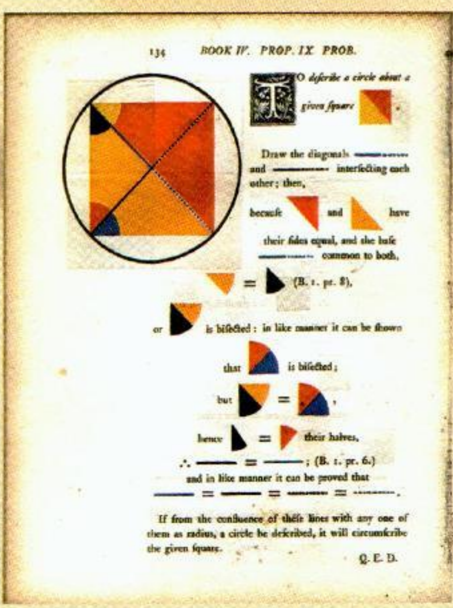
ΕΙΚΟΝΑ, ΣΧΗΜΑ ΚΑΙ ΛΟΓΟΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΧΑΣΑΠΗΣ
Επιμέλεια


134 BOOK IV. PROP. IX. PROB.

TO deſcribe a circle about a given ſquare .

Draw the diagonals and interſecting each other; then,

becauſe and have their ſides equal, and the baſe common to both,

= (B. 1. pr. 8),

or is biſected: in like manner it can be ſhown

that is biſected;

but = ,

hence = their halves,

∴ = ; (B. 1. pr. 6.)

and in like manner it can be proved that

= = = .

If from the confluence of theſe lines with any one of them as radius, a circle be deſcribed, it will circumſcribe the given ſquare.

Q. E. D.

3ο Διήμερο Διαλόγου
για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών
12 & 13 Μαρτίου 2004

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης
Διδασκαλείο Δημοτικής Εκπαίδευσης 'Δημήτρης Γληνός'

ΕΙΚΟΝΑ, ΣΧΗΜΑ ΚΑΙ ΛΟΓΟΣ
ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Επιμέλεια: ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΧΑΣΑΠΗΣ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 2004 1η ΕΚΔΟΣΗ ΕΝΤΥΠΗ

ΑΘΗΝΑ 2020 2η ΕΚΔΟΣΗ CD

Εκτύπωση: Copy City
ΚΙΤΡΟΥΣ ΕΠΙΣΚΟΠΟΥ 7
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ
τηλ.: 2310 203566
e-mail: copycity@the.forthnet.gr www.copycity.gr

Η εικόνα του εξωφύλλου είναι από το βιβλίο του Oliver Byrne: The First Six Books of the Elements of Euclid (1847).

ISBN: 960-87530-8-2

Π ε ρ ι ε χ ό μ ε ν α

ΕΝΟΤΗΤΑ Ι
Σημειωτικές όψεις της μαθηματικής εκπαίδευσης

ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙ
Εικόνα, σχήμα και λόγος στη διδασκαλία των μαθηματικών: Ερευνητικές διαπιστώσεις και διδακτικές προτάσεις

ΕΝΟΤΗΤΑ III
Εικόνα, σχήμα και λόγος στα μαθηματικά: Ιστορικά ζητήματα

ΕΝΟΤΗΤΑ IV
Υλικό αναφοράς

Εισαγωγικό Σημείωμα

Οι σημειωτικές όψεις της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών τοποθετούνται τα τελευταία χρόνια στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος ερευνητών και εκπαιδευτικών με συνεχώς αυξανόμενη συχνότητα, όπως προκύπτει από τα θέματα των άρθρων που δημοσιεύονται στα περιοδικά και των εισηγήσεων που παρουσιάζονται στα συνέδρια της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Με αφετηρία διαφορετικές θεωρητικές οπτικές, πλήθος ερευνών και αναλύσεων επικεντρώνονται στις λειτουργίες των εικόνων, των σχημάτων, των συμβόλων, του λόγου και γενικότερα όλων των συστατικών στοιχείων της παραγωγής νοημάτων και της επικοινωνίας (τα οποία χαρακτηρίζονται με τον ευρύτερο όρο 'σημειωτική'), που αναπτύσσονται μέσα από τις τυπικές και άτυπες διαδικασίες μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών και υπογραμμίζουν τη σημασία και τους όρους της παραγωγής και της επικοινωνίας των μαθηματικών νοημάτων.

Με δεδομένα ότι οι άνθρωποι οργανώνουν και αποδίδουν νοήματα στα στοιχεία του κόσμου της καθημερινότητας μέσα από τη χρήση σημείων και ότι οι μαθηματικές δραστηριότητες αναπτύσσονται μέσα από ένα ευρύ φάσμα συμβολικών δραστηριοτήτων, οι σημειωτικές οπτικές προσφέρουν σημαντικές δυνατότητες προσέγγισης της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών συνδυάζοντας κοινωνικούς παράγοντες με στοιχεία της ανθρώπινης ατομικότητας.

Η ανάδειξη και συζήτηση των ζητημάτων αυτών με έμφαση στο ρόλο και στις λειτουργίες των εικόνων, των σχημάτων, των συμβόλων και του λόγου που χαρακτηρίζουν τη διδασκαλία των μαθηματικών αποτέλεσε τον κύριο στόχο του 3^{ου} Διημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών με θέμα «Εικόνα, Σχήμα και Λόγος στη Διδασκαλία των Μαθηματικών, που οργανώθηκε στις 12 και 13 Μαρτίου 2004 στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Διδασκαλείο Δημοτικής Εκπαίδευσης 'Δημήτρης Γληνός' του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.

Στην παρούσα έκδοση περιλαμβάνονται τα κείμενα των εισηγήσεων που παρουσιάστηκαν στο Διήμερο αυτό, όπως επίσης και κείμενα υποστήριξης μιας παραπέρα μελέτης των συναφών ζητημάτων.

Για την Οργανωτική Επιτροπή
Δημήτρης Χασάπης
Επίκουρος Καθηγητής Π. Τ. Δ. Ε. του Α. Π. Θ.

ΕΝΟΤΗΤΑ Ι

Σημειωτικές όψεις της μαθηματικής εκπαίδευσης

Σημειωτικές προσεγγίσεις της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών: μια σκιαγράφηση του πεδίου

Δημήτρης Χασάπης
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Ένα εισαγωγικό σχόλιο

Η μαθηματική εκπαίδευση, ως επιστημονικό πεδίο, παρουσίασε μια αξιοσημείωτη ανάπτυξη, ιδιαίτερα κατά τις τρεις τελευταίες δεκαετίες. Ένα σημαντικό πλήθος εμπειρικών ερευνών, αλλά και θεωρητικών αναλύσεων, διερεύνησαν τη δραστηριότητα της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών από πολλές οπτικές, επιχειρώντας να εντοπίσουν, να αναλύσουν, να ερμηνεύουν και τελικά να ελέγξουν τους καθοριστικούς παράγοντες διαμόρφωσης των βασικών χαρακτηριστικών τους. Παρά τα δεδομένα αυτά όμως, σημαντικές όψεις της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών παραμένουν αδιευκρίνιστες και πολλά συναφή ερωτήματα παραμένουν αναπάντητα. Η αμηχανία των ερευνητών της μαθηματικής εκπαίδευσης και ο προβληματισμός των εκπαιδευτικών μπροστά σε προβλήματα κατανόησης (με την τρέχουσα σημασία του όρου) θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών, όπως για παράδειγμα του κλάσματος ή μπροστά σε δυσχέρειες «εφαρμογής» των μαθηματικών εννοιών για την επίλυση προβλημάτων αριθμητικής, παραμένουν στο ακέραιο παρά την πληθώρα των διαθέσιμων ερευνητικών διαπιστώσεων, των θεωρητικών επεξεργασιών, αλλά και των πρακτικών διδακτικών προτάσεων.

Τα βασικά χαρακτηριστικά της ερευνητικής παραγωγής στο πεδίο της έρευνας της μαθηματικής εκπαίδευσης αναδεικνύονται με σαφήνεια μέσα από την έρευνα των Lerman & Τσατσαρώνη (στον παρόντα τόμο). Όμως, πέρα από τις συγκεκριμένες διαπιστώσεις αυτής και άλλων συναφών αναλύσεων των χαρακτηριστικών της έρευνας στο πεδίο της μαθηματικής εκπαίδευσης (π.χ. Chassapis 2002, Hanna & Sidoli 2002, Kieran 1995, Lubienski & Bowen 2000), φαίνεται ότι υφίσταται ένα γενικότερο πρόβλημα: τα θεωρητικά πλαίσια μέσα στα οποία αναπτύχθηκαν οι κυρίαρχες προσεγγίσεις των ερευνητικών ζητημάτων της μαθηματικής εκπαίδευσης αποδεικνύονται τελικά προβληματικά, τουλάχιστον ως προς την επάρκεια τους να εντοπίσουν, να αναλύσουν και να ερμηνεύσουν τα συνιστώντα στοιχεία της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Οι κυρίαρχες προσεγγίσεις εντοπίζονται ή στις νοητικές δομές και λειτουργίες ή στη συμπεριφορά των ατόμων, οπότε και αντιμετωπίζουν τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών μέσα από μια πρωτίστως, αν όχι αποκλειστικά, ψυχολογική οπτική, αγνοώντας το κοινωνικό τους πλαίσιο και τον διαπροσωπικό τους χαρακτήρα. Παράλληλα, οι μη κυρίαρχες σήμερα προσεγγίσεις υπεραξιώνουν το κοινωνικό πλαίσιο της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών, παραβλέποντας τις υποκειμενικές λειτουργίες ιδιοποίησης της μαθηματικής γνώσης, οπότε και αδυνατούν τελικά να προσφέρουν μια συνολική θεώρηση των συναφών ζητημάτων, υπερβαίνοντας τη διχοτομία ατομικού και κοινωνικού με τρόπο προσιδιάζοντα στο περιεχόμενο και στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Στη βάση αυτή και υπό την επίδραση των γενικότερων ανακατατάξεων που σημειώνονται τα τελευταία χρόνια στη διαμόρφωση των ιδεών εισάγονται οι σημειωτικές προσεγγίσεις στο πεδίο της μαθηματικής εκπαίδευσης, ως προοπτική σύνθεσης και υπέρβασης των προσεγγίσεων που επιγραμματικά προαναφέρθηκαν. Οι προσεγγίσεις αυτές επικεντρώνονται στα χαρακτηριστικά των μαθηματικών σημείων ως συστημάτων παραγωγής νοημάτων και στη χρήση τους στο κοινωνικά προσδιορισμένο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης για την υποκειμενική παραγωγή μαθηματικών νοημάτων από τους δασκάλους και τους μαθητές. Επιδιώκουν, δηλαδή, να συνδυάσουν τις ατομικές και τις κοινωνικές διαστάσεις της μαθηματικής δραστηριότητας, θεωρούμενες ως αμοιβαία εξαρτώμενες και συστατικές όψεις της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών (Ernest 2002).

Τα αντικείμενα και η φιλοσοφία των σημειωτικών προσεγγίσεων

Οι σημειωτικές προσεγγίσεις μελετούν το αντικείμενό τους ως ένα σύστημα σημείων. Ως ένα σύστημα, δηλαδή, το οποίο περιλαμβάνει:

- Ένα σύνολο σημείων, δηλαδή στοιχείων οι εκφράσεις των οποίων έχουν φυσική μορφή λέξεων, εικόνων, ήχων, ενεργειών, ή αντικειμένων (σημαίνοντα), αναφέρονται σε κάτι άλλο από τον εαυτό τους (σημαινόμενα) και αναγνωρίζονται από τους χρήστες του συστήματος των σημείων σε ένα πλαίσιο χρήσης του (Turner 1992).
- Ένα σύνολο σχέσεων ανάμεσα στα σημεία αυτά, το οποίο βασίζεται σε ένα υποκείμενο νοηματικό πλαίσιο μέσα στο οποίο εντάσσονται τα σημεία και αποκτούν νόημα. Ένα σημείο, επομένως, δεν ταυτίζεται ποτέ με το νόημα του, αφού μπορεί να αποκτά ένα διαφορετικό νόημα σε ένα διαφορετικό πλαίσιο.
- Ένα σύνολο κανόνων παραγωγής σημείων.

Κάθε σημειωτικό σύστημα περιλαμβάνει επομένως τρεις διαστάσεις:

- μια σημαντική διάσταση, η οποία αναφέρεται στη σημασία των σημείων, δηλαδή στη η σχέση των σημείων με αυτό που αντιπροσωπεύουν,
- μια συντακτική διάσταση, η οποία αναφέρεται στις δομικές σχέσεις μεταξύ σημείων και
- μια πραγματιστική διάσταση, η οποία αναφέρεται στους τρόπους με τους οποίους τα σημεία χρησιμοποιούνται και ερμηνεύονται (Morris 1938/1970).

Διακρίνονται δύο μεγάλες κατηγορίες σημειωτικών συστημάτων: τα ιδιώματα (registers) και οι κώδικες. Ιδίωμα είναι μια γλωσσική παραλλαγή, η οποία περιλαμβάνει ένα σύνολο σημαινόντων (λέξεων), των οποίων η χρήση καθορίζεται από κανόνες μετασχηματισμού των σημείων (γραμματική), είναι προσανατολισμένη σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο ή σε έναν ορισμένο τύπο δραστηριότητας, ο οποίος περιλαμβάνει ορισμένες ομάδες ανθρώπων, με ορισμένη ευχέρεια λόγου (Halliday 1975). Το μαθηματικό ιδίωμα, ως γλωσσική παραλλαγή, είναι προσανατολισμένο σε μαθηματικές δραστηριότητες και περιλαμβάνει διάφορες γλωσσικές μορφές και τις χρήσεις τους, οι οποίες εμφανίζονται στα πλαίσια αυτών των δραστηριοτήτων (π.χ. αριθμητικό σύστημα, αλγεβρικός συμβολισμός ή καρτεσιανά διαγράμματα). Αντίθετα, κώδικας είναι ένα ευρύτερο σύστημα νοημάτων, οργανωμένων με βάση κάποιες συμβάσεις για την κατασκευή και τη χρήση σημείων, τα οποία παράγουν ένα νόημα στο πλαίσιο του. Τα μαθηματικά στο σύνολο τους αποτελούν έναν κώδικα.

Τυπικό παράδειγμα σημειωτικού συστήματος στο πεδίο των μαθηματικών που ενδιαφέρει εδώ αποτελεί το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, το οποίο περιλαμβάνει:

- Ένα σύνολο αριθμητικών σημείων, τα οποία παριστάνονται συμβολικά (0, 1, 2, 3,..) λεκτικά (μηδέν, ένα, δύο, τρία,...), εικονιστικά, υλικά, κλπ. (σημαίνοντα), αναφέρονται σε πληθικότητες (σημαινόμενα) και αναγνωρίζονται από τους χρήστες του αριθμητικού συστήματος σε ένα πλαίσιο απαρίθμησης ή μέτρησης.
- Ένα σύνολο σχέσεων ανάμεσα στα αριθμητικά σημεία, σημαντικότερη από τις οποίες είναι η σχέση «μεγαλύτερο / μικρότερο», η οποίο καθορίζεται στη βάση της έννοιας «επόμενο / προηγούμενο» και
- Ένα σύνολο κανόνων παραγωγής αριθμητικών σημείων, οι οποίοι συνοψίζονται ως αρχές απαρίθμησης από τους Gelman & Gallistel (1978) εξής:
  i. αρχή της ένα-προς-ένα αντιστοίχισης , σύμφωνα με την οποία σε κάθε απαριθμούμενο αντικείμενο αντιστοιχίζεται ένα και μόνο ένα αριθμητικό σημείο.
  ii. αρχή της σταθερής ακολουθίας, σύμφωνα με την οποία η ακολουθία των αριθμητικών σημείων πρέπει να είναι σταθερή σε κάθε απαρίθμηση.
  iii. αρχή της πληθικότητας, σύμφωνα με την οποία το αριθμητικό σημείο που αντιστοιχίζεται στο τελευταίο απαριθμούμενο αντικείμενο μιας συλλογής αναπαριστά το συνολικό αριθμό των αντικειμένων της συλλογής αυτής.
  iv. αρχή της αφαίρεσης, σύμφωνα με την οποία μπορεί να ομαδοποιούνται σε μια συλλογή αντικείμενα με διαφορετικά χαρακτηριστικά με στόχο την απαρίθμηση τους.
  v. την αρχή της ανεξαρτησίας της σειράς, σύμφωνα με την οποία η σειρά με την οποία απαριθμούνται τα αντικείμενα μιας συλλογής δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα της απαρίθμησης, με την προϋπόθεση ότι τηρείται η αρχή της ένα-προς-ένα αντιστοίχισης.

Με αφετηρία ένα κοινό εννοιολογικό πλαίσιο βασισμένο στις αρχικές έννοιες που προαναφέρθηκαν, οι σημειωτικές προσεγγίσεις διαφοροποιούνται ανάλογα με τις όψεις των σημειωτικών συστημάτων, τις οποίες αναδεικνύουν ως πρωτεύουσες και το ρόλο που τους αποδίδουν, όπως επίσης και ανάλογα με τα χαρακτηριστικά της σημειωτικής λειτουργίας, τα οποία θεωρούν ως καθοριστικά στις διαδικασίες παραγωγή νοημάτων.

Εντελώς επιγραμματικά, μια κατηγορία σημειωτικών προσεγγίσεων αποδίδει πρωταρχική σημασία και επικεντρώνεται στη μελέτη των σημείων, ως ειδικών αντικειμένων με συγκεκριμένα νοήματα σε ιστορικά προσδιορισμένα και πολιτιστικά καθορισμένα πλαίσια. Αποδίδει ιδιαίτερη σημασία στη σχέση του σημαίνοντος με το σημαινόμενο κάθε σημείου και ενδιαφέρεται για τους κανόνες που διέπουν τις σχέσεις των σημείων με τα νοήματα τους. Για τις προσεγγίσεις αυτές, θεωρούνται σημεία – πέρα από τα γλωσσικά σημεία, όπως είναι τα φωνήματα, τα γράμματα, οι λέξεις ή οι προτάσεις – όλες οι μορφές ύλης και ενέργειας στις οποίες αποδίδεται νόημα από μια κοινότητα ανθρώπων μέσα σε ένα πλαίσιο χρήσης τους, όπως είναι για παράδειγμα οι χειρονομίες στην καθημερινή ζωή, στις θρησκευτικές τελετουργίες ή στον καλλιτεχνικό χορό, τα αντικείμενα που ανταλλάσσονται μεταξύ των ανθρώπων μιας κοινωνίας ως χρήματα, ενθύμια ή δώρα, όπως και άπειροι πολιτιστικοί κώδικες από τους κανόνες της καλής συμπεριφοράς μέχρι τα σήματα οδικής κυκλοφορίας.

Σε αντίθεση με την προηγούμενη, μια άλλη κατηγορία σημειωτικών προσεγγίσεων αποδίδει πρωταρχική σημασία και επικεντρώνεται στη μελέτη, όχι των σημείων καθαυτών ως στοιχείων που παράγουν νοήματα, αλλά των νοημάτων που αποδίδονται στα σημεία, καθώς και των διαδικασιών παραγωγής των νοημάτων σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο. Πυρήνα των προσεγγίσεων αυτών αποτελεί μια γενικευμένη έννοια «κειμένου», όπου ως «κείμενο» μέσα από την «ανάγνωση» του οποίου παράγονται νοήματα θεωρείται κάθε φαινόμενο, συμπεριλαμβανομένων των στοιχείων και των σχέσεων μεταξύ των στοιχείων που «συνθέτουν» το φαινόμενο. Διακριτικά χαρακτηριστικά και δομές χαρακτηριστικών κάθε «κειμένου», αλλά και του πλαισίου μέσα στο οποίο εντάσσεται και λειτουργεί το ένα «κείμενο», παράγουν νοήματα και επομένως αποτελούν σημεία. Για τις προσεγγίσεις αυτές, δηλαδή, τα νοήματα παράγουν τα σημεία και όχι αντίστροφα.

Μια τρίτη κατηγορία σημειωτικών προσεγγίσεων, επιδιώκοντας να συνθέσει τις δύο προηγούμενες, αποδίδει πρωταρχική σημασία και τοποθετεί στο επίκεντρο της μελέτης της, όχι τα σημεία και τα νοήματα τους, αλλά τις λειτουργίες των σημείων στις διαδικασίες της επικοινωνίας μεταξύ των ανθρώπων ή γενικότερα μεταξύ συστημάτων ανταλλαγής μηνυμάτων, θεωρώντας ότι τα σημεία αποτελούν πρώτα και πάνω απ' όλα φορείς ή κομιστές νοημάτων. Τα σημεία, δηλαδή, έχουν αναμφίβολα μια υλική παράσταση και ένα νόημα, η ουσία τους όμως έγκειται στη διαμεσολάβηση που επιτελούν κατά την επικοινωνία και στην δια της επικοινωνίας ανταλλαγή πληροφοριών ανάμεσα σε ανθρώπους ή γενικότερα ανάμεσα σε τεχνικά ή κοινωνικά συστήματα.

Τέλος, μια τέταρτη κατηγορία σημειωτικών προσεγγίσεων, επικεντρώνεται στη μελέτη των επιδράσεων που έχει η χρήση των σημείων και στη διερεύνηση των σημείων μέσα από τα αποτελέσματα που παράγει η χρήση τους, επιδιώκοντας να υπερβεί τα εννοιολογικά και μεθοδολογικά προβλήματα των προηγούμενων προσεγγίσεων. Για τις προσεγγίσεις αυτές, τα σημεία είναι οντότητες, οι οποίες δεν μπορεί να οριστούν προκαταβολικά και στη συνέχεια να αναλυθούν, ούτε μπορεί να αναλυθούν μέσα από τις λειτουργίες που επιτελούν σε διάφορες διαδικασίες επικοινωνίας. Τα σημεία, πέρα από οτιδήποτε άλλο, παράγονται από σημεία και ταυτόχρονα παράγουν άλλα σημεία, οπότε στη βάση αυτή σημείο είναι οτιδήποτε έχει τη δυνατότητα, υπό κατάλληλους όρους, να παράγει άλλα σημεία και αντικείμενο κάθε σημειωτικής ανάλυσης είναι οι σχέσεις αιτίου και αιτιατού μεταξύ των σημείων.

Συνοψίζοντας και γενικεύοντας, ένα σημείο μπορεί να θεωρηθεί ή ως μέσο αναπαράστασης, οπότε το νόημα του προκύπτει από τη σχέση των υποκειμένων με το αντικείμενο στο οποίο το σημείο αναφέρεται ή ως μέσο επικοινωνίας, οπότε το νόημα του προκύπτει από τη διαδικασία αλληλόδρασης μεταξύ των υποκειμένων που χρησιμοποιούν το σημείο. Στην πρώτη περίπτωση, δηλαδή πυρήνα του σημείου αποτελεί μια σχέση, ενώ στη δεύτερη μια διαδικασία. Οι σημειωτικές προσεγγίσεις της πρώτης περίπτωσης, τώρα, επεξεργάζονται και χρησιμοποιούν μια προβληματική των σημείων και θεωρώντας τη δημιουργία νοημάτων ως ιδιότητα των σημείων, εντοπίζονται στην ανάλυση της δομής και των κανόνων των σημειωτικών συστημάτων. Το νόημα, δηλαδή, ενός σημείου προκύπτει από το πλαίσιο του. Αντίθετα, οι σημειωτικές προσεγγίσεις της δεύτερης περίπτωσης αναπτύσσουν και χρησιμοποιούν μια προβληματική των «κειμένων» και θεωρώντας τη δημιουργία νοημάτων ως ιδιότητα των «κειμένων», αναλύουν τα γενεσιουργά και ερμηνευτικά χαρακτηριστικά τους και τις επικοινωνιακές λειτουργίες τους. Το νόημα, δηλαδή, ενός σημείου προκύπτει από την ερμηνεία του.

Οι σημειωτικές προσεγγίσεις, ανεξάρτητα από τις διαφοροποιήσεις τους, εδράζονται σε μια φιλοσοφική βάση, η οποία συνοψίζεται, κατά τη γνώμη μου, στις ακόλουθες παραδοχές, διατυπωμένες με σαφήνεια από τον Charles S. Peirce, έναν από τους θεμελιωτές της σημειωτικής, στο δημοσιευμένο το 1868 δοκίμιο του *Questions concerning certain faculties claimed for man*:

- Δεν υπάρχει στον άνθρωπο καμία δυνατότητα ενδοσκόπησης, όλη η γνώση του για τον εσωτερικό του κόσμο προέρχεται από υποθετικούς συλλογισμούς βασισμένους στα δεδομένα παρατηρήσεων των γεγονότων του εξωτερικού του κόσμου,
- Δεν υπάρχει στον άνθρωπο καμία δυνατότητα ενόρασης, όλη η γνώση του καθορίζεται και απορρέει λογικά από την πρότερη γνώση του,
- Δεν υπάρχει στον άνθρωπο καμία δυνατότητα νοητικής σύλληψης αυτού που δεν μπορεί να γνωσθεί και
- Η οποιαδήποτε σκέψη είναι αδύνατη χωρίς τη διαμεσολάβηση σημείων.

Κατά συνέπεια δεν υπάρχει και δεν μπορεί να υπάρξει για τον άνθρωπο άμεση πρόσβαση στα στοιχεία της πραγματικότητας. Τα σημεία αποτελούν το καθολικό μέσο, το οποίο διαμεσολαβεί τις σχέσεις του ανθρώπινου νου με τον κόσμο, ο οποίος επομένως κατανοείται αποκλειστικά διαμέσου των σημείων. Τα σημεία, όμως, δεν είναι ατομικές, αλλά κοινωνικές κατασκευές, οπότε είναι η κοινωνία η οποία ορίζει και καθιερώνει τα νοήματα τους. Άρα, η υπερβατική αρχή των σημειωτικών προσεγγίσεων είναι η κοινωνία, η αλήθεια είναι συμβατική και το κριτήριο αλήθειας της ανθρώπινης γνώσης είναι η κοινωνική συναίνεση. Οπότε, κύριος σκοπός των σημειωτικών προσεγγίσεων δεν είναι η γνώση μιας πραγματικότητας (γνώση, η οποία θεωρείται προγραμματικά αδύνατη), αλλά η αποτύπωση και διασάφηση των αποδεκτών σε μια κοινωνία ιδεών για την πραγματικότητα αυτή.

Σημειωτικές όψεις της μαθηματικής δραστηριότητας

Σε αντιστοιχία με τις προαναφερθείσες προσεγγίσεις, η μαθηματική δραστηριότητα, ως επιστημονική πρακτική, αντιμετωπίζεται από διαφορετικές σημειωτικές οπτικές με αντίστοιχα διαφορετικά επίκεντρα και αντικείμενα ανάλυσης. Κάθε σημειωτική οπτική στη μαθηματική δραστηριότητα, όμως, προϋποθέτει αντίστοιχες επιστημολογικές παραδοχές για τη μαθηματική γνώση, από τις οποίες και προκύπτουν διαφορετικά περιεχόμενα και λειτουργίες για τα μαθηματικά σημειωτικά συστήματα. Μια θεώρηση της μαθηματικής γνώσης, για παράδειγμα, η οποία προϋποθέτει ότι τα μαθηματικά αντικείμενα (οι αριθμοί, τα γεωμετρικά σχήματα, οι συναρτήσεις κλπ.) αποτελούν δεδομένα στοιχεία ενός υπαρκτού πλατωνικού κόσμου ιδεών αποδίδει άλλο καθεστώς στα μαθηματικά σημεία (τα αριθμητικά σύμβολα, τους γεωμετρικούς όρους, τους αλγεβρικούς τύπους κλπ.) από εκείνο μιας θεώρησης, η οποία υποστηρίζει ότι τα μαθηματικά αντικείμενα αποτελούν νοητικές κατασκευές, ατομικές ή κοινωνικές, με αφετηρία και αναφορά την υλική πραγματικότητα. Μια βασική διάκριση, για παράδειγμα, τοποθετείται στη σχέση των μαθηματικών αντικειμένων με τα μαθηματικά σημεία. Στην πρώτη περίπτωση τα μαθηματικά σημεία αποτελούν εκφράσεις ή ανα-παραστάσεις των υπαρκτών μαθηματικών αντικειμένων, τα μαθηματικά αντικείμενα δηλαδή «παράγουν» μέσα από την υλική αποτύπωση τους τα μαθηματικά σημεία. Αντίθετα, στη δεύτερη τα μαθηματικά αντικείμενα αποτελούν ερμηνείες ή υλοποιήσεις των μαθηματικών σημείων, τα οποία συγκροτούνται ως προϊόντα νοητικής αφαίρεσης και κοινωνικής νοηματοδότησης, οπότε είναι τα μαθηματικά σημεία τα οποία «παράγουν» μέσα από τη χρήση τους τα μαθηματικά αντικείμενα (ενδεικτικά Ernest 1998, Sfard 2000).

Με τις διαφοροποιήσεις, που προκύπτουν από τις διαφορετικές επιστημολογικές οπτικές για τη μαθηματική γνώση, είναι δυνατόν, σε πολύ γενικές γραμμές, να διακριθούν δύο σημειωτικές οπτικές στη μαθηματική δραστηριότητα. Η μια οπτική ενδιαφέρεται για την ανάλυση των σημείων, που συνιστούν τα μαθηματικά σύμβολα και το μαθηματικό λόγο γενικότερα, ως κώδικα ή ιδιαίτερο επιστημονικό ιδίωμα, και η άλλη για το είδος και τα χαρακτηριστικά των νοημάτων που δημιουργούνται μέσα και στο πλαίσιο της μαθηματικής δραστηριότητας, ως μιας κοινωνικής δραστηριότητας η οποία οικοδομεί την κατανοησιμότητα όψεων της πραγματικότητας. Η πρώτη οπτική, δηλαδή, ενδιαφέρεται πρώτιστα για τα στοιχεία και τη δομή του μαθηματικού λόγου, ενώ η δεύτερη για τους όρους της χρήσης και τα παράγωγα της αποτελέσματα.

Θεμελιώδη παραδοχή της πρώτης οπτικής αποτελεί η θέση, ότι τα μαθηματικά συνιστούν μια ιδιαίτερη γλώσσα, τη «γλώσσα των μαθηματικών», η οποία ως σημειωτικός κώδικας ή ιδίωμα δομείται με πυρήνα της ένα σύστημα μαθηματικών όρων, συμβόλων και γραφημάτων, το νόημα των οποίων είναι καθορισμένο ή καθορίζεται κατά περίπτωση στο κάθε συγκεκριμένο μαθηματικό πλαίσιο. Τα μαθηματικά σημειωτικά συστήματα, επομένως, αποτελούν μέσα καταγραφής και έκφρασης της μαθηματικής γνώσης, μέσα διάδοσης της μαθηματικής γνώσης, όπως επίσης και μέσα επεξεργασίας και ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης.

Αντίθετα, η δεύτερη οπτική δομείται με άξονα την παραδοχή, ότι τα μαθηματικά συγκροτούνται από τα νοήματα τα οποία παράγουν μέσα από τις πρακτικές τους και τα οποία επικυρώνονται κοινωνικά μέσα από τη χρήση τους. Νοήματα αριθμητικών πράξεων, ισότητας και ανισότητας μεγεθών, γεωμετρικών σχέσεων μεταξύ γραμμών, σχημάτων και πολλά άλλα. Είναι αυτά τα νοήματα που συνιστούν τα μαθηματικά, άσχετα από τη μορφή έκφρασης τους, ως γλωσσικές διατυπώσεις, σύμβολα, εικόνες, διαγράμματα ή πίνακες. Τα νοήματα αυτά, σύμφωνα με μια ανάλυση του Lemke (2002) είναι κυρίως νοήματα «βαθμού», τα οποία αναφέρονται σε ποσοτικές διαφορές και συνεχείς μεταβολές σε αντίθεση με τα νοήματα «είδους», τα οποία αναφέρονται σε ποιοτικές διακρίσεις και διακριτές οντότητες, που παράγει και εκφράζει η πρωτίστως φυσική γλώσσα.

Από μια παρόμοια οπτική αλλά σε ένα εντελώς διαφορετικό πλαίσιο προσέγγισης της γνώσης και της οικοδόμησης της, τα μαθηματικά σημειωτικά συστήματα μπορεί να θεωρηθούν ως πολιτιστικά εργαλεία, τα οποία σε ατομικό επίπεδο διαμεσολαβούν τόσο τη συγκρότηση, όσο και την επικοινωνία της μαθηματικής γνώσης (Βυγκότσκι 1988, Radford 2001). Στη βάση αυτή, τα μαθηματικά σημειωτικά συστήματα τα οποία οι άνθρωποι χρησιμοποιούν στις δραστηριότητες τους και με τα οποία σκέφτονται έχουν μια διπλή λειτουργία. Από το ένα μέρος αποτελούν νοητικά εργαλεία τα οποία επιτρέπουν τη συμμετοχή του κάθε ατόμου στη μαθηματική δραστηριότητα και από την άλλη αποτελούν κοινωνικά εργαλεία τα οποία υπερβαίνουν το άτομο και επιτρέπουν την αντικειμενοποίηση μιας κοινωνικής πρακτικής, στο πλαίσιο της οποία και νοηματοδοτούνται.

Σε κάθε περίπτωση, όλες οι σημειωτικές οπτικές στη μαθηματική δραστηριότητα δομούνται στην παραδοχή, ότι η σημειωτική διάσταση της μαθηματικής γνώσης είναι ουσιαστική, αφού τα σημειωτικά μαθηματικά συστήματα αποτελούν θεμελιώδεις παράγοντες για τη συγκρότηση και την ανάπτυξη της.

Σημειωτικές οπτικές στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών

Οι σημειωτικές προσεγγίσεις στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών βρίσκονται σήμερα σε περίοδο ανάπτυξης, αλλά και διαμόρφωσης, όπως συνάγεται από τις αντίστοιχες δημοσιεύσεις και τις συναφείς ανακοινώσεις στα συνέδρια της μαθηματικής εκπαίδευσης. Επομένως, κάθε απόπειρα επισκόπησης τους δεν μπορεί παρά να είναι εκ των πραγμάτων ατελής. Σύμφωνα όμως με όλα τα δεδομένα, ο συναφής προβληματισμός φαίνεται να διαμορφώνει τρεις, όχι αλληλο-αποκλειόμενες, προσεγγίσεις (Winsløw 2003). Μια ατομικό-γνωστική προσέγγιση, στο πλαίσιο της οποίας ενδιαφέρουν και διερευνώνται ζητήματα της σημειωτικής λειτουργίας κάθε ατόμου και των νοητικών προϋποθέσεων ιδιοποίησης της μαθηματικής γνώσης μέσα από τη χρήση των μαθηματικών σημειωτικών συστημάτων, μια κοινωνική προσέγγιση, η οποία ενδιαφέρεται και διερευνά ζητήματα που προκύπτουν από τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών σημειωτικών συστημάτων στο πλαίσιο της διδασκαλίας των μαθηματικών στο σχολείο, από την οπτική κυρίως των επικοινωνιακών διαστάσεων της μάθησης και της διδασκαλίας και μια πολιτιστική προσέγγιση, η οποία ενδιαφέρεται για τις επιδράσεις τις οποίες συνεπάγονται οι σχέσεις των μαθηματικών με τα άλλα σημειωτικά συστήματα στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών, τόσο σε ατομικό όσο και σε σχολικό επίπεδο.

Η ατομικό-γνωστική προσέγγιση στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών έχει ως αφετηρία της τις θεωρητικές θέσεις του Piaget και των

νεώτερων εποικοδομητιστών για τη νοητική συγκρότηση και λειτουργία του ατόμου και επιχειρεί στη βάση αυτή να διερευνήσει τις σημειωτικές όψεις συγκρότησης της μαθηματικής γνώσης. Ενδιαφέρεται ιδιαίτερα για την επίδραση που έχουν τα χαρακτηριστικά των μαθηματικών δραστηριοτήτων στις οποίες ένα άτομο εμπλέκεται στις σχέσεις που το άτομο αυτό συγκροτεί μεταξύ των μαθηματικών σημείων και των αντικειμένων στα οποία τα σημεία αναφέρονται, επιχειρώντας να απαντήσει σε μια θεμελιώδη ερώτηση: με ποιες νοητικές διαδικασίες ένα άτομο συγκροτεί νοητικά σχήματα τα οποία αντιστοιχούν σε μαθηματικά αντικείμενα μέσα από το νοητικό χειρισμό των σημειωτικών παραστάσεων τους, οι οποίες μάλιστα πολλές φορές έχουν ποικίλες μορφές που προβάλλουν και διαφορετικά στοιχεία του ίδιου μαθηματικού αντικειμένου ή διατυπωμένο διαφορετικά με ποιους όρους, μέσα από ποιες διαδικασίες και σε ποιο πλαίσιο ένα άτομο αποδίδει μαθηματικά νοήματα σε σημειωτικές παραστάσεις διαφόρων τύπων (ενδεικτικά, Radford 2000, Steinbring 2002).
Για παράδειγμα, πως συγκροτούνται οι έννοιες του κλάσματος και του ρητού αριθμού μέσα από το χειρισμό των συμβολικών παραστάσεων τους ως λόγων δύο αριθμών, οι οποίες με διαφορετικές μορφές, όπως 2/3, 4/6 ή 8/12, αναφέρονται στην ίδια σχέση ή στο ίδιο μέγεθος; πως αποδίδεται το νόημα του κλάσματος σε μια εικόνα που παριστάνει με διαφορετικά χρώματα το μέρος ενός όλου ή σε μια δραστηριότητα μοιράσματος ενός πλήθους αντικειμένων σε μέρη; και πως στη συνέχεια συσχετίζεται η έννοια και οι παραστάσεις του ρητού αριθμού με την έννοια και τις παραστάσεις του δεκαδικού αριθμού;
Για την κοινωνική προσέγγιση της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών, ο προηγούμενος προβληματισμός εντοπίζει προβλήματα συγκρότησης της μαθηματικής γνώσης κάτω τους όρους που δημιουργεί η οικειοποίηση και η χρήση των διαθέσιμων τυπικών και άτυπων σημειωτικών παραστάσεων της, αλλά περιορίζοντας την οπτική του στο ατομικό επίπεδο αδυνατεί να ιχνηλατήσει τους όρους επίλυσης των προβλημάτων αυτών. Γιατί ποιες δυνατότητες παρέχονται στα άτομα να οικειοποιηθούν τις σημειωτικές παραστάσεις της μαθηματικής γνώσης και το αντίστοιχο εννοιολογικό μαθηματικό πλαίσιο ή πιο γενικά ποιες μορφές συγκρότησης μαθηματικών νοημάτων εντοπίζονται στη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο και με ποιους τρόπους μπορούν να αναλυθούν, ώστε να εντοπιστούν τα δομικά χαρακτηριστικά τους; Οι απαντήσεις στα ερωτήματα αυτά προϋποθέτουν την αποτύπωση και την ανάλυση του κοινωνικού πλαισίου της μάθησης των μαθηματικών, συστατικό στοιχείο του οποίου αποτελεί η μορφή και το περιεχόμενο της επικοινωνίας στη σχολική τάξη, στην οποία έχει μέχρι σήμερα επικεντρωθεί ένας σημαντικός αριθμός αναλύσεων των ερευνών (ενδεικτικά Morgan, 2001).
Η επικοινωνία αυτή, στοιχεία της οποίας αποτελούν μεταξύ άλλων, οι διάλογοι μεταξύ μαθητών και δασκάλων κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών, οι οδηγίες, οι εντολές και οι επιπλήξεις των δασκάλων, οι διάφορες μορφές της «γλώσσας του σώματος», όπως είναι τα νοήματα ή οι κινήσεις του κεφαλιού, τα διδακτικά μέσα και άλλα, συμβάλλει έμμεσα αλλά καθοριστικά στην οικειοποίηση των μαθηματικών σημειωτικών συστημάτων και στη συγκρότηση των μαθηματικών εννοιών. Αφού η συγκρότηση της

μαθηματικής γνώσης είναι μεν μια υποκειμενική νοητική διαδικασία, συμβαίνει όμως σε κοινωνικό πλαίσιο με τη χρήση ιστορικά αναπτυγμένων και κοινωνικά καθιερωμένων σημειωτικών συστημάτων.

Η πολιτιστική προσέγγιση, τέλος, στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών εκκινεί από το γεγονός, ότι τα μαθηματικά σημειωτικά συστήματα και πολλοί άλλοι πολιτιστικοί κώδικες και συστήματα νοηματοδότησης διαπλέκονται με πολλούς και πολύπλοκους τρόπους στο σχολείο, όπως και σε άλλα κοινωνικά πεδία και ότι οι σημειωτικές προσεγγίσεις προσφέρουν τη δυνατότητα μιας ενοποιητικής ανάλυσης της διαπλοκής αυτής και των επιπτώσεων της στη συγκρότηση της μαθηματικής γνώσης. Η ανάλυση αυτή έχει μέχρι σήμερα αναπτυχθεί σε δύο διαφορετικές, αλλά και σε κάποιο βαθμό συμπληρωματικές κατευθύνσεις.

Η πρώτη βασίζεται στην παραδοχή, ότι τα μαθηματικά αποτελούν συστατικό στοιχείο ενός πολιτισμού, οπότε τα συστήματα των μαθηματικών συμβόλων αποτελούν εργαλεία σκέψης, η χρήση των οποίων σε πολιτιστικά εντοπισμένες δραστηριότητες παραγωγής νοημάτων επιτρέπει ή εμποδίζει, περιορίζει ή εμπλουτίζει κατά περίπτωση, την ανάπτυξη των δραστηριοτήτων ή και την παραγωγή συγκεκριμένων μαθηματικών νοημάτων. Θεμελιώδεις έννοιες των αναλύσεων του τύπου αυτού είναι η πλαισίωση και η διαχρονικότητα, η οποίες τονίζουν τη εξάρτηση της συγκρότησης των μαθηματικών νοημάτων από τους στόχους και το περιεχόμενο των πολιτιστικά καθιερωμένων δραστηριοτήτων, όπως επίσης και από την ιστορία ενός πολιτισμού. Από διδακτική άποψη, αυτό σημαίνει, μεταξύ άλλων, την ανάλυση των ομοιοτήτων και των διαφορών του σχολικού και του κοινωνικο-πολιτιστικού περιβάλλοντος των μαθητών από την οπτική των σημειωτικών κωδίκων και τη δημιουργία ενός πλαισίου διδασκαλίας των μαθηματικών που θα ενσωματώνει τις ομοιότητες και θα γεφυρώνει τις διαφορές, θέτοντας πάντα υπό ερωτηματικό τη διαχωριστική γραμμή μεταξύ μαθηματικών σημείων και άλλων μορφών σημείωσης (ενδεικτικά, Presmeg, 1998).

Η δεύτερη κατεύθυνση της πολιτιστικής προσέγγισης στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών θεωρεί τα μαθηματικά σημειωτικά συστήματα ως σαφώς διαφορετικά από τα άλλα σημειωτικά συστήματα, αν και σε κάποιο βαθμό αλληλο-συσχετιζόμενα, οπότε ενδιαφέρουν οι όροι της συγκρότησης μαθηματικών εννοιών μέσα από τα νοήματα που παράγει η σύγχρονη χρήση του μαθηματικού και του μη μαθηματικού λόγου (ενδεικτικά Emori & Winsløw 2002). Η ομοιότητα και η αντιστοιχία των μαθηματικών και των μη μαθηματικών σημειωτικών συστημάτων, καθώς διαπλέκονται σε ένα συγκεκριμένο κοινωνικο-πολιτιστικό πλαίσιο, αποτελούν το αντικείμενο των συναφών αναλύσεων και ερευνών, πολλές φορές σε εννοιολογικές βάσεις δανεισμένες από την πολιτισμική ανθρωπολογία.

Μια τελευταία παρατήρηση

Οι σημειωτικές προσεγγίσεις συνεισφέρουν στην καλύτερη κατανόηση των προβλημάτων της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών σε δύο επίπεδα. Σε ένα πρώτο επίπεδο φαίνεται να παρέχουν ένα ενιαίο εννοιολογικό πλαίσιο κι ένα σύνολο όρων και μεθόδων περιγραφής των διαδικασιών παραγωγής μαθηματικών νοημάτων σε συγκεκριμένα πλαίσια δραστηριοτήτων, ενώ σε ένα δεύτερο επίπεδο υποστηρίζουν την ανάπτυξη μιας

κοινωνικο-πολιτιστικής θεώρησης των μαθηματικών και της μαθηματικής εκπαίδευσης, αναδεικνύοντας τις διαδικασίες παραγωγής νοημάτων που ενυπάρχουν στα επικοινωνιακά φαινόμενα μέσα από την αναγωγή των σημείων σε πυρήνα της επικοινωνίας (Vile & Lerman, 1996).
Με την παρατήρηση, ότι η σημειωτική θεώρηση της επικοινωνίας επικεντρώνεται στο νόημα και στην ερμηνεία, είναι επομένως αντιθετική σε κάθε υπεραπλουστευτικό υπόδειγμα μετάδοσης, το οποίο εξισώνει τη νόημα με το περιεχόμενο ενός μηνύματος. Τα σημεία δεν 'μεταδίδουν' απλώς νοήματα, αλλά συνιστούν το μέσο με το οποίο δημιουργούνται τα νοήματα, επομένως κανένα νόημα δεν απορροφάται παθητικά, αλλά δημιουργείται κατά την ενεργητική διαδικασία της ερμηνείας.
Σε κάθε περίπτωση, η συγκρότηση και η ευχέρεια χειρισμού των μαθηματικών εννοιών και αντικειμένων εξαρτάται καθοριστικά από τη γνώση και την ευχέρεια χειρισμού των μαθηματικών σημειωτικών συστημάτων. Τα μαθηματικά σύμβολα και οι αναπαραστάσεις των μαθηματικών εννοιών μπορεί να συμβάλλουν σημαντικά στην ιδιοποίηση της μαθηματικής γνώσης, όπως μπορεί και να δημιουργήσουν σοβαρά διδακτικά προβλήματα. Αποτελούν ταυτόχρονα μέσα επικοινωνίας και εργαλεία χειρισμού της μαθηματικής γνώσης, οπότε απαιτούν συνεργατικές, κοινωνικές, δραστηριότητες, οι οποίες θα παρέχουν ένα πλαίσιο επικοινωνίας και θα στοχεύουν στην από κοινού επίλυση προβλημάτων. Αυτό συνεπάγεται μια άλλου τύπου διδασκαλία των μαθηματικών, τουλάχιστον ως προς τα κοινωνικά χαρακτηριστικά και τις εκπαιδευτικές της δραστηριότητες.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Βυγκότσκι, Λ. (1988), *Γλώσσα και σκέψη*, Αθήνα: Εκδόσεις Γνώση.

Chassapis, D. (2002) Social groups in mathematics education research: An investigation into mathematics education-related research articles published from 1971 to 2000. In P. Valero & O. Skovsome (Eds) *Proceedings of Third International Mathematics Education and Society Conference,* 1, Centre for Research in Learning Mathematics, Danish University of Education, 273-281.

Emori, H. and Winsløw, C. (2002) Elements of a semiotic analysis of the secondary level classroom in Japan. In: *Pre-conference proceedings of ICMI comparative study conference.* Hong Kong: University of Hong Kong.

Ernest, P. (2002), A semiotic perspective of mathematical activity**,** *Paper presented in the Discussion Group on Semiotics in Mathematics Education at the 26th PME International Conference*, United Kingdom, University of East Anglia, Norwich July 21- 26, 2002, (http://www.math.uncc.edu/~sae/dg3/ernest.pdf).

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. New York: SUNY Press.

Gelman, R. And Gallistel, C. -R. (1978) The Child's understanding of number, Cambridge, MA.: Harvard University Press.

Halliday, M. A. K. (1975), Some aspects of sociolinguistics. Στο E Jacobson (Ed) *Interactions between linguistics and mathematics education* (σσ. 64 - 73), Paris: UNESCO.

Hanna, G. & Sidoli, N. (2002) The story of ESM. *Educational Studies in Mathematics*, 50(2), 123-156.

Kieran,, C. (1994) Doing and seeing things differently: A 25-year retrospective of mathematics education research on learning, *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 583-607.

Lemke, J. (2002). Mathematics in the middle: measure, picture, gesture, sign, and word. In A. Sáenz-Ludlow, M. Anderson, S. Zellweger, and V. Cifarelli (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From thinking to interpreting to knowing*. Ottawa: Legas Publishing, *215-234*

Lerman, S. & Τσατσαρώνη, Α. (2004) Η ερευνητική δραστηριότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης ως κοινωνική πρακτική / πρακτική λόγου. Μια απόπειρα παραγωγής νοήματος. *Σ' αυτόν τον τόμο*.

Lubienski, S. T. & Bowen, A. (2000) Who's counting? A Survey of mathematics education research 1982-1998. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(5), 626-633.

Morgan, C. (2001). What does social semiotics have to offer mathematics education research? *Paper presented in the Discussion Group on Semiotics in Mathematics Education at the 26th PME International Conference*, United Kingdom, University of East Anglia, Norwich July 21- 26, 2002, (www.math.uncc.edu/~sae/morgan.pdf).

Morris, C. W. (1938/1970), *Foundations of the Theory of Signs*. Chicago: Chicago University Press.

Peirce, Ch. (1868) Questions Concerning Certain Faculties Claimed for Man, *Journal of Speculative Philosophy,* 2, 103-114. Αναδημοσιευμένο στο James Hoopes (Ed.), *Perice on sings* (1991, 34-53). Chapel Hill: The University of North Carolina Press.

Peirce, Ch. (1981), Η Λογική ως σημειωτική: Η θεωρία των σημείων. Στο *Κείμενα Σημειολογίας,* Αθήνα: Νεφέλη.

Presmeg, N. C. (1998). A semiotic analysis of students' own cultural mathematics. Research Forum Report, in A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol.1, 136-151.

Radford,L.(2001).On the Relevance of Semiotics in Mathematics Education.Paper presented in the Discussion Group on Semiotics in Mathematics Education at the 25th PME International Conference, The Netherlands, University of Utrecht, July 12-17, 2001, (http://www.math.uncc.edu/~sae/dg3/ RADFORDSUMMARY-PME25-DG3.pdf).

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis*. Educational Studies in Mathematics* 42, 237-268.

Sebeok, Thomas A (1994): *An Introduction to Semiotics. London*: Pinter.

Sfard, A. (2000) Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb et al. (Eds), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: perspectives on Mathematical Discourse, Tools, and Instructional Design .* Mahwah, N.J.: Erlbau*m.*

Steinbring, H. (2002). What makes a sign a mathematical sign? An epistemological perspective on mathematical interaction. *Paper presented in the Discussion Group on Semiotics in Mathematics Education at the 26th PME International Conference,* United Kingdom, University of East Anglia, Norwich July 21- 26, 2002, (http://www.math.uncc.edu/~sae/dg3/steinbring.pdf).

Turner, Graeme (1992): British Cultural Studies: An Introduction, New York: Routledge

Winsløw, C. (2003) Semiotics as an analytic tool for the didactics of mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education*, υπό δημοσίευση, (http://www.naturdidak.ku.dk/winslow/NOMAD_ICME10.pdf).

Vile, A. and Lerman,S (1996), Semiotics as a descriptive framework in mathematical domains.Proceedings of the 20th meeting of the International group for the Psychology of Mathematics Education, Valencia, Spain, v. 4, p. 395-402.

Η ερευνητική δραστηριότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης ως κοινωνική πρακτική / πρακτική λόγου. Μια απόπειρα παραγωγής νοήματος

Steve Lerman
University of South Bank, UK

Άννα Τσατσαρώνη
Πανεπιστήμιο Πατρών

Περίληψη
Οι αλλαγές στα πρότυπα της παραγωγής, συσσώρευσης και χρήσης της γνώσης αποτελούν, ιδιαίτερα στη σημερινή ιστορική συγκυρία, μείζον ζήτημα, το οποίο προσελκύει το ενδιαφέρον όχι μόνον όσων εμπλέκονται στην παραγωγή της γνώσης, αλλά και χρηστών διαφορετικών κατηγοριών, μεταξύ των οποίων είναι οι φορείς χάραξης της εκπαιδευτικής πολιτικής στη διπλή τους ιδιότητα: να χρησιμοποιούν την παραχθείσα γνώση και να επηρεάζουν αποφασιστικά τις συνθήκες της παραγωγής της.
Η εργασία αυτή παρουσιάζει πτυχές μιας εμπειρικής έρευνας η οποία, αναγνωρίζοντας αυτή την ιστορική συγκυρία, επιδιώκει να περιγράψει και να κατανοήσει τις αλλαγές που έχουν σημειωθεί, διαχρονικά, στο πεδίο της έρευνας στη μαθηματική εκπαίδευση. Η επιλογή και στόχευση αυτή οφείλεται στην αντίληψή μας ότι ενώ τα σχολικά μαθηματικά αποτελούν ένα από τους σημαντικότερους «φύλακες συνόρων», όχι μόνο στην υποχρεωτική εκπαίδευση αλλά και πέραν αυτής, εντούτοις η μελέτη και έρευνα του αντικειμένου διεξάγεται στο πλαίσιο ενός σχετικά μικρού και αδύναμου επιστημονικού πεδίου. Επιπλέον, το γενικότερο γνωστικό πεδίο των επιστημών της εκπαίδευσης, στο οποίο το συγκεκριμένο αντικείμενο εντάσσεται, απειλείται σήμερα ποικιλοτρόπως, καθώς τα υπο-πεδία που το συγκροτούν εμφανίζονται αποστασιοποιημένα μεταξύ τους και απομονωμένα το ένα από το άλλο.
Αντλώντας από τη θεωρία του Bernstein και ειδικότερα από τη μελέτη του σχετικά με την ανάπτυξη των γνωστικών πεδίων και των δομών της γνώσης, διατυπώνονται ερωτήματα σχετικά με τη θέση του πεδίου έρευνας της μαθηματικής εκπαίδευσης στο ευρύτερο πεδίο της παραγωγής της γνώσης, τις θέσεις των δρώντων στο πεδίο αυτό, καθώς και τις τοποθετήσεις τους αναφορικά με τον επίσημο εκπαιδευτικό λόγο και το δημόσιο λόγο γενικότερα, και αναφορικά με τις καθημερινές σχολικές πρακτικές. Τα ερωτήματα αυτά απορρέουν από τη βασική θεωρητική μας θέση, σύμφωνα με την οποία μεταβολές στις σχέσεις εξουσίας εγγράφονται στα πρότυπα της ερευνητικής δραστηριότητας που χαρακτηρίζει ένα συγκεκριμένο επιστημονικό πεδίο και εκφράζονται στη μορφή της ρύθμισης των κοινωνικών σχέσεων και τελικά στη συγκρότηση των ταυτοτήτων των δρώντων στο εν λόγω πεδίο.

