

ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΧΑΣΑΠΗΣ
Επιμέλεια



**5^ο Διήμερο Διαλόγου
Για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών
18 & 19 Μαρτίου 2006**

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Α.Π.Θ.
Κέντρο Διάδοσης Επιστημών & Μουσείο Τεχνολογίας
Σωματείο «Φίλοι Του Τεχνικού Μουσείου Θεσσαλονίκης»

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΧΑΣΑΠΗΣ (Επιμέλεια)

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 2006 1^η ΕΚΔΟΣΗ ΕΝΤΥΠΗ

ΑΘΗΝΑ 2020

2^η ΕΚΔΟΣΗ CD

© Δημήτρης Χασάπης για την παρούσα συλλογή
Οι συγγραφείς για τα κείμενα τους

Η εικόνα του εξωφύλλου: Γραμματόσημο των Ελληνικών Ταχυδρομείων. Αναμνηστική έκδοση με την ευκαιρία διεξαγωγής στην Αθήνα του Διεθνούς Συνεδρίου των Πυθαγορείων (1955)

Στο ΔΙΗΜΕΡΟ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ παρουσιάζονται μόνον πρωτότυπες εργασίες, οι οποίες εντάσσονται στο σχετικό θέμα του συνεδρίου, δεν έχουν παρουσιαστεί σε άλλο συνέδριο, δεν έχουν δημοσιευτεί σε άλλο περιοδικό ή βιβλίο και ανταποκρίνονται στις διεθνώς καθιερωμένες απαιτήσεις της επιστημονικότητας. Η Επιστημονική Επιτροπή διατηρεί το δικαίωμα επιλογής των υποβαλλόμενων εισηγήσεων με βάση εκτεταμένες περιλήψεις τους και φροντίζει για την αξιολόγηση των πλήρων κειμένων τους πριν την συμπερίληψη τους στα Πρακτικά του Δημέρου. Για την αξιολόγηση τους, τα κείμενα των εισηγήσεων αποστέλλονται, ανώνυμα, σε δύο (2) κριτές από κατάλογο ειδικών για το εκάστοτε θέμα του Δημέρου επιστημόνων, στον οποίο συμπεριλαμβάνονται και τα μέλη της Επιστημονικής Επιτροπής. Η αναδημοσίευση εισηγήσεων, οι οποίες έχουν δημοσιευτεί στα Πρακτικά του Δημέρου απαιτεί άδεια του Επιμελητή της έκδοσης.

Εισαγωγικό σημείωμα

Τα τελευταία χρόνια έχει τεθεί με ιδιαίτερη έμφαση στο προσκήνιο του προβληματισμού των ερευνητών, αλλά και των εκπαιδευτικών, ο ρόλος της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης. Μεταξύ των επιχειρημάτων τα οποία με έμφαση προβάλλονται για να υποστηρίξουν την εισαγωγή στοιχείων ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών περιλαμβάνονται η πληρέστερη κατανόηση των εννοιών, των θεωριών και των μεθόδων των μαθηματικών, η υποκίνηση του ενδιαφέροντος των μαθητών, η ανάπτυξη θετικών στάσεων απέναντι στη μελέτη των μαθηματικών και η προσέγγιση των μαθηματικών ως μιας δημιουργικής δραστηριότητας συνυφασμένης με τις ανθρώπινες ανάγκες. Στο πρόσφατο 10^ο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικής Εκπαίδευσης (2004, Κοπεγχάγη) και ο ρόλος της ιστορίας των μαθηματικών και το ζήτημα της ιστορίας της μαθηματικής εκπαίδευσης αποτέλεσαν θέματα συζήτησης.

Παράλληλα, η ιστορία της μαθηματικής εκπαίδευσης αποτελεί ένα διεπιστημονικό αντικείμενο, το οποίο εντάσσεται στην ιστορία των μαθηματικών και ταυτόχρονα στην ιστορία της εκπαίδευσης με σαφείς πάντοτε κοινωνιολογικές αναφορές. Η ιστορία των αναλυτικών προγραμμάτων, των σχολικών βιβλίων και των διδακτικών μεθόδων των μαθηματικών, η θέση και ο ρόλος των μαθηματικών στο σχολείο και στην κοινωνία, η ιστορία της εκπαίδευσης και της επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών που διδάσκουν μαθηματικά, ο ρόλος των διαφόρων κοινωνικών και πολιτισμικών παραγόντων στην οργάνωση και στο περιεχόμενο της διδασκαλίας των μαθηματικών είναι μερικά μόνο από τα ζητήματα τα οποία αποτελούν αντικείμενο διερεύνησης της ιστορίας της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Η ανάδειξη και συζήτηση των ζητημάτων αυτών αποτέλεσε πρωταρχικό στόχο του 5^ο Δημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών με θέμα «Ιστορία των Μαθηματικών & Μαθηματική Εκπαίδευση» που οργανώθηκε στις 18 & 19 Μαρτίου 2006 στο Κέντρο Διάδοσης Επιστημών & Μουσείο Τεχνολογίας Θεσσαλονίκης με τη σύμπραξη του Κέντρου Διάδοσης Επιστημών, του Σωματείου ‘Φίλοι του Τεχνικού Μουσείου Θεσσαλονίκης’ και του Τομέα Θετικών Επιστημών & Νέων Τεχνολογιών του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.

Στην παρούσα έκδοση περιλαμβάνονται τα κείμενα των εισηγήσεων, οι οποίες παρουσιάστηκαν στο Διήμερο αυτό.

Για την Οργανωτική Επιτροπή

Δημήτρης Χασάπης

Επίκουρος Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε. του Α.Π.Θ.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ Ι

Προβληματισμοί για την ιστορία και τη σχέση της με τη διδασκαλία των μαθηματικών

Δημήτρης Χασάπης

Ιστορία των μαθηματικών – Ιστορίες των μαθηματικών:
Επιλεκτικά σχόλια για τα αναγκαία (μεταξύ άλλων) στοιχεία μιας
συζήτησης 3

Ευγενία Κολέζα

Εναλλακτικές προσεγγίσεις της Ιστορίας των Μαθηματικών
στη διδασκαλία των Μαθηματικών 27

Κώστας Χατζηκυριάκου

Η ιστορία της ιστορίας των μαθηματικών: δύο τρία πράγματα
που ξέρω γι' αυτήν 47

Μαρία Γιαμαλίδου

Μαθηματικά και Φυσική - Ιστορία και Διδακτική: double
date ή ménage à quatre 63

ΕΝΟΤΗΤΑ II

Θέματα ιστορίας των μαθηματικών και της μαθηματικής εκπαίδευσης

Αναστάσιος Τοκμακίδης

Η Θεωρία Λογικών Τύπων: Ένα αποτέλεσμα
της συμπληρωματικότητας της κοινωνίας με τα μαθηματικά 89

Βιργινία Στεργίου & Τάσος Πατρώνης

John Wallis και Isaac Barrow - Δυο διαφορετικές απόψεις
για την εφαρμογή απειροστικών μεθόδων στα μαθηματικά
του 17^{ου} αιώνα 109

Μαρία Νικολακάκη

Ο ρόλος του Έλληνα δασκάλου στη διδασκαλία των
μαθηματικών: Ιστορικο-συγκριτική διερεύνηση 129

Γιάννα Κατσιαμπούρα

Τα μαθηματικά στη Βυζαντινή εκπαίδευση: Μηχανισμοί
και επικαθορισμοί 149

Κώστας Νικολαντωνάκης

Ιστορικές εκδοχές του Πυθαγορείου Θεωρήματος 175

Γιάννης Μιχάλης

Όψεις της ιστορίας των γραφικών απεικονίσεων στατιστικών
Δεδομένων 195

**ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ – ΙΣΤΟΡΙΕΣ ΤΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ:
ΕΠΙΛΕΚΤΙΚΑ ΣΧΟΛΙΑ ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΑΓΚΑΙΑ
(ΜΕΤΑΞΥ ΑΛΛΩΝ) ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΙΑΣ ΣΥΖΗΤΗΣΗΣ**

Δημήτρης Χασάπης

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Μια εισαγωγική σημείωση για την ιστορία

«Η πολιτική ιστορία είναι ψυχολογική και αγνοεί τις εξαρτήσεις' είναι εκλεκτικιστική, δηλαδή βιογραφική, και αγνοεί το σύνολο της κοινωνίας και τις μάζες που την απαρτίζουν' είναι ποιοτική και αγνοεί το σειραϊκό' έχει σαν στόχο της το καθέκαστο και αγνοεί τη σύγκριση' είναι αφηγηματική και αγνοεί την ανάλυση' είναι ιδεαλιστική και αγνοεί το υλικό' είναι ιδεολογική και δεν έχει συνείδηση του πράγματος' είναι μερική και ούτε αυτό το ξέρει' μένει προσκολλημένη στο συνειδητό και αγνοεί το ασυνείδητο' ασχολείται με το γεγονός της στιγμής και αγνοεί τη μακρά διάρκεια' με μία λέξη που στο ιδίωμα των ιστορικών τα λειο όλα, είναι συμβαντολογική» γράφει σε μια κριτική του για την πολιτική ιστορία ο Ζακ Ζουλιάρ (Julliar, 1975, σελ. 257).

Από μια παρόμοια θεώρηση της κυρίαρχης ιστοριογραφίας των μαθηματικών στη χώρα μας, και όχι μόνο¹, και με δεδομένο έναν

¹Μια πρόσφατη επισκόπηση της κυρίαρχης ιστοριογραφίας των μαθηματικών σε διεθνές επίπεδο αποτελεί το Dauben & Scriba (2002).

ορισμό της ιστορίας ως σπουδής του ανθρώπινου παρελθόντος διατυπώνονται στην παρούσα εισήγηση επιλεκτικά, και αναπόφευκτα αποσπασματικά, σχόλια για τους αναγκαίους, κατά την εκτίμηση μου, όρους μιας συζήτησης για την ιστορία των μαθηματικών, η οποία μπορεί να προσανατολίσει γόνιμα έναν προβληματισμό για τη σχέση της ιστορίας με τη μαθηματική εκπαίδευση.

Η ιστορία, ως σπουδή του ανθρώπινου παρελθόντος, εμπεριέχει δύο συστατικές και αλληλοκαθοριζόμενες όψεις, που ενδιαφέρουν την παρούσα συζήτηση και επισημαίνονται εντελώς συνοπτικά. Η πρώτη αφορά στη διάκριση της ιστορικής μελέτης από την ιστορική αφήγηση ή την ιστορία ως μέθοδο έρευνας και την ιστοριογραφία, ως ανάπτυξη του παρελθόντος με βάση τα ευρήματα και τις διαπιστώσεις της ιστορικής έρευνας και η δεύτερη, συνάρτηση της πρώτης, αφορά στις σχέσεις του παρόντος και του παρελθόντος, όπως συγκροτούνται μέσα από, και δια, της ιστορικής μελέτης και της ιστοριογραφίας.

Η ιστοριογραφία ανασυνθέτοντας ένα παρελθόν υποκείμενο σε απαιτήσεις του δικού της παρόντος, συνδυάζει ταυτόχρονα ορθολογικές αναλύσεις και στο όνομα τους δεοντολογικά ή αξιολογικά προτάγματα του παρόντος. Συνθέτει, έτσι, όχι το παρελθόν γενικά, αλλά το παρελθόν που είναι σε θέση, αλλά και ενδιαφέρεται, να ανασυστήσει η κοινωνία του παρόντος κάθε ιστοριογραφικής παραγωγής. Γι' αυτό και η ιστορία, κάθε ιστορία, γράφεται και ξαναγράφεται διαρκώς.

Με την σημείωση αυτή υπόψη, τα σχόλια που ακολουθούν, διατυπωμένα εντελώς σχηματικά και σε μεγάλο βαθμό απλοποιητικά, δεν διεκδικούν πρωτοτυπία. Συνοψίζουν για τις ανάγκες μιας συζήτησης για την ιστορία των μαθηματικών και για τις συσχετίσεις της με τη μαθηματική εκπαίδευση παραδοχές αποδεκτές από τις σύγχρονες κοινότητες των ιστορικών και επιστημολογικές θέσεις μιας ορισμένης θεώρησης της μαθηματικής γνώσης και πρακτικής αποδεκτές από μια

συγκεκριμένη σύγχρονη κοινότητα μαθηματικών και εκπαιδευτικών.

Σχόλιο Πρώτο: Για την αντικειμενικότητα της ανάγνωσης των ιστορικών τεκμηρίων και της ιστορικής αφήγησης

Η αντικειμενικότητα της ανάγνωσης των ιστορικών τεκμηρίων, όπως και η αντικειμενικότητα της αφήγησης κάθε ιστορίας των μαθηματικών η οποία προκύπτει από την ανάγνωση αυτή είναι σχετική, υποκείμενη στους καθορισμούς και δομημένη από το εννοιολογικό πλαίσιο που υιοθετεί ή και κατασκευάζει ο ιστορικός. Τα ιστορικά τεκμήρια επιλέγονται, οργανώνονται, αξιολογούνται και ερμηνεύονται από τον ιστορικό με τη διαμεσολάβηση ενός εννοιολογικού πλαισίου, το οποίο, επίσης, αποτελεί μια ιστορική κατασκευή υποκείμενη σε συγκεκριμένους καθορισμούς. Είναι κοινός τόπος της επιστήμης της ιστορίας, ότι νοήματα στα ίχνη του ανθρώπινου παρελθόντος μπορεί να αποδοθούν μόνον και εφόσον έχουν συσταθεί οι όροι πρόσληψης νοημάτων, δια των οποίων διακρίνονται τα ιστορικά δεδομένα από τα «ακατανόητα» στοιχεία του παρελθόντος και άρα μη ιστορικά τεκμήρια.

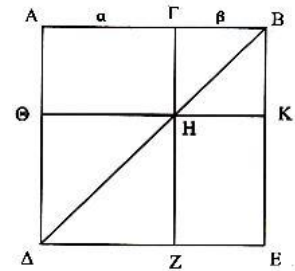
Η μοναδική έννοια «αντικειμενικότητας» των τεκμηρίων του ανθρώπινου παρελθόντος αφορά και μόνο το γεγονός ότι αποτελούν για τον ιστορικό «αντικείμενα» έρευνας, τα οποία παρέχουν στοιχεία για το ανθρώπινο παρελθόν και συνακόλουθα αντικείμενα της επιχειρούμενης στο πλαίσιο της ιστορικής έρευνας ανάγνωσης, κατανόησης και ερμηνείας τους. Δεν μπορεί, όμως, όπως συμβαίνει συχνά στην ιστοριογραφία των μαθηματικών, αυτή ή έννοια της «αντικειμενικότητας» των ιστορικών τεκμηρίων, δηλαδή το γεγονός της αντικειμενικής τους ύπαρξης και της επιλογής τους ως αντικειμένων της ιστορικής έρευνας, να προβάλλεται και να χρησιμοποιείται για να επενδυθούν με αντικειμενικότητα και οι ερμηνείες που αναπτύσσονται και τεκμηριώνονται από μια συγκεκριμένη προσέγγιση τους.

Χαρακτηριστική περίπτωση αποτελεί η «ανάγνωση» του Δευτέρου Βιβλίου των Στοιχείων του Ευκλείδη από την οπτική της Άλγεβρας ή της Τριγωνομετρίας, μαθηματικά δημιουργήματα επόμενων ιστορικά εποχών. Το βιβλίο αυτό περιέχει εφαρμογές του Πυθαγορείου θεωρήματος στην κατασκευή ενός τετραγώνου από τετράγωνα και ορθογώνια σχήματα συνδυασμένα με διάφορους τρόπους.

Νεότεροι, όμως, ιστορικοί των μαθηματικών «βλέπουν» στις προτάσεις αυτές αλγεβρικές ταυτότητες ή τριγωνομετρικά θεωρήματα μέσα από μια ανάγνωση η οποία αφενός τις αποπλαισιώνει από την Ευκλείδεια λογική και τις αντιμετωπίζει με μια σύγχρονη οπτική της μαθηματικής γνώσης, αφετέρου διακρίνει το περιεχόμενο από τη μορφή διατύπωσης της μαθηματικής γνώσης, θεωρώντας τη μορφή διατύπωσης περιστασιακή και χωρίς συνάφεια με το περιεχόμενο της μαθηματικής γνώσης. «*Το βιβλίοιούτο περιέχει και εφαρμογήν της γεωμετρίας εις την Άλγεβραν και αποδίδεται κατά το μέγιστον μέρος εις τους Πυθαγορείους. Τα πρώτα δέκα θεωρήματα αφορούν εις αλγεβρικές ταυτότητας*» (Σταμάτης, 1952, σελ. 14) ή «*Οι πρώτες 10 προτάσεις (του βιβλίου II) αποτελούν αυτό που σήμερα λέμε 'Γεωμετρική Άλγεβρα' των αρχαίων Ελλήνων, δηλαδή αλγεβρικές σχέσεις που αποδεικνύονται γεωμετρικά*» (Ευκλείδη Στοιχεία, 2001, σελ. 206) ή για τις προτάσεις 12 και 13 «*είναι τα θεωρήματα που δίνουν το τετράγωνο της πλευράς τριγώνου η οποία βρίσκεται απέναντι από αμβλεία ή οξεία γωνία και αποτελούν καθαρά 'γεωμετρικές μορφές' του γενικότερου θεωρήματος του συνημίτονου*» (ο.π. σελ. 205). Ενδεικτικό παράδειγμα, η Ευκλείδεια πρόταση (II.4) «*Αν ευθύγραμμο τμήμα διαιρεθεί από σημείο σε δύο τμήματα, το τετράγωνο του όλου τμήματος είναι ίσο με τα τετράγωνα των δύο τμημάτων και το διπλάσιο ορθογώνιο που ορίζουν τα δύο τμήματα*» (Ευκλείδη Στοιχεία, 2001, σελ. 219), δηλαδή ότι αν ένα ευθύγραμμο τμήμα AB διαιρεθεί από σημείο Γ σε δύο τμήματα ΑΓ και ΓΒ τότε το τετράγωνο με πλευρά το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι ίσο με το άθροισμα δύο τετραγώνων με πλευρά τα

ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΓΒ αντίστοιχα και ενός ορθογωνίου με πλευρές τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΓΒ.

Σχηματικά



«Διαβασμένο» αλγεβρικά αυτό διατυπώνεται ως «η γνωστή αλγεβρική ταυτότητα: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ » («Ευκλείδη Στοιχεία, 2001, σελ. 220).

Όπως όμως εύστοχα σχολιάζεται από τον Γκράτταν-Γκίννες (Grattan-Guinness, 1996), ο Ευκλείδης στα *Στοιχεία* αναφέρεται σε ευθείες, γωνίες, επιφάνειες, στερεά και σχέσεις, όχι στα ποσοτικοποιημένα αντίστοιχα τους μήκη, εμβαδά, όγκους, αθροίσματα, γινόμενα κλπ. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα αναφέρεται το «τετράγωνο με πλευρά το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ» και όχι το «τετράγωνο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ». Αντίστοιχα, ο όρος άλγεβρα αναφέρεται σε μαθηματικές έννοιες και τεχνικές οι οποίες αφορούν στον τυπικό χειρισμό αφηρημένων συμβόλων για την ή και στην επίλυση εξισώσεων, το οποίο ως ιδιαίτερο πεδίο μαθηματικής δραστηριότητας εισάγεται από τους Άραβες μαθηματικούς κατά τον 8^ο αιώνα και αναπτύσσεται στην Ευρώπη μεταγενέστερα. Παρεμπιπτόντως, η διατύπωση της αλγεβρικής ταυτότητας στη μορφή $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ συναντάται αρχικά σε κείμενα του Χάριριτ (Harriot) και του Καρτέσιου (Descartes) στις αρχές του 17^{ου} αιώνα (Grattan-Guinness, 2004).

Αντίστοιχα, η Ευκλείδεια πρόταση (II.13) «Σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της πλευράς που βρίσκεται απέναντι από την οξεία γωνία είναι μικρότερο από το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία κατά το διπλάσιο του γινομένου της μιας από αυτές επί την προβολή της άλλης επ' αυτή» («Ευκλείδη Στοιχεία, 2001, σελ. 246) μπορεί να «διαβαστεί» τριγωνομετρικά ως $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Μια τέτοιου τύπου ιστορική ανάγνωση του παρελθόντος των μαθηματικών υπερασπίστηκαν πριν τριάντα χρόνια σε μια σχετική συζήτηση μαθηματικοί, όπως ο Φρόντενταλ (Freudenthal, 1976) ο Βαν ντερ Βάρντεν (van der Waerden, 1975) και ο Βέλ (Weil, 1978), ενώ την αρνήθηκαν επισημαίνοντας την αβασιμότητα της κυρίως ιστορικοί των επιστημών, υπογραμμίζοντας την ανάγκη ανάγνωσης και κατανόησης των μαθηματικών ιδεών του παρελθόντος μέσα στο ιστορικό πλαίσιο στο οποίο διατυπώθηκαν, αναπτύχθηκαν και διαδόθηκαν και κατακρίνοντας την επαναδιατύπωση τους με όρους και έννοιες των σύγχρονων μαθηματικών (Unguru, 1975).

Σχόλιο Δεύτερο: Για τον ιστορικό χρόνο

Ως ιστορικός χρόνος και σε αντιδιαστολή με το φυσικό χρόνο, δηλαδή το χρόνο όπως ορίζεται ως έννοια της κλασσικής φυσικής, θεωρείται ο χρόνος που διέπει τα ιστορικά φαινόμενα, τα οποία αποτελούν αντικείμενο της ιστορίας. Σύμφωνα με μια θεώρηση, η οποία αναλύεται από τον Μπαλτά (1988), ο ιστορικός χρόνος πρέπει να θεωρείται, μεταξύ άλλων και, με τα ακόλουθα θεμελιώδη χαρακτηριστικά σε ευθεία αντιδιαστολή με τα χαρακτηριστικά του χρόνου της φυσικής.

Ο ιστορικός χρόνος πρέπει να θεωρείται ασυνεχής, διακοπτόμενος από τομές και ρήξεις της συνέχειας του, οι οποίες οριοθετούν χρονικά διαφορετικές ιστορικές καταστάσεις.

Ο ιστορικός χρόνος πρέπει να θεωρείται ανομοιογενής ως προς αυτές τις τομές και τα σημεία ρήξης της συνέχειας του. Κάθε χρονική στιγμή, είτε συνιστά τομή και ρήξη είτε όχι, είναι ουσιαδώς διαφορετική από κάθε άλλη. Ο ιστορικός χρόνος είναι ανομοιογενής ως προς τις διάρκειες που διέπουν τις ιστορικές καταστάσεις, οι οποίες ως εκ τούτου δεν μπορεί να συνταχθούν γραμμικά σε μια αλληλουχία «ακολουθώντας απλά μια υποθετική υποκείμενη χρονική 'ευθεία'. Απλά 'υπερτίθενται' με τρόπους που καθιστούν τις μεταξύ τους αρθρώσεις ιδιαίτερα πολύπλοκες» (Μπαλτάς, 1988, σελ. 64).

Ο ιστορικός χρόνος είναι χρόνος ο οποίος πρέπει να θεωρείται ότι 'ρέει' ανομοιόμορφα. Η διαδοχή των χρονικών στιγμών δεν ακολουθεί πάντοτε τον ίδιο 'ρυθμό' και οι αντίστοιχες χρονικές διάρκειες δεν είναι 'ισοταχείς', σε αντίθεση με ανάλογες παραδοχές για το χρόνο της φυσικής. Επομένως, μια χρονική διάρκεια δεν χαρακτηρίζεται μόνο από το εύρος της, αλλά και από τον ρυθμό διαδοχής των χρονικών στιγμών που εμπεριέχει.

Ο ιστορικός χρόνος πρέπει να θεωρείται ανισότροπος, δηλαδή το παρελθόν σε ριζική ασυμμετρία με το μέλλον, οπότε και το τετελεσμένο δεν μπορεί να θεωρείται ότι προσδιορίζει πλήρως το ασυντέλεστο. Με άλλα λόγια, σε καμία περίπτωση το μέλλον δεν αποτελεί επανάληψη του παρελθόντος.

Τέλος, ο ιστορικός χρόνος δεν μπορεί να θεωρείται ανεξάρτητος από τα κοινωνικά φαινόμενα. Είναι συστατικό στοιχείο των κοινωνικών φαινομένων μετέχοντας στον προσδιορισμό της ιστορικής τους ταυτότητας. «Και αυτό σημαίνει όχι μόνο απλά πως ένα ιστορικο-κοινωνικό φαινόμενο είναι αδιαχώριστο από τη χρονικότητα του (το 'καθεστώς' χρόνου που το διέπει) και τη χρονολόγηση του (τα όρια του φαινομένου όπως τα προσδιορίζει αυτό το 'καθεστώς') αλλά και πως το γίνεσθαι του φαινομένου αυτού δεν μπορεί να διαχωριστεί από το είναι του, *πως ένα ιστορικο-κοινωνικό φαινόμενο είναι πάντοτε φαινόμενο εν εξελίξει, πως το είναι του είναι το ίδιο το γίνεσθαι*» (Μπαλτάς, 1988, σελ. 65).

Τυπική περίπτωση ιστοριογραφίας των μαθηματικών, η οποία αναιρεί ουσιώδη χαρακτηριστικά του ιστορικού χρόνου αποτελεί μια προσέγγιση στην ιστορία της άλγεβρας η οποία παρουσιάστηκε αρχικά από τον Νέσσελμαν (Nesselman, 1842) στα μέσα του 19^{ου} αιώνα και υιοθετήθηκε στη συνέχεια από άλλους ιστορικούς των μαθηματικών. Η προσέγγιση αυτή ανακατασκευάζει την ιστορική εξέλιξη της άλγεβρας για να της αποδώσει συνέχεια

και ομοιογένεια, ως χαρακτηριστικά μιας ενδογενούς αναγκαιότητας της άλγεβρας, ανεξάρτητης από τα αντίστοιχα κοινωνικά φαινόμενα. Διακρίνει τρεις διαδοχικές περιόδους ιστορικής εξέλιξης, που χαρακτηρίζονται από την κυρίαρχη μορφή συμβολισμού στη γραφή της άλγεβρας, η οποία όμως μορφή συμβολισμού αντιμετωπίζεται ως έκφραση μιας προοδευτικής εξέλιξης ενός τύπου μαθηματικής αφαίρεσης: τη ρητορική, την συντομογραφική και την συμβολική άλγεβρα. Στην ρητορική άλγεβρα δεν χρησιμοποιείται καμία μορφή συμβολισμού ή συντομογραφίας των μαθηματικών εννοιών, στην συντομογραφική άλγεβρα εισάγονται συντομογραφικές παραστάσεις των συχνότερα χρησιμοποιούμενων πράξεων, σχέσεων και μεγεθών και στην συμβολική άλγεβρα αναπτύσσεται και χρησιμοποιείται ένα πλήρες συμβολικό σύστημα παράστασης των αλγεβρικών εννοιών. Η συντομογραφική άλγεβρα, όμως, θεωρούμενη ως ένα ενδιάμεσο στάδιο στην εξέλιξη της άλγεβρας με στόχο την απόδοση μιας συνεχούς, ομοιογενούς και ισότροπης ιστορικά ανάπτυξης, δεν αποτελεί παρά μια τεχνική αναγκαιότητα επιβεβλημένη στους αντιγραφείς των μαθηματικών κειμένων της εποχής από τους περιορισμούς της γραφής με το χέρι και την έλλειψη δυνατοτήτων τυπογραφικής αναπαραγωγής. Γι' αυτό και οι συχνότερα χρησιμοποιούμενες λέξεις στην άλγεβρα της περιόδου αυτής, κατά κανόνα στα λατινικά, αντικαθίστανται με τα αρχικά τους γράμματα, όπως πχ. *c* για τη λέξη *cosa* (αντικείμενο, σταθερά), *p* για τη λέξη *plus* (συν, και) ή *mca* για τη λέξη *mutiplica* (πολλαπλασιάζω, πολλαπλασιασμός) (Radford, 1997).

Η ιστορία, και ακριβέστερα οι ιστορίες, της εννοιολογικής συγκρότησης και εξέλιξης των μαθηματικών θεωριών του λογισμού, απειροστικού, διαφορικού, ολοκληρωτικού κλπ., οι οποίες κατέληξαν σε μια θεωρία που ονομάστηκε μαθηματική ανάλυση, αποτελούν ένα από τα παραδείγματα, τα οποία καταδεικνύουν με χαρακτηριστικό τρόπο την ασυνέχεια, την ανομοιογένεια και την ανισοτροπία του ιστορικού χρόνου.

Ο λογισμός, δηλαδή μελέτη των συναρτήσεων με βάση τις έννοιες του ορίου (συνέχεια, ολοκλήρωση, διαφόριση), αναπτύχθηκε μέσα

από διακριτά μαθηματικά ερευνητικά προγράμματα με διαφορετικές εννοιολογικές βάσεις, τα οποία μπορεί να διαταχθούν

χρονολογικά, χωρίς όμως και να συγκροτούν μια αλληλουχία με στοιχεία συνέχειας, ως εξής (Grattan-Guinness, 1987):

- Οι θεωρίες των 'ροών' (fluxions) και των 'ρευστών' (fluents) του Νεύτωνα (Newton) στις οποίες αναπτύσσεται μια, ανεπαρκής όμως, θεωρία των ορίων από το 1660 και εξής.
- Ο 'διαφορικός' και 'ολοκληρωτικός' λογισμός του Λάιμπνιτς (Leibniz) με επίκεντρο τα απειροστά, αλλά χωρίς καμία αναφορά σε έννοιες 'ορίου', ο οποίος αναπτύσσεται από το 1670 και εξής. Ο λογισμός αυτός επαναδιατυπώνεται από τον Όυλερ (Euler) στα μέσα της δεκαετίας του 1750 και αναπτύσσεται με την προσθήκη μιας πρόδρομης έννοιας της 'παραγώγου', του 'διαφορικού συντελεστή'.
- Η αλγεβροποίηση του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού από τον Λαγκράντζ (Lagrange) σε μια προσπάθεια παράκαμψης των εννοιών τόσο των 'απειροστών' όσο και των 'ορίων', η οποία επιχειρείται από το 1770 και εξής.
- Η προσέγγιση του Κωσύ (Cauchy) βασισμένη σε μια συνεκτική θεωρία των 'ορίων' η οποία αναπτύσσεται από το 1810 και εξής. Με βάση την έννοια του 'ορίου' θεμελιώνονται οι βασικές έννοιες του λογισμού και αναπτύσσονται οι θεωρίες των συναρτήσεων και των σειρών με τις οποίες ολοκληρώνονται θεωρητικά οι βάσεις της μαθηματικής ανάλυσης.
- Η προσέγγιση του Κωσύ (Cauchy) επεξεργασμένη και επαναδιατυπώμενη εννοιολογικά από τον Βάιερστρας (Weierstrass) και άλλους στα μετέπειτα χρόνια, και κυρίως από τις αρχές της δεκαετίας του 1850 και εξής, επικρατεί τελικά ως η κύρια μορφή της μαθηματικής ανάλυσης.

Σε πολλές ιστορίες της μαθηματικής ανάλυσης ή ιστορίες της εννοιολογικής εξέλιξης θεμελιωδών ιδεών της αποδίδεται μια

χρονολογική συνοχή και μια αδιάλειπτη συνέχεια, εννοιολογική και μεθοδολογική, υπό το πρίσμα μιας «εκ των υστέρων» ανάγνωσης των ιστορικών δεδομένων, η οποία παραβλέπει όλα τα χαρακτηριστικά του ιστορικού χρόνου. Χαρακτηριστική περίπτωση μιας τέτοιας προσέγγισης της ιστορίας αποτελεί η κλασσική *Ιστορία του Λογισμού και της Εννοιολογικής του Ανάπτυξης* του Καρλ Μπόϋρ (Boyer, 1959), στην οποία παρουσιάζεται μια συνεχής εξέλιξη των βασικών εννοιών του λογισμού από τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά μέχρι το τέλος του 19^{ου} αιώνα διακριμένη σε έξι περιόδους ανάπτυξης και αντίστοιχα κεφάλαια: Ιδέες στη αρχαιότητα, Οι συνεισφορές του Μεσαίωνα, Ένας αιώνας προσδοκίας, Νεύτωνα και Λάιμπνιτς, Η περίοδος των δισταγμών, Η αυστηρή τυποποίηση. Στην ιστορία του μαθηματικού λογισμού, όπως παρουσιάζεται από το Μπόϋερ, δεν υπάρχουν τομές, όλες οι χρονικές περίοδοι είναι ισότιμες ως προς την εξέλιξη των συναφών μαθηματικών ιδεών και τεχνικών, αλλά πάνω από όλα το παρελθόν και το παρόν της κάθε χρονικής περιόδου δεν αποτελούν αλληλουχία. Κάποιες μάλιστα εννοιολογικές εξελίξεις του λογισμού υπόκεινται και σε ένα χειρισμό χρονικής αντιστροφής, ως εάν συνέβησαν σε αντίστροφη χρονική διαδοχή, όπως για παράδειγμα η έννοια του «απειροστού» ή του «ολοκληρώματος» στα μαθηματικά του Αρχιμήδη, οι οποίες φαίνεται να συγκροτούνται ανεξάρτητα και στην περίπτωση του ολοκληρώματος πριν από την έννοια της «παραγώγου» (Boyer, 1959, σελ. 48-60).

Αντίθετα σε μια συλλογή κειμένων του Γκράτταν-Γκίννες (Grattan-Guinness, 1980) στην οποία παρουσιάζεται η εξέλιξη των εννοιολογικών θεμελίων και των τεχνικών της μαθηματικής ανάλυσης από το 1630 έως το 1910 αποτυπώνονται με σαφήνεια και τα δεδομένα του ιστορικού πλαισίου και τα χαρακτηριστικά του ιστορικού χρόνου συγκρότησης και ανάπτυξης τους.

Σχόλιο Τρίτο: Για τα αντικείμενα της ιστορίας των μαθηματικών

Από την οπτική που θεωρεί τα μαθηματικά ως μια κοινωνική πρακτική, αντικείμενα της ιστορίας των μαθηματικών αποτελούν ισότιμα και σε αλληλοσυσχέτιση, όλοι οι παράγοντες οι οποίοι

διαμορφώνουν την οργάνωση της μαθηματικής δραστηριότητας και την παραγωγή της μαθηματικής γνώσης σε μια καθορισμένη ιστορική περίοδο.

Τα υποκείμενα της μαθηματικής δραστηριότητας, άτομα και ερευνητικές ομάδες μαθηματικών. Η θεσμική οργάνωση της μαθηματικής δραστηριότητας στην οποία και δια της οποίας ασκείται η μαθηματική πρακτική, όπως είναι τα ερευνητικά κέντρα, οι μορφές επαγγελματικής απασχόλησης των μαθηματικών, οι τύποι και οι μηχανισμοί χρηματοδότησης της μαθηματικής έρευνας, οι μορφές και τα μέσα επικοινωνίας και δημοσιοποίησης των αποτελεσμάτων της μαθηματικής έρευνας (συνέδρια και περιοδικά), τα συστήματα εκπαίδευσης των ερευνητών μαθηματικών (προ-πτυχιακά και μεταπτυχιακά), και κάθε συναφές. Ιδιαίτερα, οι επαγγελματικές κοινότητες των ερευνητών μαθηματικών οι οποίες διαδραματίζουν κεντρικό ρόλο στην δημιουργία και στην επικύρωση της μαθηματικής γνώσης αποτελούν ενδιαφέρον αντικείμενο της ιστορικής έρευνας και συστατικό παράγοντα της εξέλιξης των μαθηματικών. Η κοινωνική οργάνωση και η δομή των κοινοτήτων αυτών και, ειδικότερα, οι ιεραρχίες και η εξουσία στις κοινότητες αυτές, οι οποίες δεν έχουν καθόλου ευκαιριακό και τυχαίο χαρακτήρα, διαμορφώνει τους μηχανισμούς δημιουργίας και επικύρωσης της μαθηματικής γνώσης, αποτελώντας ταυτόχρονα το πλαίσιο διαφύλαξης και το πεδίο εφαρμογής και μετάδοσης της άρρητης και άτυπης μαθηματικής γνώσης (Collins & Restivo, 1983, Martin, 1988). Κατά τον Ρεστίβο (Restivo, 1992) μάλιστα, οι αλλαγές των στοιχείων και οι μετασχηματισμοί των μορφών οργάνωσης της μαθηματικής δραστηριότητας περιγράφουν πληρέστερα τη δυναμική της ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών, απ' ό,τι η ανάπτυξη της

μαθηματικής γνώσης με τους όρους εξέλιξης των επιστημών ως αλλαγή παραδειγμάτων που διατύπωσε ο Κουν (Kuhn, 1981), αναλύοντας τις επιστημονικές επαναστάσεις στη φυσική, αφού η εξέλιξη των μαθηματικών προσομοιάζει εκείνη της εξέλιξης των κοινωνικών παρά των φυσικών επιστημών.

Οι τρόποι δράσης και οι μορφές δραστηριότητας των μαθηματικών, όπως είναι οι διαδικασίες ανάδειξης και επίλυσης προβλημάτων και βέβαια η οργανωμένη σε αρχές και συστήματα μαθηματική γνώση. Η μαθηματική γνώση, η οποία ως παράγωγο μιας κοινωνικής πρακτικής, εντάσσεται σε ιστορικά καθορισμένα κοινωνικά και πολιτιστικά πλαίσια, τα οποία καθορίζουν το επίπεδο και προσδιορίζουν την κατεύθυνση ανάπτυξης της, αποτελούν επομένως συστατικό στοιχείο της ιστορίας της.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η αποδοχή από την Γαλλική μαθηματική κοινότητα της μαθηματικής έννοιας ‘απειροστό’, μιας έννοιας θεμελιώδους για το διαφορικό λογισμό κατά την πρώτη περίοδο συγκρότησης της μαθηματικής ανάλυσης ως πεδίου της μαθηματικής δραστηριότητας. Έννοια, η οποία σε μια ύστερη περίοδο αντικαταστάθηκε από την έννοια ‘όριο’. Και στην αποδοχή της έννοιας ‘απειροστό’ και στην αντικατάστασή της από την έννοια ‘όριο’ κυριάρχησαν κριτήρια πρωτίστως φιλοσοφικά και ακριβέστερα ιδεολογικο-πολιτικά, παρά κριτήρια υπαγορευμένα από τις ανάγκες θεμελίωσης ή ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης. Η έννοια του ‘απειροστού’, ως ποσότητα η οποία είναι διάφορη του μηδενός ενώ ταυτόχρονα μικρότερη σε απόλυτη τιμή από κάθε πραγματικό θετικό αριθμό, θεωρήθηκε αντιθετική της Καρτεσιανής φιλοσοφίας και ως εκ τούτου η αποδοχή της προκάλεσε ισχυρές αντιδράσεις στη Γαλλική μαθηματική κοινότητα κατά τις αρχές του 18^{ου} αιώνα, επειδή εμπεριείχε ουσιαστικά την αποδοχή της ύπαρξης ενός πραγματικού απείρου. Οι αντιδράσεις κατέληξαν σε μια οξύτατη αντιπαράθεση των οπαδών με τους πολέμιους της έννοιας, η οποία επιλύθηκε υπέρ της έννοιας του ‘απειροστού’, όχι από την μαθηματική πρακτική, αλλά από την Γαλλική Βασιλική Ακαδημία Επιστημών με τη μέθοδο της πλειοψηφίας των μελών της. Παρά την πολιτική

επιλογή της Γαλλικής Βασιλικής Ακαδημίας Επιστημών να προασπίζεται την «καθαρότητα της επιστήμης» μη επιτρέποντας στους κόλπους της θεολογικές ή φιλοσοφικές συζητήσεις για τα επιστημονικά ζητήματα, η αποφυγή της συζήτησης για την αντιπαράθεση της επιστημονικής κοινότητας επί των θεμελιωδών εννοιών του διαφορικού λογισμού δεν έγινε δυνατή. Τελικά, το 1706 η σχετική επιτροπή επίλυσης των επιστημονικών διαφορών εκτιμώντας ότι οι οπαδοί της έννοιας του «απειροστού» πλειοψηφούσαν στην ολομέλεια της Ακαδημίας, ζήτησε και επέτυχε από τους πολέμιους της έννοιας να αποσύρουν τις αντιθέσεις τους (Mancosu, 1989).

Σε μια επόμενη περίοδο ανάπτυξης του διαφορικού λογισμού στις αρχές του 19^{ου} αιώνα η έννοια «απειροστό» αντικαταστάθηκε από την έννοια «όριο», δια της οποίας επιλύονταν προβλήματα συναρτημένα με την αποδοχή μιας έννοιας πραγματικού απείρου. Η εκ των υστέρων επινόηση και ανάπτυξη μιας άλλου τύπου μαθηματικής ανάλυσης κατά το 1960-61, όταν ο Ρόμπινσον (Abraham Robinson) κατασκεύασε ένα μαθηματικό μοντέλο όπου υπάρχουν απειροστά, και θεμελίωσε την Non Standard Ανάλυση, κατέδειξε ότι ούτε η απόρριψη της έννοιας του «απειροστού» ούτε η εισαγωγή της έννοιας του «ορίου» συνιστούσαν αναγκαιότητες υπαγορευμένες από μια εσωτερική λογική ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης.

Αντίστοιχα, η διαδικασία της διαρκώς αυξανόμενης αφαίρεσης και γενίκευσης της μαθηματικής γνώσης μοιάζει χωρίς επαρκή αιτιολογία, αν ιδωθεί αποκλειστικά με τους όρους της εσωτερικής λογικής της μαθηματικής γνώσης, χωρίς να εκτιμηθεί, παράλληλα, με όρους κοινωνικής πρακτικής η σημαντική επίδραση της συγκρότησης ολοένα και πιο ανταγωνιστικών δομών της μαθηματικής δραστηριότητας (Schubring, 1981).

Από την οπτική αυτή, επομένως, και με δεδομένη την πολλαπλότητα των διαστάσεων της μαθηματικής δραστηριότητας δεν μπορούμε παρά να μιλάμε για *ιστορίες* των μαθηματικών, έστω

και αν καταχρηστικά χρησιμοποιούμε τον όρο *ιστορία* των μαθηματικών.

Σχόλιο Τέταρτο: Για την ιστορικότητα της μαθηματικής γνώσης

Η αποδοχή της θέσης, ότι τα μαθηματικά είναι μια κοινωνική πρακτική επιβάλλει μια ιστορική προσέγγιση, η οποία αναιρεί μια συγκεκριμένη επιστημολογική θεώρηση των μαθηματικών που έχει καθιερωθεί στη συναφή βιβλιογραφία με τον όρο πλατωνισμός ή και απολυτοκρατία (Ernest, 1991, 1998). Με απλά λόγια, ο όρος πλατωνισμός παραπέμπει σε μια επιστημολογία των μαθηματικών βασισμένη στην παραδοχή ότι η ύπαρξη των μαθηματικών οντοτήτων είναι ανεξάρτητη από την ανθρώπινη νόηση. Η επιστημολογία αυτή αποκαλείται 'πλατωνισμός' επειδή θεωρείται παράγωγη της φιλοσοφικής θέσης που διατυπώθηκε από τον Πλάτωνα, ότι τα εμπειρικά δεδομένα των αισθήσεων μας αποτελούν αντανakλάσεις, και μάλιστα ατελείς, ιδεωδών «μορφών» που υπάρχουν ανεξάρτητα από τόπο και χρόνο. Ο Ρέσνικ (Resnik, 1993, σελ. 39), περιγράφει τον πλατωνισμό ως την θεώρηση που δέχεται ότι *«Οι αριθμοί, τα σύνολα, οι συναρτήσεις και άλλα παραδειγματικά μαθηματικά αντικείμενα βρίσκονται εκτός χώρου και χρόνου κάθε αλληλεπίδραση τους με τα υλικά σώματα είναι αδύνατη»*.

Αυτή η επιστημολογική θεώρηση της μαθηματικής γνώσης, απόλυτα κυρίαρχη από τις αρχές του προηγούμενου αιώνα μέχρι τις μέρες μας, οπότε αμφισβητείται σοβαρά, οικοδομείται σε παραδοχές μεταξύ των οποίων περιλαμβάνονται οι ακόλουθες, διατυπωμένες εντελώς συνοπτικά. (Χασάπης, 2005).

Η μαθηματική γνώση συγκροτείται από ένα σύνολο προτάσεων (ορισμοί, αξιώματα, θεωρήματα) και μια σειρά αποδείξεων (διαδικασιών ελέγχου και τεκμηρίωσης) της αλήθειας των προτάσεων αυτών. Οι αποδείξεις της αλήθειας των μαθηματικών προτάσεων βασίζονται αποκλειστικά σε ένα σύνολο παραδοχών (αξιώματα και ορισμοί) και σε μια σειρά κανόνων λογικής

συνεπαγωγής, που αποτελούν μέρος μιας παραδεκτής τυπικής-παραγωγικής λογικής.

Αφού οι αποδείξεις της αλήθειας των μαθηματικών προτάσεων είναι αποκλειστικά λογικές, χωρίς καμία προσφυγή στην εμπειρική πραγματικότητα, η μαθηματική γνώση είναι κατά συνέπεια αδιάψευστη, αντικειμενική και απόλυτη, εξαρτημένη μόνο από τις παραδοχές της και τους κανόνες της τυπικής-παραγωγικής λογικής. Η μαθηματική γνώση, ως αδιάψευστη, αντικειμενική και απόλυτη γνώση - ουσιαστικά ως εξ ορισμού αληθής - υποκείμενη μόνο στη δική της εσωτερική λογική είναι επομένως ανεξάρτητη από κάθε χρονικό και κοινωνικό δεδομένο, ανεξάρτητη δηλαδή από κάθε ιστορική εξέλιξη και κοινωνική πρακτική. Η μαθηματική γνώση είναι κατά συνέπεια απαλλαγμένη πλήρως από τα εμπειρικά δεδομένα και τις αντιφάσεις της κοινωνικής πραγματικότητας, πλήρως ανεξάρτητη από τις κυρίαρχες κοινωνικές αξίες και άρα ιδεολογικά ουδέτερη. Η μαθηματική γνώση αναπτύσσεται συσσωρευτικά και αδιάλειπτα με την προσθήκη νέων μαθηματικών αληθειών, οι οποίες αποτελούν ένα τελεσίδικα περατωμένο και ολοκληρωμένο προϊόν της ανθρώπινης σκέψης

Σε τελευταία ανάλυση, η μαθηματική γνώση υπάρχει, ως συστατικό στοιχείο της πραγματικότητας ή μιας πραγματικότητας 'έξω' από την ανθρώπινη ύπαρξη και 'ανακαλύπτεται' από την ανθρώπινη δραστηριότητα. Ο γνωστός μαθηματικός Χάρντυ (Hardy, 1993, σελ. 89), δηλώνει χαρακτηριστικά *«Πιστεύω ότι η μαθηματική πραγματικότητα βρίσκεται έξω από μας, ότι ο ρόλος μας είναι να την ανακαλύπτουμε ή να την παρατηρούμε και ότι τα θεωρήματα που αποδεικνύουμε και που με υπερφίαλο τρόπο περιγράφουμε ως δικές μας 'δημιουργίες' είναι απλώς οι σημειώσεις για τις παρατηρήσεις μας»*.

Στα πλαίσια αυτού του επιστημολογικού προτύπου η ιστορικότητα της μαθηματικής γνώσης περιορίζεται ουσιαστικά στις «ανακαλύψεις» μαθηματικών αληθειών, οι οποίες είναι αποτέλεσμα έμπνευσης ιδιοφυών ατόμων και η ιστορική εξήγηση κάθε όψης

και κάθε αποτελέσματος της μαθηματικής δραστηριότητας αναζητείται πρωτίστως στην εσωτερική λογική της μαθηματικής γνώσης (Weil, 1979, σελ. 434-442).

Αντίστοιχα, μια ιστορία των μαθηματικών δομημένη στις βιογραφίες των πρωταγωνιστών-μαθηματικών και στις ιδιοφυείς εμπνεύσεις τους, όπως και μια ιστορία της μαθηματικής γνώσης, η οποία προτάσσει ως κινητήρια δύναμη της εξέλιξης των μαθηματικών μια αυτόνομη εσωτερική λογική τους δεν αποτελεί παρά μια όψη της ιστορίας, άρα μια από τις ιστορίες των μαθηματικών, και μάλιστα σε κάποιες περιπτώσεις απλουστευτική. Χαρακτηριστικό παράδειγμα ιστοριογραφίας στη λογική αυτή αποτελεί το έργο του Μπελ (Bell, 1965/1991) «Οι Μαθηματικοί», στην εισαγωγή του οποίου εκτίθεται ρητά η Πλατωνική επιστημολογική θέση για την «ανακάλυψη» των μαθηματικών εννοιών και μεθόδων, καθώς και η αντίστοιχη εκδοχή της ιστορίας των μαθηματικών. *«Στόχος μας είναι να οδηγηθούμε σε μερικές από τις κυρίαρχες ιδέες σε μεγάλες περιοχές των σύγχρονων Μαθηματικών, και αυτό θα το κάνουμε μέσα από την εξέταση του βίου των ανθρώπων οι οποίοι υπήρξαν φορείς αυτών των ιδεών»* (Τόμος, I, σελ. 1.)

Μια αντιθετική, όμως, επιστημολογική θεώρηση βασισμένη στη θέση ότι η μαθηματική γνώση - όπως και κάθε επιστημονική γνώση - είναι κοινωνική κατασκευή, υποκείμενη στα ιστορικά καθορισμένα κοινωνικά και πολιτισμικά πλαίσια του σταδίου ανάπτυξης της θεωρεί την ιστορία δηλαδή συστατικό στοιχείο των μαθηματικών προτάσεων και των διαδικασιών ελέγχου και τεκμηρίωσης της αλήθειας των προτάσεων αυτών, οι οποίες ως σύνολο συγκροτούν τη μαθηματική γνώση. Η μαθηματική γνώση, κατά συνέπεια, δεν αποτελεί μια αδιάψευστη, αντικειμενική και απόλυτη γνώση, αυτόνομη και κατηγορικά διακριμένη από τις άλλες μορφές της ανθρώπινης γνώσης, απαλλαγμένη από τα εμπειρικά δεδομένα και τις αντιφάσεις της κοινωνικής πραγματικότητας, αλλά ως προϊόν μιας κοινωνικής δραστηριότητας υπόκειται σε διαρκείς διαψεύσεις και αναθεωρήσεις, όπως και

κάθε επιστημονική γνώση (Lakatos 1976/1996). Άρα, δεν αποτελεί και δεν μπορεί να θεωρείται ως ένα τελεσίδικα περατωμένο προϊόν της μαθηματικής πρακτικής, εκφρασμένο οριστικά από ένα κλειστό σύστημα προτάσεων (ορισμών, αξιωμάτων και θεωρημάτων) και μια σειρά δεδομένων τεκμηρίωσης και απόδειξης της αλήθειας των προτάσεων αυτών. Η ιστορία δηλαδή, αποτελεί συστατικό στοιχείο των προτάσεων και των διαδικασιών ελέγχου και τεκμηρίωσης της αλήθειας των προτάσεων, που συγκροτούν τη μαθηματική γνώση (Χασάπης, 2002, 2005).

Επομένως από μια τέτοια οπτική, η ιστορική εξήγηση κάθε όψης και αποτελέσματος της μαθηματικής δραστηριότητας αναζητείται στα χαρακτηριστικά της συγκεκριμένης κοινωνίας και του πολιτισμού της κατά τη συγκεκριμένη ιστορική περίοδο, όπως, άλλωστε, ισχύει και για κάθε άλλη ανθρώπινη δραστηριότητα και κάθε άλλο στοιχείο του ανθρώπινου πολιτισμού (Restivo, 1985, 1992). Αντίστοιχα, κάθε ιστορική μελέτη και κάθε ιστοριογραφία των μαθηματικών στη λογική αυτή, μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως μια από τις ιστορίες των μαθηματικών.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα προσέγγισης της ιστορίας των μαθηματικών από μια κοινωνική οπτική, η οποία αναδεικνύει τόσο την πολλαπλότητα των αντικειμένων της ιστορίας των μαθηματικών, όσο και ιδιαίτερες όψεις της ιστορικότητας της μαθηματικής γνώσης αποτελούν, κατά τη γνώμη μου, οι αναλύσεις του Ρεστίβο (Restivo, 1992) για τη συγκρότηση των μαθηματικών ως επιστημονικού κλάδου κατά τον 16^ο και 17^ο αιώνα στην Ευρώπη. Στο κεφάλαιο 7 με τίτλο 'Διαμάχες, κοινωνική αλλαγή και μαθηματικά στην Ευρώπη' του βιβλίου του 'Τα μαθηματικά στην ιστορία και στην κοινωνία' (Restivo, 1992) περιγράφονται αντιπαραθέσεις μεταξύ μαθηματικών της εποχής, οι οποίες σε πολλές ιστορίες των μαθηματικών εμφανίζονται ως «νοητικές μονομαχίες» και περιγράφονται με όρους ιδιομορφίας των πρωταγωνιστών τους και μαθηματικού ενδιαφέροντος των προς επίλυση προβλημάτων που έθετε ο ένας προκαλώντας τον άλλον (πρόκειται πάντοτε για άνδρες). Περιγράφονται οι αντιπαραθέσεις Καρντάνο (Cardano) και Ταρτάλια (Tartaglia) κατά τη δεκαετία του

1540, Νεύτωνα (Newton) και Λάιμπνιτς ((Leibniz) (1670-1730), Κωσού (Cauchy), Άμπελ (Abel) και Γκαλουά (Galois) (1826-1832), καθώς και η συζήτηση των Κάντορ (Cantor) και Κρόνεκερ (Kronecker) στα τέλη του 19ου αιώνα.

Για τον Ρεστίβο (Restivo), οι ιστορικά καταγραφμένες αντιπαραθέσεις και διαμάχες μεταξύ των μαθηματικών εκείνης, αλλά και της μεταγενέστερης, εποχής αντανakλούν σημαντικές ιστορικές αλλαγές στην κοινωνική οργάνωση και σηματοδοτούν συγκρούσεις για την οργάνωση της επιστημονικής δραστηριότητας και για τον έλεγχο της επιστημονικής γνώσης, της μαθηματικής συμπεριλαμβανομένης. Οι επιστημονικές συμπεριφορές που αναδύονται μέσα από τις διαμάχες των μαθηματικών δεν προκύπτουν από ιδεώδη ή από πρότυπα της μαθηματικής δραστηριότητας, αλλά επιβάλλονται από τις ανάγκες του ανταγωνισμού υποδηλώνουν, όπως καθορίζονται στις συγκεκριμένες ιστορικές συγκυρίες από τις κοινωνικές αλλαγές.

Ενδεικτικά, η αντιπαράθεση των Ιταλών μαθηματικών Καρντάνο και Ταρτάλια κατά δεκαετία του 1540 για την πατρότητα της γενικής μεθόδου επίλυσης της κυβικής εξίσωσης $ax^3+bx^2+cx+d=0$., είχε πολλές φορές και τη μορφή μιας δημόσιας μαθηματικής μονομαχίας. Οι μαθηματικές μονομαχίες κατά τη διάρκεια των οποίων επιλύονταν δημόσια ένα πρόβλημα αποτελούσε μια μορφή εκδήλωσης συνηθισμένη μεταξύ των μαθηματικών κατά τον 16^ο αιώνα, δια της οποίας όμως εκτός από αναγνώριση κέρδιζαν και χρήματα με τη μορφή στοιχημάτων. Η αντιπαράθεση Καρντάν και Ταρτάλια αντανakλά μια μετάβαση από ένα επιστημονικό καθεστώς στο οποίο οι λύσεις των προβλημάτων αποτελούσαν ατομική ιδιοκτησία και το οποίο υπερασπιζόνταν ο Ταρτάλια, σε ένα άλλο στο οποίο καθιερώνονταν η δημοσιοποίηση τους και το οποίο πρόβαλλε ο Καρντάν, ο οποίος και δημοσίευσε πρώτος τη μέθοδο επίλυσης των κυβικών εξισώσεων στο βιβλίο του *Ars Magna* (1545).

Ανάλογα, η αντιπαράθεση Νεύτωνα και Λάιμπνιτς (1670-1730), η οποία αφορούσε την ιδέα και τη χρήση στη θεμελίωση του ολοκληρωτικού λογισμού των «απειροστών» αντανakλά μια

μετάβαση από ένα επιστημονικό καθεστώς οργανωμένο σε άτυπα κέντρα συγκροτημένα γύρω από ισχυρές, επιστημονικά και κοινωνικά, προσωπικότητες, στα οποία οι πληροφορίες διακινούνταν από δίκτυα προσωπικών σχέσεων σε ένα άλλο στο οποίο επιστημονικές ενώσεις, όπως οι επιστημονικές εταιρείες ή οι ακαδημίες επιστημών διαχειρίζονταν τη διάδοση της γνώσης μέσα από επιστημονικά περιοδικά και συνέδρια.

Σχόλιο τελικό (του κειμένου) και αρχικό (μιας συζήτησης)

Ένα σχόλιο τελικό του παρόντος κειμένου και εισαγωγικό μιας συζήτησης μπορεί να διατυπωθεί με τα λόγια του Ρεστίβο (Restivo, 1993, σελ. 269-270), τα οποία δεν χρειάζονται καμία παραπέρα ανάλυση ή επιμέρους διευκρίνιση:

«Οι κόσμοι των μαθηματικών είναι κοινωνικοί κόσμοι. Αλλά τι είδους κοινωνικοί κόσμοι είναι; Πώς εντάσσονται στο ευρύτερο πολιτισμικό πλαίσιο; Ποιών τα συμφέροντα εξυπηρετούν οι κόσμοι των μαθηματικών; Τι είδους άνθρωποι είναι μέλη αυτού του κόσμου; Τι είδους αξίες δημιουργούν και στηρίζουν οι κόσμοι των μαθηματικών; Στην περιγραφή και στην υπεράσπιση της “κοινωνιολογικής φαντασίας” (ενός είδους κοινωνιολογικής απαίτησης), ο Τσαρλς Ραϊτ Μιλς (Mills, 1961) υπογράμμισε τη σχέση ανάμεσα στα προσωπικά προβλήματα και στα δημόσια ζητήματα, την τομή βιογραφίας και ιστορίας στην κοινωνία, και έθεσε ερωτήματα σχετικά με την κοινωνική δομή, τη θέση των διαφόρων κοινωνιών στην ιστορία και τους διαφορετικούς τύπους ανδρών και γυναικών που κυριαρχούν και θα κυριαρχούν στην κοινωνία. Αν προσεγγίσουμε τους κόσμους των μαθηματικών από την οπτική αυτή, οι ερωτήσεις που θα θέσουμε είναι εντελώς διαφορετικές από αυτές που θέτουν συνήθως οι φιλόσοφοι οι ιστορικοί και οι κοινωνιολόγοι. Οι ερωτήσεις που έχω θέσει και αλλού για τους κόσμους της επιστήμης, ισχύουν σε γενικές γραμμές και για τους κόσμους των μαθηματικών: Τι παράγουν οι επιστήμονες και πώς; Ποιούς πόρους χρησιμοποιούν και καταναλώνουν; Τι υλικά υποπροϊόντα και σκουπίδια παράγουν;

Από ποια οπτική έχουν αξία αυτά που παράγουν, σε ποίο κοινωνικό πλαίσιο αποκτούν αξία και ποιοι τους αποδίδουν αξία; Ποιο τίμημα, κίνδυνο και όφελος συνεπάγεται η επιστημονική

εργασία για τα άτομα, τις κοινότητες, τις τάξεις, τις κοινωνίες και τις οικολογικές βάσεις της κοινωνικής ζωής... Ποια η σχέση των επιστημόνων με τους πολίτες, τους πελάτες, τα ακροατήρια, και τους υποστηρικτές τους; Τι σχέσεις έχουν οι επιστήμονες μεταξύ τους, με τις οικογένειες και τους φίλους τους, τους συναδέλφους τους άλλων κοινωνικών θέσεων; Ποια είναι η σχέση τους ως εργαζομένων για τους κατόχους των μέσων επιστημονικής παραγωγής; Ποιες είναι οι αυτό-εικόνες τους και πως εντάσσονται στις κοινότητες που ζούνε; Ποιοι είναι οι στόχοι, τα οράματα και τα κίνητρά τους; (Restivo, 1988, σελ. 218).

Αυτές οι ερωτήσεις είναι σχετικές με τη μελέτη των μαθηματικών κόσμων επειδή μας βοηθούν να ανασυστήσουμε τους κοινωνικούς κόσμους, οι οποίοι προοδευτικά απαλείφονται κατά τη διαδικασία της παραγωγής και, τελικά, της παρουσίασης (επανα-παρουσίασης) μαθηματικών αντικειμένων.

Η εξήγηση του “περιεχόμενου” των μαθηματικών δεν είναι ένα ζήτημα δημιουργίας μιας απλής αιτιακής σύνδεσης μεταξύ ενός μαθηματικού αντικειμένου, όπως είναι ένα θεώρημα, και μιας κοινωνικής δομής. Είναι, μάλλον, ένα ζήτημα αποκάλυψης και ανάδειξης των κοινωνικών ιστοριών και των κοινωνικών κόσμων, οι οποίοι είναι ενσωματωμένοι σε τέτοια μαθηματικά αντικείμενα, όπως είναι τα θεωρήματα. Τα μαθηματικά αντικείμενα είναι και πρέπει να αντιμετωπίζονται κυριολεκτικά ως αντικείμενα, πράγματα τα οποία παράγονται, κατασκευάζονται, από κοινωνικά υποκείμενα. Δεν υπάρχει κανένας λόγος για τον οποίο ένα αντικείμενο όπως είναι ένα θεώρημα θα πρέπει να αντιμετωπιστεί διαφορετικά από ένα γλυπτό, ένα φλιτζάνι τσαγιού ή έναν ουρανοξύστη. Μόνο κοινωνικοί κόσμοι που είναι αλλοτριωμένοι και αλλοτριώνουν θα επέτρεπαν να αναπτυχθεί η άποψη ότι τα μαθηματικά αντικείμενα είναι ανεξάρτητες, χωρίς

υλική βάση δημιουργίες και ότι η ουσία των μαθηματικών αποκτά υλική υπόσταση σε έναν τεχνικό λόγο. Οι γραπτές παραστάσεις και τα σύμβολα είναι εργαλεία, υλικά αντικείμενα και, γενικότερα, είναι μέσα εκτέλεσης εργασιών κοινωνικά κατασκευασμένα, γύρω από κοινωνικά συμφέροντα, προσανατολισμένα σε κοινωνικούς στόχους. Αποκτούν το νόημα τους από την ιστορία της κατασκευής και της χρήσης τους, από τους τρόπους που χρησιμοποιούνται στο παρόν, από τις συνέπειες της χρήσης τους μέσα και έξω από τα μαθηματικά και από το πλέγμα των ιδεών του οποίου αποτελούν μέρος..

Άλλωστε, όπως έχει επιγραμματικά διατυπωθεί από τον Μέρτνς (Mehrtens,1994) και τα μαθηματικά, όπως κάθε άλλη επιστήμη, έχουν αναγκαστικά και πολιτικό χαρακτήρα. Το ίδιο και οι ιστοριογραφίες τους.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

- Bell, E.T. (1965/1993), Οι Μαθηματικοί, τόμος I (μτφ. Μαν. Μαγειρόπουλος) & τόμος II (μτφ. Νικ. Σταματάκης), Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο.
- Boyer, C. B. (1959),The History of the Calculus and its Conceptual Development, Dover New York.
- Collins, R., and Restivo, S. (1983) Robber barons and politicians in mathematics: a conflict model of science, *Canadian Journal of Sociology*, 8, 199-227.
- Dauben J. W. & Scriba, C. J. (eds.) (2002), *Writing the History of Mathematics: Its Historical Development*, International Commission on the History of Mathematics, Birkhäuser, Basel.
- Ernest, P. (1991), The Philosophy of Mathematics Education, Falmer Press, London.
- Ernest, P. (1998), Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics, SUNY Press, Albany, New York.
- Ευκλείδη «Στοιχεία», (2001), Τόμος 1, Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και

Εκπαίδευσης, Αθήνα.

Freudenthal, H. (1977), What is algebra and what has been its history?
Archive for History of Exact Sciences 16, 189-200.

Grattan-Guinness, I. (ed.) (1980), From the Calculus to Set Theory. 1630–1910, Duckworth, London.

Grattan-Guinness, I. (1987), What was and what should be the calculus?
Στο I. Grattan-Guinness (ed.), History in mathematics education, Belin, Paris, σελ. 116-135.

Grattan-Guinness, I. (1996), Numbers, magnitudes, ratios and proportions in Euclid's *Elements* : how did he handle them?, *Historia mathematica*, 23, 355-375.

Grattan-Guinness, I. (2004), History or heritage? A central question in the historiography of mathematics. Στο I. Grattan-Guinness (ed.) History of the Mathematical Sciences, Hindustan Book Agency, New Delhi.

Hardy, G.H. (1993), Η Απολογία ενός Μαθηματικού, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο.

Julliard, J. (1975), Η πολιτική. Στο Ζακ Λε Γκολφ, & Πιερ Νορά, Το έργο της ιστορίας, Εκδόσεις Ράππα, Αθήνα.

Kuhn, T.S. (1981), Η Δομή των Επιστημονικών Επαναστάσεων, Εκδόσεις Σύγχρονα Θέματα, Θεσσαλονίκη.

Lakatos, I. (1976/1996), Αποδείξεις και Ανασκευές, Τροχαλία, Αθήνα.

Mancosu, P. (1989), The Metaphysics of the Calculus: A Foundational Debate in the Paris Academy of Sciences, 1700-1706, *Historia Mathematica* 16, 224-248.

Mehrtens, H. (1994), Irresponsible Purity: The Political and Moral Structure of Mathematical Sciences in the National Socialist State. Στο M. Renneberg and M. Walker (eds.) Science, Technology and National Socialism, Cambridge University Press, Cambridge.

Mills, C. W. (1961) The sociological imagination, Grove, New York (ελληνική έκδοση, Η κοινωνιολογική φαντασία, Ολκός, Αθήνα, 1974).

Μπαλτάς, Αριστ. (1988), Για την έννοια του ιστορικού χρόνου – Φυσική και «ιστορικός υλισμός», *Ο Πολίτης*, 94, 59-70.

Nesselmann G. H. F. (1842), Versuch einer Kritischen Geschichte der Algebra: Erster Theil: Die Algebra der Griechen, G. Reimer, Berlin.

- Radford, L. (1997), On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26-33.
- Resnik, M. (1993), "A Naturalized Epistemology for a Platonist Mathematical Ontology" pp. Στο S. Restivo, J.P. Van Bendegem, and R. Fischer (eds.), *Math Worlds: Philosophical and Social Studies of Mathematics and Mathematics Education*, SUNY Press, Albany, NY, σελ. 39-60.
- Restivo, Sal (1985), *The Social Relations of Physics, Mysticism and Mathematics*, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands.
- Restivo, S. (1988), Modern science as a social problem, *Social Problems*, 35, 206-225.
- Restivo, S. (1992), *Mathematics in Society and History: Sociological Inquiries*, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands.
- Restivo, S. (1993), *The Social Life of Mathematics*. Στο Restivo, Sal, Van Bendegem, J.P. and Fischer, R, (Eds.), *Math Worlds - Philosophical and Social Studies of Mathematics and Mathematics Education*, Albany, State University of New York Press, 247 - 278.
- Schubring, G. (1981) The conception of pure mathematics as an instrument in the professionalization of mathematics. Στο H. Mehrtens, H. Bos and I. Schneider (eds.), *Social History of Nineteenth Century Mathematics*, Birkhauser, Boston, pp. 111-134.
- Σταμάτης Ευάγγελος. (1952), *Ευκλείδου Γεωμετρία : Στοιχεία*, Βιβλία 1, 2, 3, 4, Οργανισμός Εκδόσεως Σχολικών Βιβλίων, Αθήνα.
- Unguru, S. (1975), On the need to rewrite the history of Greek mathematics, *Archive for History of Exact Sciences*, 15, 67-114.
- van der Waerden, B. L. (1976), Defense of a 'Shocking' Point of View, *Archive for History of Exact Sciences*, 15, 199-210.
- Weil, A. (1978), Who betrayed Euclid?, *Archive for History of Exact Sciences*, 19, 91-93.
- Weil A. (1979), *The History of Mathematics: Why and How*. Στο A. Weil, *Collected Papers*, vol. 3, Springer-Verlag, New York, σελ. 434-442
- Χασάπης Δημήτρης, (2002), Η διαμεσολάβηση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών. Στο Δ. Χασάπης, (Επιμ.), *Η ιστορία των μαθηματικών ως μέσο διδασκαλίας των μαθηματικών στο Δημοτικό*

σχολείο και στο Γυμνάσιο, *Πρακτικά 1^{ου} Δηήμερου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, Α.Π.Θ., Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Θεσσαλονίκη, 55-66.

Χασάπης, Δ. (2005), Κοινωνικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης: Όψεις και ζητήματα. Στο Δ. Χασάπης, (Επιμ.), *Κοινωνικές & πολιτισμικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης*, *Πρακτικά 4^{ου} Δηήμερου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, Α.Π.Θ., Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Θεσσαλονίκη, 9 – 23.

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ευγενία Κολέζα

*Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων*

Στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης, υπάρχουν πολλοί που υποστηρίζουν ότι η χρήση

¹ της ιστορίας των Μαθηματικών είναι ωφέλιμη² για τη διδασκαλία των Μαθηματικών, σε πολλά επίπεδα: στο επίπεδο της εισαγωγής

¹ Αξίζει να σημειωθεί ότι σχεδόν πάντα μιλάμε για «χρήση» της Ιστορίας των Μαθηματικών (στη διδασκαλία), και όχι για «μελέτη» της Ιστορίας των Μαθηματικών. Αυτή η διαφορά υπονοεί δυο διαφορετικές προσεγγίσεις της ιστορίας, στις οποίες θα αναφερθούμε στη συνέχεια. Οι περισσότεροι ερευνητές, μάλιστα, δείχνουν μια προτίμηση για την έκφραση «ενσωμάτωση της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών» σε αντίθεση με τη «χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών...» (π.χ. Furinghetti, 1997; Swetz, 1984; Thomaidis, 1991; Wilson & Chauvot, 2000). Σύμφωνα με την Furinghetti η «ενσωμάτωση» «ταιριάζει καλύτερα με την ιδέα της αποτελεσματικής διδασκαλίας καθώς επίσης και με την αποτελεσματική ανάλυση των γνωστικών διαδικασιών των μαθητών» (Furinghetti, 1997, σελ. 61).

² Το ότι η ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να διαδραματίσει έναν πολύτιμο ρόλο στη διδασκαλία και την μάθηση Μαθηματικών είναι γενικά παραδεκτό στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ο Fauvel (1991), παραδείγματος χάριν, αναφέρει δεκαπέντε λόγους υπέρ αυτής της άποψης. Σε μεταγενέστερη δημοσίευση επανέρχεται στους πιο σημαντικούς από αυτούς (Fauvel, J. & van Maanen, J, 2000):

- βαθύτερη σύλληψη του νοήματος μαθηματικών εννοιών, θεωριών, μεθόδων και αποδείξεων
- προσδιορισμός κρίσιμων βημάτων δυσκολιών και εμποδίων στην εξέλιξη του αντικειμένου
- καλύτερη οργάνωση της διδασκαλίας και παροχή κινήτρων για τη μελέτη ενός αντικειμένου

νέων μαθηματικών εννοιών, στην ανάδειξη της εσωτερικής δομής των Μαθηματικών, στην αποκάλυψη των κοινωνικο-πολιτισμικών παραγόντων που επέδρασαν ιστορικά στη διαμόρφωση των μαθηματικών αντικειμένων (αναδεικνύοντας έτσι το «ανθρώπινο πρόσωπο των Μαθηματικών»), στη δημιουργία κινήτρων και θετικών στάσεων των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά. Επιπλέον, η μελέτη της ιστορίας των Μαθηματικών από τους δασκάλους τους βοηθά να προβλέψουν και να ερμηνεύσουν τα λάθη των μαθητών τους, και να ανακαλύψουν και επιλέξουν αποτελεσματικές στρατηγικές διδασκαλίας, ειδικά όσον αφορά την χρήση των μαθηματικών εργαλείων και γενικότερα του μαθηματικού υλικού³.

Η ιστορία των Μαθηματικών δίνει επίσης στους μαθητές πολλές ευκαιρίες να γνωρίσουν τους αρχαίους πολιτισμούς και μέσα από αυτούς ποικίλες κοινωνικές δομές, τους ενθαρρύνει να κατανοήσουν και να αξιολογήσουν τον τρόπο που τα Μαθηματικά αναπτύχθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν από τους διάφορους

-
- δημιουργία αρχείου παραδειγμάτων, προβλημάτων και εναλλακτικών απόψεων σχετικά με ένα θέμα
 - εκτίμηση των Μαθηματικών ως μια δημιουργική διαδικασία
 - θεώρηση των Μαθηματικών ως μια ανθρώπινη προσπάθεια που συσχετίζεται με άλλες ανθρώπινες δραστηριότητες
 - δημιουργία μιας ανοικτής και θετικής στάσης απέναντι στη μελέτη των Μαθηματικών.

Παρ' όλα αυτά πολυάριθμες έρευνες μαρτυρούν ότι το εγχείρημα δεν είναι πάντα αποτελεσματικό (Stander, 1989; Fauvel, 1991). Ένας από του λόγους είναι ότι οι δάσκαλοι έχουν λίγη καθοδήγηση και σχετικά μικρό υλικό για να επιχειρήσουν μόνοι τους μια τέτοια προσέγγιση.

³ Αν και «η ιστορία των Μαθηματικών δεν είναι μια πανάκεια για όλα τα προβλήματα σχετικά με τη διδασκαλία των Μαθηματικών που αντιμετωπίζουν οι δάσκαλοι... (η ιστορία) είναι ένα καλό εργαλείο προσέγγισης των γνωστικών και εκπαιδευτικών προβλημάτων, ανάλυση της εργασίας και των αντιλήψεων των μαθητών..., και για την προώθηση της ευελιξίας και της ευρύτητας της σκέψης τους στα Μαθηματικά» (Furinghetti, 2000, σελ. 51).

