μικρό Γκάους και στον τρόπο που υπολόγισε γρήγορα το άθροισμα 1+2+3+…+100, σε ηλικία μόλις 10 ετών. Τον Γκάους τον γνωρίσαμε στη δεύτερη συνάντηση μας, όταν μιλήσαμε για τους πρώτους αριθμούς.

Τώρα είχαμε την ευκαιρία να μιλήσουμε για…το αρχαίο ελληνικό θέατρο, την ιστορία του, τη λειτουργία του και φυσικά την αρχιτεκτονική του. Μέσα από την αρχιτεκτονική του αρχαίου ελληνικού θεάτρου, παρουσιάστηκε η αριθμητική πρόοδος.

Κλείσαμε τη συνάντηση με τη «μελέτη» του θεάτρου της Επιδαύρου και τη σχέση του αριθμού σειρών στο κάτω διάζωμα, 21 σειρές, στο άνω διάζωμα , 34 σειρές, συνολικά 55 σειρές, που δίνει: $\frac{34}{21}=\frac{55}{34}\approx\varphi$, δηλαδή τη χρυσή αναλογία, την οποία όμως θα μελετήσουμε διεξοδικά στην τελευταία προγραμματισμένη συνάντησή μας, όταν θα γνωρίσουμε την ακολουθία του Φιμπονάτσι.

• Στη δέκατη συνάντηση φτάσαμε στο δέκατο κεφάλαιο του βιβλίου που έχει τίτλο «το τσάι των πέντε»,όπου ο Φραμπέτι αναφέρεται στο δεκαδικό θεσιακό σύστημα αρίθμησης και στο μετρικό μας σύστημα

Επειδή με το πρώτο ασχοληθήκαμε, όταν μιλήσαμε για τη γεωμετρική πρόοδο, (στο 8ο κεφάλαιο) αποφασίσαμε να ασχοληθούμε με το δεύτερο, όχι από μαθηματικής αλλά από ιστορικής και κοινωνικής πλευράς. Θέσαμε στα παιδιά τα ακόλουθα ερωτήματα:

1. Τι είναι ένα «μετρητικό σύστημα» και ποιοι λόγοι πιστεύετε ότι κάνουν αναγκαία την ύπαρξη ενός τέτοιου συστήματος;
2. Ποια μετρητικά συστήματα γνωρίζετε;
3. Πότε πιστεύετε ότι καθιερώθηκε ένα ενιαίο μετρητικό σύστημα και πως;
4. Ποιες μονάδες μέτρησης γνωρίζετε από την αρχαία Ελλάδα;

5. Πότε στη χώρα μας καθιερώθηκε το δεκαδικό μετρικό σύστημα και ποιες μονάδες αντικατέστησε;

Τα ερωτήματα αυτά μας έδωσαν τη δυνατότητα να εξετάσουμε το θέμα ιστορικά και να συζητήσουμε για τη Γαλλική Επανάσταση, τη Διακήρυξη των Δικαιωμάτων του ανθρώπου και του Πολίτη και την καθιέρωση του δεκαδικού μετρικού συστήματος, που προϋποθέτει την ισοτιμία των μελών μιας κοινωνίας.

Αναφέραμε τη μονάδα μήκους που χρησιμοποιούσαν στην αρχαία Ελλάδα, τον «πόδα» και την υποδιαίρεσή του, τον δάκτυλο (1 δάκτυλος = 1/16 του ποδός), αλλά και τα πολλαπλάσια του δακτύλου (4 δάκτυλοι = 1 παλαιστή ή παλαστή 8 δάκτυλοι = ½ ποδός = 1 λιχάς, 24 δάκτυλοι = 1½ πους = 1 πήχυς, κλπ) και κάναμε μετατροπές μονάδων και υπολογισμούς με κλάσματα.

Ο σκοπός μας ήταν να εκτιμηθεί η εύκολη χρήση του δεκαδικού μετρικού συστήματος από τους μαθητές, κάτι που έγινε!

Τέλος μιλήσαμε για το S.I. και το ρόλο που παίζει το διεθνές γραφείο μέτρων και σταθμών των Σεβρών στη Γαλλία, αλλά και για το Ελληνικό Ινστιτούτο Μετρολογίας (ΕΙΜ).

• «Το αινιγματικό χαμόγελο», σελίδες 132-138, είναι ένας πονηρός γάτος, που θέτει στην Αλίκη το πρόβλημα: ένα τούβλο ζυγίζει όσο ένα κιλό και μισό τούβλο, πόσο ζυγίζει το τούβλο;

Αυτό το πρόβλημα εισάγει στην επίλυση της πρωτοβάθμιας εξίσωσης, πρακτικά στην αρχή με χρήση ζυγαριάς και αλγεβρικά στη συνέχεια με χρήση του άγνωστου x.

Για να έχουμε μεγαλύτερη…ποικιλία μεθόδων επίλυσης εξισώσεων αυτού του είδους, αναφέραμε και την αιγυπτιακή μέθοδο της «απλής λαθεμένης παραδοχής», η οποία, όλως παραδόξως φάνηκε η πιο εύκολη στα παιδιά… Λύσαμε εξισώσεις και με τις τρεις μεθόδους και συνεχίσαμε με το γνωστό επίγραμμα του Διόφαντου, με το οποίο υπολογίσαμε πως η ζωή του διήρκησε 84 χρόνια.

Ήταν μια ενδιαφέρουσα συνάντηση που εστίασε στα μαθηματικά και ο χρόνος μας δεν ήταν αρκετός να εξαντλήσουμε το θέμα. Έτσι ανανεώσαμε το ραντεβού για αμέσως μετά το Πάσχα με σκοπό να επαναλάβουμε και να συμπληρώσουμε και με ιστορικά στοιχεία το θέμα μας.

• Τηρώντας την υπόσχεσή που είχαμε δώσει στην προηγούμενη συνάντηση, ολοκληρώσαμε και ιστορικά το θέμα «Διόφαντος», με τα περιβόητα «Αριθ-

μητικά», τα οποία αναπόφευκτα οδηγούν στον Φερμά(!) και το τελευταίο του θεώρημα και συνεχίσαμε με το κεφάλαιο:

«το μαγικό τετράγωνο», όπου αναφέρεται ο κινέζικος μύθος του σοφού Γιου με τη μαγική χελώνα (που στο καβούκι της έχει ένα 3x3 μαγικό τετράγωνο) και ο πίνακας «Μελαγχολία» του Ντύρερ.

Έτσι μιλήσαμε για τον αλγόριθμο κατασκευής μαγικών τετραγώνων 3ης τάξης που υπάρχει στο βιβλίο «cyfferinge» (αριθμητική), του Ολλανδού Willem Bartjens, που πρωτοεκδόθηκε το 1637 και για το περιβόητο μαγικό τετράγωνο του Ντύρερ, σχολιάζοντας τον πίνακά του και την αλχημεία της εποχής του.

Τέλος είδαμε αλγορίθμους κατασκευής μαγικών τετραγώνων τάξης 4κ, κ φυσικός, (τη μέθοδο του J. H. Conway) και περιττής τάξης (τη σιαμέζικη μέθοδο του De La Loubere).

Τα θέματα είχαν ποικιλομορφία και οι μαθητές εστίασαν σε διαφορετικά σημεία τα ενδιαφέροντα τους. Κάποιοι προτίμησαν να κατασκευάσουν μια μικρή ιστορία βασισμένοι σε πρωτοβάθμια εξίσωση (παίρνοντας αφορμή από το Διόφαντο) και κάποιοι άλλοι υποσχέθηκαν να μας φέρουν τα δικά τους μαγικά τετράγωνα

• Στη δέκατη τρίτη και τελευταία συνάντηση ολοκληρώσαμε το βιβλίο μας που στο τελευταίο του κεφάλαιο μας ξεναγεί στο μαγικό κόσμο της ακολουθίας του Φιμπονάτσι.

Οι αριθμοί Φιμπονάτσι γοήτευσαν τα παιδιά, που τους μέτρησαν στην αναπαραγωγή των κουνελιών, «διαβάζοντας» το βιβλίο του Άβακα. Μάθαμε πώς το ινδοαραβικό δεκαδικό σύστημα αρίθμησης έφτασε στην Ευρώπη και την πολεμική που συνάντησε από τους αβακιστές και πραγματικά νιώσαμε ευτυχείς που επικράτησε, γιατί η προσπάθεια μας να κάνουμε έναν πολλαπλασιασμό με το λατινικό σύστημα αρίθμησης απότυχεε παταγωδώς! Μετά μετρήσαμε στα πέταλα των λουλουδιών 1, 2, 3, 5, 8, 13… τα κουκουνάρια, τους ανανάδες και καταλήξαμε με γεωμετρική κατασκευή του χρυσού ορθογωνίου, στη λογαριθμική σπείρα που την αναγνωρίσαμε στη δομή των κογχυλιών, στις σπείρες των γαλαξιών, στα αέρια ρεύματα… Αναρωτηθήκαμε πόσο μαθηματικός είναι ο κόσμος μας!

Για να απαντήσουμε στο ερώτημά μας, αφού υπολογίσαμε αρκετούς λόγους δυο διαδοχικών αριθμών της ακολουθίας Φιμπονάτσι και βρήκαμε με μεγάλη μας έκπληξη πως είναι ίσοι μεταξύ τους και μάλιστα ίσοι με τον αριθμό φ της χρυσής τομής, αναζητήσαμε το φ γύρω μας και το ανακαλύψαμε στην Τέχνη, στην Αρχιτεκτονική, στην αναπαραγωγή πληθυσμών,

στην κατανομή αστερισμών, στη μουσική του Μπαχ(!), αλλά και στο ίδιο μας το σώμα!

Με το τρίγωνο του Πασκάλ, τέλος διαπιστώσαμε ότι οι αριθμοί Φιμπονάτσι εμφανίζονται εκεί που δεν τους περιμένεις….κρύβονται ακόμη και στο πορτοφόλι μας με τη μορφή των τραπεζικών καρτών, που μάθαμε πως να τις «ζωγραφίζουμε»…

Ήταν μια συνάντηση γεμάτη εκπλήξεις και διήρκησε πολύ περισσότερο από τις προηγούμενες, αλλά ήμασταν όλοι κάπως θλιμμένοι, επειδή το ταξίδι της Αλίκης στη χώρα των αριθμών τελείωσε και τα καταραμένα Μαθηματικά αποδείχτηκαν αξιολάτρευτα, μυστηριώδη, παιχνιδιάρικα και πολύ γοητευτικά!

Ο ΕΠΙΛΟΓΟΣ ΤΗΣ ΛΕΣΧΗΣ

Τελειώνοντας, ζητήσαμε από τα παιδιά να αξιολογήσουν τη «λέσχη» και τις διάφορες δραστηριότητες. Το καθένα σχεδόν διατύπωσε έναν διαφορετικό λόγο για τον οποίο τελικά συμμετείχε στη λέσχη.. Κάποια προτίμησαν τις μη μαθηματικές δραστηριότητες, κάποια άλλα θα προτιμούσαν περισσότερα μαθηματικά και μερικά ήταν ενθουσιασμένα κυρίως με τα power point που προβλήθηκαν στις συναντήσεις και εξέφρασαν την ευχή να γινόταν έτσι το μάθημα και στο σχολείο τους!

ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σε μια αντιστοίχηση μεταξύ των δραστηριοτήτων που πραγματοποιήσαμε στη λέσχη μας και των ιστορικών σημειωμάτων που περιέχονται στο σχολικό βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου διαπιστώνει κανείς πως υπάρχει σαφής αλληλοκάλυψη ύλης και προτάσεων. Με δεδομένο πως το 10% των ωρών διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο οφείλει να αφιερωθεί σε σχέδια εργασίας που θα εκπονήσουν οι μαθητές, η πρόταση της ομάδας Θαλής και Φίλοι για δημιουργία σχολικών λεσχών ανάγνωσης Μαθηματικής Λογοτεχνίας, που έγινε ήδη από το 2005 κι έκτοτε έχουν λειτουργήσει στα πλαίσια της περισσότερες από 100 σχολικές λέσχες στην Ελλάδα, φαίνεται να είναι πλέον μια αιτούμενη δραστηριότητα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Καρβέλη, Γιάννη, (2004) «Περί Υπεναντίας Μεσότητος», Γαβριηλίδης, Αθήνα

Μιχαηλίδη, Τεύκρου, (2004) **«Μαθηματικά Επίκαιρα»,** Πόλις, Αθήνα

Παπαδημητρίου, Χρίστου (2003) «Τούρινγκ, μαθήματα αγάπης», Λιβάνη, Αθήνα

Τουμάση Μπάμπη, (1999) « Πώς να ενεργοποιήσουμε τα παιδιά στο μάθημα των Μαθηματικών», Κωστόγιαννος, Χαλκίδα

Bold Brian «Μαθηματικές σπαζοκεφαλιές», Κάτοπτρο, Αθήνα

Clawson, C.C (2005) « Ο ταξιδευτής των Μαθηματικών », Κέδρος, Αθήνα

Derbyshire, J, (2006)«Υπόθεση Ρίμαν » Τραυλός, Αθήνα

Du Sautoy, Marcus (2003) «Η μουσική των πρώτων αριθμών », Τραυλός Αθήνα,

Enzensberger, Hans Magnus, (2000) «Το Πειραχτήρι των Αριθμών», Ψυχογιός

Eves, Howard (1989) « Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών », Τροχαλία, Αθήνα

Guedj, Denis (2002) «το μέτρο του κόσμου» Τραυλός, Αθήνα

Osserman, Robert, (1998) «Η ποίηση του Σύμπαντος», Κάτοπτρο, Αθήνα

ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΙΣ ΣΤΟ ΔΙΑΔΥΚΤΙΟ

www.thalesandfriends.org
www.mathsforyou.gr
www.telemath.gr
www.plus.maths.org

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΜΕΝΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΑΠΟ ΝΗΠΙΑ

Χρυσάνθη Σκουμπουρδή

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το νηπιαγωγείο σήμερα αποτελεί την αφετηρία της τυπικής εκπαίδευσης των παιδιών. Η παροχή ίσων ευκαιριών σε όλα τα παιδιά (Clements & Sharama, 2004, Morrow & Gambrell, 2004), μέσα από την ενασχόλησή τους με τα διάφορα γνωστικά αντικείμενα όπως η γλώσσα, τα μαθηματικά, οι φυσικές επιστήμες κ.λ.π. μπορεί να εξασφαλίσει το ίδιο επίπεδο ετοιμότητας για την εισαγωγή τους στο δημοτικό σχολείο.

Για αυτό δημιουργείται έντονο ενδιαφέρον από τους ερευνητές διεθνώς για τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να προσεγγιστούν τα διάφορα γνωστικά αντικείμενα από τα παιδιά αυτής της ηλικίας (5-6 ετών). Ένας από τους τρόπους που προτείνεται είναι μέσα από τα διαφορετικά είδη της λογοτεχνίας (Γιαννικοπούλου, 2002, Jacobs & Rak, 1997, Jeffrey & Giorgis, 2004. Μητακίδου & Τρέσσου, 2005).