Τίτλος πρωτοτύπου κειμένου: Steve Lerman & Anna Tsatsaroni, Making meaning in mathematics education research as social and discursive practice.
Απόδοση στα Ελληνικά: Ελένη Γιαννακοπούλου & Δημήτρης Χασάπης

Στην παρούσα ερευνητική μελέτη παρουσιάζεται το αναλυτικό εργαλείο και υποδεικνύεται η λειτουργική του σημασία στη συγκρότηση της περιγραφής. Επιχειρείται, επίσης, η σκιαγράφηση μιας αρχικής εικόνας του υπό ανάλυση πεδίου, στην οποία αποτυπώνονται οι μεταβολές του λόγου και οι αντίστοιχες θέσεις των δρώντων, οι οποίες συγκροτούνται μέσω των πόρων που γίνονται διαθέσιμοι στο πλαίσιό του.
Το κεντρικό συμπέρασμα της μελέτης είναι ότι στις κοινωνικές ταυτότητες των ερευνητών στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης διακρίνονται τα ίχνη της ιστορικής καμπής του ευρύτερου γνωστικού πεδίου των επιστημών της εκπαίδευσης – και κατά συνέπεια της γνωσιακής βάσης της εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών - κύριο χαρακτηριστικό του οποίου είναι ο τεχνοκρατικός του προσανατολισμός. Διακρίνονται, επίσης, τα ίχνη της σημερινής μορφής ρύθμισης της ερευνητικής δραστηριότητας, η οποία τείνει να δημιουργεί ταυτότητες δρώντων, των οποίων τα προϊόντα έχουν ανταλλακτική αξία, είτε στο δικό τους πεδίο είτε σε αυτό που υποτίθεται ότι αποτελεί το πεδίο εφαρμογής τους.

Μιλώντας για το θέμα του συνεδρίου

Όπως κάθε άλλη κοινωνική δραστηριότητα, οι παιδαγωγικές δραστηριότητες είναι πρακτικές παραγωγής νοημάτων, πρακτικές οι οποίες χρησιμοποιούν σημεία και σύμβολα για να «κατασκευάσουν νοήματα», συχνά περιγραφόμενες ως σημασιοδοτικές πρακτικές (π.χ., Bocock, 1992). Αυτό είναι το θέμα που σκοπεύει να καλύψει αυτό το συνέδριο. Η επιλογή του θέματος είναι εύλογη, αν ληφθεί υπόψη ο αριθμός των ερευνητικών άρθρων που δημοσιεύονται, τα οποία αναγνωρίζουν τη σπουδαιότητα της συμβολικής διάστασης στη κοινωνική αλληλόδραση και στην επικοινωνία (βλέπε Πίνακα 1 στο παράρτημα 3, ειδικά τη σειρά 4). Όμως, αυτή η αναγνώριση, και η ανάδειξη της γλώσσας και της σημείωσης γενικότερα, αποτελεί μια πολύ πρόσφατη εξέλιξη, η οποία και τα καθιστά θεμιτό αντικείμενο μελέτης στις κοινωνικές επιστήμες και στις επιστήμες της εκπαίδευσης. Πώς αυτή η εξέλιξη μπορεί να επηρεάσει ή έχει ήδη επηρεάσει την ερευνητική δραστηριότητα στις κοινωνικές επιστήμες και στις εκπαιδευτικές σπουδές, χωρίς να αναφέρουμε τις πρακτικές διδασκαλίας και μάθησης, δεν μπορεί εύκολα να εκτιμηθεί χωρίς μια εξειδικευμένη μελέτη. Για την έρευνα, ειδικότερα, μια σημαντική ερώτηση είναι αυτή που έχει διατυπώσει η Hasan (1999): Είναι δυνατός ένας διάλογος της γλωσσολογικής/σημειωτικής θεωρίας με οποιαδήποτε θεωρία του κοινωνικού; Γιατί πιστεύουμε ότι η κοινωνιολογία, η επιστήμη που παρέχει θεωρίες του κοινωνικού, πρέπει να είναι ο πυρήνας των προσεγγίσεων που επιδιώκουν να μελετήσουν τα αποτελέσματα (συγκεκριμένων τύπων) της παιδαγωγικής επικοινωνίας. Για τη Hasan, κατ' ελάχιστον, «…κάθε θεωρία που επικαλείται την έννοια της σημειωτικής ανταλλαγής στην ανάπτυξη της κεντρικής προβληματικής της δημιουργεί ένα χώρο μέσα στον οποίο μια συμβατή γλωσσολογική θεωρία θα μπορούσε να διαλεχτεί μαζί της» (σ. 21). Αυτή η θέση αναγνωρίζει ότι το κοινωνικό δεν μπορεί απλώς να αναχθεί στο γλωσσολογικό (π.χ. Bourdieu, 1991), και αντίστροφα (π.χ. Hasan, 1999). Θέτει όμως ένα επιπλέον ερώτημα: Ποιες είναι οι άρρητες παραδοχές της γλωσσολογικής/ σημειωτικής θεωρίας, οι οποίες στηρίζουν την αντίληψη του ερευνητή ότι υπάρχει μια σαφής διάκριση ανάμεσα στις γλωσσολογικές και στις κοινωνικές διαστάσεις των κειμένων που αποτελούν το αντικείμενο της μελέτης του (π.χ. Butler, 1999);

Αντιμετωπίζοντας αυτές τις ερωτήσεις ως σύνθετες μπορούμε να θεωρήσουμε, ότι υπάρχουν διαστήματα και χάσματα ανάμεσα και μέσα στους διάφορους λόγους (discourses) και στις πρακτικές της διανόησης, που σημαίνει επίσης ότι υπάρχει χώρος για το παιχνίδι της ιδεολογίας και της ιδεολογικής χειραγώγησης. Η άποψη αυτή τονίζει την ανάγκη να μελετηθούν οι προϋποθέσεις για το άνοιγμα του πεδίου της έρευνας της μαθηματικής εκπαίδευσης στο πεδίο της γλωσσολογίας και της σημειωτικής, όπως επίσης να μελετηθούν οι συνέπειες αυτής της εξέλιξης στην μελέτη των ερευνητικών και των σχολικών πρακτικών. Θεωρούμε ότι μια τέτοια μελέτη είναι αναγκαία, ιδιαίτερα γιατί η παραγωγή των εκπαιδευτικών λόγων (discourses) χαρακτηρίζεται από αντιπαραθέσεις μέσα από τις οποίες το κράτος προσπαθεί να χειριστεί σύγχρονες οικονομικές και πολιτισμικές αλλαγές. Μ' άλλα λόγια, είναι δυνατόν να συσχετίσουμε αυτές τις μεταστροφές στην εκπαιδευτική έρευνα με τις ευρύτερες πολιτισμικές αλλαγές και να τις θεωρήσουμε ως εκφράσεις των καταναλωτικών και προσανατολισμένων στην ελεύθερη αγορά κοινωνιών. Το επιχείρημα ότι η εισβολή των αρχών της ελεύθερης αγοράς στην εκπαίδευση απαιτεί να «απευθυνόμαστε στην καρδιά παρά στο μυαλό» των μαθητών και να τους εγκαλούμε «σε ένα συναισθηματικό επίπεδο για την επίτευξη ενός στόχου» (Hartley, 1999) θα μπορούσε να είναι η αφετηρία μιας τέτοιας ανάλυσης, καθώς μπορεί κανείς να υποθέσει ότι ορισμένα είδη σημειωτικών ανταλλαγών ενδέχεται να είναι καταλληλότερα από άλλα για να επιτύχουν το συγκεκριμένο στόχο. Διατυπώνοντάς το σε ένα διαφορετικό ιδίωμα, μπορεί κανείς να αναζητήσει την αρχή της επιλογής, με βάση την οποία αναδεικνύονται οι «θεμιτές» θεωρίες και μεθοδολογίες έρευνας (όπως και οι παιδαγωγικές θεωρίες διδασκαλίας και μάθησης) και η οποία είναι κοινωνικά καθορισμένη, δηλαδή υποκείμενη σε σχέσεις εξουσίας. Όπως σημειώνει ο Bernstein, «οι ερευνητικές μεθοδολογίες στην κοινωνική επιστήμη είναι αφ' εαυτές στοιχεία πολιτισμού» (Bernstein, 1998 (1975), σ.73), επομένως άξιες να μελετηθούν καθαυτές.

Στη μελέτη μας (Lerman, Xu & Tsatsaroni, 2003a, b, c; Tsatsaroni, Lerman & Xu, υπό δημοσίευση) έχουμε κατασκευάσει ένα αναλυτικό εργαλείο για να εξετάσουμε τις μεταστροφές του λόγου και τις αλλαγές στην παραγωγή των κειμένων της ερευνητικής κοινότητας της μαθηματικής εκπαίδευσης τα τελευταία 12 χρόνια. Ακολούθως επιχειρήσαμε να αναπτύξουμε μια γλώσσα δια της οποίας να κατανοήσουμε καλύτερα την ερευνητική δραστηριότητα αυτής της κοινότητας ως πρακτική λόγου, μέσα στην οποία οι ταυτότητες των ερευνητών επανασυγκροτούνται διαρκώς. Σ' αυτή την εισήγηση επομένως θα πάμε ένα βήμα πίσω από το συγκεκριμένο επίπεδο αυτής της συνάντησης και θα επιχειρήσουμε να δείξουμε πως τοποθετούμε το αντικείμενό της στο πλαίσιο των ευρύτερων ενδιαφερόντων μας, τα οποία υποκίνησαν το ερευνητικό μας εγχείρημα.

Υπόβαθρο της έρευνας μας

Η αλλαγή των προτύπων παραγωγής, συσσώρευσης και χρήσης της γνώσης αποτελεί σήμερα, περισσότερο από κάθε άλλη εποχή, ένα σημαντικό ζήτημα, το οποίο αφορά όχι μόνο αυτούς που παράγουν γνώση αλλά και τις διαφορετικές κατηγορίες των χρηστών της γνώσης, μεταξύ των οποίων περιλαμβάνονται οι πολιτικοί παράγοντες με τη διπλή τους δυνατότητα: να χρησιμοποιούν τη γνώση και να επηρεάζουν την παραγωγή της. Στο ερευνητικό μας πρόγραμμα επιδιώκουμε να θέσουμε ερωτήματα τα οποία αφορούν τη θέση της μαθηματικής έρευνας στο ευρύτερο πεδίο παραγωγής της επιστημονικής γνώσης, τη θέση των πρωταγωνιστών της στο δικό τους πεδίο έρευνας και τη τοποθέτησή τους απέναντι στους επίσημους και δημόσιους λόγους (discourses) και στην καθημερινή σχολική πρακτική. Η έρευνα υποκινήθηκε από ένα ενδιαφέρον να εξεταστεί η κατάσταση ενός ιδιαίτερου ερευνητικού πεδίου, στη συγκεκριμένη περίπτωση της μαθηματικής εκπαίδευσης, οι ταυτότητες των ερευνητών του πεδίου αυτού και η αναπαραγωγή του στο χρόνο. Επιθυμούσαμε να βασιστεί η έρευνα σε μια συστηματική και επακριβή μελέτη μιας ευρύτερης βάσης δεδομένων. Μας ενδιέφερε, επίσης, η αξιοποίηση του πιο πρόσφατου επιστημονικού έργου στην κοινωνιολογία της εκπαίδευσης, το οποίο και θα παρείχε μια αντίστοιχη θεωρητική βάση. Με αυτόν τον τρόπο η μελέτη θα μπορούσε να είναι αναστοχαστική. Ένα από τα κίνητρά μας συνδέεται με την άποψη ότι παρά το γεγονός ότι τα σχολικά μαθηματικά αποτελούν ένα φίλτρο στην υποχρεωτική εκπαίδευση και πέρα από αυτή, η μελέτη και η έρευνα του αντικειμένου διεξάγεται στο πλαίσιο ενός σχετικά μικρού και αδύναμου επιστημονικού πεδίου. Επιπρόσθετα, το γενικότερο γνωστικό πεδίο των επιστημών της εκπαίδευσης στο οποίο το συγκεκριμένο αντικείμενο εντάσσεται, απειλείται σήμερα ποικιλοτρόπως, καθώς τα πεδία που το συγκροτούν εμφανίζονται αποστασιοποιημένα μεταξύ τους και απομονωμένα το ένα από το άλλο.

Υπάρχει ένας αριθμός ερευνών στη μαθηματική εκπαίδευση που προσεγγίζει κάποιες από τις πτυχές των στόχων του παρόντος ερευνητικού προγράμματος. Η Kieran (1995) στην αναδρομική εξέταση των μελετών που πραγματοποιήθηκαν για τη διδασκαλία και μάθηση στα σχολικά μαθηματικά παρουσίασε συνεντεύξεις στις οποίες δύο εξέχοντες ερευνητές αξιολόγησαν την υπάρχουσα επιστημονική παραγωγή. Στη συνέχεια, βασισμένη στις παρατηρήσεις των ερευνητών αυτών, ανέλυσε τα άρθρα που δημοσιεύτηκαν στο *Journal for Research in Mathematics Education* (JRME) κατά τα πρώτα 25 χρόνια της έκδοσής του,. Η Kieran υποστηρίζει ότι στην έρευνα της μαθηματικής εκπαίδευσης παρατηρείται μια μετατόπιση, η οποία χαρακτηρίζεται από την προσπάθεια να συνδυαστεί η μάθηση με την κατανόηση και να μελετηθούν από κοινού, καθώς επίσης και από έναν αυξανόμενο προσανατολισμό προς τις θεωρήσεις της αλληλόδρασης, οι οποίες αντλούν στοιχεία από τη θεωρία του Vygotsky. Ο Niss (2000) συνέθεσε μία έκθεση του ερευνητικού πεδίου της μαθηματικής εκπαίδευσης «βασισμένου σε παρατηρήσεις ενός δείγματος που αντλήθηκε από ερευνητικά περιοδικά, τα πρακτικά των συνεδρίων του *ICME (International Congress on Mathematical Education)* και άλλες ερευνητικές εκδόσεις του τελευταίου τρίτου του 20^{ου} αιώνα» (σ. 1-2, οι λέξεις σε πλάγια γραφή έχουν προστεθεί από εμάς). Ο Niss παρουσίασε παραδείγματα από αυτές τις δημοσιευμένες μελέτες στην επισκόπηση του η οποία περιελάμβανε τις κατηγορίες: θέματα και ερευνητικά ερωτήματα, αντικείμενα και φαινόμενα, ερευνητικές μέθοδοι, αποτελέσματα, αναδειχθέντα προβλήματα και αμφισβητήσεις-προκλήσεις. Στο ζήτημα των προβλημάτων και των αμφισβητήσεων που αναδεικνύουν οι έρευνες της μαθηματικής εκπαίδευσης, διατύπωσε τις σκέψεις του με περισσότερες, από κάθε άλλο ζήτημα, επιφυλάξεις.

Παρόλο που ο Niss δεν ισχυρίζεται ότι η ανάλυσή του ήταν συστηματική, η οργάνωση των στοιχείων του επέτρεψε να εντοπίσει διαχρονικές εξελίξεις στην έρευνα σε μια σειρά θεμάτων, από το αναλυτικό πρόγραμμα και τους τρόπους διδασκαλίας, τη διερεύνηση των σχολικών τάξεων μέχρι και την επίδραση εξωτερικών παραγόντων στη σχολική τάξη. Ο Chassapis (2002) ερεύνησε τις καταχωρισμένες στη βάση δεδομένων του ERIC δημοσιεύσεις που σχετίζονται με τη μαθηματική εκπαίδευση, από το έτος 1971 μέχρι και το 2000, ένα σύνολο 13.999 άρθρων, για τον εντοπισμό αναφορών στην κοινωνική τάξη, εθνότητα, φύλο, μειονοτικές ομάδες ή μειονεκτούσες ομάδες. Η έρευνα αυτή, η οποία επέκτεινε μια προηγούμενη έρευνα των Lubienski και Bowen (2000), στη βάση δεδομένων του ERIC για το χρονικό διάστημα 1982-1998, κατέληξε στη διαπίστωση ότι «σε αντίθεση με τις μελέτες που αναφέρονται στην εθνότητα, στην κοινωνική τάξη και στις ομάδες ατόμων με ειδικές ανάγκες, οι έρευνες για το φύλο είναι πιο διαδεδομένες και εντάσσονται στο κυρίαρχο ερευνητικό Παράδειγμα της μαθηματικής εκπαίδευσης στις ΗΠΑ» (σ. 626). Οι Hanna & Sidoli (2002) εξέτασαν τα τεύχη του περιοδικού *Educational Studies in Mathematics* (ESM) με την ευκαιρία της έκδοσης του πεντηκοστού τόμου του. Αναλύοντας τα τεύχη των προηγούμενων εκδόσεων οι συγγραφείς παρουσίασαν μια στατιστική ανάλυση των άρθρων με βάση 4 κατηγορίες: περιεχόμενο, εκπαιδευτικό θέμα, σχολική βαθμίδα και ερευνητική μέθοδο. Παρουσίασαν, επίσης, μια καταγραφή των θεμάτων, των υπευθύνων έκδοσης και της δομής των ειδικών τευχών-αφιερωμάτων του περιοδικού.

Η οπτική των προαναφερθέντων ερευνών ποικίλλει, από κυρίως παιδαγωγική μέχρι κοινωνιολογική, ενώ παράλληλα οι έρευνες αυτές επιχειρούν να εντοπίσουν στοιχεία, τα οποία χαρακτηρίζουν την ερευνητική δραστηριότητα του επιστημονικού πεδίου της μαθηματικής εκπαίδευσης. Οι έρευνες αυτές συμβάλλουν στη σκιαγράφηση μιας εικόνας του πεδίου αυτού, και εντοπίζουν μερικά στοιχεία της εξέλιξης του στο χρόνο.

Στο δικό μας ερευνητικό πρόγραμμα επιδιώξαμε τη συστηματική ανάλυση, την ανάπτυξη ενός ερευνητικού εργαλείου για την ανάλυση ενός στατιστικά σημαντικού αντιπροσωπευτικού δείγματος από δημοσιευμένα κείμενα , καθώς και τη δημιουργία μιας γλώσσας περιγραφής, η οποία θα είναι ικανή να υποδείξει τις επιπτώσεις της κοινωνικής δραστηριότητας που περιγράφει. Παρά το γεγονός ότι κάθε επιλογή περιοδικών και άλλων πηγών, καθώς και η γλώσσα ενός επιστημονικού κειμένου περιχαρακώνει κοινωνικά και κατά συνέπεια επηρεάζει τα ευρήματα, κατορθώσαμε να επιλέξουμε ένα μεγαλύτερο δείγμα δημοσιεύσεων, σε σχέση με το δείγμα των ερευνών που προαναφέρθηκαν, καθώς και να επεκτείνουμε το εύρος των προς διερεύνηση πτυχών των άρθρων που μελετήθηκαν. Θεωρούμε ότι η ανάπτυξη του ερευνητικού εργαλείου και της γλώσσας περιγραφής, τοποθετημένα στο πλαίσιο μιας κοινωνιολογικής θεωρίας, μας επιτρέπουν, όπως θα αναλύσουμε στη συνέχεια, μια σειρά αιτιολογημένων συμπερασμάτων σχετικά με τις μεταβολές που σημειώνονται στο πεδίο της έρευνας στη μαθηματική εκπαίδευση, τα οποία βεβαίως είναι ανοικτά σε παραπέρα διερεύνηση και κριτική εξέταση.

Μεθοδολογια

Στο πλαίσιο της έρευνας αυτής τα άρθρα των περιοδικών και οι εισηγήσεις των συνεδρίων αντιμετωπίζονται ως χαρακτηριστικές/αντιπροσωπευτικές περιπτώσεις τις μαθηματικής δραστηριότητας στη μαθηματική εκπαίδευση. Η εργασία μας είχε ως αφετηρία της την ανάλυση εξειδικευμένων κειμένων και συγκεκριμένα, ενός αντιπροσωπευτικού δείγματος δημοσιεύσεων που πραγματοποιήθηκαν τα τελευταία 12 χρόνια στα πρακτικά του PME *(Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education)*, και σε δύο περιοδικά: το *Educational Studies in Mathematics* (ESM), έκδοση Kluwer, Ολλανδία και το *Journal for Research in Mathematics Education* (JRME), έκδοση του National Council of Teachers of Mathematics, ΗΠΑ. Ενώ η επιλογή του χρονικού διαστήματος των εκδόσεων είναι σε κάποιο βαθμό αυθαίρετη βασίστηκε σε δύο παράγοντες: την επιθυμία να καταλήγει η ανάλυσή μας στο παρόν και το ενδιαφέρον μας να εξετάσουμε δημοσιευμένα κείμενα των τελευταίων χρόνων, όπου εισήχθησαν περισσότερες κοινωνικές θεωρίες στο πεδίο έρευνας της μαθηματικής εκπαίδευσης (βλέπε Lerman, 2000). Με δεδομένο το μέγεθος του εγχειρήματος της ανάλυσης των δύο περιοδικών ESM και JRME και των Πρακτικών του PME σε χρονικό διάστημα 12 ετών, κατέστη αναγκαία μια επιλογή. Για το περιοδικό ESM επιλέξαμε την εξέταση άρθρων από κάθε δεύτερο «βιβλίο» (η χρήση των όρων «τόμος» ή «τεύχος» ενέχει τον κίνδυνο συγχύσεων). Θεωρούμε ότι, με όρους τυχαίας επιλογής, τα δημοσιευμένα άρθρα δεν σχετίζονται μεταξύ τους ή με τα ονόματα των συγγραφέων, εκτός των Ειδικών Τευχών-Αφιερωμάτων. Σε αυτές τις περιπτώσεις υποθέτουμε ότι το μόνο στοιχείο που επηρεάζεται είναι το περιεχόμενο των άρθρων, αφού οι μεθοδολογίες, οι θεωρίες και όλα τα άλλα στοιχεία της ανάλυσης μας ποικίλλουν όσο και σε κάθε άλλο βιβλίο. Εξετάσαμε επίσης ως προς το περιεχόμενο τα Ειδικά Τεύχη-Αφιερώματα. Για το περιοδικό JRME εξετάσαμε κάθε άρθρο κάθε βιβλίου και για τα πρακτικά του PME εξετάσαμε κάθε δέκατη δημοσίευση από κάθε τόμο. Αν υπήρχε χρόνος θα επιθυμούσαμε να αναλύσουμε το σύνολο των 50 τόμων του ESM, των 33 τόμων του JRME και των 27 ετήσιων συνεδρίων του PME και πιστεύουμε ότι θα εντοπίζαμε σημαντικές αλλαγές στα χαρακτηριστικά της έρευνας στη μαθηματική εκπαίδευση. Υπάρχουν, χωρίς αμφιβολία, λιγότερες αλλαγές στη χρονική περίοδο των 12 ετών, όμως η έρευνα μας εστιάζεται στην παρούσα κατάσταση του πεδίου της έρευνας στη μαθηματική εκπαίδευση και στις μελλοντικές δυνατότητες και προοπτικές ανάπτυξής του.

Αναπτύξαμε ένα εργαλείο καταγραφής και ανάλυσης των εξειδικευμένων κειμένων της ερευνητικής κοινότητας, το οποίο βασίζεται όχι στην υπάρχουσες μεθόδους της κειμενικής ανάλυσης, αλλά σε μια ευρύτερη προσέγγιση του έργου του Basil Bernstein. Ειδικότερα, η διαμόρφωση του ερευνητικού μας πλαισίου και οι σκέψεις μας για τη μελλοντική του ανάπτυξη επηρεάστηκαν από την τελευταία δουλειά του Bernstein για τα επιστημονικά πεδία και τις δομές της γνώσης. Για παράδειγμα, πιστεύουμε ότι οι νέες θεωρίες, γενικά, τοποθετούνται δίπλα στις υπάρχουσες θεωρίες και δεν τις αντικαθιστούν, όπως θα ήταν ίσως αναμενόμενο στην πορεία ανάπτυξης των επιστημονικών θεωριών. Ο Bernstein (π.χ. 2000) αποκαλεί αυτό το φαινόμενο οριζόντια δομή γνώσης.

Το εργαλείο καταγραφής και ανάλυσης των κειμένων τροποποιήθηκε στην πορεία της διερεύνησης μας, καθώς διαπιστώναμε ότι οι εννοιολογικές μας κατηγορίες ήταν ανεπαρκείς ή απαιτούσαν τροποποιήσεις. Ένας καθοριστικός παράγοντας ήταν η ανάπτυξη των κριτηρίων για τις επιλογές μας, αυτό που ο Bernstein (2000) αποκαλεί κανόνες αναγνώρισης και πραγμάτωσης, οι οποίοι υπαγορεύουν την τοποθέτηση ενός στοιχείου ενός άρθρου στη μία ή στην άλλη κατηγορία με σαφή τρόπο. Επιδιώξαμε αυτή η έρευνα να είναι μια εμπειρική, περιγραφική μελέτη και ταυτόχρονα να δημιουργεί μια γλώσσα η οποία θα διευκολύνει τη διαδικασία της ερμηνείας και της νοηματοδότησης κατά την ανάλυση των δεδομένων.

Μερικά δομικά χαρακτηριστικά, προερχόμενα από διάφορες πηγές χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του εργαλείου καταγραφής και ανάλυσης των κειμένων (βλέπε Παράρτημα 1). Αρχικά διακρίναμε ανάμεσα στο θεωρητικό ή στον εμπειρικό προσανατολισμό των άρθρων. Για την καταγραφή του στοιχείου αυτού, εξετάζαμε αν οι συγγραφείς των άρθρων αναφέρονταν ή όχι σε μία θεωρία. Αν ναι, σε ποια θεωρία αναφέρονταν και αν η αναφορά τους αυτή ήταν σαφής ή υπονοούμενη. Με βάση τα δεδομένα αυτά διακρίνονταν ο προσανατολισμός των άρθρων σε θεωρητικός ή εμπειρικός. Άρθρα της πρώτης κατηγορίας μπορεί να κινούνταν στο πεδίο του εμπειρικού για να επεξηγήσουν μια θεωρία, αλλά πρόθεσή τους ήταν η παρουσίαση και ίσως η ανάπτυξη της θεωρίας. Παρόμοια, άρθρα με εμπειρικό προσανατολισμό μπορεί κάλλιστα να αναφέρονται σε μία θεωρία, αλλά προσανατολίζονται στην περιγραφή και ίσως στον εμπλουτισμό της σχολικής πρακτικής, της πολιτικής ή κάποιου άλλου χώρου της κοινωνικής πρακτικής. Στη συνέχεια αναλύουμε τη χρήση της θεωρίας, αν αυτή υποστηρίζεται ή τροποποιείται και αν εισάγονται θεωρίες από άλλες επιστημονικές περιοχές. Αν ένα ερευνητικό άρθρο είχε εμπειρικό προσανατολισμό διερευνούσαμε το επίκεντρο της εμπειρικής διερεύνησης, αν ήταν η σχολική πρακτική ή η ερευνητική πρακτική κ.λ.π., όπως επίσης τη μεθοδολογία και τις τεχνικές συλλογής και ανάλυσης στοιχείων που χρησιμοποιούσε. Εξετάζαμε επίσης τη σχέση μεταξύ του θεωρητικού και του εμπειρικού πεδίου/προσανατολισμού, διερευνώντας αν η θεωρία καθοδηγεί ή καθοδηγείται από το πεδίο της εμπειρικής ερευνητικής δραστηριότητας ή αν υπάρχει μια διαλεκτική σχέση ανάμεσα τους.

Οι επόμενες δύο κατηγορίες του εργαλείου καταγραφής και ανάλυσης των κειμένων, «στόχοι των ερευνητών» και «ιδεολογικές στάσεις», χρησιμοποιούνται με πρόθεση, πρώτον, να εντοπισθεί ο σκοπός της έρευνας και αν αυτός είναι με κάποια έννοια παιδαγωγικός, καθώς επίσης και το μαθηματικό θέμα και ο τομέας της εκπαίδευσης που αποτελούσαν αντικείμενο του άρθρου. Δεύτερον, να προσδιοριστεί το κοινό του άρθρου, όπως για παράδειγμα άλλοι ερευνητές, εκπαιδευτικοί κ.λ.π. και τρίτο να διερευνηθεί η ερώτηση αν ο συγγραφέας ή οι συγγραφείς του άρθρου

υιοθετούν φανερά μια ιδεολογική στάση, όπως για παράδειγμα φεμινιστική, μετα-μοντέρνα ή άλλη.
Η τελευταία κατηγορία εξετάζει το παιδαγωγικό μοντέλο που οι συγγραφείς προβάλλουν/προωθούν στο άρθρο, αν υπάρχει. Εδώ, έχουμε επηρεαστεί από την ταξινόμηση των μοντέλων «επιτέλεσης» και «ικανότητας», που έχει κάνει ο Bernstein, και των υποδιαιρέσεων τους. Στα πρώτα, την υποδιαίρεση ανάμεσα σε παλιά και νέα μοντέλα επιτέλεσης και στα δεύτερα τις υποδιαιρέσεις που ο Bernstein έχει αποκαλέσει φιλελεύθερο – προοδευτικό, πολιτισμικό- λαϊκιστικό και πολιτικό-χειραφετητικό πρότυπο, καθένα με τη διακριτή του ιδεολογία. (Bernstein, 1996). Τα κριτήρια που χρησιμοποιήθηκαν για τη διάκριση παιδαγωγικών μοντέλων και τύπων είναι: (α) αν οι συγγραφείς διερευνούσαν τις ικανότητες των μαθητών, δηλαδή τις γνώσεις των μαθητών με βάση αυτά που λένε και γράφουν, ή την επίδοσή τους, (β) αν οι συγγραφείς επικεντρώνονταν σε ομάδες ή άτομα και (γ) αν υπήρχε ή όχι ενδιαφέρον για την νοητική, πολιτιστική ή πολιτική ενδυνάμωση των μαθητών. Πρόσθετες υποκατηγορίες αντλήθηκαν από το Morgan, *et al* (2002) και όπως φαίνεται στο μέρος 5 του αναλυτικού εργαλείου (Παράρτημα 1), η κατηγορία «παιδαγωγικά μοντέλα» περιλαμβάνει τρεις υποκατηγορίες: Η πρώτη, αν το άρθρο εστιάζεται στην προς μετάδοση γνώση ή στους μαθητές (βλέπε, επίσης, Lerman & Tsatsaroni, 1998 και Maton, 2000). Η δεύτερη, υποκατηγορία αφορά τη στρατηγική της έρευνας (βλ. Dowling, 1998, Brown, 1999), αν δηλαδή, οι συγγραφείς του άρθρου επιχειρούν να εντοπίσουν τα στοιχεία που εμφανίζεται ή που απουσιάζουν από τα κείμενα των μαθητών και αν διατυπώνουν σχόλια, τα οποία παρουσιάζουν τα μαθηματικά ως μία εξειδικευμένη ή εντοπισμένη στο χώρο δραστηριότητα. Για παράδειγμα, αν χρησιμοποιούνται παραδείγματα της καθημερινότητας, εξετάζεται αν τροποποιούνται δημιουργώντας ένα εσωτερικό γλωσσικό κώδικα των σχολικών μαθηματικών ή αν παραμένουν στην καθημερινή γλώσσα και τα νοήματά της. Η τρίτη υποκατηγορία αναφέρεται στο σύνορο ανάμεσα στο καθημερινό και εξειδικευμένο μαθηματικό λόγο και την ισχυρή ή αδύναμη παρουσία αυτού του συνόρου.
Το αναλυτικό εργαλείο μας παρείχε στοιχεία για κάθε κείμενο, τα οποία καταχωρήθηκαν σε μία βάση δεδομένων. Η βάση αυτή περιλαμβάνει επίσης τα συνήθη στοιχεία του άρθρου, μια περίληψη του θέματος της έρευνας και, όπου ήταν διαθέσιμες, οι λέξεις-κλειδιά των άρθρων.
Χρησιμοποιώντας ως παράδειγμα ένα τυχαίο άρθρο θα διευκρινίσουμε τον τρόπο που εφαρμόζουμε τα κριτήρια ταξινόμησης. Καλούνται οι αναγνώστες να παρακολουθήσουν και να διατυπώσουν την κριτική τους για τους κανόνες ταξινόμησης. Το άρθρο δημοσιεύτηκε στο τόμο 28 του ESM και οι συγγραφείς του είναι οι Ma Tzu-Long Yang και Paul Cobb (1995). Εξετάζοντας πρώτα την ύπαρξη θεωρίας διαπιστώνουμε ότι οι συγγραφείς χρησιμοποιούν **σαφώς** τη θεωρία του Vygotsky (σ. 4) και εμπνέονται ειδικότερα από το έργο του Bishop για την επίδραση των πολιτισμικών παραγόντων στη συγκρότηση των ικανοτήτων των μαθητών (σ. 3). Είναι ένα άρθρο **εμπειρικά** προσανατολισμένο, αφού μελετά παιδιά στη Ταϊβάν και στις ΗΠΑ με στόχο τη συγκρότηση θεωρίας σχετικά με τις διαφορές στην ικανότητα για αριθμητική σκέψη (σ. 4). Το εμπειρικό προέχει. Οι εξηγήσεις των διαφορών στη μάθηση αναδύθηκαν διατυπώνοντας υποθέσεις ως προς

τους σημαντικούς παράγοντες που την επηρεάζουν, με βάση την ανάγνωση των εμπειρικών δεδομένων και όχι με βάση τη θεωρία. Το άρθρο εστιάζεται στη **σχολική** πρακτική και περαιτέρω εξετάζει τη σκέψη των μαθητών. Η **θεωρία καθοδηγεί την εμπειρική διερεύνηση** αφού οι ερευνητές αναπτύσσουν κοινωνικο-πολιτισμικές ερμηνείες για τις διαφορές ανάμεσα στους μαθητές των δύο χωρών (σ. 27-30). Οι συγγραφείς απευθύνονται στους **δασκάλους** επισημαίνοντας επιπτώσεις στη σχολική πρακτική (σ. 31), αλλά και στους **ερευνητές** παρουσιάζοντας τα ευρήματά τους ως προϊόντα του θεωρητικού τους προσανατολισμού (σ. 29). Οι συγγραφείς αναφέρονται στη θεωρία του Vygotsky, μια πηγή πέρα από την παραδοσιακή ψυχολογία και τα μαθηματικά. Παρακάτω θα επισημάνουμε ότι η ταξινόμηση που επιχειρούμε των θεωριών που χρησιμοποιούν οι συγγραφείς των άρθρων έχει ως αφετηρία την υπόθεση ότι τα μαθηματικά και η παραδοσιακή ψυχολογία αποτελούν τυπικές πηγές άντλησης θεωριών και για το λόγο αυτό προβλέπει την καταγραφή θεωριών που αξιοποιούνται από άλλα επιστημονικά πεδία. Οι συγγραφείς του συγκεκριμένου άρθρου στο οποίο αναφερόμαστε δεν επιδιώκουν να τροποποιήσουν ή να διατυπώσουν κριτικές για την θεωρία που χρησιμοποιούν, γι' αυτό ταξινομούμε την έρευνά τους στην κατηγορία **χρήση θεωρίας.** Το άρθρο δεν απευθύνεται στους φορείς της εκπαιδευτικής πολιτικής ή στους επίσημους παιδαγωγικούς παράγοντες, αλλά στη κοινότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης. Τέλος, απαντώντας θετικά στην ερώτηση αν το άρθρο προωθεί ένα συγκεκριμένο παιδαγωγικό μοντέλο, εντοπίζουμε τον παιδαγωγικό του προσανατολισμό στους μαθητές ως άτομα, στοχεύοντας στη νοητική τους ανάπτυξη με βάση μια φιλελεύθερη-προοδευτική ιδεολογία. Επιπλέον, ο παιδαγωγικός λόγος που συγκροτείται χαράζει ένα ισχυρό σύνορο ανάμεσα στα μαθηματικά και την καθημερινότητα, παρουσιάζοντας τα μαθηματικά ως ένα εξειδικευμένο λόγο. Η παιδαγωγική του είναι αυτή που ο Bernstein έχει αποκαλέσει «αόρατη» παιδαγωγική, στην οποία ο δάσκαλος εστιάζεται σε αυτά που είναι παρόντα στο κείμενο-απάντηση ενός μαθητή, ενώ τα κριτήρια για την αξιολόγησή τους παραμένουν άρρητα.

Ως μέρος της γλώσσας περιγραφής αναπτύξαμε ένα πλαίσιο δύο διαστάσεων βασισμένοι εν μέρει στον Muller (2000) (Παράρτημα 2). Ο *κάθετος* άξονας μας παρέχει πληροφορίες για την *τοποθέτηση* των φορέων στην δραστηριότητά τους, χαρακτηρίζοντας ως *θέαση προς τα έσω* και *θέαση προς τα έξω* τα δύο άκρα του άξονα. Η «θέαση προς τα έσω» αναφέρεται στο ένα ή και στα δύο: το ευρύτερο πεδίο της διανόησης ή/και το δικό τους επιστημονικό πεδίο, ενώ η «θέαση προς τα έξω» αναφέρεται στο ένα ή και τα δύο: τη δημόσια σφαίρα ή/και το κράτος/επίπεδο του σχολείου. Ο *οριζόντιος* άξονας μας παρέχει πληροφορίες για την *μορφή εμπλοκής* των φορέων στη δραστηριότητα. Αυτό με τη σειρά του περιλαμβάνει μια *κριτική* ή μια *λειτουργική* στάση στα δύο άκρα του άξονα. Η «κριτική» στάση προϋποθέτει μια εμπλοκή με επιστημονικά μέσα (δικά τους ή άλλων) σε μια προοπτική *ανάπτυξης* των ερευνητικών μέσων/διανοητικών πόρων του δικού τους ή των άλλων πεδίων ή μια εμπλοκή σε μια δραστηριότητα, η οποία κατανοείται ως *ενισχυτική* της δημόσιας σφαίρας (των σχολείων συμπεριλαμβανομένων). Η «λειτουργική» στάση αναφέρεται σε μια εμπλοκή με μέσα του δικού τους ή άλλων πεδίων, η οποία *χρησιμοποιεί* τα μέσα για την εκτέλεση/περιγραφή αυτού που προσλαμβάνεται ως έργο τους ή μια μορφή εμπλοκής, η οποία χρησιμοποιεί τα μέσα για να προδιαγράψει, κανονιστικά, δράσεις στο πεδίο που εκλαμβάνεται ως πεδίο εφαρμογής τους. Κατά συνέπεια προκύπτουν τέσσερες θέσεις υποκειμένου, οι οποίες συνιστούν το μοντέλο: *ακαδημαϊκός διανοούμενος, επαγγελματίας πανεπιστημιακός καθηγητής, δημόσιος διανοούμενος και εκπαιδευτής εκπαιδευτικών.* Είναι προφανές ότι δεν αναμένεται ο εντοπισμός καθαρών θέσεων στα δεδομένα της έρευνας μας και οι παραπάνω θέσεις δεν αποτελούν ιδεατούς τύπους, αλλά δημιουργήθηκαν για να βοηθήσουν την περιγραφή και την ερμηνεία των εμπειρικών δεδομένων.

Αποτελέσματα

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης εκτίθενται στα Παραρτήματα: Στο Παράρτημα 1 υπάρχει το αναλυτικό μας εργαλείο στην τελική του μορφή, στο Παράρτημα 2 το πλαίσιο που αναπτύξαμε ως τμήμα της εσωτερικής γλώσσας περιγραφής και στο Παράρτημα 3 περιέχεται μια επιλογή πινάκων με στοιχεία κατά κατηγορία, σύμφωνα με το αναλυτικό εργαλείο μας (για μια πλήρη έκθεση των αποτελεσμάτων βλ. *Tsatsaroni et al*, υπό έκδοση). Θα συνοψίσουμε εδώ μερικά από τα πιο ενδιαφέροντα ευρήματα αυτής της ανάλυσης, όπως προκύπτουν από τα στοιχεία των πινάκων του Παραρτήματος 3 και θα διατυπώσουμε μερικά σχόλια σε συνδυασμό με το διάγραμμα του Παραρτήματος 2.

Μερικές ενδιαφέρουσες αλλαγές σημειώνονται στον «*τύπο της θεωρίας*». Οι κυρίαρχες θεωρίες, σ' όλη τη χρονική περίοδο που εξετάζουμε και για τους τρεις τύπους δημοσιευμάτων, είναι οι παραδοσιακές ψυχολογικές και μαθηματικές θεωρίες, αλλά σημειώνεται η χρήση μεγάλου πλήθους θεωριών από άλλα επιστημονικά πεδία. Μετά την αναλυτική καταγραφή τους, οι θεωρίες που χρησιμοποιούνται στα κείμενα που εξετάστηκαν ταξινομήθηκαν στις ακόλουθες κατηγορίες προέλευσης τους, οι οποίες καταγράφονται στον πίνακα 1 (Παράρτημα 3): προσεγγίσεις της κοινωνικής ψυχολογίας, κοινωνιολογία/ κοινωνιολογία της εκπαίδευσης/κοινωνικο-πολιτισμικές προσεγγίσεις & ιστορικά προσανατολισμένες προσεγγίσεις, γλωσσολογικές/κοινωνιο-γλωσσολογικές προσεγγίσεις & σημειωτική, φιλοσοφία/φιλοσοφία των μαθηματικών, εκπαιδευτική θεωρία/εκπαιδευτική έρευνα/γειτνιάζοντα προς τη μαθηματική εκπαίδευση πεδία & θεωρίες αναλυτικών προγραμμάτων. Στον ίδιο πίνακα υπάρχει η κατηγορία των περιπτώσεων στις οποίες δεν χρησιμοποιειται καμία θεωρία. Για λόγους αναγνωσιμότητας, τα στοιχεία σε κάθε κατηγορία ταξινομήθηκαν σε δύο χρονικές περιόδους (1990-1995 & 1996-2001), αν και είναι επίσης διαθέσιμα σε ετήσια βάση. Η πρώτη ενδιαφέρουσα παρατήρηση, όπως προαναφέρθηκε, είναι ότι οι ερευνητές που δημοσιεύουν και στα τρία περιοδικά αντλούν τις θεωρητικές τους προσεγγίσεις από τις παραδοσιακές ψυχολογικές και μαθηματικές θεωρίες, αν και το ποσοστό των δημοσιεύσεων αυτών στο JRME κατά την πρώτη χρονική περίοδο είναι σημαντικά χαμηλότερο σε σύγκριση με τα άλλα δύο περιοδικά. Εξετάζοντας μαζί τις δύο χρονικές περιόδους, τα άρθρα που αντλούν τις θεωρητικές τους προσεγγίσεις από τις παραδοσιακές ψυχολογικές και μαθηματικές θεωρίες μειώνονται στα PME και στο ESM (από 73.1% στο 60.5% στα PME και από 63.4% στο 51.6% στο ESM), αλλά αυξάνονται στο JRME (από 54.8% στο 57.9%). Όπως φαίνεται στον πίνακα 3, το εύρημα αυτό ενδέχεται να συνδέεται με τη διαπίστωση ότι ένα σημαντικά μεγαλύτερο ποσοστό άρθρων στο JRME χαρακτηρίζονται από έναν «εμπειρισμό», δηλαδή δεν αναφέρονται σε καμία θεωρία κατά την πρώτη χρονική περίοδο (24.2%, σε σύγκριση με 6.0% στα PME και 9.8% στο ESM), ενώ στη δεύτερη χρονική περίοδο η κατηγορία των άρθρων που δεν βασίζονται σε καμία θεωρία μειώνεται σημαντικά από 24.2% σε 10.5%. Σημειώνεται, επίσης, μια μείωση των άρθρων στο ESM, όχι όμως ουσιαστική, τα οποία δεν αναφέρονται σε καμία θεωρία, και μια μικρή αύξηση του ποσοστού των κειμένων στα PME, αν και ο αριθμός των άρθρων που εξετάστηκαν είναι μικρός και δεν επιτρέπει τη διατύπωση κάποιας συγκεκριμένης υπόθεσης. Η δεύτερη παρατήρηση είναι ότι ένας σημαντικός αριθμός άρθρων που δημοσιεύονται και στα τρία περιοδικά αναφέρονται σε θεωρίες της κοινωνικής ψυχολογίας, συμπεριλαμβανομένων και κάποιων που επανεμφανίζονται στο προσκήνιο και ότι ο αριθμός των άρθρων αυτών είναι αυξανόμενος στα ESM & JRME κατά τις δύο χρονικές περιόδους (από 9.8% σε 20.0% και από 6.5% σε 13.2%, αντίστοιχα), με μια πολύ μικρή μείωση στα άρθρα των PME (από 11.9% σε 9.9%). Επίσης, ο αριθμός των άρθρων που αναφέρονται σε κοινωνιολογικές ή κοινωνικο-πολιτισμικές θεωρίες αυξάνεται (από 3.0% σε 9.9% στο PME, από 3.7 σε 11.6% στο ESM και από 1.6% σε 7.9% στο JRME) παραμένοντας όμως κάτω του 12%. Παράλληλα, παρατηρείται μια αξιοσημείωτη αύξηση, κατά τις δύο χρονικές περιόδους, στη χρήση γλωσσολογικών, κοινωνιο-γλωσσολογικών και σημειωτικών προσεγγίσεων και στα τρία περιοδικά, αν και ο αντίστοιχος αριθμός των άρθρων παραμένει μικρός. Τέλος, πρέπει να σημειωθεί, ότι ελάχιστα άρθρα αναφέρονται στο ευρύτερο πεδίο της εκπαιδευτικής θεωρίας και έρευνας, όπως επίσης και στα εγγύτερα πεδία – π.χ. το επιστημονικό πεδίο της εκπαίδευσης στις φυσικές επιστήμες και της θεωρίας των αναλυτικών προγραμμάτων - και αυτά σε μειούμενο αριθμό.

Εξετάζοντας τα στοιχεία από την οπτική των *μεθόδων* που χρησιμοποιούνται στις εμπειρικές έρευνες των άρθρων του δείγματός μας, παρατηρήσαμε ότι, κατά μέσο όρο, στα άρθρα των περιοδικών PME και ESM υπάρχει σημαντική έμφαση στις ποιοτικές μεθόδους έρευνας (63.7% και 62.6% αντίστοιχα), με 16.3% και 15.8% στις ποσοτικές μεθόδους, καθώς και 20.0% και 21.6% στους μικτούς τύπους ερευνητικών μεθόδων, αντίστοιχα. Στα άρθρα του περιοδικού JRME υπάρχει ισότιμη έμφαση στις ποσοτικές (43.4%) και ποιοτικές μορφές έρευνας (41.0%), ενώ 15.6% των άρθρων του δείγματος χρησιμοποιεί μικτούς τύπους ερευνητικών μεθόδων (δες Πίνακα 2 στο Παράρτημα 3). Προκειμένου να διερευνήσουμε τον τύπο των αλλαγών διαχρονικά ταξινομήσαμε τα στοιχεία, όπως προηγούμενα, σε δύο χρονικές περιόδους (6-έτη), για τον επιπρόσθετο λόγο ότι ο αριθμός των άρθρων στο περιοδικό ESM με έμφαση στις ποσοτικές ερευνητικές μεθόδους μειώνεται εντυπωσιακά μετά το 1996. Σημειώνεται εδώ ότι εξετάσαμε ισάριθμα δείγματα για κάθε περιοδικό/πρακτικά συνεδρίων ανά έτος και ότι σταθμίσαμε τα κείμενα των πρακτικών στο ίδιο επίπεδο με εκείνα των περιοδικών καταλήγοντας έτσι σε μη σταθμισμένα σύνολα. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 2 (Παράρτημα 3):

- Υπάρχει μία μείωση διαχρονικά (στις δύο χρονικές περιόδους) του αριθμού των άρθρων που χρησιμοποιούν ποσοτικές ερευνητικές μεθόδους και στα δύο περιοδικά, αλλά μία αύξηση στα PME.
- Υπάρχει μία μείωση διαχρονικά του αριθμού των άρθρων που χρησιμοποιούν ποιοτικές ερευνητικές μεθόδους και στα δύο περιοδικά, αλλά όχι στα PME.
- Το ποσοστό των άρθρων με ποσοτικές και ποιοτικές ερευνητικές μεθόδους είναι το ίδιο στο JRME, αλλά το ποσοστό των άρθρων με ποιοτικές ερευνητικές μεθόδους είναι μεγαλύτερο στα PME και στο ESM.

Για να ερμηνεύσουμε αυτές τις διαφοροποιήσεις, αντιπαραβάλλουμε, πρώτον, τα άρθρα των περιοδικών με εκείνα των πρακτικών συνεδρίων και στη βάση αυτή μπορούμε να ισχυριστούμε ότι εμφανίζεται στα δύο περιοδικά μία πολιτική ή ένας κανονιστικός μηχανισμός που ωθεί ή ενθαρρύνει τους ερευνητές να μετακινηθούν από τη χρήση ποσοτικών στη χρήση ποιοτικών ερευνητικών μεθόδων. Μια τέτοια ώθηση δεν είναι εμφανής στα PME. Δεύτερον, συγκρίνοντας τις διαφορές/ομοιότητες ανάμεσα στα κείμενα των πρακτικών και στα άρθρα κάθε περιοδικού, εικάζεται η ύπαρξη μιας πολιτικής ισόρροπης χρήσης ποσοτικών και ποιοτικών ερευνητικών μεθόδων που λειτουργεί στα PME και το JRME, αλλά όχι στο ESM. Έτσι, με δεδομένη την αρχική έμφαση στις ποιοτικές μεθόδους στα PME η ύπαρξη μιας τέτοιας ρύθμισης εξηγεί την αύξηση των ποσοτικών μεθόδων στα PME, και όχι των ποιοτικών, στις δύο χρονικές περιόδους που εξετάζουμε. Παρόμοια, με δεδομένη την αρχική έμφαση στις ποσοτικές μεθόδους στο JRME, μια τέτοια πολιτική εξηγεί την αύξηση των ποσοτικών μεθόδων και την τελική εξισορρόπηση κατά τις δύο χρονικές περιόδους. Τέλος, συγκρίνοντας τις ομοιότητες και διαφορές στα δύο περιοδικά η επίδραση του κοινωνικού πλαισίου (ΗΠΑ έναντι Ευρώπης) πρέπει να ληφθεί υπόψη. Το JRME, όπως αναφέρθηκε, μετακινείται από μία αρχική έμφαση στις ποσοτικές σε μία έμφαση στις ποιοτικές ερευνητικές μεθόδους επιτυγχάνοντας τελικά μια πιο ισόρροπη χρήση των μεθόδων. Αντίθετα, η εμμονή του ESM στη ποιοτική ερευνητική μεθοδολογία φαίνεται να είναι σταθερή στις δύο χρονικές περιόδους. Η παράδοση και η συνήθεια στην Ευρώπη μπορεί να θεωρηθούν υπαίτιες αυτής της προτίμησης και εμμονής στους ποιοτικούς τύπους ερευνητικών μεθόδων. Θα μπορούσε επίσης να προβληθεί η ερμηνεία ότι αυτή η εμμονή στην ποιοτική ερευνητική μεθοδολογία από το ESM (δηλαδή τους υπευθύνους έκδοσης) αποτελεί απόδειξη της ύπαρξης θυλάκων αντίστασης σε εξωτερικές προσπάθειες ρύθμισης του πεδίου της έρευνας στη μαθηματική εκπαίδευση, οι οποίες εντοπίζονται σήμερα στην εκπαιδευτική και γενικότερα στη κοινωνική έρευνα. Κατά συνέπεια, μια ισόρροπη χρήση των ερευνητικών μεθόδων μπορεί να είναι ένα επιβαλλόμενο μέτρο, ένας μηχανισμός κοινωνικού ελέγχου, ο οποίος εμφανίζεται ως μία έκκληση για πιο ρεαλιστικές ή πραγματιστικές προσεγγίσεις στη κοινωνική έρευνα. Ή, σύμφωνα με άλλους κοινωνικούς επιστήμονες, βρισκόμαστε σήμερα στην εποχή της επανεμφάνισης της «θετικότητας» ('positivity'), όπου υπάρχει χώρος για προσεκτικές κριτικές και λεπτούς σχολιασμούς, όμως συνολικά υπάρχει μια αίσθηση ότι πολλές από τις αντιπαραθέσεις και τους δυϊσμούς έχουν ατονήσει. Ότι η ιδέα των συνεκτικών, περιχαρακωμένων και ασύμμετρων «παραδειγμάτων», ως τρόπος ταξινόμησης και χειρισμού των θεωρητικών και μεθοδολογικών αντιπαραθέσεων στις κοινωνικές επιστήμες δεν αντανακλά πλέον τον πολύ ρευστό και πραγματιστικό τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζονται σήμερα τα (επισήμως αναγνωρισμένα ως) αντικείμενα της ερευνητικής δραστηριότητας (βλ. MacLennan, 2000).