πολιτισμούς στη πορεία του χρόνου (D'Ambrosio, 2001). Η ενσωμάτωση της ιστορίας των Μαθηματικών στα σχολικά Μαθηματικά ανοίγει τις πόρτες για μια πολυπολιτισμική προσέγγιση⁴ στη διδασκαλία. Υπό αυτή την έννοια, συνδέεται με τα Εθνομαθηματικά⁵.

Επιπλέον, η ενσωμάτωση της ιστορίας των Μαθηματικών στα σχολικά Μαθηματικά είναι ένας άριστος τρόπος για να αναδειχθούν οι συνδέσεις που υπάρχουν μεταξύ των διαφόρων μαθηματικών περιοχών και μεταξύ των Μαθηματικών και άλλων επιστημονικών περιοχών⁶, κάτι που προωθείται ιδιαίτερα στα σύγχρονα προγράμματα σπουδών.

Ένα πρώτο βασικό ερώτημα σε σχέση με τη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών, αφορά τον τρόπο με τον οποίο θα γίνει αυτή η χρήση.

Τα τελευταία χρόνια, η ιστορία των Μαθηματικών χρησιμοποιείται όλο και περισσότερο στη διδασκαλία με δυο κυρίως τρόπους (Fried, 2001): Μέσω στρατηγικών προσθήκης ή/ και μέσω στρατηγικών προσαρμογής.

⁴ Η πολυπολιτισμικότητα στα Μαθηματικά υπό μορφή κειμένων προς σχολιασμό ή υπό μορφή δραστηριοτήτων στοχεύει στην «αποδοχή της ποικιλομορφίας, στο σεβασμό και την εκτίμηση της εργασίας των άλλων, στην αναγνώριση των διαφορετικών πλαισίων, αναγκών, και σκοπών, στη συνειδητοποίηση ότι κάθε κοινωνία έχει συνεισφέρει σημαντικά στο σώμα της γνώσης που ονομάζουμε Μαθηματικά » (Grugnetti & Rogers, 2000, σελ. 51).

⁵ Σύμφωνα με τον D'Ambrosio (1996), «τα Εθνομαθηματικά (Ethno-Mathematics) βρίσκονται στα σύνορα μεταξύ της ιστορίας των Μαθηματικών και της πολιτισμικής ανθρωπολογίας. Μπορούν να γίνουν αντιληπτά ως η μελέτη των τεχνικών (tics) που αναπτύχθηκαν από τους διαφορετικούς πολιτισμούς (ethno) για την εξήγηση, την κατανόηση, και την αντιμετώπιση (mathema) των φυσικών και κοινωνικών περιβαλλόντων τους » (σελ. 245).

⁶ Παραδείγματος χάριν, οι δάσκαλοι μπορούν να δείξουν τη σχέση μεταξύ της Αριθμητικής, της Άλγεβρας, και της Γεωμετρίας μέσα από την μελέτη των κειμένων των Ευκλείδη, του Al-Khwarizmi, και του Καρτέσιου, και οι σχέσεις μεταξύ των Μαθηματικών, της Γεωγραφίας, και της αστρονομίας μπορούν να αναδειχθούν μέσα από την ιστορική μελέτη των οργάνων ναυσιπλοΐας.

Η στρατηγική προσθήκης εμφανίζεται με δυο μορφές: Είτε παρουσιάζοντας στο τέλος των κεφαλαίων κάποια ιστορικά σημειώματα που συνδέονται με το περιεχόμενο των αντίστοιχων κεφαλαίων, είτε περιλαμβάνοντας στο σύνολο των προς επίλυση προβλημάτων κάποια ενδιαφέροντα⁷ ιστορικά προβλήματα. Και οι δυο αυτές στρατηγικές χαρακτηρίζονται ως *στρατηγικές προσθήκης*⁸ διότι δεν προκαλούν αλλαγή στο πρόγραμμα σπουδών, απλά το διευρύνουν. Ο στόχος τέτοιων στρατηγικών είναι διπλός: να αναδειχθεί το ανθρώπινο πρόσωπο των Μαθηματικών και να γίνουν τα Μαθηματικά πιο ενδιαφέροντα, πιο κατανοητά, και πιο προσιτά.

Εντούτοις, αυτές οι στρατηγικές ενδέχεται να έχουν δυο σημαντικά μειονεκτήματα: Οι αφηγήσεις ιστορικών επεισοδίων και τα ενδιαφέροντα ιστορικά προβλήματα, παρουσιάζουν την ιστορία των Μαθηματικών ως ένα σύνολο άχρονων επιτευγμάτων, ανεξάρτητων της ανθρώπινης πολιτισμικής και κοινωνικής λειτουργίας, ως μια σειρά λαμπρών ιδεών που περίμεναν να ανακαλυφθούν από προικισμένους μαθηματικούς. Επιπλέον τα Μαθηματικά κάθε χρονικής περιόδου, θεωρούνται ως εξελιγμένες μορφές προηγούμενων προσπαθειών, δηλαδή η εξέλιξη των Μαθηματικών εμφανίζεται ως μια αυστηρά γραμμική εξέλιξη(

⁷ Ο χαρακτηρισμός ενός ιστορικού προβλήματος ως *ενδιαφέροντος* εξαρτάται άμεσα από την αντίληψη που έχουμε για το πώς εξελίσσεται η μαθηματική γνώση: «...*μια ερμηνεία της ιστορίας σχετίζεται τόσο με τον ερμηνευτή όσο και με τα ίδια τα γεγονότα ... εάν μπορούμε να πούμε ότι υπάρχουν πράγματι ιστορικά γεγονότα*» (Dubinsky, 1994. σελ. 158). Εξαρτάται επίσης από την επικρατούσα αντίληψη της εποχής. Για παράδειγμα, για τους ιστορικούς του Μεσαίωνα τα διάφορα μαθηματικά επιτεύγματα εθεωρούντο ως ολοκλήρωση του θείου σχεδίου, ενώ για τους ιστορικούς του Διαφωτισμού, ως προϊόν λογικών διεργασιών. Είναι δύσκολο να αποστασιοποιηθούμε από τις αντιλήψεις του καιρού μας προκειμένου να υπάρξει μια αντικειμενική θεώρηση του ιστορικού γεγονότος, και έτσι, το πραγματικό νόημα παρελθόντων γεγονότων φιλτράρεται πάντα από τις σύγχρονες κοινωνικοπολιτιστικές αντιλήψεις μας σχετικά με την ιστορία μας

⁸ Για να αντιμετωπισθεί το πρόβλημα της έλλειψης του χρόνου που προκύπτει από την υιοθέτηση μιας τέτοιας στρατηγικής, συχνά ένα συνηθισμένο πρόβλημα αντικαθίσταται με ένα άλλο, που αφορά το ίδιο περιεχόμενο, αλλά διατυπώνεται σε ιστορικό πλαίσιο.

Σύμφωνα με τη στρατηγική προσαρμογής⁹ η ιστορική εξέλιξη μιας μαθηματικής έννοιας χρησιμοποιείται ως οδηγός για το σχεδιασμό της διδασκαλίας της έννοιας.

Ο στόχος μιας τέτοιας στρατηγικής είναι ο ιστορικός εμπλουτισμός των μαθηματικών εννοιών, αναδεικνύοντας τους προβληματισμούς που τις δημιούργησαν και την σταδιακή (και συνήθως μη γραμμική) εξέλιξή τους σε σχέση με τα σύγχρονά τους κοινωνικο-πολιτισμικά προβλήματα. Υπερβαίνει, δηλαδή, τον απλό στόχο της δημιουργίας θετικών στάσεων απέναντι στα Μαθηματικά εκ μέρους των μαθητών, και αποσκοπεί στη διαμόρφωση ολοκληρωμένων αντιλήψεων γύρω από τις μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες: *η μελέτη της ιστορίας των Μαθηματικών λειτουργεί ως ένα είδος επιστημολογικού εργαστηρίου*, στο οποίο ερευνάται ο τρόπος ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης, και διατυπώνονται υποθέσεις σχετικά με τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών.

Σε αυτή τη δεύτερη μορφή χρήσης της ιστορίας των Μαθηματικών¹⁰, η έμφαση δίνεται συνήθως στην κατανόηση των

⁹ Εξηγώντας τη διαφορά μεταξύ στρατηγικής πρόσθεσης και στρατηγικής προσαρμογής στο “Using the History of Calculus to Teach Calculus” ο Katz (1993, σελ 243) σημειώνει: «Αναφερόμενος στην ιστορική προσέγγιση του Λογισμού, δεν εννοώ απλά την παρουσίαση του ιστορικού υπόβαθρου για κάθε θέμα ή την παρουσίαση της βιογραφίας των προσώπων που βρίσκονται πίσω από την ανάπτυξη των διαφόρων ιδεών. Εννοώ την οργάνωση της διδασκαλίας των διαφόρων θεμάτων σύμφωνα την ιστορική σειρά ανάπτυξής τους όπως επίσης και τη συζήτηση των ιστορικών κινήτρων που βρίσκονται πίσω από την ανάπτυξη καθ’ ενός από αυτά τα θέματα, τόσο μέσα στα ίδια τα Μαθηματικά όσο και σε άλλους σχετιζόμενους επιστημονικούς τομείς».

¹⁰ Η Sierpinska (1996) προσδιορίζει τέσσερις διαφορετικούς τρόπους μελέτης και χρήσης της ιστορίας των Μαθηματικών: *ιστορικό, επιστημολογικό, εκπαιδευτικό I και εκπαιδευτικό II*.

Ο ιστορικός τρόπος ενδιαφέρεται για το πότε και το γιατί των μαθηματικών εξελίξεων. Στην περίπτωση αυτή δεν μιλάμε για ενσωμάτωση της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών αλλά για χρήση της ιστορίας, με την έννοια της στρατηγικής προσθήκης.

μαθηματικών εννοιών κάτω από τη σημερινή, σύγχρονη μορφή τους.

Ο Fried (2001), επισημαίνει ότι ένα ζήτημα που συνήθως προκύπτει όταν κάποιος προσπαθεί να ενσωματώσει (και όχι απλά να χρησιμοποιήσει) την ιστορία των Μαθηματικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών είναι ότι γίνεται αναπόφευκτα «αναχρονιστική» («anachronical») (Kragh 1987) ή “Whig¹¹ ιστορία» (Butterfield 1931/1951).

Επομένως, ο εκπαιδευτικός που θέλει να ενσωματώσει την ιστορία των Μαθηματικών στη διδασκαλία, έχει δυο επιλογές:

Οι επόμενοι τρεις τρόποι μελέτης, θα μπορούσαν να χαρακτηρισθούν ως «στρατηγικές προσαρμογής».Πιο συγκεκριμένα, ο επιστημολογικός τρόπος εστιάζει στη φύση της μαθηματικής γνώσης και στο πώς οι μαθητές μαθαίνουν τα Μαθηματικά, ενδιαφέρεται, δηλαδή, για την *ψυχολογική γένεση των μαθηματικών ιδεών* (:η προσέγγιση αυτή παραπέμπει στις εργασίες της ομάδας πραγματοποίησης-Sfard, Dubinsky, Tall κλπ).

Ο εκπαιδευτικός τρόπος προσέγγισης της ιστορίας-του πρώτου τύπου- εστιάζει *στη χρήση της ιστορίας των Μαθηματικών ως εργαλείο για την διδασκαλία* κατά τέτοιο τρόπο ώστε οι μαθηματικές έννοιες να εισάγονται στο σχολείο μέσα από τις ίδιες εκείνες δραστηριότητες και προβληματισμούς που τις ανέδειξαν αρχικά. Να εισάγονται, δηλαδή μέσα από τα αυθεντικά τους πλαίσια(:η προσέγγιση αυτή παραπέμπει άμεσα στην φαινομενολογία του Freudenthal).

Ο εκπαιδευτικός τρόπος προσέγγισης της ιστορίας-του δεύτερου τύπου- προβληματίζεται ως προς το *ποιες θα ήταν οι πλέον κατάλληλες ιστορικές δραστηριότητες ώστε οι μαθητές να αναπτύξουν μια πραγματική κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας*, και ως προς το *ποια είναι ακριβώς η φύση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές*(: η προσέγγιση αυτή παραπέμπει στην έννοια του επιστημολογικού εμποδίου-Bachelard).

¹¹ Σύμφωνα με τον Butterfield, σε μια *Whig* χρήση της ιστορίας, *το παρόν είναι το μέτρο του παρελθόντος*: ένα ιστορικό γεγονός θεωρείται σημαντικό μόνον αν οδηγεί σε κάτι που *σήμερα* θεωρείται ως σημαντικό. Ένας *Whig* ιστορικός είναι δημιουργός μιας «τεράστιας οπτικής ψευδαίσθησης» (Butterfield 1931/1951, σελ. 29). Για τον Butterfield, η *Whig* ιστορία, δεν είναι απλά κακή ιστορία, δεν είναι καθόλου ιστορία. «Για παράδειγμα, μπορεί να είναι πρακτικό και χρήσιμο για τη διδασκαλία μας να «ανακαλύψουμε» *ίχνη της έννοιας της συνάρτησης στον Oresme*, αλλά με αυτό τον τρόπο αγνοούμε εσκεμμένα το γεγονός ότι η εργασία του παρακινήθηκε από το ενδιαφέρον του σχετικά με τη φύση της κίνησης και της αλλαγής και χάνουμε το αριστοτελικό πλαίσιο μέσα από το οποίο προέκυψε αυτό το ενδιαφέρον. Στην πραγματικότητα, αγνοούμε τις σκέψεις του Oresme και τον κάνουμε να σκεφτεί με τον δικό μας τρόπο». (Katz, 1993)

- είτε να παραμείνει πιστός στα σύγχρονα Μαθηματικά και τις σύγχρονες τεχνικές με τον κίνδυνο να καταστεί *ανιστόρητος*¹² ή
- να υιοθετηθεί μια πραγματικά ιστορική μέθοδο στην ενσωμάτωση της ιστορίας των Μαθηματικών διακινδυνεύοντας έτσι να παρουσιάσει πράγματα που είναι άσχετα με τα Μαθηματικά που *πρέπει* να διδάξει¹³.

Η πρώτη επιλογή είναι καθαρά πραγματιστική. Κάτω από αυτή τη θεώρηση, *κατανόηση των Μαθηματικών σημαίνει κατανόηση των Μαθηματικών στο πλαίσιο που χρησιμοποιούνται σήμερα, με στόχο τη δυνατότητα επίλυσης σύγχρονων προβλημάτων*. Βέβαια, αν υιοθετήσουμε αυτή τη πρώτη επιλογή, δεν σημαίνει κατ' ανάγκη ότι διδάσκουμε τα σύγχρονα Μαθηματικά ως αντικειμενικά αληθή. Τα διδάσκουμε γιατί *τα δεχόμαστε ως τα ισχυρότερα μέσα που σήμερα διαθέτουμε για να αντιμετωπίσουμε τα σύγχρονα προβλήματα*: δεν υπάρχει κανένας λόγος να θεωρήσουμε, ότι οι σύγχρονες μαθηματικές τεχνικές και προσεγγίσεις θα θεωρούνται πάντα ως οι πιο αποτελεσματικές. Σε διάφορες ιστορικές περιόδους η έμφαση δινόταν σε διαφορετικά κοινωνικο-πολιτισμικά ζητήματα και, κατά συνέπεια, το ίδιο θα συμβεί και στο μέλλον.

Η επιλογή αυτή υπονοεί μια παραδοχή του ότι η *οντογένεση* (δηλαδή η ανάπτυξη των ιδεών κατά τη διάρκεια της διάρκειας

¹² Αν όμως θέλει κάποιος να παραμείνει πιστός στα σύγχρονα Μαθηματικά σε βάρος της παρουσίας της ιστορικής αλήθειας, γιατί να υιοθετήσει την ιστορική προσέγγιση; Γιατί να μην παρουσιάσει την εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών χωρίς αναφορά σε άτομα και γεγονότα; Η απάντηση είναι ότι η σύνδεση των εννοιών με συγκεκριμένα ιστορικά πρόσωπα επιδιώκει την παρουσίαση του «ανθρώπινου» πρόσωπου των Μαθηματικών.

¹³ « Συνήθως, η αυστηρά ιστορική παρουσίαση (ενός μαθηματικού θέματος), στην οποία δίνονται όλες οι λεπτομέρειες της ιστορικής εξέλιξης, δεν είναι διδακτικά κατάλληλη, ακόμη και σε πανεπιστημιακό επίπεδο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η ιστορική εξέλιξη μιας επιστημονικής περιοχής, αντίθετα προς αυτό που μερικές φορές αφελώς υποτίθεται, δεν είναι σχεδόν ποτέ γραμμική και συσσωρευτική. Αντίθετα, είναι μάλλον περίπλοκη, περιλαμβάνοντας περιόδους στασιμότητας και σύγχυσης, στις οποίες κυριαρχούν οι προκαταλήψεις και οι παρερμηνείες και επηρεάζεται πολύ από το γενικότερο πολιτισμικό περιβάλλον στο οποίο αυτή η εξέλιξη πραγματοποιείται» (Tzanakis, 2002)

ζωής ενός ατόμου) αντικατοπτρίζει τη φυλογένεση (δηλαδή την ιστορική εξέλιξη των εννοιών)¹⁴.

Η δεύτερη επιλογή υπονοεί ότι τα Μαθηματικά δεν είναι με κανένα τρόπο απόλυτα, *έχουν* μια ιστορία, οι στόχοι τους και το νόημά τους είναι υπό συνεχή διαπραγμάτευση¹⁵. Πίσω από αυτή την εναλλακτική κοινωνικο-πολιτισμική προσέγγιση βρίσκονται ερωτήματα όπως: *Πόσο σωστό είναι να παρουσιάζει κάποιος την ιστορία ως μια πορεία που, μέσα από αναπόφευκτα λάθη, υπερνίκηση εμποδίων και κρίσιμες αποφάσεις, καταλήγει εντούτοις στη διατύπωση των σύγχρονων θεωριών; Ποιος είναι ο ρόλος που διαδραματίζουν οι διάφοροι κοινωνικοί και πολιτισμικοί παράγοντες που χαρακτηρίζουν τις διάφορες ιστορικές περιόδους*¹⁶;

¹⁴ Από τους πρώτους που υποστήριζαν αυτή την άποψη ήταν ο Poincare και στη συνέχεια οι Branford (1924), Polya (1962) και Freudenthal (1973). Οι μαθητές, κατά τον Polya, πρέπει να επανα-ανακαλύψουν όλα τα «μεγάλα βήματα» που ακολούθησαν οι μαθηματικοί καθ' όλη τη διάρκεια της ιστορίας. Ο δάσκαλος, σύμφωνα με τον Branford, πρέπει να πραγματοποιήσει τα «πειράματα» που σημάδεψαν την μαθηματική εμπειρία. Ο Freudenthal μιλά για «καθοδηγούμενη επανα-ανακάλυψη».

¹⁵ Βλέπουμε να εμφανίζεται και πάλι το κλασσικό φιλοσοφικό δίλημμα σχετικά με τα Μαθηματικά: η διαφορά μεταξύ του φιλοσοφικού ρεαλισμού και του (ιστορικού) σχετικισμού. Ο ρεαλιστής μιλά για έννοιες αντικειμενικά αληθείς, ενώ ο σχετικιστής μιλά για το πλαίσιο ερμηνείας και την πολιτισμική εξάρτηση των εννοιών. Στο πλαίσιο της διδασκαλίας, τουλάχιστον όσον αφορά την ενσωμάτωση της ιστορίας, οι δυο προοπτικές μπορούν να συνυπάρξουν: *δεχόμαστε ότι μέσα σε ένα συγκεκριμένο εννοιολογικό πλαίσιο υπάρχει αυτό που θεωρούμε ως αντικειμενική γνώση στα Μαθηματικά, αλλά συγχρόνως αναγνωρίζουμε ότι ένα τέτοιο εννοιολογικό πλαίσιο έχει επιλεγεί με κάποια συγκεκριμένα κριτήρια*(: είναι αυτό που αναφέρεται ως *κοινωνικά καθορισμένη* εικόνα της γνώσης (Elkana 1978, σελ. 315).

¹⁶ Είναι εξαιρετικά ενδιαφέρον το παράδειγμα που παρουσιάζει η Van Amerom (2003)) « *Η διάκριση της Άλγεβρας σε ρητορική- συγκοπτική-ρητορική (rhetorical – syncopated – symbolic) είναι το αποτέλεσμα της τρέχουσας αντίληψης για το πώς αναπτύχθηκε η Άλγεβρα.. Όταν η ανάπτυξη της Άλγεβρας διερευνηθεί από μια κοινωνικοπολιτιστική προοπτική, αντιλαμβανόμαστε ότι η συγκοπτική Άλγεβρα δεν ήταν ένα ενδιάμεσο στάδιο της εξέλιξης, αλλά ήταν μόνο ένα τεχνικό θέμα. Όπως εξηγεί ο Radford, οι περιορισμοί του γραψίματος και η δυσκολία εκτύπωσης βιβλίων ήταν φυσικό να οδηγήσουν σε συντμήσεις των λέξεων. Οι μαθητές μπορούν να κάνουν το ίδιο όταν κρατούν σημειώσεις αλλά αυτό δεν λέει τίποτα για την εννοιολογική κατανόηση των συμβόλων*»(σελ. 68).

Το ίδιο δίλημμα φαίνεται ότι αντιμετώπισε και ο Lakatos(1971). Σύμφωνα, με τον Lakatos μια πιστή παρουσίαση της ιστορίας των Μαθηματικών (:που την ονομάζει *εξωτερική ιστορία*), αν και καθ' όλα σημαντική, *δεν διαφοροποιεί την Επιστήμη και τα Μαθηματικά από τα άλλα πολιτισμικά προϊόντα και ως εκ τούτου δεν εξηγεί την δημιουργία της αντικειμενικής μαθηματικής γνώσης*. Μπροστά σε αυτό το δίλημμα, ο Lakatos βλέπει μόνο δύο διαμετρικά αντίθετες εναλλακτικές λύσεις στη μελέτη της ιστορίας: Είτε *εγκαταλείπουμε όλες τις προσπάθειες να δώσουμε μια ορθολογική εξήγηση της επιτυχίας της Επιστήμης και των Μαθηματικών στη διαμόρφωση αντικειμενικής γνώσης, ή προσπαθούμε να υποβαθμίσουμε το τυχαίο ή συμβατικό στοιχείο στην ιστορία, δίνοντας έμφαση στον ορθολογιστικό, εσωτερικό χαρακτήρα της Επιστήμης και των Μαθηματικών*. Και οι δυο λύσεις έχουν πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα.

Ο Lakatos, υποστηρίζει ότι *τα προϊόντα της μαθηματικής έρευνας διαφοροποιούνται από όλα τα άλλα πολιτισμικά προϊόντα*¹⁷, δεδομένου ότι *υπόκεινται σε χρονικά και πολιτισμικά αμετάβλητα μεθοδολογικά κριτήρια*. Όπως παρατηρεί ο Lakatos η εγκατάλειψη οποιασδήποτε απαίτησης για μια καθολική αντικειμενική σκοπιά της εξέλιξης των Μαθηματικών, θα μας οδηγήσει σε έναν

¹⁷ Οι κοινωνιολόγοι της επιστήμης (πχ Bloor 1991) υποστηρίζουν ότι ακόμη και στα Μαθηματικά, οι έννοιες και οι αποδείξεις είναι αποτέλεσμα αντιπαραθέσεων και διαπραγματεύσεων. Εντούτοις, κάποιοι κοινωνιολόγοι της επιστήμης όπως η Bettina Heintz αποδίδουν μια «ειδική επιστημική θέση» στα Μαθηματικά: « Σε αντίθεση με άλλες περιοχές που αποσυντίθενται σε χωριστές και εν μέρει αντιφατικές θεωρίες, τα Μαθηματικά είναι ένα συνδεδεμένο σύνολο.... αν και οι μαθηματικοί λειτουργούν σχετικά απομονωμένοι και περιορίζονται σε μια μικρή ερευνητική περιοχή, ανακαλύπτονται συνεχώς συνδέσεις μεταξύ περιοχών που αναπτύχθηκαν ανεξάρτητα.» (Heintz 2000, σελ. 19) Και αλλού: « Τα σύγχρονα Μαθηματικά έχουν χαρακτηριστικά γνωρίσματα που αφήνουν μετά βίας περιθώρια για μια κοινωνιολογική ανάλυση. [...] Μια κοινωνιολογική προοπτική είναι εφικτή όσον αφορά την αναδημιουργία της ανάπτυξης που οδήγησε σε αυτή την επιστημική δομή που χαρακτηρίζεται από συνοχή και ορθολογιστική ικανότητα.» (Heintz 2000, σελ. 274/275). Η άποψη της Heintz υπονοεί τη διάκριση μεταξύ του πλαισίου της ανακάλυψης και του πλαισίου της αιτιολόγησης που χρησιμοποιείται συνήθως στη φιλοσοφία της επιστήμης .

σχετικισμό, στο οποίο η αμερόληπτη κρίση δεν είναι πλέον δυνατή και «η ορθολογιστική ικανότητα» γίνεται μια έννοια με μόνο τοπική και χρονική εφαρμογή.

Αυτό τον οδήγησε στο να αναγνωρίσει τα μη-μαθηματικά ιστορικά γεγονότα, απλά ως γεγονότα, για να υπογραμμίσει την ανάγκη για μια αντικειμενική σκοπιά από την άποψη των άχρονων προτύπων της ορθολογιστικής ικανότητας, ακόμη και με το κόστος της απώλειας της επαφής με τις πραγματικές πτυχές της ιστορίας. Ο *Lakatos αφαιρεί οποιαδήποτε κοινωνική ή πολιτισμική μεταβλητή στην αναζήτηση των μαθηματικών αληθειών, για να προαγάγει τα αντικειμενικά προϊόντα της μαθηματικής ορθολογικής σκέψης.*

Προτείνει, ως εκ τούτου, έναν τρόπο παρουσίασης της ιστορίας των Μαθηματικών, που ονομάζει «εσωτερική Ιστορία»¹⁸ και που αναδεικνύει την εσωτερική δομή της συγκεκριμένης επιστήμης αφήνοντας κατά μέρος τις «αταξίες» της πραγματικής Ιστορίας, που οφείλονται στην παρέμβαση των κοινωνικοπολιτισμικών παραγόντων¹⁹.

¹⁸ Η άποψη του Lakatos για την «εσωτερική ιστορία» έχει σαφείς χεγκελιανές επιρροές. Δεν είναι όμως ο μοναδικός που υποστηρίζει μια τέτοια άποψη. Ήδη από τα τέλη του 19^{ου} αιώνα όταν ξεκίνησαν συστηματικές έρευνες σχετικά με την ιστορία των Μαθηματικών, το ερευνητικό πεδίο ήταν σαφώς επηρεασμένο από την λεγόμενη *internalist attitude*: πρόκειται για μια μορφή ανάλυσης της Ιστορίας με όρους σύγχρονης αντίληψης της μαθηματικής γνώσης. Υιοθετείται μια πρακτική αποπλαισίωσης των ιστορικών κειμένων διαχωρίζοντας το «μαθηματικό περιεχόμενο» από τις διάφορες «μορφές έκφρασής» του, που θεωρούνται τυχαίες και άσχετες με το καθαρά μαθηματικό περιεχόμενο. Ο στόχος της αποστασιοποίησης του μαθηματικού περιεχομένου από την μορφή έκφρασής του, αποβλέπει στην έμφαση της α-ιστορικής ισχύος των μαθηματικών αληθειών και οντοτήτων: τα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά και τα σύγχρονα Μαθηματικά θεωρείται ότι εκφράζουν τις ίδιες αλήθειες.

¹⁹ «Ένας τρόπος να δειχθούν οι αποκλίσεις μεταξύ της ιστορίας και της λογικής αναδημιουργίας της (:αυτό που ο Lakatos ονομάζει *εσωτερική ιστορία*) είναι να παρουσιασθεί η *εσωτερική ιστορία* μέσα στο *κείμενο*, και να δειχθεί στις υποσημειώσεις πώς η «αταξία» της πραγματικής ιστορίας (: μια αταξία που οφείλεται στην παρέμβαση των κοινωνικών παραγόντων) ... η ιστορία της Επιστήμης είναι συχνά μια καρικατούρα των λογικών αναδημιουργιών της » (Lakatos 1971, σελ. 120, 138).

Ο Lakatos συνδέει την αντίληψή του περί Ιστορίας με την αντίληψή του περί Επιστήμης²⁰. Γι' αυτόν η «*Επιστήμη*» είναι μια φιλοσοφική, κανονιστική κατηγορία, που ενδεχομένως μπορεί να είναι αντίθετη στις «ιδέες» και που καθορίζεται σύμφωνα με μια θεωρία της Επιστήμης. Ως εκ τούτου, το περιεχόμενο μιας γραπτής ιστορίας της Επιστήμης εξαρτάται άμεσα από τη θεωρία που κάποιος επιλέγει²¹: η *ιστορία της Επιστήμης* είναι μια ιστορία γεγονότων, που επιλέγονται και ερμηνεύονται με έναν κανονιστικό τρόπο. Οι διάφορες θεωρίες παρέχουν διαφορετικές αναδημιουργίες της ιστορίας της επιστημονικής ανάπτυξης, και διαφορετικές περιγραφές της συμβολής των ιστορικών γεγονότων σε αυτή την ανάπτυξη. Επιπλέον, η—ορθολογικά αναδημιουργημένη—ανάπτυξη της επιστήμης πραγματοποιείται ουσιαστικά στον κόσμο των ιδεών του Πλάτωνα, στον Τρίτο κόσμο του Popper, που είναι ανεξάρτητος από το υποκείμενο που γνωρίζει, σε αντίθεση με την «*ιστορία των ιδεών*» που αφορά το γνωρίζον υποκείμενο και εκτυλίσσεται στο δεύτερο κόσμο του Popper.

²⁰ Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι ο Lakatos υπερασπίζεται την ανεξαρτησία της Επιστήμης από τη Φιλοσοφία, άποψη που θα υιοθετήσει λίγα χρόνια αργότερα και η Penelope Maddy. Η κυρίαρχη κατηγορία για την εσωτερική ιστορία είναι «το επιστημονικό», και βασική αρχή σε όλη τη φιλοσοφία της Επιστήμης του Lakatos είναι ότι οι επιστήμονες ξέρουν «ενστικτωδώς» πολύ καλύτερα από τους φιλοσόφους τι είναι και τι δεν είναι επιστημονικό: το να σκεφτούμε διαφορετικά, δηλώνει, θα ήταν «ύβρις»(Lakatos 1971a, σελ. 137). Η μόνη επέμβαση των φιλοσόφων στην Επιστήμη, κατά τον Lakatos είναι να δίνουν συμβουλές, και να παρακινούν μια συζήτηση επί της μεθοδολογίας όταν βλέπουν ένα πρόγραμμα να εκφυλίζεται(Lakatos 1971, σελ. 137). Στην αφηρημένη μεθοδολογία, κυριαρχούν οι φιλόσοφοι, ενώ στην πρακτική Επιστήμη, οι ίδιοι οι επιστήμονες. Στην ιστορία της Επιστήμης δεδομένου ότι πρόκειται για κανονιστική ιστορία, πρέπει να υπάρχει μια ισορροπία μεταξύ των δύο.

²¹ Για παράδειγμα,- αναφέρει ο Lakatos-, οι συμβατιστές θεωρούν την Κοπερνίκεια επανάσταση ως μια παραδειγματική περίπτωση επιστημονικής προόδου, επειδή αντιπροσωπεύει έναν θρίαμβο της απλότητας, σε σχέση με άλλες ανταγωνιστικές θεωρίες. Από την άλλη, οι επαγωγιστές θεωρούν την ανακάλυψη από τον Kepler της ελλειπτικής τροχιάς με βάση τις παρατηρήσεις του Tycho Brahe ως χαρακτηριστικό παράδειγμα επιστημονικής προόδου.

Ένα σημαντικό σημείο σχετικά με το πώς αντιμετωπίζει την ιστορία των Μαθηματικών ο Lakatos, και το οποίο έχει άμεση επίδραση στη διδασκαλία, είναι ότι γι' αυτόν, ιστορικά, οι τυπικές θεωρίες κατασκευάζονται από τους μαθηματικούς με στόχο την εννοιοποίηση των άτυπων θεωριών²².

Πως ακριβώς, όμως, συντελείται αυτή η τυποποίηση²³; Η συγκρότηση της μιας μαθηματικής έννοιας ακολουθεί συγκεκριμένες φάσεις²⁴.

²² Αυτή είναι μια θέση που είχε ήδη σαφώς εκφραστεί από τον Bachelard: Υπάρχει πάντα μια άτυπη θεωρία πριν από ένα τυπικό σύστημα, και η φύση αυτής της ασαφούς άτυπης θεωρίας προσδιορίζεται ακριβώς με τον καθορισμό του τυπικού πλαισίου. Επιπλέον, αυτή η διαδικασία τυποποίησης συνιστά τον ίδιο το μηχανισμό της μαθηματικής ανακάλυψης: η ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης επιτυγχάνεται με την οικοδόμηση τυπικών απολογισμών των άτυπων διαισθήσεων.

²³ Για τον Lakatos, το συγκεκριμένο ερώτημα δεν είναι ένα επιστημολογικό ερώτημα, αλλά ένα ζήτημα μεθοδολογίας, ή όπως το αποκαλεί *ευρετικής (heuristics)*. Ο Lakatos περιγράφει αυτή τη διαδικασία μέσα από την ιστορική περιγραφή της συγκρότησης της έννοιας των πολυέδρων (18^{ος}-19^{ος} αιώνας), μιας ιστορικής διαδικασίας που, σύμφωνα με τον συγγραφέα, είναι ένα εξαιρετικό παράδειγμα «δημιουργίας» μαθηματικής γνώσης. Η περιγραφή αυτή αποτελεί το περιεχόμενο του πιο σημαντικού έργου του Lakatos. Πρόκειται για το «Αποδείξεις και Ανασκευές» (*Proofs and Refutations*), που προέκυψε από την (δεύτερη) διδακτορική διατριβή του με τίτλο: *Essays on the Logic of Mathematical Discovery*. Σε αυτό, η εσωτερική ιστορία («*internal history*») της συγκρότησης της τυπικής μαθηματικής γνώσης συμπληρώνεται από την εξωτερική ιστορία («*external history*»), τα πραγματικά ιστορικά γεγονότα.

²⁴ Κατ' αρχήν υπάρχει η *διαισθητική αναγνώριση κάποιας κανονικότητας* ή ο εντοπισμός κάποιας σχέσης μεταξύ μεταβλητών που δεν μπορεί να εκφραστεί με τις ήδη υπάρχουσες θεωρίες. Ο στόχος στη συνέχεια είναι να «χτιστεί» μια τυπική θεωρία στην οποία η πρωτογενής- διαισθητική υπόθεση να *μπορεί να εκφραστεί ακριβώς* και να αποδειχθεί μέσω μιας παραγωγικής διαδικασίας. Κινούμενοι προς αυτό το στόχο, επιχειρούμε μια πρώτη «πρόχειρη» απόδειξη για την υπόθεσή μας, δηλαδή μια διαισθητική «επίδειξη» της γενικής ισχύος της. Αυτή η «επίδειξη» δίνει την ευκαιρία για κριτικές και αντιπαραδείγματα²⁴. Τα αντιπαραδείγματα μπορούν να χωριστούν σε δύο κύριες ομάδες: τοπικά και σφαιρικά αντιπαραδείγματα. Τοπικά είναι εκείνα που δεν αντικρούουν γενικά το υποψήφιο «θεώρημα», αντικρούουν μόνο ένα από τα κρυμμένα «λήμματα» που έχουμε περιλάβει ασυναίσθητα στη διατύπωση του θεωρήματός μας. Σε αυτή την περίπτωση αντικαθιστούμε το «ένοχο λήμμα» με έναν άλλο έναν που αποκλείει την ισχύ του αντιπαραδείγματος. Αντίθετα, τα σφαιρικά αντιπαραδείγματα, είναι αυτά που αντικρούουν το αρχικό μας θεώρημα. Εντούτοις, δεν απορρίπτουμε το θεώρημά μας και την απόδειξή

Αναφέραμε ήδη, ότι η ενσωμάτωση της ιστορίας των Μαθηματικών δίνοντας έμφαση στην ορθολογική εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών (δηλαδή υπό μορφή «*εσωτερικής ιστορίας*») υπονοεί έναν παραλληλισμό οντογένεσης και φυλογένεσης.

Σε μια τέτοια προσέγγιση, υιοθετείται επίσης η υπόθεση ότι *οι αντιδράσεις των μαθητών είναι μερικές φορές παρόμοιες με τις αντίστοιχες αντιδράσεις που παρατηρούνται στην ιστορία*. Ο παραλληλισμός μεταξύ της ιστορικής ανάπτυξης μιας έννοιας και της γνωστικής ανάπτυξης έχει ρητά ή έμμεσα εκφραστεί από πολλούς ερευνητές, με κυριότερους τους Piaget²⁵ και Garcia

του, αλλά *τροποποιούμε* τις σχετικές έννοιες ή τις κάνουμε πιο συγκεκριμένες. Για παράδειγμα, στη περίπτωση των πολυέδρων τροποποιούμε τον ορισμό του πολυέδρου, ώστε το θεώρημα σχετικά με αυτό που έχουμε διατυπώσει διαισθητικά να «ανθίσταται» των αντιπαραδειγμάτων. Κατ' αυτό τον τρόπο, μέσω της διαλεκτικής αλληλεπίδρασης των αποδείξεων, και των ανασκευών, δημιουργείται βαθμιαία ένα τυπικό σύστημα ακριβών εννοιών, βάσει των οποίων διαμορφώνεται μια νέα τυπική μαθηματική θεωρία. Στο τελευταίο στάδιο, το θεώρημα αποδεικνύεται στα πλαίσια της τυπικής θεωρίας. Για τη φορμαλιστική φιλοσοφία των Μαθηματικών, αυτό είναι και το μόνο που μας ενδιαφέρει, ενώ για τον Lakatos, αυτό είναι μια διαδικασία που ελάχιστα ενδιαφέρει.

²⁵ Ο Piaget έφερε επανάσταση στην ψυχολογία με την εισαγωγή τριών υποθέσεων:

- η γνώση συνεχίζει τη βιολογική προσαρμογή;
- κάθε μορφή γνώσης καταλήγει στην κατασκευή μιας δεδομένης τυπικής δομής, και
- κάθε γνωστική κατασκευή απαντά σε μια επιστημολογική ερώτηση που υποβάλλεται στην ιστορία της επιστήμης όπως και στην οντογένεση των ανθρώπινων όντων: φυλογένεση και οντογένεση είναι τυπικά και δυναμικά ισόμορφοι μηχανισμοί.

Οι Piaget και Garcia (1989) υποστήριξαν ότι υπάρχει μια σχέση μεταξύ των ψυχολογικών και ιστορικών εξελίξεων και ότι αυτή η σχέση πρέπει να εξεταστεί όχι από την άποψη του περιεχομένου, αλλά από την άποψη των μηχανισμών που μεσολαβούν τις μεταβάσεις από το ένα στάδιο στο άλλο. Κάθε στάδιο χαρακτηρισμένος από τον τρόπο με τον οποίο τα αντικείμενα γίνονται αντιληπτά και συσχετίζονται από το υποκείμενο. Σε ένα σημείο της Γενετικής Επιστημολογίας (1970) ο Piaget γράφει: *Η θεμελιώδης υπόθεση της γενετικής Επιστημολογίας είναι ότι υπάρχει ένας παραλληλισμός μεταξύ της προόδου που σημειώνονται στη λογική και ορθολογική οργάνωση της γνώσης (στην ιστορία της Επιστήμης) και των αντίστοιχων διαμορφωτικών ψυχολογικών διαδικασιών* (σελ. 13). Ο Thomas Kuhn μετέφερε την άποψη ότι «η γνωστική οντογένεση recapitulates την επιστημονική φυλογένεση» στην ιστορία και φιλοσοφία της Επιστήμης. (Kuhn 1977, σελ.

(1989). Οι Tall και Vinner (1981) επίσης υποστηρίζουν ότι πράγματι, οι αντιδράσεις των μαθητών είναι μερικές φορές παρόμοιες με τις αντιδράσεις που παρατηρούνται στους μαθηματικούς στην ιστορία και τέτοια αντιστοιχία μπορεί να είναι ένα πολύ σημαντικό εργαλείο για τους δασκάλους.

Η Sfard επίσης, γράφει αναφορικά με τη σχέση μεταξύ των ιστορικών και ψυχολογικών εξελίξεων. Δικαιολογεί τις υποτιθέμενες ομοιότητες μεταξύ φυλογένεσης και οντογένεσης με τον υπαινιγμό σε μερικές έμφυτες ιδιότητες της γνώσης που προκαλούν τους αμετάβλητους μηχανισμούς στους οποίους Piaget and Garcia αναφέρονται με την έννοια της «recapitulation»: *«Πράγματι, υπάρχουν καλοί λόγοι να αναμένουμε ότι, η φυλογένεση και οντογένεση των Μαθηματικών έχουν πολλές ομοιότητες. Αυτό οφείλεται πιθανώς στις έμφυτες ιδιότητες της ίδιας της γνώσης, λόγω της φύσης της σχέσης μεταξύ των διαφορετικών επιπέδων της... παρόμοια φαινόμενα μπορούν να επισημανθούν κατά την ιστορική ανάπτυξη της και κατά την αναδημιουργία της από τα άτομα.»* (Sfard, 1995, σελ. 15).

Στα πλαίσια αυτού του παραλληλισμού μεταξύ φυλογένεσης και οντογένεσης υπεισέρχεται με τρόπο θεμελιώδη η έννοια του «επιστημολογικού εμποδίου»²⁶, σε σημείο μάλιστα που για πολλούς ερευνητές ο σημαντικότερος στόχος της μελέτης της ιστορίας των Μαθηματικών είναι να αναζητήσουν τις θεμελιώδεις προβληματικές καταστάσεις που πρέπει να αναλυθούν προκειμένου να κατανοηθεί η υπάρχουσα γνώση, της οποίας η ανακάλυψη συνδέεται με τη

21).

Αντίθετα, ο Vygotsky υποστήριξε ότι η αλληλεπίδραση μεταξύ της κοινωνικοπολιτιστικής ιστορίας με την οντογενετική ανάπτυξη του υπό μελέτη καθιστά τη φυλογένεση έναν ιδιαίτερο και πολύ συγκεκριμένο γεγονός.

²⁶ Ο G. Brousseau ήταν εκείνος που πρώτος τη δεκαετία του -70 μετέφερε στη μαθηματική εκπαίδευση την έννοια του «επιστημολογικού εμποδίου» του G. Bachelard. Τα επιστημολογικά εμπόδια αντιμετωπίζονται ως μια εγγενής δυσκολία της γνώσης, που καθιστά αναπόφευκτη την επανεμφάνισή τους στην οντογένεση.

λύση τέτοιων προβληματικών καταστάσεων (Radford, Boero & Vasco 2000).

Οι Tzanakis, C. & Thomaidis(2004) επίσης, αναφέρουν ότι «στις τελευταίες δύο δεκαετίες μεταξύ εκείνων των ερευνητών που έχουν χρησιμοποιήσει την έννοια του «εμποδίου» στη μελέτη της διαδικασίας διδασκαλίας-μάθησης έχουν υπάρξει διάφορες συζητήσεις σχετικά με την ύπαρξη μιας αντιστοίχησης μεταξύ της γνώσης που ενεργεί ως εμπόδιο, που εμφανίζεται στους μαθητές και σε παρόμοιες αντιλήψεις που υιοθετήθηκαν από τους μαθηματικούς στο παρελθόν. Επιπλέον έχει γίνει πολλή συζήτηση σχετικά με το εάν κάποιος θα μπορούσε να λάβει υπόψη μια τέτοια αντιστοιχία στην έρευνα και την πρακτική της μαθηματικής εκπαίδευσης».

Οι συγκεκριμένοι ερευνητές αναφέρουν ότι οι απόψεις μεταξύ όσων ασχολούνται με το θέμα των επιστημολογικών εμποδίων διίστανται. Για παράδειγμα ο Brousseau υποστηρίζει ότι «δεν μπορούμε και δεν πρέπει να τα αποφύγουμε, επειδή αποτελούν ένα ουσιαστικό μέρος της νέας γνώσης που πρόκειται να διδαχθεί. Εντούτοις, ...αντιτίθεται σε μια αναπαραγωγή στην τάξη των ιστορικών καταστάσεων που οδήγησαν τους μαθηματικούς να υπερνικήσουν αυτά τα εμπόδια» (Brousseau 1983, σελ.178). Την ίδια άποψη διατυπώνει και η Herscowics, προειδοποιεί εντούτοις ότι «δεν πρέπει λάβουμε υπόψη αυτόν τον παραλληλισμό στην κυριολεξία, δεδομένου ότι το μαθησιακό περιβάλλον είναι σήμερα σημαντικά διαφορετικό από αυτό στο παρελθόν (Herscowics 1989, σελ. 82). Αντίθετα η άποψη της Artigue είναι υπέρ ενός «ακριβούς παραλληλισμού», διότι «πέρα από τα επιστημολογικά εμπόδια που προσδιορίστηκαν ήδη σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο, υπάρχουν μερικές διαδικασίες που παράγουν εμπόδια και ιστορικά και στη σημερινή διδασκαλία»(Artigue 1990, σελ. 202). Υπέρ ενός «ακριβούς παραλληλισμού» τάσσονται πολλοί ερευνητές, ενώ άλλοι (Thomaides 1997, Arcavi 2000) διατυπώνουν επιφυλάξεις «κυρίως επειδή οι σύγχρονοι όροι κάτω από τους οποίους ένα άτομο, ή μια ομάδα μαθαίνει μια έννοια είναι αρκετά διαφορετικοί από εκείνους κάτω από τους οποίους οι μαθηματικοί στο παρελθόν έχουν συλλάβει, έχουν διατυπώσει και έχουν διαμορφώσει την εν λόγω

Ανακεφαλαιώνοντας, η ενσωμάτωση της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών μπορεί να γίνει μέσω δυο προσεγγίσεων, οι οποίες, κατά την άποψή μας πρέπει να συνυπάρξουν στα πλαίσια της διδασκαλίας των Μαθηματικών.

Μέσω μιας προσέγγισης που χαρακτηρίζεται από τις υποθέσεις:

- της ύπαρξης μιας αντικειμενικά αποδεκτής μαθηματικής γνώσης που αντιπροσωπεύει την καλύτερη λύση των σχετικών προβλημάτων,
- της επανεμφάνιση στην διδασκαλία-μάθηση, των ίδιων εμποδίων που αντιμετωπίστηκαν ιστορικά από τους μαθηματικούς

Μέσω μιας προσέγγισης που βασίζεται στην άποψη ότι η γνώση δεν χτίζεται ατομικά, αλλά σε ένα ευρύτερο κοινωνικό πλαίσιο²⁷: κάθε πολιτισμός καθορίζει το δικό του τρόπο ορθολογικής σκέψης και μέσα σε αυτά τα πλαίσια και τις δυνατότητες προκύπτει και αναπτύσσεται ένα ιδιαίτερο ύφος μαθηματικής σκέψης.

Αυτή η δεύτερη προσέγγιση χαρακτηρίζεται από τις υποθέσεις ότι:

- τα μαθηματικά προβλήματα λύνονται μέσα στα κοινωνικοπολιτιστικά πλαίσια των εξεταζόμενων περιόδων

²⁷ Οι πρόσφατες εξελίξεις στην κοινωνιολογία της γνώσης αμφισβητούν την θεωρία του recapitulationism που στηρίζεται στην υπόθεση της ύπαρξης ενός υποκειμένου που δημιουργεί αφαιρετικές δομές ανεξαρτήτων κοινωνικού και πολιτισμικού πλαισίου. Οι σύγχρονες κοινωνικοϊστορικές θεωρήσεις της μάθησης των Μαθηματικών, υποστηρίζουν ότι: «Η ανάπτυξη της γνώσης δεν πραγματοποιείται στα πλαίσια της φυσικής εξέλιξης, αλλά στα πλαίσια της κοινωνικοπολιτιστικής ανάπτυξης...η γνώση είναι απαραίτητως κοινωνική γνώση» Μ. Otte (1994, σελ. 309). Έτσι, « Αντί να εστιάζουμε στο άτομο κατά τη μελέτη της διαδικασίας απόκτησης γνώσης και άλλων μορφών διανοητικών διαδικασιών, πρέπει να συνειδητοποιήσουμε ότι οι βασικές πτυχές της διανοητικής λειτουργίας μπορούν να γίνουν κατανοητές μόνο με την εξέταση των κοινωνικών πλαισίων στα οποία αυτές ενσωματώνονται »Wertsch and Toma (1995, σελ. 159)

• η γνώση κατασκευάζεται κοινωνικά. Η κατασκευή της μαθηματικής γνώσης είναι μια διαδικασία της οποίας το τελικό προϊόν προκύπτει μέσω διαπραγματεύσεων του νοήματος. Η μελέτη της ιστορίας μας βοηθά να κατανοήσουμε το περιεχόμενο αυτών των διαπραγματεύσεων και τις πολιτισμικές αντιλήψεις που βρίσκονται πίσω από τα τελικώς υιοθετημένα νοήματα. Αυτή η προσέγγιση μπορεί να μας βοηθήσει να κατανοήσουμε καλύτερα τον τρόπο σκέψης των μαθητών μας και να σχεδιάσουμε καλύτερα τη διδασκαλία μας.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Arcavi, A., Bruckheimer, M. (2000), Didactical uses of primary sources from the History of Mathematics, *Themes in Education*, 1 (1), 55-74

Artigue, M. (1990), Obstacles as objects of comparative studies in Mathematics and in Physics, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 22, 200-204

Bloor, D. (1976), *Knowledge and Social Imagery*, London, Henley and Boston: Routledge & Kegan

Brandford, B. (1924), *A Study of Mathematical Education*, Clarendon Press, Oxford

Brousseau, G. (1983), Les obstacles épistémologiques et les problèmes in mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198

Butterfield, H. (1931/1951), *The Whig Interpretation of History*, Charles Scribner's Sons, New York

D'Ambrosio, U. (1996), Ethnomathematics: An explanation. In R. Calinger (ed.), *Vita mathematica: Historical research and integration with teaching*, 245 – 250, Washington, DC: The Mathematical Association of America

D'Ambrosio, U. (2001), What is ethnomathematics, and how can it help children in schools? *Teaching Children Mathematics*, 7(6), 308 – 310

Dubinsky, E. (1994), Comments on James Kaput's Chapter, in: *Mathematical Thinking and Problem-Solving*, A. H. Schoenfeld (ed.),

Hillsdale, New Jersey / Hove, UK: Lawrence Erlbaum Associates, 157-171

- Elkana, Y. (1978), Two-Tier-Thinking: Philosophical Realism and Historical Relativism, *Social Studies of Science* **8**, 309–326
- Estrada, M. F. (1993), A história no ensino da matemática [History in the teaching of mathematics], *Educação e Matemática*, 27(3), 17 – 20
- Fauvel, J. (1991), Using History in Mathematics Education, *For the Learning of Mathematics*, 11(2), 3–6.
- Fauvel, J. & van Maanen, J. (2000), *History in mathematics education: the ICMI Study*, Kluwer, Dordrecht, 241-243
- Fleck, L. (1936), The Problem of Epistemology, in Cohen, R.S. & Schnelle, T. (ed.): *Cognition and Fact - Materials on Ludwik Fleck*, Reidel, Dordrecht 1986.
- Freudenthal, H. (1973), *Mathematics as an Educational Task*, D. Reidel, Dordrecht, Holland.
- Fried, M. (2001), Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? *Science & Education* **10**, 391–408
- Furinghetti, F. (1997), History of mathematics, mathematics education, school practice: Case studies in linking different domains, *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 55 – 61
- Furinghetti, F. (2000), The history of mathematics as a coupling link between secondary and university teaching, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 43 – 51.
- Grugnetti, L. & Rogers, L. (2000), Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues, in Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds.), *History in Mathematics Education*, 39-62, Dordrecht, Kluwer.
- Heintz, B. (2000), *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*, Springer, New York.
- Herscovics, N. (1989), Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra, in S. Wagner & C. Kieran (eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, 60-86 National Council of Teachers of Mathematics, Reston
- Katz, V.J. (1993), Using the History of Calculus to Teach Calculus, *Science & Education* **2**, 243– 249

- Kragh, H.(1987), *An Introduction to the Historiography of Science*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Kuhn, T. (1971), Notes on Lakatos, in R. C. Buck and R. S. Cohen (ed.): *P.S.A. 1970 Boston Studies in the Philosophy of Science*, 8, 37-146
- Kuhn, T. (1977), Concepts of Cause in the Development of Physics, in *The Essential Tension*, University of Chicago Press, Chicago, 21–30
- Lakatos, I.(1976), *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, Cambridge
- Lakatos,I.(1971), History of Science and its Rational Reconstructions, in R. C. Buck and R. S. Cohen (Eds.): *P.S.A. 1970: Boston Studies on the Philosophy of Science* 8, Reprinted in Lakatos 1978.
- Otte, M. (1994), Historiographical Trends in the Social History of Mathematics and Science, in: *Trends in the Historiography of Sciences*, K. Gavroglu *et al.* (ed.), Kluwer Academic Publishers,295-315
- Piaget, J. & Garcia, R. (1989), *Psychogenesis and the History of Science*, Columbia University Press, New York
- Poincaré, H. (1908), *Science et méthode*, Flammarion, Paris. Authorised English translation by G. B. Halstead, *The Foundations of Science*, The Science Press, Lancaster, Pennsylvania, 546-854
- Polya, G. (1962), The teaching of mathematics and the biogenetic law, in I. J. Good (ed.), *The Scientist Speculates*, Heinemann, London, 352-356
- Radford, L.(1997), On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio- Cultural History of Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26-33
- Radford, L., Boero, P. & Vasco, C. (2000), Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics, Fauvel, J. & van Maanen, J. (ed.), *History in Mathematics Education*, 162-167, Kluwer, Dordrecht
- Sfard, A. (1995), The Development of Algebra: Confronting Historical and Psychological Perspectives, *Journal of Mathematical Behaviour*, 14, p.15
- Sierpinska, A. (1996), The diachronic dimension in research of understanding in mathematics – usefulness and limitations of the concept of epistemological obstacle. In H. Jahnke, N, Knoche, & M. Otte (ed.), *History of mathematics and education: Ideas and experiences* , 289 – 318, Gottingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

- Stander, D.(1991), The use of the history of mathematics in teaching', in P. Ernest (ed.), *Mathematics Teaching, The State of the Art*, The Falmer Press, New York, 241-246
- Swetz, F. (1984). Seeking relevance? Try the history of mathematics, *Mathematics Teacher*, 77(1), 54 – 62
- Tall, D. & Vinner, S. (1981), Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-69
- Thomaidis, Y. (1991), *Historical digressions in Greek geometry lessons*, For the Learning of Mathematics, 11(2), 37 – 43
- Thomaidis Y. (1997), Is a 'historical parallelism' possible in the teaching an learning of mathematical concepts?, *Research Perspectives on the Didactics of Mathematics*, **3**, 3-38 (in Greek).
- Tzanakis, C.(2002), *On the relation between Mathematics and Physics in undergraduate teaching*, 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics , Crete
- Tzanakis, C. & Thomaidis, Y. (2000). Integrating the close historical development of mathematics and physics in mathematics education: Some methodological and epistemological remarks, *For the Learning of Mathematics*, 20(1), 44 – 55
- Tzanakis, C. & Thomaidis, Y. (2004), Historical evolution and students' conception of the order relation on the number line: the notion of historical "parallelism" revisited, ICME, 6-10 July
- Van Amerom, B.A. (2003), Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early Algebra, *Educational Studies in Mathematics*, 54, 1, 63 - 75
- Wertsch, J., & Toma, C. (1995), Discourse and learning in the classroom: A sociocultural approach. In L. P. Steffe, & G. Gale, (ed.), *Constructivism in education*, 159-174). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Wilson, P. S. & Chauvot, J. B. (2000), Who? How? What? A strategy for using history to teach mathematics, *Mathematics Teacher*, 93(8), 642 – 645

Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: ΔΥΟ ΤΡΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΑ ΠΟΥ ΞΕΡΩ ΓΙ' ΑΥΤΗΝ

Κώστας Χατζηκυριάκου

Π.Τ.Δ.Ε Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Όπως διαβάζουμε στην πρόσκληση για το παρόν 5^ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών, η διδακτική αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών «τα τελευταία χρόνια [. .] έχει τεθεί με ιδιαίτερη έμφαση στο προσκήνιο του προβληματισμού των ερευνητών». Ωστόσο τόσο η πρόταση για τη διδακτική αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών όσο και τα κύρια επιχειρήματα υπέρ της, που εν συντομία αναφέρονται στην πρόσκληση, δεν είναι νέα. Η πρόταση αυτή όχι μόνον επανέρχεται από τότε που η μαθηματική πρακτική αποκτά λίγο ως πολύ ορισμένο, καταγραμμένο και μελετημένο παρελθόν, δηλαδή ιστορία²⁸, αλλά και συντελεί στη διαμόρφωση του γνωστικού πεδίου της ιστορίας των μαθηματικών. Λόγου χάρη, ήδη το 1714 ο Gottfried Wilhelm Leibniz γράφει:

“Δεν είναι μόνον ότι η ιστορία μπορεί να αποδώσει στον καθένα ό,τι του αξίζει και έτσι οι άλλοι μπορεί να αποβλέπουν σε παρόμοια εκτίμηση, αλλά και η ευρετική τέχνη θα προαχθεί και η μέθοδος της θα γίνει γνωστή μέσω παραδειγμάτων”.²⁹

²⁸ Για τη διάκριση μεταξύ του παρελθόντος μιας επιστήμης και της ιστορίας της βλ. Κώστας Γαβρόγλου, *Το παρελθόν των επιστημών ως ιστορία*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2004.

²⁹ Όπως παρατίθεται στο Joseph Dauben, Christoph J. Scriba, επιμ., *Writing the History of Mathematics: Its Historical Development*, International Commission on the History of Mathematics, Birkhäuser, 2002, σ. 111.

Η παρούσα εργασία είναι μια σύντομη, επιλεκτική, δομημένη γύρω από κάποιες λέξεις και έννοιες-κλειδιά επισκόπηση του πεδίου της ιστορίας των μαθηματικών. Από το πολύπλοκο υφαντό της ιστοριογραφίας των μαθηματικών ξετυλίγω ορισμένα νήματα που αντιστοιχούν σε φιλοσοφικά ρεύματα και κοινωνικά περιβάλλοντα στο πλαίσιο των οποίων –αλλά ενίοτε και σε αντιπαράθεση με αυτά– αναπτύχθηκαν οι ποικίλες ιστοριογραφικές παραδόσεις των μαθηματικών που δημιουργήσαν έτσι το αναγνωρίσιμο και αναγνωρισμένο σήμερα γνωστικό πεδίο της ιστορίας των μαθηματικών, η διδακτική αξιοποίηση του οποίου αποτελεί πρόκληση. Εργαλείο μου στην εργασία αυτή θα είναι το σημαντικό, πρόσφατο βιβλίο *Writing the History of Mathematics: Its Historical Development*³⁰.

Διαφωτισμός. Από τη σκοπιά της *συνέχειας* τις απαρχές της μαθηματικής ιστοριογραφίας είναι δυνατόν να τις εντοπίσουμε στον αρχαίο ελληνικό πολιτισμό, εν προκειμένω στη λεγόμενη *Ευδήμια Σύνοψη* που περιέχεται *Σχολιασμό του Ευκλείδη* από τον Πρόκλο, ενώ στη συλλογή, τη μετάφραση και έκδοση μαθηματικών έργων στην Αναγέννηση μπορούμε να δούμε μια σημαντική φάση της συγκρότησής της. Από τη σκοπιά της *ασυνέχειας* όμως την ιδρυτική εποχή της ιστορίας των μαθηματικών θα την εντοπίζαμε στον αιώνα των Φώτων, στο ρεύμα των ιδεών που γνωρίζουμε ως

³⁰ Joseph Dauben, Christoph J. Scriba, επιμ., *Writing the History of Mathematics: Its Historical Development*, International Commission on the History of Mathematics, Birkhäuser, 2002. Στη συγγραφή του συλλογικού αυτού έργου συνεργάστηκαν περισσότεροι από 40 ιστορικοί των μαθηματικών για να γράψουν μian εκδοχή της ιστορίας των μαθηματικών σε περισσότερες από 25 χώρες (η ελληνίδα συνεργάτης είναι η Χριστίνα Φίλη που αναπτύσσει τις τύχες της ιστορίας των μαθηματικών στον ελληνικό χώρο). Η ιδέα για το έργο αυτό γεννήθηκε σε μία από τις συναντήσεις των ιστορικών των μαθηματικών στο Oberwolfach στις αρχές της δεκαετίας του '90, άρχισε να παίρνει μορφή στη Σαραγόσα το 1993 και το έργο ολοκληρώθηκε το 2001. Το βιβλίο αποτελείται από τρία μέρη: 1) Ιστοριογραφίες των μαθηματικών κατά χώρα 2) Βιογραφίες σημαντικών ιστορικών των μαθηματικών 3) Εκτενή βιβλιογραφία.

Διαφωτισμό.

Πράγματι, ένα από τα θεμελιώδη και ίσως ιδρυτικά κείμενα της μοντέρνας ιστορίας των μαθηματικών είναι το *Histoire des mathématiques dans laquelle on rend compte de leur progres depuis l' origine jusqu' à nos jours* (1758) του Jean Etienne Montucla, ο οποίος γράφει:

«Ένα από τα πιο αξιόλογα θεάματα που ενδιαφέρει τη φιλοσοφική ματιά είναι αναμφίβολα αυτό της ανάπτυξης του ανθρωπίνου πνεύματος και των διαφορετικών κλάδων της γνώσης του. [. . .] Οι βιβλιοθήκες μας είναι γεμάτες με απεραντολόγους αφηγητές πολιορκιών, μαχών, επαναστάσεων· πόσες ζωές υποτιθέμενων ηρώων δεν παρουσιάζονται μόνον με την ποσότητα του αίματος που άφησαν στο διάβα τους; Είναι σχεδόν αδύνατο να βρει κανείς, όπως παρατηρεί ο Πλίνιος με λύπη, συγγραφείς που ανέλαβαν να διασώσουν για τους μεταγενέστερους τα ονόματα εκείνων των ευεργετών της ανθρωπότητας, ορισμένοι από τους οποίους εργάστηκαν για να καταργήσουν τα βάρη της με χρήσιμες εφευρέσεις, ενώ άλλοι επέκτειναν τις δυνατότητες της διάνοιας με τη σκέψη και την έρευνά τους. Ακόμη πιο σπάνια βρίσκει κανείς κάποιον που σκέφτηκε να παρουσιάσει την πρόοδο αυτών των εφευρέσεων ή να ακολουθήσει την πορεία και την ανάπτυξη του ανθρωπίνου πνεύματος. Θα ήταν λιγότερο ενδιαφέρουσα μια τέτοια εικόνα από τις τρομερές και αιματηρές σκηνές που δημιουργούν η φιλοδοξία και η κακότητα της ανθρωπότητας;»³¹. (Οι υπογραμμίσεις στο παραπάνω απόσπασμα είναι δικές μου και σκοπό έχουν να αναδείξουν τις λέξεις κλειδιά του διαφωτιστικού προτάγματος).

Ο Montucla, που χαρακτηριστικά σπούδασε νομικά, εμπνεόμενος από τον εγκυκλοπαιδικό διαφωτισμό, επιλέγει να αφηγηθεί την ιστορία των μαθηματικών, επειδή πιστεύει ότι τα μαθηματικά είναι η πλέον βέβαιη επιστήμη στην αναζήτηση της αλήθειας και η

³¹ Στο ίδιο, σ. 10.

ανάπτυξή της είναι συνεχής, η πρόοδός της σταθερή. Το έργο αυτό είναι μια ιστορία μαθηματικών ιδεών και προβλημάτων, ακολουθεί χρονολογική σειρά στο μεγαλύτερο μέρος, αλλά αφηγείται χωριστά την ιστορία ορισμένων βασικών μαθηματικών προβλημάτων, όπως είναι ο διπλασιασμός του κύβου· μελετά χωριστά τα ελληνικά, τα αραβικά και τα μαθηματικά του δυτικού μεσαίωνα, αφιερώνει μεγάλο μέρος στον 17^ο αιώνα και ένα σημάδι της ιστορικής ωριμότητάς του είναι ότι εκθέτει κριτικά τη διαμάχη Νεύτωνα – Λάιμπνιτς, γύρω από το ποιος ανακάλυψε πρώτος τον διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό.

Θετικισμός. Όπως συνέβη και με την ιστορία των φυσικών επιστημών, το άλλο διανοητικό κίνημα που υπήρξε καθοριστικό στη συγκρότηση του πεδίου της ιστορίας των μαθηματικών είναι ο θετικισμός³². Στη Γαλλία ο προοδευτισμός του διαφωτισμού ενσωματώνεται στον θετικισμό του Κοντ (Auguste Comte), ο οποίος στο *Cours de philosophie positive* (1830-42) εισάγει το τριαδικό σχήμα ανάπτυξης του ανθρωπίνου πνεύματος που προοδεύει από το θεολογικό στάδιο, μέσω του μεταφυσικού (ή αφαιρετικού) στο θετικιστικό. Έτσι ο Maximilien Marie έγραψε, ύστερα από προτροπή του ίδιου του Comte, τη δεκάτομη *Histoire des sciences mathématiques et physiques* (1883-87). Σημαντική ωστόσο στάθηκε η επιρροή του θετικισμού στον Paul Tannery (1843-1904) μια από τις κεντρικές προσωπικότητες της ιστορίας των μαθηματικών, με βασικό ρόλο στη συγκρότηση της ιστορίας των μαθηματικών σε αυτόνομο, και διεθνοποιημένο γνωστικό πεδίο. Γράφει ο Tannery:

«[. . .] Υπάρχει μόνον μια φιλοσοφία που όντως αφομοίωσα, και αυτή είναι η φιλοσοφία του Auguste Comte, στην οποία είμαι αφοσιωμένος από τα είκοσι δύο μου· η επιρροή του πάνω μου με ενέπνευσε στις μελέτες μου, που σκοπός τους ήταν να

³² Βλ. Κώστας Γαβρόγλου, Το παρελθόν των επιστημών..., ό.π.

επιβεβαιώσουν και να αποσαφηνίσουν τις ιδέες του για την ιστορία των επιστημών»³³.

Ο Tanerly ήταν επαγγελματίας μηχανικός, αλλά και γλωσσομαθής και ελληνιστής. Δύο βασικά ερευνητικά ενδιαφέροντα του ήταν τα ελληνικά μαθηματικά (εισήγαγε την έννοια της γεωμετρικής αλγεβρας, δηλαδή την αλγεβρική ερμηνεία της γεωμετρικής προσέγγισης των αρχαιοελληνικών μαθηματικών, που στη συνέχεια αμφισβητήθηκε έντονα) και τα μαθηματικά του 17^{ου} αιώνα. Ο Tanerly παραδειγματικά εισάγει μέθοδο στο πεδίο της ιστορίας των μαθηματικών: την αυστηρή τεκμηρίωση και κριτική μελέτη των πηγών με τη συνδρομή της φιλολογικής επιστήμης· την ακριβή ανασυγκρότηση των μαθηματικών τεχνικών του παρελθόντος· τις επιμέρους μελέτες πριν την απόπειρα σύνθεσης· τη διεθνή συνεργασία. Υποστηρίζει ότι ο ιστορικός μιας επιστήμης πρέπει να κατέχει πολύ καλά την επιστήμη, την ιστορία της οποίας μελετά, ή τουλάχιστον να κατανοεί σε βάθος τα προβλήματα που τέθηκαν και τις λύσεις που δόθηκαν. Ωστόσο,

«[. . .] δεν αρκεί να είναι μόνον επιστήμονας. Πρέπει πάνω από όλα να είναι αφοσιωμένος στην ιστορία, δηλαδή να έχει καλή ιστορική αίσθηση· επιβάλλεται να αναπτύξει μια τέτοια ιστορική ευαισθησία που διαφέρει ουσιαστικά από την επιστημονική· είναι αναγκαίο να αποκτήσει επίσης ιδιαίτερες ικανότητες, πρόσθετα ταλέντα που είναι απαραίτητα στην ιστορία, αν και είναι απολύτως άχρηστα στον επιστήμονα που ενδιαφέρεται μόνον για την πρόοδο της επιστήμης»³⁴.

Ο Tannery επέμενε στην αυτονομία του πεδίου της ιστορίας των μαθηματικών τόσο από τα μαθηματικά, όσο και από τη φιλοσοφία («εφαρμόζουμε ιστορικές και όχι φιλοσοφικές μεθόδους» έγραφε)

³³ Όπως παρατίθεται στο Writing the History. . . , ό.π., σ. 25.

³⁴ Όπως παρατίθεται στο Writing the History. . . , ό.π., σ. 27.

και υποστήριξε την ύπαρξη χωριστής συνεδρίας για την ιστορία της επιστήμης στα Συνέδρια της Συγκριτικής Ιστορίας.

Ο Tannery πίστευε στη σύνδεση και τη σύνθεση των ιστοριών επιμέρους επιστημών (*histoires particulières*) σε μια γενική ιστορία της επιστήμης που θα «συμπλήρωνε την εικόνα για την πνευματική ανάπτυξη ενός πολιτισμού ή μιας εποχής». Πρόθυμο συνεργάτη σε αυτή την αντίληψη βρήκε τον Henri Berr (1863-1954) που του προσέφερε τις σελίδες του περιοδικού του *Revue de Synthèse historique*, κίνηση που είχε μεγάλη σημασία για την εξέλιξη της ιστορίας των επιστημών στη Γαλλία, μολονότι η ιστορία αυτή τελικά δεν είχε τα χαρακτηριστικά στα οποία πίστευε ο Tannery, λόγω της στενής διασύνδεσής τους με την επιστημολογία. Το σημαντικό έργο λ.χ. των κατοπινών του Cavaillès, Koyré, Desanti, βλέπει στην ιστορία των επιστημών και των μαθηματικών ένα εργαστήριο παραδειγμάτων για τη φιλοσοφία.

Ιστορικισμός. Όπως και στη συγκρότηση οποιουδήποτε κλάδου της σύγχρονης επαγγελματικής ιστορίας, ο ιστορικισμός υπήρξε καθοριστικός στην ωρίμανση της ιστορίας των μαθηματικών.

Ο Georg Heinrich Ferdinand Nesselmann (που είχε σπουδάσει μαθηματικά, αραβικά και σανσκριτικά) και ο Arthur Arneth (καθηγητής μαθηματικών και φυσικής) γράφουν την εποχή που στη Γερμανία ανθούν οι ιδέες της *kulturphilosophische* του Herder, οι ιδέες για την ιστορία των Neibuhr και Ranke και υλοποιούνται οι εκπαιδευτικές ιδέες του Humbolt. Έτσι, το 1842, ο Nesselmann (1811-1881), γράφει στην εισαγωγή του *Versuch einer Kritischen Geschichte der Algebra: Erster Theil: Die Algebra der Griechen*:

«Δεν ήταν πρόθεσή μου να συγκεντρώσω μάζες από ιστορικές πληροφορίες από παλαιότερα έργα ιστορίας και να τα προσφέρω στο κοινό ως ευχάριστο ανάγνωσμα Ακόμη λιγότερο σχεδίαζα να συγκεντρώσω βιαστικά κακοκλωνεμένα γεγονότα, τα οποία να διαμορφώσω και να διατάξω πάνω στο προκρούστειο κρεβάτι κάποιου φιλοσοφικού συστήματος. [. . .] Σκοπός μου ήταν να

γράψω κριτική ιστορία. Ήθελα να μελετήσω την ιστορία της άλγεβρας όχι όπως διδάσκεται παραδοσιακά, αλλά όπως προκύπτει από τη μακρά και συνειδητή μελέτη των πηγών. Αλλά το βασικό κριτικό χαρακτηριστικό είναι η αμφιβολία. Γι' αυτό, δεν θα αποδεχθώ κανένα ιστορικό γεγονός προηγούμενων έργων ιστορίας, προτού το μελετήσω ο ίδιος και πεισιτώ για την αλήθειά του και την εγκυρότητά του. . .»³⁵.

Παράλληλα με την εξαντλητική μελέτη των πηγών, τάση που επικρατεί στη Γερμανία σε όλο τον υπόλοιπο 19^ο αιώνα και συνοδεύεται από αμέτρητες κριτικές εκδόσεις, τον ενδιαφέρει η πολιτισμική πλαισίωση των μαθηματικών που μελετά. Έτσι γράφει,

«Ένα από τα δυσκολότερα καθήκοντα του ιστορικού είναι να κατανοήσει και να περιγράψει το εννοιακό υπόβαθρο όχι μόνον καθενός συγγραφέα αλλά και κάθε περιόδου στην ατομική της ιδιαιτερότητα, και την ίδια στιγμή να έχει στον νου του τη μοντέρνα σκοπιά, χωρίς να φέρνει τον παλαιότερο συγγραφέα στην τωρινή εποχή, βγάζοντάς τον από την ιδιαίτερη σφαίρα της δικής του σκέψης»³⁶.

Σε αντιδιαστολή με τη βασανιστική προσέγγιση στις πηγές του Nesselmann, ο Arneth (1802-58), που επηρεάστηκε και από τον φιλόσοφο του πολιτισμού Eduard M. Röth, θέτει ευρύτερα και πιο συμπαντικά ερωτήματα. Λ.χ. γιατί σε διαφορετικές εποχές, διαφορετικοί λαοί δημιουργούν διαφορετικού ύφους μαθηματικά (το παράδειγμα που έχει στον νου του είναι οι Έλληνες και οι Ινδοί). Στην εισαγωγή του έργου του, *Die Geschichte der reinen Mathematik in ihrer Beziehung zur Geschichte der Entwicklung des menschlichen Geistes* (1852), υποστηρίζει ότι όταν οι σίγουρες πληροφορίες για την ιστορία των μαθηματικών αρχαίων εποχών δεν είναι δυνατές, ο ιστορικός πρέπει να συναγάγει τις

³⁵ Όπως παρατίθεται στο Writing the History. . . , ό.π., σ. 115.

³⁶ Όπως παρατίθεται στο Writing the History. . . , ό.π., σ. 115.