Τα αποτελέσματα πρόσφατων ερευνών (Lowe, 2007, Morrow & Gambrell, 2004) τονίζουν ότι η ποικιλία και η σημαντικότητα των εμπειριών και των γνώσεων που διαθέτει ένα παιδί προσχολικής ηλικίας κατακτάται σε μεγάλο βαθμό μέσα από την επαφή του με ιστορίες και βιβλία. Η ανάγνωση εικονογραφημένων βιβλίων προσελκύει το ενδιαφέρον των παιδιών, προκαλεί την ενεργητική τους συμμετοχή και δημιουργεί κίνητρα για ενασχόληση. Οι καλές ιστορίες εμπνέουν τη φαντασία τους, βοηθούν στην κατανόηση του κόσμου γύρω τους και καλλιεργούν τη διάθεσή τους για διάβασμα (Morrow & Gambrell, 2004). Το πλαίσιο και οι ήρωες της ιστορίας, καθώς και ο τρόπος που γίνεται η αφήγηση ή η ανάγνωση των ιστοριών αναδύεται στο παιδικό παιχνίδι ως στοιχείο της γλωσσικής ανάπτυξης (Lowe, 2007). Οι προβληματισμοί που τίθενται από τον ήρωα και τους άλλους χαρακτήρες της ιστορίας καθώς και από τον εκπαιδευτικό σε μια διδακτική παρέμβαση με τη χρήση εικονογραφημένου βιβλίου εμπλέκουν τους μαθητές σε μαθηματική συζήτηση μέσα από την οποία αναδύονται οι άτυπες γνώσεις των παιδιών για τα ανάλογα θέματα (Σκουμπουρδή & Καφούση υπό κρίση). Με τη χρήση και την επέκταση γνωστών παραμυθιών για την εισαγωγή μαθηματικού προβληματισμού δίνεται η ευκαιρία στους

μαθητές να εφαρμόζουν τις άτυπες γνώσεις τους σε πρακτικά θέματα μέσα από οικεία πλαίσια που τους κινούν το ενδιαφέρον για συμμετοχή στην πλοκή της ιστορίας και με αυτό τον τρόπο δημιουργούν τους συνδέσμους μεταξύ της εμπειρίας που έχουν και του τρόπου που μπορούν να τη χρησιμοποιήσουν (Σκουμπουρδή, 2006).

Υπάρχει μεγάλη ποικιλία εικονογραφημένων βιβλίων, στην αγορά, που σχετίζονται με τα μαθηματικά (π.χ. «Ένα κουμπί που το έλεγαν Όσκαρ», «Η Πριγκίπισσα Δυσκολούλα», «Η Μάγισσα Φουφήχτρα», «Ο Άρης ο Τσαγκάρης», «Το ταξίδι της Λίζας», «Τριγωνοψαρούλης»). Οι νηπιαγωγοί μπορούν επιλέγοντας το κατάλληλο κάθε φορά, ανάλογα με το στόχο του μαθήματος, να το χρησιμοποιήσουν ως βοηθητικό μέσο στη διδασκαλία συνδέοντας διαφορετικά θέματα μεταξύ τους, καθοδηγώντας και πληροφορώντας τα παιδιά, εισάγοντάς τους στις μαθηματικές έννοιες, επεκτείνοντας το μαθηματικό τους λεξιλόγιο, ερμηνεύοντας και 'μεταφράζοντας' τις εικόνες και προκαλώντας δημιουργικές συζητήσεις μέσα στην τάξη (Marantz, 1992· Marantz & Marantz, 2005· Morrow & Gambrell, 2004). Τα παιδιά, με τη σειρά τους, μπορούν να πιάσουν το βιβλίο για να το παρατηρήσουν, να το μελετήσουν, να κάνουν συγκρίσεις και συνδέσεις (Lowe, 2007). Επίσης μέσω του εικονογραφημένου βιβλίου έχουν τη δυνατότητα να συλλέξουν στο μυαλό τους ποικίλες εικόνες συσχετίζοντας και συγκρίνοντάς τις με την πραγματικότητα ώστε να εμπλουτίσουν τις εμπειρίες τους (Morrow & Gambrell, 2004 σελ. 63).

Εκτός όμως από τα βιβλία του εμπορίου οι νηπιαγωγοί μπορούν να σχεδιάζουν και να αναπτύσσουν τα δικά τους σενάρια, ανάλογα με το γνωστικό αντικείμενο που θέλουν να διδάξουν. Όσον αφορά στα μαθηματικά ο σχεδιασμός σεναρίων, τα οποία παρακινούν τα παιδιά να σκεφτούν μαθηματικά και να εμπλακούν ενεργά σε μαθηματική συζήτηση μέσα στην τάξη, μπορεί, με αφορμή τη λογοτεχνία, να μετατραπεί σε εικονογραφημένο παιδικό βιβλίο. Ένα εικονογραφημένο βιβλίο που θα έχει κατασκευαστεί από τον εκπαιδευτικό ίσως έχει μεγαλύτερη αξία για μια συγκεκριμένη τάξη και αποκτά ιδιαίτερο νόημα τόσο για τον ίδιο τον εκπαιδευτικό όσο και για τα παιδιά κάνοντάς τους να προσεγγίσουν τα μαθηματικά με ένα δικό τους τρόπο.

Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται κριτήρια σχεδιασμού εικονογραφημένου παιδικού βιβλίου για τη διδασκαλία των μαθηματικών στο νηπιαγωγείο καθώς και ένα παράδειγμα ανάπτυξης ενός τέτοιου βιβλίου που αφορά στην προσέγγιση των γεωμετρικών σχημάτων.

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΜΕΝΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Η γνώση του τι είναι το εικονογραφημένο βιβλίο, η ανάγνωση ποικίλων τέτοιων βιβλίων, η οικειότητα με τη δομή και τα χαρακτηριστικά του που επιτρέπουν συγκρίσεις και αντιπαραθέσεις, η ικανότητα δημιουργίας ενδιαφέρουσας ιστορίας και αντίστοιχων εικόνων είναι κάποια από τα στοιχεία που χρειάζονται για το σχεδιασμό του. Ο σχεδιαστής του βιβλίου, έχοντας στο μυαλό του ποιοι είναι οι αναγνώστες του, τι στόχο έχει και με ποιο τρόπο σκέφτεται να το διαχειριστεί, αποφασίζει ποιο θα είναι το περιεχόμενο του βιβλίου, τι εικόνες θα το συνοδεύουν και τι προβληματισμό θα αναδύει.

Το τι είναι εικονογραφημένο βιβλίο δεν είναι εύκολο να οριστεί, αλλά περιγράφεται μέσα από τα χαρακτηριστικά του. Ένα εικονογραφημένο βιβλίο μπορεί να είναι ένα αντικείμενο τέχνης (Marantz & Marantz, 2005). Γενικά μπορεί να ειπωθεί ότι είναι ένα βιβλίο που έχει πολλές εικόνες και δεν έχει πολύ κείμενο ή δεν έχει καθόλου κείμενο οπότε οι εικόνες 'αφηγούνται' την ιστορία. Οι συγγραφείς και οι εικονογράφοι έχουν την ευθύνη να αποδώσουν το πνεύμα της ιστορίας ακόμα και αν δεν έχουν την πλήρη ελευθερία για να το εκφράσουν.

Οι εικόνες, σύμφωνα με κριτικούς εικονογραφημένων βιβλίων (Marantz, 1992 σελ. 1-2), θα πρέπει να είναι με τέτοιο τρόπο επιλεγμένες-σχεδιασμένες ώστε να προσφέρουν κάτι παραπάνω από το να υποστηρίζουν το κείμενο. Θα πρέπει να προσθέτουν στοιχεία στην ιστορία, να εισάγουν καινούριες διαστάσεις, ίσως ακόμα και να 'λένε' μια πρόσθετη ιστορία. Το είδος των εικόνων που προτιμούν τα μικρά παιδιά να βλέπουν σε ένα εικονογραφημένο βιβλίο είναι (House & Rule, 2005): οικείες εικόνες με δράση και έντονα φωτεινά χρώματα οι οποίες να απεικονίζουν κατά σειρά προτεραιότητας ρούχα και αξεσουάρ, νερό και πάγο, μωρά και μικρά πράγματα, αισθήματα, λουλούδια, φαγητό, σεξιστικά στερεότυπα κ.λ.π. Στα παιδιά δεν αρέσουν εικόνες με ασυνήθη χαρακτηριστικά σε ανθρώπους και ζώα όπως για παράδειγμα κόκκινα μάτια ή εικόνες που προκαλούν φόβο όπως σουβλερά δόντια, κοφτερά νύχια κ.λ.π.

Οι σελίδες ενός τέτοιου βιβλίου μπορεί να είναι ειδικά διαμορφωμένες ώστε να ανοίγουν σε κάποια σημεία, να σχηματίζουν pop-ups ή να χρησιμοποιούν άλλες τεχνικές που εμπλουτίζουν την εικονογράφηση. Επίσης μπορούν να ενσωματώνουν άλλα υλικά, όπως για παράδειγμα ύφασμα, δίνοντας την ευκαιρία στο παιδί να το αγγίξει ή να το χειριστεί με κάποιο άλλο τρόπο καλλιεργώντας τις αισθήσεις του. Το σχήμα του βιβλίου εκτός από το κλασσικό μπορεί να είναι το σχήμα ενός ζώου (π.χ. αρκουδάκι) ή ενός αντικειμένου (π.χ. αυτοκίνητο) κ.λ.π.

Η πορεία που ακολουθείται συνήθως σε ένα καλό εικονογραφημένο βιβλίο περιλαμβάνει ένα πλαίσιο στο οποίο εκτυλίσσεται, ένα θέμα το οποίο αναπτύσσει μέσα από μια πλοκή και τέλος ένα καταστάλαγμα (Morrow &

Gambrell, 2004: 17). Το πλαίσιο μέσα στο οποίο εξελίσσεται η ιστορία μπορεί να είναι πραγματικό-αυθεντικό, παρμένο από την καθημερινή ζωή, αλλά και φαντασιακό. Τα παιδιά ωφελούνται από τις ιστορίες που περιέχουν προβλέψιμα στοιχεία (Morrow & Gambrell, 2004: 17). Η προβλεψιμότητα εμφανίζεται μέσα από ιστορίες σχετικές με οικεία θέματα καθώς και γνωστές ιστορίες, αλλά και μέσα από ιστορίες που περιέχουν γνωστές προτάσεις και εκφράσεις, όπως οι μέρες της εβδομάδας ή οι αριθμοί καθώς και γεγονότα που επαναλαμβάνονται. Τα στοιχεία αυτά βοηθάνε τα παιδιά να κατανοήσουν εύκολα τη σειρά των γεγονότων της ιστορίας και τους επιτρέπουν να μετέχουν ενεργά κατά την αφήγησή της. Επίσης στα παιδιά αρέσουν τα βιβλία τα οποία περιστρέφονται γύρω από ένα χαρακτήρα καθώς και βιβλία που σχετίζονται με τηλεοπτικά προγράμματα κατάλληλα για την ηλικία τους (Morrow & Gambrell, 2004: 19). Αλλά και οι φαντασιακές καταστάσεις εμπλέκουν ενεργά τα παιδιά στην αφήγηση αφού φαίνεται (Nicol & Crespo, 2005) ότι μέσα από αυτές συμμετέχουν ενεργά και αναπτύσσουν το συλλογισμός τους, καθώς τους προσφέρουν δυνατότητες πνευματικής και συναισθηματικής εμπλοκής, κάτι που συχνά λείπει από τις σχολικές δραστηριότητες. Οι φαντασιακές αυτές καταστάσεις δημιουργούν στους μαθητές απορίες και ερωτήματα τα οποία συνήθως δεν έχουν μία μόνο σωστή απάντηση. Η πλοκή της ιστορίας μπορεί να περιέχει (Monhardt & Monhardt, 2006): ερωτήσεις ή προβλήματα με ανοιχτό ή δεδομένο τέλος ή αλλαγή προοπτικής, επεξήγηση, επαναλήψεις, διασκέδαση, εκπλήξεις, αστεία, καθώς και καταστάσεις που προκαλούν την ανάπτυξη ποικίλων ικανοτήτων (παρατήρηση, επικοινωνία, ταξινόμηση, μέτρηση, πρόβλεψη) κ.λ.π.

Ο μαθηματικός προβληματισμός πρέπει να προκύπτει μέσα από την πλοκή της ιστορίας και την προσπάθεια κατανόησής της και δεν πρέπει να έχει την τυπική μορφή των δραστηριοτήτων και των ασκήσεων ενός μαθήματος μαθηματικών. Μέσα από τις καταστάσεις που περιγράφει η ιστορία καθώς και μέσα από τη δράση των πρωταγωνιστών κάθε φορά δημιουργούνται άμεσα ή έμμεσα προβληματισμοί που επιζητούν λύση και διεκπεραίωση είτε για να κατανοηθεί είτε για να συνεχιστεί η ιστορία. Αν η ίδια η ιστορία δίνει τη λύση, μπορεί να δίνεται η δυνατότητα, πριν φτάσει η αφήγηση στο σημείο εκείνο, να μπορούν τα ίδια τα παιδιά να προβληματιστούν και να δώσουν τις δικές τους λύσεις.

Η ενσωμάτωση μαθηματικών στοιχείων στην πλοκή της ιστορίας προϋποθέτει επιστημονική γνώση των χρησιμοποιούμενων εννοιών καθώς και γνώση των απόψεων και άτυπων γνώσεων των παιδιών για τα ανάλογα θέματα (van den Boogaard, & van den Heuvel-Panhuizen, 2007, Ramsey, 2007). Όσον αφορά στη διδασκαλία της γεωμετρίας στην προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία σύμφωνα με τους Cockcroft & Marshall (1999) πρέπει να ξεκινάει με την προσέγγιση των στερεών σχημάτων με τα μαθηματικά τους ονόματα. Θεωρούν ότι εφόσον είναι χειροπιαστά μοντέλα, τα παιδιά μπορούν να έχουν άμεση επαφή με αυτά και έτσι να τα κατανοήσουν πιο εύκολα. Στη συνέχεια αφού γνωρίσουν τα στερεά μπορούν να περάσουν στα επίπεδα

σχήματα, μέσα από αποτυπώματα των στερεών μοντέλων. Ερευνητικά αποτελέσματα υποστηρίζουν (Clements, 2004) ότι τα μικρά παιδιά πολλές φορές μεταχειρίζονται τα στερεά σχήματα ως εύπλαστα, υποστηρίζοντας ότι αν καθίσουν πάνω στο ορθογώνιο πρίσμα θα μετατραπεί σε κύβο καθώς και ότι ο συλλογισμός και τα ονόματα που χρησιμοποιούν για τα στερεά είναι όμοια με εκείνα που χρησιμοποιούν για να περιγράψουν τα επίπεδα σχήματα (όπως η αιχμηρότητα, το μέγεθος ή η λεπτότητα καθώς και τον όρο τετράγωνο για την περιγραφή του κύβου).

ΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΜΕΝΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΤΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

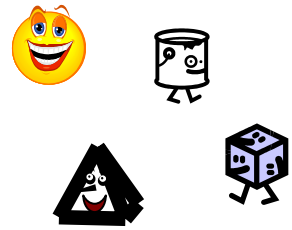
Με βάση τα παραπάνω παρουσιάζεται ένα παράδειγμα ανάπτυξης εικονογραφημένου βιβλίου για τα σχήματα («Οι περιπέτειες του αστυνόμου Σαΐνη»), που δημιουργήθηκε από μια ομάδα φοιτητριών[1], στο πλαίσιο ενός μαθήματος του ΤΕΠΑΕΣ (Τμήμα Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού του Πανεπιστημίου Αιγαίου).

Μέσα από το συγκεκριμένο σενάριο, όπου παρουσιάζεται μια ακόμα περιπέτεια του γνωστού σε όλους αστυνόμου Σαΐνη, γίνεται προσπάθεια να προσεγγιστεί η γεωμετρία μέσα από τη λογοτεχνία. Παρόλο που η ιστορία και οι χαρακτήρες είναι φανταστικοί, η πλοκή διαδραματίζεται σε καθημερινές συνθήκες και ο ήρωας είναι πραγματικός και οικείος στα παιδιά από τις παιδικές τηλεοπτικές εκπομπές. Κάθε χαρακτήρας της ιστορίας έχει το όνομα και το σχήμα ενός στερεού. Έτσι αναγνωρίζονται και ονομάζονται τα κυριότερα στερεά γεωμετρικά σχήματα: κύβος, σφαίρα, πυραμίδα και κύλινδρος, ως βασική προϋπόθεση για την κατανόηση και τη συνέχεια της ιστορίας. Τα στερεά αυτά αναζητούνται σε κάθε σταθμό και άλλοτε δεν υπάρχουν καθόλου, άλλοτε υπάρχουν ως γεωμετρικά σχήματα, άλλοτε εμφανίζονται τα αποτυπώματά τους και άλλοτε υπάρχουν ως σχήματα αντικειμένων της καθημερινής ζωής. Η ιστορία εκτυλίσσεται χρονικά στη διάρκεια μιας εβδομάδας με αναφορά των γεγονότων που συμβαίνουν την κάθε μέρα.