Ακολουθώντας τον Kilpatrick (1992) θεωρούμε την ψυχολογία και τα μαθηματικά ως επιστημονικά πεδία τα οποία έχουν μεγάλη ιστορία στο πυρήνα της μαθηματικής εκπαίδευσης και σχολιάζουμε τα άλλα επιστημονικά πεδία, όπως εντοπίστηκαν στη δειγματοληψία μας και καταγράφηκαν αναλυτικά σε πίνακες κατά έτος. Καταχωρήθηκαν τα θεωρητικά πεδία στα οποία αναφέρονται οι συγγραφείς των άρθρων και βασίσαμε τις κρίσεις μας στις συγκεκριμένες αναφορές των συγγραφέων σε αυτά, μερικές από τις οποίες ανέφεραν έναν επώνυμο θεωρητικό. Αυτά τα πεδία ή τα ονόματα αντιπροσωπεύουν τις θεωρίες που χρησιμοποιούνται και όχι τη συχνότητα εμφάνισής τους στα άρθρα. Ταξινομήσαμε τα επιστημονικά αυτά πεδία χρησιμοποιώντας κατηγορίες γενικά αναγνωρισμένες στα μέλη αυτής της ερευνητικής κοινότητας. Στο ESM, υπάρχει μια αύξηση του αριθμού των επιστημονικών πεδίων κατά την περίοδο που εξετάζουμε. Διαπιστώνεται επίσης ότι ενώ οι «ψυχο-κοινωνικές» προσεγγίσεις χρησιμοποιούνται σταθερά, ένα πλήθος κοινωνικών/κοινωνιολογικών, όπως επίσης κοινωνιο-γλωσσολογικών, θεωριών χρησιμοποιούνται όλο και περισσότερο από τους συγγραφείς, αν και παραμένουν αριθμητικά περιορισμένες. Στο JRME οι ψυχο-κοινωνικές θεωρίες φαίνεται να παραμένουν σταθερές στις προτιμήσεις των συγγραφέων, κατά τη χρονική περίοδο που εξετάζουμε, αλλά και εδώ ένα ευρύτερο φάσμα επιστημονικών πεδίων, κυρίως θεωρίες από την κοινωνιολογία, τις κοινωνιο-πολιτισμικές σπουδές, τη γλωσσολογία, την κοινωνική γλωσσολογία και την σημειωτική, αν και σε μικρούς αριθμούς, χρησιμοποιούνται κατά τα έτη που εξετάζονται. Στα πρακτικά του PME, το οποίο παραδοσιακά κυριαρχείται από την ψυχολογία όπως δηλώνει και το όνομά του, υπάρχει μια ουσιαστική αύξηση των επιστημονικών πεδίων από το 1994, αν και είναι πολύ νωρίς να λεχθεί ότι αυτή η τάση θα συνεχιστεί, αφού στα έτη 1999 και 2000 μειώνεται – αλλά όχι το 2001. Είναι ξεκάθαρο, ότι το πλήθος των επιστημονικών περιοχών σήμερα είναι κάπως μεγαλύτερο από εκείνο της δεκαετίας του 1990.

Σχετικά με τα παιδαγωγικά μοντέλα των ερευνητών, από την ανάλυση μας προκύπτει, ότι η καθημερινή σχολική πρακτική προβάλλεται στην έρευνα της μαθηματικής εκπαίδευσης με έναν κανονιστικό τρόπο και ότι η κύρια πρακτική η οποία προωθείται είναι εκείνη που υποστηρίζεται από μια φιλελεύθερη-προοδευτική ιδεολογία και στοχεύει στην ατομική γνωστική ανάπτυξη, προσανατολισμένη πρώτιστα στο μαθητή-φορέα της γνώσης και – πράγμα που είναι συμβατό με αυτά τα χαρακτηριστικά του μοντέλου - υποδεικνύει ως επίκεντρο της διδασκαλίας και μάθησης τα στοιχεία που είναι παρόντα στο κείμενο του μαθητή, καθώς και τα μαθηματικά ως διακριτή, εξειδικευμένη μορφή δραστηριότητας. Όμως, στη συγκρότηση αυτού του παιδαγωγικού μοντέλου παρουσιάζεται κάποιος βαθμός ασυνέπειας ως προς το χαρακτηριστικό του ισχυρού συνόρου ανάμεσα στα μαθηματικά και στις καθημερινές εμπειρίες των μαθητών.

Διατυπώνοντας μερικά σύντομα σχόλια για τα ευρήματα που αφορούν αυτό που ονομάζουμε *κατάσταση του πεδίου* της μαθηματικής έρευνας, αναφερόμενοι στο διάγραμμα του Παραρτήματος 2, εντοπίζουμε απουσία κάποιων *θέσεων υποκειμένου* – με βάση το μοντέλο που παρουσιάστηκε παραπάνω - αλλά και τάσεις επικράτησης κάποιων άλλων. Το εύρημα ότι, η «μαθηματική εκπαίδευση» φαίνεται να ορίζει το χώρο της δραστηριότητάς της σχεδόν αποκλειστικά γύρω από το σχολείο σημαίνει για μας ότι δεν υπάρχουν ενδείξεις που να υποδεικνύουν την ύπαρξη μιας θέσης στο πεδίο της έρευνας, από την οποία ο *δημόσιος διανοούμενος* θα έπαιζε κάποιο ρόλο. Με άλλα λόγια, μια τέτοια θέση δεν αναγνωρίζεται ως αξία στο λόγο που συγκροτείται. Η ερμηνεία μας για τα δεδομένα είναι ότι η κυριαρχούσα τοποθέτηση είναι αυτή του *ερευνητή ως εκπαιδευτή εκπαιδευτικών* (βλ. Πίνακα 3 στο Παράρτημα 3). Για παράδειγμα, το σημαντικότερο «κοινό», το οποίο συγκροτείται στο πλαίσιο της ερευνητικής δραστηριότητας που εξετάζεται στη μελέτη αυτή, συσσωρεύεται στην κατηγορία "ερευνητές και εκπαιδευτικοί" (72.3% στο ESM, 65.9% στο JRME και 75.7% στα PME). Μια παραπέρα υποστήριξη αυτής της ερμηνείας προέρχεται από τα ευρήματά μας στο ερώτημα του «παιδαγωγικού μοντέλου». Η πλειονότητα των κειμένων κατασκευάζει με σαφήνεια ένα παιδαγωγικό μοντέλο (85.3%, 89.1% και 83.8% στο ESM, στο JRME και στα PME αντίστοιχα, βλ. Πίνακα 4 στο Παράρτημα 3). Το μοντέλο που προδιαγράφεται είναι εκείνο του *ατόμου που μαθαίνει- φορέα της γνώσης* – συνεπές με το ενδιαφέρον για την επίλυση προβλημάτων ως επίκεντρο της έρευνας – όπου, γενικά, αποδίδεται αξία σχεδόν σε όλα τα χαρακτηριστικά της φιλελεύθερης-προοδευτικής παιδαγωγικής. Επί πλέον το εύρημα ότι δεν προδιαγράφεται σχεδόν κανένα από τα παιδαγωγικά μοντέλα πολιτικής ή πολιτισμικής ενδυνάμωσης ενισχύει την άποψή μας ότι τα επιστημονικά μέσα που χρησιμοποιούνται, και σε αυξανόμενο ποσοστό, υπηρετούν σκοπούς που σχετίζονται με την τοποθέτηση στη θέση του επαγγελματία πανεπιστημιακού καθηγητή ή, στην περίπτωση του ESM, με μια προσπάθεια, ίσως, να επιστρατευτούν μέσα τα οποία θα βοηθήσουν στη συγκρότηση στρατηγικών αντίστασης (στην επιβολή του κυρίαρχου λόγου) και/ή στην ενίσχυση της εικόνας των ερευνητών στο πεδίο της μαθηματικής εκπαίδευσης ως ακαδημαϊκών διανοουμένων/ερευνητών.

Συμπερασματικά θα θέλαμε να τονίσουμε ότι υπάρχει ανάγκη αναστοχασμού αναφορικά με τη θεωρία και τις μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν στην αυτή, καθώς επίσης και ανάγκη αποτίμησης της όλης προσέγγισης ως προς την επάρκειά της να συμβάλλει στην κατανόηση του πεδίου και της θέσης του στο ευρύτερο πεδίο των επιστημών της εκπαίδευσης. Αξίζει επίσης να αναστοχαστούμε σχετικά με την επάρκεια του πεδίου να αναδείξει και να χειριστεί ευρύτερα ζητήματα τα οποία απασχολούν την εκπαιδευτική πολιτική σήμερα. Ειδικότερα, είναι σημαντικό να συγκεντρώσουμε στοιχεία και να συγκροτήσουμε μια καθαρότερη εικόνα των πραγματικών επιτευγμάτων των ερευνητών του πεδίου στα ζητήματα της ισότητας και της κοινωνικής δικαιοσύνης. Αυτό θα μπορούσε να σημαίνει μια μελέτη των δημοσιεύσεων σε περιοδικά έξω από το κυρίαρχο ρεύμα. Επιπλέον πιστεύουμε ότι οι αναπλαισιώσεις των ερευνητικών κειμένων στα κείμενα που αξιοποιούνται στην εκπαίδευση των εκπαιδευτικών, καθώς και οι συνέπειες τέτοιου είδους αναπλαισιώσεων για όσους ασχολούνται με την εκπαίδευση των εκπαιδευτικών και για τους εκπαιδευτικούς παραμένει η σημαντικότερη

περιοχή περαιτέρω έρευνας. Αξίζει επίσης να διερευνηθεί, αν η προσέγγιση που υιοθετήθηκε εδώ μπορεί να κατευθύνει κάπως την έρευνα που τοποθετεί τα παραπάνω ζητήματα στο επίκεντρό της.
Τέλος, ενδιαφερόμαστε για τη δημιουργία μιας καθαρότερης εικόνας για την επίδραση επιστημονικών περιοχών, όπως η διδακτική των μαθηματικών, στις επιστήμες της εκπαίδευσης. Για παράδειγμα ποιος είναι ο ρόλος τους στον αυξανόμενο *τεχνοκρατικό* προσανατολισμό του πεδίου των επιστημών της εκπαίδευσης (Tsatsaroni *et al*, υπό έκδοση); Είναι βέβαιο ότι η κατανόηση των ζητημάτων αυτών απαιτεί να εργαστούμε τόσο με θεωρητικά όσο και με εμπειρικά μέσα.

Ευχαριστίες

Ευχαριστούμε για την οικονομική υποστήριξη το Economic and Social Research Council, UK (NO. R000223610).
Ευχαριστούμε, επίσης, την Guo Rong Xu, βοηθό ερευνήτρια, η οποία με την εξαιρετική δουλειά της συνέβαλε αποφασιστικά στην επιτυχή ολοκλήρωση του προγράμματος.

Δημοσιεύσεις

Lerman, S., Xu, G., & Tsatsaroni, A. (2003a) Developing theories of mathematics education research: the PME story *Educational Studies in Mathematics 51*(1-2), 23-40.
Lerman, S., Xu, G., & Tsatsaroni, A. (2003b) A sociological description of changes in the intellectual field of mathematics education research: Implications for the identities of academics. *Proceedings of the British Society for Research in Learning Mathematics, 23*(2), 43-48.
Lerman, S., Xu, G., & Tsatsaroni, A. (2003c) An analysis of PME research: Theories, methods and the identities of academics. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. Zillox (Eds.) *Proceedings of the Twenty-Seventh Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 1, p. 242), CRDG, College of Education, University of Hawai'i.
Tsatsaroni, A. Lerman, S. & Xu, G. (in press – ERIC Database)) A sociological description of changes in the intellectual field of mathematics education research: Implications for the identities of academics.

Αδημοσίευτα Κείμενα

Tsatsaroni, A. Lerman, S. & Xu, G. (2003) A sociological description of changes in the intellectual field of mathematics education research: Implications for the identities of academics. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Chicago, April.
Lerman, S. (2003) Invited lecture to Faculty of Education, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, "The Production of Theories of Teaching and Learning: The Case of Mathematics Education", November.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Bernstein, B. (1998/1975) Class and Pedagogies: Visible and invisible, in A.H. Halsey, H. Lauder, P. Brown & A.S. Wells (eds) *Education, culture, economy and society*, Buckingham: Open University Press.

Bernstein, B. (1996) *Pedagogy, symbolic control and identity: Theory, research, critique*. London: Taylor & Francis.

Bernstein, B. (2000) *Pedagogy, Symbolic Control and Identity. Theory, research, critique* (2nd Edition). New York: Rowman & Littlefield.

Bocock, R. (1992) *The cultural formations of modern society, in S. Hall & B. Gieben (eds), Formations of Modernity*, Cambridge, U.K.:Polity Press in Association with the Open University.

Bourdieu, P. (1991) Language and symbolic power, transl. G. Raymond and M. Adamson, Cambridge, U.K.:Polity Press

Brown, A. (1999) Parental participation, positioning and pedagogy: a sociological study of the IMPACT primary school mathematics project. *Collected Original Resources in Education*, 24(3), pp. 7/A02-11/C09

Butler, J. (1999) Performativity's social magic, in R. Shusterman (ed), *Bourdieu. A Critical Reader*, Oxford, U.K.: Blackwell.

Chassapis, D. (2002) Social groups in mathematics education research: An investigation into mathematics education-related research articles published from 1971 to 2000. In P. Valero & O. Skovsome (Eds) *Proceedings of Third International Mathematics Education and Society Conference,* 1, pp.273-281. Centre for Research in Learning Mathematics, Danish University of Education.

Dowling P.C. (1998) *The Sociology of Mathematics Education: Mathematical Myths/Pedagogic Texts*. London: Falmer Press.

Hanna, G. & Sidoli, N. (2002) The story of ESM. *Educational Studies in Mathematics*, 50(2), 123-156.

Hartley, D. (1999) Marketing and the 're-enchantment' of social management, *British Journal of Sociology of Education*, Vol. 20, No.3, pp. 309-323.

Hasan, R. (1999) Society, language and the mind: the meta-dialogism of Basil Bernstein's theory, in F. Christie (ed) *Pedagogy and the Shaping of Consciousness. Linguistic and Social Processes*, London and New York: Cassell

Kieran,, C. (1994) Doing and seeing things differently: A 25-year retrospective of mathematics education research on learning, *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 583-607.

Kilpatrick, J. (1992) A history of research in mathematics education, in: D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* New York: MacMillan.

Lerman, S. (2000) The social turn in mathematics education research. In J. Boaler (Ed.) *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning* Westport, CT: Ablex.

Lerman, S. & Tsatsaroni, A. (1998) Why children fail and what mathematics education studies can do about it: The role of sociology, in P. GATES (Ed.) *Proceedings of the First International Conference on Mathematics, Education and Society (MEAS1),* pp. 26-33. Centre for the Study of Mathematics Education, University of Nottingham.

Lubienski, S. T. & Bowen, A. (2000) Who's counting? A Survey of mathematics education research 1982-1998. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(5), 626-633.

Maclennon, G. (2000) The new positivity. In Eldreidge (Ed.) *For Sociology* Durham: Sociology Press.

Maton, K. (2000) Languages of legitimation: the structuring significance for intellectual fields of strategic knowledge claims, *British Journal of Sociology of Education*, 21 (2), 147-167.

Moore, R. (2001) Bernstein, Durkheim and 'the voice of pedagogy', Paper presented to *the American Educational Research Association Conference*, Seattle April.

Morgan, C., Tsatsaroni, A. & Lerman, S. (2002) Mathematics teachers' positions and practices in discourses of assessment. *British Journal of Sociology of Education*, 23(3), 445-461.

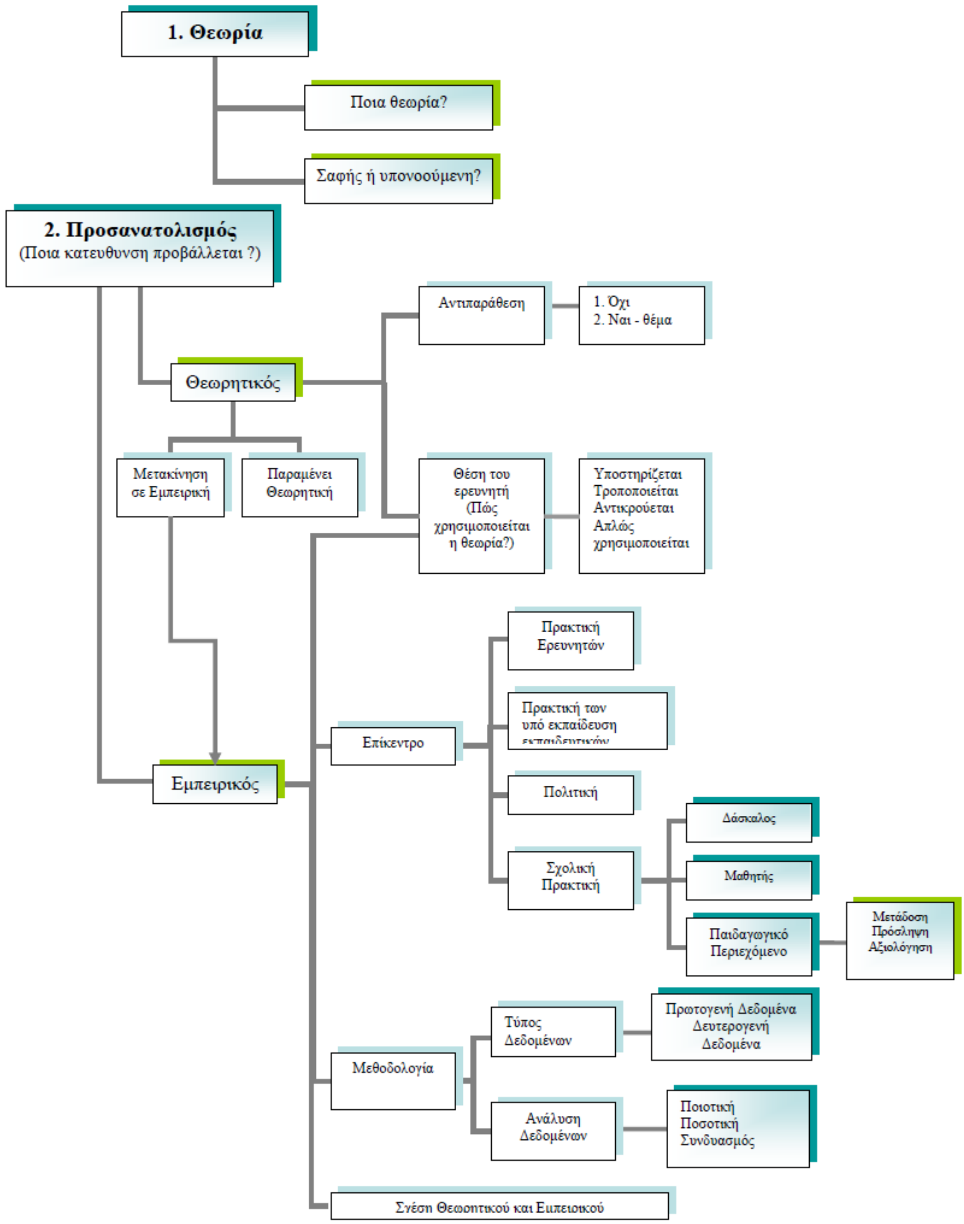
Muller, J. (2000) Critics and reconstructors. In J. Muller (Ed), *Reclaiming Knowledge: Social Theory and Education Policy* London: Routledge/Falmer.

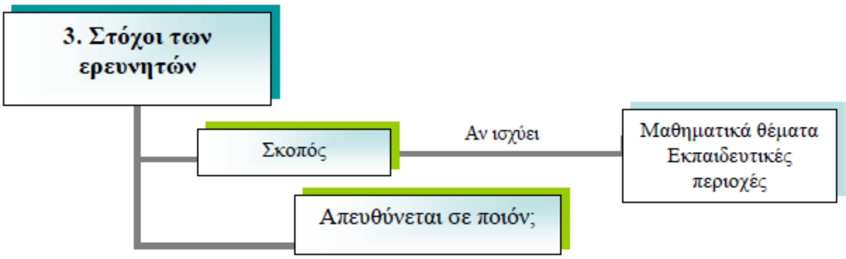
Niss, M (2000) Key issues and trends in research on mathematical education. Plenary address to *Ninth International Congress on Mathematical Education*, Makuhari, Japan.

Yang, M. T.-L. & Cobb, P (1995) A cross-cultural investigation into the development of place value concepts of children in Taiwan and the United States, *Educational studies in Mathematics*, 28(1), 1-33.

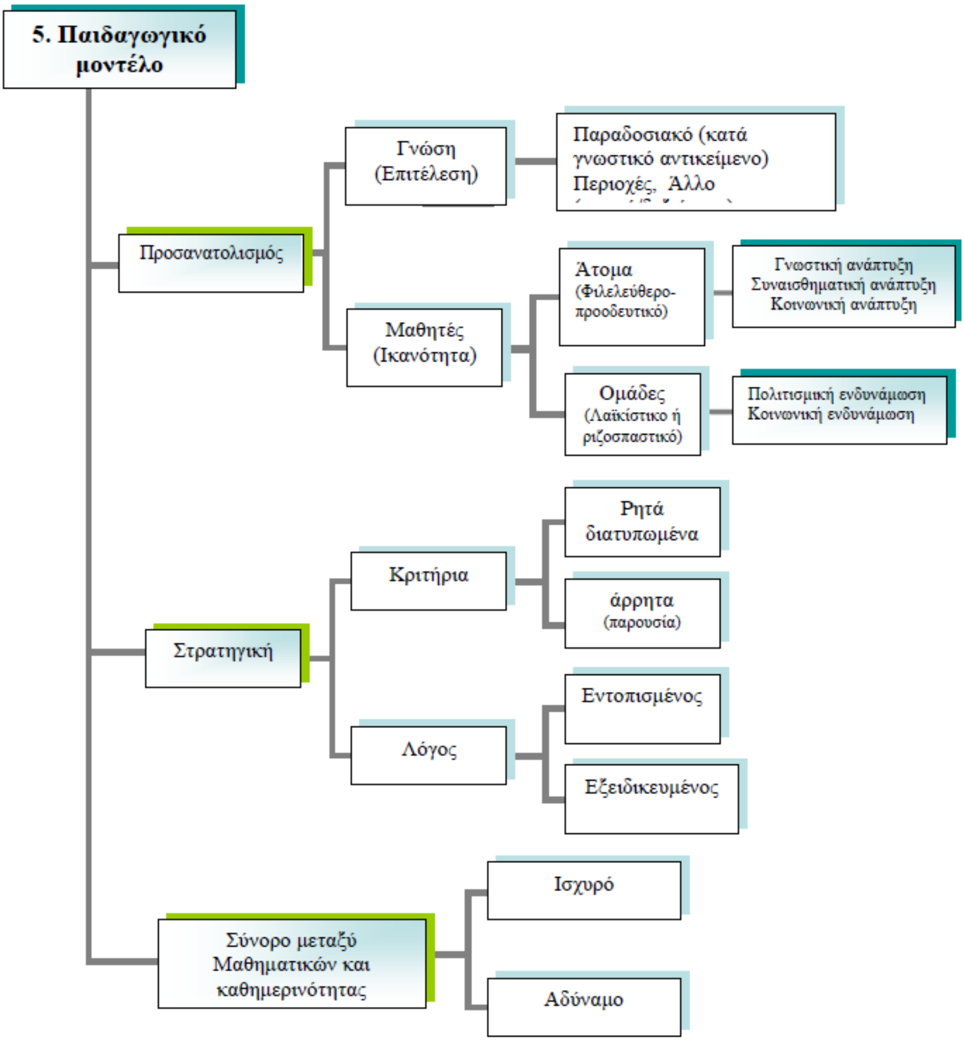
Παράρτημα 1

0. Καταγράφονται τα εξής: Τίτλος άρθρου, Συγγραφείς, Αριθμός συγγραφέων, Όνομα περιοδικού, Σύντομη περιγραφή και Λέξεις-κλειδιά των συγγραφέων.

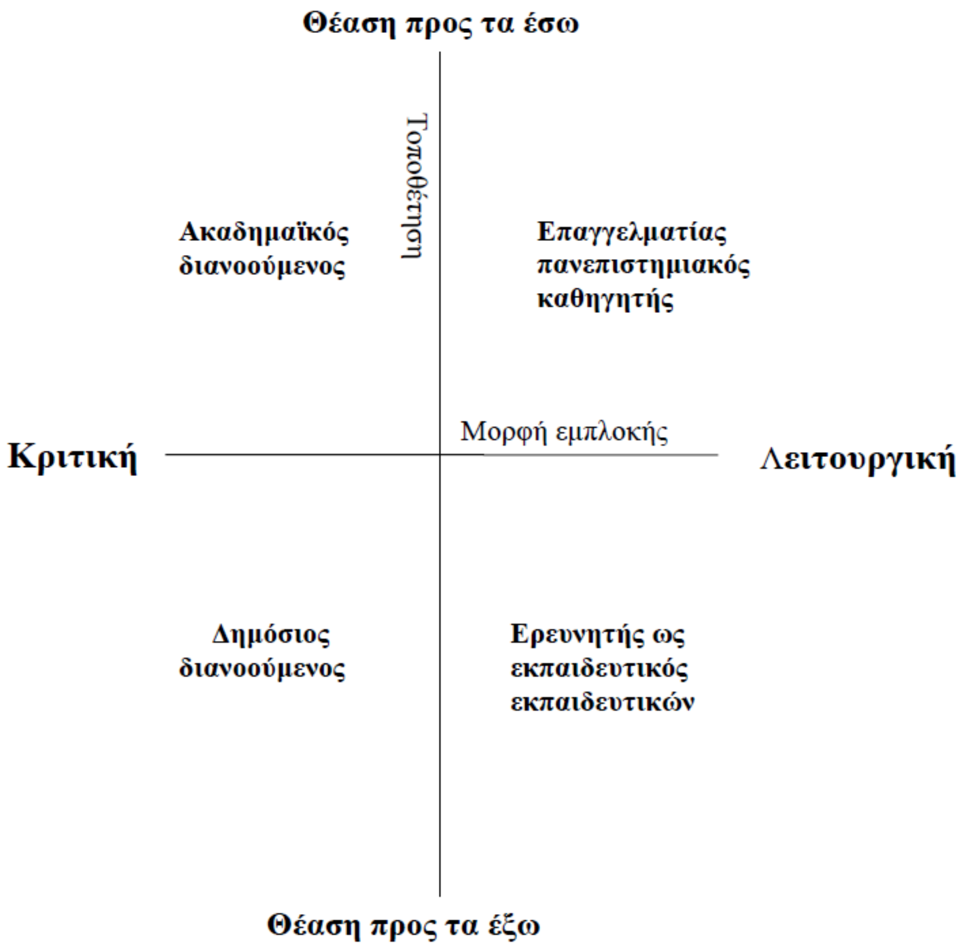




4. Ιδεολογικοί δεσμοί



Παράρτημα 2


Θέαση προς τα έσω
Τοποθέτηση
Ακαδημαϊκός διανοούμενος
Επαγγελματίας πανεπιστημιακός καθηγητής
Μορφή εμπλοκής
Κριτική
Λειτουργική
Δημόσιος διανοούμενος
Ερευνητής ως εκπαιδευτικός εκπαιδευτικών
Θέαση προς τα έξω

Παράρτημα 3

Πίνακας 1 Τύπος Θεωρίας

	PME				ESM				JRME			
	90 -95		96 - 01		90 - 95		96 - 01		90 - 95		96 - 01	
	No.	%	No.	%	No.	%	No.	%	No.	%	No.	%
Παραδοσιακές ψυχολογικές & μαθηματικές θεωρίες	49	**73.1**	49	**60.5**	52	**63.4**	49	**51.6**	34	**54.8**	44	**57.9**
Ψυχοκοινωνικές θεωρίες, συμπεριλαμβανομένων των επανεμφανιζόμενων	8	**11.9**	8	**9.9**	8	**9.8**	19	**20.0**	4	**6.5**	10	**13.2**
Κοινωνιολογία, κοινωνιολογία της εκπαίδευσης, κοινωνικο-πολιτιστικές σπουδές & ιστορικά προσανατολισμένες σπουδές	2	**3.0**	8	**9.9**	3	**3.7**	11	**11.6**	1	**1.6**	6	**7.9**
Γλωσσολογία, κοινωνιο-γλωσσολογία & σημειωτική	0	**0.0**	2	**2.5**	1	**1.2**	5	**5.3**	2	**3.2**	6	**7.9**
Γειτονικά πεδία στη Μαθ. εκπ., Εκπ. στις Φυσικές Επιστήμες & Αναλυτικά προγράμματα	1	**1.5**	0	**0.0**	0	**0.0**	0	**0.0**	1	**1.6**	0	**0.0**
Σύγχρονα ευρύτερα θεωρητικά ρεύματα, φεμινισμός, μετα-δομισμός & ψυχανάλυση	1	**1.5**	0	**0.0**	8	**9.8**	1	**1.1**	0	**0.0**	1	**1.3**
Φιλοσοφία & φιλοσοφία μαθηματικών	0	**0.0**	3	**3.7**	0	**0.0**	3	**3.2**	1	**1.6**	1	**1.3**
Εκπαιδευτική θεωρία και έρευνα	2	**3.0**	0	**0.0**	1	**1.2**	1	**1.1**	2	**3.2**	0	**0.0**
Άλλο	0	**0.0**	0	**0.0**	1	**1.2**	1	**1.1**	2	**3.2**	0	**0.0**
Καμιά θεωρία	4	**6.0**	11	**13.6**	8	**9.8**	5	**5.3**	15	**24.2**	8	**10.5**
Σύνολο	67		81		82		95		62		76	

Πίνακας 2 Μέθοδοι

	PME			ESM			JRME			Σύνολο
	90-01 (135)	90-95 (63)	96-01 (72)	**90-01 (139)**	90-95 (63)	96-01 (76)	**90-01 (122)**	90-95 (54)	96-01 (68)	**90-01 (396)**
Ποιοτικές	**63.7**	69.8	58.3	**62.6**	49.2	73.7	**41.0**	29.6	50.0	**56.3**
Ποσοτικές	**16.3**	11.1	20.8	**15.8**	28.6	5.3	**43.4**	57.4	32.4	**24.5**
Συνδυασμός	**20.0**	19.0	20.8	**21.6**	22.2	21.1	**15.6**	13.0	17.6	**19.2**

Πίνακας 3 Κοινό (σε ποιόν απευθύνεται;)

	PME	**%**	**ESM**	**%**	**JRME**	**%**
Ερευνητές	12	**8.1**	35	**19.8**	15	**10.9**
Ερευνητές & Δάσκαλοι	112	**75.7**	128	**72.3**	91	**65.9**
Ερευνητές & Εκπαιδευτικοί εκπαιδευτικών	18	**12.2**	10	**5.7**	20	**14.5**
Ερευνητές & Υπεύθυνοι Εκπ. Πολιτικής	6	**4.1**	4	**2.3**	12	**8.7**
Σύνολο	**148**		**177**		**138**	

Πίνακας 4 Παιδαγωγικό μοντέλο

	PME		**ESM**		**JRME**		**Συνολικά**	
	No.	**%**	**No.**	**%**	**No.**	**%**	**No.**	**%**
Αριθμός άρθρων με παιδαγωγικό μοντέλο	124	**83.8**	151	**85.3**	123	**89.1**	398	**86.0**
Αριθμός άρθρων χωρίς ένδειξη παιδαγωγικού μοντέλου	24	**16.2**	26	**14.7**	15	**10.9**	65	**14.0**
Σύνολο	148		177		138		463	

Η «ανάγνωση» ενός γεωμετρικού σχήματος και η σημασία της διαδικασίας «απόδοσης ρόλων»

Ευγενία Κολέζα
ΠΤΔΕ, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Ελισσάβετ Καμπάνη
Καθηγήτρια ΜΕ, MSc, Phd

Εισαγωγή

Τα γεωμετρικά σχήματα, ως μια μορφή αναπαράστασης των γεωμετρικών εννοιών, παίζουν καθοριστικό ρόλο όχι μόνο για την κατανόηση αυτών των εννοιών αλλά και για τη συνολικότερη λειτουργία της γεωμετρικής σκέψης. Πρόκειται για σύνθετες μορφές αναπαράστασης, δεδομένου ότι αποτελούν τη συγχώνευση δυο διαφορετικών μορφών νοητικών αναπαραστάσεων, συμβολικών και σχηματικών (figural). Σύμφωνα με τον Fischbein, τα γεωμετρικά σχήματα δεν είναι υλικά αντικείμενα που παρουσιάζουν ατέλειες ούτε αντίγραφα πραγματικών αντικειμένων, αλλά «νοητικές εικόνες των οποίων οι ιδιότητες καθορίζονται από τον ορισμό τους», και γι’ αυτό τις χαρακτηρίζει «σχηματικές έννοιες»(figural concepts)(1993, σ.149).

Η έρευνα που αφορά στα γεωμετρικά σχήματα ασχολείται με γενικά θέματα, όπως θέματα που αφορούν τη φύση, τη δημιουργία και την εξέλιξη των νοητικών αναπαραστάσεων των γεωμετρικών σχημάτων, ή το ρόλο τους στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων, αλλά και με ειδικότερα θέματα όπως, τις διαδικασίες κατασκευής και τροποποίησης αυτών των νοητικών αναπαραστάσεων κατά τη διάρκεια της επίλυσης ενός προβλήματος.

Ο Davis ισχυρίζεται ότι οι νοητικές αναπαραστάσεις των γεωμετρικών σχημάτων (τα γνωστικά δομικά στοιχεία) δεν επαρκούν για τη λύση γεωμετρικών προβλημάτων. Τα άτομα χρειάζονται επιπλέον νοητικές αναπαραστάσεις μετασχηματισμών, όπως στροφής, παράλληλης μετατόπισης, κ.ά. για να μετασχηματίζουν τα σχήματα ή για να δημιουργούν άλλα, με αφορμή αυτά (1997).

Οι αναπαραστάσεις που κατασκευάζουν οι μαθητές όταν προσπαθούν να λύσουν ένα γεωμετρικό πρόβλημα είναι κρίσιμες αφού, σύμφωνα με τον Cifarelli (1998), λειτουργούν ως έλεγχος της βιωσιμότητας των γνώσεών τους.

Η μελέτη των διαδικασιών κατασκευής και εξέλιξης των «σχηματικών εννοιών» σε ένα μαθητή είναι εφικτή μέσω της διερεύνησης συγκεκριμένων ικανοτήτων του και συγκεκριμένα, των ικανοτήτων για αναγνώριση και χρήση της σχηματικής έννοιας.

Η αναγνώριση και η χρήση μιας γεωμετρικής έννοιας είναι δυνατόν να διερευνηθούν με άξονα κάθε μια από τις γνωστικές λειτουργίες που διέπουν τη γεωμετρική σκέψη: τη λειτουργία νοερής απεικόνισης[1] (visualization) που σχετίζεται με την αναπαράσταση του χώρου, τη λειτουργία κατασκευής

[1] Χρησιμοποιούμε τον όρο «νοερή απεικόνιση» αντί του όρου «οπτικοποίηση» άλλων ερευνητών, γιατί αποδίδουμε σε αυτόν ένα ευρύτερο νόημα, σύμφωνα και με την αντίληψη του Duval.

σχημάτων με γεωμετρικά όργανα (construction) και τη λειτουργία συλλογισμού (reasoning) με στόχο την επέκταση της γνώσης, την απόδειξη, ή την επεξήγηση (Duval, 1998).
Στα επόμενα, περιοριζόμαστε στην ανάλυση της λειτουργίας της νοερής απεικόνισης. Ειδικότερα, με βάση συγκεκριμένα παραδείγματα, αναδεικνύουμε τη σημασία του «προτύπου» για τη νοερή απεικόνιση και αναλύουμε τη σχέση του με μια ιδιαίτερα σημαντική διαδικασία που ονομάζουμε «απόδοση ρόλου» στα στοιχεία του σχήματος.

Η λειτουργία της νοερής απεικόνισης

Η έρευνα επισημαίνει τη σημασία της νοερής απεικόνισης, δηλαδή του συλλογισμού με βάση νοητικές εικόνες (mental images), καθώς και του ρόλου που διαδραματίζει η φαντασία σε αυτές κατά τη μάθηση των Μαθηματικών (Bishop, 1989, Presmeg, 1986b, Dorfler, 1993, Tall, 1991, De Windt- King & Goldin, 2001).
Συχνά, η νοερή απεικόνιση συγχέεται με τη διαδικασία της όρασης. Αυτό είναι λάθος, αφού διαφέρει ο τρόπος με τον οποίο «βλέπουμε» στην κάθε μία. Τη διαφορά ανάμεσά τους εξηγεί ο Duval «...... *(η νοερή απεικόνιση) αναφέρεται σε μια γνωστική δραστηριότητα που είναι εγγενώς σημειωτική..... Αντίθετα με την όραση που μας δίνει απευθείας πρόσβαση στο αντικείμενο, η νοερή απεικόνιση βασίζεται στην παραγωγή μιας σημειωτικής αναπαράστασης...........(η οποία) δείχνει σχέσεις ή καλύτερα, οργάνωση των σχέσεων ανάμεσα στις μονάδες αναπαράστασης (που μπορεί να είναι 1D ή 2D)*[2]» (Duval, 2002). Η νοερή απεικόνιση συνίσταται στην απευθείας αντίληψη της συνολικής οργάνωσης των σχέσεων ενός γεωμετρικού σχήματος και επιπλέον στη διάκριση του τι είναι σημαντικό σε αυτήν. Εδώ εντοπίζονται και οι δυσκολίες σχετικά με τη νοερή απεικόνιση επειδή πρέπει, ως λειτουργία, να επιλέξει τα στοιχεία του γεωμετρικού σχήματος που θεωρούνται σημαντικά για τη συγκεκριμένη περίπτωση (Duval, 2002).
Παρόλο που οι νοητικές εικόνες είναι εικόνες ανάλογες εκείνων που καταγράφονται με την αίσθηση της όρασης (πραγματικές εικόνες), η διαδικασία δημιουργίας τους είναι ακριβώς η αντίστροφη. Βλέποντας μία εικόνα αντλούμε από αυτήν ένα σύνολο πληροφοριών, ενώ στην κατασκευή νοερών εικόνων συμβαίνει το αντίστροφο: μία ή περισσότερες πληροφορίες προκαλούν την παραγωγή μιας εικόνας στο νου με τη συμβολή της φαντασίας. Ο Kosslyn εξηγεί τη διαφορά ανάμεσα σε πραγματικές και νοερές εικόνες με μία ωραία αναλογία: *«Ας θεωρήσουμε το οπτικό πεδίο σαν μία οθόνη που συνδέεται με μία μηχανή λήψης και με ένα video. Μία εικόνα μπορεί να προβάλλεται στην οθόνη είτε από την μηχανή λήψης (τα μάτια κατά τη διάρκεια της αντίληψης) είτε από το video (πληροφορίες που έχουν καταγραφεί παλαιότερα, ως αναπαραστάσεις)*»(Kosslyn & Koenig,1995,σ. 133).

[2] Με το σύμβολο 1D ο Duval συμβολίζει τη μία διάσταση, όπως, για παράδειγμα, αυτήν ενός ευθυγράμμου τμήματος, ενώ με το σύμβολο 2D τις δύο διαστάσεις, όπως αυτήν ενός επιπέδου σχήματος (κύκλου, τετραγώνου κλπ).

Νοερή απεικόνιση και κατανόηση

Ο Duval επισημαίνει την πολυπλοκότητα των λειτουργιών που συνιστούν τη νοερή απεικόνιση λέγοντας ότι *«η νοερή απεικόνιση στη Γεωμετρία περιλαμβάνει ταυτόχρονα την αντιληπτική, λεκτική και λειτουργική κατανόηση ενός γεωμετρικού σχήματος σαν μια αναπαράσταση του χώρου»* (Duval, 1998, σ.48). Συγκεκριμένα,

- η αντιληπτική κατανόηση αναφέρεται σε αυτό που βλέπουμε με την πρώτη ματιά στο γεωμετρικό σχήμα και το οποίο μας δημιουργεί μια σταθερή άποψη γι' αυτό.
- η λεκτική κατανόηση του σχήματος αφορά στη συσχέτισή του με λεκτικούς ή συμβολικούς προσδιορισμούς, που καθορίζουν πλήρως το αντικείμενο που αναπαρίσταται. Για να κατανοηθεί λεκτικά ένα γεωμετρικό σχήμα απαιτείται μία αλλαγή στην αντιληπτική κατανόηση. Συγκεκριμένα, πρέπει να μεταβληθεί ο τρόπος με τον οποίο βλέπουμε το σχήμα και από ολόκληρη τη μορφή (στις δύο διαστάσεις: 2D) να μπορέσουμε να διακρίνουμε τα επιμέρους στοιχεία της (στη μία διάσταση:1D) και τις μεταξύ τους σχέσεις. Με τη λεκτική κατανόηση αυξάνει η αποτελεσματικότητα μιας γεωμετρικής απεικόνισης, στο βαθμό που τα επιμέρους στοιχεία του σχήματος συνδέονται με προτάσεις, οι οποίες καθορίζουν τις ιδιότητές τους.
- η λειτουργική κατανόηση του σχήματος αφορά στη νοητική ή υλική του επεξεργασία με τρόπο που οι φόρμες να αναλύονται και να οργανώνονται από την αρχή έτσι, ώστε να διακρίνουμε και άλλες (φόρμες) που δεν ήταν ορατές με την πρώτη ματιά. Στα πλαίσια ενός συγκεκριμένου προβλήματος κάποιες από αυτές τις νέες φόρμες, είναι σχετικές και μπορούν να μας οδηγήσουν στη σύλληψη της λύσης του προβλήματος. Το πλεόνασμα μορφών και σχημάτων που προκύπτει από τη λειτουργική κατανόηση συνιστά, κατά τον Duval, την ευρετική δύναμη των γεωμετρικών σχημάτων (Duval, 1998, 2002).

Η λειτουργική κατανόηση είναι «οπτική τροποποίηση» του γεωμετρικού σχήματος, με τρόπο ώστε να διατηρούνται οι ιδιότητές του και διακρίνεται (Duval, 2002) σε τρία είδη:

i. την τροποποίηση των μερών του (mereologic modification), κατά την οποία το αρχικό σχήμα διαιρείται σε επιμέρους σχήματα τα οποία, ακολούθως, συνδυάζονται εκ νέου ώστε να δημιουργήσουν άλλα σχήματα ή προκαλούν την εμφάνιση νέων υπό – σχημάτων[3]. Έτσι μετασχηματίζονται τα γεωμετρικά σχήματα που εμφανίστηκαν «με την πρώτη ματιά».

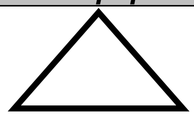
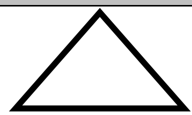
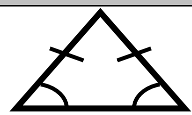
[3] Χαρακτηριστικό παράδειγμα τροποποίησης των μερών είναι ο τρόπος εύρεσης του τύπου του εμβαδού ενός πλάγιου παραλληλόγραμμου, από τον τύπο του εμβαδού του ορθογωνίου:

ii. την οπτική τροποποίηση (optical modification), κατά την οποία ένας μετασχηματισμός (μεγέθυνση, σμίκρυνση) επιδρά στο σχήμα και του αλλάζει το μέγεθος ή το διαστρεβλώνει και έτσι, δίχως στην πραγματικότητα να αλλάξει τίποτα, το σχήμα φαίνεται διαφορετικό.
iii. την τροποποίηση της θέσης (positional modification), κατά την οποία αλλάζει ο προσανατολισμός του σχήματος.

Συγκρίνοντας τα τρία είδη κατανόησης που προαναφέραμε διαπιστώνουμε πως, η αντιληπτική και η λειτουργική κατανόηση αναφέρονται στο ίδιο εικονικό σύστημα αναπαράστασης, ενώ η λεκτική κατανόηση αναφέρεται στη γλώσσα. Ακόμα, η αντιληπτική και η λειτουργική κατανόηση παρότι αναφέρονται στο ίδιο σύστημα διαφέρουν ως προς τον τρόπο θέασης του σχήματος. Η αντιληπτική περιορίζεται στα φυσικά χαρακτηριστικά του σχήματος ενώ η λειτουργική περιλαμβάνει νοητικούς χειρισμούς που μετασχηματίζουν ή τροποποιούν το σχήμα διατηρώντας ταυτόχρονα τις ιδιότητές του.

Φαινομενικά ίδια σχήματα, κατανοούνται με εντελώς διαφορετικούς τρόπους. Στα πλαίσια μιας αντιληπτικής κατανόησης, Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 1, η εικόνα (α) μπορεί να αναπαριστά ένα χάρτινο καπέλο, τη σκεπή από ένα σπίτι, το γράμμα Δ,.... ή ένα τρίγωνο ισοσκελές, ισόπλευρο ή τυχαίο. Ακόμα και στην περίπτωση που δούμε το σχήμα (α) σαν τρίγωνο, δεν μπορούμε να αποφασίσουμε για το είδος του, έστω κι αν κάνουμε ακριβείς μετρήσεις. Πάντα θα βρισκόμαστε στο στάδιο του «περίπου».

Το τρίγωνο (α) δεν είναι απαραίτητα μια γεωμετρική εικόνα, γιατί δεν υπάρχουν κάποιες υποθέσεις που να καθορίζουν τις ιδιότητές του, είτε υπό μορφή λεκτικών δεδομένων (περίπτωση β) ή από την μετάφρασή τους μέσα σε ένα κώδικα (περίπτωση γ). Στις περιπτώσεις (β) και (γ) έχουμε λεκτική κατανόηση, δηλαδή, καθαρά γεωμετρικές αναπαραστάσεις (ένα ισοσκελές τρίγωνο) οι οποίες υποδηλώνονται είτε με μία πρόταση είτε από το συμβολισμό των σχέσεων ανάμεσα στα στοιχεία του τριγώνου.

αντιληπτική κατανόηση	***λεκτική κατανόηση***	
	 **«ένα ισοσκελές τρίγωνο»**	
(α) *εικόνα*	*(β)* *γεωμετρικό σχήμα*	*(γ)* *γεωμετρικό σχήμα*

Σχήμα 1: *Παράδειγμα αντιληπτικής – λεκτικής κατανόησης του ίδιου γεωμετρικού σχήματος*

Η λειτουργική κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος είναι ανεξάρτητη από τη λεκτική του κατανόηση. Ο τρόπος που βλέπουμε δεν ξεκινά από υποθέσεις, ούτε προκύπτει από μαθηματικούς παραγωγικούς συλλογισμούς. Αν δεν υπήρχε η ανεξαρτησία της λειτουργικής από τη λεκτική κατανόηση, τα γεωμετρικά σχήματα θα είχαν εικονογραφική και όχι ευρετική λειτουργία (Duval, 2002).

Συνεπώς, η νοερή απεικόνιση αποτελεί τη λειτουργία εκείνη που είναι υπεύθυνη για τη διαχείριση των πληροφοριών στο νου και διευκολύνει την κατανόηση και τη χρήση των γεωμετρικών εννοιών σε αντιληπτικό, λεκτικό και λειτουργικό επίπεδο. Ως εκ τούτου, είναι φανερός ο θεμελιώδης ρόλος της νοερής απεικόνισης στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων.

Ο τρόπος σχηματισμού «νοερών εικόνων» και η «Θεωρία του Προτύπου»

Σχετικά με τη φύση των νοερών εικόνων έχουν διατυπωθεί διάφορες απόψεις στο χώρο της Γνωστικής Ψυχολογίας. Από τις επικρατέστερες, παρόλο που έχει αμφισβητηθεί έντονα, είναι η «Θεωρία του Προτύπου» ("The prototype theory of concepts").

Το «πρότυπο» μπορεί να οριστεί ως *«μια αποθηκευμένη αναπαράσταση των συνηθισμένων χαρακτηριστικών που συνδέονται με τα παραδείγματα μιας έννοιας»* (Smith et al.1988). Σύμφωνα με τη «Θεωρία του Προτύπου», το πρότυπο είναι μια νοητική αναπαράσταση που χρησιμοποιείται ως μοντέλο και μπορεί να αντικαταστήσει έναν απεριόριστο αριθμό συγκεκριμένων αντικειμένων (Rosch 1973a, 1973b; Tsohatzidis 1990; MacLaury 1991). Το πρότυπο, δηλαδή, είναι είτε μια συλλογή χαρακτηριστικών ιδιοτήτων, είτε το καλύτερο παράδειγμα της έννοιας, και χρησιμοποιείται ως μοντέλο για να συλλογιζόμαστε σε ανάλογες περιπτώσεις[4].

Για να σχηματιστεί ένα πρότυπο, δε χρειάζεται να αναλογιστούμε τι κοινό υπάρχει σε μια σειρά παραδειγμάτων. Ο τρόπος οργάνωσης της μνήμης φαίνεται πως γεννά αυτόματα αυτές τις διαδικασίες αφαίρεσης (Kosslyn, 1995, σ. 366), δηλαδή δημιουργεί τα πρότυπα ως αφηρημένες μορφές που αναπαριστούν τα βασικά ή πιο κρίσιμα στοιχεία ενός συνόλου ερεθισμάτων. Στο πρότυπο συσσωρεύεται η προηγούμενη εμπειρία του κάθε ατόμου και φαίνεται πως οι χαρακτηριστικές ιδιότητες ενσωματώνονται σε αυτό, τόσο με ποιοτικό όσο και με ποσοτικό τρόπο.

Έρευνες δείχνουν ότι η βεβαιότητα με την οποία αναγνωρίζουμε ένα σχήμα / ερέθισμα είναι ανάλογη με το βαθμό ομοιότητας του ερεθίσματος με το πρότυπό του (Eysenck, 1990, σ.46). Επίσης ότι *«όταν σχηματιστούν τα πρότυπα ως νοητικές εικόνες, επηρεάζουν αποφασιστικά την αναγνώριση των σχημάτων και τη λύση ενός προβλήματος, σχεδόν ανεξάρτητα και χωριστά από τις έννοιες»* (Hasegawa,1997). Για παράδειγμα, όταν κατασκευάζουμε ένα τρίγωνο αντιγράφουμε την αρχετυπική αναπαράσταση, που συνήθως ονομάζεται πρότυπο. Η δυσκολία στην κατασκευή κάποιων τριγώνων έχει σχέση με δυσχέρειες σύνδεσης με αυτό το νοερό αρχέτυπο.

Οι ρίζες της «Θεωρίας του Προτύπου» χρονολογούνται από τη δεκαετία του -70 όταν οι ψυχολόγοι παρατήρησαν μια αύξηση των ευρημάτων σχετικών με την επίδραση των τυπικών χαρακτηριστικών-typicality effects (: πόσο τυπικό

[4] Τα πρότυπα διευκολύνουν τη μηχανική μάθηση, όπως για παράδειγμα, στην περίπτωση των ιδιοτήτων των πράξεων των συνόλων, οδηγώντας συχνά σε λανθασμένες γενικεύσεις. Μια τέτοια λανθασμένη γενίκευση που συναντάται συχνά είναι η περίπτωση της πρότυπης ιδιότητας $(\alpha.\beta)^\nu = \alpha^\nu . \beta^\nu$ ή $(\alpha:\beta)^\nu = \alpha^\nu : \beta^\nu$ που μεταφέρεται εσφαλμένα και στην πρόσθεση.