πληροφορίες που ελλείπουν από τους ιστορικούς νόμους που με τη σειρά τους πρέπει να συνάγονται από την πνευματική ζωή του λαού συνολικά. Μια πλήρης ιστορία των μαθηματικών θα περιέγραφε την πορεία που οδήγησε στην αφαιρετική σκέψη, και επομένως θα ήταν όντως «ιστορία της ανάπτυξης του ανθρώπινου νου». Ο Arneth πίστευε ότι γενικοί νόμοι και συνθήκες προσδιορίζουν την ανάπτυξη του κόσμου και του ανθρώπινου είδους. Μια από αυτές τις γενικές αρχές είναι ότι η αντιπαράθεση των αντιθέτων είναι απαραίτητη για τη δημιουργία μιας τάξης υψηλότερης (Hegel) και την αρχή αυτή την εφάρμοσε στο αριθμητικό ύφος των ινδών και το γεωμετρικό των ελλήνων, που γι' αυτόν ήταν ανάγκη και μπορούσαν να συνδεθούν μόνον σε ένα άλλο πολιτισμικό πλαίσιο για να δώσουν κάτι ισχυρότερο.

Επηρεασμένος από τον Rōth και τον Arneth είναι και ένας από τους σπουδαιότερους ιστορικούς των μαθηματικών, ο Moritz Cantor, συγγραφέας του μνημειώδους (παρά τα λάθη του) *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, που διέπεται από την πίστη του στην ουσιαστική ενότητα του ανθρώπινου πνεύματος που κρύβεται πίσω από την πολιτισμική διαφοροποίηση.

Ωστόσο για τον σουηδό Eneström (1852-1923), το έργο του Cantor δείχνει ότι η συγγραφή ενός τέτοιου έργου δεν είναι εφικτή, αν σκοπός του ιστορικού των μαθηματικών είναι η τελείως «επαγγελματική έκθεση της ιστορίας των μαθηματικών» που θα κινούσε το ενδιαφέρον και της κοινότητας των ενεργών μαθηματικών.

Εθνικισμός. Βασικό γνώρισμα του πεδίου της ιστορίας των μαθηματικών είναι ότι έως πρόσφατα συγκροτείται μέσω εθνικών ιστοριογραφικών παραδόσεων, με άλλα λόγια ο εθνικισμός ως νεωτερικό πολιτικό κίνημα και ο πατριωτισμός ως εθνική αξία έπαιξαν τον ρόλο τους στη συγκρότηση του πεδίου της ιστορίας των μαθηματικών. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα της ισχυρής και γόνιμης ιταλικής ιστοριογραφικής σχολής.

Στα τέλη του 18^{ου} αιώνα (1772-95) δημοσιεύεται η ενδεκάτομη *Storia della letteratura italiana* του πρώην Ιησουΐτη Girolamo Tiraboschi (1731-94) που υποστήριζε ότι «η ιστορία της γραμματείας μιας χώρας είναι η ιστορία των λαών που έζησαν σε αυτήν, είτε αυτή ήταν η αρχαία πατρίδα τους είτε ήρθαν από αλλού». Βάσει αυτής της αντίληψης με πολύ υπερηφάνεια αναφερόταν στους ιταλούς μαθηματικούς Πυθαγόρα και Αρχιμήδη.

Ο μηχανικός Antonio Lombardi (1768-1847), βοηθός του Tiraboschi, στον πρώτο τόμο της τετράτομης *Storia della letteratura italiana del secolo XVIII* (1827-1830) αφιερώνει 170 σελίδες στην ιστορία των μαθηματικών στην Ιταλία από τον Saccheri (1667-1733) ως τον Collalto (που πέθανε το 1820) και εθνικιστικά εμπνεόμενος γράφει ότι σκοπεύει να «αποδώσει στους Ιταλούς την τιμή που τους πρέπει».

Η πρώτη συγκεντρωτική ιστορία των ιταλικών μαθηματικών, *Histoire des sciences mathématiques en Italie depuis la Renaissance des lettres jusqu' à la fin du XVIIe siècle*, γράφεται το Παρίσι, στα γαλλικά, από τον υπερεκτιμημένο στην εποχή του ιταλό μαθηματικό και βιβλιομανή Guglielmo Libri (1803-1869), τον οποίον χωρίζει από τον γεννημένο στο Τορίνο Lagrange όχι μόνον το χάσμα ανάμεσα στα μαθηματικά ταλέντα τους και η διαφορετική τους αντίληψη για την ιστορία των μαθηματικών (*L'histoire ce sont les faits* έγραφε ο Libri, τις «ουιγγιανές» ανασυγκροτήσεις καλλιεργούσε ο άλλος), αλλά και ο ιταλικός εθνικισμός. Το βιβλίο του Libri, που διατυμπάνιζε τον όχι και τόσο μεγάλο ρόλο του στον αγώνα για την ιταλική ανεξαρτησία, τόνωσε την εθνική υπερηφάνεια των ιταλών επιστημόνων της εποχής. Ο Libri αποδίδει ορθά στον πιζανό Fibonacci, την εισαγωγή του ινδοαραβικού συστήματος αναπαράστασης με αξία θέσης και βάση το 10 στη Δύση, και αρχίζει έντονη διαμάχη με τον Chasles που υποστηρίζει ότι οι Ινδοί πήραν την ιδέα αυτή από τους Έλληνες (βασίζόμενος σε λανθασμένη ερμηνεία κειμένου του Βοήθιου). Συντέλεσε και αυτός στην ανάδειξη του Γαλιλαίου ως

θεμελιωτή της νεώτερης επιστήμης, και του Νταβίντσι ως επιστήμονα. Ειδικά η περίπτωση του Γαλιλαίου έχει μεγάλη σημασία την εποχή του Risorgimento, καθώς το Βατικανό αντιδρούσε στην πολιτική ενοποίηση της Ιταλίας και στην αναγνώριση της Ρώμης ως πρωτεύουσας του νέου κράτους. Οι μαθηματικοί της εποχής του Risorgimento συντέλεσαν στη δημιουργία μιας ιταλικής σχολής των μαθηματικών και στην ανακάλυψη μιας λησμονημένης ιταλικής παράδοσης στα μαθηματικά. Ένας από αυτούς ο Briochi (1824-1897) σε εργασία του για την απαλείφουσα του Malfatti, ιταλού μαθηματικού του 18^{ου} αιώνα, γράφει:

«Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι μια ιστορική εργασία για τη μαθηματική πρόοδο, στην οποία δίνονται στοιχεία για τη μεγάλη συνεισφορά που είχαν οι Ιταλοί, δεν θα ήταν μόνον επιστημονικά χρήσιμη, αλλά θα μπορούσε να θεωρηθεί και ως ξεπλήρωση ενός χρέους ευγνωμοσύνης προς την Ιταλία, που ξανακέρδισε τη θέση της ως έθνος»³⁷.

Πατριωτικά για τον ίδιο, αλλά μάλλον εθνικιστικά, εμπνεόμενος εξάλλου ο μαθηματικός Bortolotti (1866-1947), ακούραστα μελετά το έργο του Ruffini και άλλων ιταλών του μεσαίωνα και της αναγέννησης για να επιλύσει συνήθως ζητήματα προτεραιότητας και, όπως γράφει ο ίδιος το 1931, να «αποδώσει στην Ιταλία τη δόξα των μαθηματικών της, όχι από άθλιο εθνικιστικό πνεύμα αλλά από αγνή αγάπη για την αλήθεια και τη δικαιοσύνη»³⁸.

Οι εθνικές αφυπνίσεις σχεδόν παντού άλλωστε οδηγούν στη μελέτη σημαντικών μαθηματικών της παράδοσης που εθνικοποιείται (λόγου χάρη, ο Abel στη Σκανδιναβία, ο Simon Stevin στην Ολλανδία, ο Bolzano στην Τσεχία, η «νευτωνίτιδα» της αγγλικής μαθηματικής ιστοριογραφίας, το ζήτημα της σπουδαιότητας των

³⁷ Όπως παρατίθεται στο Writing the History. . . , ό.π., σ. 78.

³⁸ Όπως παρατίθεται στο Writing the History. . . , ό.π., σ. 90.

ισπανών μαθηματικών, η εθνικοποίηση μουσουλμάνων μαθηματικών του μεσαίωνα κατά την αραβική αφύπνιση κ.λπ.). Τέλος, για μεγάλο μέρος της ιστοριογραφικής παραγωγής για τα ρωσικά και σοβιετικά μαθηματικά είναι υπεύθυνη και η λεγόμενη πολιτική του «σοβιετικού πατριωτισμού» μετά τον δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο.

Διαλεκτικός υλισμός-μαρξισμός. Στη δεκαετία του '30 ιδρύεται η λεγόμενη σοβιετική σχολή της ιστορίας των μαθηματικών από τη Γιανόβσκαγια (1896-1966), τον Βιγκότσκι (1898-1965) και τον Γιούσκεβιτς (1906-93) στη Μόσχα. Στο πλαίσιο της φιλοσοφίας του διαλεκτικού υλισμού, η –μαρξιστικής μεθοδολογίας- ιστορία έχει προνομιακό ρόλο, και επομένως η μελέτη της ιστορίας των επιστημών και των μαθηματικών ενθαρρύνεται.

Η ιστορία των μαθηματικών λόγω της εξ αρχής μετά την επανάσταση (αλλά και παραδοσιακής) γειννίασης της με το ίδιο το πεδίο των μαθηματικών φαίνεται ότι γλίτωσε βασικά από τις παρεμβάσεις που έγιναν στη ιστορία των επιστημών, αφού η μελέτη της ιστορίας ενθαρρύνονταν μεν αλλά τα αποτελέσματά της και η μεθοδολογία της έπρεπε να συμφωνούν με την επίσημη ιδεολογική ερμηνεία του μαρξισμού και του διαλεκτικού υλισμού³⁹.

Η μαρξιστική τοποθέτηση των δύο πρώτων φαίνεται και από τους τίτλους των πρώιμων έργων τους *Η εννοιολογική κατηγορία της ποιότητας στα έργα του Χέγκελ και η ουσία των μαθηματικών* (Γιανόβσκαγια, 1931), *Τα προβλήματα της ιστορίας από τη σκοπιά της μαρξιστικής μεθοδολογίας* (Βιγκότσκι, 1930). Για τον Βιγκότσκι, η ιστορία των μαθηματικών, από τη σκοπιά της μαρξιστικής μεθοδολογίας έχει να απαντήσει σε τρία προβλήματα: την αλληλόδραση μεταξύ μαθηματικών και πολιτισμού (κουλτούρας), τον «ταξικό χαρακτήρα» των μαθηματικών, την ιστορική ερμηνεία

³⁹ Αυτή τουλάχιστον είναι η θέση του Sergei Demidov συγγραφέα του άρθρου στο *Writing the History of Mathematics* για την ιστορία των μαθηματικών στη Ρωσία, τη Σοβιετική Ένωση και τη Ρωσία εκ νέου.

των μαθηματικών.

Ο μαρξισμός επηρέασε και με έναν άλλο τρόπο την ιστοριογραφία των μαθηματικών στη Σοβιετική Ένωση. Το 1925 το Ινστιτούτο των Μαρξ-Ενγκελς στη Μόσχα, παρέλαβε αντίγραφα των λεγόμενων μαθηματικών χειρογράφων του Μάρξ στα οποία ο Μάρξ συζητά τα θεμέλια της ανάλυσης. Η Γιανόβοσκαγια ήταν επικεφαλής της ομάδας που ανέλαβε την έκδοσή τους (μια μερική πρώτη το 1933 και μια ολοκληρωμένη το 1966). Η ιστορία της μαθηματικής ανάλυσης και ιδιαίτερα των θεμελίων της έγινε έτσι ένας από τις πιο δυναμικές και σεβαστές ερευνητικές περιοχές. Στην περιοχή αυτή άρχισε το έργο του και ο Γιούσκεβιτς.

Θα περίμενε ίσως κανείς η ηγεμονία του διαλεκτικού υλισμού να οδηγήσει σε μια κοινωνική ιστορία των μαθηματικών. Πάντα κατά τον Demidov, αυτό που δεν έγινε στη Σοβιετική Ένωση, άρχισε μόλις τώρα να γίνεται μετά τη διάλυσή της. Η σοβιετική ιστορία των μαθηματικών ήταν ιστορία των ιδεών, ιστορικομαθηματική (εξ ου και ο τίτλος σημαντικού περιοδικού) και έφερε κοντά τους ιστορικούς, τους μαθηματικούς και τους φιλοσόφους.

Παρόμοια έμφαση στην ιστορία των μαθηματικών, της επιστήμης και της τεχνολογίας μπορούμε να δούμε και στην Ανατολική Γερμανία (κυρίως μετά το διάταγμα του 1962) και πάλι σχετιζόμενη με τη μαρξιστική κοσμοθεώρηση που τονίζει το επιστημονικο-τεχνικο-υλικό υπόβαθρο.

Εδώ αξίζει να αναφερθούμε στο γνωστό ζήτημα της «εξωτερικιστικής»/ «εσωτερικιστικής» προσέγγισης στη μαθηματική ιστοριογραφία. Πολλές από τις συμβολές μαθηματικών στην ιστορία του αντικειμένου τους, από τα ιστορικά εδάφια της *Méchanique Analitique* του Joseph Louis Lagrange ως το *Eléments d' histoire des mathématiques* του Bourbaki ακολουθούν την εσωτερικιστική προσέγγιση, «φλερτάροντας» διαρκώς με την «ουιγγιανή» ιστορική παράδοση.

Από την άλλη, ο ιάπωνας Kondo Yoitsu (1911-79) στην εισαγωγή του βιβλίου του *Η ιστορία της γεωμετρικής σκέψης: με ιδιαίτερη αναφορά στη μη ευκλείδεια και τη ρημάνεια γεωμετρία* (1946)

γράφει με τόλμη: «Παρά την εξαιρετική αφαιρετικότητα τους, τα μαθηματικά είναι μια πολιτισμική μορφή των πρακτικών δραστηριοτήτων των ανθρώπων σαν τις φυσικές επιστήμες. Δεν είναι ανάγκη να ειπωθεί ότι επηρεάζονται σε αξιοσημείωτο βαθμό από την κοινωνία στην οποία δημιουργούνται, την τεχνολογία, τις φυσικές επιστήμες και τη φιλοσοφία τόσο ως προς την ύλη τους όσο και ως προς τις μεθόδους τους»⁴⁰.

Ο George Sarton (1884-1956), μία από τις σημαντικότερες φυσιογνωμίες στην ιστορία των επιστημών, για τον οποίον «η ιστορία των μαθηματικών πρέπει να είναι ο πυρήνα της ιστορίας του πολιτισμού», θεωρούσε το ακόλουθο εύκολα διατυπούμενο αλλά δύσκολα απαντώμενο ερώτημα θεμελιώδες στην ιστορία των μαθηματικών:

«Σε ποιο βαθμό ή γένεση και η ανάπτυξη των [μαθηματικών] ιδεών προσδιορίστηκαν από εξωτερικές συνθήκες ή από κάποιο είδος εσωτερικής αναγκαιότητας;»⁴¹

Ως τέτοιες εξωτερικές συνθήκες ενδεικτικά ανέφερε τις εκάστοτε ιδιαίτερες πολιτικές, οικονομικές, επιστημονικές, στρατιωτικές συνθήκες και τις διαρκείς απαιτήσεις των τεχνών της ειρηνικής ζωής και του πολέμου.

Στην κατεύθυνση μιας τέτοιας εξωτερικιστικής ιστορίας είναι λ.χ. βιβλία σαν το Frank J. Swetz, *Capitalism and Arithmetic: The New Math of the 15th Century* (1987), ή το γνωστότερο και πιο γενικό Dirk Struik, *A concise history of Mathematics* (1948/1967). Το παρακάτω χαρακτηριστικό απόσπασμα από το δεύτερο, που αναφέρεται στην «κρίση» των ελληνικών μαθηματικών και τη θεωρία των αναλογιών νομίζω ότι αναδεικνύει τόσο τον φιλόδοξο στόχο της καθολικής κατανόησης του κοινωνικού φαινομένου όσο και τα προβλήματα, τις δυσκολίες και τους κινδύνους μιας τέτοιας προσέγγισης:

⁴⁰ Όπως παρατίθεται στο Writing the History. . . , ό.π., σ. 293.

⁴¹ Όπως παρατίθεται στο Writing the History. . . , ό.π., σ. 330.

«Η κρίση αυτή, αν πρόκειται για κάτι τέτοιο, δημιουργήθηκε κατά την τελευταία περίοδο του πελοποννησιακού πολέμου, που τελείωσε με την πτώση της Αθήνας (404 π.Χ.). Μπορούμε λοιπόν να επισημάνουμε έναν σύνδεσμο ανάμεσα στην κρίση των μαθηματικών και σ' εκείνη του κοινωνικού συστήματος, μια και η πτώση της Αθήνας σήμαινε την καταδίκη μιας δουλοκτητικής δημοκρατίας με ιμπεριαλιστικά χαρακτηριστικά και άνοιγε μια νέα περίοδο αριστοκρατικής κυριαρχίας. Η κρίση αυτή βρήκε τη λύση της μέσα στο πνεύμα της νέας περιόδου».

Τα εκλεπτυσμένα ιστορικά εργαλεία που απέκτησε η ιστοριογραφία στη συνομιλία της με την κοινωνιολογία και την ανθρωπολογία ίσως βοηθήσουν στην υπέρβαση του παραπάνω επιστημολογικού διπόλου και πλουτίσουν περισσότερο την υλιστική μαθηματική ιστοριογραφία.

Η ιστορία των μαθηματικών και η μαθηματική εκπαίδευση. Η διάδοση και εκλαΐκευση των επιστημονικών ιδεών και των μαθηματικών ειδικότερα είναι μια από τις βασικές συνιστώσες του διαφωτιστικού σχεδίου, με χαρακτηριστικό παράδειγμα τον Fontenelle. Το 1802, ο Charles Bossut δημοσιεύει το έργο του *Essai sur l'histoire générale des mathématiques* για «να περιγράψει ιστορικά τα μαθηματικά από τις απαρχές τους ως το παρόν και ταυτόχρονα να τιμήσει τη μνήμη σπουδαίων ανδρών που επέκτειναν την επικράτειά τους». Είναι πολύ λιγότερο τεχνικός από τον Montucla στο έργο του οποίου ασκεί κριτική, επειδή αυτό «μπορεί να γίνει κατανοητό μόνον από επαγγελματίες μαθηματικούς».

Στα τέλη του 19^{ου} αιώνα αρχίζει στις Η.Π.Α. η οργανωμένη προσπάθεια διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών. Ο Florien Caloric (1859-1930), που μεταναστεύει στις Η.Π.Α. από την Ελβετία, ξεκινά το σημαντικό ιστορικό έργο του με τρία βιβλία σε αυτό το ύφος: *The Teaching and History of Mathematics* (1890), *A History of Mathematics* (1893), *A History of Elementary Mathematics with Hints on Methods of Teaching* (1896). Μετά από προτροπή του Cantor στρέφεται στη μελέτη

πηγών και γράφει τα γνωστά βιβλία του *History of the Concepts of Limits and Fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse* (1919) και το χρήσιμο δίτομο έργο *The History of Scientific Notations* (1928/9).

Ο Carl Boyer (1906-76), θεωρεί τα μεγάλα συνθετικά έργα του *The Concepts of Calculus* (1939), *History of Analytic Geometry*, *A History of Mathematics* (που υπάρχει και σε ελληνική μετάφραση) συμβολές στην ιστορία της σκέψης και πιστεύει ότι βοηθούν να γεφυρώσουν το διαβόητο χάσμα ανάμεσα στις δύο κουλτούρες [Snow], να καταργήσουν την «έλλειψη αμοιβαίας κατανόησης που πολύ συχνά υπάρχει ανάμεσα στις επιστήμες του ανθρώπου και τις [φυσικές] επιστήμες».

Στο πλαίσιο της διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών καινοτόμο υπήρξε το εγχειρίδιο του Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics* (1953) του οποίου τα κεφάλαια από προβλήματα και ασκήσεις που συνήθως αποσκοπούν στην επίλυση προβλημάτων με τις μεθόδους της υπό μελέτη εποχής.

Τα βιβλία του Morris Kline (1908-92), *Mathematics in Western Culture* (1953) και *Mathematics: A Cultural Approach* (1962), με την αντίληψη που τα διέπει, ότι τα μαθηματικά αναπτύχθηκαν μέσω της προσπάθειας επίλυσης συγκεκριμένων προβλημάτων που παράγονται είτε στο εσωτερικό τους είτε έρχονται από άλλα πεδία, πάντα όμως μέσα σε συγκεκριμένες ιστορικές και πολιτισμικές συνθήκες, αποτελούν ωστόσο μια πρόταση διδασκαλίας των σχολικών μαθηματικών που αντιπαρατίθεται τόσο στο ναυαγισμένο εκπαιδευτικό πρόγραμμα των Νέων Μαθηματικών όσο και στα ισχύοντα σήμερα. Η δυτικοκεντρική ματιά τους δεν αναιρεί τη σημασία τους.

Αντί επιλόγου. Το 1955, ο George Sarton έγραφε:

«Το κύριο καθήκον του ιστορικού των μαθηματικών, που είναι και το πιο αγαπημένο προνόμιό του, είναι να εξηγήσει την ανθρώπινη διάσταση των μαθηματικών, να δείξει το μεγαλείο, την ομορφιά και την αξία τους και να περιγράψει πώς οι αδιάκοπες προσπάθειες

και η συσσωρευμένη ευφυΐα πολλών γενεών ανέγειραν αυτό το μεγαλοπρεπές μνημείο. . . .»⁴².

Μήπως το καθήκον αυτό του ιστορικού των μαθηματικών μπορεί και πρέπει να γίνει επίσης στόχος ενός σύγχρονου, δημοκρατικού αναλυτικού προγράμματος για τα σχολικά μαθηματικά;

⁴² Στο ίδιο, σ. 338-9

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΗ - ΙΣΤΟΡΙΑ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ:

DOUBLE DATE Ή MENAGE À QUATRE?

Μαρία Γιαμαλίδου

Δρ. Ιστορίας της Επιστήμης

1. Ιστορία και Διδακτική: Μια σχέση πολυεπίπεδη

Η σχέση μεταξύ Ιστορίας και Διδακτικής έχει προσελκύσει, κατά τις τελευταίες δεκαετίες, το ενδιαφέρον πολλών διανοητών και από τα δύο πεδία με αποτέλεσμα την συσσώρευση επιχειρημάτων που συνηγορούν υπέρ μιας στενότερης σύζευξης μεταξύ τους. Μεγάλη μερίδα αυτών των επιχειρημάτων επικεντρώνεται στο γεγονός ότι η ιστορική μελέτη των Μαθηματικών αναδεικνύει τον ανθρώπινο χαρακτήρα τους και λειτουργεί ως κίνητρο για μάθηση. Εξίσου σημαντική είναι η συνειδητοποίηση ότι η Ιστορία παρέχει ένα πλούσιο ρεπερτόριο παραδειγμάτων που μπορούν να αξιοποιηθούν διδακτικά. Οι ενδιαφέρουσες εμπειρικές μελέτες που κινούνται μέσα σε αυτό το πλαίσιο καταλήγουν στην διαπίστωση ότι οι ιστορικές παρεκβάσεις δίνουν την δυνατότητα στους μαθητές να εμπλακούν σε γόνιμες συζητήσεις, να υποδυθούν ρόλους, και να εκτιμήσουν την δημιουργική φύση της μαθηματικής σκέψης.

Φαίνεται ότι η κυρίαρχη εικόνα της μαθηματικής γνώσης, η οποία ενθαρρύνεται από τα παραδοσιακά προγράμματα σπουδών που προκρίνουν τον απολυταρχικό της χαρακτήρα, την αφαιρετική της διάσταση, και την προνομιακή της θέση σε σχέση με τα υπόλοιπα γνωστικά αντικείμενα [βλ. Valero, 2004], δυσχεραίνει την ουσιαστική εμπλοκή των μαθητών στην διαδικασία της μαθηματικής σκέψης. Φαίνεται να υπάρχει κάτι το αλλοτριωτικό στην κλειστότητα που υπαινίσσεται αυτή η παραδοσιακή, απαγωγική παρουσίαση της μαθηματικής γνώσης: μία αίσθηση αποξένωσης που εμποδίζει τα παιδιά να φανταστούν τους εαυτούς

τους "εντός" αυτού του συστήματος γνώσης. Αντιθέτως, η διαπίστωση των ιστορικών της επιστήμης και των κοινωνιολόγων της γνώσης ότι το περιεχόμενο της γνώσης καθορίζεται από τις εκάστοτε ανάγκες της κοινωνίας (societal needs) [Yamalidou, 1996, ch. 5] ή και τα συμφέροντα-ενδιαφέροντα διαφόρων κοινωνικών ομάδων (social interests) [Barnes, 1977· Bloor, 1976] καθιστά την μελέτη της Ιστορίας των Επιστημών σημαντική επανορθωτική δράση που διαυγάζει τον ρόλο του νοόντος, κοινωνικού υποκειμένου στην κατασκευή και αναπλαισίωση της γνώσης και καθιερώνει την διασύνδεσή της με την διδακτική πρακτική ως αφορμή και πλαίσιο εντός του οποίου μπορούν οι μαθητές να συνειδητοποιήσουν τον δικό τους ενεργό ρόλο στην μαθησιακή διαδικασία.

Εντούτοις, η σχέση μεταξύ Ιστορίας και Διδακτικής δεν έχει διευκρινιστεί, ακόμη, πλήρως. Υπάρχουν δύο φιλοσοφικά ενδιαφέρουσες αντιρρήσεις που υπογραμμίζουν την ύπαρξη μίας εικαζόμενης διανοητικής έντασης ανάμεσα στα δύο πεδία. Η πρώτη αντίρρηση επικεντρώνεται στο ζήτημα της αυτονομίας της Ιστορίας που φαίνεται να απειλείται από την συμβίωσή της με την Διδακτική. Η δεύτερη αντίρρηση επικεντρώνεται στο ζήτημα του προσδιορισμού της διδακτικής αξίωσης για μάθηση, η οποία φαίνεται να απειλείται από την ιστορική πραγματικότητα του κοινωνικού καθορισμού της γνώσης. Το βασικό επιχείρημα της πρώτης αντίρρησης απορρέει από την διαπίστωση ότι η σχέση μεταξύ Ιστορίας και Διδακτικής είναι, κατά βάση, χρηστική: η Ιστορία των επιστημών *χρησιμοποιείται* για διδακτικούς λόγους και επομένως χάνει την διανοητική της αυτονομία [βλ. Fried, 2001]. Το σκεπτικό αυτής της αντίρρησης δομείται με βάση δύο επάλληλα ερωτήματα: (α) είναι, άραγε, διδακτικά χρήσιμο να παρουσιάσουμε στα παιδιά τα μαθηματικά στην αμιγή, ιστορική τους μορφή; –είναι σαφές ότι οι στόχοι της επιχειρούμενης σύζευξης μεταξύ Ιστορίας και Διδακτικής καθορίζονται από το μαθησιακό αίτημα και άρα είναι σαφές ότι το ζητούμενο αυτής της σύζευξης δεν είναι η διερεύνηση της ιστορικής αλήθειας αλλά η εξεύρεση αποτελεσματικών διδακτικών μεθόδων, και (β) εάν για διδακτικούς

λόγους επιχειρήσουμε να μεταγγίσουμε στην διδακτική πρακτική μία μειωμένη εκδοχή της ιστορικής πραγματικότητας των επιστημών, κατά πόσο αυτή η ανακόλουθη, χρηστική συζήτηση παρελθόντων επεισοδίων συνιστά πραγματική Ιστορία;

Η δεύτερη αντίρρηση απορρέει από την διαπίστωση ότι αν δεχθούμε ότι η επιστήμη είναι κατ' ουσία ένα κοινωνικό προϊόν και ότι τόσο τα ερωτήματα που προκρίνονται (κατά την ηπιότερη εκδοχή της κοινωνιολογικής προσέγγισης) όσο και οι απαντήσεις που υιοθετούνται (κατά τους υπέρμαχους της αυστηρότερης εκδοχής) καθορίζονται, σε κάθε χρονική περίοδο, από συγκεκριμένες κοινωνικές αναφορές [Καστάνης, 2001], θα βρεθούμε αντιμέτωποι με ένα ακόμη κρισιμότερο ερώτημα: αν η Ιστορία των επιστημών καταλήξει, για παράδειγμα, στο συμπέρασμα ότι η υιοθέτηση μιάς θεωρίας καθορίστηκε με βάση τα συμφέροντα κάποιας συγκεκριμένης κοινωνικής ομάδας, και αν αυτό το γνωστοποιήσουμε στους μαθητές, πώς θα μπορέσουμε, στην συνέχεια, να στοιχειοθετήσουμε την αξίωσή μας να ενστερνιστούν την προτεινόμενη γνώση ως "αληθή"; Αξίζει να επισημανθεί ότι η Διδακτική αποτελεί σημαντική δεξαμενή επιχειρημάτων για όσους προσπαθούν να στοιχειοθετήσουν μιά ουσιαστική, φιλοσοφική αντίρρηση ενάντια στην κοινωνιολογία της επιστημονικής γνώσης [βλ. Slezak, 1994].

Προτού επιχειρήσω να αναστρέψω αυτές τις δύο αντιρρήσεις θα ήθελα να επισημάνω ότι και οι δύο κινούνται μέσα σε ένα συγκεκριμένο γλωσσοπλαίσιο που δομείται γύρω από την φιλοσοφική παραδοχή ότι ο στόχος της επιστήμης είναι η διευκρίνιση της πραγματικότητας με γνώμονα την αλήθεια. Σχετικά με την πρώτη αντίρρηση, η παραδοχή αυτή σημαίνει ότι μόνο αν έχουμε την δυνατότητα να ενσωματώσουμε στην διδασκαλία των μαθηματικών αυτούσια ιστορικά "γεγονότα" θα έχουμε το δικαίωμα να πούμε ότι αυτή η ενσωμάτωση αποτελεί συμβολή της Ιστορίας στη Διδακτική. Ωστόσο οι ίδιοι οι ιστορικοί και οι φιλόσοφοι της Ιστορίας ισχυρίζονται ότι η επιστήμη της Ιστορίας δεν επιχειρεί να *διευκρινίσει* την πραγματικότητα αλλά να την *νοηματοδοτήσει*, και επομένως ο βασικός ρόλος της ιστορικής

έρευνας δεν συνίσταται στην αποσαφήνιση "γεγονότων" αλλά στην επεξεργασία "ερμηνειών" [βλ. Becker, 1958].

Στην δεύτερη αντίρρηση, η οποία στηρίζεται στην υπόρρητη παραδοχή ότι η κοινωνικά κατασκευασμένη γνώση δεν μπορεί, εξ ορισμού, να είναι "αληθής" γνώση, απαντά εύστοχα ο Barry Barnes, ο οποίος υποστηρίζει ότι δεν υπάρχει λογικό επιχείρημα που να μας υποχρεώνει να ταυτίσουμε την έννοια της κοινωνικά κατασκευασμένης γνώσης με το "ψεύδος" [Barnes, 1977]. Ένα ισχυρότερο επιχείρημα προκύπτει από την διαπίστωση ότι η δεύτερη αντίρρηση πρέπει να εξεταστεί πρωτίστως σε σχέση με την κοινωνική διάσταση της εκπαίδευσης και όχι σε σχέση με τη κοινωνική διάσταση της επιστημονικής γνώσης ενεαυτής. Η εκπαίδευση είναι ένας *θεσμός* εντός του οποίου υλοποιείται μία κοινωνική επιλογή: η εκάστοτε κοινωνία *επιλέγει* να μεταφέρει στα νέα μέλη της εκείνες τις απαραίτητες γνώσεις που θα τα επιτρέψουν να ενταχθούν στο γνωσιακό και αξιακό πλαίσιο που την καθορίζει. Κατά τον David Bloor η μαθησιακή αξίωση μπορεί κάλλιστα να στοιχειοθετηθεί, ακόμη και αν καταστήσουμε σαφή στα παιδιά την κοινωνική διάσταση της γνώσης ως εξής: η κοινωνία μέσα στην οποία θα ζήσετε και θα κληθείτε να λειτουργήσετε έχει αποφασίσει ότι αυτές οι συγκεκριμένες γνώσεις που διδάσκεστε είναι σημαντικές και χρήσιμες.*

Στο σημείο αυτό η διευκρίνιση του Thomas Kuhn για τον ρόλο της εκπαίδευσης στην εδραίωση του κυρίαρχου Παραδείγματος είναι διαφωτιστική [Kuhn, 1981] και μπορεί να αποβεί ιδιαιτέρως απελευθερωτική εάν συνδυαστεί με την Καστοριδιακή έννοια του συλλογικού καθορισμού του "δέοντος" στις αυτόνομες κοινωνίες, [Καστοριάδης, 1990] αλλά και με την άποψη του Edgar Moren περί της "μαθητείας στην ιδιότητα του πολίτη" [Μορέν, 2000, σελ. 85]. Ένα τέτοιο σύνθετο επιχείρημα, το οποίο μπορεί, εν δυνάμει, να αναστρέψει ολικά την δεύτερη αντίρρηση μπορεί να δομηθεί ως εξής: (α) η υιοθέτηση ενός Παραδείγματος είναι ιστορικά

* Οφείλω αυτή την διευκρίνιση στον καθηγητή David Bloor, Βερολίνο 1999-2000.

αναγνωρίσιμη συνιστώσα του εκάστοτε πολιτισμού, (β) ο νέος άνθρωπος "πρέπει να έχει απόλυτη συνείδηση του ότι συμμετέχει στην περιπέτεια της ανθρωπότητας"[ο.π., σελ. 84], ή ότι ανήκει, ιστορικά, σε ένα συγκεκριμένο Παράδειγμα, (γ) στόχος της παιδείας είναι να καταστήσει τους νέους ανθρώπους ικανούς να "επωμιστούν την ανθρώπινη συνθήκη" [ο.π., σελ. 85], με άλλα λόγια να τους καταστήσει ικανούς να διαυγάσουν την συμμετοχική τους σχέση με το κοινωνικό γίνεσθαι ως ενεργοί πολίτες, οι οποίοι θα συγκαθορίσουν με την δράση τους τις μελλοντικές κοινωνικές επιλογές, ακόμη και τις επιστημονικές επιλογές της μελλοντικής κοινωνίας.

Με βάση τα παραπάνω θα ήθελα να προτείνω ότι ο μείζων λόγος που θα μπορούσε, εν δυνάμει, να ενοχοποιήσει την σχέση Ιστορίας και Διδακτικής δεν αφορά ούτε στην διανοητική αυτονομία της Ιστορίας ούτε στην διατύπωση της μαθησιακής αξίωσης. Αφορά κυρίως στο γεγονός ότι τα δύο αυτά πεδία είναι, κατά μία έννοια, ασύμβατα: η μεν Ιστορία είναι μία εγγενώς *ερμηνευτική* διερεύνηση που αποφεύγει τις αξιολογικές κρίσεις και υιοθετεί μία συμμετρική στάση απέναντι στο "σωστό" και το "λάθος", ενώ η Διδακτική είναι πρωτίστως μία *δεοντολογική* προσέγγιση, υπό την έννοια ότι το κύριο μέλημά της είναι να απαντήσει στο κοινωνικά επείγον ερώτημα "τί *πρέπει* να διδάξουμε και *πώς*, ώστε να είμαστε αποτελεσματικοί δάσκαλοι". Αυτή η φιλοσοφική ασυμβατότητα μας επιβάλλει να φανταστούμε άλλες μορφές διασύνδεσης των δύο πεδίων οι οποίες δεν θα περιορίζονται στην αυτούσια μεταφορά του *περιεχομένου* της ιστορικής γνώσης. Όπως πολύ εύστοχα παρατηρεί ο David Lingard, η εισαγωγή της Ιστορίας στη Διδακτική των Μαθηματικών δεν είναι πρόβλημα *περιεχομένου* αλλά πρόβλημα στάσης των μαθητών απέναντι στην γνώση, η οποία στάση σχετίζεται άμεσα με την εικόνα που αυτοί αποκομίζουν, μέσω της διδασκαλίας, τόσο για την ίδια την επιστήμη των Μαθηματικών όσο και για τον ρόλο των ερευνητών των Μαθηματικών στην εξέλιξη αυτής της επιστήμης [Lingard, 2002, σελ. 22].

Στην επόμενη ενότητα θα προσπαθήσω να διευκρινίσω ότι μία τέτοια εναλλακτική διασύνδεση, η οποία θα επικεντρώνεται όχι στο επίπεδο της ιστορικής γνώσης αλλά στο επίπεδο της ιστορικής-αναστοχαστικής σκέψης, είναι όχι μόνο δυνατή αλλά και επιβεβλημένη από τα πορίσματα που έχουν προκύψει στα πλαίσια της μελέτης της διδακτικής από την σκοπιά της γνωσιακής επιστήμης. Η ανάλυση αυτών των πορισμάτων θα καταδείξει το γεγονός ότι οι έννοιες που φαίνεται να προβληματίζουν την ανάλυση της γνωσιακών επιστημόνων είναι ακριβώς εκείνες οι έννοιες που δομούν και χαρακτηρίζουν την ιστορική σκέψη.

2. Διδακτική των Μαθηματικών και Γνωσιακή Επιστήμη: Ανοικτά ζητήματα και προβληματισμοί με την ματιά του ιστορικού

Η συλλογή άρθρων που δημοσιεύτηκε το 1987 στο βιβλίο που φέρει τον τίτλο *Cognitive Science and Mathematics Education* ήταν το αποτέλεσμα μίας συνειδητής προσπάθειας να καθοριστούν οι βασικές συνιστώσες της διδακτικής των μαθηματικών μέσα από μία συνεργατική προσέγγιση που θα έφερνε στο φως τις διακριτές όψεις της διδακτικής πραγματικότητας. Η προσπάθεια είναι εντυπωσιακή τόσο ως προς την αποφασιστικότητα των συμμετεχόντων για την δημιουργία μίας κοινής κατανόησης της διδακτικής διαδικασίας όσο και ως προς το επίπεδο ανάλυσης που επεχείρησαν να κατακτήσουν. Εξίσου εντυπωσιακή, όμως, είναι και η απουσία ιστορικών από το εγχείρημα, όπως καταδεικνύεται στο σχήμα των τεσσάρων μερικώς επικαλυπτόμενων κύκλων οι οποίοι αντιπροσωπεύουν τις τέσσερις "βασικές ομάδες συμβαλλόντων στην πρόοδο της διδακτικής των Μαθηματικών": γνωσιακοί επιστημόνες, δάσκαλοι των Μαθηματικών, ερευνητές της διδακτικής των Μαθηματικών και ερευνητές-επιστήμονες των Μαθηματικών " [Schoenfeld, 1987a, p. xiv]. Η απουσία ιστορικών από την διευρυμένη συζήτηση που αποκρυσταλλώνεται στο τόμο αυτόν γίνεται ιδιαίτερος εμφανής κάθε φορά που η γνωσιακή ανάλυση της διδακτικής εμπειρίας έρχεται αντιμέτωπη με τα

ουσιώδη εννοιολογικά και επιστημολογικά προβλήματα με τα οποία ασχολείται η ιστορική έρευνα. Ποιά είναι η φύση της πραγματικότητας; Τι σημαίνει η κατανόηση της πραγματικότητας εντός πλαισίου και μέσω ποιών διαδικασιών επιτυγχάνεται; Τι ρόλο παίζει η συλλογική διαπραγμάτευση εναλλακτικών ερμηνειών στην εμπέδωση μίας κοινής κατανόησης της πραγματικότητας; Πώς επηρεάζει η εγγενής ανοικτότητα της ιστορικής ερμηνείας την γνώση μας για την πραγματικότητα και την σχέση μας με την έννοια της αλήθειας;

i. Νόημα - ερμηνεία - κατανόηση

Οι μελέτες που περιλαμβάνονται στον τόμο αυτόν θέτουν στο επίκεντρο της προσοχής πρωτίστως το ζήτημα της επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων (problem-solving) και υποδεικνύουν ότι η αποτελεσματική επίλυση καθορίζεται, κατά τρόπο ουσιαστικό, από μία διαδικασία "νοηματοδότησης" που κυριαρχεί σε όλα τα στάδια της επίλυσης: (α) η μετάφραση της λεκτικής διατύπωσης του προβλήματος σε μαθηματικές εξισώσεις "προϋποθέτει γνώση της σημασίας αυτού που πρόκειται να μεταφραστεί" [Greeno, 1987, p. 63], (β) η επίτευξη της λύσης είναι δυνατή μόνο όταν οι λύτες αντιλαμβάνονται το νόημα των συμβολικών αναπαραστάσεων τις οποίες μεταπλάθουν [Maurer, 1987, p. 170], και (γ) οι λύτες πρέπει να είναι σε θέση να αποτιμήσουν αν η λύση που επιτεύχθηκε "έχει νόημα" [Schoenfeld, 1987c, p196]. Παρ' ότι η έννοια του "νοήματος" φαίνεται να είναι κεντρική στην γνωσιακή ανάλυση της επίλυσης προβλημάτων, έχει διαπιστωθεί ότι "τα περισσότερα εγχειρίδια δεν προσφέρουν ικανοποιητική βοήθεια [στο να γίνει κατανοητό] τί χαρακτηρίζει αυτά τα νοήματα" [Greeno, 1987, p. 63].

Η ασάφεια που περιβάλλει την διδακτική αξιοποίηση της έννοιας του νοήματος δεν είναι φαινόμενο απρόσμενο, καθώς, ούτως ή άλλως, η φύση του νοήματος αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο ολόκληρης της φιλοσοφικής σκέψης. Από την σκοπιά της γνωσιακής επιστήμης, το καταλληλότερο εννοιολογικό πλαίσιο για την ανάλυση του νοήματος φαίνεται να προσφέρει η προσέγγιση

του "ψυχολογισμού", σύμφωνα με την οποία το νόημα δεν καθορίζεται από την φύση του αντικειμενικού κόσμου αλλά δομείται μέσω νοητικών κατασκευών τις οποίες επιθέτουμε στον κόσμο [Johnson-Laird, 1983, ch. 9]. "Οι άνθρωποι είναι ερμηνευτές του κόσμου που τους περιβάλλει" [Schoenfeld, 1987c, p. 195] –το συμπέρασμα αυτό έχει σημαντικές συνέπειες για την διδακτική, διότι μας υποχρεώνει να λάβουμε σοβαρά υπ' όψιν μας το ενδεχόμενο ότι τα παιδιά δεν βλέπουν τον κόσμο "όπως τον βλέπουμε εμείς· ενώ παρατηρούν τα ίδια φαινόμενα με εμάς, τα ερμηνεύουν διαφορετικά" [Schoenfeld, 1987b, p. 22].

Η επισήμανση αυτή, παρ' ότι παιδαγωγικά αναγκαία, δεν παράγει από μόνη της λεπτομερή γνώση για το πώς συντελείται η διαδικασία της νοηματοδότησης. Η συνηθέστερη απάντηση των γνωσιακών επιστημόνων επικεντρώνεται στην διαπίστωση ότι η νοηματοδότηση απαντά σε μία "ανάγκη των παιδιών" που καθοδηγεί την συμπεριφορά τους κατά την επίλυση προβλημάτων [Wenger, 1987, p. 221] και ότι το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι "η κατασκευή μιάς αρχικής αναπαραστάσης του προβλήματος", η οποία εγγυάται ότι έχει επιτευχθεί η κατανόηση του προβλήματος [Silver, 1987, p.45]. Στο σημείο αυτό προκύπτουν δύο εν δυνάμει προβληματικά ζητήματα. Το πρώτο αφορά στην έννοια της άρρητης γνώσης (tacit knowledge) η οποία, σύμφωνα με τον Polanyi, δεν μπορεί να συγκεκριμενοποιηθεί και να αποδοθεί μέσω ρητών αναπαραστάσεων, και την οποία επιδεικνύουμε όταν πράττουμε [Polanyi, 1974]. Η άρρητη γνώση συνδέεται συνήθως με μία ανάγνωση ανάμεσα στις γραμμές, όπως υποδεικνύει η διαπίστωση ότι "οι πληροφορίες που δίνονται ρητώς στην εκφώνηση του προβλήματος συνήθως δεν επαρκούν για την επίλυσή του" [Kilpatrick, 1987, p. 125], γεγονός που δυσχεραίνει περαιτέρω την κατανόηση της νοηματοδότησης. Το δεύτερο ζήτημα αφορά στην διαπίστωση ότι η νοηματοδότηση είναι όχι απλώς μία διαδικασία κατανόησης αλλά μία διαδικασία κατανόησης *εντός πλαισίου*. Στο συμπέρασμα αυτό κατέληξαν εμπειρικές μελέτες σύμφωνα με τις οποίες η επίλυση προβλημάτων δεν είναι συνάρτηση μόνο των μαθηματικών γνώσεων: όταν κάποιος

πρόβλημα παρουσιάζεται εκτός πλαισίου οι μαθητές είτε δυσκολεύονται να επιλέξουν την κατάλληλη μέθοδο για την επίλυσή του [Wenger, 1987, p.219], είτε δυσκολεύονται να το επιλύσουν παρ' ότι έχουν επαρκείς μαθηματικές γνώσεις [Schoenfeld, 1987c, p. 192], ενώ πολλές φορές ακόμα και ικανοί μαθητές-λύτες δεν είναι σε θέση να αναγνωρίσουν τα μαθηματικά προβλήματα και να επιλέξουν τις κατάλληλες μεθόδους επίλυσής τους σε περιπτώσεις επαναληπτικών διαγωνισμάτων [Wenger, 1987, p. 256].

Σε αυτό ακριβώς το σημείο καθίσταται κρίσιμος ο ρόλος της Ιστορίας, διότι η Ιστορία είναι η γνωστική περιοχή που ασχολείται κατ' εξοχήν με αυτές τις τρεις φαινομενικά προβληματικές έννοιες: νόημα, ερμηνεία, κατανόηση. Η Ιστορία, σύμφωνα με τον Gerhard Ritter είναι, αναπόφευκτα, μία αναζήτηση *νοήματος*, μία προσπάθεια του σκεπτόμενου νου να μετατρέψει το χάος των ασύνδετων φαινομένων σε μία νοηματογόνα και συνεκτική ολότητα μέσω της ερμηνείας [Ritter, 1961-62]. Κατά τον Heyden White η *ερμηνεία* αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι του εγχειρήματος των ιστορικών [White, 1972-73]. Ενώ ο Καστοριάδης διακρίνει στην Ιστορία μία από τις τρεις διακριτές "στάσεις της σκέψης", την *κατανόηση*, η οποία "πηγάζει από το γεγονός ότι η ανθρώπινη ιστορία και η ανθρώπινη ζωή είναι δημιουργία νοημάτων και σημασιών" [Καστοριάδης, 2003, σελ. 48-149]. Η προτροπή των Χασάπη και Κοτσακώστα "να προσεγγίσουμε την μάθηση των μαθηματικών ως μία γενεσιουργό διαδικασία κατασκευής νοημάτων" [Χασάπη και Κοτσακώστα, 2001, σελ. 137] επιδεικνύει εντυπωσιακή συνάφεια με τις παραπάνω θέσεις. Μένει να διερευνηθεί πώς μπορούμε να αντιληφθούμε την διαδικασία της νοηματοδότησης ώστε να μπορέσουμε να τη χειριστούμε διδακτικά.

Αν λάβουμε σοβαρά υπ' όψιν μας την άποψη του Polanyi περί άρρητης γνώσης και αν είμαστε διατεθειμένοι να την αποδεχούμε όχι μόνο ως κατηγορία ανάλυσης των δεδομένων της έρευνάς μας αλλά και ως κατηγορία αναστοχαστικού προσδιορισμού της ίδιας μας της ερευνητικής εμπειρίας, διανοίγεται μία ενδιαφέρουσα

προοπτική η οποία αξίζει, πιστεύω, να διερευνηθεί. Η ιστορική έρευνα αποτελεί *πράξη* νοηματοδότησης και ως τέτοια εμπεριέχει μία σημαντική συνιστώσα άρρητης γνώσης, η οποία δεν εξαντλείται σε προτασιακού τύπου διατυπώσεις. Ο φιλόσοφος της Ιστορίας Robin George Collingwood παρομοιάζει την ιστορική έρευνα με αρχαιολογική ανασκαφή υπό την έννοια ότι κάθε ιστορικό κείμενο αποτελεί μία ρητώς διατυπωμένη απάντηση σε ένα άρρητο ερώτημα, το οποίο ο ιστορικός επιζητά να αποκαλύψει [Collingwood, 1939, p. 39]. Αυτό το άρρητο ερώτημα είναι εναρμονισμένο με το συγκεκριμένο κοινωνικό και διανοητικό πλαίσιο εντός του οποίου είχε αρχικά διατυπωθεί [ο.π., p. 134]. Οι έννοιες του νοήματος και του πλαισίου είναι, κατά τον Collingwood, έννοιες αλληλένδετες ενώ η νοηματοδότηση είναι μία διαδικασία ενεργούς εμπλοκής του σκεπτόμενου νου με τις ίδιες τις σκέψεις των ιστορικών προσώπων [ο.π., p. 112]. Ακολουθώντας αυτή την προσέγγιση θα τολμούσα να προτείνω ότι η διαδικασία της νοηματοδότησης δεν μπορεί να διδαχθεί, αλλά μόνο να βιωθεί ώστε να γίνει κατανοητή αναστοχαστικά μέσω νοηματοδοτικών πράξεων. Πιστεύω ότι είναι σημαντικό να διερευνηθεί αυτή η γραμμή σκέψης ώστε να διαπιστωθεί το κατά πόσο η εξάσκηση των μαθητών στις διεργασίες –και τις αγωνίες– της ιστορικής έρευνας μπορεί να συμβάλει στην απόκτηση δεξιοτήτων που φαίνεται να είναι σημαντικές στην μαθηματική εκπαίδευση. Η πειραματική εμπλοκή δασκάλων σε μία διαδικασία που προσομοιώνει κατά το δυνατόν την ιστορική έρευνα καταλήγει σε αισιόδοξα συμπεράσματα για την αποτελεσματικότητα μιάς τέτοιας μεθόδου [βλ. Furin ghetti and Somaglia, 2005].

ii. αναπαράσταση - πολλαπλές αναπαραστάσεις - ανοικτότητα

Η έννοια της αναπαράστασης κατέχει κεντρική θέση στη γνωσιακή ανάλυση που καθιστά σαφές ότι "η ποιότητα της λύσης [ενός προβλήματος] εξαρτάται από το πόσο ικανοποιητική είναι η αναπαράστασή του" [Silver, 1987, p.43]. Εξίσου σαφές, όμως, είναι ότι δεν έχει βρεθεί τρόπος ενσωμάτωσης αυτής της έννοιας στην διδακτική πρακτική: "οπανιότατα παρέχουν τα εγχειρίδια

παραδείγματα αναπαράστασης της γνώσης" [ο.π., p. 56]. Το ερώτημα γίνεται ιδιαίτερος κρίσιμος όταν μεταστρέφουμε την προσοχή μας από το ζήτημα της επίλυσης στο ζήτημα της μορφοποίησης προβλημάτων (problem formulation): τί γνωσιακές διεργασίες συντελούνται όταν κάποιος επιχειρεί να εφαρμόσει τις μαθηματικές του γνώσεις σε προβλήματα του πραγματικού κόσμου έτσι ώστε να είναι δυνατή η επίτευξη μαθηματικής λύσης [Kilpatrick, 1987, p.131];

Μία ενδιαφέρουσα προοπτική διανοίγεται μέσω της διαπίστωσης ότι η αναπαράσταση δεν είναι μία διαδικασία που ορίζεται μονοσήμαντα με βάση τα δεδομένα του προβλήματος [Silver, 1987, p. 56]. Παρ' ότι φαίνεται να πολυπλοκοποιεί την κατάσταση, η αναγνώριση της σημασίας των πολλαπλών αναπαραστάσεων προωθεί την κατανόηση των γνωσιακών διαδικασιών [βλ. Yamalidou, 2001]. Όπως έχει επισημανθεί, "η επάρκεια στην επίλυση προβλημάτων εξαρτάται, εν μέρει, από την ικανότητα των ατόμων να σκεφτούν με βάση διαφορετικά ενδεχόμενα συστήματα αναπαράστασης" [Pea, 1987, p. 109], ενώ η αποτυχία των μαθητών να επιλύσουν κάποιο πρόβλημα προκαλείται ενίοτε από την αδυναμία τους να εξετάσουν εναλλακτικές μεθόδους επίλυσης [Schoenfeld, 1987c, p. 193], γεγονός που τους παγιδεύει και τους ωθεί να εμμένουν σε συγκεκριμένες ατελέσφορες επιλογές [Silver, 1987, p. 48].

Η εμπειρική στοιχειοθέτηση της πολλαπλότητας ανοίγει τον δρόμο για την διερεύνηση μίας ακόμη ενδιαφέρουσας προβληματικής που σχετίζεται με την έννοια της ανοικτότητας. Το χαρακτηριστικό που αποδίδεται συχνότερα στην μαθηματική γνώση είναι η σαφήνεια. Ωστόσο έχει επισημανθεί ότι αυτή η εικαζόμενη σαφήνεια δεν είναι πάντα ορατή στην εκτέλεση των μαθηματικών πράξεων. Για παράδειγμα, κατά την απλοποίηση εξισώσεων είναι δυνατόν να οδηγηθούν οι μαθητές σε ενδιάμεσες εξισώσεις που είναι περισσότερο "χαοτικές" από τις αρχικές. Η δυνατότητα των μαθητών να ανεχθούν μία τέτοια χαοτική κατάσταση αποτελεί μία από τις δεξιότητες που πρέπει να

αποκτήσουν προκειμένου να γίνουν αποτελεσματικοί λύτες μαθηματικών προβλημάτων [Schoenfeld, 1987b, p. 16].

Παρ' ότι η ενδεχομενικότητα ως χαρακτηριστικό του κοινωνικού αλλά και του φυσικού κόσμου έχει εμπεδωθεί στην σύγχρονη επιστήμη, φαίνεται να υπάρχει μία δυσκολία στην διδακτική αξιοποίησή της. Η πλέον συνήθης απόκριση των δασκάλων είναι ένας χαρακτηριστικός ενδοιασμός: ότι οι μαθητές του Δημοτικού Σχολείου δεν έχουν ακόμη τις απαραίτητες δεξιότητες που θα τους επιτρέψουν να χειριστούν την πολυπλοκότητα που υπαινίσσεται μία τέτοια προσέγγιση. Στο σημείο αυτό είναι ίσως χρησιμότερο να στραφούμε στην διορατική αντίληψη ενός σημαντικού διανοητή όπως είναι ο Robert Musil, ο οποίος μας καλεί να συνειδητοποιήσουμε ότι πέρα από την αίσθηση της πραγματικότητας υπάρχει μία διακριτή αίσθηση των πιθανοτήτων και ότι τα παιδιά έχουν ανεπτυγμένη αυτή την αίσθηση [Musil, 1995, p. 10]. Παραμένει ανοικτό το ερώτημα κατά πόσο η παραδοσιακή διδασκαλία των μαθηματικών, η οποία δίνει έμφαση στις λογικές διασυνδέσεις μεταξύ μαθηματικών εννοιών, αποδυναμώνει αυτή την φυσική αίσθηση των παιδιών.

Αν όντως ο χειρισμός της πολυπλοκότητας και η αποδοχή της ανοικτότητας αποτελούν θετικές στάσεις που συμβάλλουν στην απόκτηση μαθηματικών γνώσεων, η πρόταση που κατατέθηκε προηγουμένως, σχετικά με την εξάσκηση των μαθητών στην ιστορική σκέψη και την σημασία που έχει αυτή η εξάσκηση για την απόκτηση μαθηματικών δεξιοτήτων, αποκτά ακόμα ισχυρότερα ερείσματα. Η πλειοψηφία των ιστορικών και των φιλοσόφων της Ιστορίας υιοθετεί, πλέον, την άποψη ότι η Ιστορία συνίσταται στην εξεύρεση ενός μοτίβου που αντιπροσωπεύει κατά νοηματογόνο τρόπο την πολλαπλότητα των μεμονωμένων γεγονότων και ότι η εξεύρεση ενός τέτοιου μοτίβου συνεπάγεται μία άσκηση της δημιουργικής φαντασίας που επιτρέπει την διασύνδεση διακριτών, διορατικών συλλήψεων σε ένα συνεκτικό όλο [Briesach, 1983].

Υπό αυτή την έννοια είναι, ενδεχομένως, σημαντικό να διερευνηθεί το ποιές συγκεκριμένες δεξιότητες προσφέρει στους

μαθητές μία τέτοιου είδους εξάσκηση στην Ιστορία και το κατά πόσο οι δεξιότητες αυτές μπορεί να συμβάλλουν στον χειρισμό της ανοικτότητας των Μαθηματικών. Η διαπίστωση των Grugnetti και Rogers ότι "υπάρχουν ενδεχομένως ορισμένες δεξιότητες και διαδικασίες που χρησιμοποιούνται στην μελέτη της Ιστορίας, και οι οποίες είναι επίσης χρήσιμες στην μελέτη των Μαθηματικών" έχει ενδιαφέρουσες προεκτάσεις παρά το γεγονός ότι η άποψή τους για το τί συνιστά Ιστορία δεν ανταποκρίνεται πλήρως στη σύγχρονη Φιλοσοφία της Ιστορίας, καθώς περιορίζει την ιστορική έρευνα στον προσδιορισμό αιτιών και αποτελεσμάτων μέσω λογικής και επιχειρημάτων και την καθιστά αποδεικτική διαδικασία "ανάλογη με την μαθηματική αιτιολόγηση" [Grugnetti and Rogers, 2000, p. 53]. Ωστόσο, σύμφωνα με τον Collingwood, "η Ιστορία μας προσφέρει κάτι ολότελα διαφορετικό από τους κανόνες, μας προσφέρει διορατικές συλλήψεις" [Collingwood, 1939, p. 101] τις οποίες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως διαγνωστικά εργαλεία διαύγασης της πραγματικότητας. Μιά ενδιαφέρουσα ανάλυση αυτής της διαγνωστικής λειτουργίας της Ιστορίας μας προσφέρει ο Carl Popper, ο οποίος ισχυρίζεται ότι ο μείζων ρόλος της Ιστορίας δεν είναι η διευκρίνιση αιτιακών σχέσεων αλλά η συνειδητοποίηση του γεγονότος ότι σημαντικά κοινωνικά αποτελέσματα ανδύονται μέσα από πολύπλοκες αλληλεπιδράσεις και ότι πολύ συχνά τα αποτελέσματα αυτά δεν μπορούν να αποδοθούν σε συγκεκριμένους σκοπούς, αιτίες ή επιδιώξεις. Κατά τον Popper η μελέτη της Ιστορίας έχει ένα μόνο στόχο: να μας εξοικειώσει με την αναπόφευκτη πραγματικότητα ότι οι ανθρώπινες πράξεις έχουν συνέπειες που υπερβαίνουν κατά πολύ τις ανθρώπινες προβλέψεις [Popper, 1959]. Υπό αυτή την έννοια, η εξάσκηση στην Ιστορία μπορεί να εξοικειώσει τους μαθητές με τις έννοιες της ανοικτότητας και της πολλαπλότητας που φαίνεται να εμπλέκονται συστηματικά στις διαδικασίες της μορφοποίησης και επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων.

Η χρησιμότητα μιας τέτοιας διαθεματικής προσέγγισης έχει ήδη εντοπιστεί δειλά από τον Roy Pea ο οποίος, σχολιάζοντας το άρθρο του Kilpatrick, αναρωτιέται εάν δεν θα μπορούσε η διδακτική των

Μαθηματικών να ωφεληθεί από "τις δραστηριότητες διαμόρφωσης προβλημάτων που εκτελούνται σε άλλες γνωστικές περιοχές όπως είναι οι θετικές επιστήμες ή η συγγραφή δοκιμίων στην κοινωνικές σπουδές και την ιστορία" [Kilpatrick, 1987, p. 145]. Η πρόσφατη προσπάθεια εισαγωγής της Ευέλικτης Ζώνης στο Δημοτικό Σχολείο στην Ελλάδα μπορεί να ειπωθεί ως προσπάθεια υλοποίησης μιας τέτοιας σύνθετης προβληματικής. Και η πραγματικότητα αυτή θα καθορίσει με τρόπο ουσιαστικό, πέρα από κάθε άλλη διανοητική επιλογή, την αιζέντα της Διδακτικής των Επιστημών στα επόμενα χρόνια. Η ανάγκη για λεπτομερείς εμπειρικές και φιλοσοφικές μελέτες πάνω στην διασύνδεση των γνωστικών αντικειμένων που συμμετέχουν στο πρόγραμμα σπουδών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης καθίσταται πλέον επείγουσα καθώς γίνεται ορατός ο κίνδυνος να διαστραφεί, μέσα στην πραγματικότητα του Δημοτικού Σχολείου, η προβληματική της διαθεματικότητας, είτε σε ρητορική κενότητα, είτε σε τυπολατρική συρραφή.

iii. φυσική κατανόηση και πραγματικότητα

Η διερεύνηση της ανοιχτότητας των Μαθηματικών αποτελεί ενδιαφέρον ερώτημα για την Διδακτική, η σημασία του οποίου γίνεται ιδιαιτέρως ορατή μετά από την επιχειρούμενη στροφή των παιδαγωγών προς την μελέτη των "ανοιχτών προβλημάτων". Η διαπίστωση ότι τα πραγματικά προβλήματα διατυπώνονται εξ ανάγκης με τρόπο ελλιπή [Kilpatrick, 1987, p. 134] και ότι δεν υπάρχει εγχειρίδιο που να παρέχει οδηγίες για την διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσει ο λύτης πραγματικών προβλημάτων [Pollak, 1987, p. 254] υποδεικνύει δύο ανοιχτά ζητήματα. Το πρώτο αφορά στην διαδικασία της μαθηματικής "μοντελοποίησης" του προβλήματος [Kilpatrick, 1987, p. 144], δηλαδή στην διατύπωση των μαθηματικών εξισώσεων που το περιγράφουν ικανοποιητικά, και το δεύτερο στην επιλογή των μεταβλητών ως προς τις οποίες πρέπει να επιλυθούν οι συγκεκριμένες εξισώσεις [Pollak, 1987, p. 253]. Είναι σαφές ότι και τα δύο αυτά ζητήματα προϋποθέτουν ένα είδος κατανόησης που υπερβαίνει τα όρια αυτού που παραδοσιακά αντιλαμβανόμαστε ως μαθηματική σκέψη: υπάρχουν μελέτες που καθιστούν σαφές ότι η ποιοτική

ανάλυση είναι αναγκαία προϋπόθεση για την επίλυση προβλημάτων και προηγείται της ποσοτικής διαπραγμάτευσης [Silver, 1987]. Ωστόσο αυτή η δυσιστική αντιμετώπιση της επίλυσης των προβλημάτων ως μίας διαδικασίας δύο φάσεων δεν λαμβάνει υπ' όψιν της το γεγονός ότι η λεγόμενη "ποιοτική" κατανόηση φαίνεται να συμμετέχει σε όλες τις φάσεις του μαθηματικού χειρισμού των προβλημάτων: στον προσδιορισμό των ποσοτήτων που περιγράφουν ικανοποιητικά το πρόβλημα [Greeno, 1987, p. 73], στην κατανόηση του νοήματος των συμβολικών αναπαραστάσεων [Maurer, 1987, p. 170], καθώς και στην κατανόηση του νοήματος των μαθηματικών διαδικασιών [Schoenfeld, 1987b, p. 3].

Ίσως είναι προτιμότερο να επιλέξουμε μία τολμηρότερη στάση απέναντι στα Μαθηματικά η οποία θα αμφισβητεί –ή και θα καταργεί ολοσχερώς– την διάκριση ανάμεσα στην ποσοτική και την ποιοτική συνιστώσα της μαθηματικής σκέψης. Είτε μιλάμε για το πλαίσιο των μαθηματικών προβλημάτων, είτε μιλάμε για την αναπλαισίωση του μαθηματικού προβλήματος μέσω επάλληλων αναπαραστάσεων, είτε μιλάμε για την κατανόηση των μαθηματικών διαδικασιών, είναι σαφές ότι η διαδικασία της μαθηματικής σκέψης προϋποθέτει ένα είδος *φυσικής κατανόησης* η οποία κινείται σε πορεία παράλληλη με αυτή την μαθηματικής διαπραγμάτευσης.

3. Φυσική και Μαθηματικά: Μια σχέση συμπληρωματικότητας

Από την σκοπιά της Ιστορίας των Επιστημών η σχέση μεταξύ Φυσικής και Μαθηματικών θεωρείται αυτονόητη: η μαθηματοποίηση της φύσης που ολοκληρώθηκε με την υιοθέτηση της Νευτώνειας αντίληψης για τον κόσμο χαρακτηρίζει ολόκληρη την ιστορία των λεγόμενων θετικών επιστημών. Η διαδικασία αυτή υπήρξε διανοητικά επίπονη αλλά και συναρπαστική, και είναι δυστύχημα που δεν έχει βρεθεί ακόμη τρόπος να ενσωματωθεί στην διδακτική πρακτική η διανοητική της

διάσταση. Απ' όλη αυτή την απίστευτη περιπέτεια της ανθρώπινης διανόησης έχει επιβιώσει ένα μόνο συμπέρασμα: ότι τα Μαθηματικά αποτελούν την "γλώσσα της φύσης". Αλλά και αυτό ακόμη το συμπέρασμα, μέσα από την αέναη και ασυλλόγιστη αναπαραγωγή του, έχει χάσει κάθε δυνατότητα να παράγει νοηματογόνες σκέψεις. Η σχέση Μαθηματικών και Φυσικής παρουσιάζεται, σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης, ως μία σχέση αποκλειστικά εργαλειακή. Για την προοπτική της ανατροπής αυτής της αμιγώς εργαλειακής σχέσης και την αντικατάστασή της με μία περισσότερο οργανική σχέση ανάμεσα στα δύο πεδία, η οποία θα αντικατοπτρίζει όχι μόνο την διδακτική αλλά και την ιστορική διάσταση της αλληλεπίδρασής τους, έχει εκφράσει ενδιαφέροντα επιχειρήματα ο Κώστας Τζανάκης σε μιά εργασία με τον δηλωτικό τίτλο "Μαθηματική Φυσική" και "Φυσικά Μαθηματικά": ιστορική προσέγγιση των διδακτικών όψεων της μεταξύ τους σχέσης' [Τζανάκης, 1999]. Από την εργασία αυτή γίνεται σαφές ότι η Φυσική και τα Μαθηματικά αποτελούν συμπληρωματικές μορφές σκέψης που ενυπάρχουν σε μία διερευνητική διαδικασία της οποίας η εναισιότητα καθορίζεται και επιβάλλεται από την ίδια την εναισιότητα του φυσικού κόσμου, και ότι η ιστορική ανάλυση καταδεικνύει αυτή την εναισιότητα, διότι καθιστά σαφές ότι η διεύρυνση της γνώσης μας για τον φυσικό κόσμο προκύπτει μέσα από την αλληλεπίδραση αυτών των δύο μορφών σκέψης: από την άποψη της Μαθηματικής Φυσικής, η μαθηματική διαπραγμάτευση μπορεί να οδηγήσει σε αναδιάταξη της ερμηνείας της φυσικής πραγματικότητας είτε με την εισαγωγή νέων εννοιών είτε με την ανάδειξη ενδεχόμενων προεκτάσεων των ήδη εμπεδωμένων εννοιών, ενώ από την πλευρά των Φυσικών Μαθηματικών, η διεύρυνση της φυσικής κατανόησης των φαινομένων μπορεί να οδηγήσει στην ανάδυση νέων μαθηματικών αντικειμένων, μεθόδων και θεωριών.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί αναδύεται μία ακόμη σημαντική διάσταση της αλληλεπίδρασης μεταξύ Φυσικής και Μαθηματικών: ο τρόπος με τον οποίο διατυπώνουμε τις ερωτήσεις μας για τον φυσικό κόσμο και ο οποίος επηρεάζει και καθορίζει τις

απαντήσεις στις οποίες καταλήγουμε, είναι προϊόν συνδυασμόρφωσης φυσικών και μαθηματικών περιορισμών. Μέχρι τα μέσα του 19ου αιώνα η μελέτη της υγρής κατάστασης της ύλης έθετε προβλήματα η επίλυση των οποίων υπερέβαινε κατά πολύ τις δυνατότητες της επιστημονικής κοινότητας της εποχής. Ενώ για την φύση των ιδανικών ρευστών υπήρχε επαρκές εννοιολογικό πλαίσιο που συντηρούσε την αισιοδοξία των επιστημόνων ότι η επίτευξη μιας ικανοποιητικής μαθηματικής περιγραφής της συμπεριφοράς τους δεν ήταν αδύνατη, η έννοια της εσωτερικής αντίστασης των πραγματικών υγρών ήταν ένα από εκείνα τα ερωτήματα για τα οποία ο Kuhn λέει ότι οι επιστήμονες κρύβουν κάτω από το χαλί στην διάρκεια της Κανονικής Επιστήμης. Και ενώ οι επιστήμονες είχαν αποδεχθεί ότι η εσωτερική αντίσταση συναρτάται με την μοριακή φύση των υγρών και ότι δεν υπάρχει τρόπος να μελετηθεί ανεξάρτητα από αυτή, η έννοια της υλικής μοριακότητας δεν μπορούσε ακόμη να υποστηριχθεί ούτε πειραματικά ούτε μαθηματικά [Yamalidou, 1998, ch. 4].

Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι η περιγραφή της κίνησης των πραγματικών υγρών ήταν, για το πρώτο μισό του 19ου αιώνα, ένα πρόβλημα που δεν είχε ακόμη μορφοποιηθεί. Πολλοί από τους παράγοντες που καθόριζαν την πλήρη περιγραφή του φαινομένου, ακόμη και σε μακροσκοπικό επίπεδο, παρέμεναν άγνωστοι. Με άλλα λόγια, η μοντελοποίηση του φυσικού προβλήματος ήταν αδύνατη διότι η πολυπλοκότητα της φυσικής πραγματικότητας υπερέβαινε το επίπεδο πολυπλοκότητας που επέτρεπαν τα διαθέσιμα μαθηματικά εργαλεία. Η διευθέτησης αυτής της προβληματικής κατάστασης μπορούσε να επιχειρηθεί με δύο τρόπους: είτε θα επιχειρούσαν οι επιστήμονες να απλοποιήσουν το πρόβλημα χρησιμοποιώντας παραδοχές που θα επέτρεπαν την διατύπωση μαθηματικών εξισώσεων, είτε θα διατηρούσαν την φυσική πολυπλοκότητα και θα επιχειρούσαν να προσδιορίσουν πειραματικά τις σχέσεις μεταξύ των παραμέτρων του προβλήματος.

Είναι προφανές ότι ένας μαθηματικός όπως ο George Green θα επέλεγε το πρώτο ενδεχόμενο. Λιγότερο προφανής, αλλά

περισσότερο ενδιαφέρουσα είναι η άποψή του για την σχέση ανάμεσα στην Φυσική και τα Μαθηματικά. Όπως έγραψε χαρακτηριστικά στην σημαντική του εργασία για τον ηλεκτρισμό και τον μαγνητισμό "η εφαρμογή της μαθηματικής ανάλυσης στις φυσικές επιστήμες έχει ένα διπλό πλεονέκτημα. Καταδεικνύει τις εξαιρετικές δυνατότητες που μας παρέχει αυτό το υπέροχο εργαλείο της σκέψης και, ταυτοχρόνως, αυξάνει αυτές τις δυνατότητες" [Green, 1828, p. 7]. Αυτή η ίδια αντίληψη καθόρισε την προσέγγιση που υιοθέτησε στην μελέτη της κίνησης του επιμήκους κύματος σε στενά και ρηχά κανάλια [Green, 1837, p. 226]. Συνδυάζοντας την μαθηματική ανάλυση με ρεαλιστικές υποθέσεις για το υπό εξέταση φαινόμενο κατάφερε να το απλοποιήσει με τρόπο που δεν ενοχλούσε και δεν περιόριζε την φυσική του κατανόηση. Υπέθεσε ότι το πλάτος και το μήκος του καναλιού είναι μικρά συγκρινόμενα με το μήκος του κύματος, γεγονός που του επέτρεψε να αναλύσει την κίνηση του υγρού κατά μία μόνο διάσταση [ο.π., p. 226]. Η θεωρία του δεν μπορούσε να εφαρμοστεί ούτε στην διάδοση του επιμήκους κύματος στην θάλασσα ούτε και στην περίπτωση της παλίρροιας, όπως είχε ελπίζει ο John Scott Russell, ο πρώτος που παρατήρησε το επιμήκες κύμα [Russell, 1837, p. 423], όμως οι μαθηματικοί τύποι στους οποίους κατέληξε ο Green για το ύψος, το μήκος και την ταχύτητα των κυμάτων έδιναν αποτελέσματα συμβατά με τις εμπειρικές παρατηρήσεις του Russell.

Στην ανάλυση του Green γίνεται σαφής μία αναπόφευκτη όψη της επιστημονικής διαπραγμάτευσης που μοιάζει, κατ' αρχάς, παράδοξη: η φυσική πραγματικότητα χαρακτηρίζεται από μία εγγενή ασάφεια την οποία, ωστόσο, η επιστημονική σκέψη καλείται να μοντελοποιήσει και να καταστήσει διαχειρίσιμη. Στην περίπτωση της κίνησης των υγρών, η ασάφεια εισάγεται κυρίως λόγω της πλήρους αδυναμίας των επιστημόνων να διευκρινίσουν τί ακριβώς συνεπάγεται η υπο-μικροσκοπική μοριακότητα της ύλης για την μακροσκοπική ανάλυση των φυσικών φαινομένων. Όπως και στις περισσότερες περιπτώσεις των μοριακών μελετών του πρώτου μισού του 19ου αιώνα, ο Green εισάγει στην ανάλυσή του

την έννοια των "σωματιδίων" και διατυπώνει φυσικές παραδοχές για την συμπεριφορά τους παρά το γεγονός ότι αδυνατεί να προσδιορίσει με σαφήνεια την φύση αυτών των σωματιδίων. Ωστόσο οι παραδοχές αυτές ήταν απαραίτητες διότι νοσηματοδοτούσαν, με τρόπο καθοριστικό, τις μαθηματικές του επιλογές [Green, 1837, p. 230].