Ακολουθεί η παράθεση του μαθηματικού σεναρίου και των εικόνων που το συνοδεύουν. Ενώ στην πραγματικότητα, στο εικονογραφημένο βιβλίο, κάθε εικόνα καταλαμβάνει ολόκληρη τη σελίδα και το κείμενο περιορίζεται στο κάτω μέρος της, στη συγκεκριμένη εργασία, λόγω έλλειψης χώρου έχει γίνει σμίκρυνση και έτσι κάθε εικόνα έχει δίπλα της το αντίστοιχο κείμενο, μέσα σε ορθογώνιο πλαίσιο. Στο πολύγωνο πλαίσιο με πλάγια γράμματα βρίσκονται κάποιες από τις ερωτήσεις που μπορεί να τεθούν στα παιδιά κατά τη διάρκεια της αφήγησης βοηθώντας τα να παρακολουθήσουν και να κατανοήσουν το κείμενο.

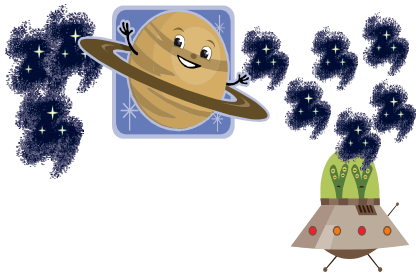
[1] Κατσαρά Παναγιώτα και Χρηστιά Σοφία

Οι περιπετειες του αστυνομου Σαινη



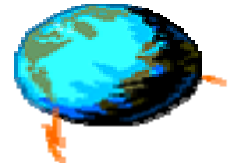
Τη Δευτέρα ο αστυνόμος ξεκίνησε για τη δουλειά του έτοιμος να αντιμετωπίσει για άλλη μια φορά τους παρανόμους.

Ο βοηθός του τον ενημέρωσε τηλεφωνικά για την επίθεση των σωμάτων από το διάστημα.



Ένα διαστημόπλοιο είχε έρθει από τον πλανήτη Στερεομετρία, του 7ου γαλαξία του ανατολικού σύμπαντος.

Ίσως η Γη κινδύνευε από το πλήρωμά του. Οι πληροφορίες ήταν λίγες.



Αρχηγός της συμμορίας ήταν ο Κύβος ο οποίος ήξερε πολύ καλά πώς να κρύβεται. Άλλαζε χρώματα και μεγέθη και κανείς δεν μπορούσε να τον

Παιδιά όλα αυτά είναι κύβοι;
(περιγραφή χαρακτηριστικών - κύβος από οικοδομικό υλικό για συσχέτιση)
Αν αλλάξει ο κύβος χρώμα αλλάζει και σχήμα; Αν αλλάξει μέγεθος;
(παρουσίαση αλλαγών με πλαστελίνη)

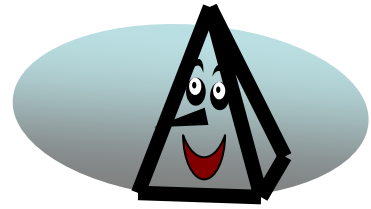
Υπαρχηγός ήταν η Σφαίρα. Είχε πολλές καμπύλες και πολλές δυνατότητες…!

Ποιες είναι οι σφαίρες;
(περιγραφή χαρακτηριστικών - σφαίρα από οικοδομικό υλικό για συσχέτιση)
Αν αλλάξει η σφαίρα χρώμα αλλάζει σχήμα; Αν αλλάξει μέγεθος;
(παρουσίαση αλλαγών με πλαστελίνη)

Ο επόμενος της παρέας ήταν ο κύλινδρος. Κυλιόταν εύκολα, περπατούσε δύσκολα.

Παιδιά πώς είναι ο κύλινδρος;
(περιγραφή χαρακτηριστικών- κύλινδρος από οικοδομικό υλικό για συσχέτιση)
Αν αλλάξει ο κύλινδρος χρώμα τι γίνεται; Αν αλλάξει μέγεθος;
(παρουσίαση αλλαγών με πλαστελίνη)

Την τετράδα συμπλήρωνε η πυραμίδα. Πολύπλευρος χαρακτήρας. Της άρεσε να πατάει στα-θερά στο έδαφος. Η μύτη της όμως ήταν άλλο πράγμα. Πολύ μεγάλη και ψηλή, μα και πολύ εξερευνητική.



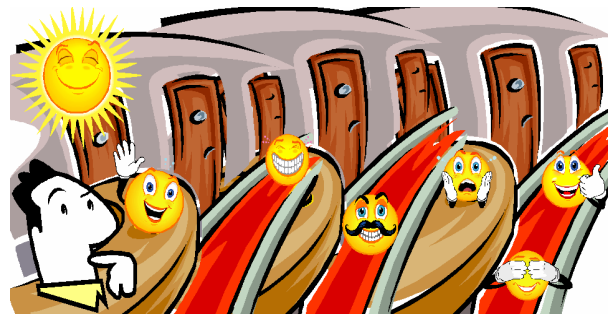
Παιδιά πώς είναι η πυραμίδα;
(περιγραφή χαρακτηριστικών- πυραμίδα από οικοδομικό υλικό για συσχέτιση)

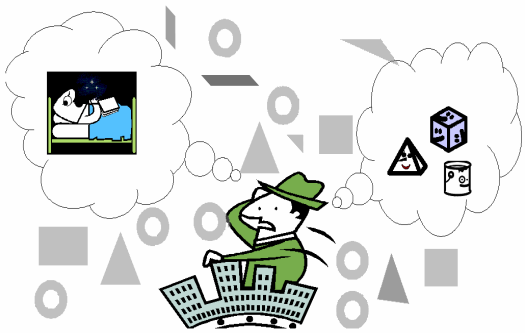
Ο αστυνόμος κατάλαβε ότι είχε δύσκολο δρόμο μπροστά του. Έβγαλε το μεγάλο του φακό και άρχισε δουλειά αμέσως.

Την Τρίτη πια, τα βρήκε! Ήταν τα ίχνη του κυλίνδρου. Τα αποτυ-πώματα του ήταν χαρακτηριστικά.

- *Παιδιά πώς νομίζετε ότι είναι τα αποτυπώματα του κυλίνδρου;*
- *Ποια από αυτά τα αντικείμενα έχουν το ίδιο αποτύπωμα;*

Την Τετάρτη η μέρα του ήταν πολύ δύσκολη. Ο εντοπισμός της σφαίρας αποδείχθηκε δύσκολη υπόθεση. Η σφαίρα κυ-λούσε προς όλες τις κα-τευθύνσεις και δεν άφηνε αποτυπώματα. Μεγάλος μπελάς.

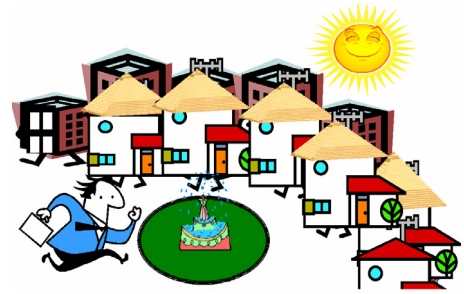




Την Πέμπτη ξύπνησε κατάκοπος. Δεν άντεχε και άλλη μια μέρα ερευνών. Όμως η αποστολή του έπρεπε να ολοκληρωθεί. Έσφιξε τα δόντια και ξεκίνησε. Δεν ήξερε όμως τι τον περίμενε. Παντού τα ίχνη τους και πουθενά αυτοί! Το βράδυ δεν έκλεισε μάτι όλη νύχτα … έπρεπε η υπόθεση να τελειώσει την επόμενη μέρα.

- *Παιδιά μπορείτε να ξεχωρίσετε τι σχήματα είναι αυτά;*

Ξημέρωσε η Παρασκευή ! Πήρε τα σύνεργα του και ξεκίνησε. Μετά από πολύ ψάξιμο τα ίχνη τον οδήγησαν σε μια πλατεία. Ήταν σίγουρος ότι κάπου εκεί ήταν ο Κύβος και η πυραμίδα.



- *Παιδιά μπορείτε να βρείτε τον κύβο και την πυραμίδα;*

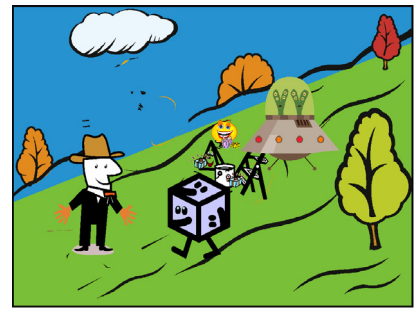
Το Σάββατο όλα τα κανάλια και οι εφημερίδες μιλούσαν για την επιτυχία του Αστυνόμου Σαΐνη. Ο Αστυνόμος όμως δεν μπορούσε να χαρεί την επιτυχία του. Κάτι δεν του πήγαινε καλά στην υπόθεση. Τα βήματα του τον οδήγησαν στο σπίτι σαπουνόφουσκα. Εκεί είχαν κλειστεί τα σχήματα.

Ο Κύβος χαμογέλασε με νόημα. Σε περίμενα Αστυνόμε. Η ίδια ιστορία και πάλι. Μετά από πολύ κυνηγητό καταλαβαίνεται ότι δεν είμαστε εχθροί. Έτσι δεν είναι; Συμφωνώ απόλυτα μαζί σας! Είστε απαραίτητοι. Πραγματικά δεν μπορώ να φανταστώ ένα κόσμο χωρίς σχήματα.

Τα παιδιά καλούνται να εκφράσουν τις απόψεις τους και να αναφέρουν παραδείγματα από συγκεκριμένα αντικείμενα που υπάρχουν γύρω τους και έχουν σχήμα σαν της σφαίρας, σαν του κυλίνδρου, σαν του κύβου και σαν της

Την Κυριακή το πάρτι που δόθηκε προς τιμήν τους δεν είχε προηγούμενο !

Αφού τελείωσε το πάρτι, τα σχήματα πολύ χαρούμενα και φορτωμένα με δώρα πήραν το δρόμο της επιστροφής. Ο Κύβος φώναξε στον Αστυνόμο Σαΐνη «Μη μας ξεχάσετε». Ο Αστυνόμος χαμογελώντας του απάντησε: «Αυτό δε γίνεται, αφού είστε παντού».



ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Ένα κατάλληλα επιλεγμένο εικονογραφημένο παιδικό βιβλίο μπορεί να προκαλέσει το μαθηματικό συλλογισμό των μαθητών με φυσικό τρόπο. Υπάρχει όμως μια δυσκολία η οποία εντοπίζεται αφενός στην εύρεση του κατάλληλου βιβλίου που θα συνδυάζει καλή λογοτεχνία με αυθεντικές μαθηματικές καταστάσεις από τη μια και αφετέρου η δημιουργία μαθηματικού προβληματισμού μέσα από την ιστορία και όχι εις βάρος της (Jacobs & Rak, 1997).

Προς αυτή την κατεύθυνση προτάθηκε ο σχεδιασμός εικονογραφημένου παιδικού βιβλίου από τον ίδιο τον εκπαιδευτικό για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Μέσα από ένα προσεκτικά σχεδιασμένο μαθηματικό σενάριο, όπου εμπλέκεται η έννοια με επιστημονική ακρίβεια και απευθύνεται στην ηλικία των παιδιών για τα οποία σχεδιάστηκε, όπου η απεικόνιση είναι ξεκάθαρη με εύκολα αναγνωρίσιμα αντικείμενα, και με στενή σχέση μεταξύ κειμένου και εικόνας, όπου το πλαίσιο συνδέεται με τα ενδιαφέροντα του παιδιού, στον πραγματικό ή το φανταστικό κόσμο καθώς και με άλλες έννοιες ή άλλα πεδία, όπου προσφέρει επίπεδα ερμηνείας και κατανόησης (από το απλό στο σύνθετο) προσδοκώντας μακροπρόθεσμη ανάπτυξη και εμπλέκει το παιδί στα μαθηματικά με τρόπο φυσικό, μπορεί να δημιουργηθεί ένα εικονογραφημένο βιβλίο για τη διδασκαλία των μαθηματικών στο νηπιαγωγείο.

«Οι περιπέτειες του αστυνόμου Σαΐνη» με τις ποικίλες μορφές παρουσίασης των στερεών σχημάτων, στις διαφορετικές καταστάσεις, μπορούν να βοηθήσουν τα παιδιά να αντιληφθούν τα χαρακτηριστικά τους, τη θέση και την αξία τους στην καθημερινότητά μας, αλλά και τη σχέση τους με τα επίπεδα σχήματα μέσα από τα αποτυπώματά τους.

Λόγω της ιδιαιτερότητας της χρήσης αυτών των βιβλίων (εικονογραφημένων για διδασκαλία γνωστικών αντικειμένων) θα πρέπει να γίνει προσπάθεια ώστε η εμπειρία να είναι ευχάριστη και ωφέλιμη. Σε καμία περίπτωση με τέτοιου είδους κατασκευές δε γίνεται προσπάθεια υποκατάστασης του εικονογραφημένου βιβλίου της αγοράς, αλλά προτείνεται ο κατά περίπτωση σχεδιασμός και η ανάπτυξη του ως διδακτικό – μαθησιακό υλικό.

Σε ένα επόμενο στάδιο, θα είχε ενδιαφέρον να διερευνηθεί αν το συγκεκριμένο εικονογραφημένο βιβλίο προσφέρεται για την ενασχόληση των παιδιών με τα γεωμετρικά σχήματα. Να καταγραφεί αν μέσα από την ανάγνωσή του προκαλείται το ενδιαφέρον των παιδιών, αν ενεργοποιείται ο συλλογισμός τους, αν προβληματίζονται και τέλος αν προκαλείται μαθηματική συζήτηση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Γιαννικοπούλου, Α. (2002). Λογοτεχνία και Μαθηματικά. Στο Καΐλα, Μ., Καλαβάσης, Φ. & Πολεμικός, Ν. (επιμ) *Μύθοι, Μαθηματικά, Πολιτισμοί: Αποσιωπημένες Σχέσεις στην Εκπαίδευση* Ατραπός, Αθήνα.

Clements, H. D. (2004). Geometric and Spatial Thinking in Early Childhood Education. In Clements, H. D. Sarama, J. (Ed) *Enganging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 267-297.

Clements, H. D. Sharama, J. (2004) *Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers,

Cockcroft, W. & Marshall, J. (1999). Educating Hannah: It's a What? *Teaching Children Mathematics* Vol. 5 No 6, 326-329.

House, C. & Rule, A., (2005). Preschoolers' Ideas of What Makes a Picture Book Illustration Beautifull *Early Childhood Education* Vol. 32, No. 5, 283-290.

Jacobs, A., & Rak, S. (1997). Mathematics and Literature: A winning combination. *Teaching Children Mathematics* 4 (3), 156-157.

Jeffrey, S. & Giorgis, C. (2004). Building the Mathematics and Literature Connection through Children's Responses *Teaching Children Mathematics* 10 (6), 328-333.

Lowe, V. (2007). *Stories, Pictures and Reality two children tell.* Routledge London.

Marantz, S. (1992). *Picture Books for Looking and Learning Awakening Visual Perceptions through the Art of Children's Book*s Oryx Press, Canada.

Marantz, S. & Marantz, K. (2005). *Multicultural Picture Books Art For Illuminating Our World* The Scarecrow Press, Inc.USA.