είναι ένα χαρακτηριστικό μιας δοθείσας έννοιας, σε μια βαθμολογία από το 1 ως το 10). Το βασικό εύρημα αφορούσε στο ότι, τα άτομα θεωρούν μερικά χαρακτηριστικά ή παραδείγματα μιας έννοιας ως πιο τυπικά από άλλα.
Ειδικότερα η εργασία της Rosch (Rosch 1973b, Rosch & Mervis 1975, Catlin & Rosch 1976) οδήγησε σε δύο θεωρίες για τις έννοιες, που ονομάστηκαν Θεωρία του Προτύπου (prototype theory) και Θεωρία Παραδειγμάτων (exemplar theory). Στη Θεωρία του Προτύπου, το πρότυπο είναι μια νοητική αναπαράσταση που προκύπτει από τη σύνθεση των καλύτερων παραδειγμάτων μιας έννοιας, ενώ στη Θεωρία Παραδειγμάτων το παράδειγμα μπορεί να είναι πολύ συγκεκριμένο ή σύνολο παραδειγμάτων που απλώς προστίθενται.
Οι αντιρρήσεις σχετικά με την ισχύ της «Θεωρίας των Προτύπων», επικεντρώνονται σε δυο κυρίως επιχειρήματα που παρουσιάζουμε υπό μορφή ερωτημάτων:

- *Ποια είναι τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά του προτύπου;*

Δεδομένου ότι το πρότυπο είναι μια νοητική αναπαράσταση που προκύπτει από τη σύνθεση των καλύτερων παραδειγμάτων μιας έννοιας, ποια είναι εκείνα τα χαρακτηριστικά που αξιολογούνται ως «καλύτερα»;

- *Πώς μπορούμε να βρούμε παραδείγματα ανάμεσα στα οποία να επιλεγεί ένα ως πρότυπο, δίχως να γνωρίζουμε ήδη την ομάδα των παραδειγμάτων;*

Για να βρούμε εμπειρικά το «παράδειγμα», το οποίο ακολούθως θα λειτουργήσει ως πρότυπο, πρέπει να είμαστε σε θέση να το αναγνωρίσουμε. Για να το αναγνωρίσουμε, πρέπει να ξέρουμε τα γενικά χαρακτηριστικά του (the abstract pattern). Δηλαδή, πρέπει να ξέρουμε ήδη την έννοια, την οποία προσπαθούμε να κατασκευάσουμε νοερά. Προφανώς πρόκειται για ένα φαύλο κύκλο. Δεν μπορούμε να πάρουμε τα μοντέλα για κατηγοριοποίηση από την εμπειρία (τουλάχιστον όχι τόσο απλά), αφού ήδη τα χρειαζόμαστε για ν' αποκτήσουμε αυτή την εμπειρία.
Προκειμένου να αποφύγουμε τα μειονεκτήματα του προτύπου, μπορεί να σκεφτούμε τις έννοιες όχι στατικά ως απλές περιγραφές, αλλά δυναμικά ως νοητικές ικανότητες – κάτι σαν νοητικά προγράμματα – τα οποία εκτελούνται κάθε φορά που χρειαζόμαστε την έννοια.
Με αυτή την έννοια, τα πρότυπα δεν είναι στατικές συλλογές «κρίσιμων στοιχείων», αλλά ευέλικτες, δυναμικές οντότητες που δημιουργούνται και διαρκώς αναπροσαρμόζονται σε σχέση με τα δεδομένα της εκάστοτε κατάστασης.
Αυτό που προσθέτει η σύλληψη μιας έννοιας ως νοητικής ικανότητας, σε σχέση με τη στατικότητα της Θεωρίας των Προτύπων είναι αυτό που ο Kant ονόμασε «κατανόηση» («understanding») αποδίδοντάς της λειτουργία συμπληρωματική από εκείνη της «διαίσθησης» («intuition»). Στην «Κριτική του Καθαρού Λόγου», ο Kant θεμελιώνει ένα σύστημα, στο οποίο δίνει έμφαση στην ικανότητα του ανθρώπου να προσλαμβάνει ή να επηρεάζεται από συγκεκριμένα αντικείμενα της αισθητηριακής εμπειρίας (Kant 1781/1787/1996, σ.72). Ονομάζει αυτή την ικανότητα «ευαισθησία» (:sensibility). Αυτή όμως η ικανότητα, διατείνεται ο Kant, δεν μπορεί να οργανώσει μόνη της τη διαισθητική αντίληψη της αισθητηριακής εμπειρίας. Η οργάνωση ή η σύνθεση γίνεται από μια άλλη ικανότητα του νου, που ο Kant ονομάζει «κατανόηση» (:understanding). Στην Ανθρωπολογία του (Kant

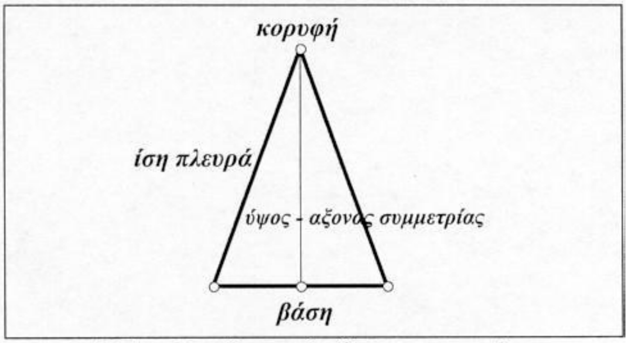
1797/ 1974, σ.68-69), ο Kant, ισχυρίζεται ότι η δύναμη της «διαίσθησης» περιορίζεται στα αντικείμενα ως «μονάδες» (:singularity), ενώ η κατανόηση δημιουργεί από τα αντικείμενα «έννοιες» μέσω της ενοποίησης των διαφόρων διαισθητικών αντιλήψεων της αισθητηριακής εμπειρίας.

Η «απόδοση ρόλου» στη διαδικασία επεξεργασίας ενός γεωμετρικού σχήματος

Υιοθετώντας το δυναμικό μοντέλο και προκειμένου για γεωμετρικές έννοιες, αντιλαμβανόμαστε ότι το πρότυπο δεν είναι απλά η φωτογραφία ενός γεωμετρικού σχήματος, αλλά μια ευέλικτη δυναμική οντότητα που δέχεται περιορισμούς από τις γνωστικές δομές της συγκεκριμένης σχηματικής έννοιας.

Τα επιμέρους στοιχεία του προτύπου έχουν συγκεκριμένους διακριτούς ρόλους, οι οποίοι καθορίζονται από τις μεταξύ τους σχέσεις. Για παράδειγμα, οι βασικοί ρόλοι στο ισοσκελές τρίγωνο προκειμένου για στοιχεία διάστασης ένα (1D) είναι: «*ίση πλευρά*», «*βάση*» και «*ύψος*» (υπονοείται το ύψος – άξονας συμμετρίας), ενώ προκειμένου για σημεία (0D) είναι: «*κορυφή*» (Σχήμα 2).

Η «απόδοση ρόλων» συσχετίζεται με ένα πλέγμα από προσδοκίες που



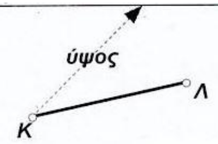
Σχήμα 2: Βασικοί ρόλοι των στοιχείων του ισοσκελούς τριγώνου

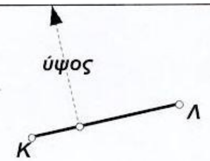
αφορούν στις σχέσεις ανάμεσα στα εμφανιζόμενα στοιχεία και στη συμβατότητα των ρόλων που θα τους αποδοθούν. Για παράδειγμα σε ένα γεωμετρικό σχήμα δεν μπορεί να αποδοθούν σε δύο ευθύγραμμα τμήματα, αντίστοιχα, οι ρόλοι «ύψος - άξονας συμμετρίας» και «βάση», αν τα τμήματα δεν είναι κάθετα.

Ισχυριζόμαστε ότι οι ρόλοι αποτελούν αναπόσπαστο στοιχείο του προτύπου και καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό την αναγνώριση και τη χρήση των γεωμετρικών σχημάτων. Στη συνέχεια θα παραθέσουμε ερευνητικά στοιχεία τα οποία στοιχειοθετούν τον ισχυρισμό μας, δηλαδή φωτίζουν τη λειτουργία της «απόδοσης ρόλου» και αποκαλύπτουν παράγοντες που σχετίζονται με αυτήν και επηρεάζουν τη γεωμετρική λειτουργία. Τα στοιχεία προέρχονται από πρόσφατη ποιοτική έρευνα (Καμπάνη, 2003) και ο σχολιασμός γίνεται με αφορμή απαντήσεις μαθητών σε ένα πρόβλημα.

<u>Το πρόβλημα</u>

Πρόβλημα 1^A:
*«Στα διπλανά σχήματα ξεκινήσαμε την κατασκευή του ισοσκελούς τριγώνου ΚΕΛ, μπορείς να τη συμπληρώσεις;
Μπορείς να περιγράψεις με λόγια την κατασκευή του τριγώνου;»*





Το πρόβλημα αυτό έχει ως στόχο να διερευνήσει:

- το πώς επεμβαίνει το πρότυπο στην αναγνώριση και κατασκευή του ισοσκελούς τριγώνου, όταν δίνεται μόνο ένα μέρος του, σε διαφορετικό προσανατολισμό από το συνήθη (άξονας συμμετρίας κατακόρυφος)
- τη δυνατότητα των μαθητών να απομακρυνθούν / αποδεσμευτούν από την εικόνα – πρότυπο, προκειμένου να λύσουν ένα πρόβλημα.
- τη συνεισφορά της «απόδοσης ρόλου» στην επιτυχημένη γεωμετρική λειτουργία του μαθητή.

Η απόδοση ρόλων

Προκειμένου να γίνει φανερό τι εννοούμε λέγοντας «απόδοση ρόλων» παραθέτουμε αρχικά ένα απόσπασμα από το πρωτόκολλο μιας μαθήτριας. Επιλέγουμε μια μαθήτρια που με την αξιολόγηση του σχολείου θεωρείται πολύ χαμηλών επιδόσεων, ώστε να φανεί πώς η απόδοση ρόλων τη βοηθά να αντιμετωπίσει προβλήματα που άλλοι, καλύτεροι μαθητές, που δε χρησιμοποιούν τους ρόλους, αδυνατούν να λύσουν.
Βλέποντας το (α) ερώτημα του προβλήματος η μαθήτρια περιγράφει αρχικά τη νοερή της εικόνα για το πρότυπο, προτού ζωγραφίσει οτιδήποτε στο χαρτί. Αναφέρεται στα επιμέρους στοιχεία του γεωμετρικού σχήματος που πρόκειται να κατασκευάσει, δίνοντάς τους αντίστοιχους ρόλους συμβατούς μεταξύ τους. Έτσι, θεωρεί το δοθέν ύψος[5] ως το «ύψος – άξονα συμμετρίας», οπότε υποβάλλεται ο ρόλος της ΛΕ ως «βάση» και η δοθείσα ΚΛ αναγκαστικά γίνεται «ίση πλευρά». Παρατηρούμε τη δημιουργία ενός συνεπούς συνόλου που φαίνεται ότι βασίζεται σε μια νοερή εικόνα (πρότυπο) καθώς αναφέρεται και σε στοιχεία που δεν υπάρχουν ακόμα στο σχήμα (ΚΕ, ΛΕ).

Μαθήτρια: *η ΛΕ <u>πρέπει να είναι βάση</u>, <u>για να είναι ύψος αυτή</u> (η δοθείσα διακεκομμένη ημιευθεία) η πλευρά ΚΛ <u>πρέπει να είναι ίση</u> με αυτή την <u>πλευρά</u> (ΚΕ).* (δική μας υπογράμμιση στην απομαγνητοφώνηση)

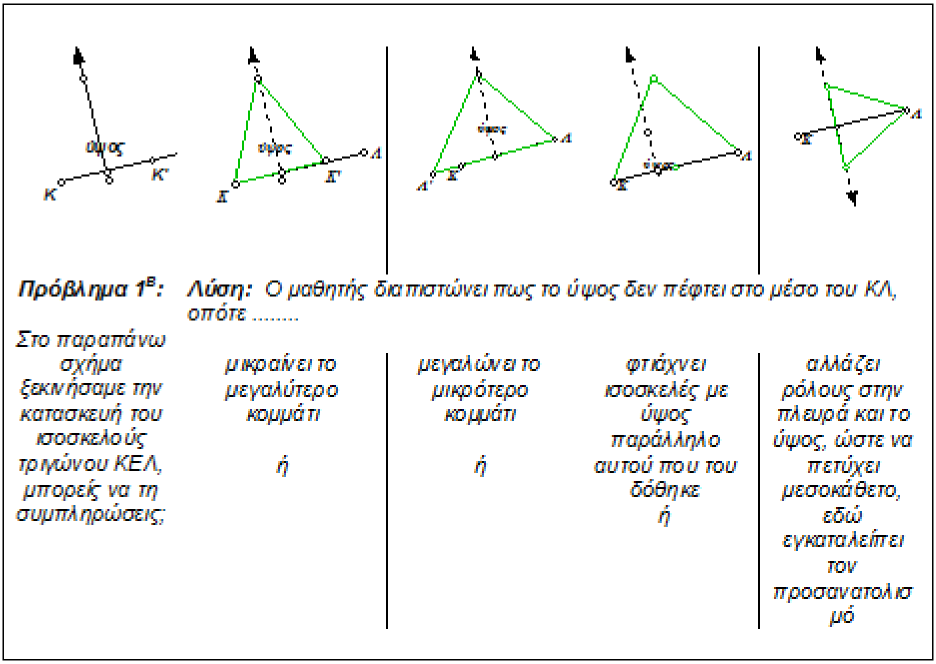
<u>Οι προσδοκίες που αναπτύσσονται</u>

Καταγράφοντας και αναλύοντας την προφορική σκέψη των μαθητών διαπιστώνουμε ότι η αναγνώριση ενός στοιχείου προκαλεί αλυσιδωτά την αναγνώριση μιας σειράς άλλων, που είτε υπάρχουν ήδη στο σχήμα είτε πρόκειται για στοιχεία που ο μαθητής σκοπεύει να του προσθέσει (όπως

---

[5] Μπορεί το πρόβλημα να δίνει το χαρακτηρισμό «ύψος» στη διακεκομμένη ημιευθεία, όμως μένει στο μαθητή να αποφασίσει ποιο ύψος είναι, το ύψος – άξονας συμμετρίας ή ένα από τα άλλα δύο ίσα ύψη. Είναι φανερό ότι το ειδικό βάρος των δύο περιπτώσεων είναι διαφορετικό για την τοποθέτηση και κατασκευή του ισοσκελούς.

φαίνεται από τους διάλογους της προηγούμενης μαθήτριας, αλλά και πολλών άλλων). Συνήθως η αναγνώριση συνοδεύεται με την απόδοση συγκεκριμένων ρόλων και τη δημιουργία προσδοκιών που δεν είναι εύκολο να αλλάξουν.
Η εμμονή στις αρχικές επιλογές ρόλων εικονογραφείται από τις διαδοχικές προσπάθειες ενός άλλου μαθητή να απαντήσει στο (β) ερώτημα του προβλήματος (Σχήμα 3). Είναι φανερό ότι ο μαθητής ξεκινά αποδίδοντας εσφαλμένα στα δοθέντα στοιχεία τους ρόλους: «βάση» και «ύψος – άξονας συμμετρίας» έχοντας κατά νου την εικόνα πρότυπο και, παρά τις δυσκολίες, εμμένει σε αυτούς. Η επιλογή του αναπτύσσει συγκεκριμένες προσδοκίες (το ύψος να περνά από το μέσο της βάσης) που είναι φανερό πως προσπαθεί να τις ικανοποιήσει, δίχως θετικό αποτέλεσμα.



Σχήμα 3 : *Οι διαδοχικές προσπάθειες ενός μαθητή να απαντήσει στο ερώτημα 1β*

Στο σχήμα 3 βλέπουμε ότι ο μαθητής δε διστάζει να αλλοιώσει, με κάθε τρόπο, τα δεδομένα του προβλήματος, προκειμένου να βρει μια λύση. Επιχειρεί με ένα συστηματικό τρόπο να «ταιριάξει» το πρότυπο με τις δύο κάθετες διευθύνσεις που ορίζουν η πλευρά και το ύψος. Οι ενέργειές του καθορίζονται κατά κύριο λόγο από το πρότυπο και τους ρόλους που με βάση αυτό αποδίδει στα δοθέντα στοιχεία και δευτερευόντως από τα δεδομένα του προβλήματος. Εφόσον οι αρχικοί ρόλοι αποδόθηκαν λάθος, ο μαθητής είναι αδύνατον να ολοκληρώσει την εικόνα. Προκειμένου να κάνει την κατασκευή πρέπει να αποδεχθεί πως οι ρόλοι μπορεί να μην είναι οι σωστοί και να κάνει αναδόμηση, γεγονός που για το συγκεκριμένο παιδί αποδεικνύεται αδύνατο.

Η δημιουργία «συνεπούς» εικόνας

Στη συνέχεια (Σχήμα 4) αναφέρουμε το χαρακτηριστικό παράδειγμα ενός άλλου μαθητή που ξεκινά όπως και ο προηγούμενος, διαπιστώνει το λάθος του και επιχειρεί να αποδώσει εκ νέου ρόλους. Αρχικά η προσπάθεια δεν είναι επιτυχής, καθώς δεν δημιουργείται ένα συνεπές σύνολο. Συγκεκριμένα, στην πρώτη προσπάθεια του μαθητή ο προσανατολισμός επικρατεί σε βάρος των δεδομένων του προβλήματος και ο μαθητής αποδίδει στην ΚΛ και στη δοθείσα ημιευθεία τους ρόλους: βάση και ύψος / άξονας συμμετρίας[6]. Όταν διαπιστώσει το λάθος του (το τρίγωνο που κατασκεύασε έχει πλευρά ΚΝ και όχι ΚΛ), μεταβάλλει το ρόλο της ΚΛ και τη θεωρεί ως ίση πλευρά, δίχως αντίστοιχα να αλλάξει ρόλο στο ύψος, οπότε καταλήγει σε ασυνέπεια. Μόνο όταν την αντιληφθεί και αλλάξει ρόλο και στα δύο στοιχεία θα έχει ένα συνεπές σύνολο και θα οδηγηθεί στη λύση.

Συγκρίνοντας την απόδοση των μαθητών στα δύο ερωτήματα του προβλήματος διαπιστώνουμε ότι:

- όταν δίνεται μέρος του προτύπου (α ερώτημα) η αναγνώριση (αντιληπτική κατανόηση) γίνεται εύκολα με βάση την εικόνα - πρότυπο, η οποία λειτουργεί ως σχήμα αναφοράς.
- Η λεκτική κατανόηση φαίνεται από την απόδοση ρόλων στα δοθέντα τμήματα (ίση πλευρά, ύψος / άξονας συμμετρίας). Η λειτουργική κατανόηση οδηγεί στη συμπλήρωση του σχήματος με αποτέλεσμα την κατασκευή του ζητούμενου ισοσκελούς. Στην περίπτωση αυτή ο προσανατολισμός δεν δημιουργεί δυσκολίες
- όταν οι μαθητές πρέπει να κατασκευάσουν το ισοσκελές χωρίς να έχουν το ύψος – άξονα συμμετρίας (β ερώτημα) τα πράγματα περιπλέκονται. Η αλλαγή προσανατολισμού αυξάνει τη δυσκολία του προβλήματος, ενώ η κατασκευή γίνεται μόνο από όσους μαθητές έχουν την ικανότητα να αναδομήσουν την αρχική νοερή τους εικόνα αναθεωρώντας τις προσδοκίες τους.

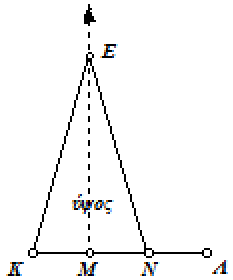
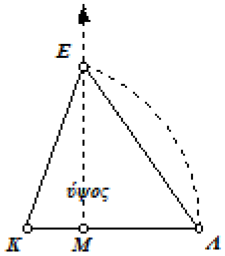
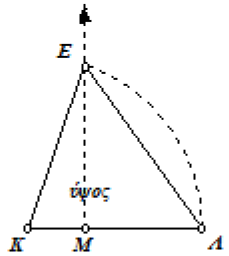
Συμπεράσματα

Η διαδικασία «απόδοσης ρόλων» είναι ένα ισχυρό εργαλείο που επηρεάζει την ανάγνωση ενός γεωμετρικού σχήματος και κατά προέκταση τη λύση του προβλήματος στο οποίο εντάσσεται αυτό το σχήμα. Η επιτυχημένη γεωμετρική λειτουργία συμβαδίζει με την ικανότητα του μαθητή να σχηματίζει δυναμικές νοητικές εικόνες αποδίδοντας στα διάφορα στοιχεία τους ρόλους, όχι στατικά, αλλά σε σχέση με τις ιδιαίτερες συνθήκες του προβλήματος.

---

[6] Μπορεί το πρόβλημα να χαρακτηρίζει την ημιευθεία ως ύψος, όμως ο ρόλος δεν καθορίζεται μόνο από αυτή την ονομασία αλλά και σε σχέση με τη θέση του συγκεκριμένου ύψους στην εικόνα – πρότυπο. Εδώ το ύψος μπορεί να είναι και άξονας συμμετρίας ή απλό ύψος προς μία από τις ίσες πλευρές.

Τα ευρήματα δείχνουν ότι οι ρόλοι που αποδίδει αυθόρμητα ο μαθητής υπό την επήρεια αντιληπτικών παραγόντων δημιουργούν προσδοκίες και αλλάζουν δύσκολα. Η ικανότητα του μαθητή να αλλάζει ρόλους, αν διαπιστώσει ότι αποδόθηκαν λανθασμένα, διατηρώντας ένα συνεπές σύνολο, σηματοδοτεί μια ωρίμανση στη νοερή του απεικόνιση.

		
1η προσπάθεια υπονοούμενοι ρόλοι: *ΚΛ βάση, ΜΕ ύψος – άξονας συμμετρίας*	***2η προσπάθεια υπονοούμενοι ρόλοι:*** *ΚΛ ίση πλευρά, ΜΕ ύψος – άξονας συμμετρίας*	***3η προσπάθεια υπονοούμενοι ρόλοι:*** *ΚΛ ίση πλευρά, ΜΕ ύψος*
Μαθητής: Να πάρω ένα σημείο Ε πάνω στο ύψος, να ενώσω με το Κ και με το διαβήτη να πάρω ΚΜ (σαν ακτίνα και μετά μετράει ΚΜ=ΜΝ). Οπότε αν ενώσω (το Ν) με το Ε, θα προκύψει πάλι ένα ισοσκελές. (διαπιστώνει πως δεν είναι το ζητούμενο)	*Μαθητής: να πάρουμε την ΚΕ, που είχα πάρει και πριν, και να τη φτιάξουμε ίση με την ΚΛ......... αλλά τότε το ύψος δεν θα ισχύει...... δε γίνεται* *Ερ: δεν κατάλαβα, τι δε γίνεται;* *Μαθητής: δεν γίνεται, γιατί το ύψος είναι αναγκαστικά και διχοτόμος στο ισοσκελές, άρα αυτό δεν θα ισχύει σε αυτή την περίπτωση....*	*Μαθητής: εκτός αν.... το ύψος ήταν ε......(κατασκευάζει δίπλα ένα πρόχειρο σκίτσο) φαίνεται πως το ύψος θα είναι εδώ πέρα, θα είναι αυτό εδώ. Άρα δε θα είναι το ύψος της κορυφής.* *Ερ: πώς το σκέφτηκες;* *Μαθητής: πήρα όλες τις εκδοχές και αναγκαστικά δεν έβγαινε από την κορυφή (το ύψος). Το ΚΜ ήταν μικρότερο από το ΜΛ, άρα επειδή το ύψος είναι αναγκαστικά διάμεσος, δε θα μπορούσε να ισχύει αυτό. Άρα σκέφτηκα μήπως και το ύψος είναι κάποιας άλλης γωνίας.*
Σχόλια: η απόδοση των ρόλων επηρεάζεται από την εικόνα πρότυπο και τον προσανατολισμό της.	**Σχόλιο:** αλλάζει το ρόλο μόνο στο ένα στοιχείο (στην ΚΛ) και κρατάει το ρόλο του άλλου (ύψους), με αποτέλεσμα να μην είναι συμβατοί	**Σχόλια:** Εξετάζοντας με συλλογισμούς όλες τις περιπτώσεις, καταλήγει στο σωστό ρόλο του ύψους

1η αναδόμηση / αλλαγή ρόλου στην πλευρά: η δοθείσα ΚΛ γίνεται από βάση, ίση πλευρά.	**2η αναδόμηση / αλλαγή ρόλου στο ύψος:** το δοθέν ύψος γίνεται από ύψος της βάσης, ύψος μιας ίσης πλευράς.

Σχήμα 4**: Προσπάθεια δημιουργίας μιας «συνεπούς» εικόνας**

Εκείνο που χρειάζεται περισσότερο να διερευνηθεί είναι τα χαρακτηριστικά του περιβάλλοντος-ιδιαίτερα εκείνου της τάξης- μέσα στο οποίο δημιουργούνται αυτές οι προσδοκίες. Ο ρόλος του δασκάλου, ο τρόπος παρουσίασης της πληροφορίας στα εγχειρίδια - ιδιαίτερα όσον αφορά στα σχήματα -, οι συνθήκες κάτω από τις οποίες αξιολογείται ο μαθητής είναι παράμετροι που πρέπει να ληφθούν υπ' όψη προκειμένου να σχηματίσουμε μια πληρέστερη εικόνα για τον τρόπο που οι μαθητές κατανοούν και χειρίζονται τις γεωμετρικές έννοιες.

Βιβλιογραφία

Bishop, A. (1989), A Review of Research on Visualization in Mathematics Education, *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11, 7-16.*

Cifarelli, V. (1998), The development of Mental Representations as a Problem Solving Activity, *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 239 – 264.

Davis, R & Maher, C. (1997), How students think: The role of Representations, in Lyn English (ed) *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors and Images*, (pp. 93 – 116), Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah New Jersey.

De Winndt – King, A. & Goldin, G. (2001), A study of children's visual imagery in solving problems with fractions, *Proceedings of the 25th Conference of PME,* Utrecht, The Nederlands.

Dörfler, W., (1993) Fluency in a discourse or manipulation of mental objects? *Proccedings of the 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,*Tsukuba, Japan, II, 145 –152.

Duval, R. (1998), Geometry from a Cognitive Point of View, in C. Mammana and V. Villani (eds) *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century,* Kluwer Academic Press, the Netherlands.

Duval, R. (2002), *Representation, Vision and Visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning,* άρθρο στο διαδύκτιο.

Eysenck, M. & Keane, M. (1990), *Cognitive Psychology,* Lawrence Erlbaum Associates Publishers, U.K.

Fischbein, E. (1993), The Theory of Figural Concepts, *Educational Studies in Mathematics* 24, 139-162.

Καμπάνη, Ε. (2003), *Ο Ρόλος των Αναπαραστάσεων στη Λύση Μαθηματικών Προβλημάτων,* Διδακτορική Διατριβή.

Kant, I. (1781/ 1787/ 1996), Critique of Pure Reason. Translated by W. S. Pluhar. Indianopolis / Cambridge Hackett Publishing Company.

Kant, I. (1797/ 1974), Anthropology from a pragmatic point of view. Translated by Mary J. Gregor. The Hague: Martinus Nijhoff.

Kosslyn, S. & Koenig, O. (1995), *Wet Mind: the New Cognitive Neuroscience,* The Free Press, New York.

MacLaury, R. E. (1991), Prototypes Revisited. *Annual Review on Anthropology*, 20, 55-74

Presmeg, N. (1986a), Visualization in High School Mathematics*, For the learning of Mathematics* 6(3), 42-46.

Presmeg, N. (1986b), Visualization and Mathematics Giftedness, *Educational Studies in Mathematics 17, 297-311.*

Rosch, E. (1973a), Natural Categories. *Cognitive Psychology*, 4, 328-350

Rosch, E. (1973b), On the Internal Structure of Perceptual and Semantic Categories. In T.E. Moore (ed.): *Cognitive Development and the Acquisition of Language*, 111-144. Academic Press, New York

Rosch, E., & Mervis, E. (1975). Family resemblances: Studies in the internal structure of
categories. Cognitive Psychology, 573–605.

Smith, E., Osherson, E., Rips, L., & Keane, M. (1988). Combining prototypes: A selective modification model. Cognitive Science(12).

Tall, D. (1991), The Psychology of advanced mathematical thinking, in D. Tall (ed.)*Advanced Mathematical Thinking,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 4-21.

Tsohatzidis, S. (1990), *Meanings and Prototypes: Studies on Linguistic Categorization.* Routledge London, 1990.

Προσεγγίσεις μαθηματικών εννοιών στο πλαίσιο της σημειωτικής

Χρίστος Μηλιώνης
Βαρβάκειο Λύκειο Αθήνας

Χαρούλα Σταθοπούλου
Πειραματικό Γυμνάσιο Αναβρύτων

Εισαγωγή

Ο πολιτισμός μπορεί να μελετηθεί απόλυτα από σημειωτική σκοπιά, U. Eco

Οι διεργασίες προσέγγισης και κατανόησης των μαθηματικών εννοιών βρίσκονται στο κέντρο του ενδιαφέροντος και του προβληματισμού των κυριότερων διδακτικών θεωριών, τάσεων και αντιλήψεων, που έχουν διαμορφωθεί στο πλαίσιο της διδακτικής των μαθηματικών. Σ' αυτό το πλαίσιο προβληματισμού, σημαντική είναι η συμβολή των θεωριών που αφορούν στην Επικοινωνία και τη Σημειωτική.

Η επικοινωνιακή διάσταση της διδασκαλίας των μαθηματικών είναι κυρίαρχη στις περισσότερες διδακτικές θεωρίες. Κάθε επικοινωνιακή διεργασία, προϋποθέτει ένα υποκείμενο σύστημα σημασιών. Η σημειωτική μελετώντας το σύνολο της νοηματοδοτικής δραστηριότητας, δηλαδή όλα τα διαφορετικά είδη συμβολικών μορφών και μέσων που χρησιμοποιούνται στην ανθρώπινη επικοινωνία, παρέχει στήριξη στις επικοινωνιακές διεργασίες προσέγγισης και κατανόησης των μαθηματικών εννοιών.

Στην εργασία αυτή θα περιγράψουμε:

- την προσέγγιση και κατανόηση μαθηματικών εννοιών μέσα από το πρίσμα της Σημειωτικής και της επικοινωνιακής διάστασης της εκπαιδευτικής διαδικασίας.
- Την κοινωνική και πολιτισμική διάσταση της Σημειωτικής και τη σχέση της με την εκπαίδευση και τα μαθηματικά.
- Τα αποτελέσματα μιας εφαρμογής του θεωρητικού πλαισίου και της Σημειωτικής προσέγγισης, με τα οποία επιχειρείται μια πρώτη ανάλυση εθνογραφικού υλικού, από έρευνα πεδίου σε σχολική τάξη Τσιγγανοπαίδων μέσα από μια σημειωτική προοπτική.

Επικοινωνία, Σημειωτική και Εκπαιδευτική διαδικασία

Επικοινωνία

Η επικοινωνία θεωρείται πρωταρχική κοινωνική λειτουργία με την οποία γεφυρώνονται διαφορετικοί χώροι, χρόνοι και μορφές και επιτυγχάνεται ο συντονισμός της συμβίωσης, μέσα σε ένα περιβάλλον αυτόνομων γνωστικά υπάρξεων. Είναι μια διεργασία που συμμετέχει ενεργά στη διαμόρφωση και την εξέλιξη της κοινωνίας (Μηλιώνης, 2000).

Κατά την επικοινωνιακή διαδικασία ένας οργανισμός κωδικοποιεί πληροφορίες σε σήματα, τα οποία στέλνει σε έναν άλλο οργανισμό, ο οποίος αποκωδικοποιεί τα σήματα και έχει τη δυνατότητα να ανταποκριθεί κατάλληλα. Μέσα στο πλαίσιο αυτό, η επικοινωνία ερμηνεύεται ως κοινωνική αλληλόδραση, η οποία λαμβάνει χώρα, είτε μέσα από τη μετάδοση μηνυμάτων είτε μέσα από την παραγωγή και ανταλλαγή νοημάτων (Fiske, 1992). Όπως σημειώνει ο Watzlawick (Watzlawick et al, 1996) *η επικοινωνία είναι αναπόφευκτη,* όμως, σε κάθε περίπτωση, η σύμπτωση των διεργασιών κωδικοποίησης της πηγής με τις διεργασίες αποκωδικοποίησης του δέκτη αποτελεί βασική προϋπόθεση για τη δημιουργία κοινών νοημάτων.

Η επικοινωνιακή διάσταση της εκπαιδευτικής διαδικασίας

Οι νεότερες διδακτικές θεωρίες κατανοούν τη διδακτική πράξη ως μια επικοινωνιακή διαδικασία μεταξύ των υποκειμένων, η οποία πραγματώνεται με την αλληλεπίδραση μέσα από διδακτικές καταστάσεις επίλυσης προβλήματος. Η επικοινωνία στη σχολική τάξη δεν εξυπηρετεί τη "μεταφορά" γνώσεων από το δάσκαλο στο μαθητή, αλλά επιτρέπει τη γνωστική επεξεργασία και κατασκευή των εννοιών. Αναδεικνύεται ο ρόλος του κοινωνικού και πολιτισμικού πλαισίου μέσα στο οποίο οι προϋπάρχουσες γνώσεις ανασκευάζονται και ανακατασκευάζονται μέσα από τη γνωστική σύγκρουση, το στοχασμό και τη γνωστική αναδιοργάνωση, ενώ η κοινωνική αλληλεπίδραση αποτελεί μια σημαντική πηγή ευκαιριών μάθησης.
Τόσο οι βασικοί άξονες, όσο και τα επιμέρους στοιχεία που συνθέτουν το πλαίσιο μέσα στο οποίο διαμορφώνονται και αναπτύσσονται οι βασικές επικοινωνιακές διεργασίες της διδασκαλίας, συνδέονται μεταξύ τους και λειτουργούν ως ένα δυναμικό σύστημα με αλληλεξαρτώμενες εσωτερικές σχέσεις. Ταυτόχρονα αποτελούν μέρος του κοινωνικού και πολιτισμικού περιβάλλοντος, με το οποίο βρίσκονται σε μια διαρκή σχέση αλληλεπίδρασης.

Σημειωτική

Σημειωτική είναι η επιστήμη που έχει ως αντικείμενο τους τρόπους παραγωγής, λειτουργίας και πρόσληψης των διαφόρων σημειακών συστημάτων, που επιτρέπουν την επικοινωνία ανάμεσα σε άτομα και σε ομάδες. Ο F. de Saussure (1979) την ορίζει ως *"μια επιστήμη που μελετά τη ζωή των σημείων μέσα στους κόλπους της κοινωνικής ζωής".* Για τον Ch. Pierce (1981) σημειωτική είναι η *"διδασκαλία για την ουσιαστική φύση και τις βασικές παραλλαγές κάθε πιθανής σημείωσης".* Όπως σημειώνει ο Guirad (1989), ο Saussure τονίζει την κοινωνική λειτουργία του σημείου ενώ ο Pierce τη λογική του λειτουργία.

Η επικοινωνία μέσα από το πρίσμα της Σημειωτικής

Προσεγγίζοντας τη στοιχειώδη δομή της επικοινωνίας μέσα από το πρίσμα της Σημειωτικής διαπιστώνουμε ότι:

- Το ενδιαφέρον της Σημειωτικής επικεντρώνεται στη δημιουργία και την ανταλλαγή νοημάτων.
- Το νόημα δεν είναι μια έννοια απόλυτη και στατική, συσκευασμένη μέσα στο μήνυμα, αλλά μια ενεργητική διαδικασία, ένα αποτέλεσμα της δυναμικής αλληλόδρασης ανάμεσα στο σημείο, τον ερμηνευτή και το αντικείμενο. Η κοινωνική αλληλόδραση ορίζεται ως λειτουργία που συγκροτεί το άτομο ως μέλος της κουλτούρας ή της κοινωνίας.

Η Σημειωτική θεωρεί την επικοινωνία ως την παραγωγή νοήματος δια μέσου μηνυμάτων. Για τη Σημειωτική το **μήνυμα** είναι *μια κατασκευή από σημεία που παράγει νοήματα μέσω της αλληλεπίδρασης με το δέκτη*. Έτσι δέκτες με διαφορετικές κοινωνικές εμπειρίες ή από διαφορετικές κουλτούρες μπορούν να βρουν διαφορετικά νοήματα στο ίδιο μήνυμα.
Κάθε πολιτισμική διαδικασία μπορεί να μελετηθεί από τη σημειωτική σκοπιά ως διαδικασία επικοινωνίας. Όμως κάθε επικοινωνιακή πράξη προϋποθέτει ένα υποκείμενο σύστημα σημασιών. Στην περίπτωση αυτή, για να λάβει χώρα η επικοινωνία πρέπει να κατασκευαστεί ένα σύνολο με σημεία. "Το νόημα όμως δεν είναι μια έννοια απόλυτα συσκευασμένη μέσα στο μήνυμα", αλλά "το αποτέλεσμα της δυναμικής αλληλεπίδρασης ανάμεσα στο σημείο, τον ερμηνευτή και το αντικείμενο" (Fiske, 1992). Το μήνυμα παρακινεί τον παραλήπτη να κατασκευάσει το δικό του νόημα γι' αυτό, το οποίο σχετίζεται με το νόημα του αποστολέα. Όσο περισσότερο χρησιμοποιούνται κοινοί κώδικες και κοινά συστήματα σημείων τόσο περισσότερο θα προσεγγίζουν μεταξύ τους τα δυο νοήματα.

Τα μοντέλα της Σημειωτικής:
Τα μοντέλα που περιγράφουν την επικοινωνία στη Σημειωτική δεν είναι γραμμικά και δεν προϋποθέτουν μια σειρά βημάτων ή φάσεων από τις οποίες περνάει το μήνυμα. Η αποκωδικοποίηση είναι το ίδιο ενεργητική με την κωδικοποίηση και δε διακρίνουν τον κωδικοποιό από τον αποκωδικοποιό, αλλά είναι *δομικά μοντέλα νοηματοδότησης*, τα βέλη τους δηλώνουν σχέσεις ανάμεσα σε στοιχεία κατά την παραγωγή του νοήματος και στοχεύουν στην ανάλυση μιας δομημένης σειράς σχέσεων που επιτρέπει στο μήνυμα να σημαίνει κάτι.
Έτσι η σημειωτική έχει ως κύρια πεδία μελέτης:

- το σημείο
- τους κώδικες και
- την κουλτούρα

Σημείο είναι *"οτιδήποτε μπορεί, με βάση μια ήδη εδραιωμένη κοινωνική σύμβαση να εκληφθεί ως κάτι που υποκαθιστά κάτι άλλο"* (Eco, 1988). Τα σημεία είναι ανθρώπινες κατασκευές και κατανοούνται μόνο από τον τρόπο χρήσης που τους κάνουν οι άνθρωποι. Ένα **σημείο** αναφέρεται σε ένα **αντικείμενο** και κατανοείται με το **ερμήνευμα**, το οποίο είναι μια έννοια που παράγεται από το σημείο και συγχρόνως από την εμπειρία του χρήστη για το αντικείμενο. Κάθε στοιχείο μπορεί να κατανοηθεί μόνο σε σχέση με τα άλλα δυο. Το ερμήνευμα είναι η έννοια που έχει ο χρήστης για το σημείο είτε είναι ομιλητής είτε ακροατής ή αναγνώστης. Το σημείο, το ερμήνευμα και το αντικείμενο μπορούν να παρασταθούν με την τριγωνική μορφή του σχήματος.
Κώδικες είναι *τα συστήματα μέσα στα οποία οργανώνονται τα σημεία και υφίστανται ανεξάρτητα από σημαίνουσες ή επικοινωνιακές προθέσεις.* Λειτουργούν συσχετικά και διέπονται από κανόνες κοινής συναίνεσης, από όλα τα μέλη της κοινότητας που χρησιμοποιεί τον συγκεκριμένο κώδικα. Αυτό σημαίνει ότι η μελέτη των κωδίκων δίνει συχνά έμφαση στην κοινωνική διάσταση της επικοινωνίας. Ανάλογα με την κατηγοριοποίησή τους, οι κώδικες διακρίνονται σε παραστατικούς και αναπαραστατικούς, επεξεργασμένους και περιορισμένους, μεγάλης ή μικρής εμβέλειας,

αυθαίρετους (λογικούς) ή αισθητικούς. Για παράδειγμα τα μαθηματικά χρησιμοποιούν έναν τέλεια αυθαίρετο ή λογικό κώδικα: κανείς από εκείνους που γνωρίζουν τον κώδικα αυτό δεν μπορεί να διαφωνήσει για το νόημα του 4x7=28. Θεωρείται αδύνατη η παρεκκλίνουσα αποκωδικοποίηση και άσχετες οι πολιτισμικές διαφορές. Ανάμεσα στον αναγνώστη και στο κείμενο δεν γίνεται διαπραγμάτευση ως προς το νόημα, διότι αυτό εμπεριέχεται στο μήνυμα. Το μόνο που απαιτείται είναι να μάθει κανείς τον κώδικα. (Fiske, 1992)

Η κουλτούρα είναι ενεργητικός, δυναμικός, ζωντανός οργανισμός, μόνο χάρη στην ενεργητική συμμετοχή των μελών της στους δικούς της κώδικες επικοινωνίας. Ο Geertz (1973) ισχυρίζεται ότι ο "άνθρωπος είναι ένα ζώο πιασμένο στους ιστούς του νοήματος που το ίδιο έχει υφάνει", θεωρώντας την κουλτούρα ως αυτούς τους ιστούς. Οι κώδικες και τα σημεία λειτουργούν μέσα σε μια κουλτούρα και αποτελούν τον κοινό πυρήνα της εμπειρίας των μελών της γι' αυτή. Η ύπαρξη και η μορφή της κουλτούρας εξαρτώνται από τη χρησιμοποίησή τους. Μόνο δια μέσου των κοινών κωδίκων μπορούμε να αισθανθούμε και να εκφράσουμε τη συμμετοχή μας στην κουλτούρα μας (Fiske, 1992).

Μεγαλύτερη έμφαση στο σημείο δίνει το μοντέλο του **Saussure**. Το σημείο για το Saussure είναι ένα φυσικό αντικείμενο με νόημα και αποτελείται από το **σημαίνον** και το **σημαινόμενο**. Το *σημαίνον είναι η εικόνα του σημείου όπως την αντιλαμβανόμαστε,* ενώ το *σημαινόμενο είναι η έννοια στην οποία αυτό αναφέρεται.* Π.χ. ένας πράσινος σταυρός σε μια πινακίδα είναι το σημαίνον ενώ το σημαινόμενο είναι ένα φαρμακείο

Κατά τον **Peirce,** διακρίνουμε τρεις τύπους σημείων, την **εικόνα**, τον **ενδείκτη** και το **σύμβολο**.

- *Η εικόνα μοιάζει με το αντικείμενό της [μετέχει στο χαρακτήρα του σημείου]* πχ. μια φωτογραφία.
- *Ο ενδείκτης είναι ένα σημείο με άμεση υπαρξιακή σύνδεση με το αντικείμενο.* Πχ. ο καπνός είναι ενδείκτης της φωτιάς.
- *Το σύμβολο είναι ένα σημείο, του οποίου η σύνδεση με το αντικείμενο του είναι θέμα σύμβασης, συμφωνίας ή κανόνα.* Πχ. οι λέξεις και οι αριθμοί είναι σύμβολα.

Ο Saussure ενδιαφέρεται πρωταρχικά για τη σχέση του σημαίνοντος με το σημαινόμενο και για τη σχέση του ενός σημείου με τα άλλα, ενώ ο Peirce για τον τρόπο με τον οποίο το σημείο σχετίζεται με το αντικείμενο. Όπως κυρίως θεμελιώθηκε από τους Saussure & Peirce, η Σημειωτική δεν ασχολείται με τη μετάδοση μηνυμάτων αλλά με τη δημιουργία και την ανταλλαγή νοημάτων. Η έμφαση δίνεται στο κείμενο και στην αλληλόδρασή του με την κουλτούρα που το παράγει και το ενσωματώνει. Το κέντρο της προσοχής εστιάζεται στο ρόλο που διαδραματίζει η επικοινωνία στην εδραίωση και διατήρηση των αξιών και στον τρόπο που αυτές οι αξίες προσδίδουν νόημα στην επικοινωνία.

Το ενδιαφέρον της Σημειωτικής εστιάζεται στη φύση του ίδιου του σημείου και όχι στον τρόπο που αυτό μεταδίδεται. Όπως σημειώνει ο Fiske (1992) η Σημειωτική Σχολή δεν ενδιαφέρεται ιδιαίτερα για την αποτελεσματικότητα και την ακρίβεια της επικοινωνίας. Η επικοινωνία έτσι και αλλιώς συμβαίνει. Η περίπτωση όπου τα νοήματα του πομπού διαφέρουν από τα νοήματα του δέκτη, δεν θεωρείται ως αποτυχία της επικοινωνίας αλλά ως ενδεικτικό των κοινωνικών, πολιτισμικών διαφορών μεταξύ τους. Έτσι και η απόκλιση των νοημάτων δεν είναι κατ' ανάγκη από μόνη της κάτι κακό. Μπορεί μάλιστα να είναι πηγή πολιτισμικού πλούτου και επιβίωσης κάποιας επιμέρους κουλτούρας. Αν επιθυμούμε να ελαχιστοποιήσουμε την απόκλιση των νοημάτων δεν θα πρέπει να επιδιώξουμε τη βελτίωση της αποτελεσματικότητας της επικοινωνιακής διαδικασίας, αλλά την ελαχιστοποίηση των κοινωνικών διαφορών. Με άλλα λόγια, οι καθοριστικοί παράγοντες της επικοινωνίας βρίσκονται στην κοινωνία και τον κόσμο γύρω μας, και όχι στην ίδια τη διαδικασία.

Η κοινωνική και πολιτισμική διάσταση της Σημειωτικής

Στο πλαίσιο της κοινωνικής σημειωτικής διερευνάται ο τρόπος με τον οποίο οι άνθρωποι παράγουν νοήματα. Η κοινωνική σημειωτική επιχειρεί να απαντήσει κυρίως στα ερωτήματα:

- Πώς ορισμένες κοινωνικά νοηματοδοτημένες πράξεις παράγουν νόημα για τα μέλη μιας κοινωνίας;
- Πώς ερμηνεύουν οι άνθρωποι αυτή την παραγωγή νοήματος;
- Από τι αποτελούνται αυτές οι πράξεις και πως αλληλοσχετίζονται;

Για την κοινωνική σημειωτική οι πράξεις και τα συμβάντα αποκτούν νόημα όταν τοποθετηθούν σε ένα ευρύτερο πλαίσιο. Έτσι, μια πράξη ή ένα συμβάν για να νοηματοδοτηθούν τοποθετούνται σε περισσότερα πλαίσια και η σημασία που παράγεται, αποτελείται από τις σχέσεις που κατασκευάζονται μεταξύ της πράξης ή του συμβάντος και των πλαισίων τους, οπότε η παραγωγή νοήματος είναι μια διαδικασία σύνδεσης των πραγμάτων με τα πλαίσια. Άρα, οι πράξεις και τα γεγονότα αποκτούν νόημα με την τοποθέτησή τους σε πλαίσιο (contextualizing) και οι σημαντικότερες από τις σημειωτικές πρακτικές είναι αυτές της πλαισιοποίησης. Η κοινωνική σημειωτική αναλύει τα είδη των πλαισίων στα οποία τοποθετούμε πράγματα, και τα είδη των σχέσεων που κατασκευάζουμε μεταξύ αυτών και των πλαισίων.

Μια πράξη που παράγει μια κοινωνικά αναγνωρισμένη σημασία σε μια κοινότητα είναι μια σημειωτική πρακτική. Μπορούμε να βλέπουμε αυτές τις πρακτικές παραγωγής νοήματος με δυο τρόπους:

- ως πράξεις που παράγουν νόημα στην κοινότητα
- ως πρακτικές που περιέχουν τις πράξεις με τις οποίες εμείς παράγουμε νόημα από άλλες πράξεις, και κατ' αναλογία επίσης παράγουμε νόημα από συμβάντα και αντικείμενα.

Ένα σημαντικό σημείο είναι ότι η κοινωνική σημειωτική εξασφαλίζει τόσο τα αναλυτικά εργαλεία, όσο και το θεωρητικό πλαίσιο για την ανάλυση των θεματικών και αλληλεπιδραστικών σημασιών που κατασκευάζονται στη τάξη των μαθηματικών. Έτσι, όπως υποστηρίζει ο Lemke (1990), ένα σύστημα κοινωνικής νοηματοδότησης είναι επίσης ένα σύστημα κοινωνικής αλληλόδρασης.

Από μια ανθρωπολογική σκοπιά, ο Leach (1993) επισημαίνει δυο σημεία κλειδιά, που αφορούν στα σημεία και τις μεταξύ τους σχέσεις:

- Δεν υπάρχουν απομονωμένα σημεία, αλλά ένα σημείο είναι πάντα μέλος ενός συνόλου αντιπαρατιθέμενων σημείων που λειτουργούν μέσα σε ένα συγκεκριμένο πολιτισμικό πλαίσιο.

- Ένα σημείο γίνεται φορέας πληροφορίας μόνο όταν συνδυάζεται με άλλα σημεία ή σύμβολα που ανήκουν στο ίδιο πλαίσιο αναφοράς. Παράδειγμα: $x + y = z$, προϋποθέτει ένα μαθηματικό πλαίσιο αναφοράς. Έξω από αυτό το πλαίσιο, τα σημεία '+' και '=' δεν παρέχουν πληροφορία. Τα σημεία δηλαδή βρίσκονται πάντα σε συνάφεια με άλλα σημεία που είναι μέλη του ίδιου συνόλου.

Σημειωτική και εκπαίδευση

Η Σημειωτική προσεγγίζει την εκπαιδευτική διαδικασία ως μια σύνθετη σημειωτική δραστηριότητα που περιέχει ένα ιδιαίτερο παιδαγωγικό πρόταγμα, το οποίο οδηγεί στο ριζικό επανακαθορισμό των μορφών, των στόχων και των τρόπων διδασκαλίας και μάθησης (Πασχαλίδης, 1996). Στο πλαίσιο της προσέγγισης της σημειωτικής οι άμεσα εμπλεκόμενοι στην εκπαιδευτική διαδικασία--εκπαιδευτικοί, μαθητές--γίνονται ενεργητικοί συνερευνητές του συνολικού συστήματος όρων, διαδικασιών και κωδίκων που τους καθορίζουν και τους παράγουν, τόσο γενικά ως υποκείμενα της κοινωνικής εμπειρίας και δράσης όσο και γενικότερα ως υποκείμενα κάποιου συγκεκριμένου εκπαιδευτικού θεσμού.

Σημειωτική και μαθηματικά

Μια απάντηση σχετικά με το πως συνδέονται τα σύμβολα της σημειωτικής με τα μαθηματικά αντικείμενα καθώς και το πώς συνδέεται η χρήση των σημείων με τη μαθηματική εκπαίδευση θα μπορούσε να είναι η κοινά παραδεκτή θέση του Ernest (1977), ότι *τα μαθηματικά αποτελούν τυπικό παράδειγμα μελέτης αφηρημένων συστημάτων σημείων και το αντικείμενο της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι πως θα κατανοηθούν και θα χρησιμοποιηθούν αυτά τα συστήματα.*

Επειδή τόσο τα μαθηματικά ως επιστημονικός κλάδος όσο και η κατανόηση τους κατασκευάζονται κοινωνικά μέσα από ένα διάλογο, για να γίνει αντιληπτός αυτός ο διάλογος απαιτείται η κατανόηση των σημείων και των συμβόλων που περιέχονται σε αυτόν. Τα εργαλεία της σημειωτικής προσφέρουν έναν τρόπο αντίληψης για το πώς δημιουργούνται, χρησιμοποιούνται, διαπραγματεύονται, μεταφέρονται και αξιολογούνται τα μαθηματικά κείμενα, τα σημεία και οι σημασίες. Η σημειωτική προσφέρεται επίσης για την άντληση γλωσσολογικών, γνωστικών, φιλοσοφικών, ιστορικών, κοινωνικών και πολιτισμικών προοπτικών για τα μαθηματικά και τη μαθηματική εκπαίδευση, καθώς η πράξη της νοηματοδότησης και όλο το φάσμα των επικοινωνιακών δραστηριοτήτων βρίσκονται στο κέντρο του ενδιαφέροντος της σημειωτικής. Επιπλέον, με δεδομένη τη σημασία του συμβολισμού για τα μαθηματικά, η σημειωτική μέσα από μια σειρά προκαθορισμένων θεωρητικών πλαισίων εξασφαλίζει τα μέσα για τη μελέτη των σημάτων και των συμβόλων των μαθηματικών δίνοντας προσοχή τόσο στο σημαίνον όσο και στο σημαινόμενο.

Στο πλαίσιο της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών υιοθετούνται και αναπτύσσονται χρήσεις των σημείων, οι οποίες οδηγούν στην επεξεργασία και τη δημιουργία κατάλληλων σημασιών και εικόνων. Έτσι απορρίπτεται η διάκριση *υποκειμενικό/ αντικειμενικό* και εξασφαλίζεται μια απελευθερωτική προοπτική για τη μελέτη των μαθηματικών, με αποτέλεσμα να ανοίγονται νέοι

δρόμοι προσέγγισης των μαθηματικών εννοιών και της μαθηματικής εκπαίδευσης.
Η σημειωτική μελετώντας τα μαθηματικά ως ένα σημειωτικό σύστημα προσφέρει τη βάση για μια ενοποιημένη θεωρία των μαθηματικών και της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ταυτόχρονα, μέσα από μια σημειωτική προοπτική, διερευνώνται οι διασυνδέσεις και τους νέους τρόπους αντίληψης των μαθηματικών και της γλώσσας. Επιπλέον βοηθάει στο να ξεκαθαρίσουμε την έννοια του σημείου και του συμβόλου και να διευθετήσουμε τη δυαδική έννοια του σημείου στο Saussure (σημαίνον-σημαινόμενο) και την τριαδική έννοια του Peirce (σημείο, αντικείμενο, ερμήνευμα).
Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα διαφοροποίησης της σημασίας μιας μαθηματικής έννοιας ανάλογα με την αλλαγή του πλαισίου στο οποίο έχει τοποθετηθεί, αποτελεί το σύμβολο της πρόσθεσης '**+**' το οποίο στο σύνολο των φυσικών **N**, οδηγεί σε αύξηση της ποσότητας, ενώ δεν ισχύει το ίδιο στο σύνολο των ακεραίων **Z**.