Με βάση τα παραπάνω μπορεί κανείς να ισχυριστεί ότι η κατανόηση της ιστορικής αλληλεπίδρασης της Φυσικής και των Μαθηματικών καθιστά υποχρεωτική την διδακτική τους *διασύνδεση* και όχι απλώς την διδακτική τους *σύζευξη*, διότι η σχέση Φυσικής και Μαθηματικών δεν είναι μία σχέση *μεταφοράς γνώσης* από την μία γνωστική περιοχή στην άλλη. Αυτό που την χαρακτηρίζει είναι κυρίως μία *στάση* του σκεπτόμενου νου που επιχειρεί να συγκεράσει την διαίσθηση με την λογική αυστηρότητα, που επιχειρεί να διαυγάσει τους υπαρκτούς περιορισμούς και ταυτοχρόνως να τους υπερβεί μεταπλάθοντάς τους, που επιχειρεί, τελικά, να καταλήξει σε νοσηματογόνες σκέψεις για τον φυσικό κόσμο χρησιμοποιώντας όλα τα διαθέσιμα εννοιολογικά εργαλεία που του παρέχει η κουλτούρα στην οποία συμμετέχει. Υπό αυτή την έννοια, η ιστορική σχέση Φυσικής και Μαθηματικών καθιστά αναγκαία μία νέα διαθεματική προσέγγιση, η οποία θα επιχειρεί να διαυγάσει την οργανική τους συμπληρωματικότητα και να την καταστήσει παιδαγωγικά λειτουργική. Οι μαθητές του Δημοτικού Σχολείου, όπως και οι ενεργοί επιστήμονες, έρχονται κάθε μέρα αντιμέτωποι με μία αναπόφευκτη πραγματικότητα: οι γνώσεις τους δεν επαρκούν για την διευθέτηση των ερωτημάτων που ανακύπτουν κατά την διάρκεια της μαθητείας τους. Ο βασικός στόχος της διδασκαλίας δεν είναι να παρέχει στους μαθητές τις "σωστές" απαντήσεις αλλά να τους καταστήσει ικανούς να αναγνωρίζουν την σημασία ενός μεταγνωστικού ζητήματος "πώς πρέπει να τεθεί ένα συγκεκριμένο ερώτημα ώστε να είναι δυνατή η απάντησή του" και να διακρίνουν ποιές από τις γνώσεις που έχουν ήδη κατακτήσει μέσα από την ενασχόλησή τους με διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα μπορούν να συμβάλλουν τόσο στην διατύπωση όσο και την διευθέτηση αυτού του ερωτήματος.

Μία τέτοια προσέγγιση η οποία παρουσιάζει την επιστήμη ως μία αναστοχαστική διαδικασία συνεχούς διερώτησης και καθιστά κεντρική την επιταγή της σαφήνειας των ερωτημάτων μπορεί να αντιπαλέψει και να δαμάσει την έννοια της ασάφειας του πραγματικού κόσμου, η οποία φαίνεται να προβληματίζει τους παιδαγωγούς. Μπορεί να καταστήσει σαφές στους μαθητές ότι η κατανόηση της πραγματικότητας είναι μία νοητική διεργασία κατά την διάρκεια της οποίας ο σκεπτόμενος άνθρωπος διεκδικεί σταδιακά και εδραιώνει κομμάτια ευκρίνειας μέσα από ένα δυσπρόσιτο σύνολο αρχικώς ασαφών φαινομένων. Η σημαντικότερη συμβολή της Ιστορίας των Επιστημών –όχι ως περιεχόμενο αλλά ως αναστοχαστική διερεύνηση– στην Διδακτική είναι, ενδεχομένως, αυτή: η Ιστορία, μπορεί να καταδείξει ότι η ασάφεια της πραγματικότητας δεν είναι διανοητικά επικίνδυνη. Αντιθέτως, είναι αναζωογονητική. Η πρόσκληση του John Tyndall, Βρετανού πειραματικού του 19ου αιώνα: "ελάτε μαζί μου σε ένα ταξίδι προς το άγνωστο" [Tyndall, 1876, p. 425] παραμένει, πιστεύω, ένας ανυπερβλήτος ορισμός της διδασκαλίας.

Βιβλιογραφία

- Barnes, B., 1977, *Interests and the Growth of Knowledge*, London: Routledge.
- Becker, C., 1958, 'What are historical facts', ανατυπωμένο στο P. L. Snyder (ed.), *Detachment and the writing of history: essays and letters of Carl L. Becker*, Ithaca, pp. 41-63.
- Bloor, D., 1976, *Knowledge and social imagery*, London.
- Briesach, E., 1983, *Historiography: ancient, medieval, and modern*, Chicago.
- Collingwood, R. G., 1939, *An Autobiography*, Oxford: Oxford University Press.
- Fauvel, J., and J. van Maanen, 2000, *History in mathematics education: the ICMI study*, Dordrecht: Kluwer.
- Furinghetti, F. and A. Somaglia, 2005, 'The history of mathematics and teacher education in practice: a case study', στο M. Kourkoulos, G.

- Troulis and C. Tzanakis (eds.), 2005, *Proceedings of the 4th International Colloquium on the didactics of mathematics*, 2 vols., Rethymnon: University of Crete, pp. 107-118.
- Fried, M. N., 2001, 'Can mathematics education and history of mathematics coexist?' *Science and education*, vol. 10, pp. 391-408.
- Green, G., [1828], 'An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism', ανατυπωμένο N. M. Ferrers (ed.), 1970, *Mathematical Papers of George Green*, New York, pp. 1-115.
- Green, G., [1837] 'On the motion of waves in a variable canal of small depth and width', ανατυπωμένο στο N. M. Ferrers (ed.), 1970, *Mathematical Papers of George Green*, New York, pp. 223-230.
- Greeno, J. G., 1987, 'Instructional representations based on research about understanding', στο A. H. Schoenfeld (ed.), *Cognitive science and mathematics education*, London, pp. 61-88.
- Grugnetti, L. and L. Rogers, 2000, 'Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues', στο J. Fauvel and J. van Maanen, *History in mathematics education: the ICMI study*, Dordrecht: Kluwer, ch. 2, pp. 39-62.
- Johnson-Laird, P. N., 1983, *Mental Models: towards a cognitive science of language, inference, and consciousness*, Cambridge: Cambridge University Press, ch. 9.
- Kilpatrick, J., 1987, 'Problem formulation: where do good problems come from?', στο A. H. Schoenfeld (ed.), *Cognitive science and mathematics education*, London, pp. 123-147.
- Kourkoulos, M., G. Troulis and C. Tzanakis, 2005, *Proceedings of the 4th International Colloquium on the didactics of mathematics*, 2 vols., Rethymnon: University of Crete.
- Kuhn, T. S., 1977, *The essential tension: selective studies in scientific tradition and change*, Chicago.
- Kuhn, T. S., 1981, *Η δομή των επιστημονικών επαναστάσεων*, Θεσσαλονίκη: Σύγχρονα Θέματα.
- Lingard, D., 2001, 'Η ιστορία των μαθηματικών: Ένα απαραίτητο στοιχείο του αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών του σχολείου', στο Δ. Χασάπης, *Πρακτικά του 1ου Δημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, Θεσσαλονίκη, σελ. 17-25.

- Maurer, S. B., 1987, 'New knowledge about errors and new views about learners: what they mean to educators and more educators would like to know', στο A. H. Schoenfeld (ed.), *Cognitive science and mathematics education*, London, pp. 165-187.
- Musil, R., 1955, *The man without qualities*, London: Vintage.
- Pea, R. D., 1987, 'Cognitive technologies for mathematics education', στο A. H. Schoenfeld (ed.), *Cognitive science and mathematics education*, London, pp. 89-122.
- Polanyi, M., 1974, *Personal knowledge: towards a post-critical philosophy*, Chicago.
- Pollak, H. O., 1987, 'Cognitive science and mathematics education: a mathematician's perspective', στο A. H. Schoenfeld (ed.), *Cognitive science and mathematics education*, London, pp. 153-264.
- Popper, C., 1959, 'Critiques of classical theories of history', στο P. Gardiner (ed.), *Theories of history*, London: The Free Press.
- Ritter, R., 1961-62, 'Scientific history, contemporary history, and political science', *History and Theory*, vol. 1, pp. 261-279.
- Russell, J. S., and J. Robinson, 1837, 'Report of the committee on waves', *Report BAAS 7th Meeting*, Liverpool, part 1, pp. 417-496.
- Schoenfeld, A. H., (ed.), 1987a, *Cognitive Science and Mathematics Education*, London.
- Schoenfeld, A. H., 1987b, 'Cognitive science and mathematics education: an overview', στο A. H. Schoenfeld (ed.), *Cognitive science and mathematics education* London, pp. 1-31.
- Schoenfeld, A. H., 1987c, 'What's all the fuss about metacognition?', στο A. H. Schoenfeld (ed.), *Cognitive science and mathematics education*, London, pp. 189-215.
- Silver, E. A., 1987, 'Foundations of cognitive theory and research for mathematics problem-solving instruction' στο A. H. Schoenfeld (ed.) *Cognitive science and mathematics education*, London, pp. 33-66.
- Slezak, P., 1994, 'Sociology of Scientific Knowledge and Education: Part I', *Science & Education*, vol. 3, pp. 265-294.
- Tyndall, J., 1876, 'Scientific use of the imagination', στο John Tyndall, *Fragments of science: a series of detached essays, addresses and reviews*, 5th edition, London, pp. 423-458.

- Tzanakis, C., 1999, '"Mathematical Physics" and "Physical Mathematics": a historical approach to didactical aspects of their relation', στο P. Radelet & D. Janssens (eds.), *Proceedings of the 3rd European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education*, Leuven: Katholieke Universiteit Leuven, vol. I, pp.65-80).
- Valero, P., 2004, 'Τι σχέση έχει η εξουσία με τη μαθηματική εκπαίδευση;' στο Δ. Χασάπης, *Πρακτικά του 4ου Δημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, Θεσσαλονίκη, σελ. 25-43.
- Wenger, R. H., 1987, 'Cognitive science and algebra learning', στο A. H. Schoenfeld (ed.), *Cognitive science and mathematics education*, London pp. 217-251.
- White, H., 1978, 'On History: advice to a journalist' στο H. White, *Tropics of Discourse*, Baltimore.
- Yamalidou, M., 1996, *Thinking in molecular terms: British science around the middle of the nineteenth-century*, Ph.D. thesis, University of Lancaster.
- Yamalidou, M., 1998, 'Molecular ideas in hydrodynamics', *Annals of Science*, vol. 55, pp. 369-400.
- Yamalidou, M., 2001, 'Molecular representations: building tentative links between the history of science and the study of cognition', *Science and Education*, vol. 10, pp. 423-452.
- Καστάνης, Ν., 2001, 'Η ιστορία των μαθηματικών ως συνιστώσα του μεταγνωστικού υπόβαθρου των δασκάλων του σχετικού μαθήματος', στο Χασάπης, Δ., *Πρακτικά του 1ου Δημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, Θεσσαλονίκη, σελ. 27-53, ιδιαίτερος στις σελ. 40-53.
- Καστοριάδης, Κ., 1990, *Ομιλίες στην Ελλάδα*, Αθήνα: Ύψιλον.
- Καστοριάδης, Κ., 2003, *Φιλοσοφία και Επιστήμη. ένας διάλογος με τον Γεώργιο Α. Ευαγγελόπουλο*, Αθήνα: Εκδόσεις Ευρασία.
- Μορέν, Ε., 2000, *Το καλοφτιαγμένοΚεφάλι*, Αθήνα: Εκδόσεις του Εικοστού Πρώτου.
- Χασάπης Δ., και Μ. Κοτσακώστα, 2001, 'Χρησιμοποιώντας ένα ιστορικό πρόβλημα των μαθηματικών ως επίκεντρο μαθηματικής δραστηριότητας σε μία τάξη του Δημοτικού Σχολείου', στο Δ. Χασάπης, *Πρακτικά του 1ου Δημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, Θεσσαλονίκη, σελ. 137-148.

ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙ

**Θέματα ιστορίας των μαθηματικών και της
μαθηματικής εκπαίδευσης**

Η ΘΕΩΡΙΑ ΛΟΓΙΚΩΝ ΤΥΠΩΝ: ΕΝΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΤΗΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΚΟΙΝΩΝΙΑΣ ΜΕ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Αναστάσιος Τοκμακίδης

Δρ. Μαθηματικών – Διαπολιτισμικό Γυμνάσιο Ευόσμου

Η διδακτική και η φιλοσοφία της επιστήμης δεν μελετούν μόνο τις σχέσεις κάθε ατόμου με τον κόσμο και τις γνώσεις του γι' αυτόν, αλλά επιδεικνύουν την τάση να πραγματεύονται το αντικείμενό τους αφενός μ' έναν πολύ πρακτικό και άμεσο τρόπο – όπως π.χ. προκύπτει από τους ηθικούς κανόνες των σχέσεων ή από την παιδαγωγική μεθοδική της διδασκαλίας – κι αφετέρου από την πολύ αξιωματική και εν μέρει θεωρητική και αφηρημένη μορφή της αποδεικτικής διαδικασίας.

Η επιστήμη αποτυγχάνει όταν γίνεται όλο και πιο τεχνική, ενώ η φιλοσοφία όταν σκέφτεται όλο και πιο αξιωματικά και θεωρητικά. Η επιστήμη προσπαθεί – περισσότερο ή λιγότερο επιτυχημένα – να προσεγγίσει με πιο συγκεκριμένους τρόπους την πραγματικότητα, που ως προς την ουσία της τη θεωρεί ήδη χειροπιαστή. Όλα τα προβλήματα φαίνονται επιλύσιμα. Η φιλοσοφία από την πλευρά της μας παραπέμπει στο γεγονός ότι κάθε επιλύσιμο πρόβλημα αποτελεί μέρος ενός άλλου ανεπίλυτου και πως η όλο και καλύτερη προσέγγιση της πραγματικότητας μέσα από τη γνώση είναι μία αυ-ταπάτη. Οι θεωρίες δεν αναφέρονται προσεγγιστικά σε μία υπάρχουσα, ήδη προσδιορισμένη πραγ-ματικότητα, αλλά σε μία ιδεώδη και κυρίως αντικειμενικά απροσδιόριστη.

Και οι δύο αυτές πλευρές συναντιούνται στα μοντέρνα Μαθηματικά με μία ξεχωριστή μορφή. Αφενός ενσωματώνεται σ' αυτά, και ειδικότερα στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές, η μεθοδική αυστηρότητα της δυαδικής λογικής και αφετέρου η δυναμική της εσωτερικής τους εξέλιξης δεν συ-ντηρείται καθόλου από μεταφορές, όπως αυτή του άπειρου. «Δεν μπορούμε ν' αρνηθούμε ότι μέσα μας είναι ζωντανή, από καθαρά φαινομενική αντίληψη, μία εντελώς ακατανόητη θεωρητική ανα-γκαιότητα, που οδηγεί στην ολοκλήρωση. Τα Μαθηματικά το αποδεικνύουν αυτό με ξεχωριστή σα-φήνεια. Θέλοντας κανείς με μία λέξη να αποδώσει το ζωντανό πυρήνα των Μαθηματικών, τότε πρέπει να πει: Τα Μαθηματικά αποτελούν την επιστήμη του άπειρου» [WEYL 1966, 89]. Τα λόγια αυτά πρέπει τόσο στη σημερινή εποχή, όσο και στη δική τους, να συμπληρωθούν με το ρόλο των Μαθηματικών και την αλληλεπίδρασή τους με την τεχνική. Συσχετίζοντας μάλιστα την αρνητική αρχικά αντιμετώπιση των μαθηματικών απέναντι στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές – που τους θε-ωρούσαν χειρότερους και πιο επικίνδυνους από τα πολυβόλα – αντιλαμβανόμαστε τη δυσκολία της κατανόησης αυτής της ειδικής πλευράς των Μαθηματικών, που σχετίζεται με τις διάφορες μορφές και τεχνικές στη ζωή μας.

*Το γιατί συμβαίνει αυτό δεν μπορεί να απαντηθεί με μία πρόταση, αλλά μέσα από τις ξεχωριστές σχέσεις της εκπαίδευσης και των Μαθηματικών με τη βοήθεια της θεωρίας των λογικών τύπων. Επίσης, **η έννοια της συμπληρωματικότητας** [ΟΤΤΕ 1990] αποτελεί ένα ερμηνευτικό όπλο, τόσο στα πλαίσια της φυσικομαθηματικής όσο και της γνωσιοθεωρητικής επιστήμης. Κοινό πυρήνα και στις δύο αυτές επιστήμες αποτελεί αφενός το ζήτημα του αντικείμενου της μαθηματικής γνώσης και α-φετέρου η σημασία που θα μπορούσε να αποδώσει κανείς στην έννοια του ρεαλισμού στην επιστήμη. Η τελευταία έννοια του ρεαλισμού επιδέχεται σήμερα πολλαπλές ερμηνείες και βρίσκεται στο κέ-ντρο πολλών αντιπαραθέσεων και για το λόγο αυτό είναι τόσο σημαντική, καθώς βρίσκει εφαρμογές σε διάφορες παραστάσεις της συμπληρωματικότητας [ΤΟΚΜΑΚΙΔΗΣ 2004].*

*Ενδεικτικά αναφέρουμε ορισμένα παραδείγματα της αντίληψης της συμπληρωματικότητας του ενι-αίου και του στοιχειώδους: Η κοινωνία και οι άνθρωποι ως άτομα, ο χώρος ως προς τα στοιχεία του χώρου, το μαθηματικό σύνολο ως προς την απαρίθμηση των στοιχείων του. **Η συμπληρωματικότη-τα, που δεν εννοείται ως δυϊκότητα ή πολικότητα, εκφράζεται έντονα μέσα από τα παράδοξα της θεωρίας συνόλων.*** Ο διαχωρισμός ενός συνόλου από τα στοιχεία του γίνεται με τη βοήθεια της θεωρίας των λογικών τύπων. Κανένα σύνολο δεν είναι στοιχείο του εαυτού του. Με τον κατηγορι-κό αυτό διαχωρισμό αποφεύγονται και τα περίφημα παράδοξα της θεωρίας συνόλων. Αλλά από τι αποτελείται ένα σύνολο, αν του πάρουμε όλα τα στοιχεία; Υπάρχει η κοινωνία ανεξάρτητα από τους ανθρώπους; Μπορεί το δάσος να αντιπαρατεθεί στα δένδρα; Σίγουρα αυτά τα αντικείμενα δεν μπορούν να διαχωριστούν εντελώς, πρέπει όμως να τους αναγνωρισθεί μία ανεξάρτητη ύπαρξη για το καθένα ξεχωριστά.

Η **μεταρρύθμιση των Μαθηματικών** στις δεκαετίες του '60 και '70 είχε στηρίξει τις ελπίδες της στην αξιοποίηση της θεωρίας συνόλων ως φιλοσοφικό υπόβαθρο της μάθησης των Μαθηματικών. Όπως είναι γνωστό η εκπαιδευτική αυτή μεταρρύθμιση ναυάγησε και ως τις μέρες μας εξακο-λουθεί να εκκρεμεί η ακριβής επεξεργασία των αιτιών αυτού του ναυαγίου. Παρέχει όμως πολλές διδακτικές συμβουλές, ιδιαίτερα στην προσπάθεια εκείνης της Φιλοσοφίας των Μαθηματικών που επιθυμεί να κινείται σε μεγάλο βαθμό στο «ελεύθερο πεδίο» της φιλοσοφικής σκέψης ως προς την πραγματικότητα [ΟΤΤΕ 1994, 16-17].

Για να ξεπεράσει συγκεκριμένα παράδοξα της μαθηματικής Λογικής, ο Β. RUSSELL (1872-1970) εισήγαγε τον εξής κανόνα: «αυτό που περιέχει πάντοτε όλα τα στοιχεία ενός συνόλου, δεν μπορεί να είναι και στοιχείο του συνόλου αυτού» [RUSSELL 1976, 26]. Π.χ., οι συναρτήσεις ανή-κουν – σύμφωνα με τον παραπάνω κανόνα – σ' έναν ανώτερο λογικό τύπο από τις μεταβλητές τους. Γιατί, για τον ορισμό της συνάρτησης είναι απαραίτητο το σύνολο των μεταβλητών της, σύμ-φωνα με το αξίωμα της επέκτασης. Όπως ξέρουμε, δύο συναρτήσεις f και g καλούνται ίσες, αν για όλες τις

μεταβλητές x συμπίπτουν οι τιμές των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$. Το πέρασμα από την έννοια της μεταβλητής στη γενικότερη έννοια της συνάρτησης αποτελεί κομβικό σημείο της εξέλιξης των Μαθηματικών, από το 17^ο μέχρι και το 19^ο αιώνα. Οι μαθηματικοί του 15^{ου} και 16^{ου} αιώνα «α-σχολούνταν με την επίλυση των εξισώσεων ανώτερης τάξης, και πραγματικά η Ιστορία των Μαθηματικών της εποχής εκείνης αποτελείται σε μεγάλο βαθμό από την ιστορία των εξισώσεων γ' και δ' τάξης. Όμως η έννοια της μεταβλητής δεν επαρκούσε εννοιολογικά και μαθηματικά για τις φυσικές επιστήμες στο 17^ο αιώνα. Αυτό που απαιτούνταν ήταν η έννοια μίας συνάρτησης. [...] Το καινού-ριο στη μαθηματική έννοια της συνάρτησης ήταν να την αντιμετωπίσουν ως ξεχωριστό μαθηματικό αντικείμενο» [ΑΤΙΥΑΗ 1974, 205].

Περνάμε, λοιπόν, στην έννοια της **γενίκευσης**, που στα Μαθηματικά σημαίνει την εισαγωγή μεταβλητών x και συναρτήσεων $f(x)$ στη θέση των σταθερών μεγεθών. *Ερμηνεύοντας τη «μεταβλητή» ως «παράσταση» και τη «συνάρτηση» ως «έννοια», οδηγούμαστε άμεσα στην αναθεμελίωση της γνωστικής θεωρίας από τον ΚΑΝΤ. Το σύντομο αυτό παράδειγμα της συνάρτησης μας παραπέμπει σίγουρα σ' εκείνη την αναδιάρθρωση της φυσικομαθηματικής σκέψης, που μετατρέπει θεωρίες σε sui generis πραγματικότητες. Τότε οι θεωρίες αυτές βασικά διαχωρίζονται κατηγορικά από το πεδίο των αντικειμένων, στα οποία επιθυμούν να αναφέρονται.*

Τα Μαθηματικά συλλαμβάνουν αυτά τα διαφορετικά επίπεδα των διαφορετικών λογικών τύπων, όπως οι μεταβλητές και οι συναρτήσεις αντίστοιχα, μόνο ως σχετικούς διαχωρισμούς, όπως φαίνεται κι από τις αρχές της δυϊκότητας στη γραμμική άλγεβρα ή την προβολική γεωμετρία. Αντί-θετα ο φιλοσοφικός νομιναλισμός τους θεωρεί απόλυτους, αντιστοιχίζοντας διαφορετικές οντολογικές καταστάσεις στα αντικείμενα και τις συναρτήσεις ή στα σύνολα και τα στοιχεία τους.

Η ιστορική εξέλιξη της μαθηματικής γνώσης έχει αναδείξει με ξεχωριστό τρόπο το γεγονός ότι η ανθρώπινη σκέψη κινείται

ταυτόχρονα σε επίπεδα διαφορετικού λογικού τύπου, διατηρώντας πάντοτε στην αντίληψή της τις διαφορές και τις σχέσεις που τα χαρακτηρίζουν. Στη σημερινή εποχή **η θεωρία των λογικών τύπων** λέει ότι κανένα σύνολο δεν μπορεί να είναι στοιχείο του εαυτού του, πράγμα που επισημαίνεται και στο συμβολικό επίπεδο: Το σύμβολο που εκφράζει το γεγονός ότι το x είναι στοιχείο του συνόλου X ($x \in X$) διαφέρει λογικά από το σύμβολο που λέει ότι το Y είναι υποσύνολο του X ($Y \subseteq X$). Στη μορφή αυτή η θεωρία των τύπων εισήχθη περί το 1880 στην άλγεβρα της λογικής για πρώτη φορά από τον E. SCHRÖDER. Και πως θα επιτευχθεί το αυτονόητο, να μην μπερδεύονται μεταξύ τους οι οντότητες διαφορετικού λογικού τύπου;

Η κατεξοχήν γνωσιοθεωρητική σημασία των Μαθηματικών προκύπτει από το γεγονός ότι τα Μαθηματικά, μία συμβολική θεωρία *par excellence*, οδηγούν στην ψηφιακή επεξεργασία (ψηφιο-ποίηση - Digitalisierung), απαραίτητο παράγοντα της **μετα-επικοινωνίας** [WILDEN 1972, 171]. Αντικείμενο της παρατήρησης μπορεί να γίνει κάτι το οποίο έχει προηγουμένως οριοθετηθεί. Όπως έδειξαν πολλοί επιστήμονες στα τέλη του 19ου αιώνα – H. GRASSMANN (1807-1877), R. DEDE-KIND (1831-1916), C.S. PIERCE (1839-1914) – το σύνολο της Αριθμητικής μπορεί να αναχθεί στο διαχωρισμό του αντικείμενου από την εικόνα ή την ιδέα για το αντικείμενο ή στο διαχωρισμό αντικείμενου και συμβόλου, πράγμα που είναι το ίδιο. Η Γεωμετρία, επίσης, μπορεί να θεμελιωθεί πάνω στην Αριθμητική. Χωρίς μετα-επικοινωνία δεν υπάρχουν Μαθηματικά, γιατί δεν θα μπορεί να επεξεργαστεί κανείς τη διαφορά του αντικείμενου από το συμβολισμό του.

Η συμπερασματική διαδικασία χαρακτηρίζει εκείνη τη μετα-λειτουργία της γνώσης, που προκύπτει από τη σημασία που αποδίδουμε σε κάθε μαθηματικό σύμβολο. Κατά κανόνα η διαδικασία αυ-τή συμβαίνει στα Μαθηματικά με μηχανοποιημένο τρόπο. Μία εξίσωση, π.χ., επιλύεται με προκα-θορισμένα λογικά συμπεράσματα, που υποστηρίζονται από αντίστοιχα φορμαλιστικά θέματα. Και πώς θα μεταφερθεί αυτή η γνώση, μέσω της

*επικοινωνίας, στο μαθητή ή σε οποιονδήποτε άλλον α-πενθύνεται; Σίγουρα η μαθηματική γνώση κινείται σε δύο βασικά επίπεδα διαφορετικού τύπου, που χαρακτηρίζονται αφενός από τις λέξεις **ενόραση ή εμπειρία** και αφετέρου από την **επικοινωνία**. Απαραίτητα διαχωρίζονται και τα δύο αυτά επίπεδα, αλλά συνδέονται και άρρηκτα μεταξύ τους. Αλλιώς θα είχαμε τις αισθητικές μας παρατηρήσεις να συνυπάρχουν ασυνάρτητα με αφηρημένες συζητήσεις.*

Η διαδικασία της μαθηματικής απόδειξης [ΤΟΚΜΑΚΙΔΗΣ 2003] δεν αποτελεί μόνο κεντρικό συστατικό στοιχείο κάθε μαθηματικής μεθοδολογίας, αλλά αντιπροσωπεύει πάντοτε και μία επικοινωνιακή δραστηριότητα. Ειδικότερα η μαθηματική απόδειξη, που στοχεύει στην έκφραση της από-λυτης αλήθειας, πρέπει να ταυτίζεται με τη δική της ορθότητα, αλλιώς προκύπτουν άπειρες αναγω-γές [ΟΤΤΕ 1994, 340-360]. Έτσι, μερικές φορές η απόδειξη μετατρέπεται σε μία αλυσίδα μηχανι-κών, ταυτολογικών μετασχηματισμών, που δεν εξυπηρετεί τη θεμελίωση της γνώσης, αλλά την α-νάπτυξή της. Με τη βοήθεια της απόδειξης μας παρέχονται γνώσεις, που δεν τις κατείχαμε προη-γουμένως. Αν συνίσταται μόνο σε μία ακολουθία ταυτολογικών μετασχηματισμών, τότε το νέο α-νάγεται στο παλιό και η απόδειξη κατανοείται μόνο από εκείνους, που έχουν αποκτήσει τόση ε-μπειρία, ώστε να μπορούσαν να την είχαν ανακαλύψει οι ίδιοι. Η λογική απαγωγή, που συνιστά τα θεμέλια της απόδειξης, δεν αποτελεί μία απλή συντακτική λειτουργία, αλλά παρέχει και μία γενι-κευμένη διαδικασία, αφού τα λογικά και εννοιολογικά συμπεράσματα αποτελούν εφαρμογές μίας γενικής ιδέας πάνω στην παράσταση μιας ιδιαίτερης κατάστασης. *Έτσι, στην απόδειξη αλληλεπι-δρούν και τα δύο επίπεδα της ενόρασης και της λογικής ως στοιχεία μιας εξελικτικής διαδικασίας.*

Σίγουρα κάθε νέα πληροφορία, κάθε νέα γνώση πρέπει να σχετίζεται με το σύστημα των ήδη υ-παρχουσών γνώσεων και πληροφοριών ή να ολοκληρώνεται μέσα στην ήδη εξελιγμένη γνωστική δομή, όπως λένε οι ψυχολόγοι. *Και ποια είναι η προοπτική μέσα από την οποία μπορεί να συμβεί αυ-τό; Κάθε τι νέο*

στη σκέψη, πρέπει από μόνο του να παρέχει σε συγκεκριμένο βαθμό ένα μέτρο της δικής του ανάπτυξης. Αυτό όμως σημαίνει ότι μία έννοια ή ένας όρος πρέπει να δηλώνει αυστηρά τι είναι και τι δεν είναι: μία παράδοση απαίτηση που μπορεί να επιλυθεί μόνο εξελικτικά. Με την εισαγωγή μάλιστα των αντίστοιχων συμβόλων για την αναπαράσταση της δεδομένης έννοιας, που γίνονται **μέσα και αντικείμενα της παρατήρησης** οδηγούμαστε στο **παράδοξο** να συνδέονται η θεμελίωση και η εξέλιξη της γνώσης άρρηκτα μεταξύ τους και να πρέπει ταυτόχρονα να έχουν και δια-φορετική χροιά. Αυτό το παράδοξο, που εκφράζεται στη λογική θεωρία τύπων, θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια για την πρόσβαση των Μαθηματικών σε άλλους τομείς της εμπειρίας, της σκέψης ή της ζωής μας.

Εδώ ακριβώς μπαίνει στο προσκήνιο **η έννοια της εκπαίδευσης**. Η εκπαίδευση περιέχει κι αυτή το παράδοξο να προϋποθέτει τα άτομα ως ίδια και διαφορετικά ταυτόχρονα, αφού προϋποθέτει την κοινωνία ως ενιαίο οργανισμό, παίρνοντας όμως ταυτόχρονα υπόψη την ελευθερία και την ανεξαρτησία κάθε ατόμου ξεχωριστά. Όπως στα Μαθηματικά, έτσι και στο εκπαιδευτικό ζήτημα παίζει καθοριστικό ρόλο το παράδοξο της ενόρασης ή εμπειρίας και της επικοινωνίας. Εκπαίδευση είναι η σχέση του καθένα μας με την κοινωνία, μέσα από την προοπτική του ρόλου της γνώσης και της λειτουργίας της επιστήμης. Η εκπαίδευση «απαντά ειδικότερα στο ζήτημα που έχει δια-μορφωθεί στις σύγχρονες κοινωνίες και αφορά στην εκτενέστερη και ολοένα αυξανόμενη διάθεση για εκπαιδευτική γνώση, σχετική με την υπερνίκηση των εμποδίων της ζωής και την αμοιβαία κατανόηση της καθημερινότητας, η οποία γνώση συμπυκνώνεται σε κείμενα, εικόνες, ακολουθίες συμβόλων και τύπους· η διάθεση αυτή υπερβαίνει κατά πολύ την περιοχή της υπάρχουσας εμπειρίας του κόσμου μας και απαιτεί ξεχωριστούς τρόπους ιδιοποίησης» [ό.π., 25-26, υπογρ. Α.Τ.].

Στην προσπάθεια ένταξης του καθημερινού ανθρώπου στο γνωστικό προσανατολισμό των εξειδικευμένων, αφηρημένων και τεχνικών γνώσεων «ένας σταθερός κανόνας, που όλο και περισσότε-

ρο απαιτείται από πολλές πλευρές που συμμετέχουν στη συζήτηση [για το εκπαιδευτικό ζήτημα, Α. Τ.], έρχεται σε αντιπαράθεση με το πλουραλιστικό σύστημα αξιών μας. [...] Έτσι, υποστηρίζεται η ευρεία προσφορά εκπαιδευτικών δυνατοτήτων, από τις οποίες προκύπτει μία παραδειγματική επι-λογή, αντί για το φερόμενο κανόνα της γενικής εκπαίδευσης από μία ελιτίστικη κοινωνία» [BECK-ER 1980]. Εδώ τίθεται και το ερώτημα της συνεισφοράς της εκπαίδευσης στις δυνατότητες της επι-κοινωνίας μέσα στην κοινωνία. «Μέσα στα πλαίσια των εναλλακτικών λύσεων της διαμάχης αυτής θα λέγαμε ότι πρόκειται για ένα τυπικό άλμα (Typensprung)» [OTTE 1994, 26], σύμφωνα πάντοτε με τη λογική θεωρία τύπων του RUSSELL.

Η τυπική θεωρία οδηγεί αναγκαστικά σε μία διαφοροποίηση ανάμεσα στη γνώση και τον κό-σμο, ανάμεσα στη θεωρία και τις εφαρμογές της. *Κι ακριβώς το πρόβλημα των εφαρμογών και η διαφοροποίησή του από τις θεμελιωμένες θεωρίες ήταν που οδήγησε το δεύτερο μισό του 19^{ου} αιώνα στην ενασχόληση των μαθηματικών με τη λογική θεωρία τύπων.* Ο KANT αρχικά και ο B. BOLZANO (1781-1848) αργότερα ήταν οι πρώτοι που επισήμαναν τη σημασία που θα είχε για τα Μαθημα-τικά η θεωρητική συνάφεια του αντικείμενου, μέσα στα πλαίσια της σχετικής του ανεξαρτησίας από υποκειμενικά ή εμπειρικά ζητήματα.

Οι κανόνες της θεωρίας τύπων επισημαίνουν το γεγονός ότι δεν μπορούμε να θεματικοποιήσου-με ταυτόχρονα όλες τις προϋποθέσεις, τα λήμματα, τις αρχές και τα συμπεράσματα της σκέψης μας. *Τα Μαθηματικά (και η επιστήμη γενικά) δεσμεύονται με τη γενίκευση και ταυτόχρονα με την ε-ξειδίκευση της γενίκευσης αυτής.* Και οι δύο αυτές υποθέσεις διατυπώνονται μέσα από την προοπτι-κή των προϋποθέσεων εξέλιξης της επιστήμης κι ακριβώς αυτές οι προϋποθέσεις είναι που καθορί-ζονται από το ζήτημα των εφαρμογών. Στην ουσία το ζήτημα των εφαρμογών είναι που ενοχλεί τον αυτοτελή χαρακτήρα της επιστήμης, που σε ορισμένες περιπτώσεις καταστρέφει την ορθολογικότη-τά της. Στα πλαίσια της εκπαίδευσης το γεγονός αυτό εκφράστηκε με την προσπάθεια του J. BRUNER να θεμελιώσει το αναλυτικό πρόγραμμα των

Μαθηματικών πάνω σε βασικές δομές και πρω-ταρχικές ιδέες, για ν' αξιοποιήσει τα προτερήματα των θεωρητικών γενικεύσεων. Οι ιδέες αυτές ό-μως σπάνια είναι άμεσα προσβάσιμες για τον καθένα, αφού έχουν αφηρημένο χαρακτήρα και οδη-γούν στην αντίστροφη στρατηγική, που διαμορφώνει τη μαθησιακή διαδικασία μέσα από στενά ε-μπειρικές, συγκεκριμένες απαιτήσεις. Οι στρατηγικές αυτές των «back to basics» ναυαγούν κι εξαι-τίας του γεγονότος ότι ο άνθρωπος είναι μία πολύπλοκη οντότητα και πως στην ουσία δεν υπάρ-χουν γενικά δεσμευτικές αρχές για όλα τα άτομα. Έτσι, *«το πρόβλημα της εκπαίδευσης κατά μία γε-νικότερη έννοια έχει παρόμοια δομή με το πρόβλημα των εφαρμογών της επιστήμης· και οι δύο τομείς προσδιορίζονται από προβληματισμούς ιεραρχικής διαμόρφωσης τύπων, που σχετίζονται με τα επίπε-δα επεξεργασίας τους»* [ό.π., 27-28, υπογρ. Α.Τ.].

Οι επιστήμονες υπεραμύνονται της αυτονομίας των στόχων και μεθόδων τους, υποστηρίζοντας με τον τρόπο αυτόν την ταύτιση της επιστήμης ως ενός ειδικού κοινωνικού υποσυστήματος. Ελλο-χεύει, όμως, ο κίνδυνος της μετατροπής τους σε απλούς λομππίστες. Υποστηρίζουν λοιπόν τον αυ-στηρό διαχωρισμό της γνώσης από τις εφαρμογές της γνώσης. Προκύπτει, όμως, το εξής δίλημμα: «Ο εσωτερικός επιστήμονας λέει: Αυτό κι αυτό είναι αληθές ή έρχεται τόσο κοντά με την πραγμα-τικότητα, όπως το επιτρέπουν οι εσωτερικές μας μέθοδοι. Η υπόλοιπη κοινωνία λέει: Μπορεί να εί-ναι αληθές στα δικά σου εσωτερικά πλαίσια, αφού όμως κάθε εξωτερική εφαρμογή του είναι ανώ-φελη ή επιβλαβής, τότε στα δικά μας πλαίσια είναι λάθος. *Για τον εσωτερικό επιστήμονα η θέση αυ-τή της υπόλοιπης κοινωνίας είναι λανθασμένη ή ασήμαντη [και η ουσία είναι πως δεν υπάρχει εναλ-λακτική λύση για τη θέση αυτή και η κοινωνία το αποδέχεται σε μεγάλο βαθμό]*. Η ουσία είναι πως υ-πό αυτές κι αυτές τις προϋποθέσεις εμφανίζεται πυρηνική διάσπαση· [...] Από εξωτερικής πλευράς το γεγονός αυτό μετατρέπεται σ' ένα όπλο, μία απειλή, έναν παράγοντα δύναμης· αν είναι επικίνδυ-νος, τότε και το γεγονός είναι επικίνδυνο, δηλαδή λανθασμένο» [CHURCHMAN 1973, 194, υπογρ. Α.Τ.]. *Και πάλι το*

λάθος σχετίζεται με το διαχωρισμό της θεμελίωσης και της εφαρμογής της γνώσης.

Στα πλαίσια της Διδακτικής των Μαθηματικών η προτροπή της UNESCO «Μαθηματικά για όλους» έχει κι αυτή διττή ερμηνεία: Αφενός μπορεί να εννοεί ότι θα πρέπει να διδάσκεται μία καθορισμένη μορφή των Μαθηματικών παγκόσμια για όλους· αφετέρου μπορεί να στοχεύει στην πρό-σβαση κάθε ατόμου σε μία τουλάχιστον μορφή των Μαθηματικών. *Και οι δύο αυτές ερμηνείες είναι διαφορετικού λογικού τύπου, γιατί η πρώτη ερμηνεία συσχετίζει τα «Μαθηματικά για όλους» με την κοινωνία, με τα άτομα στα πλαίσια ενός κοινωνικού συστήματος, ενώ η δεύτερη ερμηνεία αφορά στον καθένα ξεχωριστά.* Στη μία περίπτωση επισημαίνεται **το ίδιο στοιχείο** σε όλους τους ανθρώπους, στην άλλη **το διαφορετικό**. Τα «νέα Μαθηματικά» των δεκαετιών του '60 και '70 δεν προπαγάνδι-σαν μόνο έναν ενιαίο τύπο Μαθηματικών στα πλαίσια της πρώτης ερμηνείας της ανωτέρω πρότα-σης, αλλά ταυτόχρονα οδήγησαν την ενιαία γνώση στην ενιαία εκπαίδευση. Ειδικότερα, στην Ομο-σπονδιακή Δημοκρατία της Γερμανίας, ένα από τα ζητήματα της θεσμοθέτησης του γερμανικού εκπαιδευτικού συστήματος ήταν το εξής: «Υπάρχουν Μαθηματικά, ειδικά για το γυμνάσιο;» [GRIES-EL 1977].

Όλοι οι επιφανείς μεταρρυθμιστές της εποχής εκείνης, στην προσπάθεια τους να ερμηνεύσουν τη στασιμότητα ή και το ναυάγιο της μεταρρύθμισης αυτής επισημαίνουν το επιχείρημα ότι – όπως αποδείχθηκε – όλοι οι μαθητές δεν είναι κατάλληλοι για ένα είδος επιστημονικών Μαθηματικών. *Με άλλα λόγια: η ιστορία της μεταρρύθμισης αυτής παρουσιάζεται ως μία μετατόπιση από την πρώτη προς τη δεύτερη ερμηνεία του στόχου «Μαθηματικά για όλους».*

Όσο «καλή» κι αν είναι λοιπόν μία θεωρία δεν αποτελεί εκέγγυο λύσης για τα κοινωνικά ή τα ανθρώπινα προβλήματα. Η θεωρητική κατασκευή προτείνει δυνατότητες και παρέχει μία ελευθερί-α, που αναγκαστικά παραμένει εν μέρει αυταπάτη. Δεν μας επιλύει τα προβλήματα. Τα «λάθη» των λεγόμενων «νέων Μαθηματικών» δεν μπορούν απλά να διορθωθούν με μία ρομαντική επιστροφή στην

καθημερινότητα ή στις τοπικές πολιτισμικές παραδόσεις (πβλ. Εθνομαθηματικά): αυτό βέβαια δε σημαίνει ότι ευνοείται η διαμόρφωση μιας θεωρητικο-μαθηματικής τεχνοκρατίας στο εκπαιδευτικό σύστημα. Το πρόβλημα έγκειται στον προσανατολισμό μας στη σχέση της γενικότητας απέναντι στη συνάφεια της γνώσης και όχι σε μονομερείς επιλυτικές προσπάθειες.

Στα πλαίσια της θεωρίας των λογικών τύπων, **η αποτυχία των «νέων Μαθηματικών» ερμηνεύεται ως σύγχυση λογικών τύπων**. Η σύγχυση συνίσταται στο γεγονός ότι είχαμε πιστέψει πως με την έννοια του «συνόλου» θα γεφυρώναμε την «ασήκωτη» διαφορά θεωρίας και εμπειρίας, αφού η έννοια του συνόλου αποτελούσε αφενός μία από τις κεντρικές έννοιες για τη θεμελίωση των επιστημονικών Μαθηματικών και αφετέρου ήταν πανταχού παρούσα στην καθημερινή μας ζωή. Αυτό οδηγούσε κάθε μαθητή του Δημοτικού να δηλώνει με έκπληξη: «Όλα μπορούν να είναι σύνολο». Όμως δεν υφίσταται κάποια άμεση ταύτιση του πολύ και του συνόλου, αφού και τα δύο ανήκουν σε διαφορετικούς λογικούς τύπους και μπορούν να συγκερασθούν μόνο μέσα από μία εξελικτική διαδικασία.

Από τη μεριά του, ο G. PAPY, εγκωμίασε σε μία διάλεξη στην Ακαδημία του Düsseldorf, το Δεκέμβριο του 1967, την ταύτιση της ενόρασης με τη λογική ως τη νέα αντίληψη της μεταρρύθμισης των «νέων Μαθηματικών». Κι αυτό όμως αποτελεί *χαρακτηριστικό παράδειγμα σύγχυσης λογικών τύπων*, αφού η ανθρώπινη ενόραση πρέπει να εννοείται ως αντικειμενική εμπειρία και εποπτεία και για το λόγο αυτόν έχει μία διαφορετική κατάσταση της ιδιαιτερότητας από τη λογική δομή του κόσμου. Η παρατήρηση αυτής της διαφοράς και η ξεχωριστή σημασία της αποτελεί κεντρικό συστατικό στοιχείο της φιλοσοφίας του KANT, με την οποία αρχίζει η μοντέρνα σκέψη [ΟΤΤΕ 1994, 275-294].

Μία από τις ουσιαστικές ιδιότητες των Μαθηματικών συνίσταται αφενός στη διαμόρφωση του διαχωρισμού των λογικών τύπων και αφετέρου στη μη-σύναψη απόλυτων ιεραρχιών, αλλά κυρίως στην

εξάσκηση συμμετρικοποιημένων προοπτικών, στην πραγματοποίηση της συμμετρικοποίησης αντικείμενου και μέσων ή δομών και συναρτήσεων κ.ά. *Με μία πρόταση «τα Μαθηματικά αντιπρο-σωπεύουν κατά έναν ειδικό τρόπο μία επιστημολογία της συμπληρωματικότητας»* [ό.π., 36]. Αλλά και στο ζήτημα της εκπαίδευσης εμφανίζονται παρόμοια συμπληρωματικά φαινόμενα· ειδικότερα η «κρίση της παγκόσμιας εκπαίδευσης» ήταν το θέμα μίας παγκόσμιας συνδιάσκεψης υπό την αιγίδα του τότε Αμερικανού προέδρου L. JOHNSON. Η αναγωγή του παγκόσμιου αυτού προβλήματος σε τρία επιμέρους ζητήματα [ΤΟΚΜΑΚΙΔΗΣ 2005, 73] επιζητούσε περισσότερο μία ποιοτική παρά μία ποσοτική λύση. Αυτή εντάσσεται στα πλαίσια της συνεχούς ταλάντωσης ανάμεσα στο γενικό και στο ειδικό, στα πλαίσια μιας διαρκούς αντιπαράθεσης συστηματικών επιπέδων διαφορετικού λογικού τύπου. Όσο συνδέουμε την επιστήμη με το γενικό και την υπαρξιακά μάλλον προσανατο-λισμένη φιλοσοφία με το ειδικό και το ατομικό, θα προκύπτει άμεσα εκείνο το πρόβλημα που προ-οδιορίζει την έννοια της εκπαίδευσης.

Στη μεταμοντέρνα κοινωνία η γνώση βρίσκεται υπό το καθεστώς μετάφρασής της στην αντί-στοιχη μηχανική γλώσσα και στη βάση αυτή «καταρρέει η παλαιά αρχή που συνέδεε άρρηκτα την απόκτηση της γνώσης με την εκπαίδευση του πνεύματος και το ίδιο το άτομο» [LYOTARD 1986, 24]· όπως και το σύνολο της γνώσης που δεν υποτάσσεται στα πλαίσια αυτής της νέας μορφής θα οδηγείται στην απόρριψη. «Σχετικά με το μέσο της φυσικής γλώσσας παρατηρούμε ότι η διεθνο-ποίηση της επικοινωνίας στις επιστήμες θέτει τον επιστημονικό συλλογισμό κάτω από τις προϋπο-θέσεις της μεταφραστικότητάς του από τη μία γλώσσα στην άλλη· *επίσης, μεταβάλλεται το στυλ με αποτέλεσμα να εκπίπτουν πολλές από τις αποχρώσεις και τις “σκοτεινές” και πολυσήμαντα ερμηνεύ-σιμες μεταφορές της μητρικής γλώσσας*» [ΟΤΤΕ 1994, 40, υπογρ. Α.Τ.]. Το γεγονός αυτό διευκολύ-νει βέβαια τη ροή της πληροφορίας και πολλαπλασιάζει μία δημόσια θεμελιωμένη γνώση, παρε-μποδίζει όμως τη μεταφορά της ουσίας και του νοήματος της θεωρίας. Χαρακτηριστικό παράδειγ-μα αποτελούν οι

Αμερικανοί φοιτητές, οι οποίοι δυσκολεύονταν να κατανοήσουν τη θεωρία του S. FREUD, γιατί απουσίαζε από την εκπαίδευσή τους η κλασική ευρωπαϊκή παιδεία για την κατανόη-ση, π.χ., της έννοιας του «Οιδιπόδειου συμπλέγματος» [BETTELHEIM 1984].

Και η Λογική μπορεί να θεωρηθεί ως μία φυσική γλώσσα, είναι καθολική, αποτελεί ένα μέσο, με το οποίο υπάρχουμε και εκφράζει μία απόλυτη δικτατορία, αφού τίποτα, που δεν έχει θέση μέσα σ' αυτήν, δεν αναπαρίσταται με ιδέες. Αποδείχθηκε, όμως, πως σε μία τέτοια προσπάθεια δεν θα πρέπει να «προσλαμβάνουμε» στη Λογική «ό,τι συναντάμε στις εφαρμογές» [WITTGENSTEIN 1921/1984, 5.557]. «Η Λογική πληροί τον κόσμο· τα όρια του κόσμου είναι και δικά της όρια. Δεν μπορούμε λοιπόν στη Λογική να λέμε: αυτό και αυτό υπάρχει στον κόσμο, εκείνο όχι» [ό.π., 5.61]. *Γιατί, όμως, οι μαθηματικοί ασχολούνται τόσο λίγο με τη Λογική; Γιατί δεν την καταλαβαίνουν πολύ και γιατί δεν τους είναι τόσο απαραίτητη; Όχι μόνο γιατί τα ίδια τα Μαθηματικά έχουν τη δική τους διάταξη, αλλά προ πάντων γιατί τα Μαθηματικά δε σχετίζονται με τη γνώση, αλλά με τη δράση. Έτσι η επικοινωνία τους είναι μία μετα-επικοινωνία.*

Τα Μαθηματικά ανέκαθεν ασχολούνται με τη δράση στον κόσμο και όχι με τον κόσμο· έτσι, δεν μπορούν να είναι δικτατορικά, ούτε υπάρχει η αναγκαιότητα μίας παγκόσμιας συσχέτισής τους. Έχουν το δικό τους αντικείμενο και δεν αποτελούν απλά μία γλώσσα ή μία λογική. Η τυπική θεωρί-α του RUSSELL εξαλείφει την αυτοαναφορικότητα, που οδηγεί στα παράδοξα, εις βάρος ενός άλ-λου παραδόξου: Το τελευταίο συνίσταται στο γεγονός ότι ο άνθρωπος, το «υποκείμενο» που αποτε-λεί την πηγή της εξέλιξης της γνώσης, αποτελεί τόσο μέρος του συστήματος, αλλά ταυτόχρονα βρί-σκεται και έξω από αυτό. «Το υποκείμενο δεν ανήκει στον κόσμο, αλλ' αποτελεί ένα όριο του κό-σμου» [ό.π., 5.632]. Το όριο ενός αντικείμενου ανήκει τόσο στο ίδιο, όπως και όχι. Αυτό το παρά-δοξο δεν ενοχλεί τα Μαθηματικά, γιατί δεν μεριμνούν ούτε για τα θεμέλιά τους, ούτε για τις εφαρ-μογές τους· και τα δύο δεν αποτελούν μαθηματική υπόθεση.

Ο RUSSELL ανήγαγε τα Μαθηματικά στη Λογική, έχοντας κατά νου το πρόβλημα των εφαρ-μογών. Στο σημείο αυτό επικεντρώνονταν και η κριτική του στην αξιωματική θεμελίωση του HIL-BERT και το διαχωρισμό της Λογικής από τα Μαθηματικά, που αυτή συνεπάγονταν. Όπως γράφει χαρακτηριστικά στον πρόλογο του: Ο HILBERT και οι φορμαλιστές «μοιάζουν με ωρολογοποιούς, που έχουν τόσο απορροφηθεί στην προσπάθειά τους να κάνουν τα ρολόγια τους εξωτερικά ελκυ-στικά, ώστε φθάνουν στο σημείο να ξεχάσουν εντελώς το σκοπό τους, που είναι η αναφορά του χρόνου, κι έτσι ξεχνούν να βάλουν στα ρολόγια τους απαραίτητους μηχανισμούς» [RUSSELL 1903].

«Τα μαθηματικά συστήματα δε συγκρίνονται με τη γραμμική και περιεκτική διάταξη της καθο-μιλουμένης γλώσσας: περισσότερο αποτελούν οπτικά γραφικά διαγράμματα διάταξης και ως τέτοια επιτρέπουν μία μετα-προοπτική, μία απόσταση, μία επιλεκτική συγκέντρωση σε λεπτομέρειες, ένα διαχωρισμό της γνώσης και των εφαρμογών της. Τα Μαθηματικά, όπως και σχεδόν όλες οι επιστή-μες, βασίζονται στο μάτι και τις οπτικές και γεωμετρικές μεταφορές. *Η γεωμετρικοποίηση αποτελεί την κατεξοχήν θεμελιώδη ιδέα των Μαθηματικών* και οδηγεί τους μαθηματικούς στο να αναπαρι-στώνουν όλα τα αντικείμενα ως σημεία ή συστήματα σημείων σε κάποιον ιδεώδη χώρο» [ΟΤΤΕ 1994, 41, υπογρ. Α.Τ. & ΤΟΚΜΑΚΙΔΗΣ 1996].

Αυτό διασαφηνίστηκε και από την προσομοίωση των ηλεκτρονικών υπολογιστών, προσδίδο-ντας ένα εντελώς νέο αντικείμενο στα Μαθηματικά. Για τους μαθηματικούς, ο χώρος καθορίζεται από τα είδη των κατασκευών που εκτελούνται μέσα σ' αυτόν. Έτσι, η αλληγορία του χώρου επιτρέ-πει τις ακόλουθες διατυπώσεις στα πλαίσια της προβληματικής των λογικών τύπων ή των διαχωρι-σμένων συστηματικών επιπέδων της ύπαρξής μας: *Αφενός κινούμαστε στο χώρο ως ένα σώμα, που δεν ακολουθεί μόνο τους στόχους του, αλλά που μπορεί να αναπτύξει και να τροποποιήσει τον άκα-μπτο προσανατολισμό του, παίρνοντας υπόψη του και την κίνηση άλλων σωμάτων. Αφετέρου αξιο-ποιούμε την αλληγορία του χώρου για να αναπαραστήσουμε έναν κόσμο αντικειμένων, στον*

οποίο δε φαίνεται να ανήκουμε οι ίδιοι. Το πρόβλημα της συνείδησης βασίζεται ακριβώς πάνω σ' αυτό το γε-γονός, ότι αυτά τα δύο επίπεδα της ύπαρξής μας είναι πρωταρχικά διαφορετικά μεταξύ τους και στο ότι δεν μπορούμε άμεσα να περάσουμε από το ένα στο άλλο.

Τα Μαθηματικά προσπαθούν να εξαλείψουν το συνεχές του χώρο-χρόνου. Όμως, χαρακτηρίζο-νται έντονα από τη διαδικασία γενίκευσης, που δε γνωρίζει απόλυτα όρια, άρα από τη μεριά της η διαδικασία αυτή αποτελεί ένα συνεχές. **Μία ιδέα γενικεύεται μέσα από τη συνεχή διάδοσή της.** Ο CHARLES S. PEARCE επικαλείται τη γενίκευση ως τον αληθινό σκοπό της ζωής, «την έκχυση (Ausgießen) συνεχών συστημάτων στις σκέψεις, στις αισθήσεις και στις πράξεις» [PEARCE 1988, 399]. Υπάρχουν επίσης ιδέες που ούτε μπορούν να έχουν μία συνεχή ύπαρξη και που ούτε αναφέ-ρονται σε αντικείμενα του κόσμου μας. Έτσι το γνωσιοθεωρητικό ζήτημα των Μαθηματικών συν-δέεται άμεσα με το εκπαιδευτικό ζήτημα. Εκπαίδευση σημαίνει γνώση και μετα-γνώση ταυτόχρο-να. Η δυσκολία του έγκειται στο γεγονός ότι δεν μπορούμε να παρακολουθήσουμε ούτε μόνο το έ-να, ούτε μόνο το άλλο. Ο συσχετισμός τους αποτελεί ένα παράδοξο που διαλύεται στον απώτερο χρόνο.

Τα Μαθηματικά φαίνονται άχρονα, η εκπαίδευση αντίθετα είναι ιστορική και απαραίτητη για την εξέλιξη των Μαθηματικών. Αλλά και αντίστροφα η εξέλιξη των Μαθηματικών βοηθά στην κα-τανόηση των προβλημάτων της συνείδησης και της πράξης. Τα Μαθηματικά προχωρούν μπροστά μετατρέποντας το συνειδητό και δημιουργικό σε μηχανικό και αυτοματοποιημένο. Και αντιστρό-φως: αυτό που μηχανοποιείται γίνεται αντικείμενο συνειδητής ύπαρξης. *Τα Μαθηματικά και οι μη-χανές αποτελούν τους ανάδοχους της περαιτέρω εξέλιξής μας.*

Αυτό που αντιλαμβανόμαστε είναι η **ετερογένεια** – οι διαφορές, τα όρια, οι πτώσεις της ενέρ-γειας. **Αλλιώς δεν θα υπήρχε καμία πληροφορία.** Οποιαδήποτε κι αν είναι η πραγματικότητα, με οποιαδήποτε προοπτική κι αν θέλουμε να τη γνωρίσουμε, μία είναι σε κάθε περίπτωση η αναγκαία ιδιότητα που

τη χαρακτηρίζει: *ετερογενής*. Ο ίδιος ερεθισμός δεν λαμβάνεται καθόλου υπόψη. Όταν δεν βλέπουμε κάποια διαφορά, τη δημιουργούμε από μόνοι μας, όπως τραβάμε μία γραμμή στο χαρτί ή θέτουμε σε λειτουργία ένα διακόπτη. Αυτός άλλωστε είναι και ο τρόπος λειτουργίας των σύγχρονων ηλεκτρονικών υπολογιστών. *Κι όταν μετράμε παίρνουμε πολλαπλότητες*. Κάθε ξεχωριστή μετρική διαδικασία παράγει ένα άλλο αποτέλεσμα ακόμη κι αν μετρήσουμε το ίδιο αντικείμενο. Και η διασπορά των μετρικών μεγεθών γίνεται μεγαλύτερη, όσο πιο λεπτεπίλεπτες είναι οι μετρικές μας μέθοδοι κι όσο καλύτερα συλλαμβάνουμε την πραγματικότητα. Ακόμα και στη Φυσική ξεκινάμε με «ομαλές» σχετικά συνεχείς συναρτήσεις και μόνο μετά από το ραφινάρισμα του φυσι-κού μοντέλου προκύπτει ότι οι ζητούμενες συναρτήσεις αποτελούν ομαλότητες μίας μεταβλητής α-συνεχούς εικόνας.

Είναι αξιοπερίεργο πως η προβιομηχανική περίοδος είχε αφενός διαμορφώσει την εμπειρία της αυξανόμενης πολλαπλότητας της πραγματικότητας· αφετέρου πίστευε στη **διαμόρφωση μίας ενότητας**, μίας ομοιογενούς μονάδας, μέσα από τις υπολογιστικές και μετρικές μεθόδους. Δημιούργησε λοιπόν πράγματι μία μονάδα, μόνο που αυτή εξέφραζε τη θεωρητική ενότητα απέναντι στην πολυποίκιλη πραγματικότητα. Ολοκληρώνουμε τις μετρικές μας παρατηρήσεις με μία καμπύλη, μία κανονική κατανομή ή υπολογίζουμε απλά τη μέση τιμή. Από τότε αναπτύχθηκαν δύο ξεχωριστές ε-πιστημολογικές αντιλήψεις: α) μία **θετικιστική**, που κατανοεί την ενιαία γνώση ως ενιαία μέθοδο, που θα πρέπει να αντιλαμβάνεται την εμπειρική πραγματικότητα και β) μία **κονστрукτιβιστική**, που αντιλαμβάνεται τη θεωρητική σκέψη ως σκέψη διαφορετικών μοντέλων και η οποία παρατηρεί τη σχέση θεωρίας και πράξης ή δομών και εφαρμογών ως ένα νέο αυτοτελές κοινωνικού χαρακτήρα πρόβλημα [ΤΟΚΜΑΚΙΔΗΣ 1995, 348-349]. Η επιστήμη που εκφράζεται με τη β' αντίληψη *λειτουργεί στη βάση της ενότητας ταυτότητας και διαφοράς* και δημιουργεί ποικίλους συνδυασμούς. Δεν αποδέχεται, επίσης, την άποψη πως η πραγματικότητα αποτελεί μία διαδικασία διαφορών, ενώ η αφαίρεση σημαίνει

αντίστοιχα συνταύτιση των διαφορών, πράγμα που οδηγεί στην ισοπέδωσή τους.

Έτσι το γενικό στοιχείο της επιστήμης αποκτά και μία άλλη σημασία. Η επιστήμη αποτελεί ένα όργανο της κοινωνίας και εκπληρώνει τη λειτουργία της μέσα από το γενικότερο όφελος και όχι α-ναγκαία από το ατομικό. Και η τυποποίηση της γνώσης εκπληρώνει μία παρόμοια κοινωνική λειτουργία, όπως περιγράφεται και στο ακόλουθο **παράδειγμα της μέτρησης**:

«Πώς θα ερχόμασταν σε σύγκρουση με την αλήθεια, αν οι χάρακές μας ήταν λαστιχένιοι και όχι ξύλινοι ή ατσάλινοι;

– “Δεν θα μπορούσαμε να ξέρουμε το σωστό μέτρο του τραπέζιού”.

– Εννοείς πως δεν θα παίρναμε *εκείνο* το μέτρο, που παρέχουν οι σκληρές μας κλίμακες. Αυτός λοιπόν θα διατελούσε εν αδίκω, που θα μετρούσε το τραπέζι με το ελάχιστο μέτρο και θα έλεγε ότι είναι 1.80m σύμφωνα με τη συνήθη μέτρηση· αν έλεγε όμως ότι το τραπέζι είναι 1.80m σύμφωνα με τη μέτρησή μου, αυτό θα ήταν και το σωστό.

– “Αυτό όμως δεν είναι καν μέτρηση”.

– Είναι παρόμοια με τις μετρήσεις μας και μπορεί υπό προϋποθέσεις να εξυπηρετήσει και πρα-κτικούς σκοπούς. (Ένας έμπορος μπορεί με τον τρόπο αυτό να αντιμετωπίζει κάθε πελάτη του δια-φορετικά)» [WITTGENSTEIN 1960/1984, 38].

Χωρίς αμφιβολία, μετά από λίγο καιρό, ο έμπορος αυτός θα χάσει τον προσανατολισμό του, α-φού η τακτική του αυτή δεν θα μπορέσει να του εξασφαλίσει κάποιο όφελος. Όπως όταν κάποιος ψεύδεται συνέχεια και στο τέλος δεν ξέρει ποια είναι η αλήθεια ή ποια μέτρα θα πρέπει να πάρει για να εξασφαλίσει το συμφέρον του. *Ένα αντίστοιχο πρακτικό παράδειγμα αποτελεί ο πληθωρισμός των σύγχρονων κοινωνιών, που προκύπτει από το γεγονός, ότι ο κάθε έμπορος θέλει να ανταλλάξει τα είδη του με όσο το δυνατόν περισσότερα χρήματα, χωρίς να έχει στη διάθεσή του «σταθερά μέτρα».*

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- ATIYAH M.F. 1974, "Wandel und Fortschritt in der Mathematik", στο M. OTTE (Hg.): *Mathema-tiker über die Mathematik*, 203-218, Springer/Heidelberg.
- BECKER H. 1980, *Auf dem Weg zur lernenden Gesselschaft*, Stuttgart.
- BETTELHEIM B. 1984, *Freud und die Seele des Menschen*, Schwann/Düsseldorf.
- BOLZANO B. 1810/1974, *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*, Prag; Re-print: Wissenschaftliche Buchgesellschaft/Darmstadt.
- BRUNER J. 1970, *Der Prozeß der Erziehung*, Schwann/Düsseldorf.
- CHURCHMAN C.W. 1973, *Die Konstruktion von Erkenntnissystemen*, Herder & Herder/Frankfurt am Main.
- DEDEKIND R. 1892, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Vieweg/Braunschweig.
- GRASSMANN H. 1861, *Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten*, Enslin/Berlin.
- GRIESEL H. 1977, "Gibt es eine hauptschul-spezifische Mathematik?", στο *Westermanns Pädago-gische Beiträge*, Heft 4, 147-159.
- LYOTARD J.F. 1986, *Das postmoderne Wissen*, Böhlau-Passagen/Graz-Wien.
- OTTE M. 1990, Stichwort "Komplementarität", στο *Europäische Enzyklopädie zu Philosophie und Wissenschaften*, 847-849, Meiner/Hamburg.
- 1994, *Das Formale, das Soziale und das Subjektive*, Suhrkamp/Frankfurt.
- PEIERCE C.S. 1932-1965, *Collected Papers*, Ch. HARTSHORNE & P. WEISS(eds) Harvard Univ. Press/Cambridge, Mass.
- 1988, *Naturordnung und Zeichenprozeß*, Alano/Aachen.
- RUSSELL B. 1903, *The principles of mathematics*, Allen & Unwin/London.
- 1976, *Die Philosophie des logischen Atomismus. Aufsätze zur Logik und Erkenntnistheorie, 1908-1918*, Nymphenburger/München.

- ΤΟΚΜΑΚΙΔΗΣ Α. 1995, *Η έννοια της ορίζουσας στο έργο των Α.-L. Cauchy (1789-1857) και H.G. Grassmann (1809-1877)*, Διδακτορική διατριβή, Θεσσαλονίκη.
- 1996, “Der Begriff der Determinante in H.G. Grassmanns ‘Ausdehnungslehre’”, *N. K. Artemiadis & N.K. Stefanidis(eds): Proceedings of the 4th International Congress of Geometry*, 409-416.
- 2003, «Η απόδειξη: Ένα κομβικό σημείο στη συμπληρωματικότητα του αντικειμένου και της μεθοδολογίας στη διδακτική των Μαθηματικών», *Δ. ΧΑΣΑΠΗΣ (επιμ. εκδ.): Το επιχείρημα και η α-πόδειξη στα σχολικά Μαθηματικά*, 203-212.
- 2004, «Η συμπληρωματικότητα αριθμητικής και γεωμετρίας», *Δ. ΧΑΣΑΠΗΣ (επιμ. εκδ.): Εικόνα, σχήμα και λόγος στη διδασκαλία των Μαθηματικών*, 155-164.
- 2005, «Η Ιστορία των Μαθηματικών: Ένα διαπολιτισμικό εργαλείο για τη Διδακτική των Μαθηματικών», *Δ. ΧΑΣΑΠΗΣ (επιμ. εκδ.): Κοινωνικές & Πολιτισμικές Διαστάσεις της Μαθηματικής Εκπαίδευσης*, 73-85.
- WEYL H. 1966, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, Oldenbourg/ München.
- WILDEN A. 1972, *System and Structure*, Tavistock Publications/London.
- WITTGENSTEIN L. 1921/1984, *Tractatus logico-philosophicus. Werkausgabe*, Bd. 1, Suhrkamp/ Frankfurt am Main.
- 1960/1984, *Tagebücher 1914-16. Werkausgabe*, Bd. 1, Suhrkamp/Frankfurt am Main.

JOHN WALLIS ΚΑΙ ISAAC BARROW
ΔΥΟ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΑΠΟΨΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ
ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΣΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΟΥ 17^{ΟΥ} ΑΙΩΝΑ

Βιργινία Στεργίου & Τάσος Πατρώνης

*Τομέας Παιδαγωγικής, Ιστορίας & Φιλοσοφίας των Μαθηματικών
Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών*

Εισαγωγή

Η διαδρομή μέσα από τις μαθηματικές αντιλήψεις των διαφόρων εποχών σηματοδοτεί σταθμούς οι οποίοι υπήρξαν πολύ σημαντικοί ώστε να τροποποιήσουν τη δομή καθώς και την εξέλιξη προηγούμενων απόψεων για να καταλήξουν τελικά στο μαθηματικό οικοδόμημα του 20^{ου} αιώνα. Μέσα από τη διαδρομή αυτή, μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι συζητήσεις σχετικά με την φύση εννοιών, όπως το άπειρο, το συνεχές, τα αδιαίρετα και τα απειροστά.

Η έννοια του *απειροστού* υπήρξε σημείο διαμάχης (ιδίως κατά τον 17^ο αιώνα) μεταξύ των οπαδών της μαθηματικής αυστηρότητας (που επιβλήθηκε μέσα από την ανάγκη μιας λογικής συμπερασματολογίας) και των οπαδών της διαισθητικής ή ελεύθερης ερμηνείας ασαφών εννοιών, όπως του άπειρα μικρού και του άπειρα μεγάλου. Στόχος της παρούσας μελέτης είναι να ερμηνεύσει τις διαφορετικές απόψεις που αφορούν στην έννοια του απειροστού κατά τον 17^ο αιώνα, μέσα από την μελέτη των έργων δύο κορυφαίων προσωπικοτήτων της Μαθηματικής κοινότητας, των John Wallis και Isaac Barrow. Οι Wallis και Barrow, ο καθένας από διαφορετική οπτική γωνία, οριοθετούν τον Απειροστικό

Λογισμό και ταυτόχρονα βάζουν το θεμέλιο λίθο για την ανάπτυξη του Διαφορικού και του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Αξίζει όμως να σημειωθεί ότι οι Wallis και Barrow αντιλαμβάνονται και την έννοια του αριθμού με διαφορετικό τρόπο. Για παράδειγμα, ο Wallis θεωρώντας την Αριθμητική θεμελιώδη και βασική επιστήμη, στο έργο του *Mathesis Universalis*, αναφέρει[1]: επειδή η γραμμή μήκους δύο ποδιών προστιθέμενη σε μια γραμμή επίσης δύο ποδιών ισούται με μια γραμμή τεσσάρων ποδιών, δεν σημαίνει ότι δύο και δύο κάνει τέσσερα, απεναντίας η πρώτη σχέση συνεπάγεται την δεύτερη. Στην απάντηση του Barrow πάνω σ' αυτό διαφαίνεται η διαφορετικότητα των αντιλήψεών τους. Ο ίδιος σημειώνει: Από πού συμπεραίνουμε ότι η γραμμή μήκους δύο ποδιών προστιθέμενη με μια γραμμή δύο παλαμών δεν μπορεί να δώσει μια γραμμή τεσσάρων ποδιών ή τεσσάρων παλαμών ή τεσσάρων οποιονδήποτε μονάδων, εάν είναι αορίστως....αληθές ότι $2+2$ κάνει 4; Θα πείτε ότι οι αριθμοί αυτοί δεν εφαρμόζονται στα ίδια πράγματα ή στα ίδια μέτρα (μονάδες) μεγεθών. Το ίδιο θα έλεγα και εγώ, οπότε συμπεραίνω ότι $2+2$ κάνει τέσσερα, όχι από την αφηρημένη λογική των αριθμών, αλλά από τις συνθήκες στις οποίες εφαρμόζονται. Ο Wallis θεωρεί ότι η έννοια του αριθμού είναι ανεξάρτητη από οποιοδήποτε αντικείμενο ή μονάδα ή μέγεθος, οπότε είναι δεδομένο ότι η σχέση $2+2=4$ είναι μια αφηρημένη έκφραση η οποία μπορεί να εφαρμοστεί σε επιλεγμένα αντικείμενα ή μονάδες μεγεθών. Συγκεκριμένα σχολιάζει: ο ισχυρισμός που αφορά στην ισότητα του αριθμού 5 με τους αριθμούς 2 και 3 λαμβανόμενους μαζί είναι μια γενική δήλωση, η οποία είναι εφαρμόσιμη όχι μόνο στην Γεωμετρία, αλλά σε όλα τα πράγματα, όπως 2 άγγελοι και 3 άγγελοι είναι 5 άγγελοι. Ο Barrow απεναντίας ισχυρίζεται ότι: κανένας (αφηρημένος) αριθμός λαμβανόμενος ξεχωριστά και απόλυτα δεν μπορεί να εκφράσει κάτι βέβαιο...σημειώνω ότι οι αριθμοί από μόνοι τους δεν μπορούν ούτε να προστεθούν ούτε να αφαιρεθούν ο ένας από τον άλλο, έτσι ώστε τη μια φορά να μας δίνουν ένα άθροισμα και την άλλη διαφορά. Ο μαθηματικός αριθμός δεν έχει καμία πραγματική υπόσταση κατάλληλη μόνο για τον εαυτό του. Και σε άλλο σημείο σχολιάζει: η

ολότητα των Μαθηματικών κατά κάποιο τρόπο περιέχεται και περιορίζεται μέσα στα όρια της Γεωμετρίας.

Η παράδοση της μεθόδου των αδιαιρέτων (indivisibles): οι θιασώτες και οι αρνητές της κατά τον 17^ο αιώνα

Ο Cavalieri (1598-1647), που υπήρξε μαθητής του Galileo, εισήγαγε την ιδέα και τη μέθοδο των *αδιαιρέτων* ποσοτήτων, θεωρώντας ότι κάθε γεωμετρικό μέγεθος μπορεί να διαιρείται σε άπειρα το πλήθος γεωμετρικά μεγέθη τα οποία είναι αδιαίρετες ποσότητες. Η μέθοδος του Cavalieri είναι πολύ σημαντική γιατί θεωρείται ένα από τα πρώτα βήματα που συνετέλεσαν στη γένεση και ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού.

Την ίδια περίπου εποχή ο Gregoire de Saint-Vincent (1584-1667) επινόησε προδρομικές μεθόδους «ολοκλήρωσης», δημιουργώντας κατά κάποιον τρόπο μια επέκταση των μεθόδων του Αρχιμήδη, αλλά σε καμία περίπτωση της μεθόδου των *αδιαιρέτων* του Cavalieri [2]. Η χρήση των αδιαιρέτων στην Γεωμετρία δέχτηκε πολλές αρνητικές κριτικές. Η κυριότερη αιτία άρνησης των δυνατοτήτων των αδιαιρέτων ποσοτήτων ήταν ότι η χρήση τους οδηγούσε σε παράδοξα και λάθη. Παρ' όλα αυτά οι αδιαίρετες ποσότητες πέτυχαν να γίνουν δημοφιλείς εξαιτίας των επιτυχών εφαρμογών τους και θεωρήθηκαν ως η προσφιλής μέθοδος των μαθηματικών της εποχής που εισήγαγαν τις απειροστικές θεωρήσεις στο χώρο της Γεωμετρίας.