Μητακίδου, Σ. & Τρέσσου, Ε. (2005). *Διδάσκοντας Γλώσσα και Μαθηματικά με Λογοτεχνία Μια δημιουργική συνάντηση.* Επίκεντρο, Θεσσαλονίκη.

Monhardt, L. & Monhardt, R. (2006). Creating a Context for the Learning of Science Process Skills Through Picture Books *Early Childhood Education* Vol. 34, No. 1, 67-71.

Morrow, L. & Gambrell, L. (2004) *Using Children's Literature in Preschool Comprehending and Enjoying Books.* International Reading Association USA.

Nicol, C. & Crespo, S. (2005). Exploring Mathematics in Imaginative Places: Rethinking What Counts as Meaningful Contexts for Learning Mathematics. *School Science and Mathematics* 105 (5), 240-251.

Ramsey, I. (2007). Counting Books *http://falcon.jmu.edu/~ramseyil/counting.htm* 25/6/2007

Σκουμπουρδή, Χ. (2006). Παιδιά νηπιαγωγείου αναπαριστούν ποσότητες βοηθώντας τη Χιονάτη. Στο Δ. Χασάπης (επιμ) *Μαθηματικά και Λογοτεχνία 6ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, Θεσσαλονίκη, 151-163.

Σκουμπουρδή, Χ. & Καφούση, Σ. (υπό κρίση). Ο Όσκαρ και η Λίζα συζητούν με νήπια για τα σχήματα. Στη *Σύγχρονη Εκπαίδευση*

van den Boogaard, S. & an den Heuvel-Panhuizen (2007). Identifying characteristics of picture books that support the learning of mathematics by kindergartners. Workshop in *International Symposium Elementary Math Teaching* (SEMT), Prague.

ΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΕΝΤΥΠΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗ ΗΛΙΚΙΑ ΜΕ ΘΕΜΑ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΣΗ ΣΤΗΝ ΠΡΩΤΗ ΔΕΚΑΔΑ (0-10)

Ειρήνη Γ. Λιάκου

Νηπιαγωγός – Μεταπτυχιακή φοιτήτρια Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Η εποχή μας χαρακτηρίζεται από αλματώδεις εξελίξεις στο χώρο των επιστημών και της τεχνολογίας και σ' αυτό έχουν συνεισφέρει οι νέες τεχνολογίες, που έχουν ενταχθεί και επηρεάζουν σημαντικούς τομείς της κοινωνίας. Τα σημερινά παιδιά ζουν και μεγαλώνουν μέσα στον ιστό της Κοινωνίας της Πληροφορίας, όπου τα μαθηματικά αναπτύσσονται ραγδαία και εφαρμόζονται σε διάφορα πεδία της κοινωνικής ζωής.

Όλη αυτή η κινητικότητα επηρεάζει και την παραγωγή εκπαιδευτικού υλικού για τη διδασκαλία των μαθηματικών στην προσχολική ηλικία, το οποίο ποικίλο και πλουσιότερο συγκριτικά με το παρελθόν, καλείται να υπηρετήσει τους νέους τρόπους μάθησης και διδασκαλίας που διαμορφώνουν οι νέες τεχνολογίες, όπως είναι η εποικοδομητική, διερευνητική και συνεργατική μάθηση.

Μια από τις πλέον κλασικές μορφές παιδαγωγικού υλικού για τα μαθηματικά αποτελεί το εκπαιδευτικό βιβλίο, που έχει ως στόχο τη διδασκαλία των μαθηματικών σε παιδιά προσχολικής ηλικίας και χρησιμοποιείται από τον εκπαιδευτικό ως εργαλείο σχεδιασμού και διεκπεραίωσης της διδασκαλίας με σκοπό τη διαμόρφωση ενός δημιουργικού, μαθησιακού περιβάλλοντος (Χρηστίδου, 2006). Το εκπαιδευτικό βιβλίο για τα μαθηματικά, όπως και κάθε άλλη μορφή παιδαγωγικού υλικού, επιτελεί μια σειρά από σημαντικές λειτουργίες, όπως είναι: α) η παρουσίαση της πραγματικότητας στους μαθητές και η εγκυροποίηση της μαθηματικής γνώσης, β) η καθοδήγηση της διδασκαλίας, γ) η δραστηριοποίηση των κινήτρων μάθησης, δ) η διαφοροποίηση της σχολικής εργασίας (Καψάλης, Χαραλάμπους, 1995). Επομένως, γίνεται αντιληπτό πως το εκπαιδευτικό βιβλίο έχει μια αυτόνομη φωνή που σε πολλές περιπτώσεις διαμορφώνει και καθορίζει τη διδακτική πρακτική.

Κύριος, όμως, σκοπός του είναι να στηρίζει την εφαρμογή του προγράμματος σπουδών σε συνθήκες σχολικής πραγματικότητας. Πρωτίστως, πρέπει να αναφέρεται στο περιεχόμενο του γνωστικού αντικειμένου των μαθηματικών του Διαθεματικού Ενιαίου Πλαισίου Προγραμμάτων Σπουδών για το Νηπιαγωγείο και να συμβάλει στην επίτευξη των σκοπών του, καθώς και των γενικότερων σκοπών της εκπαίδευσης, όπως αυτοί διατυπώνονται στη σχολική νομοθεσία και στην κυρίαρχη παιδαγωγική ιδεολογία. Το εκπαιδευτικό βιβλίο αποτελεί το μέσο με το οποίο το Αναλυτικό Πρόγραμμα μεταφράζεται σε διδακτική πράξη και η συμβατότητά του με αυτό αποτελεί όρο για τη χρήση του στην εκπαίδευση.

2. Δ.Ε.Π.Π.Σ ΓΙΑ ΤΟ ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών για το νηπιαγωγείο, γενικός επιδιωκόμενος σκοπός της προσχολικής αγωγής για τα Μαθηματικά είναι να «*υποβοηθήσει τα παιδιά μέσα από βιωματικές καταστάσεις να επεκτείνουν τις πρώτες μαθηματικές τους γνώσεις και να εφαρμόζουν οικείες μαθηματικές δομές σε νέες καταστάσεις*» (ΥΠΕΠΘ & ΠΙ., 2002). Επιμέρους στόχοι του προγράμματος των Μαθηματικών για την έννοια των αριθμών είναι τα νήπια:

- Να χρησιμοποιούν, να οργανώνουν και να επεκτείνουν τις γνώσεις τους σχετικά με τους αριθμούς.
- Να μετρούν μέχρι το 10.
- Να βάζουν διάφορα πράγματα στη σειρά και να εξοικειώνονται με τα τακτικά αριθμητικά.
- Να εκτελούν απλές προσθέσεις και αφαιρέσεις.

Για την υλοποίηση των παραπάνω διδακτικών στόχων προτείνονται μια σειρά από δραστηριότητες απαγγελίας, ανάγνωσης, γραφής και διάταξης των αριθμών από το 0 μέχρι το 10.

3. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας επιλέχθηκαν ως αντικείμενα μελέτης και αξιολόγησης δεκατέσσερα έντυπα παιδαγωγικά υλικά που κυκλοφορούν στο εμπόριο. Απευθύνονται σε παιδιά προσχολικής ηλικίας και πραγματεύονται μαθηματικές έννοιες και σύμβολα. Η θεματική τους είναι η αρίθμηση από το 0 έως το 10 και η εισαγωγή στην πράξη της πρόσθεσης στην απλούστερη μορφή της.

Πρόκειται για δεκατέσσερα αντιπροσωπευτικά εγχειρίδια που προσεγγίζουν την έννοια των αριθμών της πρώτης δεκάδας με το δικό του ξεχωριστό τρόπο το καθένα. Τα μικρά παιδιά μαθαίνουν να μετρούν μέσω της ποίησης, της ζωγραφικής τέχνης, κολλώντας αυτοκόλλητα, γράφοντας και σβήνοντας αριθμούς στο μαγικό πίνακα, συμπληρώνοντας φύλλα εργασιών, ανακαλύπτοντας τους αριθμούς πίσω από μαγικά παράθυρα και κινούμενες εικόνες, κολλώντας μαγνητάκια, βρίσκοντας και τοποθετώντας πολύχρωμες καρτούλες στην κατάλληλη θέση.

Τα δεκατέσσερα αυτά υλικά ,προκειμένου να αξιολογηθούν, ομαδοποιήθηκαν με βάση ορισμένα κοινά χαρακτηριστικά τους. Τα κριτήρια που τέθηκαν για την αξιολόγηση των βιβλίων ήταν: α) το επιστημολογικό και παιδαγωγικό τους υπόβαθρο, β) η υλική τους υπόσταση, γ) η αισθητική, και δ) το ιδεολογικό τους υπόβαθρο.

Α) ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Ως προς αυτό το κριτήριο σχεδιασμού διερευνήθηκε κατά πόσο τα συγκεκριμένα βιβλία διέπονται από παραδοσιακές ή πιο μοντέρνες απόψεις για τη φύση της γνώσης.

Σύμφωνα με την παραδοσιακή επιστημολογία, αληθινή γνώση είναι αυτή που αντιστοιχεί με την πραγματικότητα, υπάρχει ανεξάρτητα από το γνωστικό υποκείμενο και πηγάζει από την αισθητηριακή εμπειρία (Χατζηγεωργίου, 1999). Όσον αφορά τη μαθηματική γνώση οι τεχνολογικά πραγματιστές θεωρούν ότι τα μαθηματικά είναι ένα πεδίο επιστημονικής γνώσης με συγκεκριμένες δομές, ιεραρχίες και μεθόδους. Γι' αυτούς στόχος της μαθηματικής παιδείας είναι η χρησιμότητα των σχολικών μαθηματικών για τις κοινωνικές και εργασιακές συναλλαγές, ενώ πιστεύουν στην ύπαρξη μιας απόλυτης επιστημονικής αλήθειας και μεθόδου. Η άποψή τους για την μάθηση και διδασκαλία έχει να κάνει με την εξάσκηση, τη βελτίωση ικανοτήτων και τη σύνθεση με χρήση απλούστερων εννοιών. Οι πρακτικές μάθησης που ακολουθούν είναι η επανάληψη, τα παραδείγματα, τα φυλλάδια και χειραπτικό υλικό με ασκήσεις για την εξάσκηση των ικανοτήτων (Χρονάκη, 2006).

Αντίθετα, σύμφωνα με τις μοντέρνες επιστημολογικές απόψεις η γνώση είναι αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης του ανθρώπου με το περιβάλλον και προέρχεται από την εμπειρία (βίωμα), ενώ το μέσο για την απόκτησή της είναι η επιστημονική πειραματική μέθοδος (Χατζηγεωργίου, 1999). Οι προοδευτικοί παιδαγωγοί υποστηρίζουν ότι τα σχολικά μαθηματικά πρέπει να αποτελούν πλαίσιο δημιουργίας και αυτογνωσίας για το παιδί, το οποίο ανακαλύπτει και ανασκευάζει προσωπικά τη δομημένη και απόλυτη μα-

θηματική γνώση. Το παιδί βιώνει τη γνώση ως «μικρός επιστήμονας» και η μάθηση επιτυγχάνεται με τη διερεύνηση, τον πειραματισμό και τις κατασκευές. Οι προοδευτικοί παιδαγωγοί χρησιμοποιούν αποπλαισιωμένο εποπτικό υλικό, δίνουν έμφαση στις κατασκευές και στις προσομοιώσεις καθημερινής ζωής (Χρονάκη, 2006).

Από τη μελέτη και σύγκριση των βιβλίων διαπιστώθηκε ότι οι παιδαγωγικές θεωρίες στις οποίες βασίστηκε ο σχεδιασμός τους σχεδόν ταυτίζονται με τον επιστημολογικό τους υπόβαθρο. Πιο συγκεκριμένα παρατηρήθηκε ότι τα παραδοσιακού τύπου βιβλία έχουν τις παιδαγωγικές τους ρίζες στη θεωρία του συμπεριφορισμού, όπου το παιδί αντιμετωπίζεται ως άγραφος χάρτης. Αγνοούνται οι βιωματικές του γνώσεις και στόχος είναι η αντικατάσταση της βιωματικής με την έγκυρη σχολική γνώση, όπου κυριαρχεί ο έντονος διδακτισμός (Χατζηγεωργίου, 1999).

Αντίθετα τα βιβλία με πιο σύγχρονο προσανατολισμό βασίζονται σε κονστρουκτιβιστικές παιδαγωγικές θεωρίες, που κυριαρχούν στο παιδαγωγικό προσκήνιο. Σύμφωνα με αυτές το παιδί κατασκευάζει τη γνώση και οι προϋπάρχουσες ιδέες και αντιλήψεις του αποτελούν τις «δομές υποδοχής» της νέας γνώσης. Δίνεται έμφαση στις ιδέες που φέρνει ο μαθητής μέσα στην τάξη και στην αναδιοργάνωση αυτών των ιδεών, προάγεται η διερευνητική μάθηση και καλλιεργείται η κριτική σκέψη.

Β) ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΥΛΙΚΗ ΤΟΥΣ ΥΠΟΣΤΑΣΗ

Τα βιβλία της παρούσας μελέτης διαθέτουν και υλική υπόσταση, καθώς το βιβλίο είναι ένας όγκος μέσα στο χώρο (Carrión, 2004 σελ. 18).Είναι δηλαδή υλικά πράγματα, «αντικείμενα» και έχουν ορισμένες ιδιότητες, όπως μέγεθος, σχήμα, όγκο, υφή. Από τα 14 βιβλία, τα 5 είναι μεγάλου μεγέθους και αρκετά ογκώδη, τα 6 μεσαίου μεγέθους και όγκου και τα υπόλοιπα 3 είναι μικρού μεγέθους και όγκου, με εξαίρεση το βιβλίο «Οι αριθμοί» που για το μικρό του μέγεθος έχει αρκετό όγκο.

Τα περισσότερα βιβλία έχουν σχήμα ορθογώνιο-εκτός από δύο που είναι τετράγωνα- και κάθετη επιφάνεια που παραπέμπει σε σχολικό εγχειρίδιο, σε αντίθεση με ορισμένα άλλα που η επιφάνειά τους είναι οριζόντια και τα καθιστά πιο φιλικά προς το παιδί (Τσιλιμένη, 2006).

Ως προς την υφή τους, το εξώφυλλο έξι βιβλίων είναι από πολύ σκληρό γυαλιστερό χαρτόνι, καλής ποιότητας και μεγάλης ανθεκτικότητας. Στα βιβλία «Εικόνες για μικρά παιδιά. Οι αριθμοί» και «Γράψε, σβήσε, ξαναγράψε 1,2,3» το εξώφυλλο και οι περιεχόμενες σελίδες τους είναι από πλαστικοποιημένο χαρτόνι, υλικό ιδιαίτερα εύκαμπτο και ανθεκτικό στην

οποιαδήποτε χρήση από μικρά παιδιά. Τέσσερα βιβλία έχουν εξώφυλλο από γυαλιστερό χαρτόνι μέτριας σκληρότητας, ενώ το βιβλίο «Οι αριθμοί» ξεχωρίζει για το μαλακό και ευχάριστο στην υφή εξώφυλλό του. Τέλος, πρέπει να σημειωθεί ότι οι περιεχόμενες των βιβλίων σελίδες είναι από υλικό ανάλογης ποιότητας με αυτό του εξώφυλλου.

Γ) ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΑΙΣΘΗΤΙΚΗ

Εικονογράφηση

Οι εικόνες θεωρούνται η πλέον σύγχρονη μορφή ανθρώπινης επικοινωνίας, που καθιστά την απόκτηση της γνώσης πιο φιλική και πιο ελκυστική στο μαθητή και τα πληροφοριακά στοιχεία του κειμένου εμφανή (Χαλκιά & Θεοδωρίδης, 2002). Σύμφωνα με ερευνητικά δεδομένα, οι οπτικές εικόνες συγκαταλέγονται στα πιο ισχυρά μέσα προς την κατεύθυνση μιας σωστής κατανόησης των τυπικών μαθηματικών, γεγονός που καταδεικνύει τον εξέχουσας σημασίας ρόλο τους στην κατάκτηση μαθηματικών εννοιών (Hughes, 2002).