Αποτελέσματα μιας εθνογραφικής έρευνας μέσα από μια σημειωτική προοπτική

Σ' αυτή την ενότητα επιχειρούμε μια πρώτη ανάλυση πραγματολογικού υλικού, το οποίο έχει προκύψει από (εθνογραφική) έρευνα πεδίου σε μια σχολική τάξη τσιγγανοπαίδων και στην κοινότητα προέλευσής τους μέσα από μια (κοινωνική) σημειωτική προοπτική. Κύριος στόχος είναι να διερευνήσουμε τις δυσκολίες των τσιγγάνων μαθητών τόσο όσον αφορά την εκπαίδευση συνολικά όσο και τη μαθηματική εκπαίδευση ειδικά, αξιοποιώντας εργαλεία της σημειωτικής και της επικοινωνίας.
Όπως φάνηκε στις προηγούμενες ενότητες η διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολικό χώρο είναι μια επικοινωνιακή διεργασία. Ως τέτοια, για να είναι αποτελεσματική, προϋποθέτει τη χρήση κοινών κωδίκων από όλους τους εμπλεκόμενους, καθώς η χρήση κοινών κωδίκων είναι κάτι που χαρακτηρίζει μια κοινότητα.
Μέσα σε κάθε σχολική τάξη δάσκαλος και μαθητές προσπαθούν να γεφυρώσουν διαφορετικούς χώρους, χρόνους και μορφές για να επιτευχθεί η επικοινωνία. Όταν ο δάσκαλος και οι μαθητές προέρχονται από την ίδια πολιτισμική ομάδα έχουν μια κοινή βάση κωδίκων οι οποίοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως θεμέλιο για να οικοδομήσουν μια νέα επικοινωνία στο πλαίσιο της διδασκαλίας των μαθηματικών. Τίθενται τα ερωτήματα:

- Τι συμβαίνει όμως όταν οι μαθητές προέρχονται από διαφορετική πολιτισμική ομάδα;
- Τι συμβαίνει όταν ανήκουν σε μειονοτικές και περιθωριοποιημένες ομάδες;
- Εντοπίζονται οι ίδιες δυσκολίες;

Μια πρώτη κωδικοποιημένη συμπεριφορά των τσιγγάνων μαθητών, η οποία όμως είναι χαρακτηριστική για τη σύνδεσή τους με την κοινότητα και το σχολείο είναι η ενδυμασία. Κυρίως οι τσιγγάνες μαθήτριες, ερχόμενες στο σχολείο, άλλες φορές υιοθετούν την ενδυμασία των μαθητών της κυρίαρχης πολιτισμικής ομάδας, άλλες φορές έρχονται με την ενδυμασία που είναι αποδεκτή στα όρια της κοινότητας και άλλες φορές υιοθετούν ένα μικτό τρόπο ενδυμασίας. Η συνολική παρουσία τους σε σχέση με την ενδυμασία είναι χαρακτηριστική και του ρόλου που παίζει η επίσημη τυπική εκπαίδευση στην κοινότητά τους. Για την κοινότητα των τσιγγάνων, ο σχολικός θεσμός είναι εν μέρει οικείος και εν μέρει ξένος. Οι τσιγγάνοι προσπαθούν να ισορροπήσουν μέσα από μια παραδοσιακή αντίληψη για την εκπαίδευση, όπου η μόνη γνώση που είχε αξία και θεωρείτο αναγκαία ήταν η γνώση που αποκτιόταν στο πλαίσιο συγκεκριμένων πολιτισμικών πρακτικών και στις σύγχρονες ανάγκες για εκπαίδευση όπως υπαγορεύονται από τη σημερινή ψηφιακή εποχή. Οι διαφορετικές πολιτισμικές καταβολές πέρα από τις πολιτισμικές συγκρούσεις τις οποίες προκαλούν στο σχολικό χώρο και στη σχολική τάξη προκαλούν και αντίστοιχες γνωστικές. Παρότι πολλές φορές η αποτυχία στην επικοινωνία ανάμεσα στο δάσκαλο και τους τσιγγάνους μαθητές οφείλεται στο γεγονός ότι διαφέρουν τα νοήματα εκφράζοντας κοινωνικές και πολιτισμικές διαφορές, από τη επίσημη εκπαίδευση αυτό ερμηνεύεται συχνά ως γνωστική ανεπάρκεια.

Για παράδειγμα, σύμφωνα με την αντίληψη της δασκάλας της πρώτης τάξης δημοτικού τσιγγανοπαίδων, οι μαθητές δεν κατανοούσαν τη διάταξη γιατί δεν ήταν σε θέση να χρησιμοποιήσουν τον αντίστοιχο συμβολισμό. Στη διδασκαλία της διάταξης, η δασκάλα επέμεινε στη χρήση των συμβόλων (<) και (>) ακυρώνοντας έτσι την προϋπάρχουσα σχετική γνώση των μαθητών, όπως αυτή καταδεικνυόταν από τις απαντήσεις τους σε αντίστοιχα λεκτικά προβλήματα. Δηλαδή από την παρατήρηση φάνηκε ότι είχαν κατακτήσει την έννοια της διάταξης, σε πλαίσια τα οποία είχαν νόημα για τους ίδιους, ενώ είχαν δυσκολία να καταλάβουν τα σύμβολα και κατά συνέπεια να τα χρησιμοποιήσουν αποτελεσματικά.

Η δυσκολία των μαθητών, ιδιαίτερα των μικρών τάξεων, στην κατανόηση και χρήση συμβόλων, έχει συζητηθεί από πολλούς ερευνητές στο χώρο της διδακτικής των μαθηματικών. Όπως παρατηρεί η Resnik (1995), παρότι τα σύμβολα έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη και εξέλιξη των μαθηματικών, η έμφαση των σχολικών μαθηματικών στο χειρισμό των τυπικών μαθηματικών συμβόλων είναι δυνατό να αποθαρρύνει τα παιδιά να μεταφέρουν τις διαισθητικές λειτουργίες στο σχολείο. Η αφειδής χρήση συμβόλων κάνει πιο δύσκολη την ανάγνωση και μετατρέπει μια αρετή σε ελάττωμα. Σε ακραίες περιπτώσεις, τα σύμβολα λειτουργούν στο επίπεδο του υποσυνείδητου, μετατρέποντας το σε ταμπού (Πολυδούρης 1976), τρομάζουν τους μαθητές και όπως παραστατικά σημειώνει ο M. Kline (1993) "μοιάζουν με εχθρικά λάβαρα που κυματίζουν πάνω σε μια φαινομενικά άπαρτη ακρόπολη".

Σε ορισμένες περιπτώσεις, η δυσκολία στην κατανόηση και χρήση των συμβόλων σχετίζεται με το γεγονός ότι δεν παράγουν πάντα νόημα για τους μαθητές. Αυτή η δυσκολία γίνεται ακόμα μεγαλύτερη για τους τσιγγάνους μαθητές, λόγω των πολιτισμικών τους διαφορών από την κυρίαρχη πολιτισμικά ομάδα. Οι τσιγγάνοι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι με τη χρήση γραπτών κωδίκων καθώς η προφορικότητα της γλώσσας τους αποτελεί βασική πολιτισμική ιδιαιτερότητα. Έτσι, στο σχολείο, πριν κατακτήσουν τη χρήση των συμβόλων πρέπει να κατακτήσουν μια γλώσσα η οποία δεν είναι η μητρική τους τόσο στην προφορική όσο και στη γραπτή της εκδοχή.

Πέρα από την προφορικότητα της γλώσσας μια άλλη πολιτισμική ιδιαιτερότητα που χαρακτηρίζει τους τσιγγάνους μαθητές είναι ο τρόπος που μαθαίνουν στα όρια της κοινότητάς τους. Οι τσιγγάνοι μαθητές έρχονται στο σχολείο με ένα σώμα πολιτισμικά αποκτηθείσας γνώσης, η οποία κατακτάται στο πλαίσιο δραστηριοτήτων που παρέχουν νόημα για τους ίδιους καθώς εμπλέκονται σε επαγγελματικές δραστηριότητες της οικογένειας. Σ' αυτό τον οριζόντιο τρόπο διδασκαλίας, όπου τα νεότερα μέλη της κοινότητας διδάσκονται από τα πιο έμπειρα, οι κώδικες επικοινωνίας είναι διαφορετικοί. Τα παιδιά δεν χρειάζεται να πειθαρχούν σε μια αυθεντία που τους μιλάει για πράγματα που δεν κατανοούν, αλλά μαζί με τους ενήλικες κατασκευάζουν από κοινού σημασίες για πράγματα που τους αφορούν.

Το ενδιαφέρον τους για γνώση με άμεση και σαφή χρήση είναι μια επιπλέον διαφορετικότητα των Τσιγγάνων, η οποία επίσης μεταφέρεται στην τάξη. Οι Βασιλειάδου & Κορρέ (1998) παρατηρούν ότι 'οι αφηρημένες γενικεύσεις τους είναι άγνωστες και άχρηστες'. Χαρακτηριστικό της αντίληψής τους όσον αφορά το είδος των γνώσεων που είναι σημαντικές και αναγκαίες αποτελεί ο παρακάτω διάλογος με μέλος της κοινότητας:

- *ξέρεις Αντώνη πόσα γραμμάρια έχει το κιλό;*
- *100… όχι 1000, δεν πουλάμε σε γραμμάρια*
- *πόσα γραμμάρια είναι το 1/4 του κιλού;*
- *δεν με εξυπηρετεί πουθενά αυτή η απάντηση, αν με εξυπηρετούσε θα την ήξερα.*

Για το δάσκαλο μιας τάξης τσιγγανοπαίδων δεν είναι πάντα γνωστή και δεδομένη αυτή η αντίληψη της Τσιγγάνικης κοινότητας και γίνεται προσπάθεια να εδραιωθεί μια επικοινωνία στην τάξη των μαθηματικών χωρίς να υπάρχουν οι κοινοί κώδικες. Στην περίπτωση αυτή, το νοηματικό σύστημα του μαθητή διαφοροποιείται από εκείνο του δασκάλου που εκφράζει το κυρίαρχο σύστημα.

Γενικά, μέσα από μια σημειωτική προοπτική μπορούμε να αντιληφθούμε τα διαφορετικά νοήματα που μπορεί να παράγονται από μια πράξη, μια ενέργεια στο χώρο της κοινότητας και στο χώρο της τάξης των μαθηματικών. Έχει σημασία να δούμε συνολικά, σε αντίστιξη, την άτυπη γνώση την οποία ο Τσιγγάνος μαθητής αποκτά σε συγκεκριμένα πλαίσια, τα οποία παράγουν νόημα τόσο για τον ίδιο όσο και για την κοινότητα και την τυπική (σχολική) γνώση, την οποία καλείται να αποκτήσει στο πλαίσιο της τυπικής εκπαίδευσης. Στην πρώτη περίπτωση αυτό που κάνει αποδεκτή μια μαθηματική ενέργεια/ πράξη, εν προκειμένω μια λύση σε ένα πρόβλημα είναι η βιωσιμότητά της. Ενώ αντίθετα, στο πλαίσιο της τυπικής εκπαίδευσης σημαντική είναι η συνέπεια των απαντήσεων σε ένα μαθηματικό αφηρημένο σύστημα, που συχνά δεν παράγει νόημα για τους μαθητές και πολύ περισσότερο για τους Τσιγγάνους μαθητές.

Η διαφορετική αντίληψη της κοινότητας των Τσιγγάνων σε σχέση με την κυρίαρχη ομάδα και η αντανάκλαση της στο σχολικό χώρο παρατηρείται και όσον αφορά στις έννοιες χώρου (Σταθοπούλου, 2003). Οι Τσιγγάνοι χρησιμοποιούν διαφορετικό τρόπο κωδικοποίησης του χώρου από εκείνον της ευρύτερης κοινωνίας ως αποτέλεσμα των, από παράδοση, διαφορετικών περιβαλλοντικών αναγκών τους. Χαρακτηριστικό αυτής της διαφορετικότητας είναι η χρήση από τους Τσιγγάνους περιορισμένου λεξιλογίου, όσον αφορά στις προθέσεις που προσδιορίζουν χώρο, σε σχέση με το αντίστοιχο λεξιλόγιο της ευρύτερης ελληνική κοινωνίας. Η ανάγκη για όχι και τόσο ακριβή προσδιορισμό στο χώρο αντανακλάται μέσα από τη δυσκολία των μαθητών να προσδιορίσουν συγκεκριμένη θέση στο βιβλίο στην οποία αναφέρεται ο δάσκαλος ή να καταλάβουν την αναγκαιότητα της τοποθέτησης των ψηφίων της ίδιας τάξης στην ίδια στήλη όταν χρησιμοποιούν τυπικό αλγόριθμο στην πρόσθεση ή την αφαίρεση.

Εν κατακλείδι**,** φαίνεται ότι η αποκωδικοποίηση φαινομένων μάθησης στο σχολικό χώρο, δεν είναι εύκολη για το δάσκαλο ή τον ερευνητή, αν περιοριστεί στο μικρο-πλαίσιο και δεν αντλούνται στοιχεία και από το μακρο-πλαίσιο. Όπως εύστοχα παρατηρεί ο Leach (1993), "πρέπει να γνωρίζουμε πολλά για το πολιτισμικό πλαίσιο, τη διάταξη του σκηνικού, προτού καταπιαστούμε με την αποκωδικοποίηση του μηνύματος."

Βιβλιογραφία

Βασιλειάδου, Μ. & Παυλή-Κορρέ Μ. (1998), Η Εκπαίδευση των Τσιγγάνων στην Ελλάδα, Αθήνα, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Habermas, J. (1990), «Ο Επικοινωνιακός Λόγος: Μια άλλη δυνατότητα διεξόδου από τη φιλοσοφία του υποκειμένου», στο Βέλτσος Γ., *Η διαμάχη. Κείμενα για τη νεοτερικότητα,* εκδ. Πλέθρο, Αθήνα, 74-82.

Eco, U. (1994), *Θεωρία Σημειωτικής,* εκδ. Γνώση, Αθήνα.

Ernest, P. (1997), *Philosophy of mathematics education journal 10 (1997)* introduction: semiotics, mathematics and mathematics education

Fiske, J. (1992), *Εισαγωγή στην επικοινωνία,* εκδ. επικοινωνία και κουλτούρα, Αθήνα.

Geertz, C. (1973), *The interpretation of Cultures,* New York, Basic Books.

Guiraud, P. (1989), *Σημειολογία,* εκδ. Ι. Ζαχαρόπουλος, Αθήνα.

Καλαβάσης, Φ, & Γιαννικοπούλου, Α (2002), "Τα σύμβολα της γραπτής γλώσσας και των μαθηματικών και η μεταγλωσσική συνειδητότητα μονόγλωσσων και δίγλωσσων παιδιών προσχολικής ηλικίας", στο Τρέσσου Ε, / Μητακίδου Σ. (επιμ.), *Η διδασκαλία της γλώσσας και των μαθηματικών Εκπαίδευση γλωσσικών μειονοτήτων,* εκδ. Παρατηρητής, Θεσσαλονίκη, 364-376.

Kline, M. (1993), *Γιατί δε μπορεί να κάνει πρόσθεση ο Γιάννης,* εκδ. Βάνιας, Θεσσαλονίκη.

Leach, E.R. (1993), *Πολιτισμός και Επικοινωνία: η λογική της διαπλοκής των συμβόλων,* εκδ. Καστανιώτη, Αθήνα.

Lemke, J.L. (1990), *Talking Seience,* Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.

Μηλιώνης, Χ. (2000), *Επικοινωνία και Διδακτική των Μαθηματικών,* (διπλωματική εργασία στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών), Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών, Αθήνα.

Peirce, Ch. (1981), «Η Λογική ως Σημειωτική: Η Θεωρία των Σημείων», στο *Κείμενα Σημειολογίας,* εκδ. Νεφέλη, Αθήνα.

Πολυδούρης, Β. (1976), *Το ταμπού των Συμβόλων,* Αθήνα.

Πασχαλίδης, Γ. (1994), «Σημείων Αγωγή / Σημεία Αγωγής», στο Καμαρούδης Σ., Χοντολίδου Ε. (επιμ.), *Ελληνική Σημειωτική Εταιρία, σημειωτική + εκπαίδευση, Συμπόσιο Φλώρινας 1994,* εκδ. παρατηρητής, Θεσσαλονίκη, 15-22.

Resnick, L. (1995), «Αναπτύσσοντας τη μαθηματική γνώση», στο Βοσνιάδου, Σ., *Η Ψυχολογία των Μαθηματικών,* εκδ. Gutenberg, Αθήνα, σελ. 128-153.

Saussure, F. de (1979), *Μαθήματα Γενικής Γλωσσολογίας,* εκδ. Παπαζήση, Αθήνα.

Σταθοπούλου, Χ. (2003), *Σύνδεση Πολιτισμικού Πλαισίου με τη Μάθηση και τη Διδασκαλία Των Μαθηματικών: Εθνογραφική Μελέτη μιας σχολικής τάξης Τσιγγανοπαίδων και της Κοινότητας Προέλευσής τους,* α.δ.δ.

Vygotsky, L. (1993), *Σκέψη και Γλώσσα,* εκδ. «Γνώση», Αθήνα.

Watzlawick, P., Beavin, J., Jackson D. (1996), *Menschliche Kommunikation, Formen, Storungen, Paradoxien,* Verlag Hans Huber, Bern, Göttingen, Toronto, Seattle.

Χασάπης, Δ. (2002), «Η γλώσσα της διδασκαλίας των Μαθηματικών: Ένα πλαίσιο ανάλυσης και μερικά σχόλια», στο Τρέσσου Ε, / Μητακίδου Σ. (επιμ.), *Η διδασκαλία της γλώσσας και των μαθηματικών Εκπαίδευση γλωσσικών μειονοτήτων,* εκδ. Παρατηρητής, Θεσσαλονίκη, 364-376.

ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙ

Εικόνα, σχήμα και λόγος στη διδασκαλία των μαθηματικών: Ερευνητικές διαπιστώσεις και διδακτικές προτάσεις

Διδακτικές παράμετροι στην αντιμετώπιση λεκτικών προβλημάτων

Κώστας Ζαχάρος
Πανεπιστήμιο Πατρών

1. Θεωρητικές επισημάνσεις

1.1 Τα λεκτικά προβλήματα και η διαδικασία της μαθηματικοποίησης

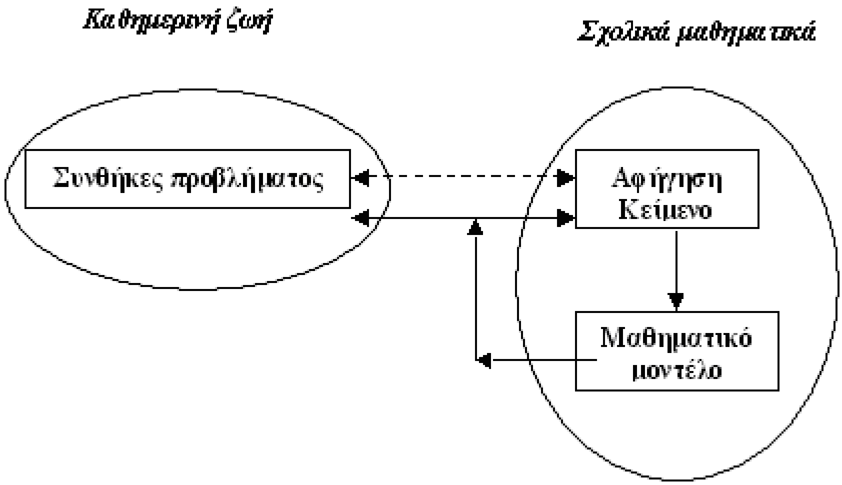
Οι ερμηνευτικές προσεγγίσεις των μαθηματικών προβλημάτων μας προσφέρουν χρήσιμα εργαλεία στον εντοπισμό και την ανάδειξη διδακτικών παραμέτρων που παίζουν ουσιαστικό ρόλο στην κατανόησή τους [π.χ. Veel., 1999, Wyndhamn και Saljo, 1997]. Ειδικότερα, αντιμετωπίζοντας οι μαθητές και μαθήτριες λεκτικά προβλήματα, αναγκάζονται να κινούνται μεταξύ διαφορετικών γλωσσικών και συμβολικών κωδίκων. Γεγονότα που εκφράζονται σε μια καθημερινή γλώσσα και περιγράφουν οικείες δραστηριότητες, πρέπει να μετασχηματιστούν στο συμβολικό μαθηματικό σύστημα και σε αντικειμενικές τυπικές σχέσεις προσλαμβάνοντας ένα καθολικό χαρακτήρα, γεγονός που προσιδιάζει στα μαθηματικά. Με άλλα λόγια, σε τέτοιες καταστάσεις οι σημασίες και η σύνταξη της καθημερινής γλώσσας οφείλουν να ευθυγραμμιστούν με τη δομή του τυποποιημένου μαθηματικού συλλογισμού.

Η ερευνητική εμπειρία δείχνει ότι οι μαθητές εξοικειωμένοι με τις συνήθεις πρακτικές του σχολείου δεν είναι σε θέση να ανταποκριθούν σε λεκτικά προβλήματα γιατί απουσιάζει από την οπτική τους μια «ρεαλιστική θεώρηση» του προβλήματος [Wyndhamn και Saljo, 1997]. Τα λεκτικά προβλήματα επιδέχονται μαθηματικές λύσεις που έχουν να κάνουν με την ικανοποίηση της σύνταξης του μαθηματικού συλλογισμού, όπως αυτός προσδιορίζεται από τους μαθητές στο πλαίσιο της τυπολογίας του σχολείου. Η έρευνα δείχνει ότι στις διαδικασίες μοντελοποίησης οι μαθητές και μαθήτριες απομακρύνονται από το νόημα των καταστάσεων που περιγράφονται από τα προβλήματα. Η πορεία μαθηματικοποίησης ενός λεκτικού προβλήματος περιγράφεται σχηματικά ως εξής [Wyndhamn και Saljo, 1997]:

- Απόσπαση του προβλήματος που εκφράζεται λεκτικά από το συγκεκριμένο του πλαίσιο (decontextualised).
- Ένταξή του σε ένα νέο, διαφορετικό πλαίσιο (recontextualised), όπου «διαβάζεται» σαν ένα μαθηματικό πρόβλημα.

Η διαδικασία αυτή της «αναπλαισίωσης» (recontextualization) έχει ως συνέπεια μια απομάκρυνση από τις αρχικές σχέσεις που περιγράφουν το πρόβλημα και την υποκατάσταση από τις νέες σχέσεις που δημιουργούν οι σχολικές πρακτικές [Dowling, 1998]. Εντός της σχολικής αίθουσας το πρόβλημα τοποθετείται σε ένα επικοινωνιακό πλαίσιο που διαφέρει από την άποψη της λογικής που το συνέχει. Οι μαθητές και μαθήτριες αντιλαμβάνονται ότι η ερμηνεία του προβλήματος οφείλει οπωσδήποτε να ακολουθήσει τη λογική των μαθηματικών που υποτίθεται μαθαίνουν. Έτσι τα λεκτικά προβλήματα αντιμετωπίζονται σαν μαθηματικές ασκήσεις που θα πρέπει να επιλυθούν σύμφωνα με την τυπολογία των σχολικών μαθηματικών. Είναι ενδεικτικό ότι, σύμφωνα με έρευνες, η αντιμετώπιση ενός ιδιαίτερου προβλήματος αλλάζει άρδην από το αν το πρόβλημα τοποθετείται στο πλαίσιο ενός μαθήματος των μαθηματικών ή σε ένα μάθημα των κοινωνικών επιστημών.

Οι παραπάνω επισημάνσεις υπογραμμίζουν την ανάγκη η διδασκαλία των μαθηματικών να συμπληρωθεί με μια νέα διάσταση όπου θα προσμετρώνται οι «πραγματικές συνθήκες» στις οποίες αναφέρεται το πρόβλημα. Η άποψη αυτή αποτυπώνεται διαγραμματικά στο σχήμα 1 [Wyndhamn και Saljo 1997, σ. 367] και ειδικότερα με το βέλος που σημειώνει την επιστροφή από το μαθηματικό μοντέλο στις πραγματικές συνθήκες του προβλήματος.



Σχήμα 1: Η επιθυμητή διαδικασία μοντελοποίησης ενός προβλήματος

Ανάλογες είναι και οι επισημάνσεις της ερευνητικής και διδακτικής προσέγγισης που τιτλοφορείται ως «ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση» (realistic mathematics education) [Wubbels, et. al., 1997] και υπογραμμίζει την ανάγκη κάθε πρόβλημα να παρουσιάζεται σε ένα πλαίσιο αναγνωρίσιμων συμφραζομένων και να βρίσκεται στις πιθανές εμπειρίες του μαθητή και τα προσωπικά του ενδιαφέροντα. Η ερευνητική πρακτική που εμφορείται από τη θεώρηση της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης χαρακτηρίζεται από μια πορεία που σχηματικά παρουσιάζει την εξής μορφή:

- Μετάφραση ρεαλιστικών προβλημάτων σε μαθηματικά προβλήματα.
- Ανάλυση και τη δόμηση των μαθηματικών προβλημάτων με σκοπό την επίτευξη μιας μαθηματικής λύσης.
- Ερμηνεία της προτεινόμενης λύσης με βάση τα ρεαλιστικά δεδομένα του προβλήματος, τον στοχασμό πάνω στις δυνατότητες και τους περιορισμούς της προτεινόμενης λύσης.
- Τέλος, ακολουθεί ένας επόμενος κύκλος όπου η ερμηνεία του προβλήματος υπόκειται σε επεξεργασία τροποποίησης και γενίκευσης.

1.2 Σχέσεις λεκτικής διατύπωσης, γραφικής παράστασης και συμβολισμού στην επίλυση του μαθηματικού προβλήματος.

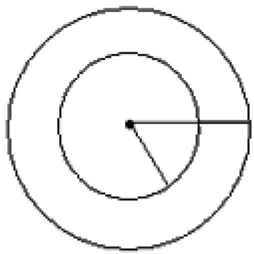
Η ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων αποτελεί έναν επιθυμητό στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Σύμφωνα με μια ορισμένη ερμηνευτική προσέγγιση σημαντικό ρόλο στην επίλυση των προβλημάτων παίζει η πιθανή *σημασιολογική συμφωνία* ή *σημασιολογική ασυμφωνία* μεταξύ της λεκτικής διατύπωσης ενός μαθηματικού προβλήματος, της γραφικής του αναπαράστασης και του μαθηματικού συμβολισμού που χρησιμοποιείται στην περιγραφή του προβλήματος [Duval, 1987]. Στις περιπτώσεις της σημασιολογικής συμφωνίας παρατηρούνται μεγαλύτερες επιτυχίες των μαθητών και μαθητριών, απ' ότι στις περιπτώσεις ασυμφωνίας, όπου απαιτείται πρόσθετη διδακτική προσπάθεια.

2. Το παράδειγμα επίλυσης ενός λεκτικού προβλήματος

Ας παρακολουθήσουμε μέσα από την παραπάνω ερμηνευτική προσέγγιση την προσπάθεια μαθητών να επιλύσουν το πρόβλημα που ακολουθεί.

- *Το πρόβλημα*[1]:

Το σπίτι του Νίκου απέχει από το σχολείο 700 μέτρα, ενώ το σπίτι της Μαρίας 1500 μέτρα. Πόσο απέχει το σπίτι του Νίκου από το σπίτι της Μαρίας;

Λεκτική Έκφραση	**Γραφική Παράσταση**	**Αλγεβρικός συμβολισμός**
Το σπίτι του Νίκου απέχει από το σχολείο 700μ., ενώ το σπίτι της Μαρίας 1500μ. Πόσο απέχει το σπίτι του Νίκου από το σπίτι της Μαρίας;		700m ≤ x ≤ 2200m

Πίνακας 1: Λεκτική έκφραση-Γραφική παράσταση-Αλγεβρικός συμβολισμός

Από την άποψη του μαθηματικού περιεχομένου οι τρεις καταστάσεις (λεκτική διατύπωση-γραφική παράσταση-αλγεβρικός συμβολισμός) είναι σημασιολογικά ισοδύναμες (πίνακας 1). Όμως μεταξύ της λεκτικής διατύπωσης και της γραφικής παράστασης υπάρχει σημασιολογική ασυμφωνία. Η λεκτική διατύπωση παραπέμπει στην έννοια της απόστασης (του μήκους) μεταξύ δύο σημείων, ενώ η γραφική παράσταση παριστάνει ομόκεντρους κύκλους. Από την άλλη, ο αλγεβρικός συμβολισμός βρίσκεται σε σημασιολογική συμφωνία με την λεκτική διατύπωση γιατί αναφέρεται σε μήκος, ενώ είναι σε σημασιολογική ασυμφωνία με τη γραφική παράσταση.

[1] Παραλλαγή προβλήματος που απαντάται στο: Wyndhamn, J. και Saljo, R. (1997).

Θα επιχειρήσουμε στη συνέχεια να αναλύσουμε μέσα από τις ερμηνευτικές προσεγγίσεις που προηγήθηκαν την διαδικασία επίλυσης του ανωτέρω προβλήματος χωρίς να δώσουμε έμφαση στον αλγεβρικό συμβολισμό. Στη διερευνητική εργασία, που τα εμπειρικά της ευρήματα θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια, συμμετέχουν μια μαθήτρια της Δ' Δημοτικού, ένας μαθητής της ΣΤ' Δημοτικού και μια μαθήτρια της Α' Γυμνασίου. Όλοι τους συμμετέχουν σε ατομική συνέντευξη και μέρος των διαλόγων, καθώς και σχήματα από την προσπάθειά τους καταγράφονται στη συνέχεια.

3. Τα εμπειρικά ευρήματα

3.1 Λεκτική διατύπωση-Γραφική παράσταση: Η σημασιολογική ασυμφωνία

Η σημασιολογική ασυμφωνία μεταξύ της λεκτικής διατύπωσης και της γραφικής παράστασης, που επισημάνθηκε προηγούμενα, έχει ως συνέπεια η γραφική απεικόνιση του λεκτικού προβλήματος να εκφράζεται με την συγγραμμικότητα των τριών κτηρίων. Εδώ, η γραφική παράσταση, από ένα χρήσιμο εργαλείο μετασχηματισμού και οπτικοποίησης του λεκτικού προβλήματος, λειτουργεί ως εμπόδιο στη δυνατότητα αντίληψης των πραγματικών συνθηκών του προβλήματος.

- *Χρυσάνθη* (Α' Γυμνασίου)
  Χ. (Χρυσάνθη): Πρώτα δεν θα αφαιρέσουμε;
  Ε. (Ερευνητής): Τι θα αφαιρέσουμε;
  Χ.: Το 700 από το 1500, για να βρούμε πόσο περισσότερο απέχει το σπίτι της Μαρίας από του Νίκου.
  Ε.: Αν κάνουμε την αφαίρεση, πόσο θα βρούμε;
  Χ.: 800 μέτρα.
  Ε.: Μπορείς να κάνεις ένα σχέδιο; Πως θα μπορούσαν να είναι το σχολείο, το σπίτι του Νίκου και το σπίτι της Μαρίας;

Η μαθήτρια κατασκευάζει το σχήμα 2, όπου τα τρία κτήρια είναι συγγραμμικά[2].

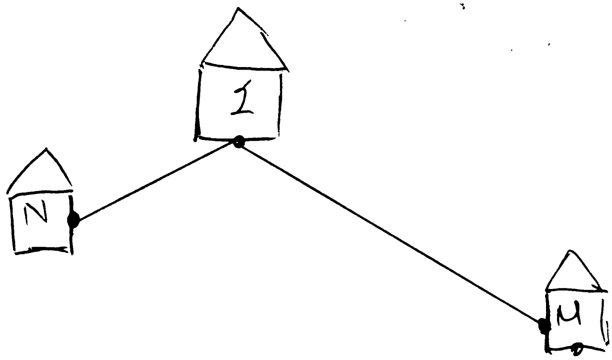
Σχήμα 2 (Χρυσάνθη)
(Σ: Σχολείο, Μ: Σπίτι Μαρίας, Ν: Σπίτι Νίκου)

- *Γιώργος* (ΣΤ' Δημοτικού)
  Γ.(Γιώργος): Θα κάνουμε αφαίρεση: 1500 πλην 700

[2] Για λόγους ομοιομορφίας στον συμβολισμό συμφωνούμε το σχολείο να συμβολίζεται με Σ, το σπίτι της Μαρίας με Μ και του Νίκου με Ν.
Επίσης για διευκόλυνση στις κατασκευές τα 1500m θα συμβολίζονται με 15cm, τα 700m με 7cm, κλπ.

Ε.: Δηλαδή πόσο θα απέχουν;
Γ.: 800 μέτρα.
Ε.: Μπορείς να μου σχεδιάσεις το σχολείο και τα δύο σπίτια, έτσι όπως τα φαντάζεσαι;

Κατασκευάζει το επόμενο σχήμα (σχ. 3) χωρίς να είναι συγγραμμικά τα τρία κτήρια.



Σχήμα 3: Η μη συγγραμμικότητα της κατασκευής (Γιώργος)

- *Αθηνά* (Δ' Δημοτικού)

Αρχικά δίνει την απόσταση που απέχουν και τα δύο σπίτια μαζί από το σχολείο προσθέτοντας τις δύο αποστάσεις. Αφού καλείται να ξαναδιαβάσει τη διατύπωση του προβλήματος, απαντάει ότι:

Α.: Θα αφαιρέσω από το 1500 το 700 (βρίσκει ότι η απόσταση θα είναι 800 μέτρα).
Ε.: Αν ήθελες να φτιάξεις μια ζωγραφιά πως θα έφτιαχνες τα κτήρια των σπιτιών και του σχολείου;

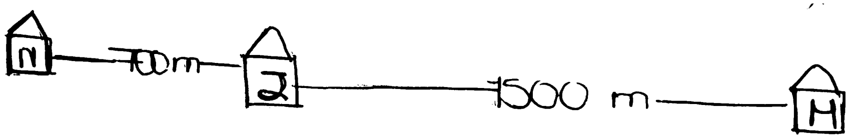
Δίνει το σχήμα 4 που αντιστοιχεί σε διαφορετική διευθέτηση των σπιτιών απ' ότι η προτείνεται από την αρχική πράξη της αφαίρεσης.

Σχήμα 4 (Αθηνά)

Ε.: Πόσο απέχει το σπίτι του Νίκου από το σπίτι της Μαρίας σύμφωνα με το σχέδιο;
Α.: 22, 2200 μέτρα.
Ε.: Εσύ μου είπες 800 προηγουμένως. Τελικά ποια είναι η απόσταση, 2200 μέτρα που δείχνει το σχέδιο ή 800 μέτρα που βρήκες στην αρχή με την αφαίρεση; Στην αρχή γιατί έκανες αφαίρεση, πως το σκέφτηκες;
Α.: Έτσι μου ήρθε. Σκέφτηκα ότι το σπίτι του Νίκου είναι πιο μπροστά από το σπίτι της Μαρίας και το σπίτι της Μαρίας είναι πίσω από του Νίκου.

3.2 . Η επιμονή στη συγγραμμικότητα
Ζητείται στη συνέχεια να δοθούν εναλλακτικές διευθετήσεις των κτηρίων.

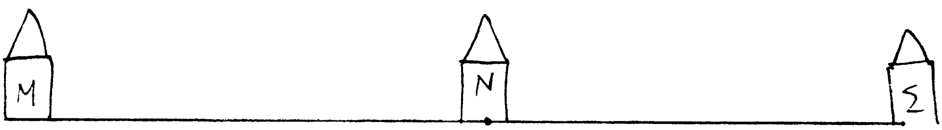
- *Χρυσάνθη*
  Χ.: Να βάλουμε εδώ το σχολείο (ανάμεσα από τα δύο σπίτια); Να βάλω εδώ του Νίκου και εδώ της Μαρίας (σχήμα 5).



Σχήμα 5: Εναλλακτική παρουσίαση των κτηρίων (Χρυσάνθη)

Ε.: Τώρα πόσο είναι η απόσταση των δύο σπιτιών;
Χ.: Θα προσθέσω, το 700 με το 1500. Να το κάνω;
Ε.: Ναι.
Χ.: (Κάνει την πρόσθεση) 2200 μέτρα.

- *Αθηνά*
  Α.: Ναι. Μπορεί να είναι εδώ του Νίκου, εκεί της Μαρίας και από εδώ το σχολείο (σχήμα 6).
  Ε.: Σ' αυτή την περίπτωση πόσο απέχει το σπίτι του Νίκου από της Μαρίας;
  Α.: 800 μέτρα.
  Ε.: Τι πράξη έκανες;
  Α.: Αφαίρεση.



Σχήμα 6: Εναλλακτική παρουσίαση των κτηρίων (Αθηνά)

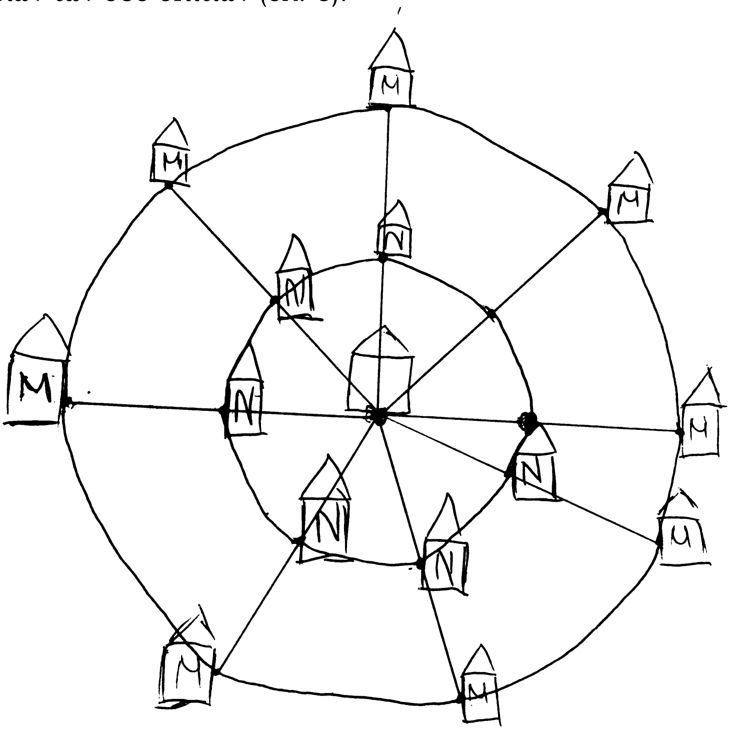
Στα προηγούμενα η «αναπλαισίωση» (recontextualization) του λεκτικού προβλήματος, οδηγεί σε μια ορισμένη ερμηνεία της απόστασης και της συνακόλουθης τοποθέτησης των κτηρίων. Σε πραγματικές συνθήκες στην ερώτηση για το πόσο μακρύς είναι ο δρόμος μεταξύ δύο περιοχών μπορεί να υπάρξει ένα σύνολο από απαντήσεις που να περιγράφουν εξίσου καλά το ζητούμενο: Μπορεί, για παράδειγμα, να είναι οι ενδείξεις των οδικών πινακίδων, να μετράται με τον χρόνο που χρειάζεται για να καλύψουμε βαδίζοντας ή με αυτοκίνητο την απόσταση, κλπ. Σ' αυτές τις πραγματικές συνθήκες ο δρόμος που ενώνει τις δύο περιοχές συνήθως δεν είναι ευθύς.

- *Γιώργος*

Φτιάχνει το σπίτι της Μαρίας σε μια άλλη πιθανή θέση.
Γ.: Να φτιάξω και άλλα (άλλες πιθανές θέσεις του σπιτιού της Μαρίας);

Ε.: Ναι.

Φτιάχνει διάφορες θέσεις για το σπίτι της Μαρίας. Η αρχική αποδέσμευση από τους χωρικούς περιορισμούς της συγγραμμικότητας στη διευθέτηση των κτηρίων (σχ. 3), διευκολύνει το συγκεκριμένο υποκείμενο να τοποθετήσει τα σπίτια σε διάφορες θέσεις τηρώντας τις προϋποθέσεις του προβλήματος και να προσδιορίσει στη συνέχεια με σχετική ευκολία το γεωμετρικό τόπο των σημείων των δύο σπιτιών (σχ. 6).

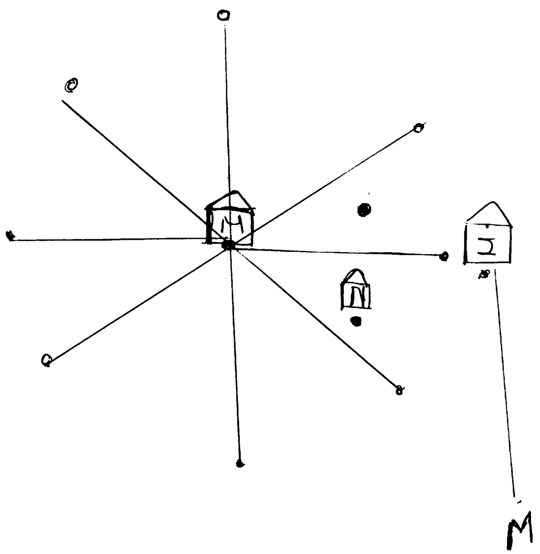


Σχήμα 6: Ο γεωμετρικός τόπος των θέσεων των σπιτιών (Γιώργος)

3.3. Οι δυσκολίες της λανθασμένης προοπτικής

Στο αίτημά μας να βρεθούν και άλλες θέσεις για τα δύο σπίτια η μια μαθήτρια (Χρυσάνθη/Α' Γυμνασίου) αλλάζει την προοπτική του σχεδίου της και παίρνει σαν σημείο αναφοράς το σπίτι της Μαρίας. Τοποθετεί το σχολείο στις δύο κατακόρυφες και οριζόντιες θέσεις (σχήμα 7).

Ε.: Αλλού θα μπορούσε να βρίσκεται (το σχολείο);
Χ.: Και εδώ (στις θέσεις των διαγωνίων).
Ε.: Αν βρεις όλες τις θέσεις τι σχήμα θα δημιουργηθεί;
Χ.: Ένας κύκλος.
Ε.: Με ποιο κέντρο και τι ακτίνα:
Χ.: Με κέντρο το σπίτι της Μαρίας και ακτίνα 1500 μέτρα.
Ε.: Το σπίτι του Νίκου που θα βρίσκεται;
Χ.: Κάπου εδώ (δείχνει στο εσωτερικό του κυκλικού δίσκου).
Ε.: Ας φτιάξουμε ένα σχέδιο με τις θέσεις που μπορεί να βρίσκονται τα κτήρια.
Χ.: Το σπίτι του Νίκου θα βρίσκεται κάπου εδώ (Σημειώνει δύο θέσεις συμμετρικές ως προς τον οριζόντιο άξονα-σχήμα 7).



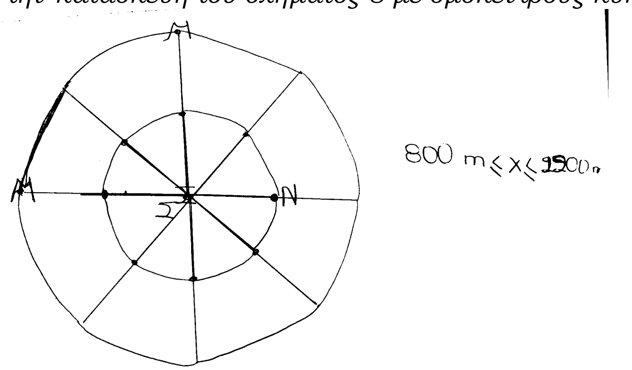
Σχήμα 7: Η λανθασμένη προοπτική (Χρυσάνθη)

Ε.: Σε άλλες θέσεις θα μπορούσε να βρίσκεται το σπίτι του Νίκου;
Χ.: Είναι όλα τα σημεία που απέχουν από το σχολείο 700 μέτρα.
Ε.: Και τι σχήμα δημιουργούν όλες αυτές οι θέσεις;
Χ.: Κύκλο.

3.4. Οικοδομώντας τη λύση του προβλήματος

Στη συνέχεια καλείται κάθε υποκείμενο να ξαναεπιστρέψει στην εκφώνηση του προβλήματος ώστε να ελέγξει την εργασία του και να απαντηθεί το ζητούμενο του προβλήματος.

- *Χρυσάνθη*
  Χ.: Έπρεπε να βάλουμε το σχολείο εδώ (στη θέση του σπιτιού της Μαρίας- Αλλαγή προοπτικής).
  Ε.: Ωραία. Ας φτιάξουμε τώρα ένα νέο σχήμα.
  Χ.: (Φτιάχνει την κατασκευή του σχήματος 8 με ομόκεντρους κύκλους).



Σχήμα 8: Οικοδομώντας τη λύση του προβλήματος

Ε.: Το πρόβλημά μας έχει λύση, έχει πολλές λύσεις ή δεν έχει καμία λύση;
Χ.: Υπάρχουν πολλές λύσεις.
Ε.: Η πιο μικρή απόσταση μεταξύ των δύο σπιτιών πόσο είναι;
Χ.: 800 μέτρα.
Ε.: Και η πιο μεγάλη;
Χ.: 2200 μέτρα.
Ε.: Θα μπορούσε η απόσταση των δύο σπιτιών να είναι 1000 μέτρα;
Χ.: Ναι.
Ε.: 2400 μέτρα;
Χ.: Όχι.
Ε.: Αν θέλαμε να σημειώσουμε με μαθηματικά σύμβολα και σημειώσουμε με x την απόσταση, πως θα σημειώναμε την απόσταση των δύο σπιτιών;
Χ.: $800 \leq x \leq 2200$.

- *Γιώργος*
  Ε.: Ποια είναι η απάντηση στο πρόβλημα; Μία, πολλές, καμία;
  Γ.: Είναι πολλές.
  Ε.: Η πιο μικρή απόσταση μεταξύ των δύο σπιτιών πόσο είναι;
  Γ.: 800 μέτρα.
  Ε.: Και η πιο μεγάλη;
  Γ.: 2200 μέτρα.
  Ε.: Θα μπορούσε η απόσταση των δύο σπιτιών να είναι 1100 μέτρα;
  Χ.: Ναι.
  Ε.: 2300 μέτρα;
  Χ.: Όχι.

- *Αθηνά*

Μέσα από τη σημείωση διάφορων θέσεων για το σπίτι του Νίκου προσδιορίζεται ότι όλες οι θέσεις δημιουργούν ένα κύκλο με κέντρο το σχολείο. Στην συνέχεια με όμοια διαδικασία προσδιορίζονται και οι πιθανές θέσεις για το σπίτι της Μαρίας.

Σύνοψη-Συζήτηση

Επιχειρήσαμε στην παρουσίαση αυτή να αναδείξουμε θεωρητικές πτυχές της διαδικασίας μαθηματικοποίησης ενός λεκτικού προβλήματος. Υπογραμμίσαμε ότι το γεγονός της απόσπασης του προβλήματος που εκφράζεται λεκτικά από το συγκεκριμένο του πλαίσιο και η συνακόλουθη ένταξή του σε ένα νέο πλαίσιο, έχει ως συνέπεια ένα διαφορετικό τρόπο αντιμετώπισής του από τους μαθητές και μαθήτριες.

Παράλληλα, επιχειρήσαμε μια ερμηνευτική προσέγγιση του προβλήματος μέσα από τη διάκριση της λεκτικής διατύπωσης, και της γραφικής του παράστασης εντοπίζοντας στοιχεία σημασιολογικής συμφωνίας ή ασυμφωνίας μεταξύ των παραμέτρων αυτών. Στις περιπτώσεις της σημασιολογικής ασυμφωνίας υπογραμμίσαμε πρόσθετες δυσκολίες στην αντιμετώπιση των προβλημάτων, όπως στην περίπτωση του παραδείγματός μας. Επιπλέον, το συγκεκριμένο πρόβλημα που πραγματευτήκαμε μας δίνει αφορμή για να αναδείξουμε τη σημασία της δημιουργίας ενός πειραματικού περιβάλλοντος όπου εμπλέκεται η *«οπτική διδασκαλία»* [Hershkowitz, et. al., 1996] και όπου τα σχήματα και ο χώρος αντιμετωπίζονται σαν θεμελιακά στοιχεία για την οικοδόμηση της μαθηματικής σκέψης. Οφείλουμε εδώ να υπογραμμίσουμε τον ρόλο των γραφικών παραστάσεων ως «εργαλείων» που διαμεσολαβούν μεταξύ του υποκειμένου και του αντικειμένου της μάθησης. Τα «εργαλεία» μάθησης που χρησιμοποιούνται από τη θεσμοθετημένη εκπαίδευση δεν είναι αυτονόητα προϊόντα της γνωστικής ανάπτυξης των υποκειμένων, ούτε μονοσήμαντα παράγωγα του τρόπου σκέψης τους, αλλά αποτέλεσμα κοινωνικής μεταβίβασης (Nunes, 1997, Vygotsky, 1997).

Τα τελευταία χρόνια έχουμε απομακρυνθεί από μια αντίληψη που θεωρεί τα μαθηματικά ως μια λογική δομή που οφείλουμε να ακολουθούμε. Έτσι, το διδακτικό μας ενδιαφέρον εστιάζεται στην διαδικασία της οικοδόμησης, από τα ίδια τα παιδιά, της επιδιωκόμενης γνώσης. Παράλληλα με την υπογράμμιση της συνεισφοράς της κοινωνικής μεταβίβασης στη μάθηση, η εργασία μας αυτή αντανακλάει το ενδιαφέρον μας για μια μετατόπιση από την άποψη ότι τα μαθηματικά είναι ένα σώμα γνώσεων δημιουργημένων από τους μαθηματικούς, στη άποψη να ειδωθούν σαν ένα αντικείμενο που πρέπει να οικοδομηθεί.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Dowling, P. (1998). *The Sociology of Mathematics Education. Mathematical Myths/Pedagogic Texts.* London: Falmer Press.

Duval, R. (1987). Ο ρόλος της ερμηνείας στη μάθηση των μαθηματικών. *Διάσταση,* τεύχος 2, έκδοση της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (παράρτημα κεντρικής Μακεδονίας), σ. 56-73.

Hershkowitz, R., Parzysz, B., & Van Dormolen, L., (1996). Space and Shape. In A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, pp. 161-204.

Nunes, T., (1997). What Organizes Our Problem-Solving Activities? In B. Resnick, R. Saljo, C. Pontecorno & B. Burge (Eds.), *Discourse, Tools, and Reasoning: Essays on Situated Cognition*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pp. 288-311.

Veel, R. (1999). Language, knowledge and authority in school mathematics. In Fr. Christie (ed.), *Pedagogy and the Shaping of Consciousness. Linguistic and social Processes.* Continuum, London and New York, pp. 185-216.

Vygotsky, L. (1997): Νους στην κοινωνία. Η ανάπτυξη των ανώτερων ψυχικών διαδικασιών, Gutenberg, Αθήνα. Πρώτη έκδοση (1978) *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes.* Harvard University Press.

Wubbels, T., Korthagen, F., and Broekman, H. (1997). Preparing Teachers for Realistic Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, 32, pp. 1-28.

Wyndhamn, J. & Saljo, R. (1997). Word Problems and Mathematical Reasoning-A Study of Children's Mastery of Reference and Meaning in Textual Realities. *Learning and Instruction*, Vol. 7, No. 4, pp. 361-382.

Ο λόγος των μαθηματικών προβλημάτων στα εγχειρίδια του Δημοτικού σχολείου και η σχέση που δημιουργεί με τους μαθητές

Ολυμπία Γκριμπίζη
Εκπαιδευτικός Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης

Αφορμή για την εισήγησή μου αποτέλεσε η δυσκολία πολλών μαθητών κατά τη λύση μαθηματικών προβλημάτων. Παρατήρησα ότι πολλοί μαθητές παραιτούνται από την προσπάθεια να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα αν και ξέρουν να χειρίζονται τις μαθηματικές πράξεις και γνωρίζουν τις στρατηγικές που απαιτούνται για τη λύση τους. Ενώ δηλαδή οι συγκεκριμένοι μαθητές γνωρίζουν την πράξη της πρόσθεσης και της αφαίρεσης και είναι ικανοί στις προσωπικές καθημερινές τους πρακτικές να αντιλαμβάνονται καταστάσεις *σύνθεσης, μεταβολής και σύγκρισης,* όταν συναντούν αυτές τις καταστάσεις σ' ένα μαθηματικό πρόβλημα δείχνουν αδυναμία να αναγνωρίσουν τις σημασιολογικές σχέσεις που το διέπουν και αυτό τους οδηγεί σε λάθος λύση ή σε παραίτηση. Οι μαθητές καταλαμβάνονται από αισθήματα άγχους και ανεπάρκειας σχετικά με τις μαθηματικές τους ικανότητες και σταδιακά δημιουργούν αρνητική σχέση με τα μαθηματικά.
Γιατί συμβαίνει αυτό; Ποιες είναι οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές κατά τη λύση των μαθηματικών προβλημάτων που τους οδηγούν σ' αυτές τις συμπεριφορές και πως μπορούμε να τους βοηθήσουμε;
Σίγουρα πάρα πολλοί παράγοντες υπεισέρχονται στη διαδικασία επίλυσης των μαθηματικών προβλημάτων. Στην εισήγησή μου αυτή επέλεξα να ασχοληθώ με το λόγο των μαθηματικών προβλημάτων, διότι θεωρώ ότι αποτελεί έναν από τους βασικότερους συντελεστές για τη διαμόρφωση της σχέσης των μαθητών με τη γνώση γενικότερα και στη συγκεκριμένη περίπτωση με τη μαθηματική γνώση. Ειδικότερα θα προσπαθήσω να εξετάσω αν η γλώσσα των κειμένων των μαθηματικών προβλημάτων επιτελεί τον κύριο ρόλο της που είναι η δημιουργία επικοινωνιακής συνθήκης με τους αποδέκτες της, δηλαδή τους μαθητές και πιο συγκεκριμένα αν ενθαρρύνει ή αποθαρρύνει τους μαθητές να οικειοποιηθούν τον μαθηματικό λόγο και να τον διαπραγματευτούν σε συνδυασμό με την υποκειμενικότητά τους. Με άλλα λόγια μας ενδιαφέρει να δούμε αν ο λόγος των μαθηματικών προβλημάτων επιτρέπει να εμπλακούν οι γλωσσικές, οι κοινωνικές και οι γνωστικές δυνατότητες των μαθητών.
Προκειμένου να προσεγγίσω το θέμα μου θα στηριχτώ στο *σημειωτικό μοντέλο* της μαθηματικής δραστηριότητας του Rotman και θα αναλύσω μερικούς γλωσσικούς μηχανισμούς που λειτουργούν στο λόγο των μαθηματικών προβλημάτων, όπως αυτός εμφανίζεται μέσα στα σχολικά εγχειρίδια.