Ο Evangelista Torricelli (1608-1647), που υπήρξε μαθητής του Cavalieri, χρησιμοποίησε την μέθοδο των αδιαιρέτων για να υπολογίσει γεωμετρικά μεγέθη όπως εμβαδά και όγκους με μεγαλύτερη ευκρίνεια από τον δάσκαλό του. Απέδειξε μεταξύ των άλλων, ότι ο όγκος του στερεού που γεννιέται από την περιστροφή τόξου ισοσκελούς υπερβολής απείρου μήκους, γύρω από μια ασύμπτωτη, είναι πεπερασμένος.

Ο Giles Personne de Roberval (1602-1675) εμφανίζεται να ασπάζεται την μέθοδο των αδιαιρέτων του Cavalieri, αλλά η άποψή του για τα αδιαίρετα διαφέρει ριζικά από την προηγούμενη άποψη σχετικά με αυτά. Ο Roberval χρησιμοποίησε εκφράσεις όπως «*απειροστά πράγματα*» τα οποία όμως παρατηρεί ως αδιαίρετα. Μελετώντας τις προτάσεις του πάνω στα αδιαίρετα, αναγνωρίζει κανείς ότι αυτές «*προσιωνίζουν*» τον Ολοκληρωτικό Λογισμό, αλλά έχουν σαφώς διαφορετικό νόημα. Ο Roberval το 1634 εφεύρε ένα σύνολο ευφύων τεχνικών, οι οποίες του έδωσαν την δυνατότητα να κατορθώσει να επιλύσει με επιτυχία με ένα μεγάλο αριθμό απειροστικών προβλημάτων [3].

Ο Pascal (1623-1662) δέχτηκε την επίδραση των εργασιών του Roberval, καθώς μάλιστα ο πατέρας του ήταν στενός φίλος του Roberval. Ο Pascal επέδειξε αξιοσημείωτη κλίση στον τομέα της Υδροστατικής και ασχολήθηκε με την Θεολογία. Στις μαθηματικές του εργασίες υπάρχει μια παρουσίαση της φύσης των απειροστών, όπου μπορεί να διακρίνει κανείς ίχνη μιας μυστικιστικής τάσης. Εφαρμόζει την θεωρία των απειροστών πάνω στο «*αριθμητικό τρίγωνο*», γνωστό ως τρίγωνο του Pascal. Προσπάθησε επίσης στις εργασίες του να συγκρίνει τα αδιαίρετα της γεωμετρίας με το μηδέν της αριθμητικής, αλλά στις μετέπειτα αριθμητικές αποδείξεις του αποφεύγει συστηματικά να χρησιμοποιήσει τις άπειρα μικρές ποσότητες.

Ο Pierre Fermat (1601-1665) που θεωρείται ένας από τους κορυφαίους Γάλλους μαθηματικούς του 17^{ου} αιώνα, υπήρξε φίλος του Pascal και σ' αυτόν οφείλεται η πρώτη αξιοσημείωτη νύξη της διαφόρισης. Ο Fermat μετέτρεψε μια παρατήρηση του Kepler σχετικά με την αύξηση μιας συνάρτησης, ότι αυτή γίνεται αμελητέα στην περιοχή μιας τοπικά μέγιστης ή ελάχιστης τιμής της, σε διαδικασία προσδιορισμού ενός τέτοιου μεγίστου ή ελαχίστου. Ακόμη οι Gregoire de Saint-Vincent, Torricelli, Roberval και Pascal, χρησιμοποιώντας απειροστικές ή κινηματικές έννοιες υπολόγισαν και σύγκριναν τα καμπυλόγραμμα εμβαδά χωρίων που σχηματίζονται από την περιστροφή ελικοειδών τόξων με τα

αντίστοιχα εμβαδά που σχηματίζονται από τα τόξα των παραβολών και υπερβολών.

John Wallis : αριθμητικοποίηση της γεωμετρίας και των αδιαφρέτων

Η αγάπη μου από τότε που ήμουν παιδί, ήταν πάντα όχι μόνο να μάθω πράγματα σαν ρουτίνα, αλλά να γνωρίσω τις βάσεις ή τις αιτίες αυτών που μαθαίνω, να πληροφορήσω την κρίση μου αλλά και να εμπλουτίσω την μνήμη μου.

Από την αυτοβιογραφία του Wallis

Ο John Wallis[4] γεννήθηκε στο Ashford της Αγγλίας στις 22 Νοεμβρίου του 1616 και πέθανε στις 28 Οκτωβρίου του 1703 στην Οξφόρδη. Σπούδασε Λατινικά, Ελληνικά και Εβραϊκά. Σπούδασε επίσης Λογική, αλλά αρχικά δεν ήρθε σε καμία επαφή με τα Μαθηματικά, επειδή τα Μαθηματικά δεν θεωρούνταν αντικείμενο μεγάλης σημασίας στα καλά σχολεία της εποχής εκείνης. Το 1637 αποφοίτησε από το Emmanuel College του Cambridge σπουδάζοντας ένα μεγάλο αριθμό θεμάτων, όπως Ηθική, Μεταφυσική, Γεωγραφία, Αστρονομία, Ιατρική και Ανατομία. Στο Λονδίνο ο Wallis ήρθε σε επαφή με μια ομάδα επιστημόνων που είχαν ενδιαφέρον για την φύση και την πειραματική επιστήμη. Η ομάδα αυτή έγινε μετέπειτα η Royal Society του Λονδίνου.

Ο Wallis έγραψε ένα βιβλίο με τίτλο *Treatise of Angular Sections*, το οποίο όμως παρέμεινε αδημοσίευτο για σαράντα ολόκληρα χρόνια. Με την εργασία του *Mathesis universalis sive arithmeticum opus inegrum* εξέφρασε τις απόψεις του πάνω στην φιλοσοφία των Μαθηματικών. Του προσφέρθηκε η Έδρα της Γεωμετρίας στην Οξφόρδη (Savilian Chair) το 1649 από τον Cromwell, θέση που διατήρησε για περίπου πενήντα χρόνια μέχρι τον θάνατό του. Ο Wallis μελέτησε τις εργασίες των Kepler, Cavalieri, Roberval, Torricelli και Descartes και πρόσφερε στην Ανάλυση κάτι πέραν από τις ιδέες των προηγούμενων. Ανέπτυξε τις

μεθόδους του με τρόπο που θυμίζει τις αναλυτικές μεθόδους του Descartes και ήταν ο πρώτος Άγγλος μαθηματικός που χρησιμοποίησε αυτές τις τεχνικές. Ακολουθώντας τους Viete, Descartes, Fermat και Harriot, έγινε γνωστός γιατί εφήρμοσε την Αριθμητική και την Άλγεβρα στα προβλήματα της Γεωμετρίας. Προσπάθησε να «απελευθερώσει» πλήρως την Ευκλείδεια Θεωρία των αναλογιών από τις γεωμετρικές αναπαραστάσεις (ένας στόχος που μπορούσε κατά την γνώμη του εύκολα να επιτευχθεί). Πρώτα έδειξε ότι όλα τα θεωρήματα του Ευκλείδη που αναφέρονται στο βιβλίο *V των Στοιχείων*, μπορούν να αποδειχθούν αριθμητικά χωρίς δυσκολία, προβληματίστηκε αρκετά όμως όσον αφορά την ομοιογένεια των όρων μιας εξίσωσης.

Το 1656 ο Wallis παρουσίασε μια πολύ σημαντική εργασία η οποία δημοσιεύτηκε με τίτλο *Arithmetica Infinitorum*. Στην εργασία αυτή εργάστηκε αριθμητικά. Παρόλο που η μέθοδός του θυμίζει τη μέθοδο των *αδιαιρέτων*, ο Wallis παρουσίασε μια διαφορετική προσέγγιση από τον Cavalieri. Προκειμένου να προσδιορίσει το λόγο των εμβαδών του ημιπαραβολικού χωρίου που ορίζεται από την αρχή των αξόνων και ένα απομακρυσμένο σημείο της καμπύλης $y = x^2$, και του ορθογωνίου παραλληλογράμμου που έχει την ίδια βάση και ύψος με το χωρίο αυτό, εργάστηκε (όπως προκύπτει από το πρωτότυπο κείμενό του) [5], ως εξής: θεώρησε στη βάση του χωρίου μια αριθμητική πρόοδο ευθυγράμμων τμημάτων με κοινή αρχή την αρχή των αξόνων και μήκη $0,1,2,3,\dots$. Στο πέρας κάθε τέτοιου τμήματος ύψωσε ένα τμήμα κάθετο στη βάση και δημιούργησε έτσι στο εσωτερικό του χωρίου μια ακολουθία ευθυγράμμων τμημάτων (τεταγμένων) με μήκη $0^2,1^2,2^2,3^2,\dots$. Έτσι οδηγήθηκε στο να υπολογίσει το λόγο του αθροίσματος ενός απειριοστού (ή απείρου όπως έγραψε ο ίδιος) πλήθους ευθυγράμμων τμημάτων προς ένα αντίστοιχο άθροισμα ίδιου πλήθους ευθυγράμμων τμημάτων ίσων με το «τελευταίο» από τα προηγούμενα τμήματα. Στη σημερινή γλώσσα θα λέγαμε ότι ο Wallis θέλησε να προσδιορίσει ασυμπτωτικά ένα λόγο ο οποίος, στο πλαίσιο της Κλασσικής Ανάλυσης εκφράζεται ως εξής:

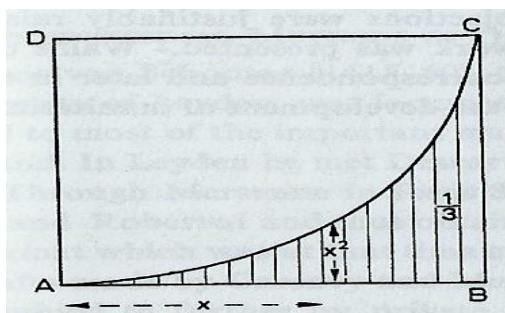
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^2 + n^2 + n^2 + \dots + n^2} \quad \text{Για να υπολογίσει τον οριακό αυτό (ή}$$

ασυμπτωτικό) λόγο επιχείρησε να εφαρμόσει διάφορες τεχνικές και όπως φαίνεται παρακάτω υπολόγισε σταδιακά τους όρους:

$$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \quad \text{στην} \quad \text{συνέχεια} \quad \frac{0+1+4}{4+4+4} = \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \dots,$$

γενικότερα $\frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^2 + n^2 + \dots + n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$ και τελικά συμπέρανε ότι αν

ο αριθμός των όρων του αριθμητή και παρονομαστή ήταν άπειρος, δηλαδή αν οι ευθείες $x=x_0$ «γέμιζαν» την δοσμένη επιφάνεια τότε ο παραπάνω λόγος θα ήταν ίσος ακριβώς με $\frac{1}{3}$.



Ο Wallis εφάρμοσε την ίδια μέθοδο για τον υπολογισμό του λόγου του αθροίσματος ενός απειριορίστου πλήθους κύβων προς το αντίστοιχο άθροισμα ίδιου πλήθους κύβων ίσων με τον «τελευταίο» από τους προηγούμενους και γενίκευσε τα αποτελέσματά του σε δυνάμεις με ρητούς, άρρητους, ακόμα και αρνητικούς εκθέτες [6].

Είναι γεγονός ότι και άλλους σημαντικούς μαθηματικούς του 17^{ου} αιώνα απασχόλησε ο υπολογισμός του εμβαδού των χωρίων που βρίσκονται «κάτω» από τις καμπύλες της παραβολής και της υπερβολής. Ο Βέλγος Ιησουίτης μαθηματικός Gregory of St.Vincent [7] (1584-1667) ασχολήθηκε με το πρόβλημα υπολογισμού του εμβαδού του χωρίου που βρίσκεται «κάτω» από την υπερβολή $xy=1$ [8]. Το 1647 δημοσίευσε το έργο του *Opus geometricum*, στο οποίο μάλιστα ισχυρίστηκε ότι κατάφερε να

τετραγωνίσει τον κύκλο. Ο επίσης Βέλγος Ιησουΐτης Alfonso Antonio de Sarasa (1618-1667), μελετώντας την παραπάνω εργασία του Gregory of St. Vincent το 1649, παρατήρησε ότι ο υπολογισμός του εμβαδού της περιοχής $A(x)$ «κάτω» από την υπερβολή, από το 1 μέχρι το x έχει την λογαριθμική ιδιότητα $A(a \cdot \beta) = A(a) + A(\beta)$ [9]. Ακόμα είναι γνωστό ότι η έρευνα για τον υπολογισμό αυτών των εμβαδών οδήγησε στις δυναμοσειρές, με μεθόδους που χρησιμοποίησε ο Newton και άλλοι γύρω στα 1660 και μετέπειτα, οι οποίες συνετέλεσαν στην δημιουργία του Απειροστικού Λογισμού στη σύγχρονη μορφή του [10].

Ο παραπάνω τρόπος της αριθμητικής και αναλυτικής προσέγγισης των Wallis, Fermat και Gregory of St. Vincent συνάντησε όμως την άμεση αντίδραση των οπαδών της Γεωμετρίας. Η μέθοδος της αριθμητικοποίησης αντικρούστηκε με ιδιαίτερη αυστηρότητα από δύο Άγγλους, τον φιλόσοφο Thomas Hobbes και τον μαθηματικό και θεολόγο Isaac Barrow.

Isaac Barrow: Η αριθμητική περιέχεται στην γεωμετρία

Ο Isaac Barrow γεννήθηκε το 1630 στο Λονδίνο και πέθανε τον Μάιο του 1677 στο Λονδίνο. Σπούδασε αρχικά στο Charterhouse και μετέπειτα στο Felstead του Essex, του οποίου η φήμη ήταν ξακουστή για την αυστηρή πειθαρχία του. Εξαιτίας των οικονομικών της οικογένειάς του, δεν μπόρεσε να σπουδάσει στο Trinity College του Cambridge, είχε όμως την υποστήριξη του Duport, καθηγητή των Ελληνικών της Βασιλικής έδρας στο Cambridge, που του έκανε μαθήματα χωρίς αμοιβή, λόγω του μεγάλου ταλέντου που διέκρινε σ' αυτόν. Έτσι ο Barrow μελέτησε Ελληνικά, Λατινικά, Εβραϊκά, Γαλλικά, Ισπανικά, Ιταλικά, Φιλολογία, Γεωγραφία, Θεολογία, Αριθμητική, Γεωμετρία και Οπτική. Ακόμη σπούδασε περιστασιακά Ιατρική ενώ ασχολήθηκε περισσότερο με την Θεολογία, η οποία τον οδήγησε στην Αστρονομία και στη συνέχεια στην Γεωμετρία. Μελέτησε Γεωμετρία

μόνος του, εκδίδοντας το 1655 ένα βιβλίο Γεωμετρίας στα λατινικά, το οποίο ήταν μια συμπληρωματική εργασία πάνω στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Ο Isaac Barrow υπήρξε και αυτός ένα από τα 150 μέλη της *Royal Society*. Η εκεί προσφορά του όμως δεν υπήρξε ιδιαίτερα σημαντική, καθόσον του ανέθεσαν να ασχοληθεί με Αστρονομικά θέματα και θέματα Οπτικής, για τα οποία δεν έδειξε ιδιαίτερο ενδιαφέρον και η *Society* αποφάσισε να τον διώξει. Ο Barrow δίδασκε για πολλά χρόνια Ελληνικά στο Πανεπιστήμιο του Cambridge, το 1662 έγινε καθηγητής της Γεωμετρίας στο Κολέγιο του Gresham και το 1663 ανέλαβε την Έδρα των Μαθηματικών στο Cambridge, θέση που ιδρύθηκε προς τιμή του Henry Lucas και αποδεχόμενος τη θέση αυτή, παραιτήθηκε από την έδρα των Ελληνικών, εξηγώντας ότι τα Μαθηματικά γι' αυτόν παρουσίαζαν μεγαλύτερο ενδιαφέρον από ότι τα Ελληνικά. Από την Λουκασιανή Έδρα, έδωσε πολλές διαλέξεις εκ των οποίων οι περισσότερες περιείχαν γεωμετρικά θέματα και τέσσερις από αυτές περιείχαν μια μικρή αναφορά στο έργο του Αρχιμήδη. Ο Barrow παρουσίασε οκτώ εργασίες πάνω σε γεωμετρικά θέματα αλλά και κάποιες άλλες που περιείχαν θέματα οπτικής. Οι διαλέξεις αυτές προκάλεσαν το ενδιαφέρον του Isaac Newton, ο οποίος είχε πολλές προσωπικές συζητήσεις για τα θέματα αυτά με τον Isaac Barrow, οι δε συζητήσεις αυτές ενθάρρυναν αλλά και επηρέασαν σημαντικά τις εργασίες του Newton. Ο Barrow δεν έκανε καμία προετοιμασία για να δημοσιεύσει τις εργασίες του (αυτό το ανέλαβαν αργότερα άλλοι). Πολλές από τις εργασίες του δημοσιεύτηκαν από τον John Collins το 1669, με τίτλο *Lectiones Opticae*, το 1670 με τίτλο *Lectiones Geometricae*, και το 1683 με τίτλο *Lectiones Mathematicae*.

Στο έργο του ο Isaac Barrow εξηγεί και παρουσιάζει την χρησιμότητα της μαθηματικής γνώσης μέσω της Γεωμετρίας (ενώ λίγο πριν ο John Wallis εισήγαγε την χρήση της Άλγεβρας σε γεωμετρικά θέματα). Ο Barrow, ως θερμός υποστηρικτής της Γεωμετρίας του Ευκλείδη, άσκησε σκληρή κριτική στο έργο του Wallis σχετικά με την «*αριθμητικοποίηση*» της Γεωμετρίας, αλλά επίσης και στο έργο του Pierre Fermat που αναφερόταν στην

Αναλυτική Γεωμετρία. Ο Barrow πίστευε ότι η Αριθμητική περικλείεται στην Γεωμετρία ενώ η Άλγεβρα ανήκει περισσότερο στην Λογική παρά στα Μαθηματικά [11]. Αυτή η άποψη δεν μπορούσε να οδηγήσει στην έννοια του *ορίου*, αφού για την έννοια αυτή απαιτείται επιπλέον εκτός της λογικής του ορισμού, η διευρυμένη αντίληψη του *αριθμού*. Το γεγονός ότι ο Barrow στις εργασίες του χρησιμοποιούσε την κλασσική αντίληψη του αριθμού αλλά και η υποστήριξή του στην γεωμετρία, ίσως να επηρέασαν τον μαθητή του Newton, να αναζητήσει την ίδρυση του Απειροστικού Λογισμού στην ιδέα της συνεχούς μεταβλητής ποσότητας όπως παρουσιάζεται στην κίνηση και στην γεωμετρία και να αποφύγει να χρησιμοποιήσει την αριθμητική ερμηνεία της έννοιας του ορίου.

Η προσφορά του Barrow στον Διαφορικό αλλά και στον Ολοκληρωτικό Λογισμό είναι πολύ σημαντική. Η μέθοδος που χρησιμοποιεί για την εύρεση της εφαπτομένης μοιάζει κάπως με την διαδικασία που χρησιμοποιούμε σήμερα στον Διαφορικό Λογισμό. Στο έργο του *Geometrical Lectures* υπάρχουν πολλές αποδείξεις για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων καθώς και μια *γεωμετρική* απόδειξη του Θεμελιώδους θεωρήματος του Ολοκληρωτικού Λογισμού [12]. Σύμφωνα με τον Barrow, μέσα από τον συνδυασμό αριθμών και μεγεθών είναι εύκολο να ανακαλύψουμε και να αποδείξουμε πολλά θεωρήματα, θεωρώντας τους *αριθμούς*, εντός των ορίων της Αριθμητικής, διότι μόνο έτσι οι αριθμοί θα μπορούσαν να είναι χρήσιμοι στην έρευνα και στην απόδειξη. Τα Γεωμετρικά Θεωρήματα ερμηνεύουν και επεκτείνουν Αριθμητικά Θεωρήματα.

Ένα παράδειγμα

Σ' ένα από τα *Αριθμητικά Θεωρήματα* ο Barrow αναφέρει τα εξής: «το άθροισμα μιας άπειρης ή με απροσδιόριστο (*indefinite*) πλήθος όρων σειράς που ξεκινάει από το 'τίποτα', μέχρι ένα κάποιον όρο, ο οποίος είναι και ο μεγαλύτερος, οι όροι δε της σειράς αυξάνονται ανάλογα με τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών οι οποίοι συνεχώς αυξάνονται κατά μια μονάδα (π.χ. $0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$ επ' άπειρου), ισούται με τα $2/3$ του αθροίσματος ενός ίδιου πλήθους όρων ίσων με τον

μεγαλύτερο. Κατά την γνώμη μου η αριθμητική μέθοδος δεν μπορεί από μόνη της να υπολογίσει ακριβώς το παραπάνω άθροισμα, αλλά απλά θα το συμπεράνουμε από την γεωμετρία. Γιατί αν η διάμετρος οποιασδήποτε παραβολής θεωρηθεί επ' άπειρον διαιρετή σε ίσα μεταξύ τους τμήματα, τότε οι τεταγμένες που αντιστοιχούν στα διαιρετικά σημεία της διαμέτρου, θα δίνουν τον ίδιο λόγο, όπως φαίνεται από την Γεωμετρία. Αλλά η παραβολή η οποία αποτελείται από αυτές τις τεταγμένες ή τα αντίστοιχα (απειροστά) παραλληλόγραμμα θα είναι επίσης ίση με τα $\frac{2}{3}$ του παραλληλογράμμου που θα έχει την ίδια βάση και το ίδιο ύψος και είναι το ίδιο με το άθροισμα που παράγεται από όλες τις τεταγμένες ή από τα (απειροστά) παραλληλόγραμμα που είναι ίσα με το μεγαλύτερο. Απ' όπου, αν δεχτούμε τη συμφωνία της Αριθμητικής με την Γεωμετρία, όπως εμείς θέλουμε να την επεκτείνουμε, έπεται απλά ότι η σειρά των αριθμών αυτού του είδους ισούται με τα $\frac{2}{3}$ του αθροίσματος ίδιου πλήθους όρων ίσων με το μεγαλύτερο» [13].

Μεταγραφή και Ανάλυση του Θεωρήματος σε Σύγχρονη Γλώσσα

Ας θεωρήσουμε τη σειρά των αριθμών $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ όπου :

1. $a_0 = 0$
2. Η σειρά $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ τελειώνει σε κάποιο αριθμό a_N .
3. Το συνολικό πλήθος των όρων είναι N , όπου το N μπορεί να θεωρηθεί απεριόριστα μεγάλο.
4. Ο λόγος $a_n : a_m = \sqrt[n]{n} : \sqrt[m]{m}$ ($m=1,2,3,\dots,N$ και $n=0,1,2,3,\dots,N-1$)

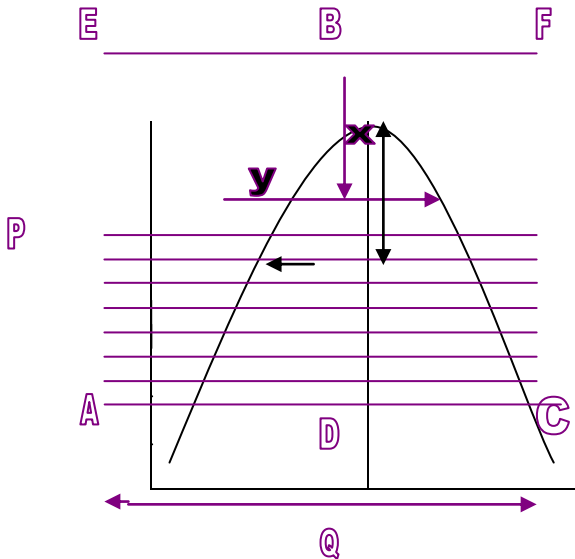
Θεωρούμε τώρα μια σειρά «απειροστών παραλληλογράμμων» με τη μια τους διάσταση ίση με $\sqrt[n]{n}$ όπου $n=0,1,2,\dots,N$.

Με άλλα λόγια για κάποιο απειροστό μέγεθος δ , η σειρά είναι η εξής: $\delta \cdot \sqrt[0]{0}, \delta \cdot \sqrt[1]{1}, \delta \cdot \sqrt[2]{2}, \dots, \delta \cdot \sqrt[n]{n}, \dots$

Ας υποθέσουμε ότι ο τελευταίος όρος της σειράς είναι $\delta \cdot \sqrt[N]{N}$. Τότε, για απεριόριστα μεγάλο N θα είναι: $\delta \cdot \sqrt[0]{0} + \delta \cdot \sqrt[1]{1} + \delta \cdot \sqrt[2]{2} + \dots + \delta \cdot \sqrt[N]{N} \approx \frac{2}{3} \cdot \delta \cdot N \sqrt[N]{N}$ και επομένως:

$$\sqrt{0} + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{N} = \frac{2}{3} \cdot N\sqrt{N}.$$

Γεωμετρική Ερμηνεία



Σχήμα 1

Ας θεωρήσουμε ένα παραβολικό χωρίο ABC και ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο AEFC (Σχήμα 1) με βάση την βάση της παραβολής και τέτοιο ώστε η κορυφή της παραβολής να εφάπτεται στην απέναντι πλευρά του. Αν AC είναι η βάση του παραβολικού χωρίου και BD η διάμετρος του τότε $(AEFC) = (AC) \cdot (BD) = Q \cdot P$. Γνωρίζουμε ότι η παραβολή ABC είναι τα $\frac{2}{3}$ του παραλληλογράμμου AEFC δηλαδή $(AEFC) = \frac{2}{3} (AC) \cdot (BD) = \frac{2}{3} Q \cdot P$. Θα υποθέσουμε ότι η παραβολή τέμνεται από παράλληλες προς τη βάση γραμμές έτσι ώστε $y^2 = c^2 \cdot x$ ή ισοδύναμα $y = c \cdot \sqrt{x}$. Επομένως μπορούμε να δούμε ότι το παραλληλόγραμμο AEFC αποτελείται από απειροστά παραλληλόγραμμα, οπότε και η παραβολή αποτελείται από παραλληλόγραμμα με παράλληλες βάσεις στη βάση της παραβολής, έτσι ώστε να είναι $y^2 = c^2 \cdot x$ ή

αντίστοιχα $y=c\cdot\sqrt{x}$. Αν υποθέσουμε ότι d είναι το κοινό απειροστό ύψος των παραλληλογράμμων που συνθέτουν την παραβολή, τότε κάθε παραλληλόγραμμο που αποτελεί την παραβολή θα έχει εμβαδόν $d\cdot c\cdot\sqrt{k}$ ($k=1,2,3,\dots,n,\dots$). Από αυτό συμπεραίνουμε ότι: Η παραβολή $ABC = d\cdot c\cdot 0 + d\cdot c\cdot 1 + d\cdot c\cdot\sqrt{2} + \dots + d\cdot c\cdot\sqrt{n} + \dots + d\cdot c\cdot\sqrt{N}$. Το παραλληλόγραμμο $AEFC = d\cdot AC + d\cdot AC + d\cdot AC + \dots + d\cdot AC + \dots + d\cdot AC$ όπου κάθε όρος $d\cdot AC$ του παραλληλογράμμου αντιστοιχεί σε κάποιο όρο $d\cdot c\cdot\sqrt{n}$ της παραβολής, έτσι ώστε ο αριθμός των όρων κάθε σειράς να είναι ο ίδιος.

Ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός των όρων κάθε σειράς είναι $N+1=p/d$, όπου p το ύψος του παραλληλογράμμου $AEFC$, $\delta=d\cdot c$ και $c\cdot\sqrt{N}=Q$, όπου Q η βάση του παραλληλογράμμου $AEFC$ και της παραβολής ABC .

Το παραπάνω άθροισμα γίνεται: $d\cdot c\cdot 0 + d\cdot c\cdot 1 + d\cdot c\cdot\sqrt{2} + \dots + d\cdot c\cdot\sqrt{n} + \dots + d\cdot c\cdot\sqrt{N} =$

$$= \delta\cdot\sqrt{0} + \delta\cdot\sqrt{1} + \delta\cdot\sqrt{2} + \dots + \delta\cdot\sqrt{n} + \dots + \delta\cdot\sqrt{N} = \text{παραβολή } ABC =$$

$$= 2/3 \text{ παραλληλογράμμου } AEFC = 2/3 P\cdot Q = 2/3 (N+1)\cdot d\cdot c\cdot\sqrt{N} = 2/3 \cdot \delta\cdot (N+1)\cdot\sqrt{N}.$$

Συγκριτική Μελέτη και Συμπεράσματα

Είναι γεγονός ότι οι απειροστικές θεωρήσεις των Wallis και Barrow καθώς και τα μέγιστα και ελάχιστα στην ανάλυση του Fermat, αποδίδουν στους τρεις αυτούς μαθηματικούς σημαντικό μερίδιο συνεισφοράς στο πρώιμο στάδιο εμφάνισης του Διαφορικού και του Ολοκληρωτικού Λογισμού. Ο Fermat επινόησε αναλυτικές μεθόδους για τη διαφορίση και την ολοκλήρωση χωρίς όμως να αντιλαμβάνεται τη σχέση που υπάρχει σ' αυτές τις δύο διαδικασίες, ενώ ο Barrow αντίστοιχα φαίνεται ότι ανακάλυψε τη θεμελιώδη αμοιβαία σχέση που τους συνδέει, αλλά επειδή δεν ανέπτυξε ολοκληρωτικά τις δυνατότητες των διαδικασιών της διαφορίσης καθώς και της ολοκλήρωσης, δεν ήταν δυνατό να κάνει αποτελεσματική χρήση τους.

Ο Wallis, όπως και ο Barrow, προσπάθησαν να υπολογίσουν εμβαδά χωρίων κάτω από καμπύλες, ο καθένας με διαφορετική προσέγγιση. Μέσα από τη συγκριτική μελέτη και ανάλυση των εργασιών τους προκύπτουν διάφορα συμπεράσματα. Ο Wallis για τον υπολογισμό του εμβαδού του χωρίου κάτω από την καμπύλη μιας παραβολής χρησιμοποιεί λόγους αθροισμάτων εμβαδών. Μελετώντας τη μέθοδό του αυτή θα πρέπει να σταθούμε στα παρακάτω σημεία:

1. Ο Wallis εφαρμόζει την Αριθμητική και την Άλγεβρα στα προβλήματα της Γεωμετρίας και καταφέρνει να κάνει μια «άμεση» αριθμητική προσέγγιση της έννοιας των απειροστών ποσοτήτων (η μέθοδος αυτή έγινε γνωστή ως *αριθμητικοποίηση της Γεωμετρίας*). Όπως φαίνεται στην εργασία του, θεωρεί κατακόρυφες γραμμές που συνθέτουν το προς υπολογισμό χωρίο. Τις *απειροστικές* μεθόδους ο Wallis (αν μπορούμε να τις ονομάσουμε έτσι γιατί ο ίδιος δεν αποδέχτηκε επίσημα την έννοια του απειροστού αφού έλεγε ότι τα απειροστά είναι ένα «τίποτα») εξέφρασε με διαφορετικό τρόπο από τον Cavallieri και άλλους μαθηματικούς που ακολουθούσαν την παράδοση των αδιαιρέτων.
2. Ο Wallis επιχείρησε να χρησιμοποιήσει την έννοια του λόγου και της αναλογίας ελεύθερα, αφού μέσα από τις μεθόδους υπολογισμού που χρησιμοποίησε διαφαίνεται η προσπάθεια του ασυμπτωτικού προσδιορισμού ενός λόγου, τον οποίον θα μπορούσαμε να εκφράσουμε στο πλαίσιο της Κλασσικής Ανάλυσης ως όριο ενός λόγου (όπως στο παράδειγμα του υπολογισμού του εμβαδού κάτω από την καμπύλη της παραβολής). Αριθμητικοποιώντας την εργασία του Cavallieri και βασίζοντας τις μεθόδους του στο άθροισμα των δυνάμεων των φυσικών αριθμών, μπόρεσε να επιτύχει μια επιπλέον γενίκευση, που στη σύγχρονη μαθηματική γλώσσα θα φαινόταν ως απλή εφαρμογή της έννοιας του ορίου. Όμως τα τότε θεμέλια της προσέγγισης αυτής ήταν ασταθή.

3. Παρόλα αυτά, οι ιδέες του Wallis σχετικά με τον τρόπο άθροισης ενός απεριόριστου αριθμού προσθετέων θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως πρόδρομες της μετέπειτα αντίληψης του Leibniz για το ολοκλήρωμα όχι ως ορίου αθροίσματος αλλά ως *καθεαυτού αθροίσματος* (η αντίληψη αυτή θεμελιώθηκε λογικά στο πλαίσιο της σύγχρονης Μη-Συμβατικής Ανάλυσης, βλ. π.χ. Alain Robert).

Η μεθοδολογική προσέγγιση του Barrow διαφέρει. Οι εργασίες του σχετικά με τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων πλαισιώνουν ένα μεγάλο φάσμα θεωρημάτων. Η διαδικασία που χρησιμοποιεί για τον προσδιορισμό της εφαπτομένης καμπύλης οδηγεί στη σημερινή μέθοδο εύρεσης της εφαπτομένης που χρησιμοποιούμε στο Διαφορικό Λογισμό. Από την ανάλυση της αποδεικτικής διαδικασίας που ακολουθεί ο Barrow στο παραπάνω θεώρημα που αναφέραμε απορρέουν οι εξής παρατηρήσεις, σε αντιστοιχία με τα σημεία που εντοπίσαμε στον Wallis:

1. Ο Barrow αποκλείοντας την Άλγεβρα από τα Μαθηματικά και θεωρώντας την Αριθμητική κομμάτι της Γεωμετρίας, δεν θα μπορούσε να οδηγηθεί στην έννοια του ορίου, καθόσον γι' αυτό απαιτείται όχι μόνον η κλασσική αντίληψη της έννοιας του αριθμού, αλλά μια περισσότερο διευρυμένη αντίληψη αυτού. Το συμπέρασμα αυτό ενισχύεται και από την άποψη ότι ο μαθητής του Barrow, ο Isaac Newton απέφευγε να χρησιμοποιήσει την αριθμητική ερμηνεία της έννοιας του ορίου, στηρίζοντας την βασική αρχή του Απειροστικού Λογισμού στην ιδέα της συνεχούς μεταβλητής ποσότητας. Σύμφωνα με τον Barrow, οι αριθμοί χρησιμοποιούνται ως μέσον για την έρευνα, πάντα εντός των ορίων της Αριθμητικής. Η αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιεί στο παραπάνω άθροισμα δεν μπορεί να δώσει από μόνη της αποτελέσματα, τα οποία σύμφωνα με τον ίδιο, μπορούμε να συμπεράνουμε από την Γεωμετρία.
2. Η γεωμετρική ανάλυση του Barrow αναφέρει «απείρως λεπτά παραλληλόγραμμα» - τα οποία δεν ορίζονται στην Κλασσική Ανάλυση, ενώ αποκτούν νόημα και παρουσιάζουν μεγάλο

ενδιαφέρον στην σύγχρονη περιοχή της λεγόμενης *Συνθετικής Διαφορικής Γεωμετρίας* (βλ. A.Kock, John Bell).

3. Μια τέτοια ερμηνεία στο πλαίσιο της Συνθετικής Διαφορικής Γεωμετρίας ενισχύεται από το ότι στα αριθμητικά παραδείγματα ο Barrow, δεν κάνει διάκριση μεταξύ των απεριόριστα μικρών ποσοτήτων ενός τόξου (π.χ. της καμπύλης της υπερβολής) και της εφαπτομένης του, αλλά θεωρεί λογικό να προσδιορίσει τις γραμμές αυτές στη βάση ενός *απροσδιόριστα μικρού* τμήματος της καμπύλης.

Ο Barrow υπήρξε ένας προικισμένος Γεωμέτρης, όχι μόνο με την τυπική έννοια του όρου, αλλά για τις διαισθητικές εκτιμήσεις του στις έννοιες του χρόνου και της κίνησης, των ιδιοτήτων των καμπύλων, των εφαπτομένων και των εμβαδών. Η προσέγγισή του στη μελέτη των καμπύλων ίσως και να έκρυβε την αποδοχή της αντίληψης των αδιαιρέτων του Cavallieri, δεν υπάρχουν όμως στοιχεία που να αποδεικνύουν ότι ανέπτυξε κάποια τέτοια μέθοδο.

Κανείς από τους δύο αυτούς (ή τους προηγούμενους) μαθηματικούς του 17^{ου} αιώνα δεν κατάφερε να ανακαλύψει πραγματικά ένα αποτελεσματικό *εργαλείο* επίλυσης τέτοιων προβλημάτων. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα επιμέρους υλικά για την κατασκευή ενός τέτοιου εργαλείου «ήταν ήδη εκεί», όμως κανένας δεν είχε καταφέρει να κάνει τη *σύνθεση*. Παρόλα αυτά οφείλει να αναγνωρίσει κανείς ότι η αξία της συνεισφοράς των Wallis και Barrow στην δημιουργία και ανάπτυξη της Ανάλυσης είναι μεγάλη και σημαδεύει το τρίτο τέταρτο του 17^{ου} αιώνα.

Μέσα από την διάσταση των απόψεων των Wallis και Barrow που αφορά στην διάκριση ανάμεσα στις αριθμητικές και γεωμετρικές προσεγγίσεις, διαφαίνονται οι διδακτικές προεκτάσεις του θέματος. Η γεωμετρική μέθοδος του Barrow για την εύρεση και απόδειξη ενός αριθμητικού αποτελέσματος μπορεί να θεωρηθεί πρόδρομος της ιδέας της χρήσης γεωμετρικών μοντέλων στη Μαθηματική Ανάλυση [14]. Η εφαρμογή γεωμετρικών αναπαραστάσεων ως μοντέλων για την επίλυση Μαθηματικών προβλημάτων δίνει μια μοντέρνα διδακτική προοπτική, γιατί παρέχει ένα διαφορετικό

πλαίσιο αντίληψης της επίλυσης του μαθηματικού προβλήματος (Problem solving).

Η πορεία μετάβασης στις επ' άπειρον διαδικασίες είναι για τους σημερινούς φοιτητές ανάλογη με την διαδικασία που παρατηρείται στην Ιστορία των Μαθηματικών. Με την βοήθεια της Ιστορίας των Μαθηματικών αλλά και της εξέλιξης των Μαθηματικών εννοιών ως τη σημερινή τους μορφή, μπορούν να αναπτυχθούν διδακτικές μέθοδοι οι οποίες μέσα από την άτυπη απόδειξη, δίνουν στους φοιτητές την ευκαιρία να ανακαλύψουν την αναγκαιότητα της τυπικής απόδειξης. Οι υπολογισμοί του Wallis δείχνουν μια συμπερασματική διαδικασία που συγκλίνει σε απλοϊκές αντιλήψεις του Απειροστικού Λογισμού, τις οποίες μερικές φορές παρατηρούμε μέσα στην τάξη. Τέλος σημαντική είναι η προσφορά του Wallis στη σύγχρονη διδακτική προσέγγιση των εννοιών του άπειρα μικρού, του άπειρα μεγάλου και της επ' άπειρον διαδικασίας, μέσα από τα πλαίσια της μη-Συμβατικής Ανάλυσης.

Υποσημειώσεις

1. Florian Cajori., Controversies on Mathematics between Wallis, Hobbes and Barrow., *Mathematics Teacher*, τεύχος 22 σελ. 146-151, 1929. Επανεκδόθηκε από τον F.J.Swetz , *From Five Fingers to Infinity: A Journey through the History of Mathematics.*, Open Court, 1994.
2. Margaret Baron, *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, Dover, 1969, σελ. 135.
3. Margaret Baron, *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, Dover, 1969, σελ. 150.
4. Τα βιογραφικά στοιχεία του John Wallis είναι από τη συλλογή μαθηματικών βιογραφιών., *A Short Account of the History of Mathematics*, W.W.Rouse Ball., 4^η έκδοση, 1908.
5. D.Struik., *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*, Harvard University Press, 1969, σελ. 244-253.
6. Victor J.Katz., “ *A History of Mathematics: an introduction*”, second edition, Copyright 1998 by Addison-Wesley Educational Publishers, Inc., Chapter 12.2.4 , pp. 485-487.

7. Ο Gregoire de St Vincent έδειξε ότι αν θεωρήσουμε στη σύγχρονη μαθηματική γλώσσα ένα διατεταγμένο ζεύγος συντεταγμένων της μορφής (x_i, y_i) και για $i=1,2,3,4$ πάρουμε τέσσερα σημεία της υπερβολής τέτοια ώστε $x_2 : x_1 = x_4 : x_3$, τότε το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου χωρίου που ορίζεται από τα σημεία με συντεταγμένες $(x_1, 0)$, (x_1, y_1) , (x_2, y_2) και $(x_2, 0)$ είναι ίσο με το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου χωρίου με συντεταγμένες $(x_3, 0)$, (x_3, y_3) , (x_4, y_4) και $(x_4, 0)$. Σχετικά με την απόδειξη αυτής της πρότασης σε σύγχρονη γλώσσα, βλ. Victor Katz, *A History of Mathematics: an introduction*, second edition, (1998) by Addison-Wesley Educational Publishers, Chapter 12, pp. 492-493.
8. Σχετικά με την ανακάλυψη των φυσικών λογαρίθμων και τη σχέση τους με τα εμβαδά., βλ. Γ Θωμαΐδης., Προέλευση και εφαρμογές της 'Θεωρίας' στη Διδασκαλία των Μαθηματικών., *Ευκλείδης Γ'*, τεύχος 13., 1986.
9. Ο λόγος β : 1 ισοδυναμεί με το λόγο $a\beta$: a οπότε το εμβαδόν της επιφάνειας από το 1 έως το β ισοδυναμεί με το εμβαδόν της επιφάνειας από το a έως το $a\beta$. Και αφού η επιφάνεια από το 1 έως το $a\beta$ ισούται με το άθροισμα των επιφανειών από το 1 μέχρι το a και από το a μέχρι το $a\beta$ τότε ισχύει η λογαριθμική ιδιότητα δηλαδή $A(a \cdot \beta) = A(a) + A(\beta)$.
10. Σχετικά με την επέκταση της θεωρίας των δυναμοσειρών στους λογάριθμους από τον N. Mercator., βλ. Victor J. Katz., ο.π., σελ. 494. Το 1668 ο Nicolaus Mercator (1620-1687) δημοσίευσε το βιβλίο *Logarithmotechnica (Logarithmic Teachings)*, στο οποίο παρουσίασε την επέκταση των δυναμοσειρών στους λογάριθμους. Ο Mercator έχοντας διαβάσει την εργασία του Sarasa και εκμεταλλευόμενος την νύξη του σχετικά με τον λογάριθμο, ότι δηλαδή ο λογάριθμος συνδέεται με το εμβαδόν της περιοχής που βρίσκεται κάτω από μια υπερβολή και έχοντας επίσης υπόψη του από το έργο του Wallis, την τεχνική του υπολογισμού του λόγου των άπειρων σε πλήθος αθροισμάτων δυνάμεων, υπολόγισε τον $\log(x+1)$, δηλαδή το εμβαδόν της περιοχής A που βρίσκεται κάτω από την υπερβολή $y = \frac{1}{x+1}$ από το 0 έως το x , χρησιμοποιώντας τέτοια άπειρα αθροίσματα.
11. Barrow, *Mathematical Works* εκδ από τον W. Whewell, Cambridge, 1960, σελ. 39, 45-46, 51-53, 56, 59.
12. Ο Barrow στο έργο του *Geometrical Lectures* απέδειξε το παρακάτω θεώρημα: «Αν ZGE είναι μια καμπύλη της οποίας ο άξονας των τετμημένων

FIGURE 12.19
Barrow's version of the
fundamental theorem.

σχέση: $R \cdot g(x) = \int_a^x f(x) dx$, όπου αν συμβολίσουμε την καμπύλη ZGE με

13. Isaaci Barrow *Lectiones Mathematicae* xxiii., Principia Matheseos generalia exponuntur: Habitaе Cantabrigiae A.D.1664,1665,1666. Η απόδοση του κειμένου βασίζεται στην Αγγλική μετάφραση του H.Mendel p.30-31, «Issac Barrow, Usefulness», www.calstatela.edu/faculty/hmendel.

127

Βιβλιογραφικές Αναφορές

1. Henry Mendel., *Archimedes' Mechanical Method with Indivisibles*, Cal.State U.,L.A, κείμενο στο διαδίκτυο., ArchMethodIntro.html
2. Florian Cajori., Controversies on Mathematics between Wallis, Hobbes and Barrow., *Mathematics Teacher*, 1929.
3. Margaret Baron, *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, Dover, 1969.
4. W.W.Rouse Ball., *A Short Account of the History of Mathematics*, 4^η έκδοση, 1908.
5. D.Struik., *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*, Harvard University Press, 1969.
6. D.Struik., *Συνοπτική θεωρία των Μαθηματικών.*, Ζαχαρόπουλος, 1990.
7. Victor J.Katz., *A History of Mathematics: an introduction*, 2^η έκδοση, εκδ. Addison-Wesley, 1998.
8. Carl B.Boyer, *The history of the Calculus and its conceptual Development*, Dover, 1959.
9. John Wallis., *Opera Mathematica*, Vol II, *Arithmetica Infinitorum*.
10. Barrow, *Mathematical Works* εκδ από τον W.Whewell, Cambridge, 1960.
11. Alain Robert., *Nonstandard Analysis.*, Dover., 1988.
12. A. Kock., *Synthetic Differential Geometry.*, Cambridge University Press, 1981.
13. John Bell., *A Primer of Infinitesimal Analysis.*, Cambridge University Press, 1988.

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ ΕΛΛΗΝΑ ΔΑΣΚΑΛΟΥ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: ΙΣΤΟΡΙΚΟ- ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

Μαρία Νικολακάκη

Λέκτορας Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

1. Εισαγωγή

Ο ρόλος του δασκάλου είναι να συμβάλλει αποτελεσματικά στην επίτευξη των σκοπών της εκπαίδευσης, όπως αυτοί διαμορφώνονται κάθε φορά από τις παραδοχές για την αποστολή του σχολείου, παράλληλα και ανάλογα με τον εκσυγχρονισμό της κοινωνίας. Τα Μαθηματικά, ως ένα από τα σημαντικότερα μαθήματα του Δημοτικού Σχολείου έχουν ιδιαίτερη θέση στην επίτευξη των σκοπών της εκπαίδευσης. Ταυτόχρονα, η διδασκαλία των Μαθηματικών επηρεάζεται από το κυρίαρχο παιδαγωγικό σύστημα του δημοτικού σχολείου.

Στην εργασία αυτή θα εξετάσουμε το ρόλο του δασκάλου κατά τη διδασκαλία του μαθήματος των Μαθηματικών στο νεότερο ελληνικό Δημοτικό σχολείο. Συγκεκριμένα, θα εξετάσουμε το ρόλο του Έλληνα δασκάλου στα τρία παιδαγωγικά συστήματα που κυριάρχησαν από τη σύσταση του ελεύθερου ελληνικού κράτους και μέχρι τα μέσα του 20^{ου} αιώνα: το Αλληλοδιδασκτικό παιδαγωγικό σύστημα, το Συνδιδασκτικό παιδαγωγικό σύστημα και το Σχολείο Εργασίας. Μέσα από την εξέταση αυτή θέλουμε να εντοπίσουμε τη σχέση μεταξύ του εκσυγχρονισμού της κοινωνίας και των μηχανισμών της, συγκεκριμένα του εκπαιδευτικού

συστήματος, και του ρόλου του δασκάλου στη διδασκαλία των Μαθηματικών.

2. Η διδασκαλία των Μαθηματικών στο αλληλοδιδασκτικό σχολείο (1822-1878).

Η αλληλοδιδασκτική μέθοδος ήταν η πρώτη μέθοδος που εφαρμόστηκε στο ελληνικό σχολείο μετά την Τουρκοκρατία. Όπως αναφέρει και ο Κοκκώνης(1830), "η μέθοδος ωνομάσθη αλληλοδιδασκτική, διότι πολλοί παῖδες υπό την επιστασίαν ενός διδασκάλου, διδάσκουν αλλήλους, ὅσα ο εἰς μανθάνει κάλλιον τῶν ἄλλων. Ἐχει δε σκοπὸν νὰ διδάσκει τοὺς μαθητευομένους διεγείρουσα αὐτοὺς εἰς ἄκραν φιλοτιμίαν, φιλομάθειαν καὶ επιμέλειαν, τὰς ἀναγκαιότητας εἰς πάντας ἀρχικὰς γνώσεις με ὅσον δυνατόν μεγαλυτέραν οικονομίαν τοῦ καιροῦ καὶ τῶν χρημάτων, ν' ἀναπτύσσει ἀντάμα τὰς σωματικὰς καὶ ψυχικὰς δυνάμεις..." Ο τρόπος της αλληλοδιδασκτικής αποτελείται ἀπὸ ἓνα σύνολο κανόνων, αὐστηρὰ ἐφαρμοσμένων, που κατακερματίζουν τὴν εκπαιδευτικὴ διαδικασία, ὥστε νὰ εἶναι ἐλέγξιμη ἀνὰ πάσα στιγμή. Ο κατακερματισμὸς δημιουργεῖ μία τελετουργικὴ ατμόσφαιρα καὶ ὅλες οἱ κινήσεις στο αλληλοδιδασκτικό σχολείο εἶναι με τόση σαφήνεια περιγεγραμμένες, ὥστε νὰ εἶναι προβλέψιμες (Κοντόνη, 1997).

Η μέθοδος αὐτὴ μπορεῖ νὰ εἶχε πολλὰ μειονεκτήματα, ἀλλὰ εἰσῆχθη στα Δημοτικά Σχολεῖα με "νομιμοποιητικό λόγο" ἓνα σοβαρὸ πλεονέκτημα γιὰ τὴν Ελλάδα, που βρισκόταν σε δύσκολη οικονομικὴ κατάσταση μετὰ τὴν ἀπελευθέρωση: ἦταν φθινὴ μέθοδος, ἀφοῦ με ἓνα διδάσκαλο μάθαιναν πολλὰ παῖδιά, καὶ ἐπιπλέον ἡ διδασκαλία γινόταν σε πίνακες καὶ ἐτσι δὲν χρειάζονταν βιβλία. Ὅπως παρατηρεῖ καὶ ο Ι. Δραϊκῆς(1855), " ἡ αλληλοδιδασκτικὴ εἶναι μάλλον οικονομικὴ ...ἀρκοῦσιν 80 δραχμαὶ κατὰ μῆνα τοῖς 100 μαθηταῖς...διὰ δε τῆς συνδιδασκτικῆς ἀπαιτεῖται πολλαπλὴ δαπάνη". Η γενίκευση τῆς στὴν Ελλάδα ἦταν ἄμεση καὶ ο χρόνος ἐφαρμογῆς τῆς ξεπέρασε τὰ ευρωπαϊκὰ δεδομένα, ἀφοῦ ἐκεῖ γρήγορα μπόρεσαν νὰ τὴν ξεπεράσουν καὶ νὰ

χρησιμοποιήσουν άλλες αποτελεσματικότερες μεθόδους.

Το ελληνικό Δημοτικό Σχολείο από την ίδρυση του (Ν. 1834) περιελάμβανε στο πρόγραμμα του τη διδασκαλία της αριθμητικής. Το διάταγμα περί δημοτικών σχολείων (Παππαδόπουλος, 1864, Λέφας, 1942:68, Δημαράς, 1973:231) θα ισχύσει έως τα τέλη του 19ου αιώνα "με ελάχιστες παραλλαγές"(Δημαράς, 1973:κθ). Ως μέθοδος διδασκαλίας των μαθημάτων αναδεικνύεται (χωρίς να αναφέρεται στο Νόμο), η αλληλοδιδασκτική. Η διδασκαλία της αριθμητικής νομιμοποιείται λόγω της χρησιμότητας του μαθήματος στη ζωή, αλλά, και λόγω της σύνδεσης του μαθήματος με την αρχαία ελληνική κληρονομιά, στην οποία δόθηκε έμφαση με την επανασύσταση του ελεύθερου ελληνικού κράτους, ύστερα από 400 χρόνια σκλαβιάς.

Στο αλληλοδιδασκτικό σχολείο οι μαθητές σε κάθε μάθημα κατατάσσονταν σε οκτώ κλάσεις, ανάλογα με τις γνώσεις τους⁽¹⁾. Η κατάτμηση, ο απόλυτος κατακερματισμός όλων των ενεργειών είχε επιπτώσεις και στη διδασκαλία της αριθμητικής. Οι κλάσεις της

¹ Σε ένα από τα εγχειρίδια αλληλοδιδασκτικής, το "Σύστημα Αγγλικόν δια τα σχολεία ή εύκολος μέθοδος δια την διδασκαλία των παιδών, Εν Μελίτη, Από την εξ Αμερικής Τυπογραφείαν, το 1827 οι κλάσεις είναι διαφορετικές, δηλαδή:

1. κλάσις: πρόσθεσις
2. πρόσθεσις απλή
3. αφαιρέσις απλή
4. πολλαπλασιασμός απλούς
5. διαιρέσις απλή
6. πρόσθεσις σύνθετος
7. αφαιρέσις σύνθετος
8. πολλαπλασιασμός των ετερογενών αριθμών
9. διαιρέσις των ετερογενών αριθμών
10. αναγωγή, μέθοδος των τριών.

Οι μαθητές αρχίζουν τη διδασκαλία της αριθμητικής αφού τελειώσουν την 6η κλάση της αναγνώσεως. (ίσως δεν είχε αρχίσει η επιρροή από τον Πεσταλότσι ακόμα) Και εδώ διδάσκονται και στα ημικύκλια και στα θρανία με τους πρωτόσχολους.

αριθμητικής διαιρούνταν με βάση τις πράξεις και όχι το μέχρι ποιον αριθμό μάθαιναν να μετρούν, όπως συμβαίνει σήμερα. Έτσι, η αριθμητική διδασκόταν ως εξής (Κοκκώνης, 1842): στην α' κλάση οι μαθητές διδάσκονταν την γραφή των αραβικών αριθμών, στη β' κλάση μάθαιναν την αριθμηση, στη γ' την πρόσθεση, στην δ' την αφαίρεση, στη ε' τον πολλαπλασιασμό, στην στ' τη διαίρεση, στη ζ' συμμιγείς αριθμούς, τα κοινά κλάσματα (δεκαδικά), και το μέρος του μετρικού συστήματος και στην η' κλάση εφαρμογή της αριθμητικής και λύση προβλημάτων. Η αριθμητική διδασκόταν στα ημικύκλια και στα θρανία, από τις 11 έως τις 12 η ώρα κάθε μέρα. Η κατάτμηση των μαθητών σε κλάσεις δε τελείωνε εκεί, αλλά επεκτεινόταν σε μεγαλύτερη εξειδίκευση στο πλαίσιο μιας ομάδας που είχε τις ίδιες ικανότητες. Το αλληλοδιδακτικό σχολείο αν δεν δίδασκε, πάντως προετοιμάζε για τις ανισότητες στην κοινωνία (Κοντώνη, 1997:123).

Κατά τον Χ. Λέφα (1942:151): "χαρακτηριστικά γνωρίσματα της αλληλοδιδακτικής μεθόδου είναι η εξαφάνιση παντός ίχνους πρωτοβουλίας των μαθητών, ενεργούντων μόνον κατ' επιταγήν και συμφώνως προς αυστηράς τυπικότητας κανόνας, αφ' ενός, και αφ' ετέρου η συσσώρευσις εις τον εγκέφαλον αυτών πλήθους νεκρών γνώσεων αναφομοιωτών". Στη διάρκεια του αλληλοδιδακτικού σχολείου ο ρόλος του δασκάλου ήταν του "διεκπεραιωτή" της τεχνικής της διδασκαλίας. Το έργο του δασκάλου ήταν κυρίως η ανάθεση καθηκόντων στους πρωτόσχολους, η γενική εποπτεία της σχολικής αίθουσας και η τήρηση της τάξης, που αποσκοπούσε στην επιβολή της υπακοής στους νόμους και της κυριαρχίας ανθρώπων που είχαν ζήσει κάτω από την ανατολική δεσποτεία με ποικιλία οργάνωσης από περιοχή σε περιοχή. Οι δάσκαλοι ήταν υποχρεωμένοι "ν' ακολουθώσι απαρεγγλίτως τον οδηγόν (της αλληλοδιδακτικής), έχοντας αυτόν ως τύπον και κανόνα απαράβατον του καθ' ύλην διοργανισμού και περί του διδασκαλίας τρόπου, εάν δε τις των δασκάλων νομίζη αναγκαίαν την κατά τι τροπολογίαν, χωρίς να καινοτομή παντελώς, θέλει καθυποβάλλει εις την Κυβέρνησιν τας παρατηρήσεις του, αι οποίαι δύνανται να συντελώσιν εγκαίρως μετά των άλλων εις την βελτίωσιν της

μεθόδου" (Κοκκώνης,1830:32). Στην πραγματικότητα όμως κατά τον Χ. Λέφα: "η διδασκαλία εγίνετο όπως έκαστος διδάσκαλος ήθελεν και καθ' ην ώραν ήθελεν, επί τη βάσει της Αλληλοδιδασκτικής μεθόδου, την οποίον όμως έκαστος ηλλοίωσε κατά τας αντιλήψεις του...."(Λέφας,1942: 90).

Η κακή κατάσταση της Μαθηματικής εκπαίδευσης τονίστηκε από πολλούς λόγιους. Ο Β. Φαρσής αναφέρει τα εξής:" διότι μόλις και μετά βίας οι παίδες εν τω ελληνικώ σχολείω κατέχουσι πως τα τέσσερα πάθη της αριθμητικής, εν δε τοις δημοτικοίς σχολείοις μετά κόπου προχωρούσι μέχρι της προσθέσεως.... χωρίς ο διδάσκαλος δια των πραγμάτων ως ειπείν να προσφέρη το διδασκόμενον εις τον παίδα, έτι καθεύδοντα τον νουν, όπως και αι εντυπώσεις μάλλον ανεξίτηλοι γίνωνται (Φαρσής,1868:8). Και συνεχίζει αναφερόμενος στις γνώσεις που παρέχει το Δημοτικό Σχολείο: "τόση λέγωμεν είναι η πρόοδος εν τοις δημοτικοίς σχολείοις ώστε ο παις εξερχόμενος αυτών ανικανοί να γράψη σαφώς ολιγόγραμμον επιστολήν ή και να λογαριάση την εσοδείαν εκ των προϊόντων του"(Φαρσής,1868:43).

Με την είσοδο της χώρας στα πρώτα στάδια εκβιομηχάνισης, η ανάγκη της μεταρρύθμισης στο Δημοτικό Σχολείο έγινε ιδιαίτερα αισθητή. Το Υπουργείο εισάγει τη συνδιδασκτική κάνοντας λόγο για την ανάγκη αύξησης της ελληνικής παραγωγικότητας και ανταγωνιστικότητας ως προς τις ευρωπαϊκές χώρες. Δεν ήταν αρκετό πλέον να είναι ο πολίτης πειθήνιος και υπάκουος, έπρεπε να είναι και αποτελεσματικός.

3. Η διδασκαλία των Μαθηματικών στο συνδιδασκτικό σχολείο (1878-1910).

Προς τα τέλη του 19^{ου} αιώνα οι οικονομικές αλλαγές διαμορφώνουν μια νέα κατάσταση που χαρακτηρίζεται από μια ιδεολογική κρίση με πολιτικές προεκτάσεις. Οι αστικές δυνάμεις αποκτούν συνείδηση του στόχου τους: τίθενται οι βάσεις μιας κοινωνίας που τείνει προς τη βιομηχανική ανάπτυξη και διοικείται με τις αρχές του φιλελεύθερου κοινοβουλευτισμού. Θεωρείται

λοιπόν ότι η απαραίτητη αυτή πολιτική αλλαγή προϋποθέτει τον εκσυγχρονισμό της εκπαίδευσης και του περιεχομένου της καθώς και των μεθόδων διδασκαλίας (Α. Ανδρέου & Π. Παπακωνσταντίνου, 1992: 187, Muller et.al,1987). Το μέτρο αυτό πλαισιώθηκε και από άλλα μέτρα όπως η κατάρτιση του πρώτου Αναλυτικού Προγράμματος και η επανασύσταση του Διδασκαλείου καθώς και ο θεσμός των μονίμων επιθεωρητών, “οίτινες κατά τας επιθεωρήσεις των και δι’ εγκυκλίων διαταγών παρείχον οδηγίας δια την διδασκαλίαν των διαφόρων μαθημάτων” (Λέφας,1942:161).

Το αλληλοδιδασκτικό σχολείο θεωρήθηκε ανεπαρκές για την προετοιμασία του νέου Έλληνα πολίτη, που απαιτούσαν οι νεο-διαμορφούμενες κοινωνικο-οικονομικές συνθήκες της χώρας. Ως λόγοι που επέβαλλαν την αλλαγή αναφέρονται ο εκσυγχρονισμός της κοινωνίας, η "κατασκευή" του σύγχρονου πολίτη και η οικονομική ανάπτυξη:

Ως μέσο ανταπόκρισης των νέων αναγκών εισάγεται η συνδιδασκτική μέθοδος στα ελληνικά σχολεία. Το συνδιδασκτικό σχολείο αποτελεί προσπάθεια εξορθολογισμού της διδακτικής πράξης στο πλαίσιο του εκσυγχρονισμού του εκπαιδευτικού συστήματος. Το 1880 η εγκύκλιος που καταργεί την αλληλοδιδασκτική μέθοδο αναφέρει ως λόγους της αντικατάστασής της με τη συνδιδασκτική⁽²⁾: "Το κοινοβουλευτικό καθεστώς, που παγιώνεται στη μετασχηματιζόμενη νεοελληνική κοινωνία, προϋποθέτει έναν "πολίτη" ελεύθερο, ο οποίος έχει ίσα δικαιώματα με όλους, και ηθικό, ο οποίος πρέπει να υπακούει στους νόμους. Το δε καθήκον της διαμόρφωσης αυτού ως ελεύθερου και ηθικού πολίτη εναπόκειται στην εκπαίδευση (Φραγκουδάκη, 1988, Κοντόνη,1997:123).

Με τη μεταβολή του συστήματος διδασκαλίας από αλληλοδιδασκτικό σε συνδιδασκτικό, όποτε διαμορφώθηκαν οι τάξεις

2 Έως το 1880 δεν υπήρχε επίσημο πρόγραμμα μαθημάτων του Δημοτικού Σχολείου

του Δημοτικού σε 4, εκδόθηκαν στις 15/2/1880 από τον τότε γενικό επιθεωρητή των σχολείων Δ. Γ. Πετρίδη (Διάταγμα 3.9.1880), επικυρωμένες από τον υπουργό Ν. Παπαμιχαλόπουλο: "Στοιχειώδεις πρακτικά οδηγία της διδασκαλίας των μαθημάτων εν τοις δημοτικοίς σχολείοις", που αποτελούν τα πρώτα Α.Π. του Δημοτικού Σχολείου. Σ' αυτές αφού γινόταν αναφορά στο σκοπό του σχολείου και στα καθήκοντα των δασκάλων, στη συνέχεια αναγραφόταν η διδακτέα ύλη, υπό τη μορφή απλού κατάλογου. Έτσι, για το μάθημα της αριθμητικής σκοπός ήταν "αφενός μεν η άσκησης της διανοίας δια των λογιστικών σχέσεων, ώστε να νοή ορθώς και να διατυπώνει τα νοήματα του καθαρώς και κανονικώς εν τω προφορικό λόγω, την κανονικήν της χρήσεως και του ορθού λογισμού οδόν ακολουθών, αφ' ετέρου δε η απόκτησις της λογικής εμπειρίας της τοσούτω χρησίμω εν τω πρακτικό βίω."

Σε σχέση με την κατανομή του περιεχομένου στο πρόγραμμα του 1880: "εις την α' τάξιν διδάσκονται αι σχέσεις των αριθμών από της μονάδος μέχρι του 20 και η πρόσθεσις και η αφαιρέσις. Εις την β' τάξιν λαμβάνεται ως αριθμητικόν όριον το 100 και ασκούνται οι μαθηταί εις την αριθμωσιν και τας τέσσαρας απλὰς πράξεις μέχρι του αριθμού τούτου. Εις την γ' τάξιν, μετά σύντομον επανάληψιν των εις την β' διδασθέντων διδάσκεται η αριθμωσις από του 100 έως του 1000 και η διαιρέσις διψηφίων δια μονοψηφίων. Εις την δ' τάξιν διδάσκονται αι τέσσαρες πράξεις των ακεραίων δια πολυψηφίων αριθμών και εκ των κλασμάτων τα στοιχειωδέστερα, προς δε τα περί συνήθων μέτρων και σταθμών και ιδία το δεκαδικόν σύστημα και τα περί διαιρέσεως του χρόνου, ήτοι ημέρα, νύξ, υποδιαιρέσεις της ώρας, εβδομάς, μην, έτος, εποχαί του έτους κτλ."

Το 1881 συντάχθηκαν και κυκλοφόρησαν από το Υπουργείο οι "Στοιχειώδεις πρακτικά οδηγία της διδασκαλίας των μαθημάτων εν τοις δημοτικοίς σχολείοις", από το γενικό διευθυντή Δ. Γ. Πετρίδη καθώς και η "Διδασκαλική ή Σύντομοι Οδηγία περί της χρήσεως της νέας διδασκαλίας μεθόδου" του Σπ. Μωραΐτη. Η κατάσταση όμως στα σχολεία όλη αυτήν την περίοδο εξακολουθεί να μην είναι καθόλου καλή. Το 1883 η κυβέρνηση στέλνει 14

επιθεωρητές, μεταξύ των οποίων το Χαρήσιο Παπαμάρκο και το Νικόλαο Πολίτη, για να μελετήσουν την κατάσταση των Δημοτικών Σχολείων της χώρας. Στην έκθεσή του ο Πολίτης αναφέρει: "μόνον ανάγνωσιν διδάσκονται οι παίδες, και αυτήν ξηράν..."(Δημαράς,1973:248). Ο Χ. Παπαμάρκου αναφέρει: "Γενικώς ειπείν πλην της μηχανικής αναγνώσεως, γραφής και αριθμήσεως ουδέν άλλο διδάσκονται και εις ουδέν άλλο εθίζονται..." και "πάντα τα μόρια εξ' ων συναποτελείται το σχολείον, είναι εν δημοτικοίς σχολείοις ουκί υγειά....." Στα 1883 η σύγχυση είναι τέτοια ώστε, όπως επισημαίνει και ο επιθεωρητής Χ. Πούλιος "η διδακτική μέθοδος όλως ελλείπει" (Λέφας,1942:127).

Έτσι, το αίτημα για εκπαιδευτική μεταρρύθμιση είχε γίνει γενικό και επίμονο. Στην ικανοποίησή του απέβλεπε η νομοθεσία του Δ. Γ. Πετρίδη του 1895 (Δημαράς,1973:3-4) και η σύνταξη των πρώτων άρτιων και επιστημονικών Α.Π. των διάφορων τύπων των Δημοτικών Σχολείων (1894) υπό του παιδαγωγού Χ. Παπαμάρκου. Στο μεταξύ, η χρησιμοποίηση ενός και μοναδικού βιβλίου (Ν.ΒΡΛ 14/ 1/1893), το ενιαίο εβδομαδιαίο υποχρεωτικό πρόγραμμα που ίσχυσε και η κατάργηση των διδάκτρων το 1895, που εντάχθηκαν σε μία εκσυγχρονιστική λογική, ολοκληρώνουν την υποταγή του Δημοτικού Σχολείου στον συγκεντρωτικό χαρακτήρα του κράτους με την ανάληψη της αποκλειστικής ευθύνης της εκπαίδευσης από αυτό.

Μέχρι το 1887 δεν υπήρχε συγκεκριμένη παιδαγωγική μέθοδος, οπότε επί διευθύνσεως Παπαμάρκου εισήχθη η ερβαρτιανή μέθοδος (Λέφας, 1942:221). Η διδακτική, η οποία εφαρμόστηκε στο συνδιδακτικό σχολείο, ύστερα από την επίδραση της θεωρίας του Ερβάρτου, τυποποιείται σε στάδια. Κατά τον Έρβαρτο, σκοπός της διδασκαλίας είναι να διευρύνει και να ενισχύσει τον κύκλο των παραστάσεων του παιδιού, για να ενισχυθεί η βούληση και να εξασφαλιστεί η ηθικοποίηση του ατόμου, πράγμα που αποτελεί την επιδίωξη της εκπαίδευσης. Σκοπός της αγωγής είναι η διάπλαση χαρακτήρα και μέσο η διδασκαλία. Η διδακτική μεθοδολογία εκσυγχρονίζεται σύμφωνα με πρότυπα "ορθολογικοποίησης" και συστηματοποίησης. Η επιβολή των εκπαιδευτικών στόχων θα

επιχειρηθεί με "λογικά" επιχειρήματα. Η αλλαγή της μεθόδου συνδυάζεται με τη νέα αντίληψη για το ρόλο του δασκάλου. Ο δάσκαλος γίνεται ο "ηγεμόνας" της τάξης, το "άλας" της κοινωνίας, που θα έπρεπε να είναι πρότυπο ηθικής τελείωσης, αφού καθορίζει την ηθική υπόσταση του έθνους (Κοντόνη,1997:128). Η αλλαγή της νοοτροπίας έχει αντίκτυπο και στην αντίληψη για το παιδί και τη φύση του. Το παιδί αντιμετωπίζεται ως μαθητής, και αρχίζει να εκδηλώνεται ενδιαφέρον για την παιδεία και την καλλιέργεια της ψυχής του (Cleverley,1986).

Η παρουσία των Μαθηματικών στο σχολικό πρόγραμμα του Δημοτικού Σχολείου συμπίπτει με την κυριαρχία της θεωρίας των «χωριστών διανοητικών λειτουργιών» (faculty psychology), σύμφωνα με την οποία τα Μαθηματικά προσέφεραν την ιδανική καλλιέργεια και την τελειότερη άσκηση για την ανθρώπινη κρίση και σκέψη (NCTM,1970). Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή ο άνθρωπος εγκέφαλος αποτελείται από επτά διαφορετικούς τομείς. Καθένας από αυτούς τους τομείς είναι σαν τους μυς, που μπορούν να δυναμώσουν με την κατάλληλη άσκηση. Αυτή η θεωρία, που ταυτίστηκε χρονικά με την αλλαγή της παιδαγωγικής μεθόδου, όσο και της έννοιας της φύσης του παιδιού, είχε ως αποτέλεσμα να διδάσκονται τα παιδιά δύσκολες ασκήσεις αριθμητικής κατά νου (ή άγραφη αριθμητική).

Για το μάθημα των Μαθηματικών, σύμφωνα με τη συνδιδασκτική μέθοδο, δημιουργήθηκαν διάφορα ζητήματα, όπως:

- το ζήτημα του τρόπου αισθητοποίησης
- το ζήτημα της έκτασης των διάφορων αριθμητικών σειρών ή βαθμίδων (π.χ.1-10, ή 1-20)
- το ζήτημα του χρόνου της εισαγωγής και της χρήσης των αραβικών ψηφίων
- το ζήτημα του χρόνου της εισαγωγής και διδασκαλίας των κλασμάτων
- το ζήτημα της σχέσης η οποία πρέπει να υπάρχει μεταξύ της από μνήμης και της γραπτής αριθμησης

- το ζήτημα της σχέσης η οποία πρέπει να υπάρχει μεταξύ της αρίθμησης με αφηρημένους αριθμούς και της αρίθμησης με εφαρμοσμένα προβλήματα.
- ο σκοπός της διδασκαλίας των Μαθηματικών ⁽³⁾.

Τα ζητήματα αυτά θα αποτελέσουν τη βάση της εξέλιξης της διδακτικής των Μαθηματικών στα κατοπινά χρόνια. Μερικά από αυτά αποτελούν έως και σήμερα θέματα για συζήτηση.

Η διδακτική μεθοδολογία ήταν εναρμονισμένη με τις δομές που είχαν παραδοσιακά σχηματιστεί και δικαίωναν το συγκεκριμένο κοινωνικό συσχετισμό δυνάμεων (Α. Ανδρέου & Π.Παπακωνσταντίνου,1992:187). Σκοπός της διδασκαλίας γίνεται η ηθικοποίηση του παιδιού, μέσα από τις παρεχόμενες γνώσεις και την συνακόλουθη ανάπτυξη των πνευματικών δυνάμεων του παιδιού. Αποτέλεσμα αυτού ήταν να κυριαρχήσει ο δασκαλοκεντρισμός, η λογοκοπία, και η αυταρχικότητα. Από την άλλη η επικέντρωση του κέντρου βάρους της διδασκαλίας στα στάδια, αφαιρεί από τη διδακτική πράξη την πρωτοβουλία και το συναισθηματικό ενδιαφέρον του δασκάλου, η διδασκαλία αντιμετωπίζεται ως τεχνική. Εξάλλου στο συγκεκριμένο πλαίσιο ο δάσκαλος θεωρείται ότι οφείλει να συμβάλλει στη διατήρηση της καθεστηκυίας τάξης. Ο ρόλος του είναι του "τεχνοκράτη", με την έννοια του διαμεσολαβητή και φύλακα του συστήματος, του εκπροσώπου του κράτους που εργάζεται για τη νομιμοποίηση μιας συγκεκριμένης οικονομικής και κοινωνικής εξουσίας.

Όπως παρατηρεί και ο Δ. Μωραΐτης (1936:243), "τα στάδια της διδασκαλίας κατά την εφαρμογήν των κατάντησαν αληθής Προκρούστης. Δι' αυτών οι οπαδοί του προσεπάθουν να χύσουν πάσαν ύλην, να βιάσουν προς επεξεργασίαν τοιαύτην ύλην, η οποία πολλάκις προσαρμόζετο εις αυτά.....Προσπαθούντες να εξισώσωμεν πάντας καταστρέφομεν τας πρωτοτυπίας, αι οποίαι δημιουργούν έξοχα τινα πνεύματα, μορφώνομεν ούτω μόνον τους

3 Κατά τον Ziller σκοπός της διδασκαλίας της αριθμητικής είναι ο μαθητής να αριθμεί νοώντας και να νοή αριθμώντας.