Οι εικόνες δεσπόζουν σε όλα τα βιβλία της έρευνας, καταλαμβάνοντας το μεγαλύτερο εμβαδόν στη σελίδα, διότι απευθύνονται σε παιδιά προσχολικής ηλικίας και πραγματεύονται μαθηματικές έννοιες και σύμβολα. Τα παιδιά προσεγγίζουν την έννοια των αριθμών, μετρώντας τα αντικείμενα που απεικονίζονται στις σελίδες των βιβλίων.

Για το λόγο αυτό, τα εικονιζόμενα στοιχεία επιβάλλεται να είναι σαφή και ρεαλιστικά, να αποδίδουν τις μαθηματικές έννοιες, να απευθύνονται στις εμπειρίες του παιδιού και να έχουν νόημα για αυτό (Νάκου, 2006). Επίσης είναι σημαντικό, η λήψη των εικονιζόμενων στοιχείων να γίνεται από μπροστά και σε κοντινή απόσταση, σαν να κοιτά ο θεατής κατευθείαν προς αυτά. Η λήψη αυτή καλεί το παιδί - θεατή σε έντονο διάλογο και συμμετοχή (Κουλαΐδής et al, 2002).

Παρατηρήθηκε ότι στα περισσότερα βιβλία παραδοσιακών επιστημολογικών απόψεων η εικονογράφηση, παρόλο που εξυπηρετεί τους στόχους της αρίθμησης, είναι χαμηλής ποιότητας και αισθητικής, με άτονα χρώματα, χωρίς ποικιλία και διαβαθμίσεις. Για παράδειγμα, στο βιβλίο «Αρχίζω να μετρώ», όπως διακρίνεται και στην *Εικ.1*, τα χρώματα που κυριαρχούν και εναλλάσσονται στις σελίδες του είναι μόλις δύο, το λευκό και το ροζ, με αποτέλεσμα η εικονογράφηση να είναι μονότονη και να μη συμβάλλει στη δραστηριοποίηση των κινήτρων μάθησης των παιδιών.

Επίσης, πρέπει να αναφερθεί η περίπτωση του βιβλίου «1,2,3», όπου επιχειρείται μια πρωτότυπη εικαστική προσέγγιση των αριθμών μέσα από αυ-

θεντικά ζωγραφικά έργα και παρέχεται η ευκαιρία στο παιδί να έρθει σε επαφή με την τέχνη. Παρόλα αυτά τα εικονιζόμενα στοιχεία που καλείται να μετρήσει το παιδί δεν είναι ευκρινή λόγω της τεχνοτροπίας της ζωγράφου και δεν ενδείκνυνται απόλυτα για δραστηριότητες αρίθμησης (*Εικ.2*).

Σε αντιδιαστολή, στα βιβλία πιο μοντέρνου προσανατολισμού διακρίνει κανείς εικόνες υψηλής ποιότητας και αισθητικής, με τρόπο λήψης που καλεί το παιδί σε έντονη συμμετοχή και με ποικίλα έντονα και φωτεινά χρώματα, κατάλληλα για το μαθητικό κοινό στο οποίο απευθύνονται, που επηρεάζουν το συναίσθημα και δραστηριοποιούν τα κίνητρα μάθησης.

Τυποεκδοτικά χαρακτηριστικά – σελιδοποίηση

Τα τυποεκδοτικά χαρακτηριστικά ενός έντυπου παιδαγωγικού υλικού αφορούν το μέγεθος των γραμμάτων, το μήκος και τις αποστάσεις των σειρών, τη κατάλληλη οργάνωση των τίτλων και υποτίτλων, τη χρήση υπογραμμίσεων, τη γραμμικότητα ή μη της αναγνωστικής πορείας και τη σελιδοποίηση, τη γενικότερη δηλαδή διαμόρφωση της σελίδας (Ματσαγγούρας, Χέλμης, 2003).Από την ανάλυση και σύγκριση των βιβλίων παρατηρήθηκε ότι σε γενικές γραμμές στα βιβλία παραδοσιακού προσανατολισμού η τεχνική στην εκτύπωση είναι πεπαλαιωμένη, χωρίς την απαιτούμενη φροντίδα στο είδος γραφισμού που χρησιμοποιείται.

Όσον αφορά τη σελιδοποίηση είναι μάλλον κακής ποιότητας, καθώς η σελίδα είναι υπερβολικά φορτωμένη με σωρεία πληροφοριών και δεν «αναπνέει», προκαλώντας και στον αναγνώστη ένα αίσθημα ασφυξίας. Επίσης η ανάγνωση των εικονικών και λεκτικών μερών της σελίδας γίνεται με τρόπο γραμμικό, από τα αριστερά προς τα δεξιά και από πάνω προς τα κάτω, χωρίς να παρέχεται στο παιδί η ευκαιρία να περιπλανηθεί σε άλλα μονοπάτια ανάγνωσης. Χαρακτηριστικά τέτοιου είδους παραδείγματα αποτελούν οι σελίδες των βιβλίων «Αρχίζω να μετρώ» και «Τα πρώτα μου μαθηματικά» (βλ. *Εικ. 3,4*).

Σε αντιδιαστολή, τα βιβλία της νέας τέχνης, μοντέρνων επιστημολογικών απόψεων διαθέτουν σύγχρονη τεχνική στην εκτύπωση και χαλαρή σελιδοποίηση υψηλής ποιότητας, που προκαλεί το ενδιαφέρον τόσο των παιδιών όσο και των ενηλίκων και τους καλεί σε συμμετοχή και διάλογο. Οι σελίδες είναι μη γραμμικές, ώστε να μπορέσουν τα παιδιά να περιπλανηθούν σε περισσότερα από ένα μονοπάτια ανάγνωσης, διαβάζοντας τα λεκτικά και εικονικά μέρη της σελίδας με όποια σειρά. επιθυμούν (βλ. *Εικ.5*). Εξάλλου στη νέα τέχνη την οποία υπηρετούν ο ρυθμός ανάγνωσης ζωηρεύει, επιταχύνεται και δημιουργεί ειδικές συνθήκες ανάγνωσης, καθώς απευθύνεται

στην ικανότητα που έχει κάθε άνθρωπος να κατανοεί και να δημιουργεί σημεία και συστήματα σημείων (Carrión, 2004 σελ. 36).

ΣΧΕΣΗ ΕΙΚΟΝΑΣ ΚΑΙ ΚΕΙΜΕΝΟΥ

Όσον αφορά τη σχέση εικόνας και κειμένου, λόγω της φύσης του γνωστικού αντικειμένου των μαθηματικών, οι απεικονίσεις αν και υπερισχύουν σε σχέση με το κείμενο και τις λεζάντες που τις συνοδεύουν, βρίσκονται σε πλήρη αντιστοίχηση με αυτές. Επιπλέον το περιεχόμενο τόσο του κειμένου όσο και της λεζάντας είναι σύντομο και περιεκτικό.

Στα περισσότερα βιβλία ανεξάρτητα από το επιστημολογικό τους υπόβαθρο υπάρχει συνδυασμός κειμένου και λεζάντας, με εξαίρεση δύο βιβλία που περιέχουν μόνο λεζάντες. Το επίπεδο γλώσσας που χρησιμοποιείται, ανταποκρίνεται στη νοητική και γλωσσική ανάπτυξη των παιδιών προσχολικής ηλικίας. Η μόνη διαφορά που παρατηρείται μεταξύ του κειμένου ενός παραδοσιακού και ενός μοντέρνου βιβλίου είναι ότι στο πρώτο η γλώσσα είναι πιο αυστηρή και περιέχει στοιχεία διδακτισμού και κατευθυνόμενης μάθησης, ενώ στο δεύτερο το γενικότερο ύφος είναι πιο χαλαρό και καλεί τα παιδιά σε συμμετοχή. Αντιπροσωπευτικά αναφέρονται τα δύο ακόλουθα παραδείγματα, όπου οι παραπάνω διαφορές είναι εμφανείς:

***Παράδειγμα 1ο (παραδοσιακού τύπου)**: «Ο επόμενος αριθμός είναι το πέντε. Μέτρησε τους αριθμούς με τη σειρά. Γράψε το 5 πολλές φορές πάνω στη γραμμή».*

***Παράδειγμα 2ο (μοντέρνου τύπου)**: «Πάμε να παίξουμε στη λίμνη! Βάλε στην εικόνα πέντε κίτρινα παπάκια. Ποια άλλα ζωάκια τριγυρνάνε στη λίμνη;»*

Τέλος, πρέπει να σημειωθεί ότι τα βιβλία που περιέχουν κείμενο απαιτούν για την ανάγνωσή τους τη συνδρομή μεγαλύτερου ατόμου και γι' αυτό το λόγο είναι πιο δεσμευτικά στη χρήση τους από παιδιά προσχολικής ηλικίας.

Δ) ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΙΔΕΟΛΟΓΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Ερευνητικές εργασίες καταδεικνύουν ότι τα βιβλία αποτελούν φορείς ιδεολογικών θέσεων κάθε τύπου, αφού προβάλλουν άμεσα ή έμμεσα διάφορα πρότυπα Υπάρχουν βάσιμες ενδείξεις ότι ασκούν σημαντική επίδραση, στις

στάσεις, στις διαθέσεις και στις νόρμες των μαθητών (Καψάλης & Δ. Χαραλάμπους, 1995).

Γι' αυτό το λόγο, σύμφωνα με τις προδιαγραφές που θέτει το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, στα κείμενα και στις εικόνες των βιβλίων πρέπει να παρουσιάζονται παραδείγματα από τη ζωή όλων των ανθρώπων, ανεξαρτήτως φύλου, εθνικότητας, χρώματος και άλλων ορατών ιδιαιτεροτήτων. Να προάγεται η ισότητα των δύο φύλων και να μην υποθάλπεται η στερεοτυπική σκέψη και η σεξιστική προκατάληψη σε σχέση με τους κοινωνικούς και άλλους ρόλους. Το περιεχόμενο των βιβλίων να σέβεται και να προωθεί το πνεύμα και τις αρχές όλων των δικαιωμάτων (www.pi-schools.gr).

Στα περισσότερα βιβλία της παρούσας μελέτης εκπροσωπούνται ισότιμα και τα δύο φύλα, που ανήκουν όμως στη λευκή φυλή και στη μεσαία αστική τάξη. Δεν υπάρχει, δηλαδή, εκπροσώπηση άλλων φυλών ή κάποιων ιδιαίτερων κοινωνικο-πολιτισμικών ομάδων. Στο βιβλίο «Η Αριθμοοικογένεια», παρατηρεί κανείς αντιφατικά στοιχεία, διότι από τη μια ο εικονογράφος μοιάζει να αγνοεί την ύπαρξη του γυναικείου φύλου, ζωγραφίζοντας φιγούρες αρσενικού και μόνο γένους και από την άλλη σεβόμενος τη διαφορετικότητα των ανθρώπων ως προς το χρώμα, απεικονίζει έναν έγχρωμο δρομέα

Αντίθετα φωτεινές εξαιρέσεις αποτελούν τα βιβλία «Οι αριθμοί» και «Αριθμοί», όπου όχι μόνο παρουσιάζονται ισότιμα τα δύο φύλα, αλλά εκπροσωπούνται όλες οι φυλές της γης με έντονο το πολιτισμικό και διαπολιτισμικό στοιχείο (βλ. *Εικ. 6, 7*).

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Από τη σύγκριση και ανάλυση των παιδαγωγικών υλικών ως προς τα κριτήρια σχεδιασμού τους, προέκυψαν κάποια δεδομένα που οδηγούν σε ορισμένα συμπεράσματα και παρατηρήσεις.

Πιο συγκεκριμένα, τα περισσότερα βιβλία που με βάση το επιστημολογικό τους υπόβαθρο διακρίνονται σε παραδοσιακά και μοντέρνα, παρατηρήθηκε ότι έχουν μια γενικότερη παραδοσιακή ή πιο μοντέρνα αντίστοιχα φιλοσοφία που διέπει όλα τα κριτήρια σχεδιασμού τους και τα καθιστά αμιγώς παραδοσιακά ή αμιγώς μοντέρνα. Αυτό σημαίνει ότι ένα βιβλίο που είναι για παράδειγμα παραδοσιακών επιστημολογικών αντιλήψεων, βασίζεται σε παρωχημένες παιδαγωγικές θεωρίες, δεν τηρείται ο σεβασμός στη διαφορετικότητα, διακρίνεται για τη χαμηλή αισθητική του και την ξεπερασμένη τεχνική στην εκτύπωση.

Πρέπει βεβαίως να σημειωθεί ότι αυτός ο διαχωρισμός δεν είναι απόλυτος, διότι εκτός από τα αμιγώς παραδοσιακά ή μοντέρνα βιβλία, υπάρχουν και

εκείνα που συνδυάζουν παραδοσιακά στοιχεία με πιο σύγχρονα. Έτσι παρόλο που ορισμένα από τα βιβλία της παρούσας μελέτης έχουν παραδοσιακό επιστημολογικό υπόβαθρο, διακρίνονται για τη σύγχρονη τεχνική στην εικονογράφηση, τη σελιδοποίηση και τη τυπογραφική τους έκδοση ή και το αντίστροφο.

Επιπρόσθετα, τα μοντέρνα βιβλία είναι στην πλειοψηφία τους μεταφρασμένα στα ελληνικά, γεγονός που καταδεικνύει την έλλειψη στην παραγωγή αυτόχθονου πρωτογενούς υλικού και ταυτόχρονα τα καθιστά απαγορευτικά στο ευρύτερο αγοραστικό κοινό, λόγω της υψηλής τιμής τους.

Τέλος, πρέπει να υπογραμμιστεί ότι στο σύνολο των βιβλίων, ακόμη και σ' αυτά του μοντέρνου προσανατολισμού παρατηρήθηκαν ολισθήματα στο σχεδιασμό τους. Χαρακτηριστικά, μπορεί να αναφερθεί η περίπτωση του βιβλίου «ΑΡΙΘΜΟΙ», που ενώ πρόκειται για ένα μοντέρνο παιδαγωγικό υλικό υψηλής ποιότητας και αισθητικής, όπως φαίνεται και στην *Εικ.8* μειονεκτεί ως προς τη σελιδοποίησή του, γιατί οι σελίδες του είναι υπερφορτωμένες από πλήθος πληροφοριών και σημείων.

Επίσης στο βιβλίο «Μαγικός πίνακας», που διαθέτει ενσωματωμένο πινακάκι με γραφίδα για να εξασκείται το παιδί και στη γραφή των αριθμών, δεν έχει προβλεφθεί κατά το σχεδιασμό του η περίπτωση του αριστερόχειρου παιδιού. Αυτό συμβαίνει, διότι η γραφίδα έχει τοποθετηθεί από τη δεξιά πλευρά του πίνακα, συνδέεται μ' αυτόν με ένα κορδονάκι, που μετά βίας φτάνει στην αριστερή πλευρά του και δυσκολεύει με τον τρόπο αυτό στη γραφή το αριστερόχειρο παιδί.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Από τις αναλύσεις και συγκρίσεις που προηγήθηκαν προκύπτει το συμπέρασμα ότι πρόκειται για έντυπα παιδαγωγικά υλικά που προσεγγίζουν την έννοια των αριθμών της πρώτης δεκάδας με διαφορετική οπτική και μπορούν να αποτελέσουν για τον εκπαιδευτικό εργαλεία σχεδιασμού και διεκπεραίωσης της διδασκαλίας.