Το σημειωτικό μοντέλο της μαθηματικής δραστηριότητας του Rotman

Το σημειωτικό μοντέλο της μαθηματικής δραστηριότητας του Rotman (1988) ξεχωρίζει τρεις διαφορετικές μορφές ή ενέργειες : το Άτομο- το Υποκείμενο

και τον Φορέα δράσης οι οποίοι συμμετέχουν σε μια μαθηματική δραστηριότητα.
Σύμφωνα με τη θέση του Rotman , για να αντιληφθούμε καλύτερα τις λειτουργίες του καθενός από τους παραπάνω φορείς στον μαθηματικό λόγο είναι απαραίτητο να δούμε τις δυο διακριτές διαστάσεις λόγου που λειτουργούν στα μαθηματικά: ο ένας είναι ο τυπικός διαλογικός τρόπος ή *ο Κώδικας* και ο άλλος είναι ο άτυπος διαλογικός τρόπος ή *ο Μετακώδικας*.
Ο τυπικός διαλογικός τρόπος των μαθηματικών συνδέεται με τις αντικειμενικές και αυστηρά δομημένες όψεις των μαθηματικών. Είναι όλο το συμβολικό σύστημα που χρησιμοποιείται στα μαθηματικά κείμενα καθώς και οι κανόνες του. Επίσης μέρος του *Κώδικα* αποτελούν και οι εκφορές οι οποίες γίνονται στην καθημερινή γλώσσα και οι οποίες αναμειγνύονται με τα μαθηματικά σύμβολα (Rotman 1998) Ο *Κώδικας* θεωρείται σαν το «πραγματικό» σώμα της μαθηματικής γνώσης.
Ο άτυπος διαλογικός τρόπος ή ο *Μετακώδικας* αφορά τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους πλαισιώνεται ο Κώδικας σε συγκεκριμένα πλαίσια αναφοράς και συνδέεται με ιστορικές, εμπειρικές, ψυχολογικές και πολιτισμικές πραγματικότητες. Σύμφωνα με τον Rotman (1998) ο *Μετακώδικας* αποτελείται από: διευκρινιστικά σχέδια και διαγράμματα, δίνει κίνητρα υποστηρίζοντας διάφορες ιδέες σε σχέση με τη γνωστική ανάπτυξη, συζητά διάφορες διαισθητικές ή ενορατικές λύσεις, διαμορφώνει αξιώματα και υποκείμενες ιστορίες, προτείνει εφαρμογές και σταθεροποιεί στην ουσία ή στερεοποιεί τις ερμηνείες των τυπικών δηλωτικών συστημάτων. Κάνει κατά συνέπεια επιπλέον μαθηματικές συνδέσεις. Στα μαθηματικά ο *Μετακώδικας* αντιμετωπίζεται σαν λιγότερο αυστηρός και επιφανειακός, όταν συγκρίνεται με τον Κώδικα.
Κατά την εκπλήρωση των μαθηματικών λειτουργιών από ένα άτομο σ' ένα άλλο ο *Κώδικας* και ο *Μετακώδικας* εμφανίζονται μέσα από τη δράση των τριών σημειωτικών μορφών: του *Ατόμου*, του *Υποκειμένου* και του *Φορέα δράσης*.

Το Άτομο: το άτομο λειτουργεί κυρίως στον *Μετακώδικα* και κατά συνέπεια ενσωματώνεται σε ψυχο-κοινωνικές και ιστορικο-πολιτισμικές αναφορές. Το Άτομο έχει πρόσβαση σε όνειρα, σε κίνητρα, σε αφηγήσεις και μιλά χρησιμοποιώντας προσωπικές αντωνυμίες στην καθημερινή του γλώσσα.

Το Υποκείμενο: το υποκείμενο αποτελεί μια αφαίρεση του προσώπου. Σ' αυτήν την αφαίρεση του προσώπου καθώς και στις λειτουργίες του απευθύνεται ο *Κώδικας*. Το Υποκείμενο χρησιμοποιώντας γνωστικές διεργασίες εξηγεί μια σειρά από σύμβολα και μαθηματικά κείμενα σύμφωνα με τους κανόνες και τις συμβάσεις του Κώδικα.

Ο Φορέας Δράσης: είναι σαν μια μηχανή, μια τεχνολογία γνώσεων δηλαδή, που στην ουσία χειρίζεται με μηχανιστικό τρόπο τα σύμβολα του *Κώδικα* χωρίς να ενδιαφέρεται ιδιαίτερα για νοήματα και ερμηνείες.

Όπως πολύ χαρακτηριστικά επισημαίνει ο Rotman, το Υποκείμενο είναι το πιο «*ορατό και απτό*» από τις τρεις μορφές. Τα μαθηματικά κείμενα στην ουσία απευθύνονται στο Υποκείμενο. Ωστόσο η δραστηριότητα του

Υποκειμένου αποσυνδέεται από την παρουσία του Προσώπου που αποκλείεται παρότι βρίσκεται πολύ κοντά. Επίσης η δραστηριότητα του Υποκειμένου παρακινεί τον Φορέα Δράσης να παράγει μαθηματικό έργο. Οι αλλαγές από το Πρόσωπο στο Υποκείμενο εκπληρώνονται με την αδιαφάνεια όλων των στοιχείων που το Πρόσωπο μεταφέρει και την εξαφάνιση του «νοήματος και της έννοιας» στον Φορέα Δράσης (Rotman 1993:92)
Η μαθηματική δραστηριότητα απαιτεί την ταυτόχρονη παρουσία και των τριών σημειωτικών φορέων δράσης. Οι μαθηματικοί μπορούν να ερμηνεύσουν το σύνολο μιας μαθηματικής απόδειξης μόνο στηριζόμενοι στη διαλογική διάσταση του *Μετακώδικα.* Και μόνο το πρόσωπο επιτρέπεται να διερευνήσει για την «*Ιδέα που βρίσκεται πίσω από την απόδειξη*», η οποία Ιδέα έδωσε μια τέτοια απόδειξη (Rotman 1993:80).
Σε τελική ανάλυση αυτό σημαίνει ότι ο *Μετακώδικας* είναι ο χώρος όπου επισυμβαίνει η συζήτηση και η δημιουργία του *Κώδικα.*

Η λειτουργία του λόγου στα κείμενα

Ο λόγος των κειμένων αποτελεί βασικό μέσον της επικοινωνίας του κειμένου ταυτόχρονα όμως με τον τρόπο που πραγματώνεται διαμορφώνει και την αντίληψη μας για τα πράγματα.
Η μορφή με την οποία οργανώνεται και δομείται ο λόγος είτε προφορικός είναι αυτός είτε γραπτός δεν αντανακλά μηχανικά την εξωτερική πραγματικότητα, αλλά συνιστά σε μεγάλο βαθμό την ίδια την πραγματικότητα και τη γνώση μας γι' αυτήν. Αν αυτό το μεταφέρουμε στο λόγο ο οποίος χρησιμοποιείται στα μαθηματικά προβλήματα θα λέγαμε ότι ο τρόπος με τον οποίο είναι διατυπωμένα τα μαθηματικά προβλήματα ευθύνεται για το σχηματισμό των νοητικών αναπαραστάσεων των μαθητών και τον τρόπο με τον οποίο αυτοί επεξεργάζονται και οργανώνουν τα δεδομένα, ώστε να οδηγηθούν στη λύση του προβλήματος. Η κατανόηση επομένως της λειτουργίας της γλώσσας είναι σημαντική αν θέλουμε να εξετάσουμε πως δομείται η γνώση.
Τα κείμενα με βάση το ρόλο που καλούνται να διαδραματίσουν στο κοινωνικό και πολιτισμικό περιβάλλον στο οποίο εντάσσονται, οργανώνονται σε τύπους ή είδη κειμένων με συγκεκριμένα μορφικά, λειτουργικά και καταστασιακά χαρακτηριστικά (Γεωργακοπούλου – Γούτσος 1999:63). Κάθε κοινωνία διαμορφώνει τα δικά της κειμενικά είδη με βάση τα κριτήρια που κάθε φορά επιλέγει για να τα ταξινομήσει. Διαχρονικά έχουν εμφανιστεί πολλές διακρίσεις κειμένων: από αυτήν του Αριστοτέλη ως τις θεωρίες του Μπαχτίν.
Στην παρούσα μελέτη επέλεξα να χρησιμοποιήσω την διάκριση των ειδών του κειμένου με κειμενογλωσσικά και κοινωνιογλωσσικά κριτήρια, με βάση τη χρήση του αφηγηματικού ή μη αφηγηματικού λόγου. (Γεωργακοπούλου – Γούτσος 1999:63).
Ο διαχωρισμός αυτός τέμνει τις επιμέρους διαφοροποιήσεις των κειμενικών ειδών αποφεύγει τον κατακερματισμό του λόγου σε αποσπασματικές κατηγορίες και γίνεται εύκολα αντιληπτός στην επικοινωνία. Επίσης είναι πιο λειτουργικός στην ανάλυση λόγου μιας και αντιμετωπίζει τα κείμενα με κριτήρια επικοινωνιακά. Η διαφορά μεταξύ αφηγηματικού και μη αφηγηματικού λόγου εκφράζεται στη γλωσσική δομή και στις λειτουργίες του κειμένου.

Από κοινωνιογλωσσική πλευρά, η διάκριση μεταξύ αφηγηματικού και μη αφηγηματικού λόγου εκφράζει τους δυο θεμελιώδεις μηχανισμούς για τη διαμόρφωση κοσμοαντίληψης στο καθημερινό κοινωνικό γίγνεσθαι.
Ο Bruner διακρίνει τον αφηγηματικό τρόπο γνώσης που ασχολείται με την ανθρώπινη πραγματικότητα, τις εμπειρίες, τις αξίες, τις αμφιβολίες και τα συναισθήματα από τον μη αφηγηματικό τρόπο, ο οποίος επικεντρώνει το ενδιαφέρον του στη φυσική πραγματικότητα, την αλήθεια, την παρατήρηση και την απόδειξη (στο Γεωργακοπούλου – Γούτσος 1999).
Αφού παρουσιάσω τα χαρακτηριστικά του αφηγηματικού και μη αφηγηματικού λόγου θα υποστηρίξω ότι ο μαθηματικός λόγος ως εάν να ανήκει στο μη αφηγηματικό είδος και θα παρουσιάσω τις συνέπειες που έχει αυτή η επιλογή.

	Διάκριση λόγου	
	Αφηγηματικός λόγος	**Μη Αφηγηματικός λόγος**
Κειμενικές δομές	Προσανατολισμός-Πράξη Επιπλοκής-Κλιμάκωση-Επίλυση	Δομή Είδους (απεικονιστική, επιχειρηματολογική κλπ)
Ενότητες	Στίχοι, Στροφές, Επεισόδια, Παράγραφοι	Παράγραφοι (ορθογραφική,θεματική, διαδοχικότητας)
Κειμενικές ενδείξεις	Χρονικά επιρρήματα, Ασυνέχεια προσώπων και Χρόνων	Μεταγλωσσικές εκφράσεις, Ζεύγη πρόσληψης
Οργανωτικές Λειτουργίες	Πλοκή	Απεικονιστικές Πρόβλημα - Λύση Ισχυρισμός-Άρνηση κλπ.
Αξιολόγηση	Εσωτερική, Εξωτερική-συνδέεται με την αναπαράσταση	Εσωτερική,Εξωτερική-συνδέεται με το αντικείμενο

Πίνακας 1 : Κειμενικές παράμετροι των δυο τρόπων (Γεωργακοπούλου-Γούτσος 1999:223)

Στον **μη αφηγηματικό λόγο** οι τυπικές δομές του διακρίνονται σε απεικονιστικές όταν υπάρχει στενή σχέση της απεικόνισης με το περιεχόμενο, περιγραφικές για απλές περιγραφές, επιχειρηματολογικές για όσα κείμενα στηρίζονται στην ανάπτυξη επιχειρημάτων. Η μονάδα οργάνωσης είναι η παράγραφος που ορίζεται είτε με ορθογραφικά, είτε με θεματικά κριτήρια ανάλογα με τις ανάγκες του κειμένου. Η συνεκτικότητα του κειμένου επιτυγχάνεται με μεταγλωσσικές εκφράσεις (π.χ. καταρχήν, με αυτήν την έννοια, με αυτές τις προυποθέσεις κλπ) ή ζεύγη πρόσληψης (αντίθετα, αναμενόμενες εκφράσεις κλπ). Τέλος η αξιολόγηση συνδέεται με το αντικείμενο το οποίο αποτελεί την κύρια κειμενική οντότητα.

Μια ακόμη βασική παράμετρος για την κατάταξη των κειμένων αποτελεί το αντικείμενο αναφοράς τους. Ο πίνακας 2 που ακολουθεί δείχνει σχηματικά τις διαφορές των δυο ειδών:

	Διάκριση λόγου	
	Αφηγηματικός λόγος	**Μη Αφηγηματικός λόγος**
Αναφορικότητα	ανασύνθεση γεγονότων	επαλήθευση γεγονότων
Ιδιαιτερότητα	ιδιαίτερα γεγονότα	γενικές αλήθειες
Αλληλουχία	χρονική διαδοχή	πολλαπλή (απεικονιστική, λογικού περιεχομένου κλπ.)
Κανονικότητα	ρήξη και αποκατάσταση της ισορροπίας	διατύπωση επιχειρηματολογία κλπ. του κανονικού
Επικοινωνιακός στόχος	υπόκειται σε διαπραγμάτευση ανά περικείμενο	σταθερός σε όλα τα περικείμενα

Πίνακας 2:Αναφορικές παράμετροι των δυο ειδών (Γεωργακοπούλου – Γούτσος 1999:227)

Όπως μπορούμε να δούμε στον πίνακα **η αφήγηση** ενδιαφέρεται για την ανασύνθεση ιδιαίτερων , μοναδικών συμβάντων. Η αλληλουχία των γεγονότων στηρίζεται στη χρονική διαδοχή και υπάρχει το στοιχείο της ρήξης στην ισορροπία αλλά σταδιακά επέρχεται πάλι η αποκατάσταση της ισορροπίας. Τέλος το αφηγηματικό κείμενο μπορεί να μεταβληθεί ανάλογα με τους επικοινωνιακούς στόχους οι οποίοι είναι υπό διαπραγμάτευση και καθορίζονται κάθε φορά από το περιβάλλον στο οποίο το κείμενο αναφέρεται.
Αντίθετα ο **μη αφηγηματικός λόγος** ενδιαφέρεται για την επαλήθευση γεγονότων και τη διατύπωση γενικών αληθειών. Η αλληλουχία είναι κυρίως νοηματική και υποστηρίζεται από απεικονιστικές ή επιχειρηματολογικές αρχές. Η κανονικότητα αποτελεί ζήτημα που επιδέχεται ρητή και εκπεφρασμένη ανάλυση, συζήτηση, επιχειρηματολογία κλπ. και ο σκοπός των μη αφηγηματικών κειμένων παραμένει σταθερός και δεν επιδέχεται διαπραγμάτευση στα διάφορα επικοινωνιακά περιβάλλοντα (Γεωργακολούλου-Γούτσος 1999).
Καθένας από τους δυο τρόπους δημιουργεί διαφορετική σχέση μεταξύ του δημιουργού με το κείμενο και τους αποδέκτες του. Ο αφηγηματικός λόγος συνδέεται με την ενεργό συμμετοχή του αποδέκτη στη διαμόρφωση της αλήθειας ενώ ο μη αφηγηματικός βασίζεται στη ρητορική πειθώ του απρόσωπου δημιουργού που βρίσκεται σε αντικειμενική απόσταση τόσο από το θέμα του όσο και από τον αποδέκτη του κειμένου. Η *εμπλοκή* αποτελεί το κομβικό στοιχείο διαφοράς αφηγηματικού και μη αφηγηματικού τρόπου.

Ανάλυση του λόγου των μαθηματικών προβλημάτων
Προκειμένου να κάνω την ανάλυση μου ανέτρεξα στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών του Δημοτικού Σχολείου. Τα προβλήματα που

χρησιμοποίησα στην ανάλυσή μου βρίσκονται στο Α΄ τεύχος μαθηματικών της Δ΄ τάξης του Δημοτικού στη σελίδα 93 και τα θεωρώ ως χαρακτηριστικό και αντιπροσωπευτικό δείγμα της δομής και του λόγου των μαθηματικών προβλημάτων του Δημοτικού Σχολείου.

Στην ανάλυση που ακολουθεί το κείμενο αποτελεί τη βασική μονάδα εξέτασης. Η ερμηνεία του κάθε στοιχείου του κειμένου εξετάζεται σε σχέση με τα άλλα στοιχεία του κειμένου, αλλά και με το πώς επηρεάζει τη μορφή και το περιεχόμενο ολόκληρου του κειμένου. Το λεξιλόγιο και τα γραμματολογικά στοιχεία αναλύονται αναφορικά με το ρόλο που παίζουν στη νοηματοδότηση και την επικοινωνία του κειμένου στο άμεσο και έμμεσο περιβάλλον.

Θα ξεκινήσω την ανάλυση από την οδηγία με την οποία απευθύνεται ο συγγραφέας στους μαθητές. :

Να λύσετε *με δυο τρόπους, στο τετράδιο σας, τα παρακάτω προβλήματα.*

Ο σχολιασμός αφορά στη χρήση της υποτακτικής, *να λύσετε*, και στη σχέση που δημιουργεί στην επικοινωνία μεταξύ του δημιουργού, του κειμένου και του αποδέκτη.

Ο Halliday συνδέει το σύστημα των εγκλίσεων με την έκφραση της τροπικότητας και αναλύει την τροπικότητα ως ένα πλέγμα στρατηγικών που εκφράζει τη σχέση του δημιουργού με τους αποδέκτες και με το κείμενο το ίδιο με βάση την υποκειμενικότητα και την εμμεσότητα. Η χρήση του να + κύριο ρήμα είναι ένας από τους τρόπους αναπλήρωσης του τρίτου προσώπου της προστακτικής (Mackridge 1990:396). Η χρήση της προστακτικής, *να λύσετε* σε συνδυασμό με την διευκρίνιση που ακολουθεί, *με δυο τρόπους*, εκφράζει το δέον, το βέβαιον και το αντικειμενικό. Όσον αφορά δε τη σχέση που αναπτύσσεται ανάμεσα στο δημιουργό στο κείμενο και τους αποδέκτες, θα λέγαμε ότι με τη χρήση της ο συγγραφέας δημιουργεί συνθήκη απόστασης με τους αποδέκτες και ορίζει για τον εαυτό του το ρόλο αυτού που δίνει τις εντολές και για τον αποδέκτη, στην προκειμένη περίπτωση τους μαθητές, το ρόλο αυτού που εκτελεί τις εντολές.

Η οργανωτική δομή των προβλημάτων στηρίζεται στο τυπικό σχήμα του μη αφηγηματικού λόγου, ***πρόβλημα-λύση*** και παρουσιάζει τα παρακάτω τυπικά χαρακτηριστικά Τα προβλήματα είναι χωρισμένα σε δυο μέρη. Στο πρώτο μέρος του προβλήματος περιγράφεται μια κατάσταση, δίνονται τα ποσοτικά στοιχεία και στο δεύτερο μέρος στο οποίο αναζητείται η λύση, τίθεται το ερώτημα. Το πρώτο μέρος αποκτά νόημα μόνον αφ' όσον τεθεί η ερώτηση, η οποία βρίσκεται στο δεύτερο μέρος. Αυτή η διάσταση, της παρουσίασης των δεδομένων από τα ερωτήματα εκφράζεται και στο επίπεδο της οργάνωσης του κειμένου.

Στο πρώτο μέρος όπου η γλώσσα χρησιμοποιείται για να μεταφέρει τις πληροφορίες και τα δεδομένα του προβλήματος το γλωσσικό μοντέλο που επιλέγεται για να το δηλώσει είναι η *κατάφαση*. Στο δεύτερο μέρος το οποίο απευθύνεται στο μαθητή και απαιτεί απ' αυτόν διερεύνηση, το γλωσσικό μοντέλο που επιλέγεται είναι η *ερώτηση*. Η κατάφαση δίνει τη δυνατότητα να παρουσιαστούν *ρητά* και *με σαφήνεια* τα ποσοτικά στοιχεία και τα δεδομένα του προβλήματος και ορίζει το *τι* και *πώς* θα ειπωθεί κάτι. Αυτός επομένως ο οποίος δίνει τις πληροφορίες διαμορφώνει ουσιαστικά το καταστασιακό περιβάλλον μέσα στο οποίο είναι αναγκασμένος να λειτουργήσει αυτός ο οποίος καλείται να βρει τη λύση του προβλήματος.

Η ερώτηση του δεύτερου μέρους, η οποία απευθύνεται στο μαθητή είναι διερευνητική μέσα στα πλαίσια που έχει καθορίσει ο συγγραφέας.
Άλλο σημαντικό στοιχείο στο λόγο των μαθηματικών προβλημάτων είναι η λακωνική και παρατακτική παρουσίαση των δεδομένων του προβλήματος. Από τα κείμενα απουσιάζουν γλωσσικά στοιχεία που συσχετίζουν φράσεις και προτάσεις και βοηθούν τον αναγνώστη να επικαλεστεί προσωπικές του καταστάσεις προκειμένου να αναπαραστήσει τα δεδομένα. Ενώ δηλαδή τα μαθηματικά προβλήματα *απεικονίζουν πραγματικές καταστάσεις*, ο λόγος με τον οποίο δομούνται δεν αναγνωρίζει στον αναγνώστη το δικαίωμα να λύσει το πρόβλημα ανακαλώντας από τη δική του εμπειρία ή από παρόμοιες και οικείες καταστάσεις.
Τέτοια γλωσσικά στοιχεία αποτελούν οι *δείκτες λόγου.* Σαν δείκτες λόγου χρησιμοποιούνται σύνδεσμοι π.χ και, αλλά , λοιπόν, επειδή, δηλαδή επιρρήματα και επιρρηματικές φράσεις όπως έτσι, τέλος πάντων, πάντως, επομένως, προφανώς, βεβαίως, κλπ. μεταγλωσσικές εκφράσεις όπως καταρχήν, μ' αυτήν την έννοια, μ' αυτές τις προϋποθέσεις κλπ. Οι δείκτες λόγου μπορούν να δηλώσουν σχέσεις διαδοχικότητας, λογικής πληροφορίας και προθετικότητας και να βοηθήσουν μ' αυτή την έννοια τον αναγνώστη να οργανώσει τις πληροφορίες και να τις συστηματικοποιήσει. Ακόμη βοηθούν ώστε η συνδετικότητα του κειμένου να αποκτήσει χαρακτηριστικά αφηγηματικού λόγου και η μετάβαση και η επικοινωνία του μέρους με το όλο να γίνει πιο ομαλή.
Η χρήση των χρόνων του μαθηματικού λόγου είναι ένα από τα βασικά στοιχεία που κατατάσσουν τον μαθηματικό λόγο στο μη αφηγηματικό είδος. Όπως μπορεί κανείς εύκολα να διαπιστώσει ο χρόνος που κυριαρχεί είναι ο αόριστος. Οι καταστάσεις παρουσιάζονται χωρίς καμία χρονική διαδοχή και αυτά που συμβαίνουν είναι απροσδιόριστα στο χώρο και στο χρόνο. Θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί οποιοσδήποτε χρόνος χωρίς να αλλάξει η πληροφόρηση που παίρνουμε από τα κείμενα. Παραδείγματος χάριν τα ρήματα του πρώτου προβλήματος μπορούν να μπουν στον ενεστώτα και στο μέλλοντα και να έχουμε τα ίδια δεδομένα και τα ίδια ερωτήματα:

α) *Οι εισπράξεις ενός καταστήματος ηλεκτρικών ειδών για τρεις ημέρες είναι10.000 ευρώ. Την πρώτη μέρα εισπράττει 4.850 ευρώ και τη δεύτερη 3.660 ευρώ. Πόσα χρήματα θα εισέπραξει την τρίτη μέρα;*

Η χρήση της αόριστης αντωνυμίας *ένας* στη θέση του υποκειμένου σε συνδυασμό με το πρόσωπο του ρήματος το οποίο είναι το τρίτο πρόσωπο του ενικού ή του πληθυντικού, δηλώνει άγνωστους ανθρώπινους δράστες σε πλαίσια απομονωμένα από κοινωνικές αναφορές. Η χωροχρονική ουδετερότητα και η αοριστία του ανθρώπινου παράγοντα υποδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο απαιτείται να σκεφτεί και να ενεργήσει ο μαθητής προκειμένου να οδηγηθεί στη λύση του προβλήματος. Το πρώτο βήμα είναι να μπει σε μια υποθετική κατάσταση και στη συνέχεια να δράσει μέσα σ' αυτήν και μέσα από μια σειρά νοητικών διεργασιών να απαντήσει στα ερωτήματα που του τέθηκαν. Κάθε προσπάθεια για *ανασύνθεση των καταστάσεων* του προβλήματος *είναι ασύμβατη* με τον τρόπο που είναι διατυπωμένα τα μαθηματικά προβλήματα. Ο μαθηματικός λόγος είναι τόσο πυκνά δομημένος και απροσδιόριστος που απαγορεύει οποιαδήποτε προσπάθεια του μαθητή να βρει ομοιότητες και διαφορές με τη δική του κοινωνική και πολιτιστική πραγματικότητα. Αυτό που πρέπει να κάνει ο μαθητής είναι να ακολουθήσει μια συγκεκριμένη σειρά νοητικών διεργασιών που θα τον οδηγήσουν στην ***επαλήθευση των δεδομένων*** του προβλήματος. Τα μαθηματικά προβλήματα είναι διατυπωμένα στη λογική που θέλει τα μαθηματικά μια αφηρημένη γνωσιακή διεργασία έξω από νοήματα και προσωπικές αναφορές.

Η δομή και η οργάνωση των μαθηματικών προβλημάτων εξυπηρετεί αυτή τη λογική. Έχουν μια τυπική δομή η οποία βοηθάει να γράφεις μαθηματικά σενάρια. Οι καταστάσεις τις οποίες επικαλούνται είναι μόνον κατ' επίφαση. Η επιβεβαίωση και η επαλήθευση του μαθηματικού συλλογισμού είναι το ζητούμενο. Ο μαθητής καλείται να λειτουργήσει ως μια εξιδανικευμένη προσωπικότητα, ως *«Υποκείμενο»,* όπως το ονομάζει στη σημειωτική του ο Rotman, και σύμφωνα με τις συμβάσεις του τυπικού διαλογικού *Κώδικα* των μαθηματικών. Η διαλογική διάσταση του «*Προσώπου*» στο οποίο λειτουργεί ο μαθητής με τον *Μετακώδικα* του δεν επιτρέπεται να εμπλακεί πουθενά κατά τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος. Ο μαθητής καλείται να λειτουργήσει σαν μια *«Μηχανή»* που οδηγείται στη λύση του προβλήματος έξω από νοήματα και προσωπικές αναφορές. Και ενώ όλοι γνωρίζουμε ότι είναι απαραίτητη η διαπραγμάτευση της υποκειμενικότητας μέσα σ' ένα μαθηματικό κείμενο αυτή δεν είναι καθόλου συμβατή με τον τρόπο με τον οποίο δίνονται τα μαθηματικά προβλήματα στα σχολικά βιβλία. Και αν κάποιο παιδί προσπαθήσει να διαπραγματευτεί την υποκειμενικότητά του, να βρει δηλαδή συγγενικά στοιχεία σε σχέση με τον τρόπο που διατυπώνονται τα προβλήματα αυτό του δημιουργεί μια σειρά από συγκρούσεις. Παρόλο που ξέρει από πριν ασυνείδητα ότι χρειάζεται να δράσει σ' ένα πλαίσιο με το οποίο πρέπει να συνδεθεί πολιτισμικά και κοινωνικά αυτό το πράγμα από τον τρόπο που διατυπώνονται τα προβλήματα του το απαγορεύει.

Έτσι ο μαθηματικός λόγος παραμένει σταθερός και αδιαπραγμάτευτος στα διάφορα περιβάλλοντα τα οποία συμμετέχει και μπορεί να παρουσιάζεται σαν αντικειμενικός ως προς τις αλήθειες που μεταφέρει. Τα μαθηματικά προβλήματα δεν αποτελούν παρά μια προέκταση του μαθηματικού λογισμού και απέχουν πολύ από το να εκφράζουν κοινωνικά οργανωμένες δραστηριότητες. Η λογική που θέλει αυτόν που λύνει μαθηματικά προβλήματα ικανό να αντιμετωπίζει πιο εύκολα και αποτελεσματικά τα προβλήματα της καθημερινότητας απέχει πολύ από αυτό που ισχύει στην πράξη. Στην ουσία αυτό στο οποίο εκπαιδεύονται οι μαθητές είναι να «ξεχνάνε» σχετικά με τον εαυτό τους και τις κοινωνικές και πολιτισμικές πραγματικότητες μέσα στις οποίες ζουν.

Θα ήθελα να κλείσω την εισήγησή μου επισημαίνοντας ότι οι δυσκολίες τις οποίες συναντούν οι μαθητές στη λύση μαθηματικών προβλημάτων κατά ένα μεγάλο μέρος οφείλονται στη σχέση που δημιουργούν τα συστήματα του μαθηματικού λόγου μαζί τους. Ο μαθηματικός λόγος και πιο συγκεκριμένα ο λόγος των μαθηματικών προβλημάτων αφαιρώντας από το μαθητή τη δυνατότητα να λειτουργήσει ως «Πρόσωπο» και επομένως να ανασύρει στοιχεία από το δικό του πολιτισμό προκειμένου να λύσει ένα πρόβλημα, ουσιαστικά δημιουργεί μαζί του σχέση αποκλεισμού και αποξένωσης. Η παρούσα εισήγηση αποτελεί μια προσπάθεια διερεύνησης των συστημάτων του μαθηματικού λόγου και χρειάζεται περαιτέρω θεωρητική και εμπειρική μελέτη σε μια κατεύθυνση να αποσαφηνιστούν οι επιδράσεις αυτών των μορφών λόγου στους μαθητές, αλλά και γενικότερα.

Προβλήματα από το βιβλίο της Δ΄τάξης Δημοτικού Α΄τεύχος σελ. 92.

Να λύσετε με δυο τρόπους, στο τετράδιό σας, τα παρακάτω προβλήματα:
α) Οι εισπράξεις ενός καταστήματος ηλεκτρικών ειδών για τρεις ημέρες ήταν 10.000 ευρώ. Την πρώτη μέρα εισέπραξε 4.850 ευρώ και τη δεύτερη 3.660 ευρώ. Πόσα χρήματα εισέπραξε την τρίτη μέρα;
β) Ένας αγροτικός συνεταιρισμός πούλησε τα προιόντα του και εισέπραξε 9.000 ευρώ. Ξόδεψε για τη συσκευασία τους 2.250 ευρώ και για μεταφορικά 1.350 ευρώ. Πόσα χρήματα του έμειναν;
γ) Ένας πατατοπαραγωγός έβγαλε 9.850 κιλά πατάτες. Πούλησε 4.980 κιλά στις λαικές αγορές και 4.450 κιλά σ'ένα χονδρέμπορο. Τις υπόλοιπες πατάτες τις κράτησε για τις ανάγκες του σπιτιού του. Πόσες πατάτες κράτησε ο παραγωγός;
δ) Ένας χωματόδρομος μήκους 9.000 μέτρων ασφαλτοστρώθηκε σε τρεις μήνες. Τον πρώτο μήνα ασφαλτοστρώθηκαν 3.085 μέτρα και το δεύτερο 3.437 μέτρα. Πόσα μέτρα ασφαλτοστρώθηκαν τον τρίτο μήνα;
ε) Ένα εργοστάσιο ανδρικών ενδυμάτων έφτιαξε πέρυσι 9.150 κοστούμια. Πούλησε 4.780 κοστούμια σε διάφορα καταστήματα της Αθήνας και 3.975 σε διάφορα επαρχιακά καταστήματα. Πόσα κοστούμια έμειναν απούλητα στο εργοστάσιο;
στ) Ένα περιβόλι έχει 3.700 ξινόδεντρα. Απ'αυτά τα 1.456 είναι πορτοκαλιές, τα 1.688 λεμονιές και τα υπόλοιπα μανταρινιές. Πόσες είναι οι μανταρινιές;

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Γεωργακοπούλου, Α και Γούτσος, Δ (1999), *Κείμενο και Επικοινωνία.* Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
Mackridge, P.(1987), *Η Νεοελληνική Γλώσσα.* Αθήνα: Πατάκης.
Moteira, D. (1998), Facing Exclusion: the student as Person. Στο P. Gates & T. Cotton, *Proceedings of the First International Mathematics Education and Society Conference*, Nottingham: Centre for the Study of Mathematics Education, Nottingham University, 253-261.
Rotman, B. (1993), *Ad infinitum: The ghost in Turing's machines; taking God out of mathematics and putting the body back in*, Stanford: Stanford University Press.
Rotman, B. (1998), Toward a semiotics of mathematics. *Semiotica* 72, 1-35.
Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (1987) *Τα Μαθηματικά μου, Α', Β' , Γ΄, Δ', Ε' ΣΤ' τάξη δημοτικού,* Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

Άλλες Πηγές

Βοσνιάδου, Σ. (2000), *Η Ψυχολογία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg.
Μπαμπινιώτη, Γ. (1980), *Θεωρητική Γλωσσολογία.* Αθήνα: Γραφικές Τέχνες.
Φραγκουδάκη, Ά (1987),*Γλώσσα και Ιδεολογία.* Αθήνα:Οδυσσέας.
Χαραλαμπόπουλος, Α.(1997), *Η διδασκαλία της λειτουργικής χρήσης της γλώσσας: Θεωρία και Πρακτική εφαρμογή.* Θεσσαλονίκη: Κώδικας.
Χασάπης, Δ.(2000), *Διδακτική βασικών Μαθηματικών εννοιών.* Αθήνα: Μεταίχμιο.

Η κατανόηση της γραμμικής συνάρτησης από μαθητές του Δημοτικού σχολείου με τη βοήθεια οπτικού υλικού: μια διδακτική παρέμβαση και η αποτίμησή της*

Δημήτρης Κουσίδης
Εκπαιδευτικός Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης

Ερευνητικό πλαίσιο

Εδώ και χρόνια είναι γενικά παραδεκτό, ότι το διδακτικό υλικό[1] παίζει έναν καθοριστικό ρόλο στη διδασκαλία και στη μάθηση των μαθηματικών, ειδικά στο Δημοτικό σχολείο. Ένας από τους λόγους που προβάλλεται ως βασικός, ο ρόλος του, είναι ο ισχυρισμός πως το διδακτικό υλικό προσφέρει στους μαθητές[2], κατά τα πρώτα στάδια συγκρότησης νέων μαθηματικών εννοιών, μια απτή(χειροπιαστή) ή ορατή αντιστοίχηση ανάμεσα στο συγκεκριμένο τού διδακτικού υλικού και στο αφηρημένο των μαθηματικών εννοιών. Στη βάση αυτή, όλα τα αναλυτικά προγράμματα και οι οδηγίες διδασκαλίας των μαθηματικών στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, τόσο στην Ελλάδα όσο και σε άλλες χώρες, συνιστούν τη χρήση διδακτικού υλικού διαφόρων τύπων και μορφών.
Όμως, η απόδοση αυτού του αδιαμφισβήτητου ρόλου στο διδακτικό υλικό και η ευρύτατη διάδοσή του κυρίως στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση συμβαίνει μέσα σ' ένα συγκεκριμένο επιστημολογικό πλαίσιο, στο οποίο η μαθηματική γνώση θεωρείται ως ένα δομημένο σύνολο κανόνων, ορισμών και διαδικασιών, το οποίο οι μαθητές αφομοιώνουν, υπό τον όρο, όμως, ότι θα προσφερθεί με κατάλληλους διδακτικούς τρόπους. Επομένως, το ζητούμενο για την άποψη αυτή είναι η επεξεργασία τού πιο αποτελεσματικού τρόπου διδασκαλίας για τη μετάδοση της μαθηματικής γνώσης. Οι όποιες ενστάσεις, στο πλαίσιο αυτό, έχουν ουσιαστικά τεχνικό-διαδικαστικό χαρακτήρα και αφορούν την αποτελεσματικότητα των διδακτικών υλικών στη διδασκαλία των μαθηματικών. Οι τέτοιου τύπου ενστάσεις για τη χρήση των διδακτικών υλικών συνοψίζονται, χαρακτηριστικά, στις παρακάτω αναφορές. Σύμφωνα με τον Bruner η προσήλωση και προσκόλληση του μαθητή σε απτικό και οπτικό διδακτικό υλικό μπορεί να περιορίζει τη σκέψη του, αφού ο τρόπος με τον οποίο συνδυάζει τις παρατηρήσεις του μάλλον του βάζει περιορισμούς και έτσι καταλήγει να λειτουργεί σε στενά νοητικά πλαίσια. Ο Gravemeijer,1997 αναλύοντας τι φταίει για τη λάθος μεταφορά γνώσης με το διδακτικό υλικό, τονίζει ότι οι μαθηματικές έννοιες που είναι ενσωματωμένες στις διδακτικές αναπαραστάσεις βρίσκονται εκεί μόνο για τους ειδικούς που ήδη έχουν αυτές τις ιδέες διαθέσιμες να τις δουν, ενώ για τους μαθητές δεν υπάρχει τίποτε να δουν παρά το συγκεκριμένο διδακτικό υλικό. Άλλος ισχυρισμός λέει πως δάσκαλος και μαθητές πρέπει να ερμηνεύσουν από κοινού την εμπειρική κα-

*Η έρευνα από την οποία προέρχονται τα δεδομένα που παρουσιάζονται εδώ διεξήχθη στα πλαίσια εκπόνησης της διδακτορικής διατριβής του εισηγητή στο Π.Τ.Δ.Ε. του Α.Π.Θ. υπό την εποπτεία του κ.Δημήτρη Χασάπη επίκουρου καθηγητή του Π.Τ.Δ.Ε. Θεσσαλονίκης.

[1] Ο όρος διδακτικό υλικό περιλαμβάνει: α)εργαλεία από την πραγματική ζωή β)εργαλεία ειδικά κατασκευασμένα γ)εικόνες, σχήματα, διαγράμματα κ.ά. δ)παιχνίδια στις τάξεις.

[2] μαθητές: μαθητές/τριες

τάσταση ώστε να συμφωνούν σε κάποιες τοποθετήσεις, επειδή μόνος ο κάθε μαθητής μαθηματικοποιεί την εμπειρική κατάσταση σύμφωνα με τα δικά του ενδιαφέροντα, οπότε, η εμπειρική κατάσταση μ' αυτή τη λογική δεν αναπαριστά μαθηματική σχέση από μόνη της (Voigt,1994). Την αποτελεσματικότητα του οπτικού υλικού την ενδυναμώνουν μελέτες (Winn,B.,1987), οι οποίες υποστηρίζουν ότι: α)οι γραφικές μορφές προσφέρουν περισσότερες πληροφορίες απ' ότι οι λέξεις μόνες τους («οπτικό επιχείρημα») και β)μπορούμε να συγκεντρώσουμε πληροφορίες με εικόνες αλλά και με λέξεις («θεωρία διπλής κωδικοποίησης»). Αντίθετες θέσεις θέτουν σε συζήτηση την άποψη ότι οι πληροφορίες αποτυπώνονται στη μνήμη σαν προτάσεις με γλωσσική δομή και ότι η ανταπόδοση των γραφικών μορφών στην εκπαίδευση των μαθηματικών δε λειτουργεί αυτόματα, αλλά απαιτούνται κι άλλα πράγματα, για να αποβούν χρήσιμα, όπως π.χ. η ικανότητα των μαθητών. Μάλλον, μοιάζει λάθος να σκεφτόμαστε πως ένα συγκεκριμένο υλικό ή μια εικόνα, από μόνα τους, παρουσιάζουν μια ξεκάθαρη μαθηματική έννοια. Και το ερώτημα που προκύπτει είναι: πώς μπορεί, ο δάσκαλος, να περάσει στο μυαλό και στα μάτια των μαθητών του, μια μαθηματική έννοια την οποία αυτός βλέπει και αντιλαμβάνεται, επειδή την κατέχει, κάνοντας χρήση του διδακτικού υλικού;

Σε ένα διαφορετικό, όμως, επιστημολογικό πλαίσιο, όπως αυτά που προβάλλουν οι διάφορες εκδοχές της κατασκευασιοκρατίας (άλλως κονστρακτιβισμού ή εποικοδομιτισμού) και τα οποία τα τελευταία χρόνια σε ολοένα και μεγαλύτερη έκταση επηρεάζουν τη μαθηματική εκπαίδευση, ο ρόλος των διδακτικών υλικών και οι όροι της χρήσης τους στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών έχουν αρχίσει να αποτελούν αντικείμενο προβληματισμού.

Στα πλαίσια των θεωρήσεων αυτών, η μαθηματική γνώση δε θεωρείται ως ένα σταθερό σύνολο καθιερωμένων συμπερασμάτων, απόλυτο και ιστορικά αμετάβλητο, αλλά όπως και κάθε άλλο παράγωγο της ανθρώπινης δραστηριότητας μια κατασκευή που επηρεάζεται από την κοινωνική αλληλεπίδραση. Η μάθηση των μαθηματικών είναι μια γενεσιουργός διαδικασία κατασκευής νοημάτων που συγκροτούνται από τον κάθε άνθρωπο προσωπικά και διαμορφώνεται καθοριστικά από την κοινωνική αλληλεπίδραση. Η διδασκαλία, επομένως, ως κοινωνικά οργανωμένη δραστηριότητα μάθησης οφείλει να παρέχει την αναγκαία υποστήριξη στις προσωπικές διερευνήσεις των μαθητών, δημιουργώντας πλούσια περιβάλλοντα μάθησης που υποκινούν αμφιβολίες και παρέχουν εμπειρίες μάθησης. Οι κονστρακτιβιστές μιλώντας για την εικόνα δίνουν μεγαλύτερη έμφαση στον παρατηρητή, γιατί πιστεύουν πως αυτός φτιάχνει ένα νόημα στηριζόμενος στις προσδοκίες του και ότι οι εικόνες απλά λένε τη δική τους ιστορία.

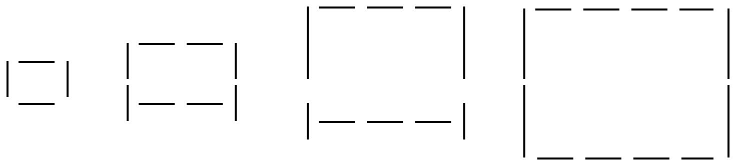
Τα διδακτικά υλικά έχουν βέβαια μια θέση σ' αυτές τις διαδικασίες μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών, υπό τον όρο ότι η χρήση τους συμβάλλει στην κατασκευή της μαθηματικής γνώσης από τον κάθε μαθητή προσωπικά (Clements,1997,p.199).

Η χρήση των διδακτικών υλικών στα πλαίσια της διδασκαλίας των μαθηματικών μπορεί να λειτουργήσει ως μια αναπαράσταση της μαθηματικής σκέψης των μαθητών, ως κίνητρο ανάπτυξης νοητικών διεργασιών ή ως μέσο αξιολόγησης των νοητικών τους κατασκευών. Η χρήση

αυτή όμως, πρέπει πάνω απ' όλα να παρέχει εμπειρίες οι οποίες έχουν νόημα για τους μαθητές, ώστε να αποτελούν αντικείμενο νοητικής επεξεργασίας, η οποία οδηγεί στην ¨κατασκευή¨ μαθηματικών γνώσεων (Barody, 1989,p.5).
Με αφετηρία αυτόν τον προβληματισμό σχεδιάστηκε και διεξάχθηκε μια ευρύτερη έρευνα, μέρος της οποίας εκτίθεται εδώ, με στόχο να διερευνηθεί η συμβολή, σε συνδυασμό με τους όρους χρήσης, ενός κατάλληλα σχεδιασμένου οπτικού διδακτικού υλικού στη συγκρότηση της μαθηματικής έννοιας της γραμμικής συνάρτησης από μαθητές του Δημοτικού σχολείου.
Η έννοια της συνάρτησης αποτελεί για τα μαθηματικά μια από τις θεμελιώδεις έννοιες. Στα πλαίσια της παρούσας έρευνας η συνάρτηση θεωρήθηκε με την πρωταρχική της έννοια ως μια σχέση συμμεταβολής δυο μεγεθών, όπου η μεταβολή του ενός μεγέθους εξαρτάται και προσδιορίζεται με έναν δοσμένο τρόπο από τη μεταβολή του άλλου μεγέθους. Ο Piaget και οι συνεργάτες του έχουν μελετήσει αναλυτικά, από μια συγκεκριμένη οπτική, τη συγκρότηση της έννοιας της συνάρτησης και την εξέλιξή της σε παιδιά ηλικίας 7 έως 14 χρόνων με επίκεντρο τις σχέσεις αιτίου και αιτιατού (Piaget, et al,1977), ενώ νεώτερες έρευνες (Dreyfus,et al,1982) με διδακτικό προσανατολισμό έχουν διαπιστώσει ότι τα παιδιά σε σχετικά μικρή ηλικία μπορούν να συγκροτήσουν πολλές όψεις της συνάρτησης χωρίς βέβαια να είναι σε θέση να γενικεύσουν, ώστε να διαμορφώσουν την πλήρη μαθηματική έννοια της συνάρτησης.

Μεθοδολογικά δεδομένα

Στο πλαίσιο της παρούσας έρευνας διδάχθηκε σε μαθητές της Δ΄ και ΣΤ΄ τάξης του Δημοτικού σχολείου η έννοια της συνάρτησης με δυο εντελώς διαφορετικούς μεταξύ τους τύπους διδασκαλίας. Στη μια περίπτωση, η διδασκαλία της έννοιας της γραμμικής συνάρτησης πραγματοποιήθηκε με έργο λεκτικής περιγραφής, χωρίς κανένα παραστατικό (υλικό ή γραφικό) μέσο διδασκαλίας, ενώ στην άλλη περίπτωση διδασκαλίας χρησιμοποιήθηκε ως διδακτικό υλικό η γραφική απεικόνιση ενός ισοσκελούς τριγώνου, το οποίο μεγάλωνε.
Το έργο που δώσαμε στους μαθητές (των δυο τύπων διδασκαλίας), το οποίο φαίνεται παρακάτω, απαιτούσε να σχεδιάσουν, ελεύθερα, ένα τετράγωνο με ένα σπιρτόξυλο την κάθε πλευρά του και ακολούθως, να μεγαλώνουν το ίδιο τετράγωνο βάζοντας δυο, τρία και τέσσερα σπιρτόξυλα στην κάθε πλευρά του.



Ταυτόχρονα, έπρεπε, παρατηρώντας στον πίνακα τιμών τις τιμές του πεδίου ορισμού, δηλαδή πόσα σπιρτόξυλα έχει η πλευρά του κάθε τετραγώνου, να συμπληρώνουν στο πεδίο τιμών του πίνακα το συνολικό αριθμό σπιρτόξυλων του κάθε τετραγώνου. Μετά τη συμπλήρωση του πίνακα τιμών, και αφού υπήρχε σχετικό ερώτημα, όφειλαν να παρατηρήσουν τις τιμές των δυο μεταβλητών (πεδίου ορισμού-πεδίου τιμών) και να γράψουν τη σταθερή σχέση που υπάρχει μεταξύ των συναρτούμενων μεταβλητών. Το ερώτημα του συγκεκριμένου έργου ήταν: ¨τι πρέπει να κάνεις για να βρεις τους συνολικούς αριθμούς των σπιρτόξυλων όταν ξέρεις τους αριθμούς των σπιρτόξυλων της μιας πλευράς;¨

Ο μαθηματικός και φιλόσοφος Rene Thom (αναφέρεται στο Πατρώνης, κ.ά.,1989) αναφερόμενος στις γεωμετρικές παραστάσεις που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά σαν μοντέλα, περιγράφει δυο πλεονεκτήματα: α)μας προσφέρουν μια σφαιρική άποψη, που δεν υπάρχει στη λεκτική περιγραφή, εξαιτίας της αποσπασματικότητας που είναι έμφυτη στο λόγο και β)δίνουν τη δυνατότητα στο άτομο που σκέφτεται να ¨κρατήσει¨ το αντικείμενο της μελέτης του σε κάποια απόσταση, απεικονίζοντάς το στο χώρο. Για την πραγμάτωση των δυο πλεονεκτημάτων του Rene Thom κρίνεται αναγκαία και χρήσιμη η εκπαίδευση των μαθητών στη νοερή απεικόνιση (μεταφορά κειμένου σε γραφική μορφή), γιατί αυτή η εκπαίδευση θα τους κάνει ικανούς να λαμβάνουν τις πληροφορίες σαν ένα όλο, γεγονός που θα τους διευκολύνει να κατανοήσουν το πώς οι ιδέες συνδέονται μεταξύ τους. Αλλιώς διατυπωμένο (Radziszewska,B.,1988), το να προσθέσουμε ή συμπεριλάβουμε, απλώς, σχήματα στο κείμενο, αυτό δε σημαίνει ούτε εγγυάται ότι θα χρησιμοποιηθούν καλά.

Εμείς, προσφέραμε στους μαθητές, σαν σχήμα, το τετράγωνο με το σκεπτικό πως: είναι πολύ γνώριμο από το νηπιαγωγείο, είναι απλό και πως η χρήση του δε θα αποτελεί ένα πολύπλοκο και προβληματικό δεδομένο. Έτσι, καθώς ασχολούνται οι μαθητές, με τη γραφική μορφή του τετραγώνου, μέσα από αυτή τη διαδικασία αναδύεται: πρώτον, ένας χώρος μεταβολών που σχεδιάζουν τα παιδιά (μεγαλώνουν το τετράγωνο) και ένα πεδίο μεταβολών που δημιουργείται ως αποτέλεσμα των σχεδιασμών του τετραγώνου (συνολικός αριθμός σπιρτόξυλων). Όλη αυτή η διαδικασία, με τη χρήση των σχημάτων, υποθέτουμε ότι μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν μια πραγματική εμπειρία της γραμμικής συνάρτησης δυο μεταβλητών.

Για τη διαπίστωση κατανόησης και συγκρότησης της έννοιας της γραμμικής συνάρτησης, θέσαμε ως κριτήριο να μπορούν, οι μαθητές, να συμπληρώσουν το πεδίο τιμών του πίνακα τιμών αλλά κυριότερα να διατυπώσουν τη γραμμική σχέση που υπάρχει μεταξύ των δυο μεταβλητών. Σ' αυτό το κριτήριο, της διπλής απεικόνισης (Even, 1990), μας οδήγησαν τα αποτελέσματα συναφών ερευνών από τα οποία συνάγεται ότι μόνο η δυνατότητα πολλαπλής παράστασης μιας μαθηματικής έννοιας και η ευχέρεια ¨μετάφρασής της¨ από μια μορφή παράστασης σε μια άλλη τεκμηριώνει την πλήρη και ολοκληρωμένη συγκρότησή της (Lesh, Landau & Hamilton,1983, Hines, 2002). Όσοι μαθητές διατύπωσαν τη συνάρτηση των δυο μεταβλητών πολλαπλασιαστικά θεωρήθηκε ότι έχουν προσεγγίσει την έννοια της γραμμικής συνάρτησης, σε αντίθεση με εκείνους τους μαθητές που τη διατύπωναν με πρόσθεση, με μέτρημα, αναλογία (Hines,2002) ή άλλες διάφορες, ¨λανθασμένες¨ συνήθως, περιγραφές. Εξάλλου, το ερώτημα που συνόδευε τον πίνακα τιμών παρέπεμπε σε πολλαπλασιαστική παρά σε άλλου είδους διαδικασία.

Η διδακτική παρέμβαση και η συναφής έρευνα αποτίμησης των αποτελεσμάτων της, διεξάχθηκε σε Δημοτικά σχολεία περιοχής Ευόσμου και Καλαμαριάς της Θεσσαλονίκης, από το Μάιο του 2002 μέχρι το Φλεβάρη του 2003. Σ' αυτό το χρονικό διάστημα οι μαθητές έλαβαν μέρος σε τρεις διαδικασίες αξιολόγησης: τη γραμμή βάσης, το μετά-τεστ, το τεστ-διατήρησης, καθώς και σε συνέντευξη ορισμένοι μαθητές κάθε πειραματικής ομάδας. Εδώ, θα παρουσιάσουμε τη γνωστική διαφοροποίηση, 156 μαθητών, από τη γραμμή βάσης στο μετά-τεστ: 79 της Δ΄ (οι 40 διδάχθηκαν με σχήματα και οι 39 με λόγια) και 77 της ΣΤ΄ (οι 37 διδάχθηκαν με σχήματα και οι 40 με λόγια).

Θα πρέπει να τονιστεί ότι, και στις δυο τάξεις έχει διδαχθεί η πρόσθεση, η οποία μπορεί να συσχετιστεί άμεσα ή έμμεσα με την έννοια της γραμμικής συνάρτησης, ενώ στην ΣΤ΄ τάξη Δημοτικού εισάγονται για πρώτη φορά οι έννοιες των ανάλογων και αντιστρόφως ανάλογων μεγεθών (δεν διδάχθηκαν).

Οι απαντήσεις των μαθητών κατηγοριοποιήθηκαν σε τρία επίπεδα. Στο πρώτο γνωστικό επίπεδο υπάγονται οι μαθητές που απέδωσαν σωστά πίνακα τιμών και σχέση, στο δεύτερο γνωστικό επίπεδο όσοι έδωσαν σωστά μόνο τον πίνακα τιμών και στην τρίτη γνωστική κατηγορία οι μαθητές που λανθασμένα απάντησαν στα ερωτήματα του έργου. Τα δεδομένα που παρουσιάζουμε αφορούν τον τρόπο συμπλήρωσης του πίνακα τιμών και τη διατύπωση της σχέσης μεταξύ των δυο μεταβλητών του πίνακα τιμών, κατά τη γραμμή βάσης και κατά το μετά-τεστ, του οπτικού έργου που περιγράψαμε προηγούμενα.