κοινούς ανθρώπους...". Ο Χ. Φράγκος (1984) επικρίνοντας το ερβαρτιανό σύστημα μιλάει για "παιδαγωγική παρεκτροπή" από τις ιδέες του Διαφωτισμού και από την παιδαγωγική θεώρηση της εκπαίδευσης.

Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι η ερβαρτιανή μεθοδολογία ήρθε για να καλύψει κάποιες ανάγκες εκσυγχρονισμού της διδασκαλίας, έθεσε τις βάσεις της οργανωμένης εκπαίδευσης και προσέφερε στην εποχή της μία ώθηση στο έργο του δασκάλου. Οπωσδήποτε τα προβλήματα που έθεσε ή δημιούργησε ήταν μεγάλα, και η μέθοδος, αφού έκανε τον κύκλο της, έπρεπε να ξεπεραστεί. Παρά το γεγονός ότι η επιστημονική βάση της ερβαρτιανής μεθοδολογίας κατέρρευσε σύντομα, η ερβαρτιανή μέθοδος λόγω της πρακτικότητας και του κύρους που προσέδιδε στο διδακτικό επάγγελμα, συνέχισε να εξαπλώνεται (Ματσαγγούρας, 1998:69).

4. Η διδασκαλία των Μαθηματικών στο Σχολείο Εργασίας (1910-49).

Στα τέλη του 19^{ου} και στις αρχές του 20^{ου} αιώνα η εκβιομηχάνιση και ο εκσυγχρονισμός είχαν δημιουργήσει την αίσθηση ότι η εξωτερική ζωή του ανθρώπου απειλεί την εσωτερική ανθρώπινη ύπαρξη. Αυτή η αντίληψη, θα επιφέρει στροφή στο εσωτερικό του ανθρώπου και στην ανάγκη μόρφωσής του. Στην εκπαίδευση στις αρχές του 20^{ου} αιώνα έχουμε μία περίοδο που διακρίνεται από παιδαγωγικό ενθουσιασμό (Φραγκουδάκη, 1988). Η αντιπαράθεση του παλαιού σχολείου και των νέων κοινωνικών αναγκών θα βρει παιδαγωγική έκφραση στο λόγο για τη Νέα Αγωγή. Η πρόταση της Νέας Αγωγής διαφέρει από το παλαιό σχολείο, όσον αφορά τα φιλοσοφικά, κοινωνιολογικά και ψυχολογικά χαρακτηριστικά του.

Στην Ελλάδα, η παιδαγωγική αντίληψη που διέπει τα εκπαιδευτικά κείμενα της περιόδου αυτής είναι εμπνευσμένη από την εκσυγχρονιστική ιδεολογία της εποχής, δηλαδή από τα ρεύματα της Νέας Αγωγής και του Σχολείου Εργασίας που στηρίζεται στην αυτενέργεια, στην πρωτοβουλία, στη βιωματική μάθηση κ.ά.. Το

κοινοβουλευτικό καθεστώς, που παγιώνεται στη μετασχηματιζόμενη νεοελληνική κοινωνία την περίοδο αυτή, προϋποθέτει έναν "πολίτη" ελεύθερο, ο οποίος έχει ίσα δικαιώματα με όλους, ηθικό, ο οποίος πρέπει να υπακούει στους νόμους και αποτελεσματικό, για να συμβάλλει στην οικονομική ανάπτυξη. Το δε καθήκον της διαμόρφωσης αυτού του πολίτη εναπόκειται στην εκπαίδευση (Φραγκουδάκη, 1988, Νικολακάκη, 2000, Κοντόνη, 1997:123). Κάτω από αυτή τη φιλοσοφία ο σκοπός του Δημοτικού Σχολείου διαμορφώνεται ως εξής: "είναι η στοιχειώδης προπαρασκευή των μαθητών δια την ζωήν και η παροχή εις αυτούς των απαραίτητων προς μόρφωσιν χρηστού πολίτου στοιχείων" (Κυριακόπουλος, 1960)⁽⁴⁾.

Το Σχολείο Εργασίας είναι σχολείο έργων. Ο μαθητής σ' αυτό δε μαθαίνει με τη συμβατική έννοια του όρου, αλλά εργάζεται, πράγμα που σημαίνει ότι δε μαθαίνει δεχόμενος τις γνώσεις παθητικά, αλλά μαθαίνει εργαζόμενος, ανακαλύπτοντας ή κατακτώντας ο ίδιος τις γνώσεις (Καψάλης, 1995:6). Βασικό στοιχείο λοιπόν είναι η εργασία του μαθητή. Εργασία όμως δεν είναι μόνο η χειροτεχνική ή χειρωνακτική ή η εργασία του χεριού. Το σχολείο εργασίας δεν κάνει διάκριση μεταξύ πνευματικής ή χειρωνακτικής εργασίας. Αυτό που την ενδιαφέρει είναι το παιδί να εργάζεται ελεύθερα (Σούρλας, 1935:111). Η έννοια της εργασίας λοιπόν σημαίνει στο Σχολείο Εργασίας ότι "ο νεαρός εργάτης με και κατά τη διάρκεια της εργασίας ωριμάζει από μόνος του, κερδίζει σε δύναμη, σε σοφία και σωφροσύνη, γίνεται έργο του εαυτού του" (Τσιρίμπας, 1940). Έτσι, ο ρόλος του δασκάλου διευρύνεται στο πλαίσιο της οικονομικής αποτελεσματικότητας και της κοινωνικής δικαιοσύνης. Βέβαια, θα μπορούσε να ισχυριστεί

4 Παρατηρείται ότι ο σκοπός του Δημοτικού Σχολείου διαμορφώνεται ανάλογα με το ιστορικό και κοινωνικό συγκείμενο. Το 1899 τονίστηκε ιδιαίτερα η αναγκαιότητα της εθνικής αγωγής (ηθική μόρφωση) και τα νομοσχέδια του Ευταξία μνημονεύουν αυτήν πρώτα, το 1913 τονίζεται η ανάγκη ηθικής μόρφωσης αλλά και πρακτικής, ενώ στα νομοσχέδια του 1929, μετά την εκπνοή της Μεγάλης Ιδέας, τονίζεται πρώτα ο πρακτικός σκοπός της εκπαίδευσης και μετά ο ηθικός.

κάνεις ότι το σχολείο εργασίας εμπεριείχε μία βασική αντίφαση: δεν μπορεί μία μέθοδος να είναι παιδοκεντρική και ταυτόχρονα να αποσκοπεί στον ενεργό βίο. Ο ενεργός βίος απασχολεί τους ενήλικες και όχι τα παιδιά.

Οι κοινωνικο-οικονομικές αλλαγές που έγιναν, οπότε και τέθηκαν τα θεμέλια του κράτους δικαίου, θα επιφέρουν ανακατατάξεις και στο ρόλο των δασκάλων. Χρειαζόταν ένας δάσκαλος "λειτουργός" για το αστικό σχολείο, όπου προετοιμάζονταν οι μαθητές για την ιδεολογική και επαγγελματική τους ενσωμάτωση στην κοινωνία, μέσα από τη μετάδοση πρακτικών γνώσεων και των αρχών της λειτουργίας του αστικού κράτους. Ο δάσκαλος "λειτουργός" ήταν εκείνος που θα αναλάμβανε το έργο της κοινωνικοποίησης των παιδιών και της προετοιμασίας για τον ενεργό βίο.

Το 1913 οι εκσυγχρονιστικές προτάσεις προέρχονταν από την ανάγκη ανταπόκρισης της εκπαίδευσης στις αναπτυσσόμενες κοινωνικές ανάγκες και δεν είχαν αποκρυσταλλωθεί σε συγκεκριμένες διδακτικές αρχές. Μετά το 1918, όταν στη Γερμανία η παιδαγωγική κίνηση των Kerschesteiner⁵⁾ και Gaudig και στην Αμερική η κίνηση του Dewey διαμορφώθηκαν μέσα στο συγκεκριμένο διδακτικό πλαίσιο του Σχολείου Εργασίας και είχαν αρχίσει να επηρεάζουν και τις παιδαγωγικές ιδέες στην Ελλάδα, διαπιστώνουμε την ύπαρξη διαφορετικών ερμηνειών του Σχολείου Εργασίας.

Το Αναλυτικό Πρόγραμμα που συνέταξε ο Δ. Λάμπας, Γενικός Επιθεωρητής της Δημοτικής Εκπαίδευσης ήταν σημαντική καινοτομία, διότι συμπλήρωσε ένα κενό και λειτούργησε ως εκσυγχρονιστικό στοιχείο. Σκοπός του μαθήματος των Μαθηματικών δεν ετίθετο, αλλά το πρόγραμμα περιοριζόταν σε περιγραφή της διδακτέας ύλης κατά τάξεις. Το Δημοτικό Σχολείο

5 Κατά τον Kerschesteiner το Σχολείο Εργασίας είναι "το σχολείο της αυτενεργού επεξεργασίας πάντων των αγαθών του πολιτισμού δι' όλων των ψυχικών δυνάμεων του ανθρώπου"

λειτουργεί ως εξατάξιο και η ύλη του μαθήματος καλύπτει και τις έξι τάξεις.

Το Α.Π. των Μαθηματικών του 1913 κατανέμεται ως εξής:

Α.Π. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

Α' τάξις: οι αριθμοί 1-20. Μέσα αισθητοποιήσεως σφαίραι, ξυλάρια κ.λ.π., γραφή των αριθμών αυτών, μέτρηση ανεβαίνοντας και κατεβαίνοντας με πρόσθεση και αφαίρεση, οι τέσσερις πράξεις με τα σημεία τους, απλά προβλήματα των τεσσάρων πράξεων, λύση των προβλημάτων γραπτώς κ.λ.π.

Β' τάξις: οι αριθμοί 1-100. Μέσα αισθητοποιήσεως το αριθμητάριον, το γαλλικόν μέτρον, τα νομίσματα και άλλα πράγματα.

Γ' τάξις: οι αριθμοί 1- 1000. (Εισάγεται επίσης η έννοια της κλασματικής μονάδας του $1/2$ $1/4$, $1/5$, $1/10$ και η εύρεση των μερών σε αριθμούς από 1-10000)

Δ' τάξις: Οι άνω του 1000 αριθμοί και οι επ' αυτών πράξεις. Ευθεία και αντίστροφος σχέσεις ποσών. Οι συμμιγείς αριθμοί (νομίσματα, μέτρα, σταθμά, χρόνος)

Ε' τάξις: Τα κλάσματα. Πράξεις επί των τεσσάρων πράξεων των κλασμάτων.

Στ' τάξις: 1. Απλή και σύνθετος μέθοδος των τριών. Χρησιμοποίησις κεφαλαίων. Προεξόφλησις δανείων. Χρησιμοποίησις κεφαλαίων εις το εμπόριον. Μέθοδος της μίξεως.

Α.Π. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Στις Ε' και Στ' τάξεις εμφανίζεται ως χωριστό μάθημα η Γεωμετρία.

Ε' τάξις: Κύβος, ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, τριγωνική πυραμίς, κόλουρος κώνος, κόλουρος πυραμίς.

Στ' τάξις: Κύλινδρος, κώνος, κόλουρος κώνος, σφαίρα.

Από το 1922 έχουμε και την επίδραση του Thorndike στη διδακτική των Μαθηματικών, όταν κυκλοφόρησε το βιβλίο "Η

ψυχολογία της αριθμητικής”. Εκεί, υποστήριξε τη «θεωρία των δεσμών», καθώς και τις αρχές της ενίσχυσης. Σύμφωνα με αυτήν, εάν δινόταν στους μαθητές η δυνατότητα να κάνουν τους αναγκαίους δεσμούς και συνήθειες κατά την εκτέλεση αριθμητικών πράξεων, τότε θα γινόταν η αυτοματοποίηση τους, σύμφωνα με τη σχέση Ερέθισμα-Αντίδραση. Η επιβράβευση θα ενίσχυε το αποτέλεσμα. Ο ρόλος του δασκάλου ήταν να προσφέρει την κατάλληλη ποσότητα πρακτικής. Η θεωρία αυτή κατέληξε στο να αποτελείται η αριθμητική από ένα πλήθος ασκήσεις προς ανάπτυξη δεξιοτήτων, αντί για κατανόηση των αριθμητικών πράξεων. Κατά πολλούς ο Thorndike παρερμηνεύτηκε (βλέπε και Τουμάσης, 1994:105-112).

Η επίδραση αυτή φαίνεται και στο σκοπό της διδασκαλίας της αριθμητικής, όπως διατυπώνεται από τον Δ. Λάμψα (1927), που υποστηρίζει ότι η αριθμητική διδασκαλία έχει το ακόλουθο έργο:

- να μεταδώσει εις τους μαθητάς την γνώσιν των αριθμών, βασιζομένων φυσικά εις την κατανόησιν των μεταξύ των υπάρχουσών σχέσεων.
- να τους κάμη ικανούς να συνδέουν μετά λόγου δοθέντος αριθμούς των οποίων δεν δηλώνεται ο τρόπος της συνδέσεως, να σχηματίζουν σε επίσης μετά λόγου, νέους αριθμούς, από τους οπωσδήποτε συνδεθέντες
- να τους κάμη ικανούς να συνάγουν μόνοι των τους κανόνας, οι οποίοι διέπουν κάθε τέτοιαν σύνδεσιν και σχηματισμόν.

Κατά τον Δ. Λάμψα, (1927:6): “Η γνώσις της αριθμήσεως χάριν της αριθμήσεως δεν έχει αξίαν, αποκτά δε αξίαν και μάλιστα μεγίστην, εφόσον χρησιμοποιείται δια να γνωσθούν καλύτερα και τελειότερα τα αντικείμενα και αι ενέργειαι της φύσεως και της ανθρωπίνης δημιουργίας και αι σχέσεις των”. Η άποψη που εκφράζει ο Λάμψας για τα Μαθηματικά είναι η εξής: “Η αριθμητική διδασκαλία, καθώς και αι άλλαι Μαθηματικαί επιστήμαι, δεν είναι υλικάί αλλά ειδολογικάί επιστήμαι, δεν ερευνούν δηλαδή την ύλην, ήτοι το ποιόν, την ουσίαν των αντικειμένων της φύσεως και

της ανθρωπίνης δημιουργίας, αλλά ένα είδος των, μίαν άποψίν των η οποία γίνεται μεν αντιληπτή εις αυτά και με αυτά, δεν έχει όμως σχέσιν με την ποιότητά των, εξετάζει τα μνημονευθέντα αντικείμενα και φαινόμενα ως προς το είδος του αριθμού, ήτοι ως προς την σχέσιν του πλήθους η οποία παρουσιάζεται εις αυτά και είναι όλως διόλου ειδολογική. Δι' αυτό αι Μαθηματικά επιστήμαι δεν θεωρούνται ως αυτοτελείς επιστήμαι αλλά ως βοηθητικά των υλικών επιστημών και προπαντός των φυσικών, των οποίων τα υποκείμενα εξετάζουν ως προς ένα είδος".

Η έννοια του Σχολείου Εργασίας απέκτησε μεγάλη δημοτικότητα, έγινε όμως ταυτόχρονα συνθηματικός όρος, που χρησιμοποιήθηκε με διαφορετικές ιδεολογικές αποχρώσεις. Στην Ελλάδα το Σχολείο Εργασίας θα αποτελέσει πεδίο διαμάχης μεταξύ των συντηρητικών, των εκσυγχρονιστών και των ριζοσπαστών⁽⁶⁾, που έδιναν διαφορετικές ερμηνείες στο Σχολείο Εργασίας.

Το Σχολείο Εργασίας, κάτω από το βάρος του εκσυγχρονισμού εγκαταλείφθηκε για να δώσει τη θέση του στο παραδοσιακό σχολείο και τη τριμερή ανάπτυξη της διδασκαλίας. Πιθανώς, όπως αναφέρει και ο Δ. Μωραΐτης (1936), "σιγά σιγά οι αιωνίως βραδυπορούντες ήρχισαν να εκφράζουν πολύν σκεπτικισμόν δια την νέαν μέθοδον. Η νέα μέθοδος απαιτεί αναγνώρισιν της αξίας της προσωπικότητος του παιδιού, της δημιουργικής δυνάμεως της ψυχής, το οποίον δυσκόλως δύνανται να ανεχθούν οι έχοντες εις το πρόγραμμα της ζωής των την προς επιβολήν τάσιν".

5. Συμπέρασμα

Συνοπτικά μπορούμε να πούμε ότι για τη διδασκαλία των Μαθηματικών η εξέλιξη του ρόλου του δασκάλου σε σχέση με τα παιδαγωγικά συστήματα πέρασε από τρία στάδια:

6 Ριζοσπαστικό εννοούμε το κίνημα που δημιούργησε ο Γληνός, μετά την αποχώρησή του από τον Εκπαιδευτικό Όμιλο.

- Το αλληλοδιδακτικό σχολείο, που ήταν επηρεασμένο από τον ιδεαλισμό που ήταν το σχολείο των λόγων και ο δάσκαλος ήταν ο "διεκπεραιωτής"
- Το συνδιδακτικό σχολείο, που ήταν επηρεασμένο από το ρεαλισμό ήταν το σχολείο των πραγμάτων, και ο δάσκαλος ήταν ο "τεχνοκράτης" .
- Το σχολείο της εργασίας που ήταν επηρεασμένο από τον πραγματισμό έδινε έμφαση στα έργα και στη δράση, και ο δάσκαλος ήταν ο "λειτουργός".(Βλέπε και Καψάλη;,1995:6).

Όλα αυτά βέβαια γίνονται μέσα από ένα ίδιο προσανατολισμό ιδεολογικο-φιλοσοφικό και μέσα από παρόμοιο περιεχόμενο εκπαίδευσης. Η αλλαγή του σχολείου όμως δεν είναι θέμα μεθόδου, αλλά φιλοσοφίας. Το σχολείο δεν αλλάζει με βάση τεχνικές μεθόδους, αλλά μόνο με αλλαγή του προσανατολισμού του, των επιδιώξεων και της ιδεολογίας του. Σαν αποτέλεσμα οι αλλαγές γίνονται, τα αποτελέσματα παραμένουν όμοια.

Η ιστορία παρέχει παραδείγματα που δεν πρέπει να ξεχνάμε. Το θέμα τελικά είναι ότι εντοπίζοντας τη σχέση κοινωνίας-εκπαίδευσης-διδασκαλίας των Μαθηματικών να οδηγηθούμε στη συνειδητοποίηση του γεγονότος ότι ο ρόλος των δασκάλων είναι κοινωνικά επηρεασμένος, έτσι ώστε να μπορέσουμε να αναλογιστούμε και για τη σημερινή μας εποχή.

Βιβλιογραφία

- Cleverley, J. & Philips, D.C.: *Visions of Childhood, Influential Models from Locke to Spock*, Teachers College, Columbia University, New York and London, 1986
- Muller D. & Ringer, F. & Simon B.: *The rise of the modern educational system: Structural change and social reproduction 1870-1920*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987

- Nikolakaki, M : Numeracy as social knowledge: past, present and future for the 21st century, 3^o *Mediterranean Conference of Mathematical Paideia*, Athens, 2003:581-590.
- Reble, A.: *Ιστορία της Παιδαγωγικής*, εκδ. Παπαδήμα, Αθήνα, 1996
- Ανδρέου, Α. & Παπακωνσταντίνου Π.: *Τα Διδασκαλεία και η ανάπτυξη της παιδαγωγικής σκέψης 1875-1914*, εκδ. Οδυσσέας, 1992
- Βασιλού Β. & Παπακωνσταντίνου Π.: *Ιστορία της Νεοελληνικής Εκπαίδευσης*, Θέματα πανεπιστημιακών παραδόσεων ΠΤΔΕ Αθηνών, Αθήνα, 1994
- Βενθύλου, Γ. :*Θεσμολόγιον της Δημοτικής Εκπαιδεύσεως, 1833-1883*, Αθήνα 1884
- Δραϊκής Ι.: *Περί βελτιώσεως της δημοδιδασκαλίας*, Τυπ. Σ.Κ.Βλαστού, Αθήνα 1855
- Καψάλης, Α.: Οι βασικές αρχές του Σχολείου Εργασίας, *Μακεδόν*, Περιοδική Επιστημονική Εκδοση της Παιδ. Σχολής Φλώρινας ΑΠΘ , Φλώρινα, Φθινόπωρο, α' τεύχος, 1995
- Κοκκώνη, Ι. Π.: *Περίληψις της γενομένης αναφοράς εις την Προπαιδείαν Επιτροπήν-Περί του εγχειριδίου του δια τα Αλληλοδιδασκτικά Σχολεία της Γαλλίας συνταχθέντα υπό του Κ.Σαραζίνου, Ερμηνεΐαι της αλληλοδιδασκτικής μεθόδου, εν τη Εθνική Τυπογραφία Διευθυνομένη παρά Γ. Αποστολίδου Κοσμήτου, εν Αιγίνη, 1830.*
- Ι. Κοκκώνη: *Εγχειρίδιον ή Οδηγός Αλληλοδιδασκτικής Μεθόδου. Νέος τελειοποιημένος και πληρέστερος του μέχρι τούδε εν χρήσει Οδηγού του Σ(αραζίνου), 1842*
- Κοντόνη, Α.: *Το νεοελληνικό σχολείο και ο πολιτικό ρόλος των παιδαγωγικών συστημάτων*, Επιστημονική Βιβλιοθήκη/ Κριτική, Αθήνα, 1997
- Κυριακόπουλος, Η.: *Τα Συντάγματα της Ελλάδος*, Αθήνα, 1960.
- Δ. Λάμπας: *Ειδική Διδακτική πάντων των εις τα κατώτερα σχολεία διδασκομένων μαθημάτων, Μέρος Γ.' Διδακτική της Αριθμητικής, διασκευασθείσα κατά την μεθοδικήν του Adolfe Rude*, εκδ. Ι.Δ. Κολάρος και ΣΙΑ, Αθήνα, 1927, σ.6.
- Λέφας, Χ.: *Ιστορία της εκπαιδεύσεως*, ΟΕΣΔ, 1942
- Ματσαγγούρας, Η.: *Θεωρία της Διδασκαλίας, Η προσωπική θεωρία ως πλαίσιο στοχαστικο-κριτικής ανάλυσης*, Gutenberg, Αθήνα, 1998

- Μπουζάκης Σ.: *Εκπαιδευτικές Μεταρρυθμίσεις στην Ελλάδα, Πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια Γενική και Τεχνικο-επαγγελματική Εκπαίδευση, Κείμενα εκθέσεις εκπαιδευτικών Νομοσχεδίων. Συζητήσεις στη Βουλή. Σχόλια, τόμος Α' Μεταρρυθμιστικές Προσπάθειες 1913-1929*, Gutenberg, Παιδαγωγική Σειρά, Αθήνα, 1994 .
- Μπουζάκης, Σ.& Τζήκας Χ.: *Η Κατάρτιση των Δασκάλων- Διδασκαλισσών και των Νηπιαγωγών στην Ελλάδα, τ. Α' Η περίοδος των Διδασκαλείων 1834-1933*, Τεκμήρια Ιστορίας Νεοελληνικής Εκπαίδευσης, Gutenberg, Αθήνα, 1996
- Μωραΐτης, Δ.: *Ιστορία της Παιδαγωγικής*, τυπ. Γ. Η. Καλλέργη, Αθήνα, 1936
- Νικολακάκη, Μ. Η συμβολή της Μαθηματικής Εκπαίδευσης στην κατασκευή του Έλληνα Πολίτη στο Α. Μ. Καζαμίας (επιμ): *Παιδεία και Πολίτης-Η Παιδεία του Έλληνα ως Πολίτη της Ελλάδας, της Ευρώπης του Κόσμου*, Ατραπός, 2003
- Νικολακάκη, Μ Η Μαθηματική εκπαίδευση στο συνδιδακτικό σχολείο, *Ευκλείδης Γ'*, τ.55, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Αθήνα, 2001:37-53.
- Νικολακάκη, Μ Η Μαθηματική Εκπαίδευση στα Κοινά Σχολεία κατά την περίοδο της Τουρκοκρατίας, *Τα Εκπαιδευτικά*, τ.55-56, Αθήνα, 2000:22-35
- Νικολακάκη, Μ Η Μαθηματική Εκπαίδευση στο αλληλοδιδακτικό σχολείο κατά τον 19^ο αιώνα στην Ελλάδα, *Ευκλείδης Γ'*, τόμος 17, τεύχος 53-54, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Αθήνα, 2000: 25-57
- Νικολακάκη, Μ Τα Μαθηματικά της Βασικής Εκπαίδευσης και ο Εκσυγχρονισμός της Κοινωνίας, Πρακτικά 17^{ου} Συνεδρίου Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρίας, Αθήνα 2000:282-291
- Νούτσος, Μπ.: "Η εκπαίδευση των δασκάλων -ιδεολογικές διαστάσεις και μεθοδολογικές προϋποθέσεις", περ. *Σύγχρονα Θέματα*, τ.4, 1979
- Παπαδάκη, Λ.: *Η αλληλοδιδακτική μέθοδος στην Ελλάδα του 19^{ου} αιώνα*, εκδ. Δωδώνη, Αθήνα, 1992,
- Σκούρα, Λ.: *Εκπαιδευτική πολιτική στην κατάρτιση των δασκάλων κατά τον 20ο αιώνα (φιλοσοφία- θεσμοί)*, αδημοσίευτη διδακτορική διατριβή, ΠΤΔΕ, Αθήνα, 1997
- Σολομών, Ι.: *Εξουσία και τάξη στο Νεοελληνικό σχολείο: Μία τυπολογία των σχολικών χώρων και πρακτικών 1820-1900*, εκδ. Αλεξάνδρεια, Αθήνα 1992

- Σούρλας, Ε.: *Συγκεντρωτική Διδασκαλία και Νεώτερον Πρόγραμμα*, εκδ. Δημ. Τζάκα, Στεφ. Δελεγραμμάτικα, Αθήνα, 1935
- Τριλιανός, Α.: *Μεθοδολογία της Σύγχρονης Διδασκαλίας*, τομ. Α', *Καινοτόμες επιστημονικές προσεγγίσεις στη Διδακτική Πράξη*, Αθήνα, 1998
- Τσίριμπαρ, Β.: *Ειδική Διδακτική πάντων των εις τα δημοτικά σχολεία διδασκομένων μαθημάτων, κατά τας θεμελιώδεις αρχάς του Σχολείου εργασίας*, Τρίτη έκδοση, εκδ. Τουφεξής, Λάρισα, , 1940
- Φράγκος, Χ.: *Ψυχοπαιδαγωγική*, εκδ. Gutenberg, Αθήνα, 1984
- Φραγκουδάκη, Α.: *Εκπαιδευτική Μεταρρύθμιση και Φιλελεύθεροι Διανοούμενοι*, Κέδρος, 1988

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΗ ΒΥΖΑΝΤΙΝΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΕΠΙΚΑΘΟΡΙΣΜΟΙ

Γιάννα Κατσιαμπούρα

Δρ. Ιστορίας των Επιστημών

Κύριο αντικείμενο της πραγμάτευσής μου είναι η μαθηματική εκπαίδευση που παρέχεται σε μια ιστορική κοινωνία, αυτή της Βυζαντινής Αυτοκρατορίας, και η σχεσιακή της συναρμογή με το συγκεκριμένο κοινωνικό πλαίσιο. Θα τεθούν εξαρχής ερωτήματα σχετικά με τη συγκρότηση και την καθιέρωση της εκπαιδευτικής μεθόδου του Quadrivium (αριθμητική, γεωμετρία, αστρονομία και μουσική) στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού συστήματος της Βυζαντινής Αυτοκρατορίας. Έτσι, θα σχολιαστούν οι πρώτες γνωστές προσπάθειες και θα καταβληθεί προσπάθεια για την ένταξή τους στο γνωστικό και κοινωνικό πλαίσιο αναφοράς, μέχρι το πρώτο ολοκληρωμένο διδακτικό εγχειρίδιο των μαθηματικών επιστημών, το *Ευσύννοπτον σύνταγμα εις τας τέσσαρας μαθηματικὰς επιστήμας*, του 1008. Το κείμενο αυτό θα εξεταστεί τόσο περιεχομενικά όσο και με άξονα τη μέθοδο διδασκαλίας που φαίνεται ότι προτείνει.

Με βάση τα προαναφερθέντα, στόχος είναι να καταδειχθεί αφ' ενός το επιστημονικό φορτίο που θεωρείται απαραίτητο σε μια ορισμένη κοινωνία, με τα ιστορικά της χαρακτηριστικά και τις αντιφάσεις της, αφ' ετέρου το επίπεδο της εκπαίδευσης, τόσο στον γνωσιακό όσο και στον μεθοδολογικό τομέα.

Θεσμοί της εκπαίδευσης στο Βυζάντιο

Η εκπαίδευση σε μια τόσο εκτεταμένη χρονική περίοδο όπως η βυζαντινή δεν είναι δυνατόν να αντιμετωπιστεί ως ενιαία και αμετάλλακτη. Παρά τη σχετική συνέχεια που εμφανίζεται σε σχέση με άλλες ιστορικές περιόδους και παρά το ότι οι όποιες αλλαγές δεν είναι ούτε παρουσιάζονται ως δραματικές και κάθετες, οι σχετικοί θεσμοί και η αντιμετώπισή τους ποικίλλουν, όπως είναι φυσικό, ανάλογα με τις ανάγκες και τις αντιλήψεις που χαρακτηρίζουν κάθε εποχή, πολύ περισσότερο όταν εκτείνονται σε μια περίοδο που σχηματικά δεχόμαστε ότι αρχίζει το 325, με τη μεταφορά της πρωτεύουσας της Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας από τη Ρώμη στην Κωνσταντινούπολη, και περατώνεται το 1453, με την άλωση της Κωνσταντινούπολης από τους Οθωμανούς. Στη συγκεκριμένη περίπτωση θα εξετάσουμε τους θεσμούς όπως διαμορφώνονται από την ύστερη Αρχαιότητα και μέχρι το 1008, όταν συγγράφεται το συγκεκριμένο *Quadrivium*.

Σε αυτό το διάστημα, οι γενικότερες πολιτικές, κοινωνικές, οικονομικές και βέβαια οι αλλαγές στο επίπεδο της ιδεολογίας δεν είναι αμελητέες. Ουσιαστικά, οι αλλαγές που επισυμβαίνουν σε αυτά τα επίπεδα από την ύστερη Αρχαιότητα και μέσω των «σκοτεινών αιώνων» της έριδας των εικόνων διαμορφώνουν την κατεξοχήν βυζαντινή περίοδο και ανακλώνται και στη λειτουργία της εκπαίδευσης.

Κατ' αρχήν, πρέπει να τονιστεί ότι η εκπαίδευση στο Βυζάντιο ήταν κοσμική και στόχευε κυρίως στη δημιουργία στελεχών ικανών να επανδρώσουν τον κρατικό μηχανισμό και να ανταποκριθούν στις ανάγκες διαχείρισης αλλά και αναπαραγωγής του.¹ Ο ρυθμιστικός λοιπόν παράγων ήταν η αυτοκρατορική εξουσία, η οποία ρύθμιζε τα περί της εκπαίδευσης. Ωστόσο, ιδιαίτερη σημασία φαίνεται να είχε ως ιδεολογικός μηχανισμός η εκκλησία, όπως θα αναφερθεί στη συνέχεια.

¹ Mango C., *Βυζάντιο, η Αυτοκρατορία της Νέας Ρώμης*, ΜΙΕΤ, Αθήνα ²1990, σ. 170-171.

Περιεχόμενο των μαθηματικών σπουδών - *Quadrivium*

Στην Ανατολική Ρωμαϊκή Αυτοκρατορία, η πρώτη προσπάθεια για εφαρμογή ενός προγράμματος σπουδών με συγκεκριμένη διάταξη καταβάλλεται με το Πανδιδακτήριο της Κωνσταντινούπολης, με πρωτοβουλία του αυτοκράτορα Θεοδοσίου Β', σχετικά νωρίς, το 425. Σε αυτό δίδαξε ο Ολυμπιόδωρος (π. 500-564/565), που σπούδασε στη σχολή της Αλεξάνδρειας, ο οποίος είχε συγκροτήσει ένα πρόγραμμα σπουδών ανώτερου επιπέδου πέντε βαθμίδων, με κορύφωσή του τη φιλοσοφία.² Οι βαθμίδες από τις οποίες περνούσε ο σπουδαστής ήταν οι εξής: λογική, φυσική, ηθική, μαθηματική και μεταφυσική.³ Η σπουδή των μαθηματικών επιστημών, όπως τις παρουσιάζει ο Πλάτων στην *Πολιτεία*, οι οποίες βρίσκονται μεταξύ του αισθητού και του νοητού, θεωρείται η εκ των ων ουκ άνευ προπαίδεια ώστε ο σπουδαστής να μπορέσει να έρθει σε επαφή με τη φιλοσοφία, την ανώτερη των επιστημών,⁴ αντίληψη που θα ισχύσει και για πολλούς αιώνες ακόμη. Ο Πρόκλος (410-485), στη νεοπλατωνική σχολή των Αθηνών, χώριζε τις μαθηματικές επιστήμες σε οκτώ κλάδους: τη θεωρητική αριθμητική και τη θεωρητική γεωμετρία, που τις τοποθετούσε στο ανώτερο σημείο της κλίμακας των σπουδών, και σε άλλους έξι κλάδους που ασχολούνταν με «αισθητά» αντικείμενα: λογιστική, γεωδαισία, οπτική, μουσική, μηχανική και αστρονομία. Ο Αμμώνιος ήταν αυτός που, τον 6ο αιώνα, αντιτάχθηκε στον Πρόκλο υπερασπίζοντας τη μέθοδο των επτά επιστημών, του *trivium* και του *quadrivium*.⁵

² Κωτσάκης Δ.Δ., «Η αστρονομία και η αστρολογία κατά τους βυζαντινούς χρόνους», *Επετηρίς Εταιρείας Βυζαντινών Σπουδών*, έτ. ΚΔ', 1954, σ. 209-210.

³ Brehier L., *La civilisation Byzantine*, Paris 1950, σ. 444.

⁴ Τατάκης Β.Ν., *Θέματα χριστιανικής και βυζαντινής φιλοσοφίας*, Βιβλιοθήκη Αποστολικής Διακονίας, Αθήνα 1952, σ. 189.

⁵ Vögel K., «Η βυζαντινή επιστήμη», στο Πανεπιστήμιο Καίμπριτζ, *Ιστορία της Βυζαντινής Αυτοκρατορίας*, Μέλισσα, Αθήνα 1979, σ. 808.

Από κάποια χρονική στιγμή, περί τον 6^ο αιώνα, και έπειτα, δεν συναντώνται πηγές που να αναφέρονται στην εκπαίδευση, τη δομή, το περιεχόμενο και τις μεθόδους της για αρκετά μεγάλο διάστημα, τουλάχιστον έως και τον 8^ο αιώνα. Η χρονική αυτή περίοδος θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι αρχίζει με την αποδυνάμωση και απαξίωση των σχολών στις επαρχιακές πόλεις της αυτοκρατορίας, ιδιαίτερα με το κλείσιμο, μετά τα νομοθετικά μέτρα του αυτοκράτορα Ιουστινιανού, το 529, της νεοπλατωνικής σχολής της Αθήνας. Το γεγονός της αποδυνάμωσης των επαρχιακών σχολών βεβαίως δεν είναι ανεξήγητο, αν μεταξύ των άλλων υπολογίσει κανείς τις βυζαντινοαραβικές συγκρούσεις που κλιμακώνονται μετά τον 7^ο αιώνα, την εμφάνιση των σλαβικών φύλων στη Βαλκανική αλλά και τη συνολικότερη «παρακμή» των πόλεων με τη μορφή που είχε διατηρηθεί από την Αρχαιότητα. Οι προαναφερθείσες συνθήκες, χωρίς φυσικά να είναι οι μόνες, κατέστησαν την Κωνσταντινούπολη τον σημαντικότερο –αν όχι και τον μοναδικό– πόλο εκπαίδευσης στην αυτοκρατορία.

Ένα από τα κυριότερα προβλήματα που κατατρύχουν τη μελέτη σχετικά με τη διδασκαλία και την καλλιέργεια των μαθηματικών επιστημών σε αυτή την περίοδο είναι η έλλειψη ιστορικών τεκμηρίων και μαρτυριών. Ιδιαίτερα για την περίοδο από τον 6^ο έως και τα τέλη του 8^{ου} αιώνα οι πηγές είναι σχεδόν ανύπαρκτες, κι όχι μόνο όσον αφορά την επιστημονική κίνηση. Έτσι υπάρχουν ελάχιστα στοιχεία τα οποία έχουν διασωθεί και μπορούν να αναφερθούν σχετικά με τις μαθηματικές επιστήμες και εν γένει την τυχόν επιστημονική κίνηση. Σε αυτό το πλαίσιο, μας είναι άγνωστα και ονόματα ανθρώπων που πιθανόν να ασχολήθηκαν με το αντικείμενο. Με ορισμένες εξαιρέσεις, ωστόσο. Ως τέτοια θα έπρεπε να αναφερθεί η προσφορά του Ισίδωρου του Μιλήσιου, γνωστού με το προσωνύμιο *γεωμετρικός* (και *μηχανικός*, λόγω της συμμετοχής του στην κατασκευή του ναού της Αγίας Σοφίας) τον 6^ο αιώνα, ο οποίος εξέδωσε τα έργα του Αρχιμήδους και τα σχετικά σχόλια και υπομνήματα του Ευτοκίου. Ο Ισίδωρος, ταυτόχρονα, ως διδάσκαλος με κάποιο κύκλο μαθητών, χρησιμοποιούσε για τη διδασκαλία του το έργο του Ευκλείδη, συμπέρασμα που αντλείται

από το γεγονός ότι ένας από τους μαθητές του, μάλλον ο Λεόντιος, ασχολήθηκε με το ιε' βιβλίο των *Στοιχείων*⁶ φαίνεται δε ότι ασχολήθηκε και με το έργο του Ήρωνα, σχολιάζοντας τα *Καμαρικά*.

Στο ίδιο πλαίσιο θα πρέπει να αναφερθεί και η παρουσία του Στεφάνου του φιλοσόφου στην Κωνσταντινούπολη. Ο Στέφανος (π. 550-619/620), γνωστός για τα σχολιαστικά υπομνήματά του στο έργο του Αριστοτέλη όταν βρισκόταν στην Αλεξάνδρεια, κλήθηκε από τον αυτοκράτορα Ηράκλειο (610-641) στην πρωτεύουσα, περί το 612, όπου δίδαξε φιλοσοφία και τα μαθήματα του *quadrivium*. Ο ίδιος ο Στέφανος, σε μια πραγματεία του, απευθυνόμενος στον μαθητή του Τιμόθεο, λέει ότι δίδαξε «*τας πλατωνικάς εφόδους, τας αριστοτελικάς φυσιολογίας, τας γεωμετρικάς περινοίας, τας αριθμητικάς αναλογίας, τας μουσικάς επαναλήψεις, [τας χημεινικάς αλληγορίας και δυσσευρέτους νοήσεις, τους αστρονομικούς κλιμακτήρας και πολυθρυλήτους αστρομαντείας] τας πτολεμαϊκάς και συντάξεις και οργανικάς αυτού μαγγανείας*».⁷ Αν εξετάσουμε τα αντικείμενα που αναφέρει ο Στέφανος στην αφήγησή του, τότε μάλλον έχουμε έναν οδηγό για τις σπουδές που αφορούν τις μαθηματικές επιστήμες την εποχή του αυτοκράτορα Ηρακλείου, τον 7^ο αιώνα στην Κωνσταντινούπολη: φιλοσοφία του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη, αστρονομία του Πτολεμαίου, γεωμετρία, αριθμητική και μουσική.

Το γεγονός ότι σώζονται ως τις μέρες μας εγχειρίδια σχετικά με τις μαθηματικές επιστήμες σημαίνει ότι αυτές δεν έπαψαν να καλλιεργούνται – έστω και σε κάποιο βαθμό, ανεξάρτητα αν το ακροατήριό τους δεν ήταν πολυπληθές. Όπως και στη Δύση, πρέπει να υπήρχε ένας κύκλος ανθρώπων που ενδιαφερόταν για το αντικείμενο, ανεξαρτήτως του ότι οι συνθήκες δεν επέτρεπαν την εντρυφή επίδοσης σ' αυτές. Για τις ανάγκες αυτής της έστω ευάριθμης ομάδας –σε σχέση πάντα και με τον γενικό πληθυσμό–

⁶ Hunger H., *Βυζαντινή λογοτεχνία. Η λόγια κοσμική γραμματεία των Βυζαντινών*, τ. Γ, ΜΙΕΤ, Αθήνα 1994, σ. 26-27.

⁷ Usener H. (ed.), *De Stephano Alexandrino*, Bonnæ 1880, σ. 17. Για τη γνησιότητα των φράσεων στις αγκύλες ο συγγραφέας εκφράζει επιφυλάξεις.

γράφηκαν μια σειρά απλοποιημένα κι εκλαϊκευτικά εγχειρίδια.⁸ Άλλωστε ανέκαθεν, ακόμη και στον 3^ο αιώνα π.Χ., περίοδο ακμής της ελληνικής επιστήμης, οι άνθρωποι που συνέχιζαν τις σπουδές τους πέρα από τις στοιχειώδεις γνώσεις των μαθηματικών επιστημών δεν ήταν πολλοί.⁹ Τέτοιας μορφής εκλαϊκευτικό έργο είναι τα μαθηματικά προβλήματα που συνέταξε ο Μητρόδωρος, αδελφός του Ανθέμιου, τα οποία συμπεριλήφθηκαν στην *Παλατινή Ανθολογία*.¹⁰ Φαίνεται ότι αυτού του είδους τα συμπλήγματα ήταν αρκετά γνωστά στην πρωτεύουσα, αν συνδυάσουμε το γεγονός ότι ο Ανανίας ο Σιρακηνός τον 7^ο αιώνα παρήγγειλε να του φτιάξουν ένα παρόμοιο.¹¹

Έχουν προηγηθεί, βεβαίως, και κάποια έργα σχετικά με τις μαθηματικές επιστήμες που στόχο έχουν να καλύψουν συγκεκριμένες ανάγκες, όχι τόσο εκπαιδευτικές όσο καθημερινής ζωής, κατασκευών κλπ. Σε ένα τέτοιο πλαίσιο θα πρέπει να ενταχθούν το έργο του Ανθέμιου του Τραλλειανού *Περί παραδόξων μηχανημάτων* (*De admirabilibus machinis*), στο οποίο ο συγγραφέας, έχοντας ως βάση τον Αρχιμήδη και τον Απολλώνιο, ασχολείται με τις ελλείψεις και τις παραβολές.¹²

Μετά τον Στέφανο τον Αλεξανδρέα και μέχρι τον 9^ο αιώνα και την εμφάνιση του Λέοντος του Μαθηματικού δεν αναφέρονται πρόσωπα που ασχολήθηκαν με τις μαθηματικές επιστήμες, τον ένα από τους δύο τομείς στο Βυζάντιο ο οποίος έμεινε υπόθεση αποκλειστικά των λαϊκών και όχι της εκκλησίας (ο άλλος είναι η νομοθεσία).¹³ Ωστόσο, δεν φαίνεται πιθανόν να μην υπήρχαν κάποιοι οι οποίοι τουλάχιστον ασκούσαν το επάγγελμα του

⁸ Βλ. Grant E., *Οι φυσικές επιστήμες τον Μεσαίωνα*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 1994, σ. 9.

⁹ Lloyd G.E.R., *Αρχαία ελληνική επιστήμη*, Αλεξάνδρεια, Αθήνα 1996, σ. 274.

¹⁰ Waltz P. (ed.), *Anthologie grecque*, Les Belles Lettres, Paris 1928, par. I.

¹¹ Vögel K., «Η βυζαντινή επιστήμη», ό.π., σ. 809.

¹² Huxley G.L., *Anthemius of Tralles. A study in Later Greek Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge Mass. 1959.

¹³ Βλ. Lemerle P., *Ο πρώτος βυζαντινός ουμανισμός*, MIET, Αθήνα 1985, σ. 72.

διδασκάλου. Κι αυτό συνάγεται εύλογα από το γεγονός ότι τουλάχιστον οι Βυζαντινοί-μέλη της ανώτερης τάξης διέθεταν πάντα επιμελημένη μὀρφωση, ενώ αναφέρονται αυτοκράτορες της περιόδου της έριδας των εικόνων που φημίζονταν για τη μὀρφωσή τους, όπως, παραδείγματος χάρη, ο Κωνσταντίνος Ε' (741-775).¹⁴

Ο όρος *quadrivium* ή τετρακτύς συναντάται στη μεσοβυζαντινή περίοδο σε αρκετούς βίους αγίων, από τα ελάχιστα είδη γραπτού λόγου που σώζονται από την εποχή. Βέβαια τα προβλήματα που παρουσιάζουν οι βίοι ως ιστορικές πηγές είναι πολλαπλά, αφού πρόκειται για προπαγανδιστικά κείμενα που δεν ξεφεύγουν από τον στερεότυπο λόγο που επιβάλλει το κυρίαρχο θρησκευτικό σύστημα κάθε εποχής, στην περίπτωση δε που μας ενδιαφέρει το βασικότερο είναι ότι πολλές φορές ο ένας επαναλαμβάνει ή και αντιγράφει επακριβώς τον άλλο. Οι βίοι, απευθυνόμενοι στο ευρύ κοινό, εξέφραζαν κατά κάποιο τρόπο την κυρίαρχη εκκλησιαστική άποψη, τα κοινώς αποδεκτά και παραδεδεγμένα ή μάλλον αυτά που θεωρούνταν ότι έπρεπε να είναι αποδεκτά και παραδεδεγμένα. Κι αν αντιμετωπιστούν ως τέτοιου είδους κείμενα, είναι διαφωτιστικά περί των κυρίαρχων αντιλήψεων της εποχής τους. Είναι κοινή πρακτική των αγιογράφων να αναφέρονται και στην εκπαίδευση που έλαβαν οι βιογραφούμενοι, αφού η εκπαίδευση θεωρούνταν συστατικό στοιχείο της διαμὀρφωσης ενός ανθρώπου, τόσο απαραίτητη όσο και η φροντίδα από τους γονείς. Επίσης, η λεπτομερής αναφορά του είδους και του τρόπου της εκπαίδευσης των βιογραφουμένων πολλές φορές έχει σκοπό να τονίσει το γεγονός ότι αν και διδάχθηκαν τις θύραθεν επιστήμες, δεν παρασύρθηκαν από τα εγκόσμια και δεν παρέκκλιναν από το δρόμο του Θεού. Οι αναφορές, ωστόσο, στις θύραθεν επιστήμες είναι αρκετά διαφωτιστικές για το περιεχόμενό τους και τη μέθοδο διδασκαλίας τους.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα συνιστά ο Ιγνάτιος διάκονος (γεν. περ. 780), με τον τίτλο του οικουμενικού διδασκάλου επί αυτοκράτορα

¹⁴ Χέριν Τζ., *Γυναίκες στην πορφύρα. Ηγεμόνες του μεσαιωνικού Βυζαντίου*, Ωκεανίδα, Αθήνα 2002, σ. 52.

Θεοφίλου,¹⁵ ο οποίος στο βίο του πατριάρχη Νικηφόρου¹⁶ περιγράφει ως εξής τις σπουδές που ακολούθησε ο δεύτερος:

«Περὶ τε τὴν τῆς μαθηματικῆς τετρακτύος ἀνάληψιν, ἥτις ἐκ πεπερασμένων συνεχῶν καὶ πεπερασμένων διωρισμένων τὴν σύστασιν εἴληφεν (ἢ γὰρ κινεῖται καὶ ποιεῖ τὴν αστρονομίαν· ἢ ἀκίνητός ἐστι καὶ ποιεῖ τὴν γεωμετρίαν· ἢ πάλιν ἐν σχέσει τυγχάνει καὶ ποιεῖ τὴν μουσικὴν· ἢ ἀσχετός ἐστι καὶ ποιεῖ τὴν ἀριθμητικὴν), ἐπὶ τοσούτου οὗτος δι’ ἐπιμελείας ἀφίκετο, ὥς ἀντὶ πάντων ἐν, καὶ ἀντὶ ἐνός ἅπαντα ἐξασκήσας ἐν πάσι το πρῶτειον πορίσασθαι. μουσικὴν δὲ ἡρμόσατο λύραν οὐχ οἷαν Πυθαγόρας ὁ Σάμιος, οὐχ οἷαν ὁ ἀπαιτῆλός Ἀριστόξενος, μάλλον δὲ τὴν ἐκατονκαιπεντηκοντάχορδον· καὶ ταύτην κρούων αἰετῶν υπηκόων ποτὲ Σαοῦλ τὴν νόσον ἀπῆλασε, καὶ τὸν ὠμότατον τύραννον τῷ τῆς κακοδοξίας καταχόμενου πνεύματι καὶ ἀμεταμέλητα κατὰ τῆς Χριστοῦ οἰκονομίας ἐμπαροινήσαντα, ὠκειώσατο μὲν, τῆς δὲ τούτου λύμης τὸ ποιῆμιον διεσώσατο. Ταύταις ταις τέσσαρσι θεραπαινίσιν τα ὄντως ἐπιστήμης προσομιλήσας σαφέστατα, ἐπὶ τὴν τούτων δέσποιναν, τὴν φιλοσοφίαν φημί, καὶ τα ταύτης ἐξ ἐτοιμοῦ ἐβάδισεν ἀπλανεῶς θεωρήματα [...].¹⁷

Ἡ τομὴ φαίνεται νὰ γίνεταί, ὥστόσο, τὸν 9^ο αἰῶνα, ὅταν ὁ Λέων ὁ Μαθηματικός, μία ἀπὸ τὶς σημαντικότερες προσωπικότητες ποὺ συνδέθηκαὶν με τὴν ἱστορία τῶν ἐπιστημῶν τῆ βυζαντινῆ περιόδο, ἐμφανίζεται νὰ διδάσκει τὶς μαθηματικὲς ἐπιστήμες δημοσίως, ὑπὸ τὴν προστασία τοῦ αυτοκράτορα Θεοφίλου (829-842). Κατὰ μία ἐκδοχὴ ὁ Λέων τοποθετήθηκε ἀπὸ τὸν Καίσαρα Βάρδα ἐπικεφαλῆς τῆς σχολῆς τῆς φιλοσοφίας (*φιλόσοφος σχολή*) ποὺ ἰδρύθηκε με πρωτοβουλία καὶ ἐν μέρει καὶ χορηγία τοῦ σὴ Σχολὴ τῆς Μαγναύρας. Στὴν ἴδια σχολὴ διδάσκονταν καὶ οἱ ὑπόλοιποι κλάδοι τῶν ἐπιστημῶν: ὁ Θεόδωρος, μαθητὴς τοῦ Λέοντα, δίδασκε

¹⁵ Σύμφωνα με τὸν Συνεχιστὴ τοῦ Θεοφάνη, *Theophanes Continuatus*, ed. I. Bekker, Bonn 1838, σ. 143.

¹⁶ «Βίος τοῦ ἐν ἀγίοις πατρὸς ἡμῶν Νικηφόρου», στο *Nicephori archiepiscopi Constantinopolitani Opuscula Historica, Accedit Ignatii Diaconi Vita Nicephori*, Teubner, Lipsiae 1880.

¹⁷ «Βίος τοῦ ἐν ἀγίοις πατρὸς ἡμῶν Νικηφόρου», ὁ.π., σ. 150-151.

γεωμετρία και ο Θεοδήγιος αστρονομία.¹⁸ Κατά μια άλλη εκδοχή, το μάθημα της γεωμετρίας δίδασκε κάποιος Σέργιος ενώ ο Θεοδήγιος δίδασκε αριθμητική και αστρονομία.¹⁹ Εν πάση περιπτώσει, το σημαντικό εδώ είναι η διπλή μαρτυρία ότι στην Κωνσταντινούπολη στο δεύτερο μισό του 9^{ου} αιώνα διδάσκονταν οι κλάδοι του quadrivium, σε ανώτερο επίπεδο και από σημαντικές προσωπικότητες, με το θέμα να συγκεντρώνει το προσωπικό ενδιαφέρον του ίδιου του αυτοκράτορα. Η προσωπικότητα του αυτοκράτορα είναι εδώ ο σημαντικός παράγοντας, ο οποίος θα παίξει καθοριστικό ρόλο στη συγκρότηση του κατεξοχήν βυζαντινού εκπαιδευτικού συστήματος. Ένα ζήτημα που μένει ανοικτό σε αυτή την περίοδο είναι οι σχέσεις με τους Άραβες του χαλιφάτου της Βαγδάτης, οι οποίοι το ίδιο διάστημα είχαν επιδοθεί στην αντιγραφή και τη μελέτη των αρχαίων ελληνικών κειμένων και οι αλληλεπιδράσεις.

Η μελέτη του quadrivium από τον 9^ο αιώνα και μετά, περίοδο οικονομικής και δημογραφικής ανάκαμψης για το Βυζάντιο, φαίνεται να συνεχίζεται αδιάλειπτα. Από την εποχή του Κωνσταντίνου Ζ' Πορφυρογέννητου, όταν δόθηκε ιδιαίτερη σημασία από την αυτοκρατορική εξουσία στην εκπαίδευση και στην οργάνωσή της, η μελέτη των τεσσάρων μαθηματικών επιστημών απέκτησε τη δική της θέση στο εκπαιδευτικό πρόγραμμα. Η μελέτη αυτή βεβαίως αποσκοπούσε στην παροχή μιας γενικής παιδείας στο πλαίσιο της εγκυκλίου παιδείας, την οποία θα έπρεπε να κατέχει καθένας που θα ήθελε να θεωρείται μορφωμένος. Αυτή την εποχή, επί των Μακεδόνων αυτοκρατόρων, φαίνεται να παγιώνεται και η μορφή του Quadrivium ως συνολικού και ιδιαίτερου μέρους του εκπαιδευτικού προγράμματος, και να συνεχίζεται μέχρι την άλωση της Κωνσταντινούπολης το 1453. Την εποχή των Μακεδόνων, το 1008, επί Βασιλείου Β', γράφηκε και το παλαιότερο συνολικό εγχειρίδιο

¹⁸ *Theophanes Continuatus*, ό.π., σ. 192.

¹⁹ Βλ. Georgius Cedrenus, *Σύνοψις Ιστοριών*, Bekker I. (ed.), Bonnæ 1838-39, σ. 171.

διδασκαλίας των κλάδων του *quadrivium* της βυζαντινής εποχής, που διασώθηκε σε πολλά αντίγραφα, στο οποίο θα αναφερθούμε στα επόμενα.

Η παγίωση του όρου *quadrivium*, με την ελληνική εκδοχή *τετρακτὺς*, αποδεικνύεται από μια σειρά αναφορές στα κείμενα της επόμενης περιόδου και μέχρι το τέλος της βυζαντινής περιόδου.²⁰

Εκκλησία και μαθηματική εκπαίδευση

Αυτό που θα πρέπει να ληφθεί σοβαρά υπόψη στη συζήτηση περί μαθηματικών επιστημών στο Βυζάντιο, που άπτεται της νομιμοποίησής τους, είναι η επίσημη εκκλησία ως ιδεολογικός μηχανισμός. Στην περίοδο της ύστερης Αρχαιότητας, παρά την αρνητική στάση απέναντι στην ενασχόληση με τις μαθηματικές επιστήμες, ως προϊόντα της ειδωλολατρικής σκέψης, ένα επίπεδο γνώσης των επιστημών αυτών θεωρούνταν απαραίτητο και από την εκκλησία. Οι αστρονομικές γνώσεις, παραδείγματος χάρη, στο βαθμό που χρησιμοποιούνταν για την καταμέτρηση του χρόνου και τον καθορισμό των χριστιανικών εορτών, ήταν αναγκαίες. Χωρίς βέβαια να αντιμετωπίζονται μέσα στο πλαίσιο των θεωριών των οποίων αποτελούσαν προϊόντα.

Με αυτό τον τρόπο, πέραν της κατ' αρχήν αρνητικής στάσης της εκκλησίας απέναντι στην ελληνική επιστήμη, υπάρχει η δυνατότητα ορισμένες αρχές, κυρίως υπολογιστικές, που προέρχονται από τη δεύτερη να γίνουν αποδεκτές και να χρησιμοποιηθούν από την πρώτη, όταν κρίνονται απαραίτητες και δεν θεωρείται ότι απάδουν της χριστιανικής ηθικής. Τέτοιες αρχές είναι λοιπόν οι αστρονομικοί και ημερολογιακοί υπολογισμοί. Άλλωστε αυτή η στάση δεν είναι εντελώς έξω από τη λογική π.χ.

²⁰ Βλ. Γ. Κατσιαμπούρα, *Πρόσληψη, μετάδοση και λειτουργία των επιστημών στη μεσοβυζαντινή περίοδο και το Quadrivium του 1008*, αδημ. διδ.διατριβή, Πάντειον Πανεπιστήμιο, Αθήνα 2004, όπου και λεπτομερείς αναφορές των πηγών.

του Μεγάλου Βασιλείου, αν τη συνδυάσουμε με το έργο του *Προς τους νέους όπως αν εξ ελληνικών ωφελούντο λόγους*.²¹ Σε αυτό το έργο, που απευθύνεται κατ' αρχάς προς τους ανιψιούς του, ο Βασίλειος συμβουλεύει τους νέους που διαβάζουν κείμενα γραμμένα από ειδωλολάτρες να συγκρατούν από αυτά ό,τι δεν έρχεται σε αντιπαράθεση με τη χριστιανική ηθική.²² Στο ίδιο πλαίσιο θα κινηθούν και οι μεταγενέστεροι χριστιανοί συγγραφείς, όπως παραδείγματος χάρη ο Θεοδώρητος, επίσκοπος Κύρου, τον 5^ο αιώνα.²³ Ο Θεοδώρητος Κύρου, στο έργο του *Ελληνικών θεραπευτική παθημάτων ή ευαγγελικής αληθείας εξ ελληνικής φιλοσοφίας επίγνωσις*, δεν αντιτίθεται κατ' αρχήν στη γνώση, θεωρεί ωστόσο πρωταρχική την πίστη στον Θεό. Σύμφωνα με αυτή την ιεράρχηση, η γνώση πρέπει να έπεται της πίστης, αφ' εαυτής δεν πρέπει να είναι αιτούμενο του χριστιανού.²⁴ Μια παρόμοια αντίληψη, αν και κάπως ασύνδετη με το υπόλοιπο περιεχόμενο της πραγματείας, διατυπώνει και ο άγνωστος συγγραφέας του *Ευσυνόπτου συντάγματος* του 1008, όπως θα δούμε στη συνέχεια. Τελικά αυτή θα είναι η συχνότερη στάση που θα κρατήσουν οι χριστιανοί σε ολόκληρο το μετέπειτα διάστημα: από τις θύραθεν επιστήμες θα προσπαθήσουν να κρατήσουν ό,τι θεωρούν τεχνική για να τη θέσουν στην υπηρεσία της εκκλησίας.²⁵ Ταυτόχρονα, η

²¹ Boulenger F. (ed.), *Saint Basile, Aux jeunes gens sur la manière de tirer profit des lettres helléniques*, Les Belles Lettres, Paris 1935.

²² Βλ. Lemerle P., *Ο Πρώτος Βυζαντινός Ουμανισμός*, ό.π., σ. 47.

²³ Ο Θεοδώρητος, επίσκοπος Κύρου από το 423, γεννήθηκε στην Αντιόχεια το 393, και αν και από μικρή ηλικία αφιερώθηκε από τους γονείς του στην εκκλησία, έλαβε κλασική μόρφωση. Αναμείχθηκε στις χριστιανικές έριδες ως υποστηρικτής της πλευράς του Νεστόριου και υπέστη διώξεις. Το σημαντικότερο έργο του, *Ελληνικών παθημάτων θεραπευτική*, είναι μια πολεμική εναντίον των παγανιστών. Πέθανε στη Συρία το 466.

²⁴ Με τα λόγια του ίδιου του Θεοδώρητου Κύρου: «Δει πιστεύσαι πρώτον, είτα μαθείν», στο *Ελληνικών παθημάτων θεραπευτική ή ευαγγελικής αληθείας εξ ελληνικής φιλοσοφίας επίγνωσις*. Βλ. Canivet P. (ed.), *Therapeutique des maladies helléniques Theodoret de Cyr*, Ed. Du Cerf, Sources chrétiennes no 57, vol. 2, Paris 1958.

²⁵ Βλ. Lemerle P., *Ο Πρώτος Βυζαντινός Ουμανισμός*, ό.π., σ. 50.

μη ενασχόληση με τις επιστήμες που προσπαθούν να εξηγήσουν το σύμπαν ως στάση αρχής περιορίζεται κυρίως στα μέλη της εκκλησιαστικής ιεραρχίας, χωρίς όμως κι αυτό να έχει γενική ισχύ στην Ανατολική Ρωμαϊκή Αυτοκρατορία.²⁶ Θα υπάρξουν βέβαια και περίοδοι κατά τις οποίες η όξυνση της στάσης της εκκλησίας με καταγγελίες και απαγορεύσεις της άσκησης των επιστημών θα είναι καταλυτική. Όπως συνέβη την περίοδο της έριδας των εικόνων π.χ.

Το Ευσύννοπτον σύνταγμα (Quadrivium) του 1008

Το παλαιότερο διδακτικό εγχειρίδιο των τεσσάρων μαθηματικών επιστημών, που προαναφέρθηκε, εκδόθηκε από τον J.L. Heiberg με τον τίτλο *Anonymi, Logica et Quadrivium*.²⁷ Το εγχειρίδιο αυτό αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια, Αριθμητική, Μουσική, Γεωμετρία, Αστρονομία, και δημοσιεύεται μαζί με ένα κεφάλαιο που προτάσσεται, αφιερωμένο στη φιλοσοφία.

Το *Ευσύννοπτον σύνταγμα εις τας τέσσaras επιστήμας* του 1008 συνιστά χαρακτηριστικό παράδειγμα επιστημονικού λόγου για την εποχή του, προϊόν της συζήτησης που βρισκόταν σε εξέλιξη και των εκπαιδευτικών αναγκών που παρουσιάζονταν σε μια κοινωνία, της οποίας ο εκπαιδευτικός μηχανισμός αποτελούσε αναπόσπαστο μέρος. Η μελέτη του περιεχομένου του *Ευσύννοπτου συντάγματος* επιβεβαιώνει την επιβίωση των επιστημονικών αρχών της κληρονομιάς της ύστερης Αρχαιότητας και την προσπάθεια επικαιροποίησής τους στη βυζαντινή εποχή.

²⁶ Περισσότερα για τη στάση των χριστιανών απέναντι στη μελέτη που στοχεύει στην κατανόηση του σύμπαντος βλ. στο Dijksterhuis E.J., *The mechanization of the world picture. Pythagoras to Newton*, Princeton University Press, Princeton 1986, σ. 89-95.

²⁷ Heiberg J.L. (ed.), *Anonymi, Logica et Quadrivium, cum Scholiis Antiquis*, Det Kgl. Videnskabernes Selskab., Historisk-filologiske Meddelelser XV, 1, Kopenhagen 1929.

Ξεκινώντας από την αριθμητική, ο συγγραφέας εξηγεί την επιλογή του με την αξία που προσδίδει σε αυτή και τον κυρίαρχο ρόλο που διαδραματίζει σε σχέση με τις υπόλοιπες: «*Αὕτη καθηγεμών και πρωταίτιος ἄτε και απλουστέρα και στοιχειώδης και προς εκείνας [τις υπόλοιπες μαθηματικές επιστήμες] και απλουστέρα και στοιχειώδης και προς εκείνας ευθέως διαβιβάζουσα*». Η άποψη αυτή που εκφράζεται με εμβληματικό τρόπο παραπέμπει ευθέως στην άποψη περί αριθμητικής του Νικόμαχου του Γερασηνού, όπως εκφράζεται στα *Αριθμητικά*: «*Τίνα ουν αναγκαίον πρωτίστην των τεσσάρων τούτων μεθόδων εκμανθάνειν; ἢ δηλονότι την φύσει πασών προϋπάρχουσαν και κυριωτέραν αρχῆς τε και ρίζης και οιονεί προς τας ἄλλας μητρός λόγον επέχουσαν. ἐστι δε αὕτη ἡ αριθμητική ου μόνον, ὅτι ἔφαμεν αὐτήν εν τη του τεχνίτου θεοῦ διανοία προϋποστήναι των ἄλλων ὡσανεί λόγον τινά κοσμικόν και παραδειγματικόν, προς ον απερειδόμενος ο των όλων δημιουργός ως προς προκέντημά τι και αρχέτυπον παράδειγμα τα εκ της ὕλης αποτελέσματα κοσμεῖ και του οικείου τέλους τυγχάνειν ποιεί, ἀλλά και ὅτι φύσει προγενεστέρα υπάρχει, ὅσω συναναιρεί μεν εαυτή τα λοιπά, ου συναναιρείται δε εκείνοις*».²⁸

Η άποψη για την αριθμητική ως θεμέλιο των επιστημών επαναλαμβάνεται στο εγχειρίδιο, για να τονιστεί η σημασία της. Στην ενότητα περί γεωμετρίας διαβάζουμε: «*αριθμητικῆς [...], ἡν αρχήν εἶναι των επιστημών ὠρίσαντο και θεμέλιον, και ταύτης εκτός μηδεμίαν εκείνων συστήναι δύνασθαι*».

Η άμεση παραπομπή στη νικομάχεια αξιολόγηση των επιστημών είναι ακόμη μία ένδειξη της επιρροής που ασκεί ο Νικόμαχος. Επιρροή η οποία είναι εμφανής ήδη από τους ορισμούς των αριθμών που είναι άμεσα επηρεασμένοι από τη μυστικιστική πυθαγόρεια αντίληψη που διακονούσε ο Νικόμαχος, καθώς και από τις αναφορές στον Πυθαγόρα. Οι αρχικοί ορισμοί που δίνονται στο εγχειρίδιο προσπαθούν να συνδυάσουν την αρχαία ελληνική

²⁸ *Nicomachi Geraseni Pythagorei introductionis arithmeticae libri II*, Hoche Ric. (ed.), Bibliotheca Scriptorum Graecorum Teubneriana, Teubner, Lipsiae 1866, 1, 4.

αντίληψη περί των αριθμών με τη χριστιανική κοσμοθεωρία. Έτσι, ο αριθμός ένα, παραδείγματος χάρη, ορίζεται με βάση την ομοιότητά του με το θείο, αφού θεωρείται *«η μονάς αριθμός ουκ ούσα γεννητική εστιν αριθμών πηγή και ρίζα και αφορμή πλήθους παντός εικόνα σώζουσα θείου, ο μηδέν ου των όντων, έστιν δ' ουν όμως των όντων ποιητικόν»*.

Η διάρθρωση της ύλης προσπαθεί να πληροί τους εκπαιδευτικούς στόχους για τους οποίους είχε συγγραφεί. Έτσι, για την ευκολότερη πρόσληψη του περιεχομένου, σε κάθε νοηματική ενότητα προτάσσεται ο ορισμός και ακολουθεί μια πιο εξειδικευμένη παρουσίαση ενώ ακολουθούν παραδείγματα για πληρέστερη κατανόηση. Το γεγονός ότι το εγχειρίδιο απευθυνόταν στους σπουδαστές της ανώτερης βαθμίδας της βυζαντινής εκπαίδευσης συνάγεται από το επίπεδο δυσκολίας του περιεχομένου. Ο συγγραφέας θεωρεί ότι οι αναγνώστες διαθέτουν ήδη κάποιες γνώσεις, έτσι προχωρεί στην παρουσίαση πιο ειδικών θεμάτων, καταβάλλεται δηλαδή προσπάθεια για μεγαλύτερη εμβάθυνση, αν και σε περιορισμένη έκταση. Τους ορισμούς ακολουθεί η μέθοδος εύρεσης, ούτως ώστε ο σπουδαστής να είναι σε θέση και μόνος του να προχωρεί σε μελέτη και συνέχιση της ενασχόλησης. Παρουσιάζονται επίσης λεπτομερώς τόσο οι αρχές κατηγοριοποίησης των αριθμών, όσο και η εύρεση των μεταξύ τους σχέσεων. Επίσης εν εκτάσει ασχολείται το έργο με τη μέθοδο κατασκευής των σχημάτων, ενώ ιδιαίτερο βάρος δίνεται στις αναλογίες μεταξύ των αριθμών. Ίσως δεν θα ήταν παρακινδυνευμένο να πούμε ότι οι ανάγκες της εποχής επηρέασαν το περιεχόμενο της διδασκαλίας, αφού είναι γνωστό ότι οι αναλογίες μπορούν να αξιοποιηθούν στον κατασκευαστικό τομέα.

Ένα άλλο σημείο που θα έκριζε σχολιασμού είναι ο τρόπος που γίνεται αναφορά στον Πυθαγόρα. Στην ενότητα περί αναλογιών αναφέρεται απλώς: *«αι μεν ουν Πυθαγόρου και των περί Πυθαγόραν αναλογία»*.²⁹ Γεγονός που σημαίνει, για να επιστρέψουμε στην εποχή και το επιστημονικό επίπεδο που τη διέκρινε, ότι ο

²⁹ Heiberg J.L. (ed.), *Anonymi, Logica et Quadrivium*, ό.π., σ. 58.

Πυθαγόρας και η σχολή του θεωρείται γνωστός και δεν δίνεται καμία περαιτέρω πληροφορία για το άτομο ή το έργο του.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η κατακλείδα της ενότητας, στην οποία ο συγγραφέας παρουσιάζει την άποψή του για τις επιστήμες. Ξεφεύγοντας από το στενό «επιστημονικό» πλαίσιο στο οποίο είχε περιοριστεί μέχρι τώρα, καταβάλλει μια προσπάθεια για να παρουσιάσει εν συντόμω κάποιες από τις αρχές της κοσμοθεωρίας του. Η παρουσίαση βασικών αρχών και απόψεων είναι μία από τις συμβατικές υποχρεώσεις των συγγραφέων επιστημονικών έργων κατά παράδοση. Τέτοιου είδους απόψεις παρουσιάζει και ο Πτολεμαίος, παραδείγματος χάρη, και μάλιστα αρκετά εκτεταμένα στο Προοίμιο της *Μαθηματικής συντάξεως*.³⁰ Στο υπό εξέταση κείμενο, ο άγνωστος συγγραφέας, απ' αφορμή την πραγμάτευση περί σφαίρας, βρίσκει ευκαιρία να εκφράσει την άποψή του περί επιστήμης και σχέσης της με το θείο και το αιώνιο. Η άποψή του φαίνεται να έχει πλατωνικές επιρροές, όταν μιλά για «*απομόργματα*» και για τη σχέση των αιώνιων αληθειών και της δυνατότητας πρόσληψής τους από τον άνθρωπο. Η ενότητα περί γεωμετρίας εκκινεί με τον ίδιο τρόπο, προτάσσοντας τους ορισμούς όσων θεωρούνται βάση για την περαιτέρω μελέτη. Στη συγκεκριμένη ενότητα, επίσης, ενώ σε εκείνη της αριθμητικής θεωρούνταν ήδη δεδομένες κάποιες βασικές γνώσεις, δεν συμβαίνει το ίδιο. Οι εναρκτήριοι ορισμοί αφορούν τις βασικές αρχές της γεωμετρίας, όπως π.χ. το σημείο, την ευθεία, κ.ο.κ. Αυτό συνάδει απολύτως με το εκπαιδευτικό πρόγραμμα στο Βυζάντιο, άρα και με το σκοπό που έρχεται να καλύψει η συγγραφή του εγχειριδίου. Οι σπουδαστές, σύμφωνα με το εκπαιδευτικό «πρόγραμμα», δεν είχαν ξαναέρθει σε επαφή με αρχές της γεωμετρίας, άρα έπρεπε η διδασκαλία να ξεκινήσει εκ του μηδενός.

Η παρουσίαση ακολουθεί εν μέρει την αντίστοιχη που πραγματοποιεί ο Ευκλείδης στα *Στοιχεία* του. Το α' βιβλίο των

³⁰ Ptolemaeus, *Syntaxis mathematica*, I, ed. J.L. Heiberg, Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum, Teubner, Lipsiae 1898, «Προοίμιον.

Στοιχείων εκκινεί με σειρά είκοσι τριών ορισμών.³¹ Προηγούνται και εκεί οι ορισμοί του σημείου, της γραμμής και της επιφάνειας. Ο ανώνυμος συγγραφέας δεν ακολουθεί με ακρίβεια τον αρχαίο μαθηματικό, αλλά προσπαθεί να χρησιμοποιήσει όσο το δυνατόν απλούστερους ορισμούς. Παραδείγματος χάρη, δεν δίνει όλα τα χαρακτηριστικά που παρέχουν τα *Στοιχεία* όσον αφορά την επιφάνεια. Ο Ευκλείδης ορίζει την επιφάνεια ως αφ' ενός ό,τι έχει μήκος και πλάτος μόνον αλλά και άκρα του είναι γραμμές. Ο ανώνυμος χρησιμοποιεί για τον δικό του ορισμό τον προηγούμενο ιεραρχικά, και την ορίζει ως αυτό που αποτελείται από γραμμές. Στη συνέχεια, ενώ τα *Στοιχεία* δίνουν, όπως προαναφέρθηκε, όλους τους ορισμούς εξ αρχής, ο συγγραφέας του *Ευσυνόπτου συντάγματος* αναλύει κάθε αντικείμενο πραγματεύσης. Αυτό προφανώς θεωρεί ότι ανταποκρίνεται περισσότερο στο ρόλο του εγχειριδίου του ως διδακτικού. Το περιεχόμενο δε της ενότητας περί γεωμετρίας βασίζεται κυρίως στο α' βιβλίο των *Στοιχείων*.