Η αποτελεσματικότητά τους, όμως, εξαρτάται από τον τρόπο χρήσης και παιδαγωγικής αξιοποίησής τους από τον εκπαιδευτικό, καθώς από μόνα τους δε δύνανται να προκαλέσουν μάθηση. Ειδικά ο νευραλγικός τομέας των Μαθηματικών απαιτεί εκτός από συνθήκες ανακαλυπτικής μάθησης, που δημιουργούν τα βιβλία μοντέρνου προσανατολισμού και εξάσκηση μαθηματικών ικανοτήτων, που προσφέρουν τα παραδοσιακού τύπου βιβλία. Στα χέρια όμως ενός ικανού και ευέλικτου εκπαιδευτικού που διαθέτει όρεξη και φαντασία, ακόμη και τα αμιγώς παραδοσιακού τύπου υλικά

μπορούν να συμβάλουν στη διαμόρφωση ενός δημιουργικού μαθησιακού περιβάλλοντος.

Γίνεται αντιληπτό ότι ο εκπαιδευτικός οφείλει να γνωρίζει τις βασικές αρχές συγκρότησης του παιδαγωγικού υλικού, ώστε να είναι σε θέση να αξιολογεί και να επιλέγει το καταλληλότερο υλικό για τις ανάγκες των μαθητών του και του μαθήματός του, καθώς και να παράγει ο ίδιος παιδαγωγικό υλικό ή να το προσαρμόζει σύμφωνα με τις επιταγές της καθημερινής διδακτικής πρακτικής.

Ως κατακλείδα πρέπει να σημειωθεί πως η νέα εποχή της γνώσης και της πληροφορίας επιτάσσει το σχεδιασμό παιδαγωγικού υλικού για τα μαθηματικά που θα βασίζεται στα σύγχρονα ερευνητικά δεδομένα, θα επηρεάζει το συναίσθημα και θα δραστηριοποιεί τα κίνητρα μάθησης των μικρών παιδιών, συμβάλλοντας με τον τρόπο αυτό στην επίτευξη του οράματος του National Council of Teachers of Mathematics που είναι η εξάλειψη του μαθηματικού αναλφαβητισμού (Clements, 2002).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Carrión, U. (2004). *Η νέα τέχνη να φτιάχνεις βιβλία*. Αθήνα: ΥΨΙΛΟΝ / ΒΙΒΛΙΑ

Clements, D.H. (2002). Computers in Early Childhood Mathematics. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 3 (2), 160-181.

Hughes, M. (2002).*Τα παιδιά και η έννοια των αριθμών*. Αθήνα: Gutenberg

Καψάλης, Α. & Χαραλάμπους, Δ. (1995). *Σχολικά Εγχειρίδια – Θεσμική εξέλιξη και σύγχρονη προβληματική*. Αθήνα: Έκφραση

Κουλαϊδής, Β. Δημόπουλος, Κ., Σκλαβενίτη, Σπ., Χρηστίδου, Β.(2001). *Τα κείμενα της Τεχνοεπιστήμης στο δημόσιο χώρο*. Αθήνα: Μεταίχμιο

Ματσαγγούρας, Η., Χέλμης, Σ.(2003). Παραγωγή εκπαιδευτικού υλικού στην εκπαίδευση: Θεωρητικές παραδοχές και τεχνικές προδιαγραφές. *Στα πρακτικά του Πανελλήνιου Συμποσίου με θέμα: Σχεδιασμός και παραγωγή παιδαγωγικού υλικού για την Περιβαλλοντική Εκπαίδευση*. Αθήνα: Λιβάνη

Νάκου, Ε. (2006). Πανεπιστημιακές σημειώσεις.

ΥΠΕΠΘ & ΠΙ.(2002). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών για το Νηπιαγωγείο.*

Τσιλιμένη, Τ.(2006). Πανεπιστημιακές σημειώσεις.

Χαλκιά, Κ., Θεοδωρίδης, Μ. (2002). Η χρήση της εικόνας στα εγχειρίδια φυσικών επιστημών: ένα σύστημα ταξινόμησης και αξιολόγησης εικόνων. *Θέματα στην Εκπαίδευση*, 3:1, 79-95.

Χατζηγεωργίου, Γ.(1999). *Γνώθι το curriculum*. Αθήνα: Ατραπός

Χρηστίδου, Β. (2006). Πανεπιστημιακές σημειώσεις.

Χρονάκη, Α. (2006). Πανεπιστημιακές σημειώσεις.

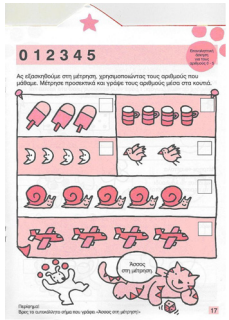
Ηλεκτρονικές διευθύνσεις

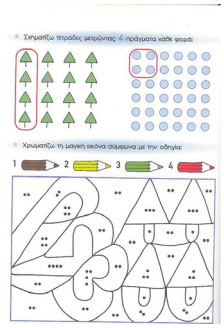
www.pi-schools.gr

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΟΠΤΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ

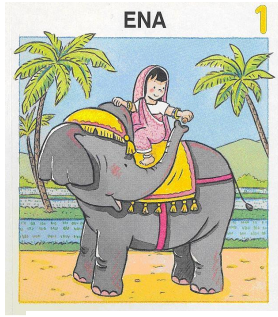
Εικ. 1

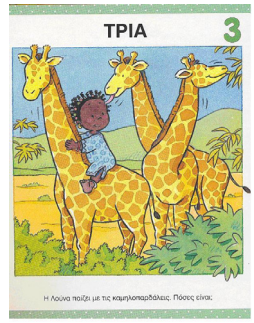
Εικ.2 *Μη ευκρινής εικονογράφηση*





Εικ.5*. Παράδειγμα θετικής σελιδοποίησης*





Εικ. 6, 7. *Σεβασμός στη διαφορετικότητα*

Εικ. 8. *Παράδειγμα αρνητικής σελιδοποίησης σε μουτέρνου τύπου βιβλίο.*

ΕΝΟΤΗΤΑ V

Κείμενα αναφοράς

ΜΙΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΑΝΑΛΥΣΕΩΝ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Zhu Yan Fan Lianghuo

National Institute of Education,
Nanyang Technological University, Singapore

ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ: ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΝΑΛΥΣΕΙΣ

Eisner, E. W. (1987). Why the textbook influences curriculum. Curriculum Review, 26(3), 11-13.

Haggard, D. J. G. (1986). Curriculum alignment in North Carolina: Relationships of state mandated tests, textbooks, and objectives. Doctoral dissertation, University of Texas. (UMI: AAT 8618484)

Hensey, L. K. (1996). An examination of elementary mathematics textbook problem-solving items during the nineties, and possible influences on the NCTM standards on such items. Doctoral dissertation, University of Iowa. (UMI: AAT 9715143)

Hughes, E. M. (1968). The impact of selected experimental curriculum projects on commercially published elementary school mathematics textbooks. Doctoral dissertation, Peabody College for Teachers of Vanderbilt University. (UMI: AAT 6816343)

Konior, J. (1993). Research into the construction of mathematical texts. Educational Studies in Mathematics, 24(3), 251-256.

Lee, P. Y., & Fan, L. (2002, August). The development of Singapore mathematics curriculum: Understanding the changes in syllabus, textbook and approaches. Paper presented at ICM2002 Satellite Conference on the Reform of Mathematics Curriculum and its Education in the 21st Century, Chongqing, China.

Η βιβλιογραφία με αρχικό τίτλο «A Bibliography of Textbook Studies (Mathematics)» δημιουργήθηκε για την Ομάδα Συζήτησης 15: Σχολικά βιβλία μαθηματικών του ICME-10, 2003 και δημοσιεύεται εδώ με την άδεια του συγγραφέα *Dr. Fan Lianghuo, email: lhfan@nie.edu.sg*

Levin, S. W. (1998). Fractions and division: Researcher conceptualizations, textbook presentations, and student performances. Doctoral Dissertation, University Of Chicago. (UMI: AAT 9910890)

Nissen, P. N. (2000). Textbooks and the National Council of Teachers of Mathematics Curriculum Standards for geometry. Doctoral dissertation, Georgia State University. (UMI: AAT 9978930)

Pickreign, J., & Capps, L. R. (2000). Alignment of elementary geometry curriculum with current standards. School Science and Mathematics, 100(5), 243-251.

Remillard, J. T. (1999). Curriculum materials in mathematics education reform: A framework for examining teachers' curriculum development. Curriculum Inquiry, 29(3), 315-342.

Schmalz, R. (1990). The mathematics textbook: How can it serve the Standards? Arithmetic Teacher, 38(1), 14-16.

Steinbrech, N. L. (1991). Effect of California curriculum standards regarding the concept of classification on three kindergarten and first grade mathematics textbook revisions. Doctoral dissertation, University of Iowa. (UMI: AAT 9212935)

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Yang, H. G. (1996). Curriculum alignment in elementary mathematics in Texas. Doctoral dissertation, University of Texas. (UMI: AAT 9633333)

ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ: ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΧΩΡΕΣ

American Association for the Advancement of Science. (1999). Middle grades mathematics textbooks – A benchmarks-based evaluation. Washington, DC: The Author.

Becker, J. (1999, January 31). Errors in U.S. school textbooks. The Baltimore Sun, p. A1. Retrieved January 31, 2002, from http://mathforum.org/epigone/mahed-news/winbaytwum

Chandler, D. G., & Brosnan, P. A. (1994). Mathematics textbook changes from before to after 1989. Focus on Learning Problems in Mathematics, 16(4), 1-9.

Amburgey, V. (1984). An investigation of verbal problems found in American arithmetic textbooks published between 1870 and 1966. Doctoral dissertation, University of Houston. (UMI: AAT 8418063)

Black, M. L. (1986). Content analysis of five elementary mathematics textbook series. Doctoral dissertation, University of Illinois. (UMI: AAT 8701436)

Bloom, S. J. (1987). A descriptive study of verbal problems in mathematics textbooks, grade seven and eight, from five time periods: the early-60's, the early-70's, the late-70's, the early-80's, and the late-80's. Doctoral dissertation, University of Iowa. (UMI: AAT 8729443)

Clarkson, P. (1993). Gender, ethnicity and textbooks. Australian Mathematics Teacher, 49(2), 14-16.

Connell, A. (1978). Analysis of elementary mathematics content in state-adopted textbooks for Texas intermediate grades 1977-1981. Doctoral dissertation, Baylor University. (UMI: AAT 7820665)

Covington, R. J. L. (1966). An analysis of readability of third and fourth grade modern mathematics textbooks using the cloze procedure. Doctoral dissertation, University of California. (UMI: AAT 6704509)

Crawford, R. A., Jr. (1974). Teacher's guides for mathematics textbooks, grades 1-9: A critical analysis. Doctoral dissertation, Harvard University. (UMI: AAT 7526906)

Davison, D. M., & Pearce, D. L. (1988). Writing activities in junior high mathematics texts. School Science and Mathematics, 88(6), 493-499.

Defence, A. (1994). The readability of the mathematics textbook: With special reference to the mature student. Master dissertation, Concordia University. (UMI: AAT MQ44873)

Educational Products Information Exchange Institute (1977). Report on a national study of the nature and quality of instructional materials most used by teachers and learners (Technical Report No. 76). New York: EPIE Institute.

Fan, L., & Zhu, Y. (2000). Problem solving in Singaporean secondary mathematics textbooks. The Mathematics Educator, 5(1/2), 117-141.

Fischer, T. A. (1997). A content analysis of United States math textbooks, 1966-1996 from a special education perspective. Doctoral dissertation, University of Wisconsin. (UMI: AAT 9810351)

Flanders, J. R. (1987). How much of the content in mathematics textbooks is new? Arithmetic Teacher, 35(1), 18-23.

Garcia, J., Harrison, N. R., & Torres, J. (1990). The portrayal of females and minorities in selected elementary mathematics series. School Science and Mathematics, 90(1), 2-12.

Garner, R., Brown, R., Sander, S., & Menke, D. J. (1992). "Seductive details" and learning from text. In S. H. Renninger & A. Krapp (Eds.), The role of interest in learning and development (pp. 239-277). Hillsdale, NJ: Erlbaum Associates.

Ginther, J. L. (1964). A study of definitions in high school mathematics textbooks. Doctoral dissertation, University of Illinois. (UMI: AAT 6500818)

Gonzalez Gomez, R. M. (1993). A descriptive stud of verbal problems in selected mathematics textbooks at the high school. Doctoral dissertation, State University of New York. (UMI: AAT 9404811)

Graybeal, S. S., & Stodolsky, S. S. (1986, April). Instructional practice in fifth-grade math and social studies: An analysis of teacher's guides. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco.

Graybeal, S. S. (1988). A study of instructional suggestions in fifth grade mathematics and social studies teacher's guides and textbooks. Doctoral dissertation, University of Chicago. (UMI: AAT T-30763)

Harta, I. (2000). The nature of story problems in Indonesian elementary mathematics textbooks during the last forty years. Doctoral dissertation, University of Iowa. (UMI: AAT 9996102)

Henderson, J. T. (1975). An investigation of the readability of three eighth grade mathematics textbooks used in British Columbia. Doctoral dissertation, University of Victoria. (UMI: AAT MK25527)

Horodezky, B., & Weinstein, P. S. (1981). A comparative analysis of vocabulary load of three provincially adopted primary arithmetic series. Albert Journal of Educational Research, 27(2), 121-132.

Irvin, B. B. (1993). A content analysis of the writing assignments contained in the four basal mathematics textbook series adopted by the state of Texas. Doctoral dissertation, University of North Texas. (UMI: AAT 9326634)

Jay, W. T. (1973). Sex stereotyping in selected mathematics textbooks for grades two, four, and six. Doctoral dissertation, University of Oregon. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 0872627)

Kaufmann, J. E. (1968). The essentials of a deductive system in elementary algebra: An analysis of textbooks and the opinions of mathematics educators. Doctoral dissertation, University of Virginia. (UMI: AAT 6818214)

Kuhnke, H. F. (1977). Update on sex-role stereotyping in elementary mathematics textbooks. Arithmetic Teacher, 24(5), 373-376.

McBride, M. (1994). The theme of individualism in mathematics education: An examination of mathematics textbooks. For the Learning of Mathematics, 14(3), 36-42.

McGinty, R. L., Van Beynen, J., & Vezalewski, D. (1986). Do our mathematics textbooks reflect what we preach? School Science and Mathematics, 86(7), 591-596.

Morgan, C. (1996). The language of mathematics: Towards a critical analysis of mathematics texts. For the Learning of Mathematics, 16(3), 2-10.

Myles, G. H. (1976). An analysis of geometry as presented in selected elementary school mathematics textbooks. Doctoral dissertation, Temple University. (UMI: AAT 7615852)

Nelson, L. B. (1977). A study of the sexual and racial stereotyping of elementary school mathematics textbooks. Doctoral dissertation, University of Houston. (UMI: AAT 7724435)

Ng, L. E. (2002). Representation of problem solving in Singaporean primary mathematics textbooks with respect to types, Pólya's model, and heuristics. Unpublished master dissertation. National Institute of Education, Nanyang Technological University, Singapore.

Nibbelink, W. H., Stockdale, S. R., & Mangru, M. (1986). Sex-role assignments in elementary school mathematics textbooks. Arithmetic Teacher, 34(2), 19-21.

Nicely, R. F., Jr. (1985). Higher-order thinking skills in mathematics textbooks. Educational Leadership, 42(7), 26-30.

Nicely, R. F., Jr., Fiber, H. R., & Bobango, J. C. (1986). The cognitive content of elementary school mathematics textbooks. Arithmetic Teacher, 34(2), 60.

Noonan, J. (1990). Readability problems presented by mathematics texts. Early Child Development and Care, 54, 57-81.