Στόχος της έρευνας ήταν η διερεύνηση προσέγγισης της έννοιας της συνάρτησης και λιγότερο αν συγκρότησαν ή όχι τη συγκεκριμένη έννοια μετά από διαφορετική διδακτική παρέμβαση (οπτική–λεκτική). Αυτό διαπιστώνεται με τη μελέτη των τρόπων που οι μαθητές εργάστηκαν και χειρίστηκαν το συγκεκριμένο οπτικό υλικό.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται συνοπτικά μερικές από τις κυριότερες διαπιστώσεις που προέκυψαν από την ανάλυση των αντίστοιχων δεδομένων.

Ερευνητικές διαπιστώσεις

Αρχικά, να τονίσουμε πως δεν περιμέναμε, οι μαθητές, να κατανοήσουν πλήρως την πολύ δύσκολη έννοια της συνάρτησης, αλλά μέσα από τη γραφική απεικόνιση του τετραγώνου να διαπιστώσουμε τον τρόπο και το βαθμό προσέγγισής της.

Από τα ευρήματα της έρευνας προκύπτει ότι, στη γραμμή βάσης, οι πειραματικές τάξεις που διδάχθηκαν λεκτικά και οπτικά είχαν ελάχιστες πετυχημένες απαντήσεις. Συγκεκριμένα, για την Δ΄: 1/40 της οπτικής και 0/39 της λεκτικής πειραματικής ομάδας απάντησαν σωστά, ενώ για την ΣΤ΄: 4/37 της οπτικής και 5/40 της λεκτικής, με αποτέλεσμα να υπάρχει γνωστική ισοδυναμία μεταξύ των δυο διαφορετικών πειραματικών ομάδων της κάθε τάξης ($p= 0{,}183$ για την Δ΄ και $p=0{,}720$ για την ΣΤ΄). Οι υπόλοιποι μαθητές των πειραματικών ομάδων, και των δυο τάξεων, έχουν καταταγεί στο τρίτο γνωστικό επίπεδο (με λανθασμένες απαντήσεις): 38/39 στην Δ΄ οπτική τάξη, 39/39 στην Δ΄ λεκτική, 32/33 στην ΣΤ΄ οπτική, 34/35 στην ΣΤ΄ λεκτική, γεγονός που μας δείχνει ότι η μετατροπή μιας λεκτικής διατύπωσης ενός έργου σε γραφική μορφή δημιουργεί ανυπέρβλητα προβλήματα για τους μαθητές και των δυο τάξεων. Ακόμη, φάνηκε πως η παρουσία του ¨οικείου¨ και ¨εύκολου¨ διδακτικού υλικού από μόνο του, χωρίς διδακτική παρέμβαση, δεν κατάφερε να προκαλέσει γνωστική πρόοδο. Η επιβεβαίωση δίνεται, κύρια, με τις δυο αποτυχημένες στρατηγικές: α) δυο σχήματα λάθος – πίνακας τιμών κενό – σχέση κενό και β) δυο σχήματα λάθος – πίνακας τιμών λάθος –

σχέση κενό που ακολούθησαν οι μαθητές της Δ΄ και με τη μια: δυο σχήματα λάθος-πίνακα τιμών λάθος-σχέση λάθος, των μαθητών της ΣΤ΄ τάξης. Οι περισσότεροι μαθητές έδειξαν να γνωρίζουν το σχήμα τετράγωνο, απλά δεν μπορούσαν να αναπαραστήσουν τα ζητούμενα του έργου. Υπήρχαν, όμως, λίγοι που έδειξαν να μπερδεύουν το τετράγωνο με τον κύβο ή το παραλληλόγραμμο.

Μετά τις πειραματικές διδασκαλίες τόσο με τη χρήση λεκτικής περιγραφής χωρίς κανένα παραστατικό (υλικό ή γραφικό) μέσο διδασκαλίας όσο και με τη χρήση του συγκεκριμένου οπτικού διδακτικού υλικού (ισόπλευρου τριγώνου) ένα σημαντικό ποσοστό των μαθητών και των δυο τάξεων συγκρότησε μια έννοια της γραμμικής συνάρτησης. Η σύγκριση ανάμεσα στα αποτελέσματα της γραμμής βάσης και του μετά-τεστ των δυο τύπων διδασκαλίας είναι στατιστικά σημαντικές ($p = 0.000$) για τους μαθητές των παραπάνω τάξεων. Η στατιστική ανάλυση μας βεβαιώνει ότι: α)μετά τις πειραματικές διδασκαλίες είχαμε γνωστική πρόοδο των μαθητών και β)δεν μπορούμε, όμως, να προκρίνουμε μια από τις δυο πειραματικές διδασκαλίες σαν πιο αποτελεσματική στη διδακτική των μαθηματικών, αφού δε διαφοροποιήθηκαν γνωστικά οι μαθητές των δυο τύπων διδασκαλίας της κάθε τάξης ($p=0,383$ στην Δ΄, $p=0,413$ στην ΣΤ΄).

Τρεις μήνες μετά τις πειραματικές διδασκαλίες, η στατιστική διαφορά μεταξύ μετά-τεστ και τεστ-διατήρησης για τους μαθητές των δυο τύπων διδασκαλίας (της Δ΄ και ΣΤ΄) δεν είναι σημαντική (το $p> 0,268$ στις τέσσαρες πειραματικές ομάδες), γεγονός που δηλώνει ότι η γνωστική πρόοδος δε διαφοροποιήθηκε απ’ αυτή του μετά-τεστ και ότι το ποσοστό των μαθητών που έχουν συγκροτήσει μια έννοια της γραμμικής συνάρτησης, ανεξάρτητα από τον τύπο διδασκαλίας, φαίνεται να μένει σταθερό.

Σ΄ αυτό το σημείο να αναφέρουμε ότι: α)από τις 23 διαφορετικές στρατηγικές απαντήσεων που καταγράψαμε, μόνο τις 5 θεωρήσαμε σωστές ενώ οι υπόλοιπες θεωρήθηκαν λανθασμένες β)η προσέγγιση και συγκρότηση της έννοιας προσομοιάζει πιο πολύ την ¨υπολογιστική-λειτουργική διαδικασία¨(Sfard,1992) γιατί όπως η ίδια (Sfard, 1991) αναφέρει η συμπεριφορά των μαθητών για τη συνάρτηση μπορεί να περιγραφεί σαν μια διαδικασία επαναλαμβανόμενων πράξεων των ξέχωρων αριθμητικών δεδομένων του πίνακα τιμών και όχι σαν μια καθολική και σταθερή διαδικασία.

Όπως αρχικά είδαμε, στη γραμμή βάσης, το μεγαλύτερο μέρος του συνόλου των μαθητών της Δ΄ και ΣΤ΄ δε συγκρότησε καμία έννοια της συνάρτησης. Μετά τη συμμετοχή, των μαθητών της Δ΄, στις πειραματικές διδασκαλίες, αυτοί που δίνουν λάθος πίνακα τιμών και σχέση, εξακολουθούν να διατηρούν την αδυναμία σχηματισμού σωστού σχήματος (18/39 στη λεκτική, 11/39 στην οπτική), ενώ υπάρχουν και μαθητές που σχηματίζουν σωστά όλα ή τα δυο πρώτα τετράγωνα και στη συνέχεια ο πίνακας τιμών και η σχέση είναι λανθασμένα (12/39 στη λεκτική, 15/39 στην οπτική). Στην ΣΤ΄ τάξη, οι μαθητές που διδάχθηκαν με σχήματα περιορίζουν κατά πολύ τις λανθασμένες στρατηγικές τους, αφού μόνο 1/33 απαντάει με λάθος σχήματα και 6/33 με δυο σωστά σχήματα αλλά με λάθος πίνακα τιμών και σχέση, ενώ οι μαθητές που διδάχθηκαν με λόγια: 9/35 απαντούν με λάθος σχήματα και 3/35 δίνουν σωστά τα σχήματα χωρίς να έχουν ανάλογη συνέχεια σε πίνακα τιμών και σχέση.

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε δυο χαρακτηριστικές περιπτώσεις λανθασμένων στρατηγικών που υιοθέτησαν οι μαθητές. Στην πρώτη, οι μαθητές περιορίζονται σ' αυτό που περιγράφει το έργο (σχηματίζουν δυο σωστά τετράγωνα) χωρίς να φτιάξουν και τ' άλλα δυο τετράγωνα, τα οποία ζητούνται, και ο πίνακας τιμών συμπληρώνεται σύμφωνα με το δεύτερο τετράγωνο που έχει δυο σπιρτόξυλα η κάθε πλευρά του. Ένα υποκείμενο χαρακτηριστικά λεει: «*επειδή στο δεύτερο τετράγωνο έβαλα ακόμη ένα σπιρτόξυλο (στην κάθε πλευρά), έκανα πρόσθεση και βρήκα ότι συνολικά είναι οκτώ. Και μέχρι να βρω το οκτώ πρέπει να ανεβαίνω ανά δυο*». Γι' αυτό στον πίνακα έχει βάλει 2,4,6,8 και επομένως η σχέση που ακολουθεί έχει λανθασμένη λογική. Στη δεύτερη, παρατηρούμε πολλών ειδών σχήματα τα οποία όμως δεν είναι στο πνεύμα του έργου, με συνέπεια ο πίνακας τιμών να έχει τιμές 2,4,6,8 ή 3,6,9,12 αλλά και 4,8,12,16 με τέσσερα ίδια τετράγωνα που εμπίπτει στη λογική της αναλογίας.

Όμως, οι περισσότεροι από τους μαθητές: 9/39 των οπτικών και 6/39 των λεκτικών της Δ΄ και οι 18/26 των οπτικών της ΣΤ΄ που απαντούν σωστά, προτιμούν να σχηματίσουν τα τέσσερα τετράγωνα, που σημαίνει ότι το οπτικό διδακτικό υλικό συνέβαλε και βοήθησε στην κατανόηση της έννοιας, επιδρώντας ίσως και δεσμευτικά στη νοητική τους λειτουργία. Αντίθετα, οι λεκτικοί μαθητές της ΣΤ΄ 13/23 που απάντησαν σωστά έκαναν μόνο τα δυο σχήματα και μετά συμπλήρωναν τον πίνακα τιμών των δυο μεταβλητών νοερά χωρίς άλλη βοήθεια. Αυτοί, δείχνουν να έχουν αποδεσμευτεί από τη γραφική μορφή του σχήματος, να νιώθουν πιο επαρκείς και σίγουροι και να εμπιστεύονται τη σκέψη τους.

Από την ποιοτική ανάλυση, όμως, διαπιστώθηκε ότι και οι πολύ καλοί μαθητές έκαναν τα τέσσαρα σχήματα, αλλά όπως μας εξηγούν μπορούσαν και χωρίς αυτά, αφού είναι γνωστό πόσες πλευρές έχει το τετράγωνο και πόσα σπιρτόξυλα έχει η κάθε πλευρά. Απλά, όπως ισχυρίζονται, έκαναν τα σχήματα, επειδή το ζητούσε το έργο ή για σιγουριά και επιβεβαίωση. Επίσης, μετά από συζήτηση στη συνέντευξη προέκυψε, γνωστικά αδύνατοι μαθητές που είχαν δώσει λανθασμένα: σχήμα-πίνακα τιμών-σχέση, να διαπιστώνουν και στη συνέχεια να διατυπώνουν την άποψη ότι και χωρίς τα σχήματα μπορούσαν να δώσουν τις απαντήσεις. Επίσης, μετά από σχετική ερώτηση, διαπιστώθηκε ότι ακόμη και οι μαθητές που διδάχθηκαν με οπτικό υλικό, δεν προτιμούν και δε θεωρούν σαν εύκολα τα οπτικά έργα.

Η διατύπωση της σχέσης δινόταν σαν ¨τετραπλασιάσω¨ ή ¨κάνω τον πολλαπλασιασμό του τέσσερα¨. Και οι δυο απαντήσεις θεωρήθηκαν σωστές, αφού ακόμη και η δεύτερη απάντηση, των λίγων μαθητών, σύμφωνα με τη Hines,2002 θεωρείται ενδεικτική της συγκρότησης μιας έννοιας της συνάρτησης, αφού ο πολλαπλασιασμός αναφέρεται στον αριθμό των επαναλήψεων μιας ποσότητας.

Από τη διατύπωση μιας ερμηνείας των ευρημάτων που προαναφέρθηκαν, προκύπτει ότι η συμβολή του συγκεκριμένου οπτικού διδακτικού υλικού σε σύγκριση με τη συμβολή της λεκτικής περιγραφής στη συγκρότηση της έννοιας της γραμμικής συνάρτησης από τους μαθητές της Δ΄ και ΣΤ΄ τάξης του Δημοτικού σχολείου δεν ήταν σημαντική. Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι η χρήση του οπτικού διδακτικού υλικού προσανατόλισε τους μαθητές σε αισθητηριακές εμπειρίες και περιόρισε τη σκέψη τους στο να προσεγγίσουν τη μαθηματική έννοια. Αντίθετα, η βασισμένη αποκλειστικά σε λεκτικές περιγραφές διδασκαλία της έννοιας της γραμμικής συνάρτησης φαίνεται να παράγει νοήματα, αφού δεν υστερεί στη γνωστική πρόοδο, τα οποία δημιουργούν το πλαίσιο και διευκολύνουν τη συγκρότηση της αντίστοιχης έννοιας, παρόλο που η δημιουργία νοήματος δεν μπορεί να αποδοθεί αποκλειστικά στη γλώσσα και να ερμηνευτεί με επάρκεια από τη γλώσσα (Lemke,1994). Ακόμη, φαίνεται να επιβεβαιώνεται η άποψη του Winn,B.,1987 ότι η επιτυχία στην εκπαίδευση δεν ταυτίζεται με τις γραφικές μορφές αλλά η διδακτική μέθοδος είναι αυτή που επιδρά στη μάθηση.

Συμπερασματικά σχόλια

Από τα δεδομένα της παρούσας έρευνας προκύπτει ότι το οπτικό διδακτικό υλικό φαίνεται να μην ενσωματώνει αυτόματα και με διαφάνεια τα ορίζοντα στοιχεία της μαθηματικής έννοιας της γραμμικής συνάρτησης. Απλά, η έννοια γίνεται εμφανής στους μαθητές μέσα από το σχηματισμό των τετραγώνων και σε συνδυασμό με τη δράση των μαθητών και την κοινωνική αλληλεπίδραση του δασκάλου. Γενικεύοντας, μπορεί να διατυπωθεί ο ισχυρισμός ότι τα διδακτικά υλικά αποκτούν ένα μαθηματικό νόημα όταν σχετίζονται με μια συγκεκριμένη δραστηριότητα μέσα σε ένα κοινωνικό πλαίσιο που διαμορφώνεται από το δάσκαλο[3] και τους μαθητές της σχολικής τάξης.

Η χρήση του οπτικού διδακτικού υλικού, όπως προκύπτει από τις διαπιστώσεις της παρούσας έρευνας, δε δημιουργεί αυτόματα μάθηση και κατανόηση, ούτε υποκινεί μια μυστηριώδη διαδικασία μεταφοράς της εννοιολογικής γνώσης από το διδακτικό υλικό στους μαθητές. Αυτό που φαίνεται να συμβάλλει στη μάθηση είναι η εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες, οι οποίες αναπτύσσονται με αφορμή και επίκεντρο το σχηματισμό του οπτικού διδακτικού υλικού, με τους ικανούς-γνώστες δασκάλους να τους καθοδηγούν στην οικειοποίηση των συναφών μαθηματικών εννοιών.

Ισχυριζόμαστε πως το διδακτικό υλικό γίνεται χρήσιμο στο βαθμό που ενθαρρύνει τους μαθητές να σκέφτονται καθώς αναπτύσσουν μαθηματικές δραστηριότητες και όχι πως συμβάλλει στη μάθηση των μαθηματικών εννοιών μόνο με τη θέαση ή τον χωρίς συγκεκριμένο στόχο σχηματισμό τους. Το διδακτικό υλικό δεν μπορεί από μόνο του να υποκινήσει διαδικασίες συγκρότησης μαθηματικής γνώσης, όσο απλό ή περίπλοκο κι αν είναι ως κατασκευή, γιατί είναι τα μαθηματικά αυτά που αποδίδουν μια εννοιολογική οπτική στο διδακτικό υλικό. Ακόμη, και στην περίπτωση που το διδακτικό υλικό αποτυπώνει και προβάλλει με απόλυτη σαφήνεια μια μαθηματική έννοια, το γεγονός αυτό λειτουργεί το ίδιο αποτρεπτικά για το μαθητή να σκεφτεί και να φανταστεί, όπως όταν ο δάσκαλος δίνει υπερβολικές επεξηγήσεις, συμβουλές ή βοήθεια για την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος.

Τέλος, και η λογική με την οποία είναι δομημένα τα βιβλία μαθηματικών των μαθητών, όπου στο τέλος κάθε διδακτικής ενότητας υπάρχει το ¨συμπεραίνω¨, φαίνεται να παραπέμπει σε μια λεκτική περίληψη και όχι σε

[3] δάσκαλο: δάσκαλο/δασκάλα

μια γραφική αναπαράσταση, ως τον πιο κατάλληλο τρόπο κατανόησης της έννοιας.

Βιβλιογραφία

Πατρώνης, Α., & Δ. Σπανός, 1996, Σύγχρονες θεωρήσεις και έρευνες στη μαθηματική παιδεία, εκδ. Γ.Α.Πνευματικού, Αθήνα.

Baroody, A., 1989, Manipulatives Don't Come with Guarantees, *Arithmetic teacher*, Oct., 37, pp. 4 - 5.

Clements, D., 1997, Constructing Constructivism, *Teaching Children Mathematics,* vol. 4, December, pp. 198 – 200.

Dreyfus, T.,& T.Eisenberg, 1982, Intuitive Functional Concepts: A Baseline Study on Intuitions, *Journal for Research in mathematics Education*, vol. 13, no. 5, pp. 360 – 380.

Even, R., 1990, Subject Matter Knowledge for Teaching and the Case of Functions, *Educational Studies in Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, vol. 21, pp. 521 – 544.

Gravemeijer, K., 1997, Mediating between Concrete and Abstract, In Nunes,T., Bryant, P.,(Eds), *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective, Psychology Press*, pp. 315 – 345.

Hines, E., 2002, Developing the concept of linear function: one student's experiences with dynamic physical models, *Journal of Mathematics Behavior,* Pergamon, vol. 101, pp. 1 – 25.

Lemke, J., 1994, Multiplying Meaning: Visual and Verbal Semiotics in Scientific Text, In Martin, J., Veel, R.,(Eds), *Reading Science*(Routledge), pp. 1 – 25.

Lesh, R., M.Landau, & E.Hamilton, 1983, Conceptual Models and Applied Mathematical Problem-Solving Research, In Acquisition of mathematics concepts and processes, Academic Press, pp. 263 – 343.

Piaget, J., J. Grize, A. Szeminska, & V. Bang, 1977, Epistemology and Psychology of Functions, D. Reidel Publishing Combany: Dordrecht-Holland/Boston – U.S.A.

Radziszewska,B.,&B.Rogoff,1988, Influence of adult and peer collaborators on children's planning skills, *Developmental Psychology*, vol. 24, no. 6, pp. 840 – 848.

Sfard, A., 1991, On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, 22, pp.1-36

Sfard, A., 1992, Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification – The case of Function, In Harel, G., & E. Dubinsky,(Eds*), The Concept of Function,* Mathematical Association of America, vol. 25, pp. 59 - 84.

Voigt, J., 1994, Negotiation of Mathematical Meaning and Learning Mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, vol. 26, pp. 275 - 298.

Winn, B., 1987, Charts, Graphs, and Diagrams in Educational Materials, In D.M. Willows, & H.A. Houghton,(Eds), *The Psychology of Illustration,* Springer-Verlag, New York, Berlin, London, Paris, Tokyo, pp. 152 - 195.

Η σημασία του φυσικού μέσου που φιλοξενεί τους κυκλικούς δίσκους στην μάθηση των ρητών αριθμών

Σταύρος Ορφανός
Διδάκτορας Διδακτικής των Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου

Διδακτικά υλικά
Οτιδήποτε υλικό που χρησιμοποιείται από τον δάσκαλο με σκοπό την ανάπτυξη μαθηματικών δραστηριοτήτων για τους μαθητές στην τάξη την ώρα των μαθηματικών θεωρείται διδακτικό υλικό. Ο δάσκαλος μετασχηματίζει το υλικό σε διδακτικό με το να το δώσει στους μαθητές για εξοικείωση, να τους ενθαρρύνει να το χειριστούν και ως καλός δάσκαλος να έχει προβλέψει τις μαθηματικές δραστηριότητες τις οποίες θα εκτελέσουν οι μαθητές μ' αυτό(5). Εκτός από το ίδιο μας το σώμα, σχεδόν όλα τα διδακτικά υλικά είναι τεχνητά δημιουργήματα με την έννοια ότι έχουν δημιουργηθεί ειδικά για τη χρήση στην τάξη και δεν έχουν μια ανεξάρτητη ύπαρξη έξω από το σχολείο(13). Τα υλικά αυτά λειτουργούν επομένως ως στοιχεία παραγωγής μαθηματικής γνώσης και ως στοιχεία επικοινωνίας της γνώσης αυτής στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών.

Μερικές από τις μορφές με τις οποίες εμφανίζονται τα διδακτικά υλικά είναι:

- Φυσικά αντικείμενα (Dienes, Cuisenaire, Διαβήτης κτλ)
- Εικόνες
- Σχήματα
- Σύμβολα
- Πηγές πληροφοριών
- Τοποθεσίες
- Στρατηγικές για διδασκαλία και αξιολόγηση

Επίσης τα διδακτικά υλικά εμφανίζονται και ως:

- Εργαλεία που μπορεί να χρησιμοποιηθούν για να δημιουργήσουν ή να αναλύσουν φυσικές ή πραγματικές καταστάσεις και / ή σχέσεις (συμπεριλαμβανομένων και των τεχνολογικών εργαλείων)
- Περιβάλλοντα που ίσως περιλαμβάνουν μαθηματικές καταστάσεις και / ή σχέσεις.
- Πολιτιστικά εργαλεία και σύμβολα – για παράδειγμα, έννοιες, ιδεολογικές όψεις, κοινωνικές σχέσεις και ιδρυματικές προσδοκίες(1).

Πολλά από τα παραπάνω διδακτικά υλικά μπορεί να γίνουν αντιληπτά από τις αισθήσεις μας (αφή, όραση, ακοή). Στην εργασία αυτή θα ονομάσουμε τα υλικά αυτά φυσικά και ειδικότερα αυτά που μπορούμε να πιάσουμε με τα χέρια μας χειροπιαστά ενώ τα υλικά που μπορούμε να τα δούμε εποπτικά. Τα φυσικά υλικά αυτά έχουν καθιερωθεί στα σχολεία γιατί έχουν πολλά πλεονεκτήματα όπως

- Μπορούν να διευκολύνουν την διδασκαλία και την μάθηση των διαφόρων μαθηματικών εννοιών(10)
- Τα παιδιά δεν έχουν την νοητική ωριμότητα να καταλαβαίνουν αφηρημένες μαθηματικές έννοιες παρουσιασμένες με λόγια ή σύμβολα

και για τον λόγο αυτό χρειάζονται πολλές εμπειρίες με φυσικά υλικά, για να τις κατανοήσουν(12)
- Οι πρώτες εμπειρίες και αλληλεπιδράσεις των μαθητών δημιουργούν τη βάση για την κατανόηση των αφηρημένων εννοιών που θα συναντήσουν σε μεγαλύτερες ηλικίες(15)

Όμως τα φυσικά υλικά και πιο συγκεκριμένα τα χειροπιαστά υλικά έχουν μειονεκτήματα, όπως(2):
- Δεν είναι μαγικά
- Δεν είναι φορείς νοημάτων. Αν και η κιναισθητική εμπειρία μπορεί να προάγει την αντίληψη και την σκέψη η κατανόηση όμως δεν ταξιδεύει διαμέσου των δακτύλων και του βραχίονα
- Αποσπούν την προσοχή και είναι ευάλωτα σε παρερμηνείες
- Πολλοί δάσκαλοι υπερεκτιμούν την αξία τους, επειδή οι έννοιες που παρουσιάζουν τους είναι ήδη γνωστές και έτσι εύκολα τις ‘βλέπουν’ μέσα στα συστήματα αυτά

Η χρήση των διδακτικών υλικών

Σχετικά με τη χρήση των φυσικών υλικών στην διδασκαλία των μαθηματικών οι απόψεις διίστανται. Οι Lesh, Behr & Post(1987) θεωρούν ότι ένα υλικό είναι διαφανές αν επιτρέπει στους μαθητές να ‘δουν μέσα από αυτό’ τις υποκείμενες αρχές και σχέσεις, χωρίς να μπερδεύονται από τα χαρακτηριστικά του ίδιου του μοντέλου. Οι English & Halford(1995) θεωρούν ότι η διαφάνεια κάποιου υλικού είναι κάτι το αντικειμενικό αφού εξαρτάται μόνο από την επιστημονική του πιστότητα δηλαδή πόσο καλά ταιριάζουν οι περιορισμοί που επικρατούν στο φυσικό υλικό με τους περιορισμούς που επικρατούν στον στόχο του υλικού δηλαδή την μαθηματική έννοια ή θεωρία. Στην άποψη αυτή συμφωνεί και ο Shimojima(1996). Σύμφωνα με αυτόν «Τα επαγωγικά πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα, που έχουν τα φυσικά υλικά συστήματα με κοινό στόχο, οφείλονται στους τρόπους με τους οποίους το κάθε υλικό προβάλλει τους διάφορους περιορισμούς της πηγής, στους περιορισμούς του στόχου του υλικού».

Τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα ενός διδακτικού υλικού εμφανίζονται κατά την χρήση του. Με άλλα λόγια ένα υλικό που δεν χρησιμοποιείται δεν έχει πλεονεκτήματα ούτε μειονεκτήματα. Ο Heidegger(1927-1962) με ένα πολύ χαρακτηριστικό παράδειγμα αντικατοπτρίζει την άποψη αυτή. Σύμφωνα με αυτόν αυτό που κάνει το σφυρί εργαλείο είναι η σφυρηλάτηση. Χωρίς σφυρηλάτηση, δηλαδή, αν πάρουμε το σφυρί σαν ένα αντικείμενο για να το κοιτάμε, με ορισμένα φυσικά χαρακτηριστικά και ορισμένη μορφή ύλης, το σφυρί δεν είναι ένα εργαλείο. Είναι απλά παρόν στο χέρι μας και όχι έτοιμο στο χέρι μας. Στην διάρκεια της σφυρηλάτησης, κάποιος σταματά να ξεχωρίζει το μυαλό από το σώμα, την σκέψη από την ύλη. Οι διαχωρισμοί αυτοί εμφανίζονται μόνο όταν σταματήσει η σφυρηλάτηση. Στην άποψη αυτή συμφωνούν οι Cobb, Yackel & Wood οι οποίοι θεωρούν ότι τα διδακτικά υλικά αποκτούν νόημα μόνο όταν χρησιμοποιούνται. Επίσης, σύμφωνα με τον Meira(1998) τα φυσικά υλικά πρέπει να θεωρηθούν σαν ‘υλικά συζήτησης’ και οι Teasley & Rochelle(1993) περιγράφουν τα φυσικά υλικά σαν εργαλεία διαπραγμάτευσης νοημάτων αντί σαν εργαλεία μεταφοράς νοημάτων.

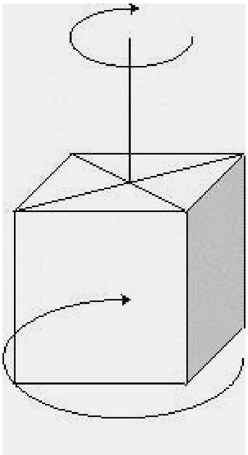
Όμως, όλα τα εργαλεία δεν είναι εξίσου αποτελεσματικά. Ανάλογα με την εργασία που θέλουμε να κάνουμε επιλέγουμε και το εργαλείο που θα μας βοηθήσει να φέρουμε σε πέρας την εργασία αυτή.

Έστω για παράδειγμα ότι θέλουμε να καρφώσουμε ένα καρφί τον τοίχο. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε με πολλούς τρόπους. Για το σκοπό αυτό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα οποιοδήποτε αντικείμενο, όπως για παράδειγμα μια μεγάλη πέτρα ή κάποιο ογκώδες βιβλίο ή ένα κομμάτι σίδερο κτλ. Από αυτά το σίδερο ίσως να ήταν το καταλληλότερο. Η αποτελεσματικότητα όμως κάποιου εργαλείου εξαρτάται επίσης και από τη μορφή που έχει το εργαλείο αυτό. Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε κάποιο βιβλίο, ένα κασμά, μια τανάλια, ένα γαλλικό κλειδί. Από αυτά τα εργαλεία η σφυρηλάτηση θα γίνει ευκολότερη αν το εργαλείο έχει τη μορφή σφυριού. Συνεπώς για να φέρουμε σε πέρας τη σφυρηλάτηση πρέπει να λάβουμε υπόψη μας και τη μορφή (τανάλια, γαλλικό κλειδί, κασμά, σφυρί) αλλά και την εσωτερική του δομή (πέτρα, ξύλο, πλαστικό, σίδερο, ατσάλι). Με άλλα λόγια δεν είναι όλα τα σφυριά το ίδιο αποτελεσματικά. Υπάρχουν σφυριά που αποτελούνται από πλαστικό, ξύλο, σίδερο, ατσάλι. Μερικά από τα εργαλεία αυτά κάνουν για την εργασία που θέλουμε να καρφώσουμε ένα καρφί στον τοίχο. Άλλα σφυριά είναι φτιαγμένα για να καρφώνουμε ατσάλινα καρφιά, άλλα για ξύλινα καρφιά και άλλα για να καρφώσουμε πασσάλους.

Εμείς δεχόμαστε ότι τα φυσικά υλικά είναι εργαλεία διδακτικής διαπραγμάτευσης. Η αποτελεσματικότητα των υλικών εξαρτάται, όπως κάθε εργαλείο που χρησιμοποιούμε στην καθημερινή πρακτική, από δυο παράγοντες. 1)Από την μορφή τους και 2)από το μέσο που τα φιλοξενεί.

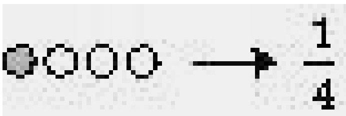
Δεν υπάρχουν εργαλεία γενικού σκοπού αφού η δύναμη κάθε εργαλείου βρίσκεται στο ότι επιτρέπει ορισμένες ενέργειες και απορρίπτει άλλες.

Ας πάρουμε για παράδειγμα τα διδακτικά υλικά: κύβοι Dienes και τον διαβήτη. Δεν θα χρησιμοποιήσουμε κύβους Dienes για να διδάξουμε τον κύκλο και τις ιδιότητες του καθώς επίσης δεν θα χρησιμοποιήσουμε τον διαβήτη για να διδάξουμε κλάσματα. Ο τρόπος με τον οποίο χρησιμοποιούμε τους κύβους είναι κατάλληλος για την εύκολη παρουσίαση εννοιών που αφορούν το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Βέβαια, μπορούμε, αν αλλάξουμε τον τρόπο χρήσης του εργαλείου αυτού, να διδάξουμε έννοιες που αναφέρονται στον κύκλο. Π.χ. Αν στρέψουμε ένα κύβο ως προς άξονα που περνάει από το σημείο τομής των διαγωνίων δυο απέναντι εδρών του θα δημιουργήσουμε κύκλο με κέντρο το κέντρο βάρους του τετραγώνου και ακτίνα το μισό της διαγωνίου του τετραγώνου αυτού(εικόνα 1)



Εικόνα 1

Ο διαβήτης δημιουργήθηκε σαν εργαλείο διαπραγμάτευσης γεωμετρικών εννοιών που αφορούν τον κύκλο. Φυσικά, θα μπορούσαμε, να τον χρησιμοποιήσουμε για να διδάξουμε κλάσματα. Π.χ. φτιάχνοντας 4 κύκλους και χρωματίζοντας τον 1 από αυτούς να παρουσιάσουμε το κλάσμα ¼ (Εικόνα)



Εικόνα 2

Όσο πιο πολύ ταιριάζουν οι περιορισμοί που επιβάλλει ο φυσικός μας κόσμος στη μορφή του φυσικού υλικού με τους περιορισμούς που επικρατούν στη μαθηματική δομή τόσο περισσότερες ιδιότητες της δομής μπορεί να παρουσιάσει η χρήση του υλικού.

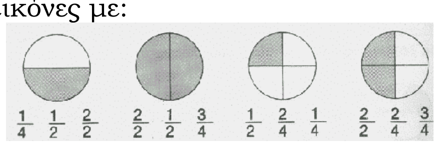
Για παράδειγμα το υλικό που εμφανίζεται στην εικόνα 2 είναι επιστημονικά πιστό με τους φυσικούς αριθμούς και γι' αυτό όταν χρησιμοποιείται για την παρουσίαση των φυσικών αριθμών, των σχέσεων και των πράξεων με αυτούς δεν οδηγεί σε αντιφάσεις. Το υλικό όμως αυτό είναι μερικώς πιστό με το σώμα των ρητών αφού, αν και μπορεί να οπτικοποιήσει κλάσματα ο τρόπος χρήσης του στην παρουσίαση της πρόσθεσης κλασμάτων οδηγεί σε αντιφάσεις π.χ. αν ενώσουμε τις συλλογές ½ και ¼ τότε η νέα συλλογή θα παρουσιάσει το κλάσμα $\frac{2}{6}$.

Εκτός από τη μορφή ένας άλλος παράγοντας που παίζει σημαντικό ρόλο στην χρήση των φυσικών υλικών είναι τα μέσα που φιλοξενούν τα υλικά αυτά όπως για παράδειγμα χαρτί, οθόνη Η/Υ, ξύλο, μέταλλο κτλ. Τα μέσα αυτά είναι στοιχεία του φυσικού μας κόσμου και συνεπώς υπόκειναι σε ορισμένους περιορισμούς. Οι περιορισμοί αυτοί επηρεάζουν τα εσωτερικά χαρακτηριστικά των διδακτικών υλικών και συνεπώς επηρεάζουν και την ικανότητα τους να μεταφέρουν τις διάφορες πληροφορίες. Με άλλα λόγια, αν το ίδιο διδακτικό υλικό φιλοξενηθεί σε διαφορετικά μέσα μπορεί να μεταφέρει διαφορετικές *πληροφορίες. Για παράδειγμα αν η φυσική μας γλώσσα(7) φιλοξενηθεί σε κάποιο μέσο όπως το μαγνητόφωνο, βίντεο κτλ τότε μαζί με το νόημα μεταφέρεται και το κυμάτισμα της φωνής ο τόνος και διάφορες άλλες διαστάσεις που παίζουν σημαντικό ρόλο στη μεταφορά της πληροφορίας. Αν παράλληλα με την ομιλία βλέπουμε και το συνομιλητή τότε κάποιες άλλες διαστάσεις όπως, για παράδειγμα, οι χειρονομίες του ομιλητή, οι εκφράσεις του κ.ό.κ. έρχονται στο προσκήνιο. Παρατηρούμε δηλαδή ότι το μέσο παίζει σημαντικό ρόλο στην μετάδοση των πληροφοριών που προκύπτουν από τη χρήση του. Βλέπουμε λοιπόν ότι* οι μεταβολές στα χαρακτηριστικά του φυσικού υλικού είναι τόσο μεγάλες όταν κάποιος αλλάζει το μέσο φιλοξενίας του διδακτικού υλικού κάτι που σημαίνει ότι πολύ πιθανόν να επηρεάσουν και τη χρήση του.

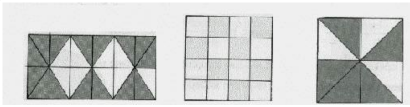
Μεθοδολογία και ερευνητικό υλικό

Τα διδακτικά υλικά που χρησιμοποιούνται στα σχολικά εγχειρίδια για την παρουσίαση των ρητών αριθμών είναι διάφορα αναπαραστατικά συστήματα που χρησιμοποιούν εικόνες με:

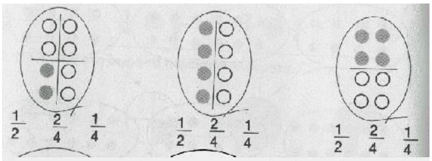
α)κυκλικούς δίσκους



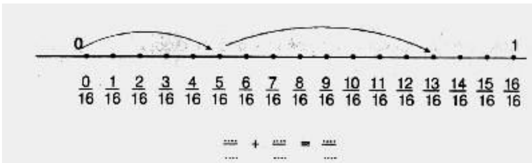
β)ορθογώνια



γ)βώλους

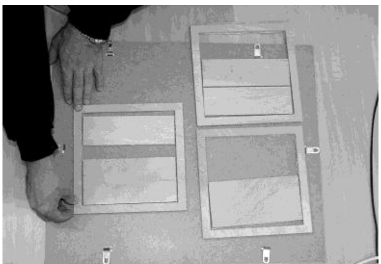


δ)άξονες

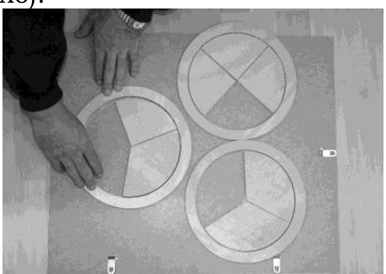


.

Εκτός από το χαρτί, τα συστήματα αυτά μπορούν να φιλοξενηθούν και σε διάφορα φυσικά μέσα(ξύλο, γυαλί, μέταλλο).

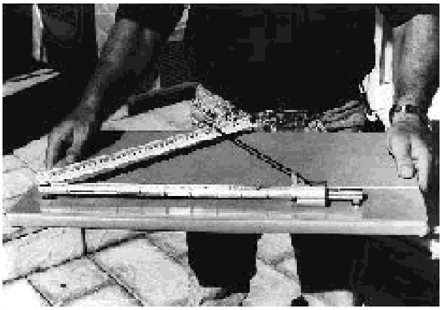


Εικόνα 3-Το σύστημα "ορθογώνια¨ σε ξύλο



Εικόνα 4-Το σύστημα "πίτες" σε ξύλο

Εικόνα 5-Το σύστημα "βώλοι" σε γυαλί



Εικόνα 6-Το σύστημα "ΘΑΛΗΣ"(11) σε μέταλλο

Τα παραπάνω διδακτικά υλικά έχουν την ίδια μορφή αλλά διαφέρουν ως προς το φυσικό υλικό που τα φιλοξενεί. Οι μεταβολές στα χαρακτηριστικά των φυσικών υλικών (χαρτί, ξύλο, μέταλλο) που φιλοξενούν τα αναπαραστατικά συστήματα είναι μεγάλες κάτι που επηρεάζει την χρήση των συστημάτων. Για παράδειγμα, κάποιος μαθητής στην προσπάθεια του να παραστήσει ένα κλάσμα θα εκτελέσει διαφορετικές φυσικές ενέργειες χρωματίζοντας στο σύστημα «χάρτινες πίτες» από ότι πιάνοντας κομμάτια από ξύλινες πίτες.

Στο Εργαστήριο Μαθησιακής Τεχνολογίας και Διδακτικής Μηχανικής του Πανεπιστημίου Αιγαίου στη Ρόδο διεξάγουμε μια έρευνα με στόχο να διερευνηθεί σε ποιο βαθμό επηρεάζει το φυσικό υλικό, που φιλοξενεί τα αναπαραστατικά συστήματα των ρητών αριθμών, τις νοητικές ενέργειες που προκύπτουν από την χρήση των συστημάτων αυτών. Για τον λόγο αυτό έχουμε δημιουργήσει με την βοήθεια των Νέων Τεχνολογιών διάφορα εποπτικά υλικά (βλέπε εικόνες 3,4,6).

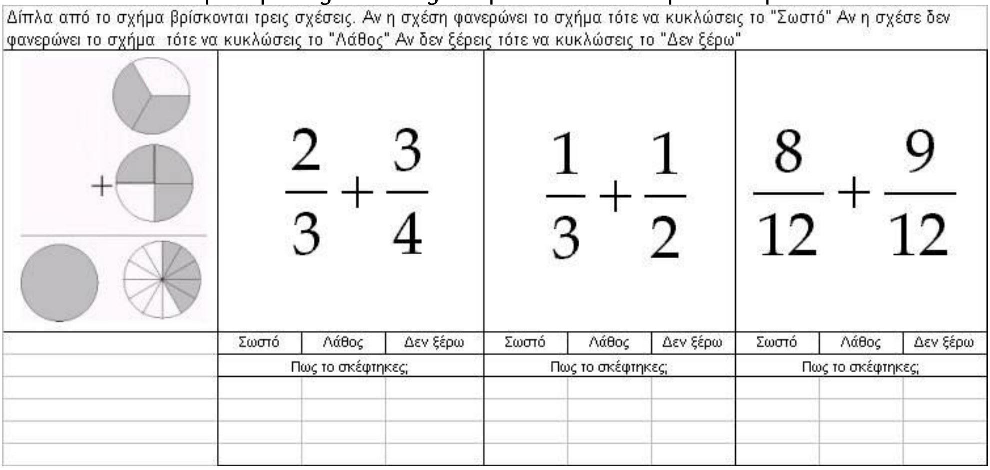
Στο πλαίσιο της ευρύτερης αυτής έρευνας διεξήχθη ένα πείραμα (μέρος του οποίου θα παρουσιασθεί στην ανακοίνωση αυτή) με στόχο να διερευνήσει, με ποιο τρόπο επηρεάζονται οι νοητικές ενέργειες που δημιουργούνται από τη χρήση των συστημάτων «χάρτινες πίττες» και «ξύλινες πίττες».

Το πείραμα αυτό πραγματοποιήθηκε με 4 μαθητές της Στ΄ τάξης. Από τη μια ως μέσο φιλοξενίας χρησιμοποιήσαμε το χαρτί πάνω στο οποίο υπήρχε η εικονική αναπαράσταση της πίτας και από την άλλη χειροπιαστά αντικείμενα (ξύλινες πίτες) τα οποία επεξεργαζόταν ο κάθε μαθητής.

Η έρευνα μας αυτή θα απαντήσει στο κατά πόσον οι μαθητές:

1. Μπορούν να *κατασκευάσουν* αναπαραστάσεις αθροίσματος μεγαλύτερου της μονάδας με κομμάτια από ξύλινες πίτες
2. Χρησιμοποιούν τους αλγόριθμους που έχουν μάθει για να ελέγξουν την εγκυρότητα των υπολογισμών τους
3. Γνωρίζουν την διαφορά της πρόσθεσης από το άθροισμα

Αρχικά, τα παιδιά συμπλήρωσαν ερωτηματολόγιο που περιείχε την αντιστοίχιση ενός σχήματος που περιείχε την αναπαράσταση της πρόσθεσης και του αθροίσματος όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα

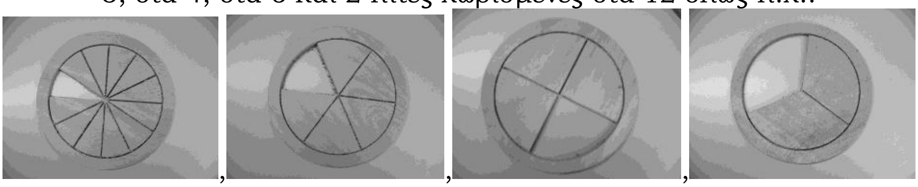


Δίπλα από το σχήμα βρίσκονται τρεις σχέσεις. Αν η σχέση φανερώνει το σχήμα τότε να κυκλώσεις το "Σωστό" Αν η σχέσε δεν φανερώνει το σχήμα τότε να κυκλώσεις το "Λάθος" Αν δεν ξέρεις τότε να κυκλώσεις το "Δεν ξέρω"

+	$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$			$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$			$\frac{8}{12}+\frac{9}{12}$		
	Σωστό	Λάθος	Δεν ξέρω	Σωστό	Λάθος	Δεν ξέρω	Σωστό	Λάθος	Δεν ξέρω
	Πως το σκέφτηκες;			Πως το σκέφτηκες;			Πως το σκέφτηκες;		

Εικόνα 7-Ερωτηματολόγιο αναγνώρισης

Μετά τους παρουσιάσθηκαν 2 ολόκληρες πίτες, 2 πίτες χωρισμένες στα 2, στα 3, στα 4, στα 6 και 2 πίτες χωρισμένες στα 12 όπως π.χ.:



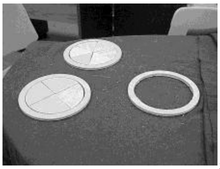
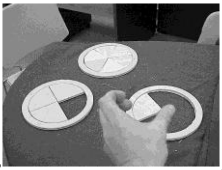
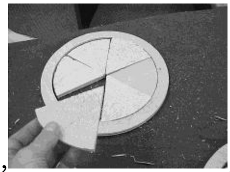
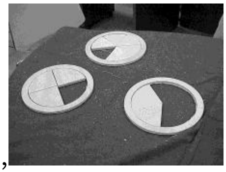
, , ,

Αφού αφήσαμε τα παιδιά να τις επεξεργαστούν, τους ζητήσαμε να κατασκευάσουν με την βοήθεια των κομματιών αυτών μια κατασκευή που να φανέρωνε τη σχέση και το άθροισμα $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$. Τα παιδιά που έλαβαν μέρος στο πείραμα δεν είχαν χρησιμοποιήσει στο παρελθόν ξύλινους δίσκους χωρισμένους σε β ίσα τμήματα για να παρουσιάσουν κάποιο $\frac{a}{\beta}$ κλάσμα, κάποια πρόσθεση ή κάποιο άθροισμα. Θυμίζουμε ότι η διδασκαλία της πρόσθεσης των ρητών αριθμών στα σχολεία επικεντρώνεται στην παρουσίαση των αλγορίθμων χωρίς να τους συνδέει με κάποιο σχήμα.

Η διαδικασία που ακολουθήθηκε και η οποία βιντεοσκοπήθηκε περιελάμβανε τα εξής στάδια:

- Ερχόταν ένα-ένα παιδί στην τάξη
- Του παρουσιαζόταν μια κάρτα που είχε πάνω της το άθροισμα $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$
- Το ρωτούσαμε να μας πει τι παρουσίαζε η κάρτα
- Και τελικά του ζητούσαμε να χρησιμοποιήσει κομμάτια από τους ξύλινους δίσκους που ήταν απλωμένοι πάνω στο τραπέζι, ώστε να φανερώσει αυτό το άθροισμα.

Τα στάδια που περιμέναμε το παιδί να κάνει ώστε να απαντήσει στο ερώτημα μας όσον αφορά την παρουσίαση του αθροίσματος, μοιάζουν με αυτά για την παρουσίαση του $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$:

, , , 

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων γίνεται σε τρεις φάσεις. Αρχικά γίνεται μελέτη και επεξεργασία των ερωτηματολογίων με τις δραστηριότητες αναγνώρισης και κατασκευής. Στη συνέχεια γίνεται ανάλυση της βιντεοσκόπησης που περιλαμβάνει το χειρισμό των ξύλινων πιτών από τα παιδιά και τέλος, παρουσιάζονται κάποια συγκριτικά στοιχεία των δύο διαφορετικών μέσων υποστήριξης της δραστηριότητας.

Αποτελέσματα

Το άθροισμα που δόθηκε στους μαθητές ήταν μεγαλύτερο της μονάδας. Για να απαντήσουν σωστά οι μαθητές έπρεπε να κάνουν τα εξής: $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}=\frac{17}{12}=1\frac{5}{12}$ και για *να δείξουν το άθροισμα σαν ένα στεφάνι πλήρως συμπληρωμένο και ένα άλλο που να περιείχε πέντε δωδέκατα* (βλ. εικ. 7).

Ο Γιώργος, μαθητής της ΣΤ΄, στο ερωτηματολόγιο απάντησε ότι το σχήμα φανερώνει την πρώτη πρόσθεση, δεν φανερώνει την δεύτερη πρόσθεση και φανερώνει την τρίτη πρόσθεση(δηλαδή απάντησε σωστά), και δικαιολόγησε κάνοντας ομώνυμα σε κάθε απάντηση που έδωσε. Όμως, στην κατασκευή που έκανε φάνηκε ότι δεν συνειδητοποίησε ότι το άθροισμα και η πρόσθεση είναι δυο διαφορετικά πράγματα. Στο πείραμα με τους ξύλινους δίσκους έγινε ο παρακάτω διάλογος (Ε=Ερευνητής, Μ= Γιώργος)

Μ:Θα κάνω την άσκηση $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$ (*Πιάνει δυο κενά στεφάνια. Στο ένα βάζει δύο κυκλικούς τομείς που τους παίρνει από την πίτα που είναι χωρισμένη στα 3. Στο άλλο στεφάνι βάζει τρεις κυκλικούς τομείς από την πίτα που είναι χωρισμένη στα 4.)*

Ε:Γιατί δεν τα έβαλες στο ίδιο στεφάνι;

Γ:Δεν χωράνε…(*και δείχνει με το χέρι του το κενό στο στεφάνι που έβαλε τα δύο τρίτα***)**

Ε:Βγαίνει κάτι παραπάνω από το ένα;

Γ:Ναι…

Ε:Μπορείς να κάνεις κάτι ώστε να γίνει ένα ολόκληρο και κάτι ακόμη;

Γ:(*Σκέφτεται για λίγο***) Όχι**

Η Κατερίνα, μαθήτρια της ΣΤ΄, στο ερωτηματολόγιο απάντησε ότι δεν ξέρει αν το σχήμα φανερώνει την πρώτη και την τρίτη πρόσθεση, και ότι το σχήμα δεν

φανερώνει την δεύτερη πρόσθεση (δηλαδή δεν απάντησε σωστά), και δεν δικαιολόγησε την απάντηση της κάνοντας ομώνυμα. Στην κατασκευή που έκανε φάνηκε ότι δεν γνωρίζει πώς να σχηματίζει κάθε προσθετέο ξεχωριστά.
Στο πείραμα με τους ξύλινους δίσκους έγινε ο παρακάτω διάλογος (Ε=Ερευνητής, Μ= Κατερίνα)
Μ:Θα βρώ δύο τρίτα και τρία τέταρτα (*Πιάνει ένα κενό στεφάνι και βάζει τα δυο τρίτα.)***Το τρία τέταρτα δεν χωράει...**
Ε:Τι μπορείς να κάνεις για να χωρέσει;
Μ: Πρέπει να βάλω τρία τέταρτα αλλά δεν χωράνε.
Ε: Δηλαδή, αφού δεν μπορείς να πάρεις τα τρία τέταρτα, το άθροισμα δεν γίνεται;
Κ: Το άθροισμα γίνεται
Ε: Πως γίνεται;
Κ:...
Ε:Είναι περισσότερο από ένα κύκλο;
Κ:Ναι...
Ε:Χρησιμοποίησε ακόμη ένα στεφάνι αν θέλεις
Κ: *(Πιάνει ένα άδειο στεφάνι και βάζει μέσα τρία τέταρτα)*
Ε:Τώρα υπάρχουν δυο κύκλοι που έχουν κενά. Μπορείς να κάνεις κάτι ώστε ο ένας κύκλος να κλείσει τελείως και ότι περισσέψει να πάει στον άλλο κύκλο;
Κ: Μπορώ να βάλω διαφορετικά κομμάτια εδώ(*και δείχνει τον κύκλο με τα δυο τρίτα***);**
Ε: Μπορείς να βάλεις ότι θέλεις φτάνει να εξηγήσεις γιατί το κάνεις
Κ: (*Πάει να βάλει το ένα τέταρτο στο στεφάνι με τα δυο τρίτα βλέπει ότι δεν γεμίζει πλήρως***)Θα βάλω το ένα τρίτο εδώ και έχω ένα ολόκληρο κύκλο**
Ε: Όμως έβαλες κάτι που δεν σου ζητήθηκε να βάλεις. Πως το σκέφτηκες;
Κ: Δανείστηκα το ένα τέταρτο από εδώ(*και δείχνει το κλάσμα ¾ της καρτέλας***)και έγινε τρία τρίτα εδώ(***και δείχνει το στεφάνι με τα 2/3***) και εδώ μου μένουν δύο τέταρτα!!!(***και βγάζει από το στεφάνι με τα τρία τέταρτα το ένα τέταρτο***)**
Η Ελένη, μαθήτρια της ΣΤ΄, στο ερωτηματολόγιο απάντησε ότι η πρώτη σχέση είναι σωστή επειδή τα κλάσματα φανερώνουν τα σχήματα**,** η δεύτερη σχέση είναι λάθος επειδή τα κλάσματα δεν φανερώνουν τα σχήματα και η τρίτη είναι λάθος γιατί τα κλάσματα δεν φανερώνουν τα σχήματα. **Αυτό που έκανε ήταν το εξής. Μέτρησε τα κομμάτια του κάθε δίσκου και στην κάθε ερώτηση έλεγξε αν ταιριάζουν με τα κομμάτια του κάθε προσθετέου χωρίς να ελέγξει κατά πόσο το άθροισμα φανερώνεται από σχήμα.**
Στο πείραμα με τους ξύλινους δίσκους έγινε ο παρακάτω διάλογος (Ε=Ερευνητής, Μ= Ελένη).
Μ: (*Βάζει στο ένα άδειο στεφάνι δύο τρίτα και σε ένα άλλο βάζει τρία τέταρτα***)**
Ε: Μπορείς να καλύψεις ένα ολόκληρο κύκλο
Μ: Δεν μπορώ γιατί δεν βγαίνει το άθροισμα
Η Εύη, μαθήτρια της ΣΤ΄, στο ερωτηματολόγιο απάντησε ότι η πρώτη σχέση είναι σωστή «γιατί υπάρχουν και τα $\frac{2}{3}$ και τα $\frac{3}{4}$»(χωρίς να ελέγξει αν το

σχήμα φανερώνει σωστά το αποτέλεσμα) η δεύτερη σχέση είναι λάθος «γιατί δεν έχουμε πουθενά $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{2}$ ενώ η τρίτη σχέση είναι σωστή «γιατί αν διαιρέσεις με το 4 θα μας βγουν $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$. *Χωρίς να κάνει την πρόσθεση με ομώνυμα κτλ απάντησε σωστά στις ερωτήσεις ελέγχοντας απλά και μόνο αν οι προσθετέοι σε κάθε άθροισμα φανερώνονται από το σχήμα.*

Στο πείραμα με τους ξύλινους δίσκους έγινε ο παρακάτω διάλογος (Ε=Ερευνητής, Μ=Εύη).