Η παρουσίαση, λοιπόν, εκτείνεται κλιμακωτά κατά βαθμό δυσκολίας του αντικειμένου. Από τους ορισμούς των πρώτων στοιχείων περνά στα σχήματα, στις σχέσεις μεταξύ τους και στη μέθοδο υπολογισμού του μεγέθους τους. Άξιο προσοχής είναι το γεγονός των πολλαπλών παραπομπών στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Συχνά, δεν προχωρεί μέχρι τέλους τις αποδείξεις αλλά για περαιτέρω εμβάθυνση παραπέμπει ευθέως στα *Στοιχεία* (π.χ. όταν αναφέρεται στο διπλασιασμό ευθειών γράφει «ως πόρισμα ιθ' κεφαλαίου στοιχείου έκτου Ευκλείδου»³²). Τα *Στοιχεία* αναφέρει επίσης θέλοντας να προσδώσει κύρος στο λόγο του και να τον καταστήσει περισσότερο αξιωματικό ή ακόμη κι όταν θεωρεί ότι ο λόγος του αρχαίου γεωμέτρη είναι δυσνόητος και προσπαθεί να τον καταστήσει σαφέστερο (γράφει, φερ' ειπείν, πραγματευόμενος τις παραλληλίες: «ως εν στοιχείω πρώτω λε' Ευκλείδου κεφάλαιον, ο

³¹ Βλ. Σταμάτης Ε.Σ., *Ευκλείδου Γεωμετρία. Στοιχεία Βιβλία 1,2,3,4*, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα 1975.

³² Heiberg J.L. (ed.), *Anonymi, Logica et Quadrivium*, ό.π., σ. 90.

και ημείς επί το σαφέστερον διαγράψομεν»³³). Το γεγονός αυτό, της συχνής αναφοράς των *Στοιχείων* και της συνεχούς παραπομπής σε αυτά σημαίνει ότι το έργο βρισκόταν σε χρήση και αποτελούσε εύχρηστο εργαλείο, τουλάχιστον για τους διδασκάλους. Αυτό επιβεβαιώνει τη διάδοση του κειμένου, του οποίου το πρώτο ολοκληρωμένο αντίγραφο είναι αυτό του 888, που στηρίζεται στις παραδόσεις του Λέοντος του μαθηματικού και ανήκε στη βιβλιοθήκη του Αρέθα.³⁴ Άρα πιθανόν η διδασκαλία να γινόταν σε συνδυασμό, τα *Στοιχεία* να χρησιμοποιούνταν όταν κάποιος ήθελε να εμβαθύνει στα θέματα που έθετε το *Ευσύνοπτον σύνταγμα*, γι' αυτό και το περιεχόμενο εκτείνεται κυρίως στο α' βιβλίο, το εισαγωγικό του ευκλείδειου έργου.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι στην ενότητα αυτή συναντώνται συνεχείς αναφορές σε αρχαίους φιλοσόφους. Για να προσδώσει βαρύτητα στην αρχή της μη ύπαρξης περισσότερων των πέντε στερεών που να αποτελούνται από ισόπλευρα και ισογώνια επίπεδα, αναφέρει ένα επιγράμμα που ο συγγραφέας ισχυρίζεται ότι διατυπώθηκε «*τοις παλαιοίς*», από την Αρχαιότητα:

«*Σχήματα πέντε Πλάτωνος, α Πυθαγόρας σοφός εύρε,
Πυθαγόρας σοφός εύρε, Πλάτων δ' αρίδηλα δίδαξεν,
Ευκλείδης επί τοίσι κλέος περικαλλές έτευξεν*»³⁵

Είναι ενδιαφέρον τόσο η ιστορική απόδοση της πατρότητας της διατύπωσης της εν λόγω αρχής όσο και η αναφορά του ίδιου του επιγράμματος καθ' εαυτού. Η αυθεντία των αρχαίων φιλοσόφων είναι αδιαπραγμάτευτη και δεν υπάρχει καμία επιφύλαξη όσον αφορά την αναφορά τους. Ακόμη περισσότερο, όταν έχει προηγηθεί μια εκτεταμένη αναφορά στη μυστικιστική κοσμολογία του Πλάτωνα, που παραπέμπει στο διάλογο *Τίμαιος*. Στον *Τίμαιο* ο

³³ Heiberg J.L. (ed.), *Anonymi, Logica et Quadrivium*, ό.π., σ. 81.

³⁴ Ο κώδικας Bodl. d'Orville 301, στη Βοδλειανή Βιβλιοθήκη της Οξφόρδης. Βλ. Barbour R., *Greek Literary Hands, AD 400-1600*, Oxford Palaeographical Handbooks, Clarendon Press, Oxford 1981.

³⁵ Heiberg J.L. (ed.), *Anonymi, Logica et Quadrivium*, ό.π., σ. 87.

Πλάτων αναφέρει: «Πρώτον μὲν δὴ πῦρ καὶ γῆ καὶ ὕδωρ καὶ αἴρ ὅτι σώματά ἐστι, δῆλον πού καὶ παντί· τὸ δὲ τοῦ σώματος εἶδος παν καὶ βάθος ἔχει. τὸ δὲ βάθος αὐτὴν πᾶσα ἀνάγκη τὴν ἐπίπεδον περιελιφθῆναι φύσιν· ἡ δὲ ὀρθή τῆς ἐπιπέδου βάσεως ἐκ τριγώνων συνέστηκεν. τὰ δὲ τρίγωνα πάντα ἐκ δυοῖν ἀρχεται τριγώνων, μίαν μὲν ὀρθὴν ἔχοντος ἑκατέρου γωνίαν, τὰς δὲ ὀξείας· ὧν τὸ μὲν ἕτερον ἑκατέρωθεν ἔχει μέρος γωνίας ὀρθῆς πλευραῖς ἴσαις διηρημένης, τὸ δ' ἕτερον ἀνίσοις ἀνίστα μέρη νενεμημένης. ταύτην δὴ πυρὸς ἀρχὴν καὶ τῶν ἄλλων σωμάτων υποτιθέμεθα κατὰ τὸν μετ' ἀνάγκης εἰκότα λόγον πορευόμενον τὰς δ' ἐπὶ τούτων ἀρχὰς ἀνωθεν θεὸς οἶδεν καὶ ἀνδρὸς ὅς αὐτὸν ἀκεῖν φίλος ἦ».³⁶ Ο ἄγνωστος συγγραφέας τοῦ *Εὐσύνοπτος συντάγματος*, ἀφοῦ ἀναφερθεῖ στὸν πρωταρχικὸ ρόλο τῶν τριγώνων, παραπέμπει πρὸς ἐπιρρῶσιν στὰ λεχθέντα τοῦ Πλάτωνα: «ταύτη τοι καὶ Πλάτων μυστικὸν τινὰ λόγον τῶν τριγώνων ἐναποκρύπτεισθαι ἔλεγεν, οἷα πανταίτιον καὶ ποιητικὸν τῶν σχημάτων ἀπάντων ἀναφαινόμενον».³⁷

Τὰ προαναφερθέντα θὰ μπορούσαν ἐδῶ νὰ συσχετιστοῦν καὶ με ὅσα ἀναφέρει ὁ συγγραφέας καὶ φανερῶνουν καὶ τὴ δική του μυστικιστικοφανή ἀντίληψη τοῦ κόσμου. Αὐτὴ εἶναι ἐμφανὴς ὅταν ἀναφέρεται, παραδείγματός χάριν, στὶς ἀναλογίες, στὶς ὁποῖες θεωρεῖ ὅτι μπορεῖ νὰ διακριθεῖ ἡ «ποιητικὴ σοφία», ἡ σοφία τοῦ Δημιουργοῦ: «ἡ τοῖς ποιήμασιν ἐνθεωρουμένη ποιητικὴ σοφία κατὰ τὸ ἐγχαροῦν ἀνθρώποις διαγινώσκεται».³⁸

Ο Πλάτων ἀναφέρεται καὶ σὲ μιὰ ἄλλη περίπτωση. Κι ἐδῶ εἶναι ἀξιοπερίεργο τὸ πλαίσιο μέσα στο ὁποῖο ἀναφέρεται, δηλαδὴ ἡ ρητὴ ἀναφορὰ στὴ θρησκεία τοῦ Δωδεκάθεου. Ο συγγραφέας, ἀναφερόμενος στὸ διπλασιασμὸ τοῦ κύβου, παραθέτει τὴν ἱστορία με τὸ χρησὸ τοῦ Ἀπόλλωνα στους Ἀθηναίους καὶ πὼς ὁ Πλάτων κατὰφερε νὰ ἐπιλύσει τὸ πρόβλημα καὶ νὰ σώσει τοὺς συμπολίτες τοῦ ἀπὸ τὸ λοιμὸ.³⁹ Ἡ παράθεση δὲ τῆς ἱστορίας γίνεται χωρὶς

³⁶ Πλάτων, *Τίμαιος*, εἰς.-μτφρ.-σχ. Β. Κάλφας, Πόλις, Αθήνα 1995, 53c-d.

³⁷ Heiberg J.L. (ed.), *Anonymi, Logica et Quadrivium*, ὁ.π., σ. 83.

³⁸ Heiberg J.L. (ed.), *Anonymi, Logica et Quadrivium*, ὁ.π., σ. 99.

³⁹ Heiberg J.L. (ed.), *Anonymi, Logica et Quadrivium*, ὁ.π., σ. 92.

καμία προσπάθεια απαξίωσης της αρχαίας θρησκείας και με ύφος που δεν αμφισβητεί το αληθές του επεισοδίου. Βέβαια, εδώ θα έπρεπε να σχολιαστούν κάποια ζητήματα. Το πρώτο αφορά το γεγονός ότι ο άγνωστος συγγραφέας δεν ταυτίζει το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου με το «Δήλιον πρόβλημα», όπως είναι γνωστό από την Αρχαιότητα. Η ονομασία «Δήλιον» δε προέρχεται από το θρύλο που ανέφερε ότι ο λοιμός είχε ενσκήψει στη Δήλο, οι κάτοικοί της είχαν πάρει το χρησμό για το διπλασιασμό του βωμού και οι ίδιοι απευθύνθηκαν στον Πλάτωνα να τους λύσει το πρόβλημα. Ο δε Πλάτων τους εξήγησε ότι ο θεός απλώς τους κατηγορούσε γιατί αμελούσαν τη μελέτη της γεωμετρίας.⁴⁰ Δεν ξέρουμε, ωστόσο, από πού προέρχεται η εκδοχή που αναφέρει ο συγγραφέας του *Ευσυνόπτου συντάγματος*. Ένα δεύτερο σχόλιο αφορά το γεγονός ότι δεν αναφέρεται πουθενά ότι το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου θεωρούνταν άλυτο με τις γνωστές μεθόδους από την Αρχαιότητα και απασχολούσε τους μαθηματικούς μέχρι τους νεότερους χρόνους.⁴¹ Το ίδιο πρόβλημα είναι γνωστό και ως «*πρόβλημα παρεμβολής δύο μέσων αναλόγων*», λόγω της λύσης που επινόησε ο Ιπποκράτης ο Χίος (470-400 π.Χ.), όπως αναφέρει ο Ευτόκιος στα σχόλια στο *Περί σφαίρας και κυλίνδρου*: «επενόησεν ότι, εάν ευρεθή δύο ευθειών γραμμών, ων η μείζον της ελάσσονός εστι διπλασία, δύο μέσας ανάλογον λαβείν εν

⁴⁰ Η ιστορία με αυτή τη μορφή διασώζεται με διαφορές από τον Θέωνα τον Σμυρναίο και τον Πλούταρχο. Μια ιστορία με ίδιο μοτίβο αλλά πρωταγωνιστή τον βασιλιά Μίνω αναφέρει και ο Ευτόκιος. Βλ. Λάμπρου Μ., «Μια προσπάθεια διπλασιασμού του κύβου την εποχή της Τουρκοκρατίας και το κείμενο της Αντιπελάργησης», στο ΚΝΕ/ΕΙΕ, *Οι επιστήμες στον ελληνικό χώρο*, Τροχαλία, Αθήνα 1997, σ. 149-177.

⁴¹ Μάλιστα κάποια στιγμή, το 1775, η Ακαδημία των Παρισίων ανακοίνωσε την απόφασή της να μην δεχθεί άλλες προτάσεις για τη λύση του προβλήματος. Σε μια πολύ συζητημένη προσπάθεια επίλυσης του «Δήλιου» επιδόθηκε κατά τη διάρκεια του Νεοελληνικού Διαφωτισμού, το 1756, ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος, με το έργο *Μέθοδος Γεωμετρικώς χωρούσα περί ευρέσεως των δύο μέσων συνεχώς εξής ανάλογον γραμμών*. Βλ., Λάμπρου Μ., «Μια προσπάθεια διπλασιασμού του κύβου την εποχή της Τουρκοκρατίας και το κείμενο της Αντιπελάργησης», ό.π.

συνεχει αναλογία, διπλασιασθήσεται ο κύβος».⁴² Ο συγγραφέας εδώ ακολουθεί αυτή τη συγκεκριμένη μέθοδο των μέσων αναλόγων για το διπλασιασμό.

Για να επανέλθουμε στην αναφορά των χρησμών, αξίζει να σημειωθεί ότι σε μια εποχή που έχει αλλάξει το κοσμοείδωλο, είναι εντυπωσιακό το γεγονός πως ό,τι συνδέεται με έναν λόγο περί επιστήμης δεν τίθεται εν αμφιβόλω, όσον αφορά τουλάχιστον μια συγκεκριμένη κοινωνική κατηγορία, αυτή των λογίων, στην οποία προφανώς ανήκει και ο άγνωστος συγγραφέας.

Στη χορεία των επιστημόνων που αναφέρονται στο έργο ανήκει και ο Αρχιμήδης. Σε μια προσπάθεια να κάνει περισσότερο εύληπτη τη χρήση της μεθόδου της διόπτρας και για να επιμείνει στην αξία της, ο συγγραφέας παραθέτει τη χρήση της από τον Αρχιμήδη, που κατά την παράδοση την εφάρμοσε για να καταμετρήσει το ύψος της πυραμίδας. Τέλος, στους αναφερόμενους επιστήμονες εντάσσεται και ο Θέων, σχολιαστής του Πτολεμαίου, αλλά και ο ίδιος ο Πτολεμαίος.

Οι αναφορές στους αρχαίους και την Αρχαιότητα φαίνεται να μην είναι απόλυτα συμβατές με την κοσμοθεωρία του συγγραφέα, όπως την εκθέτει στην τελευταία παράγραφο της ενότητας. Αφού παρέθεσε όσα θεώρησε επαρκή για τη γεωμετρία, καταλήγει στο συμπέρασμα ότι μέσω της επιστήμης μόνο δεν είναι δυνατόν κανείς να διακρίνει τον Θεό, χρειάζεται και η αρετή, προφανώς η χριστιανική αρετή και πίστη. Γιατί η επιστήμη από μόνη της δεν αρκεί, από μόνη της η μαθηματική γνώση μπορεί να είναι εσφαλμένη, ενώ η αρετή μπορεί να υπάρξει και αφ' εαυτής: «*ως αρετής άνευ μαθηματικήν του παντός αμαρτάνειν, μαθηματικής δε χωρίς την αρετήν και καθ' αυτοίν του παντός ευμοιρείν*».⁴³ Θα μπορούσε κανείς να πει ότι η κατακλείδα της ενότητας αποτελεί τρόπον τινά δήλωση πίστεως του άγνωστου συγγραφέα, που θεωρεί

⁴² *Archimedis opera omnia cum commentaries Eutocii*, Heiberg L.G. (ed.), Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana, Teubner, Lipsiae 1910,

⁴³ Heiberg J.L. (ed.), *Anonymi, Logica et Quadrivium*, ό.π., σ. 103.

απαραίτητο να παρεμβάλλει και κάποιες χριστιανικές αρχές σ' ένα κείμενο που στηρίζεται εξ ολοκλήρου στην κληρονομιά των εθνικών. Κι όσο κι αν ξενίζει τον σημερινό αναγνώστη, μάλλον πρέπει να θεωρείται άλλο ένα δείγμα της βυζαντινής εκλεκτικιστικής ιδεολογίας.

Η ενότητα περί αστρονομίας εκκινεί κι αυτή, χωρίς εισαγωγικές παρατηρήσεις ή αξιολογήσεις, με ορισμούς προχωρώντας βαθμιαία σε δυσκολότερες επεξεργασίες. Έτσι, οι πρωταρχικοί ορισμοί αφορούν τη σφαίρα, το κέντρο της και τη διάμετρο, ενώ επίσης θεμελιακό θεωρείται το γεωκεντρικό σύστημα του οποίου περιγράφονται εξ αρχής οι βασικές αρχές. Από εκεί και πέρα περνά στις πρωταρχικές αρχές της κίνησης του συστήματος: το σημείο στο οποίο επικεντρώνεται αφορά την κίνηση και τις μεταβαλλόμενες θέσεις των πέντε πλανητών, του ηλίου και της σελήνης. Αναφερόμενος δε στις αρχές που διέπουν την κίνηση της σελήνης, προχωρεί σε μια σχετικά απαξιωτική κριτική για τους «παλαιούς», γιατί θεωρεί ότι δεν ανέλυσαν επαρκώς ορισμένα σημεία, που αφορούν την πορεία της στον επίκυκλο και γιατί διαφέρει ως προς τη φαινόμενη κίνηση από τους υπόλοιπους πλανήτες: «ο γαρ περί τούτου λόγος, ουκ οίδ' ὅπως, τοις παλαιοῖς σεσιώπηται».⁴⁴ Σε αυτό το σημείο βλέπουμε να καταβάλλεται προσπάθεια για εξήλιξη των έως τώρα δεδομένων επεξεργασιών, με περαιτέρω μελέτη. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η μη φαινόμενη κίνηση της σελήνης ερμηνεύεται με τον συνδυασμό κινήσεων που έχουν ως αποτέλεσμα τη διαμόρφωση της τελικής εικόνας της κίνησης προς τα μπρος.

Τους κανόνες της κίνησης και της κατάληψης εναλλασσόμενων θέσεων από τους πλανήτες, τον ήλιο και τη σελήνη, ακολουθεί η ερμηνεία του φαινομένου των εκλείψεων. Οι εκλείψεις έπαιζαν σημαντικό ρόλο στην επιστημονική συζήτηση που διεξαγόταν στο Βυζάντιο, όπως έχει αναφερθεί στο οικείο κεφάλαιο, τόσο ως περίεργα φαινόμενα που επιζητούσαν τη φυσική τους εξήγηση, όσο και ως σημεία, η πρόβλεψή τους δε έφτασε να αποτελεί τη λυδία λίθο για την καταξίωση κάποιων ως επιστημόνων, όπως συνέβη

⁴⁴ Heiberg J.L. (ed.), *Anonymi, Logica et Quadrivium*, ό.π., σ. 106.

αργότερα με την περίπτωση της διαμάχης του Νικηφόρου Γρηγορά και του Βαρλαάμ Καλαβρού, τον 14^ο αιώνα.⁴⁵ Και στο υπό εξέταση έργο βλέπουμε να δίδεται ιδιαίτερη σημασία στην ερμηνεία του φαινομένου.

Το ρόλο που είδαμε να παίζουν δε τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη στην ενότητα περί γεωμετρίας, παίζουν στην παρούσα ενότητα της αστρονομίας οι κανόνες του Πτολεμαίου. Όσον αφορά τους υπολογισμούς, η παραπομπή γίνεται στις αντίστοιχες στήλες των πτολεμαϊκών πινάκων, που σημαίνει κι εδώ ότι και η *Μαθηματική σύνταξις* και οι *Πρόχειροι κανόνες* ήταν εύκολο να βρεθούν και να μελετηθούν. Όπως επίσης και τα σχόλια του Θέωνος στους *Πρόχειρους κανόνες*. Ειδικά το πρώτο μέρος του κειμένου ακολουθεί ακριβώς τη *Σύνταξη*, όσον αφορά τη σφαιρικότητα του σύμπαντος και τη θέση της γης σε αυτό.

Το υπό μελέτη κείμενο, βεβαίως, λόγω του χαρακτήρα του ως επιτομής, είναι πολύ πιο συνοπτικό αλλά και πολύ λιγότερο επεξηγηματικό συγκριτικά, εξ ου προφανώς και η ανάγκη συνεχούς παραπομπής στην πηγή. Η δομή του μοιάζει δε περισσότερο σε εκείνη των *Προχείρων κανόνων*.⁴⁶ Πρόκειται λοιπόν περισσότερο περί ενός εγχειριδίου που στον τομέα της αστρονομίας λειτουργεί ως οδηγός χρήσης κανόνων, γεγονός που μπορεί να σημαίνει ότι συνήθως συνοδευόταν κατά τη διδασκαλία από το πρωτότυπο πτολεμαϊκό έργο. Προαναφέρθηκε ότι η ίδια μέθοδος πιθανόν να ακολουθούνταν και στην περίπτωση των ευκλείδειων *Στοιχείων*. Δηλαδή ο ρόλος του *Ευσυνόπτου συντάγματος* να ήταν εισαγωγικός και να λειτουργούσε σε συνδυασμό με τα κύρια έργα των αρχαίων επιστημόνων, του Νικόμαχου, του Ευκλείδη και του Πτολεμαίου.

⁴⁵ Για τη συγκεκριμένη διαμάχη βλ. και Γ. Κατσιαμπούρα, «Νικηφόρος Γρηγοράς εναντίον Βαρλαάμ Καλαβρού: μια πολιτική διαμάχη με ένδυμα την πρόβλεψη των εκλείψεων», *Νεύσις*, τχ. 13, 2004, σ. 138-148.

⁴⁶ *Κλαυδίου Πτολεμαίου Προχείρων κανόνων διάταξις και ψηφοφορία*, στο Ptolemaeus, *Opera Astronomica Minora*, ed. J.L. Heiberg, Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum, Teubner, Lipsiae 1907.

Μια σημαντική προσπάθεια, και απολύτως αναγκαία, που καταβάλλει ο άγνωστος συγγραφέας είναι αυτή της επικαιροποίησης του πτολεμαϊκού έργου και της ένταξής του στο βυζαντινό σύστημα υπολογισμού του χρόνου. Εμφανίζεται λοιπόν μια λεπτομερής παρουσίαση της αιγυπτιακής καταμέτρησης του χρόνου, την οποία χρησιμοποιούσε ο Πτολεμαίος, ώστε ο Βυζαντινός αναγνώστης να έχει τη δυνατότητα μετατροπής.

Το τελευταίο μέρος της ενότητας διαθέτει τελείως διαφορετικό χαρακτήρα. Αφιερώνεται στην παρουσίαση της ιδιοσυστασίας των ουράνιων σωμάτων, και των επιδράσεων που ασκούν στα επίγεια. Έτσι απαριθμούνται οι ποιότητες και οι συνδυασμοί τους που διαμορφώνουν εν τέλει το χαρακτήρα κάθε σώματος, όπως και οι επιδράσεις τους τόσο εξαιτίας της ποιότητας όσο και του συνδυασμού της με τις διαφορετικές θέσεις στο ζωδιακό. Αυτό το τελευταίο μέρος, που δεν συνδέεται άμεσα με τη μαθηματική αστρονομία του προηγούμενου μέρους, θα μπορούσε επίσης να ξενίσει τον σημερινό αναγνώστη. Ωστόσο, είναι ακόμη μία απόδειξη της στενής αλληλεξάρτησης αστρονομίας και αστρολογίας, με τη σημερινή έννοια του όρου, στην περίοδο της ύστερης Αρχαιότητας αλλά και στη βυζαντινή.⁴⁷ Ο συγγραφέας του *Ευσυνόπτου συντάγματος* εντάσσει κι αυτός βέβαια και το προαναφερθέν αντικείμενο στην επιστήμη, την οποία θεωρεί, κατά δήλωσή του, πολύ δύσκολο ζήτημα, ακριβώς λόγω των πολλών και διαφορετικών πτυχών της: «*ποικίλα μιν ουν διά ταύτα και δυσκατάληπτα τα της επιστήμης, και των δυσχερών αι εἴη ταύτα πάντα και ἐτι τα τούτων πλείω· ουδέ γαρ διά πάντων ο λόγος ἀφίκετο*»⁴⁸ γράφει, αναγνωρίζοντας ότι και η δική του προσπάθεια δεν είναι δυνατόν να εξαντλήσει το θέμα.

Έπειτα από αυτό, και γνωρίζοντας προφανώς ότι το τελευταίο μέρος της πραγματευσής του περικλείει τον κίνδυνο παρερμηνειών όσον αφορά τη δυνατότητα και τη δικαιολόγηση των προγνώσεων, ο

⁴⁷ Βλ. Β. Κάλφας, «Επιστήμη και μυθολογία στην αρχαία αστρολογία», στο *Φιλοσοφία και επιστήμη στην αρχαία Ελλάδα*, Πόλις, Αθήνα 2005.

⁴⁸ Heiberg J.L. (ed.), *Anonymi, Logica et Quadrivium*, ό.π., σ. 120.

συγγραφέας φαίνεται να αισθάνεται υποχρεωμένος να εκφράσει την αντίθεσή του σε αυτούς που θεωρούν ότι μπορούν να προβούν σε εκτίμηση των εξελίξεων. Μάλιστα αναφέρεται με σκαιό τρόπο εναντίον τους: «*ἀλλὰ σκαιούς και αμαθείς λογιστέον τους τα τοιαύτα λέγειν επικειρύντας, οι πορισμόν βίου την τερατολογία ποιούμενοι προφήται δοκείν αντί του αστρονόμοι βιάζονται, προφητικής επιπνοίας κα ιχάριτος επιστήμης φύσιν ου διαστέλλοντες*».⁴⁹

Όλο το υπόλοιπο κείμενο είναι αφιερωμένο στην αντίκρουση των ισχυρισμών για την ύπαρξη δυνατότητας πρόγνωσης ενώ η κατακλείδα είναι ένας ύμνος στη λογική: «*μήποτε τούτο δόξαμεν, ει μη το κάλλιστον δώρον των εν ημίν, την ηγεμονίαν του λογικού, σφαλερώς παραιτούμεθα*».⁵⁰ Είναι ενδιαφέρουσα η κατακλείδα αυτή, για τη διαφορά που παρουσιάζει με εκείνες των υπόλοιπων ενοτήτων. Ενώ σε εκείνες εξάιρονται ο θείος λόγος και η χριστιανική αρετή, εδώ αναδεικνύεται η λογική σκέψη, που θεωρείται το σημαντικότερο ανθρώπινο χάρισμα.

Εν συνόλω, το *Ευσύνοπτον σύνταγμα* είναι ένα κείμενο αντιπροσωπευτικό της εποχής του, των αρχών του 11^{ου} αιώνα, τόσο ως προς το επιστημονικό φορτίο του, όσο και ως προς τις γενικότερες αντιλήψεις που πρεσβεύει. Το περιεχόμενό του είναι απολύτως στο πνεύμα μιας περιόδου κατά την οποία το μεγαλύτερο μέρος των μαθηματικών έργων της ύστερης Αρχαιότητας είχαν ανακτηθεί. Η αναφορά γίνεται απευθείας στους αρχαίους, που πιθανόν να σημαίνει ότι αφ' ενός προσέδιδε περισσότερο κύρος και αξιοπιστία στο κείμενο και ότι οι σπουδαστές θα έπρεπε να αποκτήσουν γνώση τουλάχιστον των ονομάτων τους. Η συχνή δε αναφορά στον Πλάτωνα μπορεί ίσως να συνδεθεί με την μετέπειτα μελέτη του, που εμφανίστηκε ως κύριο ιδεολογικό ρεύμα στην Κωνσταντινούπολη μετά τα μέσα του 11^{ου} αιώνα.

Αν εξετάσουμε το επίπεδο του περιεχομένου, θα δούμε ότι όσοι περάτωναν τις σπουδές αυτού του επιπέδου θα ήταν σε θέση να

⁴⁹ Heiberg J.L. (ed.), *Anonymi, Logica et Quadrivium*, ό.π., σ. 120 κ.ε.

⁵⁰ Heiberg J.L. (ed.), *Anonymi, Logica et Quadrivium*, ό.π., σ. 122.

εκτελούν τουλάχιστον μια σειρά μετρήσεις. Οι μέθοδοι καταμέτρησης κατέχουν τη μερίδα του λέοντος στη διάρθρωση της ύλης και των τριών γνωστικών πεδίων. Κι αυτό είναι πιθανόν ενδεικτικό και των αναγκών που θεωρούσαν ότι εμφανίζονται στο ευρύτερο κοινωνικό πλαίσιο. Άλλωστε, ειδικά η κατοχή γνώσεων αστρονομίας θεωρούνταν εκ των ων ουκ άνευ, τόσο για τον υπολογισμό του χρόνου και του Πάσχα, όσο και για τη ναυσιπλοΐα. Το περιεχόμενο του *Ευσύνοπτου συντάγματος* επιβεβαιώνει αυτή την τάση. Πρόκειται, όπως φαίνεται, για μια πραγματεία που γράφηκε με συγκεκριμένους διδακτικούς στόχους, την προσφορά γνώσης βασικών αρχών για την πρακτική αξιοποίησή τους και την καθοδήγηση για περαιτέρω μελέτη.

Εν κατακλείδι, θα μπορούσε να ειπωθεί ότι το *Ευσύνοπτου σύνταγμα* του 1008 και ο ανώνυμος συγγραφέας του προσφέρουν μια χαρακτηριστική εικόνα του τομέα των μαθηματικών επιστημών στις αρχές του 11^{ου} αιώνα, τόσο όσον αφορά τις γνώσεις όσο και τις γενικότερες αντιλήψεις και την κοσμοθεωρία.

ΙΣΤΟΡΙΚΕΣ ΕΚΔΟΧΕΣ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

Κώστας Νικολαυτωνάκης

Πανεπιστήμιο Δυτ. Μακεδονίας

Εισαγωγή

Η πλέον γνωστή ιδιότητα μεταξύ των πλευρών ορθογωνίου τριγώνου γνωστή ως «Πυθαγόρειο θεώρημα» αποτελεί μέχρι και σήμερα ένα σημαντικό και ενδιαφέρον θέμα συζήτησης το οποίο όμως συνήθως εστιάζεται στο πλαίσιο της αναζήτησης της αρχικής ανάδυσής του, δηλ. αν ήταν ενταγμένο και με ποια μορφή στα μαθηματικά των Προελληνικών πολιτισμών ή αν πρωτοεμφανίστηκε με μια αποδεικτική διαδικασία στο πλαίσιο των ελληνικών μαθηματικών αλλά και στο πλαίσιο άλλων σημαντικών πολιτισμών - ερευνητικών και αποδεικτικών παραδόσεων στα μαθηματικά - όπως ο Κινεζικός και ο Αραβικός. Θεωρώ ότι οφείλουμε να τοποθετήσουμε στον πυρήνα της συζήτησης τα ντοκουμέντα τα οποία έχουμε στη διάθεσή μας και να εξετάσουμε παραθέτοντας και συγκρίνοντας τη συνεισφορά τους. Μέσω αυτής της μελέτης των διαφορετικών αλλά ταυτόχρονα αρκετά όμοιων «αποδείξεων» της εν λόγω ιδιότητας θα διαπιστώσουμε ότι ουσιαστικά έχουμε δύο βασικές μεθόδους: αυτή η οποία αποδεικνύει την ιδιότητα με ένα καθαρά μαθηματικό τρόπο που απευθύνεται κυρίως σε μαθηματικούς (Ευκλείδεια απόδειξη) και εκείνη η οποία στηρίζεται με τον ένα ή άλλο τρόπο στην μέθοδο «αποκοπή-επικόλληση» επιφανειών («απόδειξη» του Lui Hui και των Al-Kuhi και Thabit Ibn Qurra). Ταυτόχρονα διαπιστώνουμε ότι ιστορικά η αποδεικτική διαδικασία παρουσιάζει διαφορετικές αποχρώσεις μεταξύ των μαθηματικών – ερευνητικών

παραδόσεων που επηρεάστηκαν πολύ ή καθόλου από την αρχαία ελληνική μαθηματική παράδοση μέσω των *Στοιχείων* του Ευκλείδη.

Απόδειξη με χρήση επιφανειών

Μια αυστηρή απόδειξη χρειάζεται τη χρήση μιας γλώσσας εξαιρετικά δομημένης και τυπικής και να μη βασίζεται σε κανένα στοιχείο το οποίο μπορεί να πηγάζει μόνον από τις αισθήσεις. Αυτή η απαίτηση εμφανίζεται σπάνια στις ικανότητες ενός μαθητή Γυμνασίου, Λυκείου ακόμη και Πανεπιστημίου. Ο συλλογισμός δεν μπορεί να γίνει εύκολα γνώση προς μάθηση. Αν πρόκειται για έναν συλλογισμό στα γεωμετρικά σχήματα, αυτός δεν είναι αυστηρός διότι στηρίζεται σε αισθητά στοιχεία και η γεωμετρία δεν βοηθά το μαθητή να κάνει τη διαφορά μεταξύ του παρατηρούμενου και του αποδεδειγμένου γεγονότος. Υπό αυτό το πρίσμα διαπιστώνουμε ότι υπάρχει μια διπλή παρανόηση σχετικά με την έννοια τι είναι γεωμετρία και σχετικά με την έννοια της αυστηρότητας και της απόδειξης.

Η λέξη γεωμετρία περιέχει την έννοια της μέτρησης η οποία μας παραπέμπει στον αριθμό δηλ. στον υπολογισμό. Η γεωμετρία σχετίζεται τόσο με τον αριθμητικό υπολογισμό όσο και με τη μελέτη των ιδιοτήτων του χώρου. Ιστορικά η Ανάλυση διαμορφώθηκε και αναπτύχθηκε κύρια γύρω από το θέμα της μέτρησης των μεγεθών. Η έννοια της ασυμμετρίας, του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού γεννήθηκαν μέσα από προβλήματα σχετικά με τη μέτρηση μηκών, επιφανειών, όγκου. Αυτά όλα τα προβλήματα είναι συνδεδεμένα σε ευθεία σχέση με μια φυσική πραγματικότητα αλλά οδήγησαν πολύ νωρίς σε ανακαλύψεις οι οποίες ξεπέρασαν την απλή αίσθηση. Είναι λοιπόν πολύ ενδιαφέροντα παραδείγματα για να δείξουν ξεκάθαρα το σύνоро μεταξύ του διαπιστωμένου γεγονότος και του αποδεδειγμένου γεγονότος. Η σύνδεσή τους με την φυσική πραγματικότητα τα κάνει προσβάσιμα στην διαίσθηση του μαθητή-φοιτητή, αλλά η αδυναμία αυτής της διαίσθησης να κατανοήσει την κατάσταση και να επιλύσει το πρόβλημα, τον υποχρεώνει να ξεπεράσει το εμπειρικό στάδιο για να φθάσει στο

θεωρητικό στάδιο της μαθηματικής απόδειξης. Οι επιφάνειες αποτελούν ένα πολύ ενδιαφέρον και δυνατό ευρετικό και αποδεικτικό εργαλείο¹.

Ερχόμενοι σε επαφή με το πρόβλημα της ασυμμετρίας οι Έλληνες φαίνεται ότι ανέπτυξαν μια πλευρά της γεωμετρίας (η οποία καλύπτει τα 4 πρώτα βιβλία των *Στοιχείων* του Ευκλείδη) μέσα από την οποία διαμόρφωσαν και ανέπτυξαν έναν μαθηματικό συλλογισμό για να αποδώσουν με όρους λογικούς ακόμη και αυτό που δεν είναι (το λεγόμενο ως άλογο).

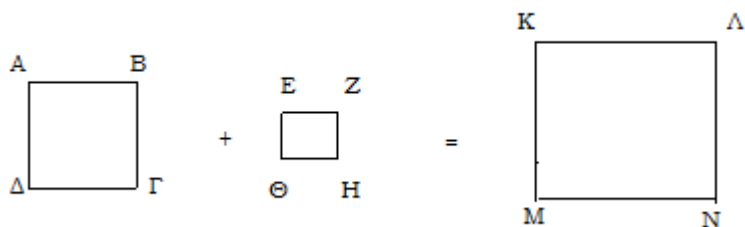
Με αυτή τη λογική δεν μπορούμε να μετρήσουμε ακριβώς την τρίτη πλευρά ενός ορθογωνίου τριγώνου του οποίου οι άλλες δύο πλευρές έχουν μια και δύο μονάδες μήκους. Η ερώτηση που τίθεται σε αυτή την περίπτωση είναι αν θα παραμείνουμε σε αυτή τη θέση αποτυχίας με τους μαθητές-φοιτητές μας; Είμαστε υποχρεωμένοι να περιμένουμε την εμφάνιση του συμβόλου της ρίζας για να μπορέσουμε να πούμε κάτι ακριβές σχετικά με την τρίτη πλευρά; Και τι νόημα έχει άραγε το να πεις ότι είναι $\sqrt{5}$ μονάδες μήκους; Σε αυτό το σημείο ο Ευκλείδης μας βοηθάει ώστε να μην είναι αναγκαίο να περιμένουμε αφού μπορούμε να αποδείξουμε ότι το τετράγωνο που έχει κατασκευαστεί στην τρίτη πλευρά είναι ακριβώς πέντε φορές μεγαλύτερο από το τετράγωνο το οποίο έχει κατασκευαστεί στην άλλη πλευρά της ορθής γωνίας, γεγονός το οποίο μας απελευθερώνει από μια θέση υπολογιστικής αδυναμίας.

Η δεύτερη παρανόηση, είναι σχετική με την αποδεικτική αυστηρότητα η οποία καταρρίπτεται από μόνη της διότι ποτέ μια παρατήρηση, μια μέτρηση με την πρακτική έννοια του όρου, όσο έξυπνη και να είναι, δεν θα μας επέτρεπε να βεβαιώσουμε την ακριβή τιμή αυτού του τετραγώνου το οποίο έχει κατασκευαστεί στην τρίτη πλευρά. Τα μαθηματικά ξεκινούν ακριβώς από αυτό το γεγονός να βρεθείς δηλαδή στη θέση να πεις κάτι ακριβές, μια αλήθεια αναμφισβήτητη σχετικά με τα αντικείμενα που μας περιβάλλουν.

Στο πλαίσιο της γεωμετρίας η διδασκαλία βρίσκεται συνεχώς σε ένα δίλημμα: είτε μένει στην οπτική προφάνεια (συχνά στο δημοτικό) και περνάει λίγο σε μαθηματικούς χειρισμούς ή θέτει σε προτεραιότητα τους μαθηματικούς χειρισμούς (συχνά από το γυμνάσιο) και χάνει την διαισθητική και ευρετική συμβολή των σχημάτων.

Στο πλαίσιο αυτού του προβληματισμού, θέσαμε σε φοιτητές του Β' έτους του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας το ακόλουθο πρόβλημα:

Μας δίνονται δύο τετράγωνα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ, κατασκευάστε ένα τετράγωνο ΚΛΜΝ του οποίου η επιφάνεια να είναι ίση με το άθροισμα των άλλων δύο δοθέντων τετραγώνων².



Για ένα σημαντικό χρονικό διάστημα υπήρχε, μέσα στην αίθουσα, μια σιγή και μια αμηχανία. Η ερώτηση η οποία τέθηκε, από μια φοιτήτρια, ήταν πόσο είναι το μήκος των πλευρών των τετραγώνων ;

Η απάντηση μας ήταν ότι «αυτό που ζητάτε δεν έχει σημασία. Σας ζητώ απλά μια μέθοδο κατασκευής η οποία δεν εξαρτάται από τα μήκη των πλευρών των δοθέντων τετραγώνων. Αλλά αν αυτό μπορεί να σας βοηθήσει, ας θεωρήσουμε το πρώτο τετράγωνο με πλευρά 10 εκατοστά και το δεύτερο με πλευρά 5 εκατοστά.

Μετά από λίγα λεπτά ένας φοιτητής είπε «το τετράγωνο που ζητάμε έχει πλευρά $\sqrt{5^2 + 10^2} = 11,18$ εκατοστά !!!

Κανέναν φοιτητή δεν κατέθεσε την σκέψη-άποψη να κατασκευαστεί ένα ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου οι πλευρές της ορθής γωνίας να είναι οι πλευρές των δοθέντων τετραγώνων, οπότε η υποτεινόμενη να δώσει αμέσως την πλευρά του ζητούμενου τετραγώνου.

Σε αυτό ακριβώς το σημείο θεωρήσαμε ότι είναι ενδιαφέρον να παρουσιάσουμε στους φοιτητές μια σειρά από ιστορικές εκδοχές του Πυθαγορείου θεωρήματος οι οποίες να εμφανίζουν στοιχεία διαφορετικών αποδεικτικών μεθόδων ώστε να μπορέσει κατ' επέκταση να συζητηθεί η δυνατότητα χρήσης διαφορετικών μεθόδων για την απόδειξη κατά τη διδασκαλία των γεωμετρικών ιδιοτήτων.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στο Πυθαγόρειο θεώρημα στα Βαβυλωνιακά, Ελληνικά, Κινέζικα και Αραβικά Μαθηματικά.

Βαβυλωνιακά Μαθηματικά

Η πρώτη γνωστή απόδειξη σχετικά με το Πυθαγόρειο θεώρημα περιλαμβάνεται σε έναν πρώιμο Βαβυλωνιακό πίνακα, που χρονολογείται μεταξύ 1800 και 1600 π.Χ., όπου είναι σχεδιασμένο ένα τετράγωνο με δύο διαγώνιους. Η πλευρά του τετραγώνου φέρει τον αριθμό 30 και κατά μήκος της διαγωνίου βρίσκουμε τους αριθμούς (σε εξηκονταδική αρίθμηση) 1, 24, 51 και 10, ή μάλλον $1+24/60+51/60^2 + 10/60^3$ και 42, 25, 35, ή μάλλον $42+25/60+35/60^2$. Σε δεκαδική μορφή αυτοί (οι αριθμοί) προβάλλουν ως 1,414213 και 42,42639. Το προηγούμενο είναι μια εξαιρετική προσέγγιση της ρίζας του 2, ενώ το τελευταίο είναι η διαγώνιος του τετραγώνου με πλευρά (που μετράται) 30 και ίση με το γινόμενο του 30 με τον προηγούμενο αριθμό του (ρίζα 2). Το γεγονός ότι η διαγώνιος του τετραγώνου μπορεί να βρεθεί πολλαπλασιάζοντας την πλευρά του με τη ρίζα του 2 αποκαλύπτει την γνώση της σχέσης των πλευρών ορθογωνίου τριγώνου γνωστό ως το «Πυθαγόρειο θεώρημα», τουλάχιστον στην περίπτωση του τριγώνου με ίσες καθέτους³. Στο πλαίσιο αυτών των μαθηματικών δεν υπάρχει η έννοια της απόδειξης της ιδιότητας αλλά μια

αριθμητική σχέση μεταξύ, μέσω της γνώσης της ιδιότητας, των μεγεθών των πλευρών του ορθογωνίου τριγώνου.



YBC 7289

Ελληνικά Μαθηματικά

Η πρώτη ακριβής έκθεση και σαφής απόδειξη του θεωρήματος βρίσκεται στο πρώτο βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη (περίπου στα 300 π.Χ.). *Στα ορθογώνια τρίγωνα το τετράγωνο της απέναντι στην ορθή γωνία πλευράς είναι ίσο με τα τετράγωνα των πλευρών που περικλείουν την ορθή γωνία.*

Τα *Στοιχεία*, μελετώντας την διάδοσή τους καθώς και την χρησιμοποίησή τους, εμφανίζουν τα εξής χαρακτηριστικά, το πρώτο είναι αυτό μιας μονογραφίας γεωμετρίας και αριθμητικής, των οποίων η γνώση ήταν σημαντική για την εκμάθηση των μαθηματικών και το δεύτερο, είναι ότι αποτελούσε αλλά και αποτελεί ακόμη ένα μοντέλο θεωρητικής σκέψης⁴.

Ευκλείδης Βιβλίο Ι, Στοιχεία
Πρόταση Ι,47 (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

Εκφώνηση

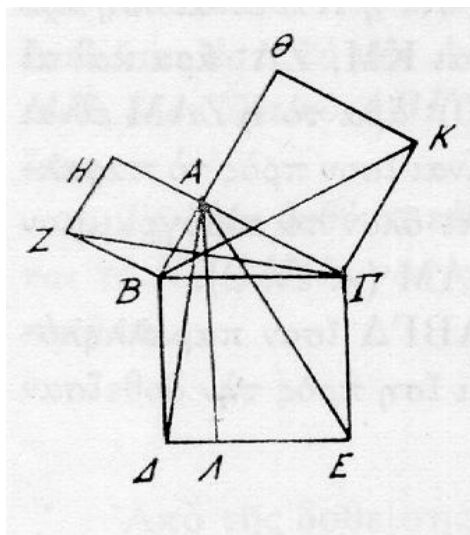
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας⁵.

Η απόδειξη της πρότασης Ι,47 σε γενικές γραμμές στηρίζεται στα ακόλουθα βήματα.

Έστω $AB\Gamma$ ένα τρίγωνο ορθογώνιο στη γωνία A και $ABZH$ και $ΑΓΚΘ$ τα τετράγωνα τα οποία είναι κατασκευασμένα εξωτερικά στις πλευρές του τριγώνου. Αποδείξτε ότι το άθροισμα των τετραγώνων τα οποία είναι κατασκευασμένα στις πλευρές της ορθής γωνίας είναι ίσο με το τετράγωνο το οποίο είναι κατασκευασμένο στην υποτείνουσα.

Οι κύριες γραμμές της απόδειξης είναι οι εξής

- 1) Οι γωνίες $ZB\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι ίσες (αξίωμα 2).
- 2) Τα τρίγωνα $ZB\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι ίσα (πρόταση Ι,4).
- 3) Το τετράγωνο $ABZH$ είναι διπλάσιο του τριγώνου $ZB\Gamma$ και το ορθογώνιο $B\Delta\Lambda I$ είναι διπλάσιο του τριγώνου $AB\Delta$ (πρόταση Ι,41).
- 4) Άρα το τετράγωνο $ABZH$ είναι ίσο με το ορθογώνιο $B\Delta\Lambda I$.
- 5) Όμοια το τετράγωνο $ΑΓΚΘ$ είναι ίσο με το ορθογώνιο $\Gamma E\Lambda I$. Άρα το άθροισμα των τετραγώνων $ABZH$ και $ΑΓΚΘ$ είναι ίσο με το τετράγωνο $B\Gamma E\Delta$.



Η ευκλείδεια απόδειξη βασίζεται στην λογική προφάνεια αντί για την γεωμετρική προφάνεια, σε έναν λόγο (λογικό συλλογισμό) και όχι στην αντίληψη του σχήματος. Ο κινητήριος ρόλος του σχήματος κρύβεται από την τοποθέτηση στην σκηνή της ρητορικής της ευκλείδειας απόδειξης. Αυτή η τελετουργία αποτελείται από μια σειρά σταδίων πάντα ομοίων:

1. Η Πρόταση (εκφώνηση), όπου εκφωνείται η πρόταση προς απόδειξη ή η κατασκευή που πρέπει να γίνει.
2. Η Έκθεση, πρόκειται για την εισαγωγή ενός σχήματος με γράμματα που περιγράφουν τα διαφορετικά σημεία.
3. Ο Διορισμός, όπου επαναλαμβάνουμε την εκφώνηση σε σχέση με το συγκεκριμένο σχήμα, π.χ. πρέπει να κατασκευάσουμε στην ευθεία AB ...
4. Η Κατασκευή, όπου προετοιμάζουμε το σχήμα με βοηθητικές κατασκευές.
5. Η Απόδειξη, στο πλαίσιο της οποίας συνάγουμε το αποτέλεσμα.
6. Το Συμπέρασμα, πρόκειται για επαναδιατύπωση της πρότασης ως αποτέλεσμα της απόδειξης, με όλη την δυνατή γενικότητα.

Προσθέτουμε κάποιες ρητορικές εκφράσεις, όπερ έδει δείξαι για τα θεωρήματα, όπερ έδει ποιήσαι για τα προβλήματα κατασκευής.

Η απόδειξη του Ευκλείδη στοχάζεται ένα σχήμα όπου προστέθηκαν οι απαραίτητες ευθείες στον παραγωγικό λόγο, δηλ. οι κάθετες ΑΛ και οι ευθείες ΖΓ, ΒΚ, ΑΔ και ΑΕ. Πρέπει να αποδειχθεί ότι το τετράγωνο ΒΓΔΕ είναι ίσο (σε επιφάνεια) με το άθροισμα των τετραγώνων ΑΒΖΗ και ΑΓΚΘ. Αυτή η πρόταση είναι η προ-τελευταία του 1^{ου} βιβλίου και η απόδειξη συνάγεται από έναν σημαντικό αριθμό προτάσεων που προηγούνται, ιδιαίτερα, οι προτάσεις που διατυπώνουν ότι δύο παραλληλόγραμμα με ίδια βάση και που βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων είναι ίσα (σε επιφάνεια) και ένα τρίγωνο είναι ίσο σε επιφάνεια με ένα παραλληλόγραμμο με ίδια βάση και που βρίσκεται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων. Η απόδειξη είναι αρκετά μακροσκελής, διότι ο Ευκλείδης προσπαθεί επίσης να αποδείξει την συνευθειακότητα των ΑΓ και ΑΗ του τετραγώνου που έχει κατασκευαστεί στην ΑΒ.

Αυτή η απόδειξη, όπως μας την μεταβιβάζει και η ιστορία των μαθηματικών, δεν είναι η μοναδική δυνατή. Ας εξετάσουμε τη δυνατότητα «απόδειξης» της εν λόγω ιδιότητας στο πλαίσιο των Κινέζικων Μαθηματικών.

Κινέζικα Μαθηματικά

Τα μαθηματικά που αναπτύχθηκαν στην Κίνα περιέχουν σημαντικά αποτελέσματα, τα οποία δεν στηρίζονται σε παραγωγικούς συλλογισμούς. Αυτά τα αποτελέσματα βασίζονται ωστόσο σε συνεπείς και πειστικές λειτουργικές μεθόδους. Είμαστε λοιπόν μπροστά σε μια μαθηματική παράδοση, μη Δυτική, της αρχαιότητας και του Μεσαίωνα, η οποία δίνει ιδιαίτερη σημασία στην απόδειξη, αν και πρόκειται για ένα ιδιαίτερο είδος απόδειξης, η οποία κάνει επίκληση στην οπτική πραγματικότητα. Η εγκυρότητα των συλλογισμών βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στην

άμεση μαρτυρία της όρασης. Γι' αυτό, στα κινέζικα μαθηματικά μπορούμε να μιλήσουμε για «δείχνω» αντί για αποδεικνύω⁶.

Σχετικά με το πρώτο πρόβλημα του κεφαλαίου 9 του Jiuzhang suanshu, ο σχολιαστής – μαθηματικός Liu Hui (περίπου 270 μ.Χ.) παρουσιάζει το Πυθαγόρειο Θεώρημα ξεκινώντας από ένα σχήμα (που δυστυχώς έχει χαθεί) στο οποίο μετακινεί κάποια μέρη. Παρακάτω παρουσιάζουμε μια αναπαράσταση του σχήματος του Liu Hui. Σύμφωνα με αυτή την αναπαράσταση, ξεκινώντας από ένα τρίγωνο ορθογώνιο, στις πλευρές του οποίου σχεδιάσαμε τα αντίστοιχα τετράγωνα, με τέτοιον τρόπο ώστε το (φυσικό) τετράγωνο της υποτεινουσας καλύπτει μερικώς καθένα από τα δύο φυσικά τετράγωνα των δύο πλευρών της ορθής γωνίας. Η υποκείμενη ιδέα σε αυτή την κατασκευή διασφαλίζει την δυνατότητα να ανασχηματιστούν φυσικά το τετράγωνο της υποτεινουσας καλύπτοντας τα άλλα δύο τετράγωνα των πλευρών της ορθής γωνίας με χρήση της ανατομής (dissection). Το κείμενο του κινέζικου σχήματος μας δίνει λακωνικά πληροφορίες σχετικά με το σχήμα δηλ. τις ακόλουθες οδηγίες: κόκκινο βγαίνει και μπλε μπαίνει. Αυτές οι οδηγίες σημαίνουν ότι πρέπει να βγάλεις κάποια κομμάτια κόκκινα και μπλε με σκοπό να τα κάνεις να μπουν στην θέση των κομματιών που αντιστοιχούν στο ίδιο χρώμα με αυτά.

Η απόδειξη του Liu Hui δεν χρησιμοποιεί εκτενή αποδεικτικό λόγο παρά μόνον τέσσερις λέξεις μπλε, κόκκινο, βγαίνει και μπαίνει. Οι λέξεις μπαίνει και βγαίνει υποδεικνύουν τις κινήσεις του σώματος και οι λέξεις μπλε και κόκκινο τις κινήσεις του ματιού που αντιλαμβάνεται τα σχήματα που είναι τα ίδια.

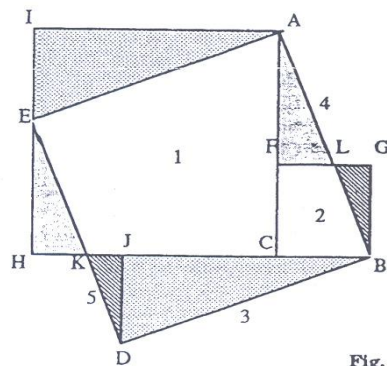
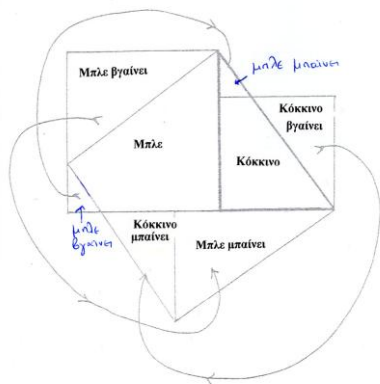


Fig. 10

Ας δώσουμε τώρα μια απόδειξη του θεωρήματος κάνοντας χρήση σχημάτων όπως όταν κάνουμε Ευκλείδεια γεωμετρία.

Η απόδειξη του Lui Hui βασίζεται στην εξής ιδέα: για να αποδείξουμε ότι δύο σχήματα έχουν ίσες επιφάνειες, αρκεί να δείξουμε ότι μπορούν να αναλυθούν σε ίσα μέρη τοποθετούμενα το ένα πάνω στο άλλο.

Κατασκευάζουμε στις πλευρές του τριγώνου ABC τα τετράγωνα ACHI εξωτερικά και το τετράγωνο BCFG εσωτερικά. Λαμβάνουμε στην HI το σημείο E έτσι ώστε η AE να είναι κάθετη στην AB. Τα τρίγωνα ABC και AEI είναι ίσα (ορθογώνια τρίγωνα έχοντας μια πλευρά ίση: $AI=AC$ και μια γωνία διαφορετική της ορθής ίση: $\angle CAB = \angle EAI$). Άρα $AE = AB$. Ολοκληρώνουμε το τετράγωνο BAED κατασκευάζοντας ED κάθετη στην EA και BD κάθετη στην AB. Με αυτό τον τρόπο το τετράγωνο ABDE είναι η ένωση των πολυγώνων τα οποία έχουν αριθμηθεί 1, 2, 3, 4 και 5 τα οποία αν τοποθετηθούν διαφορετικά δίνουν το πολύγωνο AFGBHI το οποίο είναι η ένωση των τετραγώνων ACHI και FCBG. Η απόδειξη βασίζεται λοιπόν στην ισότητα των τριγώνων AFL και EHK, LGB και KJD, BJD και AEI η οποία συνάγεται από την ισότητα των δύο ορθογωνίων τριγώνων τα οποία έχουν μια πλευρά ίση και μια γωνία (όχι ορθή) ίση.

Σύμφωνα με αυτή την αναπαράσταση, ξεκινώντας από ένα τρίγωνο ορθογώνιο, στις πλευρές του οποίου σχεδιάσαμε τα αντίστοιχα τετράγωνα, με τέτοιον τρόπο ώστε το (φυσικό) τετράγωνο της υποτείνουσας καλύπτει μερικώς καθένα από τα δύο φυσικά τετράγωνα των δύο πλευρών της ορθής γωνίας. Η υποκείμενη ιδέα σε αυτή την κατασκευή διασφαλίζει την δυνατότητα να ανασχηματιστούν φυσικά το τετράγωνο της υποτείνουσας καλύπτοντας τα άλλα δύο τετράγωνα των πλευρών της ορθής γωνίας. Το κείμενο του κινέζικου σχήματος μας δίνει λακωνικά πληροφορίες σχετικά με το σχήμα δηλ. τις ακόλουθες οδηγίες: κόκκινο βγαίνει και μπλε μπαίνει. Αυτές οι οδηγίες σημαίνουν ότι πρέπει να βγάλεις κάποια κομμάτια κόκκινα και μπλε με σκοπό να τα κάνεις να μπουν στην θέση των κομματιών που αντιστοιχούν στο ίδιο χρώμα με αυτά.

Συσχετισμός μεταξύ Ελληνικής και Κινεζικής αποδεικτικής διαδικασίας

Η αναγκαιότητα της εκφώνησης δεν υποδεικνύεται από την πορεία του λόγου, αλλά η κίνηση και τα χρώματα υποδεικνύουν μια νοητική πορεία. Μεταξύ των αποδείξεων, ελληνική και κινέζικη, υφίσταται μια ανατροπή του ακίνητου και του κινητού. Η πρώτη συλλογίζεται ένα σχήμα ακίνητο και ξετυλίγει τον λόγο της, η δεύτερη βασίζεται στην κίνηση του σχήματος και προφέρει μιαν αφήγηση η οποία δεν κινητοποιείται μέσα σε έναν λόγο.

Οι δύο προηγούμενες αποδείξεις, Ελληνική και Κινέζικη, αντιστοιχούν σε δύο σημασίες της απόδειξης, αυτής του φωτίζω και αυτής του πείθω⁷, η πρώτη από την μεριά της όρασης (όψης) του σχήματος και η δεύτερη από την μεριά του λόγου.

Μια παράδοση, η Αραβική, μεταξύ των δύο

Τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη επηρέασαν πάρα πολύ την γεωμετρική δραστηριότητα στο Μεσαιωνικό Ισλάμ. Πρόκειται για ένα πολύ καλά οργανωμένο σώμα βασικών αποτελεσμάτων και ένα πρότυπο

γεωμετρικής έκθεσης (λογική πρόοδος κατασκευών και θεωρημάτων από αξιωματική βάση). Από τα 13 βιβλία, το 1^ο Βιβλίο έχει έναν ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο ως εισοδος στο θέμα και ως θεμέλιο των μεταγενέστερων γεωμετρικών αποτελεσμάτων. Η Μεσαιωνική ισλαμική στάση απέναντι στα *Στοιχεία* ήταν θαυμασμός αλλά και κριτική. Ας εξετάσουμε στη συνέχεια δύο αποδείξεις της ίδιας ιδιότητας, οι οποίες θα μας οδηγήσουν να διαπιστώσουμε το εξής πολύ ενδιαφέρον: Τα αραβικά μαθηματικά επηρεάστηκαν από την αποδεικτική μέθοδο των Ελληνικών μαθηματικών αλλά εμφανίζουν στην αποδεικτική διαδικασία του «Πυθαγορείου θεωρήματος» έντονες επιδράσεις από την «αποδεικτική» διαδικασία των Κινέζικων Μαθηματικών.

Ο Al-Kuhi⁸ ήταν δραστήριος κατά τη διάρκεια της βασιλείας της Δυναστείας Buyid στο δεύτερο μισό του 10^{ου} αιώνα μ.Χ., και το έργο του υποστηρίζονταν από τουλάχιστον 3 βασιλείς αυτής της δυναστείας, των οποίων τα χρόνια συνολικά ήταν από το 962 μέχρι 989. Ήταν από τους κορυφαίους μαθηματικούς της εποχής, του οποίου (30 έργα περίπου) ήταν αφιερωμένα στην γεωμετρία στο ευκλείδειο αποδεικτικό ύφος.

Η πραγματεία *Αναθεώρηση του 1^{ου} βιβλίου των Στοιχείων* δεν περιέχει καθόλου ορισμούς ή αξιώματα και ο Al-Kuhi ερευνά και αποδεικνύει απευθείας τις προτάσεις. Φαίνεται ξεκάθαρα από τις αποδείξεις, ότι στηρίζεται στους ευκλείδειους ορισμούς και αξιώματα με μοναδική εξαίρεση το 4^ο αίτημα. Η πραγματεία περιέχει μόνον 29 προτάσεις αντί 48 του Ευκλείδη, γεγονός το οποίο οφείλεται στην απομάκρυνση όλων των κατασκευών.

Για την καλύτερη κατανόηση της δομής της πραγματείας, την χωρίζουμε σε τμήματα

1. Γωνίες και παράλληλοι
2. Ισότητα τριγώνων
3. Πυθαγόρειο θεώρημα
4. Παραλληλόγραμμα

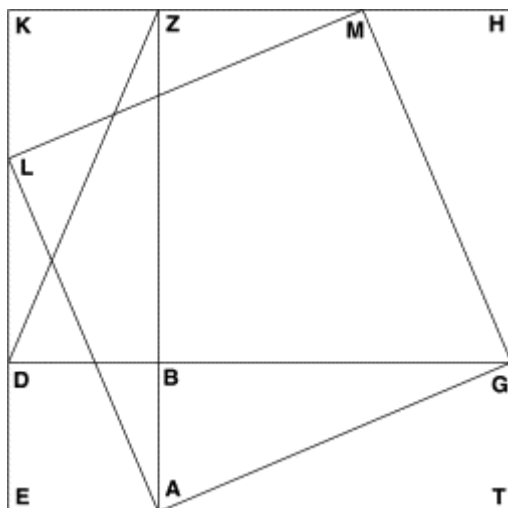
Μια σειρά από μικρότερες πραγματείες του περιέχουν κατασκευές. Η γενικότερη πρακτική του ήταν να εκτελεί τις κατασκευές κάνοντας χρήση των τεχνικών της ανάλυσης και σύνθεσης, προσφεύγοντας (συνήθως έμμεσα) σε προτάσεις των *Δεδομένων* του Ευκλείδη παρά στα *Στοιχεία* για να χτίσει τις αναλύσεις του, οι οποίες χρησίμευαν ως διαγράμματα στο πως θα ολοκληρώσει τις κατασκευές.

Χρησιμοποιεί από πολύ νωρίς, από την πρόταση 5 το αξίωμα των παραλλήλων. Οι προτάσεις είναι πολύ καλά οργανωμένες και ανάμεσά τους περιλαμβάνει προτάσεις οι οποίες δεν περιέχονται στα *Στοιχεία*

Αναθεώρηση του 1ου βιβλίου των Στοιχείων

Πρόταση 19

Αν η γωνία ABG στο τρίγωνο ABG είναι ορθή τότε το τετράγωνο στην AG είναι ίσο με τα τετράγωνα στις AB και BG.



Η Απόδειξη που παραθέτουμε είναι σε συντομία.

Φέρουμε τα τετράγωνα στις πλευρές ABDE και BZHG. Από την πρόταση 3, έχουμε η γραμμή GBD είναι ευθεία, και όμοια ισχύει για την γραμμή ABZ.

Προεκτείνουμε τις AE και GH ώστε να τμηθούν στο T και προεκτείνουμε τις ED και HZ ώστε να τμηθούν στο K. Ορίζουμε L και M θέτοντας $AT = EL = KL$ και φέρουμε AL, LM, MG και DZ (διαμορφώνοντας ένα τετράπλευρο και την πρόσθετη διαγώνιο). Η AB είναι παράλληλη με την GT (έμμεσα από την πρόταση 6) και έχουμε (από την πρόταση 5) $\angle BAG = \angle AGT$, και όμοια $\angle BGA = \angle GAT$. Από την πρόταση 9 (ΓΠΓ εφαρμόζεται στο $\triangle ABG$ και στο $\triangle GTA$, εφόσον έχουν μια κοινή πλευρά AG), συμπεραίνουμε ότι $AT = BG$. Η πλευρά $ET = DG$ και όμοια $EK = AZ$.

Εφόσον $AZ = DG$ έχουμε $TE = EK = KH = HT$ (συνδυάζοντας τις ισότητες).

Ισχύει $\angle ABG = \angle ATG$ (από την πρόταση 9). Εφόσον $\triangle ABG$ είναι ορθή, ισχύει $\angle ATG$; και $\triangle DEA$ είναι ορθή εξ ορισμού. Όμοια, ισχύουν $\angle DKZ$ και $\angle ZHG$.

Ισχύει $\angle ABG = \angle ATG$, και όμοια $\angle DBZ = \angle DKZ$. Εφόσον $AB = DB$, $BG = BZ$, και $\angle ABG = \angle DBZ$ (έμμεσα από την πρόταση 4), τότε από την πρόταση 14 (ΠΓΠ) $\angle ABG = \angle DBZ$.

Τα τέσσερα τρίγωνα είναι ίσα και είναι 4 φορές $4 \cdot \triangle AGT$.

Επίσης, εφόσον $GT (=AB) = AE$, $TA = EL$ και $\angle GTA = \angle AEL$ (εφόσον είναι και οι δύο ορθές), τότε $AG = AL$ (έμμεσα από την πρόταση 14, ΠΓΠ), και όμοια $LM = MG$. Όλες οι τέσσερις πλευρές του τετραπλεύρου ALMG είναι ίσες. Ισχύει $\angle GAT = \angle ALE$, αλλά $\angle ALE$ και $\angle EAL$ αθροίζουν σε μια ορθή γωνία (έμμεσα από την πρόταση 8), έτσι $\angle GAT + \angle EAL = \text{ορθή}$, έτσι (αφαιρώντας αυτό το άθροισμα από $\angle GAT + \angle GAL + \angle EAL$, το οποίο είναι ίσο με δύο ορθές από την πρόταση 2) $\angle GAL$ είναι ορθή. Όμοια, είναι και οι άλλες τρεις γωνίες του τετραπλεύρου ALMG, άρα ALMG είναι τετράγωνο. Ισχύει $\angle GAT = \angle AEL$ και $\angle LKM = \angle MHG$, άρα είναι όλα ίσα και μαζί είναι $4 \cdot \triangle AGT$.

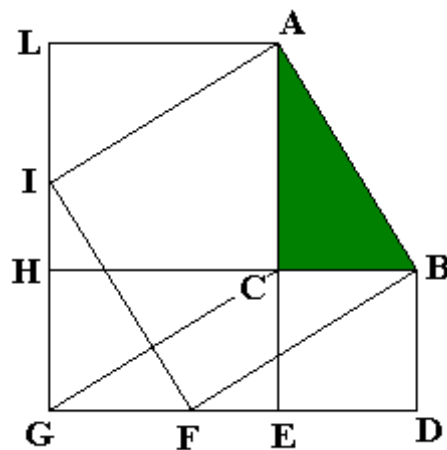
Το τετράπλευρο ΕΚΗΤ = ■AGLM + 4 ■AGT, αλλά ΕΚΗΤ είναι επίσης ίσο με

$$ΕΚΗΤ = ■ΑΕΒΔ + ■ΒΖΗΓ + 4 ■ΑΓΤ.$$

$$\text{Άρα } ■AGLM = ■ΑΕΒΔ + ■ΒΖΗΓ$$

Thabit Ibn Qurra⁹

Ο Thabit Ibn Qurra ήταν προγενέστερος του Al-Kuhi και μας δίνει εν συντομία την ακόλουθη απόδειξη.



Ξεκινώντας από τρίγωνο ABC κατασκευάζουμε ένα μη κανονικό πολύγωνο ABDGLA προσθέτοντας στο τρίγωνο τα τετράγωνα στις καθέτους ALHC και CBDE και το ορθογώνιο HCEG. Αυτό το τελευταίο διαιρείται από τη διαγώνιο GC σε δύο ορθογώνια, ίσα με το τρίγωνο ABC.

Ας πάρουμε LI ίσο με το BC και FD ίσο με το AC, και επίσης τα τρίγωνα ALI και BFD είναι ίσα με το ABC. Όμοια ισχύουν για το τρίγωνο IFG διότι έχουμε GI = AC και GF = BC.

Τέλος, το τετράπλευρο AIFB έχει όλες τις πλευρές ίσες και τη γωνία IAB ορθή, διότι είναι ίση με τη γωνία LAC (οι γωνίες LAI και CAB είναι ίσες και η γωνία IAC είναι κοινή, έτσι AIFB είναι το τετράγωνο στην υποτεινούσα AB.

Σε αυτό το σημείο η απόδειξη είναι άμεση. Στην πραγματικότητα, το μη κανονικό πολύγωνο ABDGLA μπορεί να διαιρεθεί με δύο τρόπους, 1) στα δύο τετράγωνα των καθέτων και στα τρία τρίγωνα ABD, HCG και GCE και 2) στο τετράγωνο της υποτεινουσας και τα τρία τρίγωνα (ίσα με τα προηγούμενα) FBD, IFG και ILA.

Αντί Επιλόγου

Η όλη οργάνωση των αποδείξεων των Al-Kuhi και Thabit Ibn Qurra, μας αφήνει να υποθέσουμε την ύπαρξη προγενέστερης «αποκοπή και επικόλληση» είδους απόδειξη, η οποία μας παραπέμπει στις μεθόδους που αναπτύχθηκαν στο πλαίσιο των κινέζικων μαθηματικών, πριν τοποθετηθεί σε μια παραγωγική δομή. Ο λόγος είναι να δείχθεί ότι μπορεί να αποδειχθεί χωρίς να στηρίζεται (όπως ο Ευκλείδης) σε προτάσεις οι οποίες σχετίζονται σε παραλληλόγραμμα και τρίγωνα μεταξύ παραλλήλων (4^ο τμήμα στην πραγματεία του Al-Kuhi). Παρατηρούμε ότι παρόλο που οι αποδείξεις του Πυθαγορείου θεωρήματος στην αραβική μαθηματική παράδοση στηρίζονται στην προγενέστερη ελληνική γεωμετρική παράδοση, αλλά δεν μεταφράζουν μόνον τα ελληνικά κείμενα αλλά τα αναθεωρούν και τα επαναδομούν με την δική τους, κατά περίπτωση, παραγωγική μέθοδο. Μέσω αυτής της τάσης για αναθεώρηση των γεωμετρικών αποδείξεων στο πλαίσιο της αραβικής γεωμετρίας γενικά αλλά και ειδικότερα σχετικά με το Πυθαγόρειο θεώρημα μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα αραβικά μαθηματικά επηρεάστηκαν από την αποδεικτική μέθοδο των Ελληνικών μαθηματικών αλλά εμφανίζουν στην αποδεικτική διαδικασία του εν λόγω θεωρήματος έντονες επιδράσεις και από την «αποδεικτική» διαδικασία των Κινέζικων Μαθηματικών.

Υποσημειώσεις / Παραπομπές

1. Jean-Pierre Friedelmeyer, Les aires: outil heuristique, outil démonstarif, *Repères*, No31, Avril 1998, p. 39-40.
2. Jean-Pierre Friedelmeyer, ό.π., σελ. 42.
3. John Fauvel & Jeremy Gray, *The History of Mathematics-A reader*, MacMillan Press Ltd. & Open University, 1988, σελ. 32. και http://www2.math.unifi.it/~archimede/archimede_inglese/pitagora/exh_pitagora/scheda3.html
4. Κ. Νικολαντωνάκης, Πυθαγόρειο Θεώρημα: Ένα Παράδειγμα απόδειξης από τα Στοιχεία του Ευκλείδη στο *Επιχείρημα και απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά*. Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης (2003), σελ. 182.
5. Κ. Νικολαντωνάκης, ό.π., σελ. 184-186.
6. Κ. Νικολαντωνάκης, «Παραγωγική και Οπτική Μέθοδος για δραστηριότητες στην διδασκαλία της Γεωμετρίας» στο *Εικόνα, σχήμα και λόγος στη Διδασκαλία των μαθηματικών*, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Α.Π.Θ. (2004), σελ. 145
7. E. Barbin, La démonstration : pulsation entre le visuel et le discursif, in *Produire et lire des textes de démonstrations*, IRM, Université de Rennes, 2000, σελ. 44.
8. J.L. Berggren and Glen Van Brummelen. Al-Kūhī's revision of Book I of Euclid's *Elements*, *Historia Mathematica*, Volume 32, Issue 4, November 2005, σελ. 440.
9. http://www2.math.unifi.it/~archimede/archimede_inglese/pitagora/exh_pitagora/scheda3.html

Βιβλιογραφία

- E. Barbin, La démonstration : pulsation entre le visuel et le discursif, in *Produire et lire des textes de démonstrations*, IRM, Université de Rennes, 2000, σελ. 31-61 .
- J.L. Berggren and Glen Van Brummelen Al-Kūhī's revision of Book I of Euclid's *Elements*, *Historia Mathematica*, Volume 32, Issue 4, November 2005, *Pages* 426-452.

John Fauvel & Jeremy Gray, *The History of Mathematics-A reader-*, MacMillan Press Ltd. & Open University, 1988.

Jean-Pierre Friedelmeyer, Les aires: outil heuristique, outil démonstarif, *Repères*, No31, Avril 1998, p. 39-62.

Κ. Νικολαντωνάκης, «Παραγωγική και Οπτική Μέθοδος για δραστηριότητες στην διδασκαλία της Γεωμετρίας» στο *Εικόνα, σχήμα και λόγος στη Διδασκαλία των μαθηματικών*. Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Α.Π.Θ., 2004, σελ.145-153

Κ. Νικολαντωνάκης, «Πυθαγόρειο Θεώρημα: Ένα Παράδειγμα απόδειξης από τα Στοιχεία του Ευκλείδη» στο *Επιχείρημα και απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά*. Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, 2003, σελ. 179-190.

http://www2.math.unifi.it/~archimede/archimede_inglese/pitagora/exh_pitagora/scheda3.html

ΟΨΕΙΣ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Ιωάννης ΜΙΧΑΛΗΣ

Εκπαιδευτικός, Υποψήφιος Διδάκτωρ ΠΤΔΕ – ΑΠΘ

Εισαγωγή

Εδώ και δυο σχεδόν δεκαετίες, ανά την υφήλιο, τα προγράμματα σπουδών των Μαθηματικών αναμορφώνονται, σε μια προσπάθεια να ανταποκριθούν πληρέστερα στις νέες προσδοκίες που επήλθαν από την αλλαγή της Κοινωνίας και την πορεία προς την εποχή της πληροφορίας.