O'Connor, R. A. (1991). An evaluation of the readability of text and reinforcement of new vocabulary words in four mathematics series. Doctoral dissertation, University of Tennessee. (UMI: AAT 9133761)

Panchyshyn, R., & Enright, B. (1981, November). An investigation of word frequency in mathematical word problems in basal mathematics textbooks, grade one through eight. Paper presented at the Meeting of the Mid-south Educational Research Association, Lexington. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 212487)

Pickreign, J. R. (1996). An analysis of mathematics vocabulary and symbols use in five elementary mathematics textbook series. Doctoral dissertation, University of Kansas. (UMI: AAT 9726564)

Raman, M. (1998, April). Epistemological messages conveyed by high school and college mathematics textbooks. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association. San Diego. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 420523)

Reed, M. K. S. (1965). Vocabulary load of certain state-adopted mathematics textbooks, grades one through three. Doctoral dissertation, University of Southern California. (UMI: AAT 6512264)

Remillard, J. (1991). Is there an alternative? An analysis of commonly used and distinctive elementary mathematics curricula. Elementary Subjects Centre, Series No. 31. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 339593)

Reys, B. J., Reys, R. E., & Koyama, M. (1996). The development of computation in three Japanese primary-grade textbooks. The Elementary School Journal, 96(4), 423-437.

Rock, S. (1992). An examination of selected features of six mathematics textbooks at the seventh-grade level. Doctoral dissertation, University of Wisconsin. (UMI: AAT 9218362)

Schultz, K. T. (1998). Algebra review in geometry textbooks: Practice or promise? Ohio Journal of School Mathematics, 37, 24-28.

Siepka, A. B. (1999). Mathematical connections in pre-standards and post-standards textbooks. Master dissertation, Christopher Newport University. (UMI: AAT 1398500)

Stockdale, S. R. (1985). An analysis of elementary mathematics textbook story problems during the eighties, and comparisons to earlier eras. Doctoral dissertation, University of Iowa. (UMI: AAT 8518877)

Stockdale, S. R. (1991). A study of the frequency of selected cue words in elementary textbook word problems. School Science and Mathematics, 91(1), 15-21.

Sun, W. (1993). A comparative analysis of the secondary mathematics curriculum in the People's Republic of China. Doctoral dissertation, Columbia University Teachers College. (UMI: AAT 9414463)

Swetz, F. (1992). Fifteen and sixteen century arithmetic texts: What can we learn from them? Science and Education, 1(4), 365-378.

Tong, A. K. K. (1999). The language in Chinese mathematical texts before AD 31300: A case for logical abstraction. Interchange, 30(4), 433-458.

Ulep, S. A. (2000). Rethinking the Philippine school mathematics curriculum. Intersection, 1(1), 2-11.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ: ΔΙΕΘΝΕΙΣ ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ

Bierhoof, H. (1996). Laying the foundations of Numeracy: A comparison of primary school textbooks in Britain, Germany and Switzerland. Teaching Mathematics and its Applications, 15(4), 141-157.

Cao, Z., Seah, W. T., Bishop, A. (2002). A comparison of mathematical values conveyed in mathematics textbooks in China and Australia. In S. L. Y. Yam & S. Y. S. Lau (Eds.), ICMI comparative study conference 2002: Pre-conference proceedings (pp. 201-205). Hong Kong: University of Hong Kong.

Carter, J., Li, Y., & Ferrucci, B. J. (1997). A comparison of how textbooks present integer addition and subtraction in PRC and USA. The Mathematics Educator, 2(2), 197-209.

Coates, M. J. (1997). Indigenous and imported primary school textbooks in Belize: A comparative study. Master dissertation, University of Ottawa. (UMI: AAT MQ28410)

Dain, H. M. (1967). Elementary school mathematics textbooks used in California and in four European countries. Doctoral dissertation, University of Southern California. (UMI: AAT 6708007)

Fan, L. (1999). Applications of arithmetic in US and Chinese textbooks: A comparative study. In G. Kaiser, E. Luna, & I. Huntley (Eds.), Studies in mathematics education series II: International comparisons in mathematics education (pp. 151-162). London: Falmer Press.

Fuson, K. C., Stigler, J. W., & Bartsch, K. (1988). Brief report: Grade placement of addition and subtraction topics in Japan, Mainland China, the Soviet Union, Taiwan, and the United States. Journal for Research in Mathematics Education, 19(5), 449-456.

Harding, D. C. (1995). A comparative study of German and American school mathematics textbooks in their approach to problem solving. Doctoral dissertation, State University of New York. (UMI: AAT 9538085)

Howson, A. G. (1995). TIMSS monograph no. 3: Mathematics textbooks: A comparative study of Grade 8 texts. Vancouver, BC: Pacific Educational Press.

Hoyles, C., Küchemann, D., & Foxman, D. (2003). The role of proof in different geometry curricula. Mathematics in School, 32(4), 36-40.

Jiang, Z., & Eggleton, P. (1995). A brief comparison of the U.S. and Chinese middle school mathematics programs. School Science and Mathematics, 95(4), 187-194.

Kim, H. (1993). A comparative study between an American and a Republic of Korean textbook series' coverage of measurement and geometry content in first through eight grades. School Science and Mathematics, 93(3), 123-126.

Leung, F. S. K., Lam, C. C., Mok, I. A. C., Wong, K. M., & Wong, N. Y. (1999). Comparative study on the mathematics curricula of Major Asian and western countries. Hong Kong: Hong Kong Government.

Li, J. (1999). Inside the teacher's guide: A comparison study of U.S. and Chinese elementary mathematics teacher's guides. Chicago, IL.

Li, Y. (1999). An analysis of algebra content, content organization and presentation, and to-be-solved problems in eighth-grade mathematics textbooks from Hong Kong, Mainland China, Singapore, and the United States. Doctoral dissertation, University of Pittsburgh. (UMI: AAT 9957757)

Li, Y. (2000). A comparison of problems that follow selected content presentation in American and Chinese mathematics textbooks. Journal for Research in Mathematics Education, 31(2), 234-241.

Li, Y., & Ginsburg, M. (2002). Classification and framing of mathematical knowledge in Hong Kong, Mainland China, Singapore, and the United States: An analysis of textbooks in socio-cultural context. In S. L. Y. Yam & S. Y. S. Lau (Eds.), ICMI comparative study conference 2002: Pre-conference proceedings (pp. 207-215). Hong Kong: University of Hong Kong.

Mayer, K. K., Sims, V., & Tajika, H. (1995). A comparison of how textbooks teach mathematical problem solving in Japan and the United States. American Educational Research Journal, 32(2), 443-460.

Nguyen, D., & Kulm, Gerald (2002). Learning, knowing, and doing: A comparison of the U.S. and Vietnamese mathematics textbooks lessons. In S. L. Y. Yam & S. Y. S.

Lau (Eds.), ICMI comparative study conference 2002: Pre-conference proceedings (pp. 217-223). Hong Kong: University of Hong Kong.

Park, K., & Leung, F. K. S. (2002). A comparison of the mathematics textbooks of China, England, Japan, Korea, and United States. In S. L. Y. Yam & S. Y. S. Lau (Eds.), ICMI comparative study conference 2002: Pre-conference proceedings (pp. 225-233). Hong Kong: University of Hong Kong.

Samimy, K. K., & Liu, J. (1997). A comparative study of selected United States and Japanese first-grade mathematics textbooks. Focus on Learning Problems in Mathematics, 19(2), 1-13.

Sangviriyakul, V. P. (1978). A comparative study of selected elementary school mathematics textbooks used in the United States and in Thailand. Doctoral dissertation, University of Northern Colorado. (UMI: AAT 7819027)

Schmidt, W. H., McKnight, C. C., & Raizen, S. A. (1997). A splintered vision: An investigation of U.S. science and mathematic education. Boston: Kluwer Academic Publishers.

Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Valverde, G. A., Houang, R. T., & Wiley, D. E. (1997). Many visions, many aims: A cross-national investigation of curricular intentions in school mathematics. Boston: Kluwer Academic Publishers.

Seah, W. T., & Bishop, A. J. (2000, April). Values in mathematics textbooks: A view through two Australasian regions. Paper presented at the Annual Meetings of the American Educational Research Association, New Orleans, LA.

Seng, S. H., & Thirumurthy, V. (1999, April). Mathematics curriculum in India and Singapore. Paper presented at the International Conference of the Association for Childhood Education International, San Antoio, TX. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 429704)

Stevenson, H. W. (1998). A study of three cultures: Germany, Japan, and the United States – An overview of the TIMSS case study project. Phi Delta Kappan, 79(7). 524-529.

Stevenson, H. W., & Bartsch, K. (1992). An analysis of Japanese and American textbooks in mathematics. In R. Lectsma & H. Walberg (Eds.), Japanese educational productivity (pp. 103-133). Ann Arbor: Center for Japanese Studies.

Stigler, J. W., Fuson, K. C., Ham, M., & Kim, M. S. (1986). An analysis of addition and subtraction word problems in American and Soviet elementary mathematics textbooks. Cognition and Instruction, 3(3), 153-171.

Sugiyama, Y. (1987). A comparison of word problems in American and Japanese textbooks. In J. Becker & T. Miwa (Eds.), Proceedings of U.S.-Japan seminar on problem solving (pp. 228-241). Carbondale, IL: Board of Trustees, Southern Illinois University. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 304315)

Tsai, K. (1996). Parallels between elementary mathematics curriculum changes in the United States and in Taiwan: An analysis of word problems in textbooks. Doctoral dissertation, University of Iowa. (UMI: AAT 9640028)

Yap, B. H., Ferrucci, B., Carter, J. (2002). Comparative study of mathematics problems in Singaporean and American textbooks. In S. L. Y. Yam & S. Y. S. Lau (Eds.), ICMI comparative study conference 2002: Pre-conference proceedings (pp. 235-241). Hong Kong: University of Hong Kong.

Zhu, Y. (2003). Representations of problem solving in China, Singapore and US mathematics textbooks: A comparative study. Unpublished doctoral dissertation. National Institute of Education, Nanyang Technological University, Singapore.

ΕΠΙΛΟΓΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

Burns, M. (1987). Why California said no to 14 math textbook series. Learning, 15(5), 50-51.

Butt, D. (1966). The development and application of selected criteria for writing elementary school mathematics textbooks. Doctoral dissertation, Indiana University. (UMI: AAT 6614914)

Kalder, R. S. (2001). A study of the mathematics textbook adoption process in selected New York state school districts. Doctoral dissertation, Columbia University Teachers College. (UMI: AAT 3014780)

ΤΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Alvermann, D. (1987). The role of textbooks on teachers' interaction decision-making. Reading Research and Instruction, 26(2), 115-127.

Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1996). Reform by the book: What is – or might be – the role of curriculum materials in teacher learning and instructional reform? Educational Researcher, 25(9), 6-8, 14.

Ball, D. L., & Feiman-Nemser, S. (1988). Using textbooks and teacher's guides: A dilemma for beginning teachers and teacher educators. Curriculum Inquiry, 18(4), 401-423.

Barr, R. (1988). Conditions influencing content taught in nine fourth-grade mathematics classrooms. The Elementary School Journal, 88(4), 387-410.

Brown, J. K., Jr. (1973). Textbook use by teachers and students for geometry and second-year algebra. Doctoral dissertation, University of Illinois. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 098053)

Bush, W. S. (1986). Pre-service teachers' sources of decisions in teaching secondary mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, 17(1), 21-30.

Chandler, D. G., & Brosnan, P. A. (1994). What is missed when teachers do not finish their mathematics textbooks? Ohio Journal of School Mathematics, 28, 25-32.

Clarke, B., Clarke, D., & Sullivan, P. (1996). The mathematics teacher and curriculum development. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), International handbook of mathematics education (pp. 1207-1234). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Cronbach, L. J. (1955). The text in use. In L. J. Cronbach (Ed.), Text materials in modern education (pp. 188-216). Champaign, IL: University of Illinois Press.

Donlan, D. (1976). Mathematics textbooks and the teaching of assigned writing. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 122306).

Fan, L., & Kaeley, G. S. (2000). The influence of textbooks on teaching strategies: An empirical study. Mid-Western Educational Researcher, 13(4), 2-9.

Floden, R. E., Porter, A. C., Schmidt, W. H., Freeman, D. J., & Schwille, J. R. (1981). Response to curriculum pressures: A policy-capturing study of teacher decision about content. Journal of Educational Psychology, 73, 129-141.

Freeman, D. J., & Porter, A. C. (1988). Do textbooks dictate the content of mathematics instruction in elementary schools? American Educational Research Journal, 26(3), 403-421.

Fujii, T. (2001). The changing winds in Japanese mathematics education. Mathematics Education Dialogue, 2001(November). Retrieved June 19, 2002, from http://www.nctm.org/dialogues/2001-11/20011105.htm

Garet, M. S., & Mills, V. L. (1995). Changes in teaching practices: The effects of the curriculum and evaluation standards. The Mathematics Teacher, 88(5), 380-388.

Glidden, P. L. (1991). Teachers' reasons for instructional decisions. Mathematics Teacher, 84(8), 610-614.

Greenough, F. H. (1969). Selective utilization of mathematics textbooks by elementary school teachers. Doctoral dissertation, University of Idaho. (UMI: AAT 7010682)

Henning, C. A. (1996). Overcoming the limitations of mathematics textbooks in the middle school classrooms. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 401102)

Heyneman, S. P., Jamison, D. T., & Montenegro, X. (1984). Textbooks in the Philippines: Evaluation of the pedagogical impacts of a nationwide investment. Educational Evaluation and Policy Analysis, 6(2), 139-150.

Hinchman, K. (1987). The textbook and three content-area teachers. Reading Research and Instruction, 26(4), 247-263.

Komoski, P. K. (1978). The realities of choosing and using instructional materials. Educational Leadership, 36(1), 46-50.

Kon, J. H. (1994). The thud at the classroom door: Teachers' curriculum decision making in response to a new textbook. Doctoral dissertation, Stanford University. (UMI: AAT 9414599)

Korithoski, T. P. (1988). Textbook usage and other content items taught in secondary mathematics methods courses. Doctoral dissertation, University of Montana. (UMI: AAT 8907414)

Krammer, H. P. M. (1985). The textbook as classroom context variable. Teaching & Teacher Education, 1(4), 273-278.

Kuhs, T. M., & Freeman, D. J. (1979, April). The potential influence of textbooks on teachers' selection of content for elementary school mathematics. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco.

Lam, C. C., Ma, Y. P., & Wong, N. Y. (1999, April). Teacher development, not accountability control, is the key to successful curriculum implementation: A case study of two primary schools in Northeast

China. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Montreal, Canada.

Lambert, M. A. (1996). Mathematics textbooks, materials, and manipulatives. LD Forum, 21(2), 33, 41-45.

Ma, Y. (1999). A case study of the implemented mathematics curriculum in urban and rural primary schools in China. Doctoral dissertation, Chinese University of Hong Kong. (UMI: AAT 9945656)

McCutcheon, G. (1982, March). Textbook use in a central Ohio elementary school. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New York. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 216968)

Moulton, J. (1997). How do teachers use textbooks? A review of the research literature. Technical Paper No. 74, Health and Human Resources Analysis for Africa Project. Retrieved January 3, 2002, from http://www.dec.org/pdf_docs/PNACB240.pdf

Penny, G. W., III. (1991). Secondary mathematics instructional materials: Usage, effectiveness, and need. Doctoral dissertation, George Washington University. (UMI: AAT 9223620)

Pepin, B., Haggarty, L., & Keynes, M. (2000). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: A way to understand teaching and learning culture. Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik, 33(5), 158-175.

Peterson, J. M. (1995). New texts, old teachers. American School Board Journal, 182(1), 39-40.

Rackley, L. J. E. (1994). Differences between teachers who use a mathematics textbook more than fifty percent of the time and teachers who use a mathematics textbook less than fifty percent of the time. Master dissertation, San Jose State University. (UMI: AAT 1359047)

Remillard, J. T. (1996). Changing texts, teachers, and teaching: The role of curriculum materials in mathematics education reform. Doctoral dissertation, Michigan State University. (UMI: AAT 9734181)

Riley, J. E. (1999). Elementary school mathematics: Factors affecting strategies and materials for instruction. Doctoral dissertation, Hofstra University. (UMI: AAT 9933934)

Schmidt, W. H., Porter, A. C., Folden, R. E., Freeman, D. J., & Schwille, J. R. (1987). Four patterns of teacher content decision-making. Journal of Curriculum Studies, 19(5), 439-455.

Schram, P., Feiman-Nemser, S., & Ball, D. (1990). Thinking about teaching subtraction with regrouping: A comparison of beginning and experienced teachers' responses to textbooks. (Research Report 89-5). East Lansing, MI.

Sepulveda Stuardo, M. A., & Farrell, J. P. (1983). The use of textbooks by teachers and students in learning and teaching. In E. Schiefelbein, J. P., Farrell, & M. A. Sepulveda-Stuardo (Eds.), The influence of school resources in Chile: Their effect on educational achievement and occupational attainment (pp. 72-109). Washington, DC: International Bank Reconstruction and Development Staff Working Paper No. 530.

Shield, M. (1989). Mathematics teachers' preferences in textbook characteristics. Mathematics Education Research Journal, 1(1), 11-15.

Sosniak, L. A. (1993). Teachers and textbooks: Materials use in four fourth-grade classrooms. The Elementary School Journal, 93(3), 249-275.

Sosniak, L. A., & Stodolsky, S. S. (1993). Teachers and textbooks: Materials use in four fourth-grade classrooms. The Elementary School Journal, 93(3), 249-275.

Stodolsky, S. S. (1989). Is teaching really by the book? In P. W. Jackson & S. Haroutunian-Gordon (Eds.), From Socrates to software: The teacher as text and the text as teacher: Eighty-eighth yearbook of the National Society for the Study of Education (Part I, pp. 159-184). Chicago, IL: National Society for the Study of Education.

Sturino, G. (2003). Mathematics textbook use by secondary school teachers: A case study. Doctoral dissertation, University of Iowa. (UMI: AAT 9996102)

University of Cape Coast Centre for Research on Improving Quality of Primary Education in Ghana (1993). Research reports on availability & utilization of materials in the central region of Ghana: Phase I study. Arlington, VA: Institute for International Research.

Woodward, A., & Elliott, D. L. (1990). Textbook use and teacher professionalism. In D. L. Elliott & A. Woodward (Eds.), Textbooks and schools in the United States: Eighty-ninth yearbook of the National Society for the Study of Education (Part I, pp. 174-193). Chicago, IL: National Society for the Study of Education.

Zahorik, J. A. (1991). Teaching style and textbooks. Teaching and Teacher Education, 6(1), 69-80.

Zhu, Y., & Fan, L. (2002). Textbook use by mathematics teachers at lower secondary school level in Singapore. In D. Edge & B. H. Yeap (Eds.), Proceedings of EARCOME-2 & SEACME-9 Conference (Vol. 2., pp. 194-201). Singapore.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

Alford, L. E. (1986). Alignment of textbook and test content. Arithmetic Teacher, 34(3), 25.

Buckendahl, C. W., Plake, B. S., Impara, J. C., & Irwin, P. M. (2000, April). Alignment of standardized achievement tests to state content standards: A comparison of publishers' and teachers' perspectives. Paper presented at the Annual Meeting of the National Council on Measurement in Education, New Orleans, LA. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 442829)

Chandler, D. G. (1992). A content analysis of mathematics textbooks for grades one through eight to determine the match to the Ohio ninth grade proficiency test. Doctoral dissertation, The Ohio State University. (UMI: AAT 9307733)

Chandler, D. G., & Brosnan, P. A. (1995). A comparison between mathematics textbook content and a statewide mathematics proficiency test. School Science and Mathematics, 95(3), 118-123.

Epstein, S. L. (1976). Testing and curriculum: Distant cousins? The Elementary School Journal, 76(7), 424-431.

Flanders, J. R. (1992). Textbooks and the SIMS test: Comparisons of intended and implemented eighth-grade mathematics. Doctoral dissertation, University of Chicago. (UMI: AAT T-31829)

Flanders, J. R. (1994). Student opportunities in Grade 8 mathematics: Textbook coverage of the SIMS test. In I. Westbury, C. A. Ethington, L. A. Sosniak, & D. P. Baker (Eds.), In search of more effective mathematics education: Examining data fro the IEA Second International Mathematics Study (pp. 61-93). Norword, NJ: Ablex.

Freeman, D. J., Kuhs, T. M., Porter, A. C., Knappen, L. B., Floden, R. E., Schmidt, W. H., & Schwille, J. R. (1980). The fourth-grade mathematics curriculum as inferred from textbooks and tests (Research Series No. 82). East Lansing, MI: Michigan State University, Institute for Research on Teaching. (ERIC Document Reproduction Service No. ED199047)

Freeman, D. J., Kuhs, T. M., Porter, A. C., Floden, R. E., Schmidt, W. H., & Schwille, J. R. (1983). Do textbooks and tests define a national curriculum in elementary school mathematics? The Elementary School Journal, 83(5), 501-513.

Hechler, E. (1995). The relationship of sixth-grade mathematics textbooks and the 1993 seventh-grade Michigan Educational Assessment Program Test. Doctoral dissertation, Wayne State University. (UMI: AAT 9530549)

Hughes, L. L. M. (1996). Describing the alignment between instructional materials and assessment: A content comparison between elementary mathematics textbooks and proficiency assessment instruments. Doctoral dissertation, East Texas State University. (UMI: AAT 9638436)

Jitendra, A. K., Parker, R., & Kameenui, E. J. (1997). Aligning the basal curriculum and assessment in elementary mathematics: The exploratory development of curriculum-valid tests. Diagnostique, 22(2), 101-127.

Kendall, J. S. (1999). A report on the matches between the South Dakota Standards in mathematics and selected Stanford Achievement Tests. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 447170).

Lawson, A., Bordignon, C., & Nagy, P. (2002). Matching the Grade 8 TIMSS item pool to the Ontario curriculum. Studies in Educational Evaluation, 28(1), 87-102.

McGehee, J. J., & Griffith, L. K. (2001). Large-scale assessments combined with curriculum alignment: Agents of change. Theory into Practice, 40(2), 137-144.

Rogers, B. D. (1981). North Carolina's minimum competency testing program and mathematics textbooks. Doctoral dissertation, Duke University. (UMI: AAT 8121282)

Romberg, T. A., & Wilson, L. D. (1992). Alignment of tests with the standards. Arithmetic Teacher, 40(1), 18-22.

Schoenfeld, A. H. (2002). Making mathematics work for all children: Issues of standards, testing, and equality. Educational Researcher, 31(1), 13-25.

Webb, N. L. (1997). Criteria for alignment of expectations and assessments in mathematics and science education (Research Monograph No. 6). Madison, WI: University of Wisconsin, National Institute for Science Education. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 414305)

ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΤΙΚΗ ΕΠΙΔΟΣΗ

Alexander, L., & Simmon, J. (1975). The determinants of school achievement in developing countries: The educational production function. Washington, DC: International Bank for Reconstruction and Development Staff Working Paper No 201.

Begle, E. G. (1973). Some lessons learned by SMSG. Mathematics Teacher, 66(3), 207-214.

Blohm, P. J., & Wiebe, J. H. (1980, December). Effects of representation and organizational features of text on success in mathematical problem solving. Paper presented at the Annual Meeting of the American Reading Conference, Sarasota, FL. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 195930)

DeLuca, V. W. (1991). The effect of text structure on comprehension of technological concepts. Journal of Industrial Teacher Education, 28(4), 64-71.

Flanders, J. R. (1994). Textbooks, teachers, and the SIMS test. Journal for the Research in Mathematics Education, 25(3), 260-278.

Freeman, D. J., Belli, G. M., Port, A. C., Floden, R. E., Schmidt, W. H., & Schwille, J. R. (1983). The influence of different styles of textbook use on instructional validity of standardized tests. Journal of Educational Measurement, 20(1), 259-272.

Fuller, B. (1987). What school factors raise achievement in the third world? Review of Educational Research, 57(3), 255-272.

Gamoran, A. (1997). Curriculum change as a reform strategy: Lessons from the United States and Scotland. Teachers College Record, 98(4), 608-628.

Heyneman, S. P., & Jamison, D. T. (1980). Student learning in Uganda: Textbook availability and other factors. Comparative Education Review, 24(2), 206-220.

Heyneman, S. P., Farrell, J. P., & Sepulveda-Suardo, M. A. (1978). Textbooks and achievement: What we know. Washington, DC: The World Bank.

Hirschhorn, D. B. (1993). A longitudinal study of students completing four years of UCSMP mathematics. Journal for the Research in Mathematics Education, 24(2), 136-158.

Hunkins, F. P., & Gehrke, N. J. (1985, March-April). Curriculum alignment measures of effective schools: Findings and implications. Paper presented at the Annual Meeting of the American Education Research Association, Chicago, IL. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 262484)

Jamison, D. T., Searle, B., Galda, K., & Heyneman, S. P. (1981). Improving elementary mathematics education in Nicaragua: An experimental study of the impact of textbooks and radio on achievement. Journal of Educational Psychology, 73(4), 556-567.

Li, Y., & Lim, B. S. H. (1999, April). How may textbooks contribute to students' achievement in learning school algebra? A cross-national comparison. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Montreal, Canada.

Lockheed, M. E., Fuller, B., & Bail, S. C. (1986). How textbooks affect achievement in developing countries: Evidence from Thailand. Educational Evaluation and Policy Analysis, 8(4), 379-392.

Mitchell, F. M. (1999, April). All students can learn: Effects of curriculum alignment on the mathematics achievement of third-grade students. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Montreal, Canada. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 440838)

Nibbelink, W. H., Stockdale, S. R., Hoover, H. D., & Mangru, M. (1987). Problem solving in the elementary grades: Textbook practices and achievement trends over the past thirty years. Arithmetic Teacher, 35(1), 34-37.

Park, K. (1999). The impact of the textbook on girls' perception of mathematics. Mathematics in School, 28(4), 2-4.

Schiefelbein, E., & Farrell, J. P. (1983). Factors that affect changes in academic achievement. In E. Schiefelbein, J. P. Farrell, & M. A. Sepulveda-Stuardo (Eds.), The influence of school resources in Chile: Their effect on educational achievement and occupational attainment (pp. 55-71). Washington, DC: World Bank Staff Working Paper No. 530.

Schiefelbein, E., & Simmons, J. (1981). The determinants of school achievement: A review of the research for developing countries. Ottawa: International Development Research Center.

Stigler, J. W., Lee, S., Lucker, W., & Stevenson, H. W. (1982). Curriculum and achievement in mathematics: A study of elementary school children in Japan, Taiwan, and the United States. Journal of Educational Psychology, 74(3), 315-322.

Clark, F. M. B. (1997). The effects of two second-year algebra textbooks on changes in secondary students' attitudes as measured by the Mathematics Attitude Inventory. Doctoral dissertation, University of Mississippi. (UMI: AAT 9815858)

Garnier, H. E. (1988). Curricula comparisons: Examination of eighth grade mathematics instruction data from the second international mathematics study in the United States. Doctoral dissertation, University of California. (UMI: AAT 8822176)

Henderson, B. K. (1996). An evaluation of the use of UCSMP materials in a mathematics program. Doctoral dissertation, Kansas State University. (UMI: AAT 9714356)

Mayers, K. S. (1995). The effects of using the Saxon Algebra I textbook on the achievement of ninth-grade algebra I students from 1989-1993. Doctoral dissertation, Delta State University. (UMI: AAT 9528416)

Mclaughlin, J. P. (1969). Mathematics achievement in relation to textbook communication style and ability group membership: A comparison of two seventh grade mathematics textbooks. Doctoral dissertation, University of Texas. (UMI: AAT 6921859)

Morris, K. M. (2002). The effects of mathematics curriculum materials and instruction on the achievement and conceptual understanding of sixth-grade students: Comparing traditional and standards-based programs. Doctoral dissertation, George Mason University. (UMI: AAT 3045278)

Smith, B. S. (1985). The sixth grade mathematics curriculum: Appropriateness of instructional materials for improving standards test scores of low-achieving students. Doctoral dissertation, University of South Carolina. (UMI: AAT 8528214)

Thomas, K. R. (2001). Standards-based mathematics curriculum versus traditional mathematics curriculum: A comparison of middle school student achievement for students using textbooks evaluated by Project 2061. Doctoral dissertation, University of Kansas. (UMI: AAT 3018540)

ΔΙΑΦΟΡΑ ΖΗΤΗΜΑΤΑ

Altbach, P. G. (1983). Key issues of textbook provision in the Third World. Prospects: Quarterly Review of Education, 13(3), 315-325.

Altbach, P. G., & Kelly, G. P. (1988). Textbooks in the Third World: Policy, content and context. New York: Garland Publishing.

Ballér, E. (1989). Textbooks and curriculum. In T. Husén & T. N. Postlethwaite (Eds.), The international encyclopedia of education (Suppl. Vol. I, pp. 755-756). Oxford, England: Pergamon Press plc.

Ben-Peretz, M. (1990). The teacher-curriculum encounter: Freeing teachers from the Tyranny of texts. Albany: SUNY Press.

Chall, J. S., & Conard, S. S. (1991). Should textbooks challenge students? The case for easier or harder textbooks. New York: Teachers Colleges, Columbia University.

Dilts, R. G. (1970). Development and application of a cognitive verb list to facilitate analysis of mathematics textbooks. Doctoral dissertation, University of Pittsburgh. (UMI: AAT 7107992)

Farrell, J. P., & Heyneman, S. P. (1989). Textbooks in the developing world. Washington, DC: World Bank.

Fauvel, J. (1991). Tone and the teacher: Instruction and complicity in mathematics textbooks. In D. Pimm & E. Love (Eds.), Teaching and learning school mathematics (pp. 111-121). London: Hoder & Stoughton.

Goffree, F. (1985). The teacher and curriculum development. For the Learning of Mathematics, 5(2), 26-27.

Jackson, P. W. (Ed.) (1992). Handbook of research on curriculum. New York: Macmillan.

Love, E., & Pimm, D. (1996). 'This is so': A text on texts. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), International handbook of mathematics education (pp. 371-410). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Otte, M. (1986). What is Text? In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), Perspectives on mathematics education (pp. 173-202). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Portal, A. (1989). A curriculum out of balance: The base of elementary school mathematics. Educational Researcher, 18(5), 9-15.

Porter, A. C. (1981). Elementary mathematics textbooks. In J. Y. Cole & T. G. Sticht (Eds.), The textbook in American society. Washington, DC: Library of Congress.

Schwille, J., Porter, A., Belli, G., Floden, R., Freeman, D., Knappen, L., Kuhs, T., & Schmidt, W. (1983). Teachers as policy brokers in the content of elementary school mathematics. In L. S. Shulman & G. Skyes (Eds.), Handbook of teaching and policy (pp. 370-391). New York: Longman.

Tanner, D. (1988). The textbook controversies. In L. N. Tanner (Ed.), Critical issues in curriculum: Eighty-seventh yearbook of the National Society for the Study of Education (Part I, pp. 122-147). Chicago: University of Chicago Press.

Turnau, S. (1980). The mathematics textbooks for young students. Educational Studies in Mathematics, 11(4), 393-410.

Usiskin, Z. (1999). Which curriculum is best? University of Chicago School Mathematics Project Newsletter, 24, 3-8.

Wang, W. (1990). Didactic transposition of mathematics knowledge in textbooks. Unpublished doctoral dissertation, University of Georgia.

Wang, W., & Kilpatrick, J. (1992). Didactic transposition in mathematics textbooks. For Learning of Mathematics, 12(1), 2-7.

Woodward, A. (1994). Textbooks. In T. Husén & T. N. Postlethwaite (Eds.), The international encyclopedia of education (2nd ed., pp. 6366-6371). Oxford, England: Elsevier Science Ltd.

Wright, I. (1996, July). Critically thinking about the textbooks. Paper presented at the International Conference on Critical Thinking, Sonoma, CA. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 399880)