Μια αξιοπρόσεκτη παράμετρος αυτών των αναμορφώσεων των προγραμμάτων σπουδών αποτελεί ο συνυπολογισμός της Στατιστικής στο περιεχόμενο από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού σχολείου. Δίπλα στους παραδοσιακούς θεματικούς άξονες περιεχομένου (Αριθμητική, Άλγεβρα, Γεωμετρία, Μετρήσεις), και σε ισότιμη βάση, ένας νέος τομέας κάνει την εμφάνισή του:

Διαχείριση Δεδομένων /Data Handling στη Βρετανία (DfES 2001),

Ανάλυση Δεδομένων και Πιθανότητες /Data Analysis & Probabilities στις Η.Π.Α. (NCTM 1989,2000).,

Διαχείριση Δεδομένων και Πιθανότητες /Data Management & Probabilities στον Καναδά (The Ontario Curriculum 1997)

Στατιστική /Statistics στη Νέα Ζηλανδία (Ministry of Education 1993, 1992)

Οργάνωση Πληροφοριών /Organizing Information στην Ισπανία (Costa, 2001),

Πιθανότητες και Δεδομένα /Chance and Data στην Αυστραλία (V.C.A.A. 2002),

Δεδομένα και Προβλέψεις /Data and Predictions στην Ιταλία (Ottaviani et al, 2005),

Διαχείριση Δεδομένων /Handling Data στη Ν. Αφρική (North, 2002),

Επεξεργασία Δεδομένων, Στατιστική και Πιθανότητες /Data processing, Statistics and Probability στη Φινλανδία (Finish National Board of Education, 2004).

Παρά την πληθώρα των υπότιτλων, ο όρος Δεδομένα εμφανίζεται σχεδόν παντού και στην ουσία το περιεχόμενο παραπέμπει κατά μέρος σ' αυτό που παραδοσιακά αποκαλείται Περιγραφική Στατιστική, και δίνει έμφαση στην οργάνωση, περιγραφή, ανάλυση και αναπαράσταση δεδομένων από στατιστικές έρευνες, με εμφανή βαρύτητα στις οπτικές απεικονίσεις όπως είναι τα γραφήματα, τα διαγράμματα και οι γραφικές παραστάσεις (Shaugnessy et al 1996).

Σ' αυτές ακριβώς τις γραφικές απεικονίσεις των δεδομένων (γραφήματα, διαγράμματα και γραφικές παραστάσεις) αναφέρεται η παρούσα εργασία, κάνοντας μια μικρή ιστορική αναδρομή στην πορεία εξέλιξής των και παρουσιάζοντας κάποια από τα γραφικά που έμειναν στην ιστορία για την απλότητα και την πληρότητά τους και αποτέλεσαν πηγή έμπνευσης για πολλούς.

Ο Wainer (1997) στο βιβλίο του **Visual Revelations** "*graphical tales of fate and deception from Napoleon Bonaparte to Ross Perot*", συνοψίζοντας το κεφάλαιο με τίτλο: "*How to display data badly*", απαριθμεί 12 κανόνες επιτυχημένης «γραφικής αποτυχίας». Αντιστρέφοντας τους όρους, επισημαίνει ότι οι κανόνες μιας καλής απεικόνισης είναι απλοί:

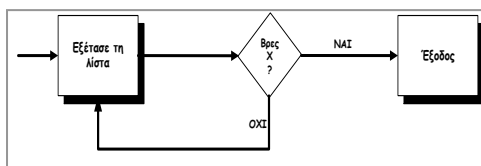
- *Εξέτασε τα δεδομένα αρκετά προσεκτικά ώστε να γνωρίζεις τι έχουν να πουν και μετά άφησέ τα να το πουν με το ελάχιστο σόλισμα.*
- *Στην απεικόνιση της κλίμακας ακολούθησε τις πρακτικές της «λογικής κανονικότητας»*
- *Ετικετοποίησε καθαρά και ολοκληρωμένα και*
- *Τέλος, και πιθανά πιο σημαντικό, ξόδεψε κάποιο χρόνο κοιτάζοντας στην εργασία των πρωτοπόρων της σχεδίασης. Το ξόδεμα μιας ώρας στη μελέτη των εργασιών του Playfair και του Minard δε θα είναι μόνο ωφέλιμο στη γραφική άσκηση αλλά θα αποτελέσει και μια ευχάριστη ενασχόληση. (σελ. 46)*

Αρκετοί μελετητές έχουν επίσης κατά καιρούς επισημάνει ότι η μελέτη της ιστορίας ενός θέματος είναι μια καλή προετοιμασία για τη διδασκαλία αυτού του θέματος (Freudenthal 1983, Radford 2000, Gulikers & Blom 2001). Τα εμπόδια που συνάντησαν οι άνθρωποι κατά το παρελθόν είναι ενδιαφέροντα στους εκπαιδευτικούς και του σχεδιαστές προγραμμάτων σπουδών, γιατί οι μαθητές συχνά έρχονται σε επαφή με παρόμοια. Η μελέτη της ιστορίας μπορεί να μας βοηθήσει να δούμε συγκεκριμένα φαινόμενα με τα μάτια των ανθρώπων που δεν είχαν τις ίδιες αντιλήψεις και τεχνικές που έχουμε εμείς σήμερα. Με την ανάλυση της ιστορικής διαδικασίας ίσως να ανακαλύψουμε διαφορετικές όψεις και δομές των εννοιών που σήμερα μας παρέχονται σαν δεδομένες. Έτσι η θεώρηση από διαφορετική προοπτική μας βοηθά να κατανοήσουμε καλύτερα κάποιες έννοιες και να καθοδηγήσουμε τη διαδικασία μάθησης. Αυτό που σήμερα μπορεί να φαίνεται ένα μικρό βήμα, μπορεί να πήρε αιώνες να αναπτυχθεί και να διαμορφωθεί και προφανώς να είναι δύσκολο να διαμορφωθεί και για τους μαθητές. Η ιστορική μελέτη μπορεί να μας βοηθήσει να διακρίνουμε πολλές και διαφορετικές όψεις, προβλήματα, σχετικές αντιλήψεις και ενδιάμεσα στάδια συγκεκριμένων ιδεών.

Συμβολικές απεικονίσεις

Υπάρχουν τέσσερις κοινοί τύποι συμβολικών απεικονίσεων που διαφέρουν στους όρους ποιων πληροφοριών επικοινωνούν και πως αυτές οι πληροφορίες μεταδίδονται (Kosslyn 1994): τα γραφήματα (graphs), οι διαγραμματικού χαρακτήρα απεικονίσεις – διαγράμματα ροής (charts) και σχηματικά διαγράμματα (diagrams) και οι χάρτες (maps).

Βάση κάποιων ορισμών, ένα *διάγραμμα* θεωρείται κάθε απεικόνιση που έχει ένα συμβολικό περιεχόμενο, στέκεται για κάτι άλλο από

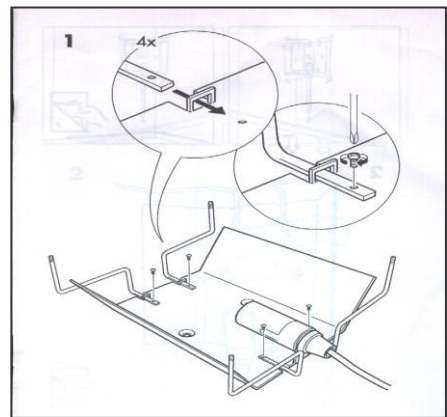


Εικόνα 1: Διάγραμμα ροής

αυτό που στην πραγματικότητα δείχνει. Αυτός ο γενικός χαρακτηρισμός θα περιελάμβανε κάποιους χάρτες πλοήγησης (navigational charts) και τα γραφήματα.

Χρησιμοποιούμε

τον όρο εδώ σε πιο στενό πλαίσιο. Τα διαγράμματα δεν αποδίδουν ποσότητες αλλά σχέσεις, όχι «πόσοι εργάζονται εδώ» αλλά «ποιος εργάζεται για ποιον». Καθορίζουν διακριτές σχέσεις μεταξύ διακριτών οντοτήτων. Έχουν μια εσωτερική δομή στην οποία οι οντότητες θα πρέπει να είναι ορατά συσχετιζόμενες με άλλες οντότητες, με γραμμές ή σχετικές θέσεις που εξυπηρετούν σαν συνδέσεις. Αυτές οι συνδέσεις μπορεί να έχουν ή να μην έχουν ετικέτες, ή και κατεύθυνση (βέλη) και δεν χρειάζονται απλά ζεύγη οντοτήτων.



Εικόνα 2: Σχηματικό

Μια μεγάλη ποικιλία σχέσεων είναι πιθανή (όχι απλά η ζευγαρωτή σχέση που παρασταίνεται στα γραφήματα)

Τα *σχηματικά διαγράμματα* ενσωματώνουν αντικείμενα, όπως τα μέρη μιας μηχανής, ή αφηρημένες έννοιες όπως δυνάμεις που

ενεργούν στα μέρη. Είναι συμβολικά με τον όρο ότι ειδικά σύμβολα χρησιμοποιούνται, που ερμηνεύονται (τουλάχιστον κατά μέρος) με μια σύμβαση. Μια φωτογραφία δεν είναι συμβολική επειδή δε διαθέτει συμβατικές έννοιες αναπαράστασης. Σε αντίθεση με τα γραφήματα, τα μέρη του διαγράμματος αντιστοιχούν στα μέρη κάποιου πραγματικού αντικειμένου ή οντότητας, και σε αντίθεση με τους χάρτες, τα μέρη του διαγράμματος δεν αντιπροσωπεύουν τοποθεσίες ή περιοχές.

Τα *γραφήματα* είναι η πιο διαδεδομένη μορφή συμβολικής απεικόνισης, με τουλάχιστον δυο κλίμακες πάντα να απαιτούνται και τιμές που συνδέονται με σχέση ζευγαρώματος που είναι πάντοτε συμμετρική. Αναπαριστούν μεγαλύτερες ποσότητες μιας μετρήσιμης έννοιας με μεγαλύτερη περιοχή, μακρύτερες γραμμές ή περισσότερο κάποιας άλλης διάστασης. Το περισσότερο κατά μήκος της οπτικής συνέχειας αναπαριστά την περισσότερη συμβολική οντότητα. Οπότε με αυτή τη χρήση, ένα κυκλικό διάγραμμα είναι στην πραγματικότητα γράφημα.

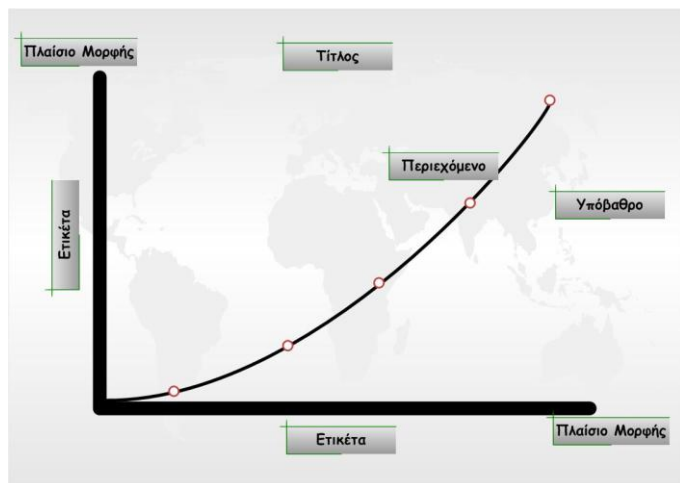
Τέλος οι *χάρτες* είναι σχέδια που λειτουργούν σαν πίνακες ενός φυσικού σχεδίου: τα χαρακτηριστικά ενός δωματίου, της πόλης, της γης, του ουρανού όλα μπορούν να χαρτογραφηθούν. Σαν στυλιτισμένες εικόνες μιας περιοχής, παρέχουν πληροφορίες για τοποθεσίες και σχέσεις μεταξύ αυτών (συνήθως με όρους σχετικών αποστάσεων). Χρησιμοποιώντας συμβατικά σύμβολα μπορούν επίσης να παρέχουν ποσοτικές πληροφορίες όπως μέση θερμοκρασία, ή κατανομή πληθυσμού.

Γραφήματα

Ένα γράφημα είναι μια οπτική απεικόνιση που επεξηγεί και εικονογραφεί μια ή περισσότερες σχέσεις μεταξύ αριθμών (Kosslyn 1989, 1994). Είναι ένα λιτό (περιεκτικό και σύντομο) μέσο παρουσίασης πληροφοριών.

Όλα τα γραφήματα, ασχέτως τύπου και μορφής αποτελούνται από τα ίδια συστατικά μέρη. Τυπικά έχουν τρία πρωταρχικά στοιχεία:

το πλαίσιο μορφής, το περιεχόμενο και τις ετικέτες. Έτσι γυμνώνοντας ένα γράφημα από τα δεδομένα του (εικόνα 3), έχουμε το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, που συναντήσαμε όλοι κάποια στιγμή στο σχολείο.



Εικόνα 3: Μέρη γραφήματος

Το πλαίσιο μορφής του γραφήματος θέτει τη σκηνή υποδεικνύοντας τι είδους μετρήσεις έχουν γίνει (κάθετος άξονας, άξονας τιμών) καθώς επίσης και τι μετρήθηκε (οριζόντιος άξονας, άξονας κατηγοριών). Το απλούστερο αλλά

και πιο κοινό πλαίσιο μορφής έχει τη μορφή του λατινικού κεφαλαίου γράμματος **L**.

Το *περιεχόμενο* είναι οι γραμμές, οι ράβδοι, τα σημεία, ή άλλα σύμβολα που καθορίζουν συγκεκριμένες σχέσεις μεταξύ των οντοτήτων που αναπαριστώνται στο πλαίσιο μορφής. Οι θέσεις των στοιχείων του περιεχομένου παρασταίνονται ως τιμές κατά μήκος του άξονα y και ζευγαρώνονται με τις τιμές ή τις κατηγορίες κατά μήκος του άξονα x .

Οι *ετικέτες* συνίστανται από γράμματα, λέξεις, αριθμούς ή εικόνες και παρέχουν ερμηνεία μιας γραμμής, ή ενός άξονα, ή μιας περιοχής (που είναι στοιχείο είτε του πλαισίου είτε του περιεχομένου). Στο πλαίσιο με μορφή «L» κάθε άξονας έχει και μια ετικέτα που ονοματίζει τον τύπο μέτρησης που έγινε ή τα δεδομένα στα οποία εφαρμόστηκε η μέτρηση. Στις ετικέτες συμπεριλαμβάνεται και ο τίτλος του γραφήματος.

Τα γραφήματα επίσης μπορεί να περιλαμβάνουν έναν αριθμό προαιρετικών στοιχείων. Για παράδειγμα, κάποια γραφήματα μπορεί να περιλαμβάνουν *εσωτερικές συντεταγμένες γραμμές* (εσωτερικό σύστημα συντεταγμένων). Αυτές οι γραμμές εκτείνονται μέσα στο πλαίσιο μορφής (εσωτερικό πλαίσιο) σε τακτά διαστήματα, είτε οριζόντια είτε και κάθετα είτε και στις δυο κατευθύνσεις και κάνουν ευκολότερο τον καθορισμό κατά μήκος από ένα σημείο του άξονα του πλαισίου μορφής στο στοιχείο περιεχομένου κι από εκεί στο αντίστοιχο σημείο του άλλου άξονα του πλαισίου. Οι συντεταγμένες γραμμές πολλές φορές μπορεί να είναι χρήσιμες στον αναγνώστη επειδή πληροφορίες για τη θέση και τη μορφή δε συνδυάζονται αυτόματα στο μυαλό μας.

Κάποια γραφήματα επίσης περιλαμβάνουν *υπόβαθρο, υπομνήματα και λεζάντες*. Το *υπόβαθρο* δεν εξυπηρετεί κάποιον σημαντικό ρόλο στην επικοινωνία συγκεκριμένων πληροφοριών της απεικόνισης. Απλά μπορεί κάποιες φορές να κάνει μια απεικόνιση πιο φανταστική και πιο ελκυστική ή άλλες να παρεμποδίζει την κατανόησή της. Το *υπόμνημα* είναι ένα σχόλιο στην απεικόνιση, μια λιτή περιγραφή που εξηγεί όρους κλειδιά ή κατευθύνει την προσοχή του αναγνώστη σε συγκεκριμένα χαρακτηριστικά της απεικόνισης.

Τα γραφήματα έχουν συγκεκριμένα πλεονεκτήματα από άλλες συνοπτικές απεικονίσεις (πίνακες) και τις άλλες αριθμητικές ή λεκτικές τεχνικές (περιγραφικά μέτρα κεντρικής τάσης και διασποράς):

Επικοινωνούν γρήγορα και απευθείας, είναι δυναμικά καθώς παρέχουν έμφαση σε ολοκληρωμένα, συνεκτικά και αποφασιστικά μηνύματα, είναι πιο πειστικά και πιο αποκαλυπτικά, μπορούν εύκολα να ξεκαθαρίσουν τα δεδομένα, και συχνά φέρνουν στο φως κρυμμένα γεγονότα και σχέσεις διεγείροντας την αναλυτική σκέψη και έρευνα και εξαιτίας της εμφάνισής των προσελκύουν την προσοχή και κρατούν το ενδιαφέρον του αναγνώστη.

Ιστορική ανασκόπηση

Από τις ζωγραφιές που βρέθηκαν σε σπήλαια φαίνεται ότι οι πρόγονοί μας κρατούσαν αρχεία για το μέγεθος των κοπαδιών τους ζωγραφίζοντας απλές εξιδανικευμένες μορφές. Αυτή η απλούστευση, αργότερα αντικαταστάθηκε με τη Σαιξπηρική καταγραφή (III) και τελικά από την αφηρημένη μορφή «4 πρόβατα». *«Η πορεία από την πιστή (κυριολεκτική) στην αφαιρετική αναπαράσταση της πληροφορίας χαράσσει και την ιστορία της γραφικής απεικόνισης»* (Wainer 1997).

Η ιστορία των ποσοτικών γραφικών, κατά τους Beniger και Robyn (1978), μπορεί να χωριστεί σε τέσσερα στάδια που αντιστοιχούν σε ισάριθμες χρονικές περιόδους και χαρακτηρίζονται από κύρια γραφικά προβλήματα που απασχολούσαν τους μελετητές της κάθε περιόδου:

Χωρική οργάνωση (Spatial organization), 17^{ος} – 18^{ος} αιώνας

Διακριτή σύγκριση (Discrete comparison), 18^{ος} – αρχές 19^{ου} αιώνα

Συνεχής κατανομή (Continuous distribution), 19^{ος} αιώνας

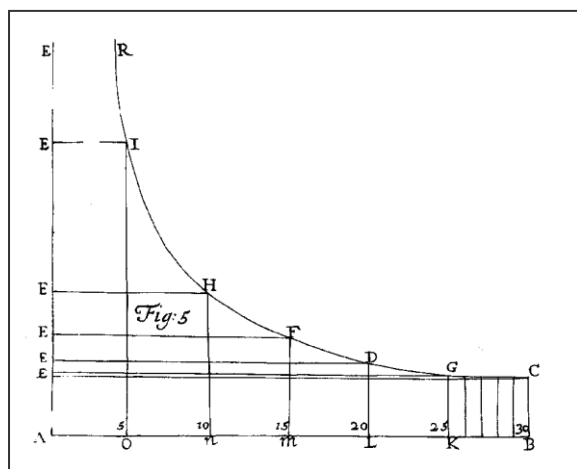
Κατανομή και συσχέτιση πολλαπλών μεταβλητών (Multivariate distribution and correlation), τέλος 19^{ου}- 20^{ος} αιώνας

Το πρώτο πρόβλημα ανέκυψε από την μεγάλη ποσότητα των δεδομένων προς ανάλυση. Η χωρική οργάνωση πολλαπλών μετρήσεων επιτεύχθηκε με δυο ανταγωνιστικούς τρόπους: τα συστήματα συντεταγμένων και τους πίνακες, που κυριάρχησαν στα ποσοτικά γραφικά το 17^ο και 18^ο αιώνα.

Ο χάρτης αποτελεί την πιο πρώιμη σχηματική αναπαράσταση του χώρου. Το γεωμετρικό διάγραμμα, που είναι πιο αφαιρετικό, εμφανίστηκε αργότερα. Η χαρτογραφία και η Γεωμετρία ήταν ιστορικά οι πιο σημαντικές όψεις της γραφικής ανάπτυξης. Η Γεωμετρία αναπτύχθηκε για να συμπεριφερθεί στο χώρο σαν μια αγνή αφαίρεση, ισότιμη με τον αριθμό. Η αναλυτική Γεωμετρία που αναπτύχθηκε από τον Καρτέσιο το Fermat και άλλους

γάλλους μαθηματικούς στο πρώτο μισό του 17^{ου} αιώνα συντέλεσε στην δημιουργία του συστήματος συντεταγμένων. Άλλα, διαγραμματικά κατά μέρος στο χαρακτήρα τους, γραφικά συστήματα, είναι η μουσική σημειογραφία και τα συστήματα αστρολογικών και χημικών συμβόλων.

Η συστηματοποίηση των διαγραμματικών μορφών του χώρου από τον Καρτέσιο το 1637, στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, ήταν μια ενσωμάτωση των γεωμετρικών και αλγεβρικών συστημάτων και αποτελεί σύμφωνα με τους περισσότερους μελετητές το, διανοητικά, πιο σημαντικό και χρήσιμο από τα συστήματα διαγραμματικών γραφικών (Funkhouser 1937, Beniger & Robyn 1978). Πρόσφατη εργασία (Biderman 1978) ερμηνεύει αυτό με ακριβώς αντίθετο τρόπο, σαν ένα διανοητικό εμπόδιο, κι αυτό γιατί το καρτεσιανό σύστημα κυριάρχησε στις διανοητικές αντιλήψεις του τι ήταν γράφημα και ποια ήταν η χρήση του, δηλαδή «**η απεικόνιση των μαθηματικών συναρτήσεων που καθορίζει τη συμπεριφορά των αντικειμένων στο χώρο και στο χρόνο**» κάτι που λειτούργησε ανασταλτικά για σχεδόν ενάμιση αιώνα στην αντίληψη ότι το γράφημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για κάτι άλλο. Η πρώτη κύρια επιτυχία χρήσης του συστήματος ανήκει στον Edmund Haley, ο οποίος παρέστησε τη βαρομετρική πίεση σαν συνάρτηση του υψομέτρου το 1686 (Beniger & Robyn 1978).



Εικόνα 4: Γραφική παράσταση του Haley

Το σύστημα συντεταγμένων και η γραφική ανάλυση εν γένει επισκιάστηκαν από τους στατιστικούς πίνακες και το συνοπτικό συμπέρασμα, εξαιτίας κυρίως μιας ομάδας κοινωνικών επιστημόνων με την ονομασία Die Tabellen-Statistic στη Γερμανία στις αρχές του

17^{ου} αιώνα που έγινε αργότερα γνωστή σαν «Πολιτική Αριθμητική» (Political Arithmetic) στη Βρετανία μετά το 1687. Αυτές οι κινήσεις πήραν ώθηση από την αυξημένη συλλογή και δημοσίευση στατιστικών δεδομένων για τον πληθυσμό, την έκταση και την αγροτική παραγωγή κύρια για το σκοπό της φορολόγησης των νέων κρατών στην Ευρώπη.

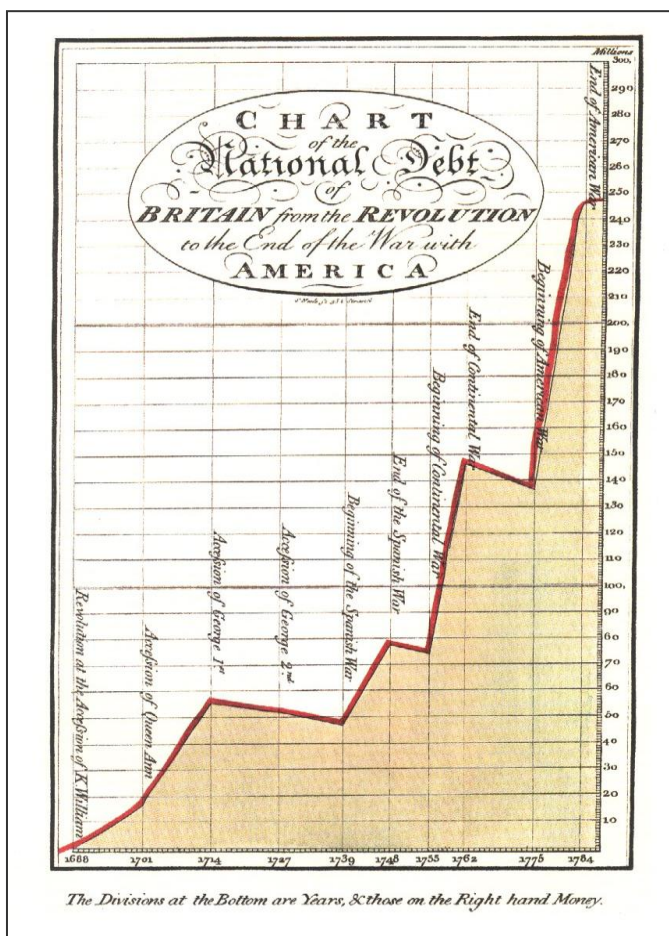
Το δεύτερο πρόβλημα, αυτό της διακριτής ποσοτικής σύγκρισης, ανέκυψε από αυτές ακριβώς τις στατιστικές του κράτους, στις αρχές του 18^{ου} αιώνα, που δημιούργησαν την ανάγκη για γραφικές συγκρίσεις. Υπήρχε μια αύξηση στην αποδοχή της εμπειρικής προσέγγισης στην επιστήμη σαν ένα σημαντικό μέρος της επιστημονικής διαδικασίας. Δεδομένα συλλεγόταν σε όλο και μεγαλύτερες ποσότητες και η επιτυχία της εμπειρικής διαδικασίας στη λύση σημαντικών πρακτικών προβλημάτων είχε διαδοθεί.

Περί τα τέλη του 18^{ου} αιώνα (1786) ο Σκωτσέζος φιλόσοφος και μαθηματικός, William Playfair (1759-1823), εξέδωσε τον Οικονομικό και Πολιτικό Χάρτη της Αγγλίας και Ουαλίας (Economic and Political Atlas of England and Wales) που παρά τον τίτλο του, δεν περιείχε καθόλου χάρτες, αλλά αντίθετα, όμορφα σχέδια των περισσότερων από τις κοινές γραφικές μορφές που χρησιμοποιούμε σήμερα. Σαράντα τέσσερα γραφήματα, με δεδομένα από τις εισαγωγές και εξαγωγές της Αγγλίας, Σκωτίας και Ουαλίας με 17 χώρες, όλα, εκτός από ένα, τύποι του στατιστικού χρονικού γραφήματος γραμμής. Τα γραφήματα του Playfair ήταν πολύπλοκα, πλούσια σε λεπτομέρειες και καλά κατασκευασμένα. Όχι άδικα λοιπόν, θεωρείται ο βασικός εφευρέτης των στατιστικών γραφημάτων. Αν και κάποιος μπορεί να επισημάνει ότι μεμονωμένα παραδείγματα υποτυπωδών γραφημάτων προηγήθηκαν της εργασίας του, τέτοια παραδείγματα γενικώς δεν ήταν εξεζητημένα και απέτυχαν να επηρεάσουν άλλους. Εμφανίζονταν τακτικά σε αρκετές εκδόσεις για μια περίοδο πάνω από 30 χρόνια και εισήγαγαν μια εκπληκτική ποικιλία επινοήσεων και τεχνικών που χρησιμοποιούνται ακόμη και σήμερα.

Ο W. Playfair ήταν τόσο πεπεισμένος ότι είχε βρει τον καλύτερο τρόπο απεικόνισης οικονομικών δεδομένων, που πέρασε σχεδόν 40 χρόνια από τη ζωή του προσπαθώντας να επηρεάσει τους άλλους να ακολουθήσουν το παράδειγμά του. Ήταν ανεπιτυχής στην προσπάθειά του να πείσει το ακαδημαϊκό κατεστημένο οπότε και οι ανακαλύψεις του περίμεναν σχεδόν έναν αιώνα πριν υιοθετηθούν ευρέως, κύρια λόγω της υιοθέτησής των από τους Bertillon και Minard.

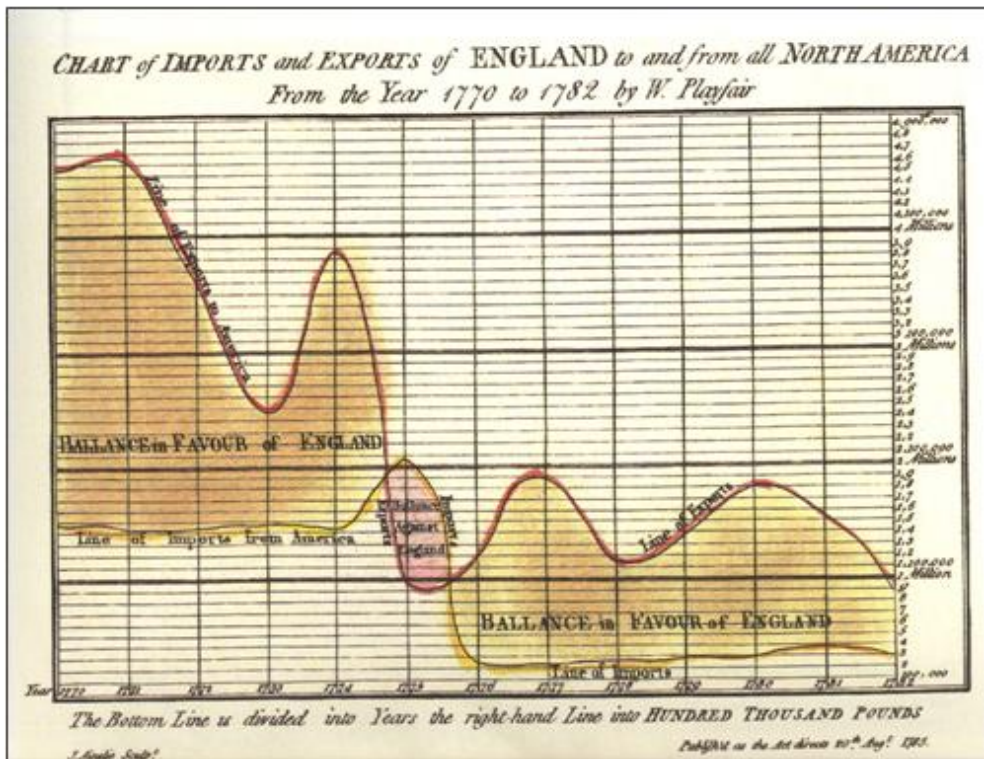
Εφηύρε τρεις από τις τέσσερις βασικές μορφές γραφημάτων που χρησιμοποιούνται ακόμη και σήμερα. Το στατιστικό γράφημα γραμμής, το ραβδόγραμμα και το κυκλικό διάγραμμα. Η άλλη σημαντική βασική μορφή (γράφημα διασποράς) δεν εμφανίστηκε παρά μόνο έναν αιώνα αργότερα.

Το χρονικό γράφημα γραμμής (time-series line graph)



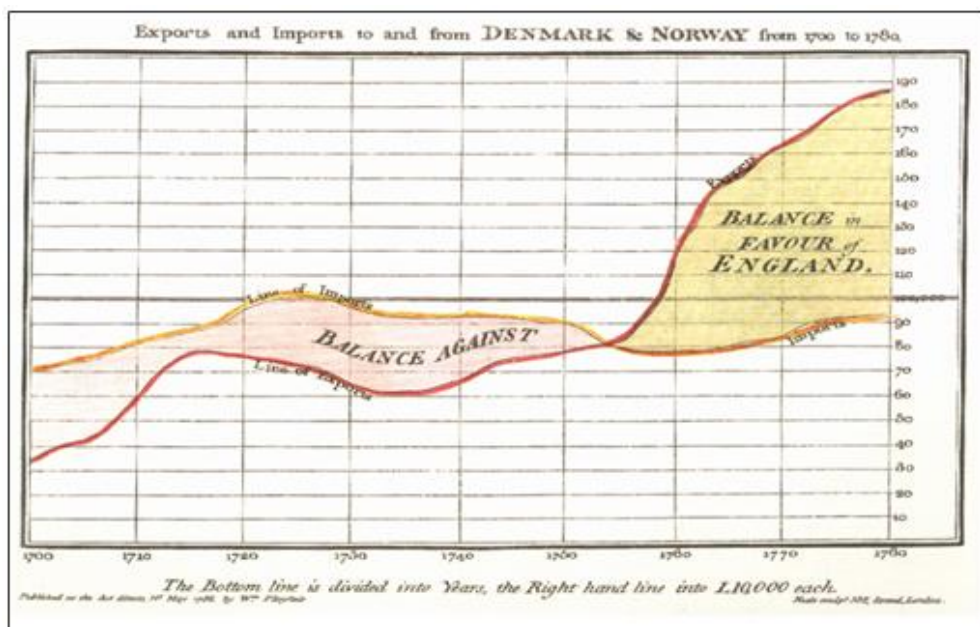
Εικόνα 4: Γράφημα Γραμμής του Playfair με το εθνικό χρέος της Αγγλίας από το 1688 μέχρι το 1884 (Από Tufte 1983)

Όπως προαναφέρθηκε, τα 43 από τα 44 γραφήματα που εξέδωσε στον Άτλα του ο Playfair ήταν γραφήματα γραμμής στα οποία η μια μεταβλητή πάντα ήταν ο χρόνος. Απέδωσε την έμπνευση που τον οδήγησε στο γράφημα γραμμής στον αδερφό του John (γνωστό μαθηματικό της εποχής), ο οποίος τον προέτρεπε να καταγράφει καθημερινά τη θερμοκρασία και να γραφικοποιεί τα δεδομένα με παρόμοιο τρόπο. Ο John Playfair ήταν εξοικειωμένος με τη χρήση των Καρτεσιανών γραφημάτων για την αναπαράσταση συναρτήσεων και επίσης γνώριζε την εργασία του Lambert που τοποθέτησε σημεία εμπειρικών δεδομένων σε τέτοιες συναρτήσεις.



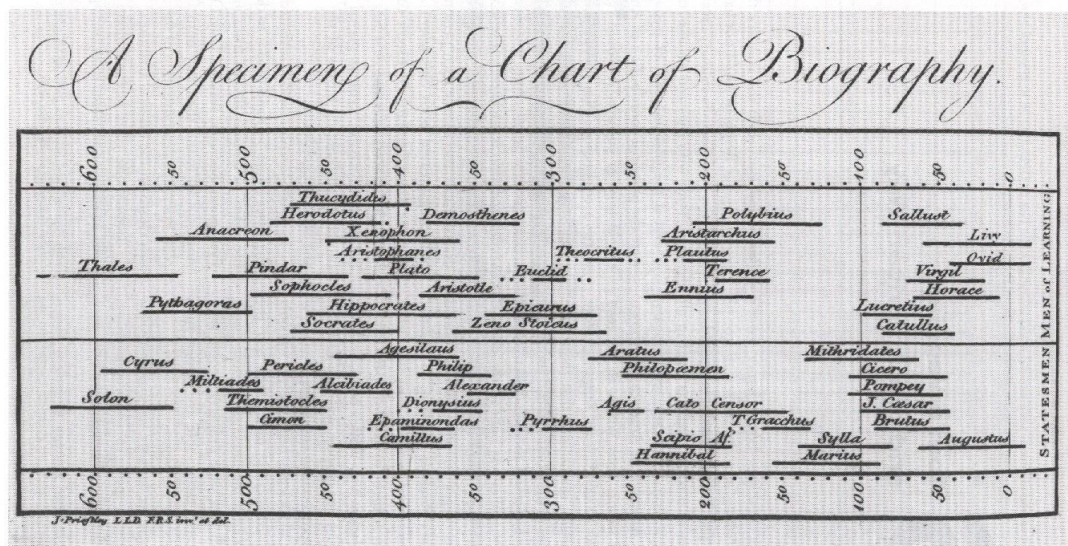
Εικόνα 5: Γράφημα Γραμμής του Playfair με τις εισαγωγές και εξαγωγές της Αγγλίας με τη Βόρεια Αμερική από το 1770 μέχρι το 1780 (Από Tufte 2001)

Αυτά τα διαγράμματα εισήγαγαν ένα μεγάλο αριθμό καινοτόμων χαρακτηριστικών: σταδιακοί και ετικετοποιημένοι άξονες, κανονισμένες συντεταγμένες (gridlines) με μεγαλύτερο βάρος γραμμής για τα κύρια διαστήματα, διακεκομμένες και συμπαγείς ή διαφορετικού χρώματος γραμμές για το διαχωρισμό χρονικών σειρών διαφόρων ειδών, σκίαση με διαγραμμάτωση, συμπαγές γέμισμα και χρώμα για επίδειξη περιοχών που αναπαριστούν συγκεντρωμένες ποσότητες, τα χρώματα πράσινο και κόκκινο που επιδεικνύουν θετικά και αρνητικά ισοζύγια, κατάλληλα τοποθετημένες ετικέτες που επιδεικνύουν ιστορικά γεγονότα κ.ο.κ.



Εικόνα 6: Γράφημα Γραμμής του Playfair με τις εισαγωγές και εξαγωγές της Αγγλίας με τη Δανία και Νορβηγία (Από Tufte 2001)

Άλλη μια επιρροή μπορεί να βρεθεί μια δεκαετία πριν στην εργασία του Joseph Priestley που επινόησε την αναπαράσταση του χρόνου γεωμετρικά. Η χρήση των συντεταγμένων με το χρόνο στον οριζόντιο άξονα, ήταν μια επαναστατική ιδέα και η αναπαράσταση των περιόδων μοναρχών με ράβδους διαφορετικού μήκους επέτρεψε την άμεση οπτική σύγκριση που διαφορετικά θα

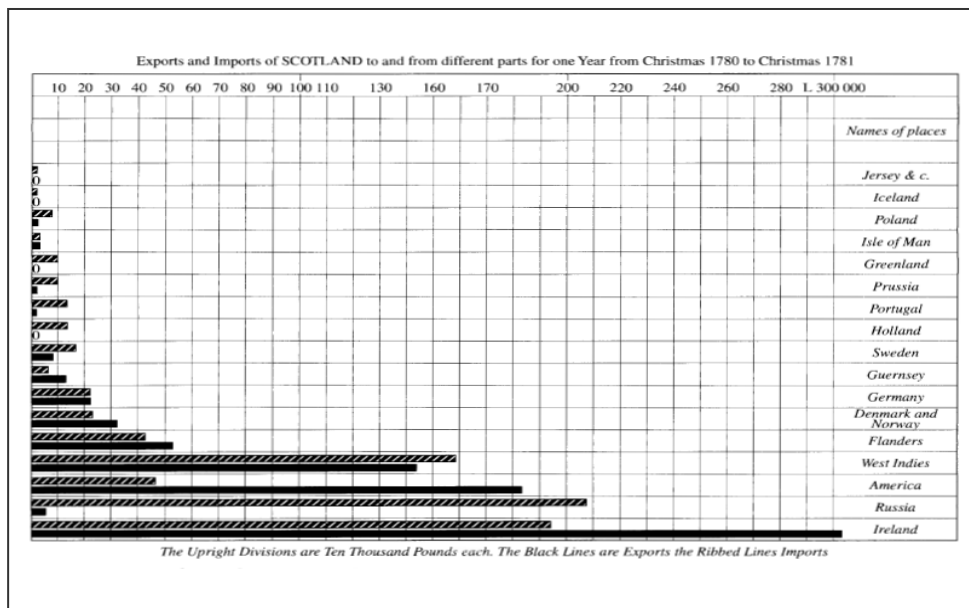


Εικόνα 7: Χρονικό διάγραμμα του Priestley (Από Wainer 1997)

απαιτούσε σημαντική πνευματική αριθμητική. Περαιτέρω, οι σχετικές διαφορές στις χρονικές περιόδους και η σχετική τους θέση στη γενική χρονολογία μπορούσε επίσης να κατανοηθεί γρήγορα. Το 1765 χρησιμοποίησε ένα είδος ραβδογράμματος, για να αναπαραστήσει τη διάρκεια ζωής περίπου 2000 διάσημων ανθρώπων που έζησαν από το 1200 π.Χ. ως το 1750 μ.Χ.. Κατά περίεργο τρόπο θεώρησε απαραίτητο να γράψει αρκετές σελίδες που δικαιολογούσε και εξηγούσε την παρουσίαση του χρόνου με μια γραμμή στο γράφημά του.

Το ραβδόγραμμα

Ο Playfair παραδέχτηκε τα χρονολογικά διαγράμματα του Priesley σαν την πηγή του απλού ραβδογράμματος που εμφανίστηκε στον Άτλα του. Η ειρωνεία είναι ότι κατέληξε σ' αυτή τη μορφή γραφήματος γιατί δεν είχε αρκετά δεδομένα ώστε να παρουσιάσει ένα χρονικό διάγραμμα και έτσι θα έπρεπε αναγκαστικά να βρει μιαν άλλη μορφή στην οποία ο οριζόντιος άξονας δε θα αναπαριστούσε τη ροή του χρόνου. Έτσι παρέστησε τα δεδομένα

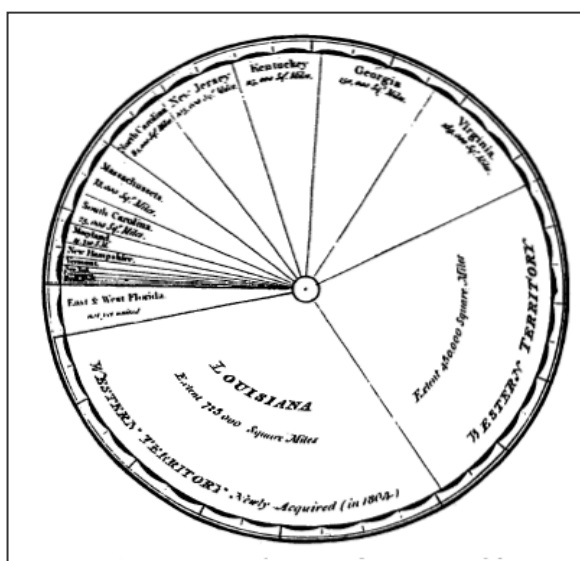


Εικόνα 8: Ραβδόγραμμα του Playfair (Από Spence & Wainer 2005)

που είχε (από εισαγωγές και εξαγωγές ενός χρόνου της Σκωτίας με 17 χώρες) χρησιμοποιώντας 34 ράβδους (δύο για κάθε χώρα). Θεώρησε επίσης αναγκαίο να απολογηθεί γι' αυτή του την πράξη, ενώ αντίθετα στην δεύτερη έκδοση του Άτλαντα το 1801, ανέφερε αυτή τη μορφή γραφήματος σαν τη βάση της γραφικής του μεθόδου, που την αποκάλεσε "Lineal Arithmetic" – «κατ' ευθείαν γραμμή Αριθμητική»

Το κυκλικό διάγραμμα (πίτα)

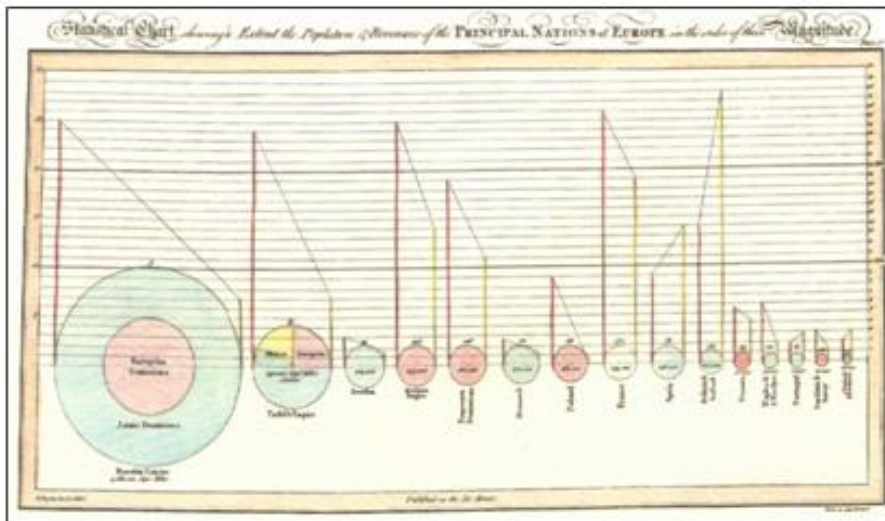
Αν και στο γράφημα γραμμής και στο ραβδόγραμμα χρησιμοποίησε γραμμική προέκταση για να αναπαραστήσει ποσότητα, στην επόμενη έκδοσή του χρησιμοποίησε άλλα μέσα. Το



Εικόνα 9: Πίτα του Playfair (Από Spence & Wainer 2005)

έργο του Statistical Breviary (1801), περιείχε διαγράμματα που απέβλεπαν στην επίδειξη περιοχών, πληθυσμών και εσόδων των ευρωπαϊκών κρατών (Spence & Wainer 2005). Με δυο σχετικά διαγράμματα εισήγαγε τρεις νέες μορφές στατιστικών γραφημάτων: το κυκλικό διάγραμμα, την πίτα και το διάγραμμα τύπου Venn που χρησιμοποιείται για να δείξει κάποιες κοινές ιδιότητες.

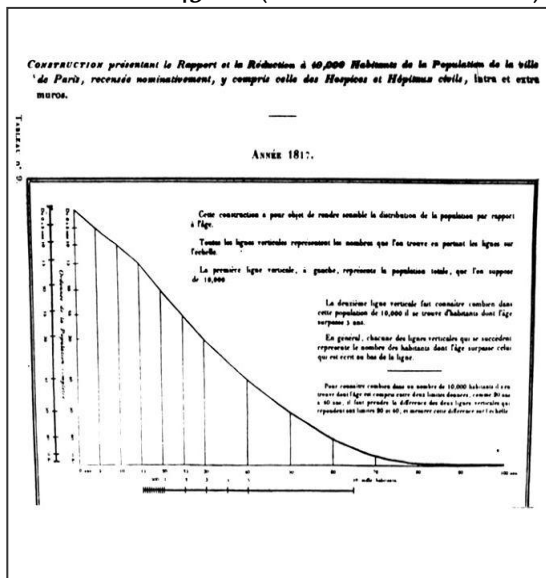
Οι περιοχές του κύκλου που χρησιμοποιούνται στην αναπαράσταση διαφορετικών ποσοτήτων και η πρακτική χρήσης κύκλων ή περιοχών ή άλλων χαρακτηριστικών επικρατεί μέχρι και σήμερα. Στην πίτα χρησιμοποίησε τη γωνία για να δείξει αναλογία και χρώμα και ετικέτες για να διαφοροποιήσει τα κομμάτια που κάνουν το όλο. Η χρήση των διαγραμμάτων Venn για



Εικόνα 10: Κυκλικό διάγραμμα και διάγραμμα τύπου Venn του Playfair (Από Tufte 2001)

την επίδειξη στατιστικών ποσοτήτων, είναι λιγότερο κοινή και σήμερα και τότε, αλλά η μορφή δεν ήταν άγνωστη. Όπως και να έχει, η πίτα παραμένει ένα μυστήριο. Ο Playfair δεν άφησε καμιά ένδειξη για την έμπνευσή του. Οι Euler και Leibniz χρησιμοποιούσαν τέτοια διαγράμματα στις εργασίες τους στη λογική και στον Αριστοτελικό συλλογισμό πολύ πριν από τον Playfair, ενώ αργότερα τα χρησιμοποίησε και ο Venn (1834-1923). Αυτή η εργασία ήταν γνωστή στον αδερφό του Playfair.

Περίπου στις αρχές του 19^{ου} αιώνα (1820), η ανάπτυξη της λεγόμενης δημογραφικής Στατιστικής (Vital Statistics) δημιούργησε το τρίτο πρόβλημα, της αναπαράστασης συνεχών κατανομών. Η λύση ήρθε από τον Fourier και το πρώτο γράφημα κατανομής αθροιστικής συχνότητας που αργότερα ο Galton (1875) αποκάλεσε “ogive”. Ο A.M. Guerry αργότερα χρησιμοποίησε δεδομένα από εγκλήματα σε ραβδόγραμμα κανονίζοντας τα σε ταξινομημένες κατηγορίες για συνεχείς μεταβλητές (ηλικία, μήνας) για να φτιάξει το ιστόγραμμα. Ο όρος «ιστόγραμμα» χρησιμοποιήθηκε πρώτα από τον Karl Pearson το 1895 σε ομιλία του για τα στατιστικά γραφήματα.

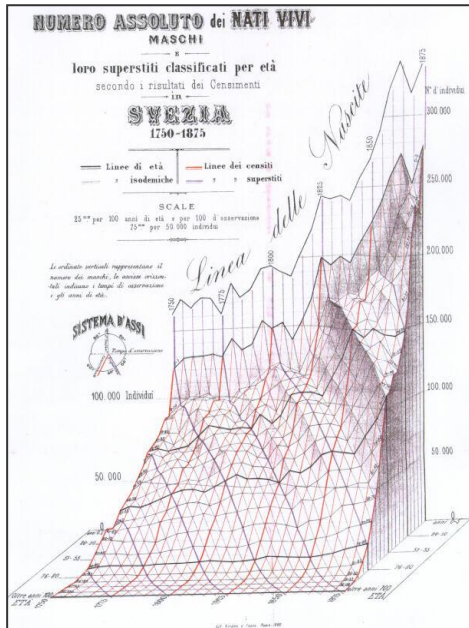


Εικόνα 11: Γράφημα γραμμής με αθροιστική συχνότητα κατανομής του Fourier

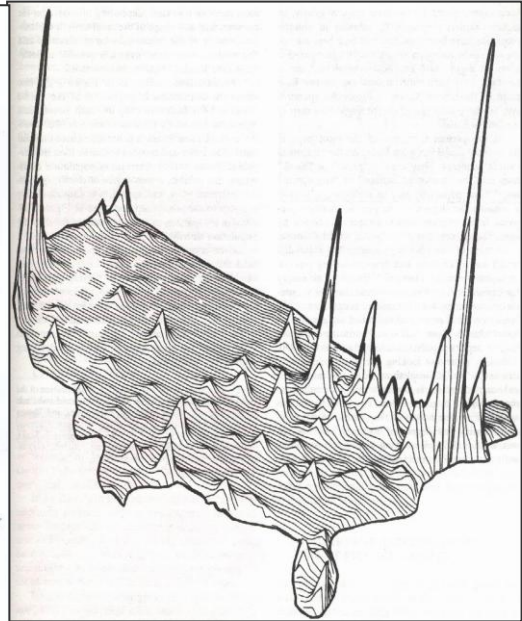
Μέχρι τα 1850 τα ποσοτικά γραφικά είχαν γίνει αποδεκτό μέρος της Στατιστικής. Και από το 1857, στο 3^ο διεθνές συνέδριο Στατιστικής (Βιέννη) έγινε συζήτηση για τη θεσμοθέτηση και ταξινόμηση των γραφικών μεθόδων.

Την ίδια περίπου εποχή η δημογραφική Στατιστική ενέπλεκε αλληλοσχέσεις τουλάχιστον τριών μεταβλητών: πληθυσμός, ηλικία, χρόνος, γεγονός που οδήγησε στο γραφικό πρόβλημα αναπαράστασης κατανομών και σχέσεων πολλαπλών μεταβλητών. Στα 1874 ο Francis Galton δημοσιεύει το πρώτο γράφημα διασποράς που παράστανε τη σχέση μεταξύ μεγέθους κεφαλής και ύψους. Δέκα χρόνια αργότερα, έχουμε και την εμφάνιση του εικονογραφήματος, μια συγκριτική μορφή που βασίζεται σε παρόμοια σχέδια διαφορετικού μεγέθους που αναπτύχθηκε από

τον M.G. Mulhall για την έκδοσή του “Dictionary of Statistics” το 1884.



Εικόνα 12: Στερεογράμμα



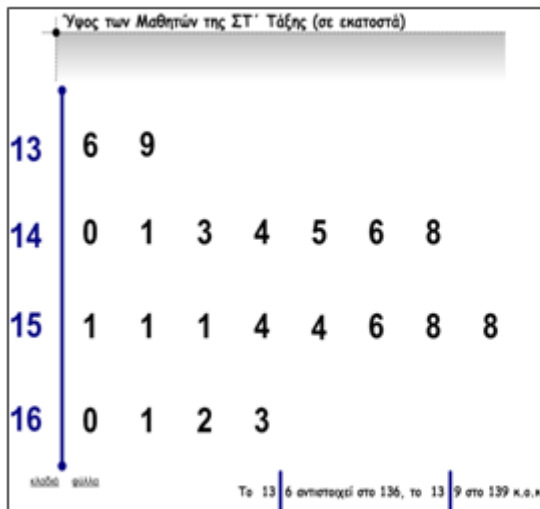
Εικόνα 13: Υψομετρικός χάρτης (Από Schmid 1983)

Δυο γενικές λύσεις απασχόλησαν τους στατιστικούς τον 20^ο αιώνα: ο υψομετρικός χάρτης και τα στερεογράμματα. Στις αρχές του 20^{ου} αιώνα τα στατιστικά γραφικά είχαν αρχίσει να διαδίδονται σε βιβλία, εκπαιδευτικές σειρές και στα ΜΜΕ.

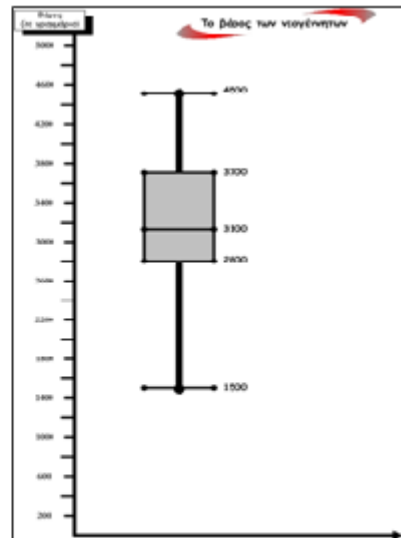
Τα στατιστικά γραφήματα μπορούν να παραστήσουν δυο κύριες λειτουργίες: παρουσίαση κι ανάλυση. Η διάκρισή τους βασίζεται στο σκοπό και την έμφαση. Μερικές φορές κι οι δυο είναι τόσο αναπόσπαστα αλληλοσχετιζόμενες που είναι δύσκολο να διακρίνει κάποιος διαφορές.

Γενικά, όταν σκοπός ενός γραφήματος είναι η επεξήγηση, η περιγραφή, η αποσαφήνιση, η ερμηνεία και μετάδοση πληροφοριών, η πρωταρχική λειτουργία τους είναι η παρουσίαση.

Όταν υπάρχει μια συγκεκριμένη εφαρμογή γραφικών τεχνικών σ' ένα καλά ορισμένο στατιστικό πρόβλημα όπου η εξερεύνηση, η μέτρηση, ο υπολογισμός και η άντληση σχέσεων είναι οι βασικοί σκοποί, τότε η αναλυτική λειτουργία υφίσταται. Συγκεκριμένα,



Εικόνα 15: Φυλλογράφημα με το ύψος μαθητών



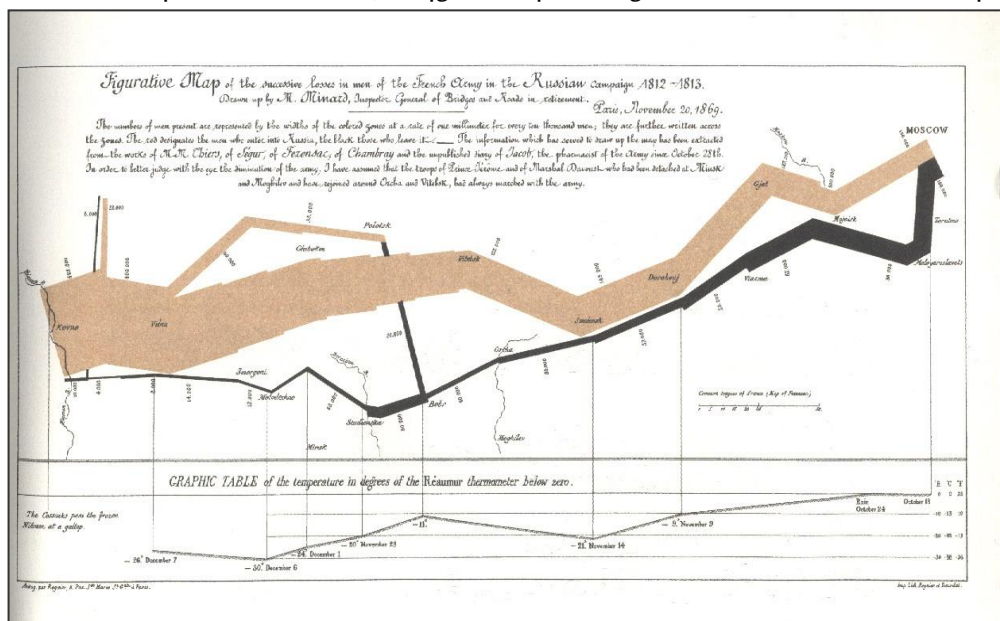
Εικόνα 15: Θηκογράφημα με το βάρος νεογέννητων

σχετικά πρόσφατα, η σημασία των γραφημάτων σαν αναλυτικά εργαλεία πιστοποιήθηκε από αρκετά άρθρα και βιβλία. Κύριος εκφραστής αυτής της θεώρησης είναι η John Tukey (1976), ο οποίος είναι ο εμπνευστής της προσέγγισης «Εξερευνητική Ανάλυση Δεδομένων» – Exploratory Data Analysis (EDA). Η προσέγγιση αυτή στηρίζεται στην αναζήτηση μορφών και προτύπων στα δεδομένα συνδυασμένη με αποτελεσματικές απεικονίσεις αυτών των προτύπων. Οι περισσότεροι τύποι αυτών των απεικονίσεων, όπως το φυλλογράφημα και το θηκόγραμμα, αναπτύχθηκαν από τον Tukey τη δεκαετία του '70.

Τρία παραδείγματα εξαιρέτων γραφικών

Ο Charles Joseph Minard (1781-1870), Γάλλος πολιτικός μηχανικός, έμεινε στη ιστορία για την ανάπτυξη των θεματικών χαρτών στους οποίους τοποθέτησε στατιστικές πληροφορίες σε

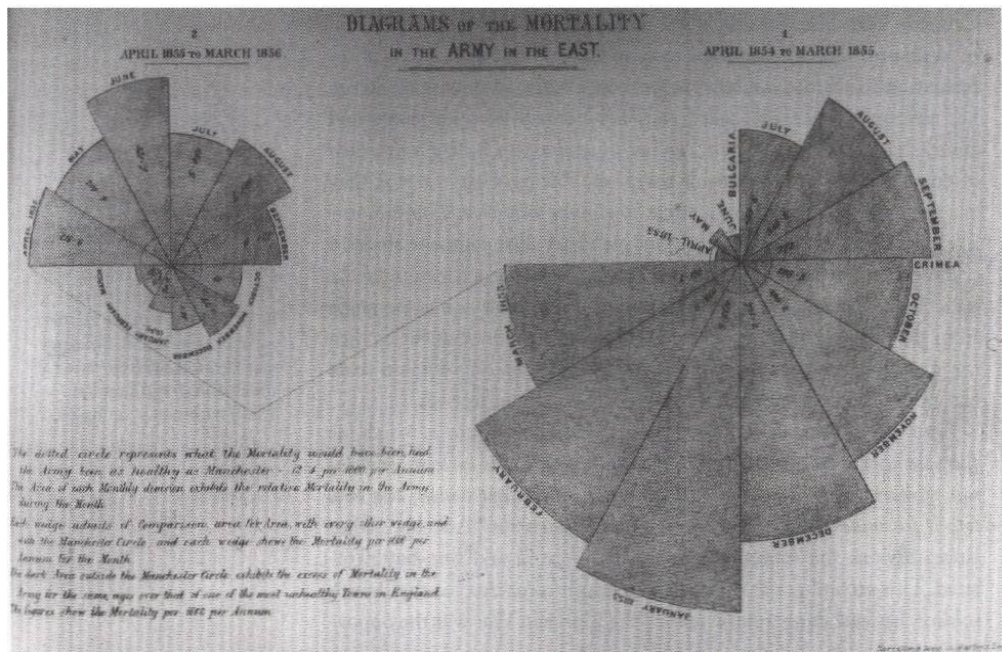
γεωγραφικό υπόβαθρο. Τα περίφημα γραφικά του χρησιμοποιούν τη γραφική μεταφορά ενός ποταμού του οποίου το πλάτος είναι αναλογικό της ποσότητας των δεδομένων που παρασταίνονται. Το 1869, βάση αυτής της τεχνικής, κατασκεύασε ένα γράφημα που αναπαριστά την κίνηση του στρατού του Ναπολέοντα (422.000 άνδρες) από τη στιγμή που πέρασε τα Ρωσο-Πολωνικά σύνορα μέχρι τη Μόσχα και την επιστροφή του τον Ιούνιο του 1812. Όταν έφτασε στη Μόσχα το Σεπτέμβριο είχαν απομείνει 100.000. Κατά την επάνοδό του στην Πολωνία μόνο 10.000 είχαν απομείνει. Η απεικόνιση του Minard, της εκστρατείας του Ναπολέοντα στη



Εικόνα 13: Γράφημα του Minard που παριστάνει την εκστρατεία του Ναπολέοντα στη Ρωσία (Από Tufte 2001)

Ρωσία, έχει χαρακτηριστεί ίσως το καλύτερο στατιστικό γραφικό που έχει σχεδιαστεί κι αυτό κύρια λόγω της σημασίας και της πληρότητας των δεδομένων. Μια απλή σελίδα αποδίδει 6 μεταβλητές και λέει την υποβλητική ιστορία για το που και πως χιλιάδες ανθρώπων πέθαναν. Η παραβολή της επιστρεφόμενης γραμμής (ροής) μ' αυτήν που αναχώρησε μετρά την τραγωδία.

Η Florence Nightingale (1820-1910) χρησιμοποίησε στατιστικά γραφήματα αποτελεσματικά στην προσπάθειά της να βελτιώσει τις υγειονομικές συνθήκες του βρετανικού στρατού μετά τον πόλεμο της Κριμαίας. Σχεδίασε μια σειρά από γραφήματα που είναι μια ποικιλία της πίτας του Playfair. Αυτά τα γραφήματα (η ίδια τα ονόμαζε “coxcombs”) ενώ σήμερα συχνά αποκαλούνται τα τριαντάφυλλα της Nightingale, μοιάζουν με τα κυκλικά γραφήματα στο ότι χρησιμοποιούν την περιοχή τμημάτων του κύκλου για να αποδώσουν ποσότητες.

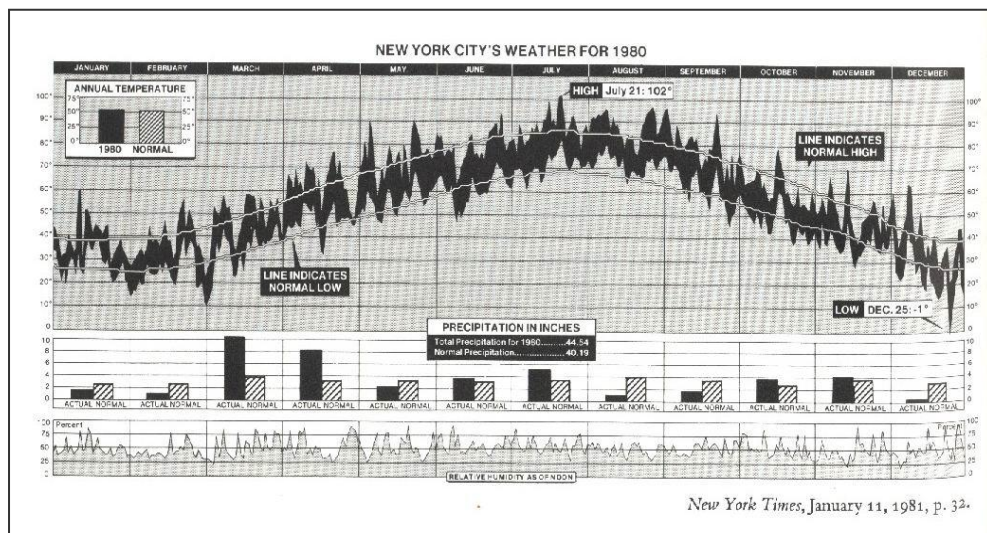


Εικόνα 14: Το τριαντάφυλλο της Nightingale (Από Spence & Wainer 2005)

Σ’ ένα τριαντάφυλλο κάθε τμήμα διατηρεί την ίδια γωνία, αλλά είναι η τετραγωνική ρίζα της ακτίνας που ποικίλλει με τα δεδομένα. Το πιο διάσημο γράφημά της μας επιτρέπει:

«να εκτιμήσουμε πόσο υπέρμετρο ήταν το ποσοστό θνησιμότητας που προκλήθηκε από τις συνθήκες του πρώτου χειμώνα και πόσο χαμηλά έπεσε κάτω από τις υγειονομικές συνθήκες του καλοκαιριού».

Στο γράφημα στην εικόνα παρακάτω (New York Times, January 11, 1981 p.32) παρασταίνονται 1888 αριθμοί που αντιστοιχούν στις καθημερινές υψηλές και χαμηλές θερμοκρασίες σε σχέση με το μέσο όρο, τη σχετική υγρασία και τη μέση μηνιαία βροχόπτωση. Κατά τον Tufte (2001) το γράφημα αυτό οργανώνει επιτυχώς ένα μεγάλο σύνολο αριθμών, κάνει συγκρίσεις μεταξύ διαφορετικών όψεων των δεδομένων και λέει μια ιστορία



Η σύγχρονη εποχή

Σήμερα, η αναλυτική λειτουργία των γραφημάτων έχει αυξηθεί ως προς τη σημαντικότητα με την ταχεία εξέλιξη και εφαρμογή των Η/Υ των τελευταίων χρόνων. Δεν μιλάμε πια για στατιστικά γραφικά, αλλά περισσότερο για οπτικοποίηση των δεδομένων. Δεκάδες εφαρμογές λογισμικού παρέχουν μια μεγάλη ποικιλία γραφικών και για παρουσίαση και για ανάλυση. Οι περισσότερες όμως απ' αυτές τείνουν προς τη φτωχή σχεδίαση και αποτυγχάνουν να βελτιώσουν την εικόνα τους ή την επικοινωνία τους. Αυτή η φτωχή σχεδίαση είναι άμεσο αποτέλεσμα του γεγονότος ότι τα περισσότερα γραφικά των Η/Υ προετοιμάζονται από προγραμματιστές, ερευνητές, μάνατζερ ή υπαλληλικό προσωπικό

με λίγη ή καθόλου εκπαίδευση στη γραφική σχεδίαση. Κι όταν βρισκόμαστε αντιμέτωποι με την πρόκληση να κάνουμε ένα γράφημα, συχνά χρησιμοποιούμε το εξ ορισμού (default) στυλ και σχεδίαση που διατίθεται με κάθε λογισμικό. Αλλά πολλά απ' αυτά τα εξ ορισμού γραφικά αναπτύχθηκαν από προγραμματιστές που δεν είχαν προηγούμενη εμπειρία στη σχεδίαση γραφημάτων.

Τα στατιστικά γραφήματα χρησιμοποιήθηκαν στο σχολείο για πρώτη φορά στη Γαλλία το 1868 ενώ στη Αμερική έκαναν την εμφάνισή τους σε βιβλία από το 1910 μέχρι το 1918. Στη χώρα μας υπάρχουν σχετικές αναφορές στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών των Μαθηματικών από παλιότερα αναλυτικά προγράμματα (του 1977-Γραφικές παραστάσεις στην ΣΤ' τάξη), αλλά και στο νέο Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών και το Διαθεματικό (ΥΠΕΠΘ 1997, ΦΕΚ 1376 - 2001) και ειδικότερα «ερμηνεία γραφικών παραστάσεων» στην Δ' τάξη και «ερμηνεία και κατασκευή γραφικών παραστάσεων» στην Ε' και ΣΤ' τάξεις. Σε κάποια σχετικά μαθήματα στα βιβλία των Μαθηματικών της Ε' και ΣΤ' τάξης, υπάρχουν δραστηριότητες για την κατασκευή γραφικών απεικονίσεων (ραβδόγραμμα).

Στη σύγχρονη κοινωνία, η αποτελεσματικότητα στην επικοινωνία προϋποθέτει την κτήση των τεσσάρων βασικών διανοητικών ικανοτήτων (Schmid 1983): literacy, numeracy, articulacy και graphicacy – γραμματισμός, αριθμητισμός, άρθρωση και γραφικισμός - ή σε περισσότερο περιγραφικό επίπεδο: βασικές ικανότητες γραφής και ανάγνωσης, ικανότητα επικοινωνίας με αριθμούς και άλλες μαθηματικές σημειογραφίες, ικανότητα προφορικής επικοινωνίας και τέλος ικανότητα επικοινωνίας με οπτικό τρόπο. Ο «γραφικισμός» (graphicacy) στα παιδιά προηγείται του αριθμητισμού (Wainer 2005). Ένα παιδί μπορεί να αναγνωρίσει ότι το ένα τρίτο είναι μεγαλύτερο από το ένα τέταρτο από μια πίτα πολύ πριν να είναι ικανό να το καθορίσει αυτό από μια αριθμητική αναπαράσταση ενός κλάσματος. Αυτό είναι αποτέλεσμα της δύναμης των γραφικών.

Δυστυχώς όμως δεν δίνεται η δέουσα προσοχή από το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών στις γραφικές απεικονίσεις ούτε στη βασική εκπαίδευση αλλά ούτε και στην ανώτερη, κι όταν αυτό, εν μέρει γίνεται, η προχειρότητα και η επιφανειακή αντιμετώπιση είναι το μέτρο (ελάχιστα μαθήματα στο τέλος του βιβλίου των Μαθηματικών, διάσπαρτες έννοιες ασύνδετες με το όλο πλαίσιο, βιβλιοκεντρική αντιμετώπιση της διδασκαλίας κ.ο.κ.).

Ιστορία των γραφημάτων (κυρίως από Beniger & Robyn 1978)	
17 ^{ος} αιώνας	Πίνακες εμπειρικών δεδομένων (Die Tabellen-Statistic) Γερμανία
1636	Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (R. Descartes)
1686	Γραφική παράσταση βαρομετρικής πίεσης και υψομέτρου (E. Haley)
1765	Χρονική γραμμή (J. Priestley)
1786	Γράφημα γραμμής και Ραβδόγραμμα (Playfair)
1801	Πίτα και κυκλικό γράφημα (Playfair)
1821	Αθροιστική συχνότητα (Fourier)
1833	Ιστογράμμα (Guerry)
1874	Υψομετρικός χάρτης (L. Vauthier)
1874	Γράφημα διασποράς (F. Galton)
1879	Στερεόγραμμα (Luigi Perozzo)
1884	Εικονογράφημα (M.G. Mulhall)
1969	Θηκόγραμμα και φυλλογράφημα (Tukey)

Μια αναλυτική παρουσίαση της ιστορίας των στατιστικών γραφικών, της θεματικής χαρτογραφίας και της οπτικοποίησης των δεδομένων με όλη τη σχετική βιβλιογραφία και περιεχόμενο (κείμενα, εικόνες, σχεδιαγράμματα και συνδέσεις) μπορεί να ανακτηθεί από το διαδίκτυο στη διεύθυνση:

<http://www.math.yorku.ca/SCS/Gallery/milestone/index.html>

Βιβλιογραφία

- Australian Education Council (1994). *Mathematics-A Curriculum Profile for Australian Schools*. Carlton, Vic: Curriculum Corporation
- Beniger, J.R. & D.L. Robyn (1978). *Quantitative graphics in Statistics: A brief history*. American Statistician, 32: 1-10
- Biderman, A.D. (1978). *Intellectual impediments to the development and diffusion of statistical graphics, 1637-1980*. Paper presented at First General Conference on Social Graphics. Leesburg, VA
- Costa A. (2001). Statistical contents in primary education. *European conference days on statistics "The teaching and diffusion of statistics"*
- Department for Education and Skills (2001). *The National Numeracy Strategy Framework*. London: HMSO
- Finish National Board of Education (2004). National Core Curriculum for Basic Education 2004. Finland: Helsinki
- Freudenthal, H. (1983). The implicit philosophy of mathematics: History and education. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (pp. 1695-1709). Warsaw.
- Funkhouser, H. G. (1937). *Historical development of the graphic representation of statistical data*. Osiris 3: 269-404
- Gulikers, I., & Blom, K. (2001). "A historical angle", a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 223-258.
- Kosslyn S. M. (1989). *Understanding charts and graphs*. Applied Cognitive Psychology, 3, 185-226.
- Kosslyn S. M. (1994). *Elements of Graph Design*. New York.: W H Freeman
- Ministry of Education (1993). *The New Zealand Curriculum Framework*. Wellington: Learning Media.
- http://www.minedu.govt.nz/web/downloadable/dl3526_v1/MATH_NZC.pdf
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM
- North D. (2002). Statistics at Foundation School Level in South Africa. *Proceedings of the 6th International Conference of Teaching Statistics*. Durban: ISI/IASE

- Ottaviani, M.G. & S.R. Luchini (2005). *"Data and Predictions" Emerging as One of the Basic Themes in the Mathematical Curriculum of the First Cycle School Level in Italy*. IASE Round Table Conference on Curricular Development in Statistics Education. Lund, Sweden 2004
- Playfair, W. (1786). *The Commercial and Political Atlas*. Corry, London
- Playfair, W. (1801). *The Commercial and Political Atlas*. 3rd Ed. John Stockdale, London
- Playfair, W. (1801). *The Statistical Breviary*. T. Bensley, London
- Radford, L. (2000). Historical formation and student understanding of mathematics. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Schmid, C.F. (1983). *Statistical Graphics*. N.Y.: A Wiley-Interscience Publication
- Shaughnessy, J. M. & Garfield, J. & Greer, B. (1996). "Data Handling", in A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, C. Laborde (Eds), *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands. Part 1, pp. 205-237
- Spence, I. & Wainer, H. (2005). *Playfair, William*. Encyclopedia of Social Measurement, Vol. III, Elsevier Inc.
- The Ontario Curriculum, (1997). Grades 1-8: *Mathematics*, Ottawa, Canada
<http://www.edu.gov.on.ca/eng/document/curricul/curr97ma/curr97m.html>
- Tufte, E.R. (2001). *The Visual Display of Quantitative Information*. Connecticut: Graphic Press LLC
- Tukey, J. W. (1977). *Exploratory Data Analysis*. Reading, MA: Addison-Wesley
- Wainer, H. (2005). *Graphic Discovery: A Trout in the Milk and Other Visual Adventures*. Princeton University Press
- Wainer, H. (1997). *Visual Revelations: Graphical Tales of Fate and Deception from Napoleon Bonaparte to Ross Perot*. N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, Inc
- ΦΕΚ 1376, (2001). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών. Αθήνα
- ΥΠΕΠΘ, (1997). Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών. Αθήνα