Μ: (*Βάζει στο ένα άδειο στεφάνι δύο τρίτα και σε ένα άλλο βάζει τρία τέταρτα***)**

Ε: Το αποτέλεσμα είναι πάνω από ένα κύκλο;

Μ: Ναι

Ε: Μπορείς να γεμίσεις ένα ολόκληρο κύκλο και ότι περισσεύει να το βάλεις στον άλλο κύκλο;

Ε: Θα πρέπει να τα κάνω ομώνυμα(*Πιάνει χαρτί και μολύβι και τα κάνει ομώνυμα***)**

Κ: Τι βρήκες;

Ε: Δεκαεφτά δωδέκατα

Κ: Τι θα κάνεις τώρα;

Ε: (*Πιάνει ένα πρώτο το βάζει στο ένα στεφάνι και στο δεύτερο βάζει πέντε δωδέκατα***)**

Ευρήματα της έρευνας

1)Τα περισσότερα παιδιά δεν έχουν συνειδητοποιήσει την διαφορά των εννοιών Πρόσθεση-Άθροισμα παρόλο που η διαφορά αυτή γίνεται σαφής στα σχολικά εγχειρίδια.

2) Δεν χρησιμοποιούν τους αλγόριθμους που έχουν μάθει για να ελέγξουν το κατά πόσο οι νοητικές ενέργειες που κάνουν όταν χρησιμοποιούν το διδακτικό υλικό είναι σωστές ή λάθος.

Παρόλο που η συντριπτική πλειοψηφία των ανθρώπων κατασκευάζει συγκεκριμένες ενέργειες σε σχετικά μικρή ηλικία, αυτό που τους εμποδίζει να κατασκευάσουν τυπικές ενέργειες, είναι ότι το φυσικό τους περιβάλλον στερείται αντικειμένων που υπόκεινται στην τυπική σκέψη. Όταν ένα παιδί βρίσκεται στις συγκεκριμένες ενέργειες τότε αλληλεπιδρώντας με το περιβάλλον του συνεχώς λαμβάνει αναδράσεις από τις οποίες μπορεί να κρίνει κατά πόσο οι ενέργειες του σε σχέση με τους στόχους που έχει θέσει είναι σωστές. Το παιδί γνωρίζει πότε αυτό που κάνει είναι σωστό ή λάθος εκτιμώντας κατά πόσον έχουν επιτευχθεί οι στόχοι του.

Όταν όμως το παιδί θέλει να βρει ένα άθροισμα με κλάσματα τότε οι ενέργειες του είναι ολοκληρωτικά νοητικές, αφού τα αντικείμενα πάνω στα οποία ενεργεί είναι κλάσματα δηλαδή αφηρημένα αντικείμενα και το άθροισμα είναι και αυτό κλάσμα δηλαδή είναι και αυτό αφηρημένο αντικείμενο.

Ανάδραση ανάλογη με τον πλούτο της ανάδρασης που έχει ένα παιδί στο αισθητικοκινητικό επίπεδο γίνεται έμφυτη σε νοητικές ενέργειες μόνο όταν το αποτέλεσμα των ενεργειών τους μπορεί να συγκριθεί με κάποια προσδοκία. Ο μοναδικός τρόπος που μπορεί να ελέγξει αν αυτό που κάνει είναι σωστό ή λάθος είναι να συγκρίνει το αποτέλεσμα στους ξύλινους δίσκους με το αποτέλεσμα της πράξης.

Βιβλιογραφία

Appelbaum, P.(2003) “Critical Considerations on Didactic Materials of Critical Thinking in Mathematics and Critical Mathematics Education” Περιλήψεις Πρακτικών του συνεδρίου CIEAM55 στην Πολωνία

Ball,D.L.(1992) 'Magical hopes:Manipulatives and the reform of math education' American Educator 16(2), 14-18, 46-47

Cobb, P., E. Yackel, and T. Wood:1992, ‘A constructivist alternative to the representational view of mind’, JRME 23(1), 2-33

English, L. and Halford, G.:1995, ‘Mathematics education; Models and Processes’, Lawrence Erlbaum, Mahwah, NJ.

Gellert, U.(2003) “Frictions: Students and Teachers Using Didactic Materials” Περιλήψεις Πρακτικών του συνεδρίου CIEAM55 στην Πολωνία

Heidegger,M.(1927-1962) ‘Being and Time’, Harper-Collins, San Fransisco, CA

Kaput, J.;Goldin, G(1994): ‘A Joint Perspective on the Idea of Representation in Learning and Doing Mathematics’

Lesh, R.,Behr,M. and Post,T.: 1987, ‘Rational number relations and proportions’ in C. Janvier(ed.) *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics,* Erlbaum, Hillsdale,NJ. Pp.41-58

Meira, L.:1998, ‘Making sense of instructional devices: The emergence of transparency in mathematical activity’ , *JRME* 29(2), 121-142

NCTM:2000, Principles and Standards for School Mathematics, NCTM, Reston, VA

Orfanos Stavros.(2003) “Η σημασία των ετερογενών συλλογισμών στη μάθηση και την διδασκαλία σχέσεων και πράξεων με κλάσματα” Διδακτορική διατριβή. Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Piaget,J.(1952) ‘The Child's Conception of Number’, Humanities Press, New York

Pimm, D.(1995) “Symbols and meanings in school mathematics” ISBN 0-415-11385-7

Shimojima Atsushi (1996) ‘Representation’ in Barwise, J., Seligman, J. '*Information flow:The logic of distributed systems*' Cambridge University Press. ISBN 0521583861

Skemp, R.R.:(1987) ‘The Psychology of Learning Mathematics’, Erlbaum, Hillsdale, N.J.

Teasley, S. and J. Roschelle: 1993, ‘Constructing a joint problem space: The computer as a tool for sharing knowledge’ , S.P. Lajoie and S.J. Derry(eds.) *Computers as Cognitive Tools*, NEA, Hillsdale, NJ.

Μορφές Εικονικής Αναπαράστασης της Έννοιας του Τριγώνου στα Μαθηματικά του Δημοτικού Σχολείου

Χρυσάνθη Σκουμπουρδή
Διδάκτορας Διδακτικής των Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου

Θεωρητικό Πλαίσιο

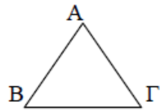
Η εικονική αναπαράσταση είναι ένα εργαλείο που διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη μαθηματική εκπαίδευση ως μέσο υποστήριξης της σκέψης, της επικοινωνίας και της μετάδοσης μαθηματικών ιδεών. Λόγω του ότι τα μαθηματικά έχουν να κάνουν περισσότερο από οτιδήποτε άλλο με αφηρημένες έννοιες, για να γίνουν αφενός πιο κατανοητά και αφετέρου πιο ελκυστικά και ενδιαφέροντα, δημιουργείται συχνά η ανάγκη συγκεκριμένων αναφορών τους μέσα από τη χρήση εικόνων και σχημάτων. Κατά συνέπεια στα σχολικά εγχειρίδια εκτός της τυπικής μαθηματικής γλώσσας περιλαμβάνονται και η φυσική καθημερινή γλώσσα, οι γραφικές παραστάσεις, τα γεωμετρικά σχήματα, τα σύμβολα, τα υλικά, οι εικόνες κ.α..

Το ότι οι παραστάσεις διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στον τομέα της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών, φαίνεται και από τα σύγχρονα σχολικά εγχειρίδια που περιλαμβάνουν εξαιρετικά μεγάλο αριθμό εικονικών κυρίως αναπαραστάσεων (εικόνες, σχήματα, διαγράμματα, γραφικές παραστάσεις) παρά ποτέ προηγουμένως.

Αυτό γίνεται για πολλούς λόγους μεταξύ των οποίων είναι και το γεγονός ότι σύμφωνα με αποτελέσματα ερευνών (Trelinski & Macedonska, 2003) το περιεχόμενο και η εικόνα των μαθηματικών όπως παρουσιάζονται στα σχολικά εγχειρίδια επηρεάζουν πολύ τη στάση των μαθητών και των δασκάλων.

Ένας άλλος λόγος που χρησιμοποιούνται οι εικονικές αναπαραστάσεις είναι ότι επιτυγχάνεται η εστίαση της προσοχής του μαθητή με επιδιωκόμενο αποτέλεσμα τη συγκεκριμενοποίηση της σκέψης του για την παραγωγή λύσης.

Όσον αφορά στην ενότητα της Γεωμετρίας, οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στα σχολικά εγχειρίδια ανήκουν σε τρία διαφορετικά συστήματα: τη φυσική γλώσσα, τη συμβολική γλώσσα και τα γεωμετρικά σχήματα τα οποία συνδέονται με ένα οπτικό σύστημα αντίληψης που έχει τους δικούς του νόμους οργάνωσης (Καμπάνη – Ποτουρίδου, 2003). Όπως φαίνεται και στον πίνακα 1 για το ίδιο γεωμετρικό αντικείμενο μπορούμε να έχουμε τόσες διαφορετικές πιθανές παραστάσεις, όσα και τα συστήματα αναπαράστασης:

Σύστημα αν/σης	Φυσική γλώσσα	Συμβολική γλώσσα	Γεωμετρικό σχήμα
Αναπ/ση	Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ η πλευρά ΑΒ ισούται με την πλευρά ΑΓ και με την πλευρά ΒΓ	ΑΒ = ΑΓ = ΒΓ	

Πίνακας 1: Πιθανές διαφορετικές αναπαραστάσεις του ισόπλευρου τριγώνου.

Η εικονική αναπαράσταση των γεωμετρικών σχημάτων ωστόσο, χρειάζεται «διάβασμα» και όχι απλή παρατήρηση που από μόνα τους τα σχήματα με την εικονικότητα και τη διαφάνειά τους μας προκαλούν να κάνουμε.
Επειδή όμως στη διαδικασία «ανάγνωσης» ενός γεωμετρικού σχήματος υπεισέρχεται πολύ ο υποκειμενικός παράγοντας και η προηγούμενη εμπειρία του αναγνώστη πολύ συχνά η μονομερής και χωρίς ποικιλία εικονική αναπαράσταση μιας έννοιας (π.χ. του τριγώνου ως ισόπλευρου) οδηγεί στην ταύτιση της παράστασης με τη συγκεκριμένη έννοια. Αυτό γίνεται πολύ συχνά και στα σχολικά εγχειρίδια, αλλά και από τον ίδιο το διδάσκοντα όπου χρησιμοποιεί μια εικονική αναπαράσταση για το τρίγωνο με σκοπό να παρασταθούν όλα τα τρίγωνα. Αυτό θυμίζει την περίπτωση της άλγεβρας όπου η χρήση γραμμάτων γίνεται για όποιον αριθμό. Όμως μια σημαντική διαφορά είναι ότι το γράμμα δεν είναι κάποιος συγκεκριμένος αριθμός, ενώ το ζωγραφισμένο τρίγωνο που χρησιμοποιείται για να παραστήσει όλα τα τρίγωνα μπορεί να ειδωθεί και να χαρακτηριστεί ως ένα συγκεκριμένο τρίγωνο αφού δεν είναι όλα τα τρίγωνα όμοια μεταξύ τους.
Τα γεωμετρικά σχήματα δεν είναι υλικά αντικείμενα που παρουσιάζουν ατέλειες, ούτε αντίγραφα πραγματικών αντικειμένων, αλλά νοητικές οντότητες οι οποίες καθορίζονται από τον ορισμό τους. Το γεωμετρικό σχήμα δεν είναι μια συνηθισμένη εικόνα, αλλά μια λογικά ελεγχόμενη δομή που παρουσιάζει διπλή φύση: εννοιολογική και σχηματική.
Η διπλή αυτή φύση των γεωμετρικών σχημάτων διεγείρει στους διδάσκοντες μια εσωτερική διαδικασία εξιδανίκευσης ώστε το σχήμα, ανεξάρτητα από ατέλειες, να είναι συνεπές με τις ιδιότητες που το καθορίζουν, αλλά και με το συνολικό γεωμετρικό πλαίσιο (π.χ. σε οποιοδήποτε τρίγωνο «βλέπει» τις γωνίες να έχουν άθροισμα 180^0). Αντίθετα για τα μικρά παιδιά, τα εννοιολογικά και τα σχηματικά χαρακτηριστικά των γεωμετρικών σχημάτων παραμένουν διαχωρισμένα και οι αποφάσεις τους συχνά βασίζονται μόνο στο υλικό σχήμα, γεγονός που αποτελεί συχνά αιτία λαθών (π.χ όταν σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τη μεσοκάθετη στην ΑΒ δεν την αναγνωρίζουν ως τέτοια γιατί δεν περνάει από την κορυφή Γ όπως συμβαίνει με τη μεσοκάθετη στην ΒΓ). Όμως κριτήριο και παράγοντας αποτελεσματικής γεωμετρικής λειτουργίας είναι η ικανότητα του ατόμου να διατηρεί τη διπλή φύση των γεωμετρικών σχημάτων κατά την επεξεργασία τους (Καμπάνη, 2003).
Σε αυτό μπορεί να βοηθήσει η προσέγγιση της γεωμετρικής έννοιας όχι με μια μόνο εικόνα, αλλά μέσα από διαφορετικά είδη σε διαφορετικές θέσεις. Παρουσιάζοντας ποικιλία εικόνων κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, ο διδάσκοντας αποσκοπεί στο να μπορέσει ο μαθητής να συλλάβει την κοινή

εσωτερική δομή τους, τα κοινά χαρακτηριστικά τους, που θα τον οδηγήσουν στην κατανόηση της έννοιας που αναπαρίσταται και που αποτελεί το αντικείμενο διδασκαλίας.
Από τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα που συναντάμε στο δημοτικό σχολείο (κύκλος, τετράγωνο, ορθογώνιο, τρίγωνο, ρόμβος) επιλέξαμε να ασχοληθούμε με το τρίγωνο γιατί είναι ένα από τα βασικά σχήματα με το οποίο έρχονται σε επαφή τα παιδιά από πολύ νωρίς στο αναλυτικό πρόγραμμα και συχνά πριν ακόμα αρχίσουν το σχολείο. Είναι μια έννοια που διατρέχει την ύλη του δημοτικού και δεν είναι μια έννοια μεμονωμένη. Χρησιμοποιείται πολύ συχνά σε όλες τις τάξεις του δημοτικού, για την εισαγωγή άλλων μαθηματικών εννοιών, ενώ διδάσκεται στις τάξεις Β΄, Γ΄, Δ΄ και Ε΄ όπως επίσης εμφανίζεται και ως δομικό στοιχείο άλλων γεωμετρικών ή μη εννοιών (όπως περιγράφεται αναλυτικά παρακάτω). Άλλος ένας λόγος για τον οποίο επιλέξαμε το τρίγωνο είναι το γεγονός ότι είναι ένα επίπεδο γεωμετρικό σχήμα που για να γίνει αντιληπτή η ποικιλία ως προς το είδος του (π.χ. ισόπλευρο, ισοσκελές, σκαλινό, οξυγώνιο, ορθογώνιο, αμβλυγώνιο κ.λ.π.) και ως προς τη θέση του ίδιου τριγώνου (π.χ. △, ▽), θα πρέπει να παρασταθεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Τέλος, ένας άλλος λόγος που μας οδήγησε να μελετήσουμε τις παραστάσεις της έννοιας του τριγώνου είναι το γεγονός ότι σύμφωνα με έρευνες (Pimm, 1995), παρόλο που τα παιδιά μαθαίνουν τη λέξη «τρίγωνο» και μερικές από τις ιδιότητές των τριγώνων από το νηπιαγωγείο ή την πρώτη τάξη του δημοτικού σχολείου, η αντίληψή τους για το τρίγωνο συχνά παραμένει πολύ ισχνή κατά τη διάρκεια του δημοτικού σχολείου. Αναρωτηθήκαμε λοιπόν μήπως σε αυτό συμβάλλει και ο τρόπος παράστασής του από τα σχολικά εγχειρίδια.
Με βάση τα παραπάνω, αποφασίσαμε να μελετήσουμε το ρόλο των παραστάσεων του τριγώνου στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών όλων των τάξεων του δημοτικού σχολείου. Πιο συγκεκριμένα προσπαθήσαμε να καταγράψουμε και να κατηγοριοποιήσουμε τις εικόνες- σχήματα της έννοιας του τριγώνου καθώς επίσης να διερευνήσουμε το ρόλο που παίζει η κάθε κατηγορία στη δημιουργία προτύπου για το τρίγωνο στην αντίληψη του αναγνώστη.

Μεθοδολογια

Αρχικά καταγράφηκαν όλες οι παραστάσεις τριγώνων από τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών όλων των τάξεων του δημοτικού σχολείου (12 εγχειρίδια: 2 τόμοι για κάθε τάξη) και κατηγοριοποιήθηκαν ως προς το διδακτικό στόχο. Πιο συγκεκριμένα γίνεται διερεύνηση του ρόλου της παράστασης του τριγώνου ως:

- άμεσου στόχου διδασκαλίας
- δομικού στοιχείου για άλλες γεωμετρικές έννοιες
- δομικού στοιχείου για μη γεωμετρικές έννοιες
- βοηθητικό στοιχείο για την εισαγωγή άλλων μαθηματικών εννοιών

Στη συνέχεια έγινε επεξεργασία κάθε κατηγορίας και δημιουργία τεσσάρων υποκατηγοριών ανάλογα με το ρόλο που παίζουν οι εικόνες-σχήματα:

1) *Διδακτικό ρόλο* παίζουν οι σχήματα-εικόνες που χρησιμοποιούνται κυρίως στην ενότητα που το τρίγωνο αποτελεί άμεσο στόχο διδασκαλίας.

2) Όταν το κείμενο του εγχειριδίου αναφέρεται σε εικόνες-σχήματα ή συμπλέγματά τους με προτροπή να αναγνωρίσει ή να ανακαλύψει ο αναγνώστης την ύπαρξη τριγώνων μέσα σε αυτά (*ρόλος αναγνώρισης*).
3) Εικόνες-σχήματα ή συμπλέγματά τους που περιέχουν τρίγωνα στα οποία το σχολικό εγχειρίδιο αναφέρεται, αλλά όχι για τη συγκεκριμένη έννοια παρά για κάτι άλλο (ρόλος βοηθητικού σχήματος).
4) Εικόνες-σχήματα ή συμπλέγματά τους που περιέχουν τρίγωνα στα οποία το σχολικό εγχειρίδιο δεν αναφέρεται καθόλου (*αισθητικός ρόλος*).
5) Όταν το σχολικό εγχειρίδιο χρησιμοποιεί το τρίγωνο ως πλαίσιο μέσα στο οποίο πρέπει να γραφτεί το αποτέλεσμα μιας πράξης (*ρόλος πλαισίου*).

Αποτελέσματα

Από την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών των τάξεων του δημοτικού σχολείου έγινε φανερό ότι η ενότητα της γεωμετρίας κατέχει ιδιαίτερη θέση σε όλες τις τάξεις μέσα από τις ενότητες: Βασικές μαθηματικές έννοιες, Μετρήσεις, Βασικά επίπεδα σχήματα, Γεωμετρία, Γεωμετρικά στερεά, Πολύγωνα, Κύκλος. Η εμφάνιση του τριγώνου στα εγχειρίδια των μαθηματικών του δημοτικού γίνεται είτε ως άμεσος στόχος διδασκαλίας είτε ως δομικό στοιχείο για άλλες γεωμετρικές ή μη έννοιες είτε ως βοηθητικό στοιχείο για την εισαγωγή άλλων μαθηματικών εννοιών.

ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΩΣ ΆΜΕΣΟΣ ΣΤΟΧΟΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Άμεσα η έννοια του τριγώνου διδάσκεται στις τάξεις Β', Γ', Δ' και Ε' δημοτικού, μέσα σε ενότητες που αφορούν στα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα (πίνακας 2).

Ενότητα/ Τάξη	Α΄	Β΄	Γ΄	Δ΄	Ε΄	Στ΄
Τα βασικά επίπεδα σχήματα		Χ (5 σελ.)				
Τετράγωνο, Ορθογώνιο, Τρίγωνο, Κυκλικός δίσκος.			Χ (3 σελ.)			
Πολύγωνα				Χ (3 σελ.)		
Τρίγωνο					Χ (14 σελ.)	

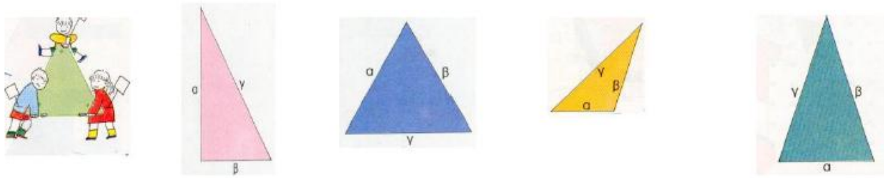
Πίνακας 2: Ενότητες ανά τάξη που περιέχουν το τρίγωνο ως άμεσο στόχο ιδασκαλίας

Οι τρόποι παράστασης του τριγώνου όταν πρόκειται για τη διδασκαλία του, ποικίλουν (ισόπλευρο, ορθογώνιο, αμβλυγώνιο, ισοσκελές) και στις περισσότερες περιπτώσεις ο ρόλος που παίζουν είναι *διδακτικός* γιατί το σχήμα του τριγώνου είναι απαραίτητο για τη διδασκαλία και την κατανόηση της έννοιας.

Πιο συγκεκριμένα οι παραστάσεις που χρησιμοποιούνται για τη διδασκαλία της έννοιας του τριγώνου καθώς και ο ρόλος που παίζει η καθεμία από αυτές παρουσιάζονται παρακάτω:

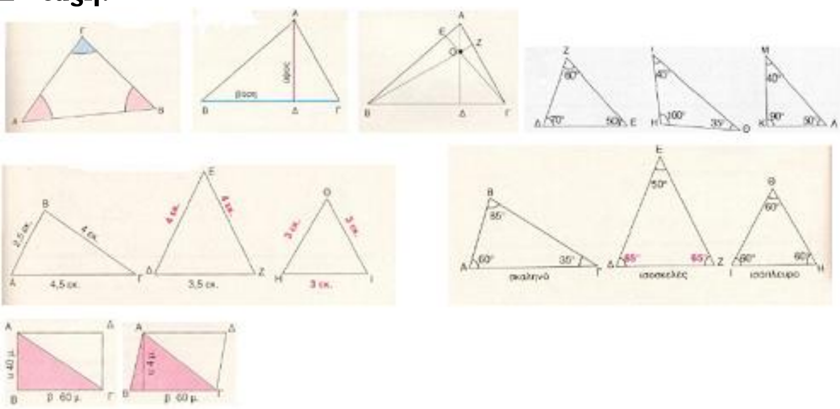
Α) *Διδακτικό ρόλο* παίζουν οι παρακάτω παραστάσεις, που χρησιμοποιούνται για τη διδασκαλία της έννοιας του τριγώνου, με αναφορά στη μέτρηση του αριθμού των πλευρών και των γωνιών του καθώς και του μήκους των πλευρών του (Β΄ τάξη) ή της περιμέτρου του (Γ΄ τάξη) ή με αναφορά στα κύρια στοιχεία του (Ε΄):

Στη **Β΄ τάξη**:



Στη **Γ΄ τάξη:**

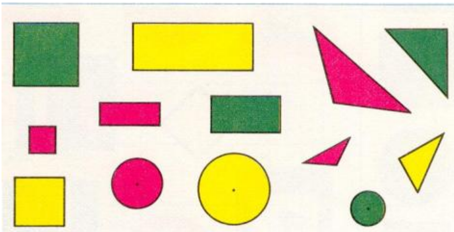
Στην **Ε΄ τάξη:**



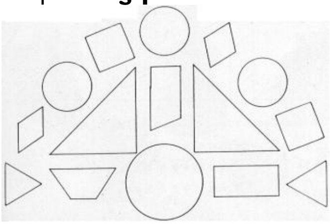
Β) *Ρόλο αναγνώρισης* παίζουν οι παρακάτω εικόνες-σχήματα και τα συμπλέγματά τους, όπου μέσα σε αυτά πρέπει να αναγνωρίσουν ή να ανακαλύψουν τα παιδιά τα τρίγωνα (Β΄, Γ΄):

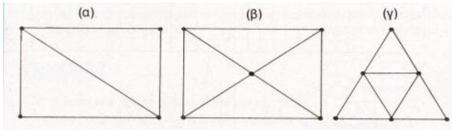
Στη **Β΄ τάξη:**

Στη Γ΄ τάξη:



Στη **Δ΄τάξη:**





Γ) <u>Αισθητικό ρόλο</u> παίζει η παρακάτω παράσταση που διακοσμεί κάποιο σημείο της ενότητας:

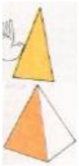
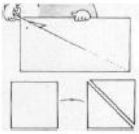
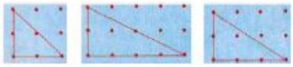
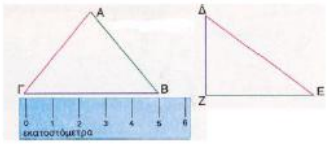
Στη Β΄ τάξη:

ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΩΣ ΔΟΜΙΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΓΙΑ ΑΛΛΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Εκτός από τις ενότητες της Γεωμετρίας που έχουν στόχο τη διδασκαλία της έννοιας του τριγώνου, υπάρχουν και άλλες ενότητες που χρησιμοποιούν το τρίγωνο ως δομικό στοιχείο (μέρος ενός άλλου σχήματος ή ενός συμπλέγματος) για να εισάγουν γεωμετρικές έννοιες.

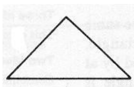
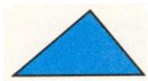
Στη **Β΄ τάξη** μέσα στις ενότητες:
- Σύνδεση των επίπεδων σχημάτων με τις επιφάνειες των στερεών
- Πρόβλεψη του σχήματος από την τομή και ένωση επίπεδων επιφανειών
- Κατασκευή και ιχνογράφηση επίπεδων σχημάτων
- Κατασκευή διαβαθμισμένης χαρτοταινίας – Μετρήσεις ευθ. τμημάτων

Οι παρακάτω παραστάσεις κατέχουν *<u>ρόλο αναγνώρισης</u>* εφόσον πρόκειται για αναγνώριση του τριγώνου μέσα σε αυτές και *<u>διδακτικό ρόλο</u>* όσον αφορά στη μέτρηση του ευθ. τμήματος (πλευρά τριγώνου):

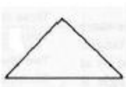
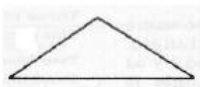
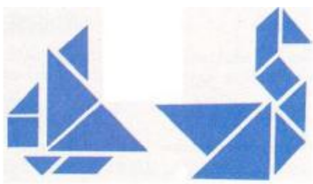
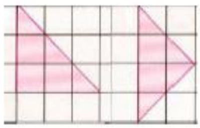
Στη **Γ΄ τάξη** μέσα στις ενότητες:
- Οι γωνίες
- Γεωμετρικά στερεά

Οι παρακάτω παραστάσεις τριγώνων που παίζουν *ρόλο αναγνώρισης* η πρώτη (ο μαθητής καλείται να αναγνωρίσει ποια είναι η ορθή γωνία) και *διδακτικό ρόλο* η δεύτερη (ο μαθητής καλείται να χαρακτηρίσει το σχήμα).

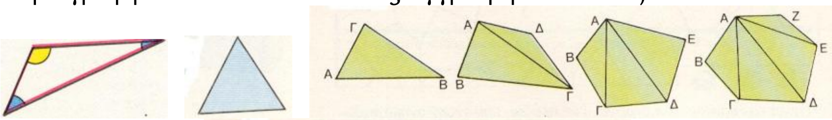
Στη **Δ΄ τάξη** μέσα στις ενότητες:
- Παράλληλες ευθείες, είδη γραμμών, κύκλος
- Συμμετρία
- Μετρούμε την περίμετρο
- Μετρούμε επιφάνειες

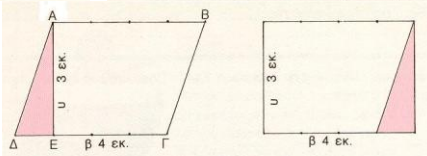
Από τις παρακάτω παραστάσεις η πρώτη, η δεύτερη και η τελευταία παίζουν *διδακτικό ρόλο* (ο μαθητής καλείται να αναγνωρίσει τεθλασμένες και καμπύλες γραμμές και να βρει την περίμετρο στην 1η, στη 2η να βρει και να κατασκευάσει άξονα συμμετρίας και στην τελευταία να βρει πόσα τ. εκατ. εμβαδόν έχει το κάθε σχήμα), η 3η και η 4η παίζουν *ρόλο βοηθητικού σχήματος* (ο μαθητής καλείται να βρει άξονα συμμετρίας στο σύμπλεγμα των σχημάτων).

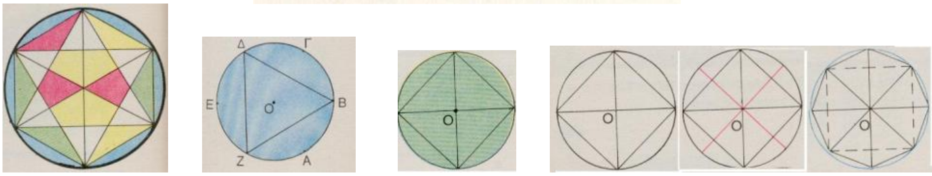





Στην **Ε΄ τάξη** μέσα στις ενότητες:
- Τα παραλληλόγραμμα – Ιδιότητες παραλληλογράμμων
- Άλλα πολύγωνα
- Εμβαδό παραλληλογράμμων
- Εγγραφή κανονικών πολυγώνων σε κύκλο

Οι παρακάτω παραστάσεις τριγώνων παίζουν <u>*διδακτικό*</u> <u>*ρόλο*</u> (στην 1η το τρίγωνο ως το μισό του παραλληλογράμμου, στη 2η ως κανονικό πολύγωνο, στην 3η τρίγωνα ως μέρος του πολυγώνου, στην 4η το εμβαδόν των παραλληλογράμμων και οι υπόλοιπες εγγραφή σε κύκλο).



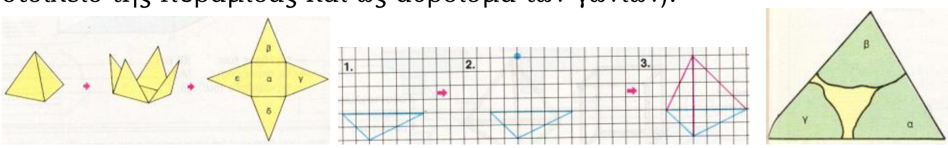




Στη **Στ΄ τάξη** μέσα στις ενότητες:

- Γνωρίσματα των γεωμετρικών στερεών
- Αναπτύγματα επιφανειών γεωμετρικών στερεών
- Πώς κατασκευάζουμε και σχεδιάζουμε τα σχήματα των γεωμετρικών στερεών
- Μετρούμε γωνίες

Οι παρακάτω παραστάσεις τριγώνων που παίζουν <u>*διδακτικό*</u> <u>*ρόλο*</u> (ως δομικό στοιχείο της πυραμίδας και ως άθροισμα των γωνιών).

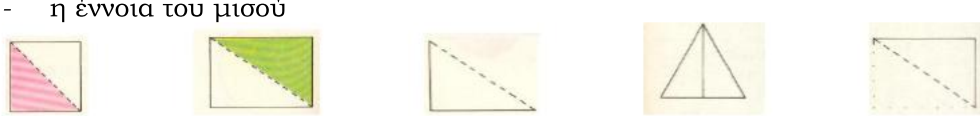


ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΩΣ ΔΟΜΙΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΓΙΑ ΜΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Παραστάσεις τριγώνου χρησιμοποιούνται συχνά ως δομικά στοιχεία άλλων σχημάτων για τη διδασκαλία άλλων μαθηματικών εννοιών εκτός των γεωμετρικών. Συγκεκριμένα στις παραστάσεις αυτές συναντάμε τα τρίγωνα ως στοιχείο κάποιου άλλου γεωμετρικού σχήματος και παίζουν <u>*ρόλο*</u> <u>*βοηθητικού σχήματος*</u> αφού χρησιμοποιούνται για τη διδασκαλία κάποιας άλλης μαθηματικής έννοιας. Παραδείγματα τέτοιων παραστάσεων συναντάμε σε όλες σχεδόν τις τάξεις. Συγκεκριμένα:

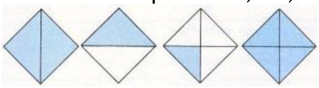
Στην **Α΄ τάξη** μέσα στην ενότητα:

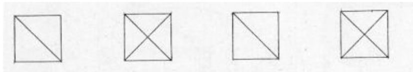
- η έννοια του μισού

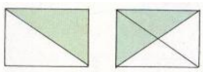


Στη **Β΄ τάξη** μέσα στην ενότητα:

- Τα κλάσματα ½, ¼, 2/4, ¾, και 4/4

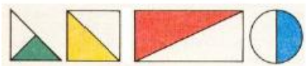


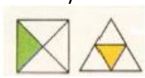


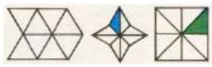


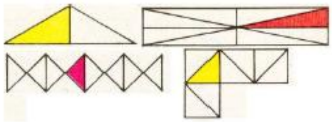
Στη **Γ΄ τάξη** μέσα στην ενότητα:

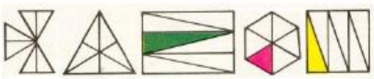
- Τα κλάσματα ½, ¼, 2/4, ¾, και 4/4





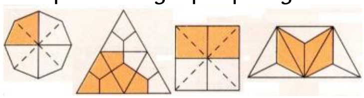






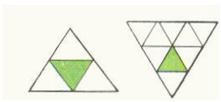
Στη **Δ΄ τάξη** μέσα στην ενότητα:

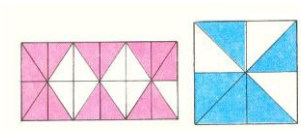
- Πώς δημιουργούμε κλασματικούς αριθμούς



Στην **Ε΄ τάξη** μέσα στις ενότητες:

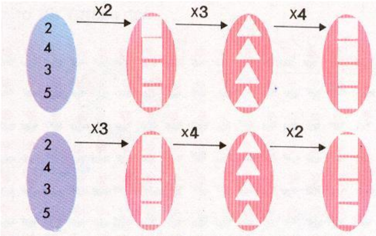
- Οι κλασματικές μονάδες
- Οι κλασματικοί αριθμοί





ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΣΤΗΝ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΑΛΛΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ

Η παράσταση της έννοιας του τριγώνου εκτός από την ενότητα της Γεωμετρίας εμφανίζεται πολύ συχνά και σε άλλες μαθηματικές ενότητες στις μικρές τάξεις του δημοτικού (Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξη). Ο ρόλος των παραστάσεων σε αυτές τις περιπτώσεις είναι *αναγνώρισης* όταν χρησιμοποιούνται βοηθητικά για την εισαγωγή άλλων μαθηματικών εννοιών (ταξινόμηση, ομαδοποίηση ως προς κάποιο χαρακτηριστικό) χωρίς να γίνεται καμία αναφορά στην έννοια και σε ελάχιστες περιπτώσεις *αισθητικός* όταν χρησιμοποιούνται απλά για να διακοσμήσουν το βιβλίο. Σε μία περίπτωση μέσα στην ενότητα «η πράξη του πολλαπλασιασμού» παίζει το *ρόλο πλαισίου:*



Οι παραστάσεις της έννοιας του τριγώνου που συναντάμε στις ενότητες αυτές, τείνουν να έχουν ομοιομορφία (ισόπλευρο τρίγωνο) και να εμφανίζονται πολύ συχνά.
Πιο συγκεκριμένα ο αριθμός ανά παράσταση που συναντάμε σε κάθε τάξη περιγράφεται στον πίνακα 3. Τα τρίγωνα που εικονίζονται τα συναντάμε σε διάφορα χρώματα και διάφορα μεγέθη, αλλά πάντα με τη μορφή του ισοσκελούς σε διάφορες θέσεις. Πιο συγκεκριμένα:

Α΄	429	5	4
Β΄	285	23	0
Γ΄	74	0	0
Δ΄	0	0	0
Ε΄	0	0	0
Στ΄	0	0	0

Πίνακας 3: Ο αριθμός των παραστάσεων της έννοιας του τριγώνου σε άλλες μαθηματικές ενότητες

Συμπεράσματα

Από την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου παρατηρήσαμε ότι οι παραστάσεις που αφορούν στην έννοια του τριγώνου ποικίλουν και εμφανίζονται:

- σε ενότητες που αφορούν στη Γεωμετρία (ως άμεσος στόχο διδασκαλίας ή ως δομικό στοιχείο για άλλες γεωμετρικές έννοιες), αλλά και
- σε ενότητες που δεν αφορούν στη Γεωμετρία (ως δομικό στοιχείο για μη γεωμετρικές έννοιες ή ως βοηθητικό στοιχείο για την εισαγωγή άλλων μαθηματικών εννοιών)

με τη μορφή

- τριγώνου ή
- στοιχείου μέσα σε κάποιο άλλο σχήμα ή σύμπλεγμα.

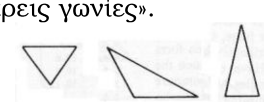
Ο ρόλος που παίζει η εικονική αναπαράσταση εξαρτάται κάθε φορά από την μαθηματική ενότητα μέσα στην οποία εμφανίζεται. Πολύ γενικά μπορούμε να πούμε ότι αν η παράσταση βρίσκεται μέσα σε ενότητα της γεωμετρίας που έχει ως άμεσο στόχο τη διδασκαλία της έννοιας του τριγώνου τότε ο ρόλος της είναι διδακτικός (χρησιμοποιείται κυρίως ως άμεσος στόχος διδασκαλίας). Αν βρίσκεται μέσα σε ενότητα της γεωμετρίας η οποία ασχολείται με τη διδασκαλία άλλων εννοιών εκτός του τριγώνου τότε ο ρόλος της εναλλάσσεται ανάμεσα σε διδακτικό (γίνεται αναφορά στις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά της έννοιας) και ρόλο αναγνώρισης (αναγνώριση ή ανακάλυψη τριγώνων μέσα σε σχήματα ή συμπλέγματα).

Η παράσταση που χρησιμοποιείται για την έννοια του τριγώνου μέσα σε όχι γεωμετρικές ενότητες είναι ουσιαστικά μία. Συγκεκριμένα στις μικρές τάξεις (Α', Β' και Γ' τάξη) χρησιμοποιείται 820 φορές το τρίγωνο με μία και μόνο μορφή εκείνη του ισόπλευρου. Στην κλασσική θέση με τη βάση προς τα κάτω τη συναντάμε 788 φορές και με την κορυφή προς τα κάτω 28 φορές.

Τα τρίγωνα αυτά τα συναντάμε σε μεγάλη ποικιλία χρωμάτων και μεγεθών. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να υποθέσουμε ότι η παράσταση χρησιμοποιείται για να παραστήσει όλα τα τρίγωνα κάτι που δεν είναι σωστό γιατί αυτό το τρίγωνο (ισόπλευρο) είναι συγκεκριμένο και δεν είναι όλα τα τρίγωνα όμοια μεταξύ τους. Αυτό το γεγονός μπορεί να οδηγήσει τα παιδιά στην ταύτιση της παράστασης του ισόπλευρου τριγώνου με την έννοια του τριγώνου.

Ποικιλία στις παραστάσεις συναντάμε στις ενότητες της διδασκαλία της έννοιας του τριγώνου και ακόμα περισσότερο στις ενότητες που το τρίγωνο αποτελεί στοιχείο κάποιου άλλου σχήματος. Στη δεύτερη περίπτωση βέβαια, είναι δύσκολο να παρατηρηθεί η ποικιλία των παραστάσεων από ένα παιδί λόγω του ότι μπλέκονται και άλλες γραμμές που σχετίζονται με τα άλλα σχήματα. Έτσι στην οπτική αντίληψη του μαθητή 'μένουν' οι καθαρές παραστάσεις και ίσως σε αυτό το γεγονός να οφείλεται ότι τα περισσότερα παιδιά είναι εξοικειωμένα με κάποιους μόνο τύπους τριγώνων, όπως:

Ενώ η οπτική αντίληψή τους για τα τρίγωνα συνήθως δεν περιλαμβάνει παραστάσεις όπως οι παρακάτω αν και γνωρίζουν τυπικά ότι το τρίγωνο έχει «τρεις πλευρές ή γραμμές και τρεις γωνίες».



(Hill, 1987)

Εφόσον κριτήριο και παράγοντας αποτελεσματικής γεωμετρικής λειτουργίας είναι η ικανότητα του ατόμου να διατηρεί τη διπλή φύση των γεωμετρικών σχημάτων κατά την επεξεργασίας τους, θα πρέπει να δοθεί μεγάλη προσοχή στην παράσταση της γεωμετρικής έννοιας του τριγώνου. Η παράσταση αυτή δε θα πρέπει να γίνεται μόνο με μια εικόνα, αλλά μέσα από διαφορετικά είδη και θέσεις τριγώνων για να μπορέσει ο μαθητής να συλλάβει την κοινή εσωτερική δομή τους και τα κοινά χαρακτηριστικά τους που θα τον οδηγήσουν στην κατανόηση της έννοιας που αναπαρίσταται και που αποτελεί το αντικείμενο διδασκαλίας.

Βιβλιογραφία

Hill J. (1987) Geometry for Grades K-6 Readings from the Arithmetic Teacher NCTM

Καμπάνη – Ποτουρίδου, Ε. (2003). Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στη λύση μαθηματικών προβλημάτων *Διδακτορική Διατριβή* Ιωάννινα.

Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics.* Routledge NY

Trelinski, G. & Macedonska, L. (2003). Textbooks in mathematics without mathematics. *Conferences abstract CIEAEM 55* Poland

ΥΠΕΠΘ & Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (1987). *Τα μαθηματικά μου Α΄ τάξη δημοτικού* Πρώτο μέρος Ο.Ε.Δ.Β.

---------- (1987). *Τα μαθηματικά μου Α΄ τάξη δημοτικού* Δεύτερο μέρος Ο.Ε.Δ.Β.

---------- (1987). *Τα μαθηματικά μου Β΄ τάξη δημοτικού* Πρώτο μέρος Ο.Ε.Δ.Β.

---------- (1987). *Τα μαθηματικά μου Β΄ τάξη δημοτικού* Δεύτερο μέρος Ο.Ε.Δ.Β.

---------- (1987). *Τα μαθηματικά μου Γ΄ τάξη δημοτικού* Πρώτο μέρος Ο.Ε.Δ.Β.

---------- (1987). *Τα μαθηματικά μου Γ΄ τάξη δημοτικού* Δεύτερο μέρος Ο.Ε.Δ.Β.

---------- (1987). *Τα μαθηματικά μου Δ΄ τάξη δημοτικού* Πρώτο μέρος Ο.Ε.Δ.Β.

---------- (1987). *Τα μαθηματικά μου Δ΄ τάξη δημοτικού* Δεύτερο μέρος Ο.Ε.Δ.Β.

---------- (1987). *Τα μαθηματικά μου Ε΄ τάξη δημοτικού* Πρώτο μέρος Ο.Ε.Δ.Β.

---------- (1987). *Τα μαθηματικά μου Ε΄ τάξη δημοτικού* Δεύτερο μέρος Ο.Ε.Δ.Β.

---------- (1987). *Τα μαθηματικά μου Στ΄ τάξη δημοτικού* Πρώτο μέρος Ο.Ε.Δ.Β.

---------- (1987). *Τα μαθηματικά μου Στ΄ τάξη δημοτικού* Δεύτερο μέρος Ο.Ε.Δ.Β.

Το Διδακτικό Υλικό στο Κεφάλαιο των Πιθανοτήτων της Γ΄ τάξης του Δημοτικού: Τρόπος Κατανόησης και Διαχείρισής του από Μαθητές και Δασκάλους

Χρυσάνθη Σκουμπουρδή & Φραγκίσκος Καλαβάσης
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

1. ΔΙΔΑΚΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ

Τα διδακτικά υλικά, ιδιαίτερα στις μικρές ηλικίες, λειτουργούν ως συστατικά στοιχεία της παραγωγής νοημάτων και της επικοινωνίας που αναπτύσσεται μέσα από τις τυπικές και άτυπες διαδικασίες μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών. Το περιεχόμενο και η μορφή τους υπογραμμίζουν τη σημασία και τα όρια της παραγωγής και της επικοινωνίας των μαθηματικών νοημάτων.

Τα διδακτικά υλικά είναι πολλές φορές φυσικά αντικείμενα, τοποθεσίες χειροπιαστά αντικείμενα, εργαλεία, εικόνες, σχήματα, σύμβολα, λόγος, πηγές πληροφοριών, συνθέσεις των παραπάνω κ.λ.π. και συχνά χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν ιδέες ή διαδικασίες.

Σήμερα ο ρόλος των διδακτικών υλικών στη διδασκαλία των μαθηματικών αναβαθμίζεται όλο και περισσότερο ιδιαίτερα στο δημοτικό σχολείο. Ο λόγος, η εικόνα και το σχήμα είναι τρεις τύποι διδακτικού υλικού που χρησιμοποιούνται ευρύτατα στα σχολικά εγχειρίδια και αποτελούν τρεις διαφορετικούς τρόπους παρουσίασης, μετάδοσης και ανταλλαγής πληροφοριών και γνώσεων γιατί παρουσιάζουν διαφορές ως προς το περιεχόμενό τους, την πληροφοριακή τους δυναμική και τη χρησιμότητά τους. Αυτοί οι τρεις τύποι κατέχουν σημαντικό ρόλο στη μαθηματική εκπαίδευση ως μέσα υποστήριξης της σκέψης, της επικοινωνίας και της μετάδοσης μαθηματικών εννοιών.

Εκτός όμως από τη θετική τους επίδραση, σε μερικές περιπτώσεις η χρήση του λόγου, της εικόνας και του σχήματος μπορεί να έχει και αρνητικά αποτελέσματα, λόγω δυσκολιών που προκαλεί στους μαθητές, όπως η αδυναμία κατανόησης και ερμηνείας τους, η πολυσημία των στοιχείων τους, η προβολή μόνο ορισμένων πτυχών τους κ.α.. Άλλο εμπόδιο αποτελεί το γεγονός ότι πολύ συχνά στα βιβλία χρησιμοποιούνται τα ίδια υλικά για παράσταση ιδεών και διαδικασιών με αποτέλεσμα να δημιουργούνται συγχύσεις στην ανάγνωση, αλλά και την κατανόηση. Τέτοια παραδείγματα συναντάμε πολύ συχνά στα κλάσματα (Ορφανός, 2001), αλλά και στη Θεωρία Συνόλων (Καλαβάσης, 2002).

2. ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Τα αρνητικά αποτελέσματα στη χρήση του διδακτικού υλικού ίσως γίνονται εντονότερα όταν αφορούν μια μαθηματική έννοια όπως είναι οι πιθανότητες η οποία έχει πολλές ιδιαιτερότητες. Οι πιθανότητες είναι ένας σημαντικός και κοινωνικά χρήσιμος κλάδος των μαθηματικών, αλλά έχει πολλές ιδιαιτερότητες και δυσκολίες που προέρχονται κυρίως από το γεγονός ότι η διαίσθηση μπορεί να έρθει σε αντίθεση με την πραγματικότητα. Ένας λόγος για αυτήν την αντίθεση είναι ότι η εμπειρία μας έχει όρια. Άλλος λόγος είναι ότι συχνά ανάλογα με το σκοπό μας, χειριζόμαστε τα γεγονότα με τέτοιο τρόπο ώστε να πάρουμε το επιδιωκόμενο αποτέλεσμα και αυτό έχει πολλές φορές ως συνέπεια να πιστεύουμε ότι η συγκεκριμένη αιτία πάντα θα παράγει το ίδιο αποτέλεσμα (Fischbein, 1997).

Πολλοί ερευνητές αναφέρουν ότι κάποιες από τις λάθος απαντήσεις των παιδιών μπορεί να οφείλονται σε μη κατανόηση της εκφώνησης ή ότι οι απαντήσεις των μαθητών επηρεάζονται από την παρουσίαση, τη σύνταξη, την κατανόηση του θέματος αλλά και την προηγούμενη σχέση τους με τέτοια θέματα (Kahneman et al., 1982). Άλλοι αναφέρουν ότι οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών οφείλονται στην ίδια τη γλώσσα των πιθανοτήτων, αλλά και τη γλώσσα με την οποία παρουσιάζεται το πρόβλημα. Πολύ συχνά οι γλωσσικές παρερμηνείες μπορεί να οδηγήσουν σε λάθος αναπαραστάσεις του προβλήματος (Βοσνιάδου, 1999). Τέλος, άλλες δυσκολίες που μπορεί να προκληθούν, όπως προκύπτει από έρευνα που πραγματοποιήθηκε σε μαθητές του δημοτικού (Σκουμπουρδή & Καλαβάσης 2001), σχετίζονται με την πιθανολογική ορολογία, με τη χρήση άγνωστου για τους μαθητές αντικειμένου (π.χ. ζάρι) ή με την ασάφεια στο λόγο που χρησιμοποιείται για την παρουσίαση της ίδιας της εκφώνησης. Όλα αυτά μαζί, αλλά και το καθένα χωριστά, μπορεί να οδηγήσει σε σύγχυση και σε σφάλματα.

Το διδακτικό υλικό που χρησιμοποιείται στο κεφάλαιο της έννοιας της πιθανότητας στο σχολικό εγχειρίδιο της Γ' τάξης του δημοτικού σχολείου (ένθετο 1) συνδυάζει κείμενο (λόγο), εικόνες, σχήματα και πίνακα προς συμπλήρωση. Πρόθεσή μας στην παρούσα εργασία είναι να διερευνήσουμε τη λειτουργία του διδακτικού αυτού υλικού μέσα από τη μελέτη του τρόπου κατανόησης και διαχείρισής του από μαθητές, αλλά και δασκάλους.

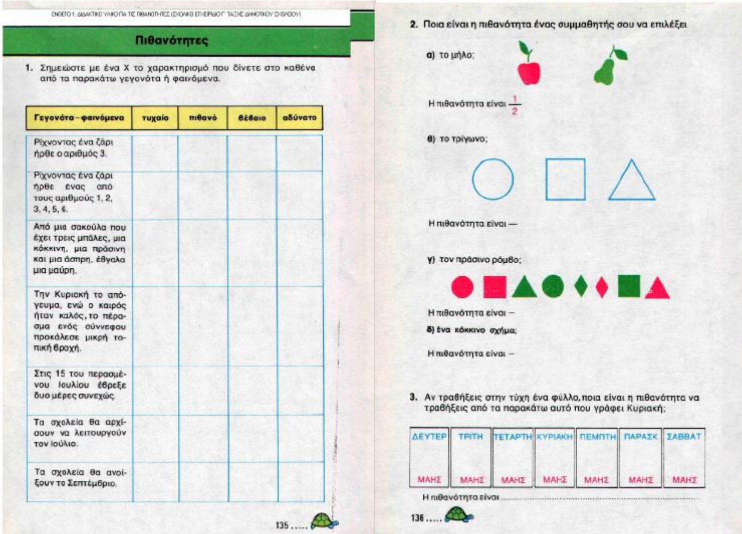
3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Για τη μελέτη του τρόπου κατανόησης και διαχείρισης του διδακτικού υλικού του κεφαλαίου των πιθανοτήτων στο εγχειρίδιο της Γ' τάξης του δημοτικού σχολείου πραγματοποιήθηκε έρευνα σε δύο τμήματα της τάξης αυτής (41 μαθητές), δύο τυπικών δημόσιων δημοτικών σχολείων της πόλης της Ρόδου και σε ένα τμήμα (21 δάσκαλοι) Ακαδημαϊκής και Επαγγελματικής Αναβάθμισης Εκπαιδευτικών Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης με προϋπηρεσία πάνω από 10 χρόνια (όλοι είχαν διδάξει σε τμήμα τρίτης δημοτικού).

Στο πρώτο τμήμα της Γ' τάξης το ερευνητικό υλικό, δόθηκε δύο φορές: μία πριν από τη διδασκαλία της συγκεκριμένης ενότητας από το δάσκαλο της τάξης και μία μετά τη διδασκαλία, ενώ στο δεύτερο τμήμα της Γ' τάξης το ερωτηματολόγιο δόθηκε μόνο μετά από τη διδασκαλία της ενότητας. Αυτό έγινε για να διαπιστωθεί αν βελτιώνεται ο τρόπος διαχείρισής του υλικού μετά τη διδασκαλία.

Υλικό της έρευνας αποτέλεσε το προς μελέτη υλικό όπως παρουσιάζεται, στην ενότητα των πιθανοτήτων, του βιβλίου της Γ' τάξης του δημοτικού σχολείου (ένθετο 1) και για τους μαθητές, αλλά και για τους δασκάλους. Επιπλέον στους δασκάλους τέθηκαν και ανοικτές ερωτήσεις που αφορούσαν στη σημείωση ασαφειών στην εκφώνηση, στον εντοπισμό σημείων που κατά τη γνώμη τους προκαλούν παρανόηση στο μαθητή όπως και στην αναδιατύπωση εκφωνήσεων, όπου θεωρούσαν απαραίτητο. Μετά τη συμπλήρωση του

ερευνητικού εργαλείου ακολούθησε συζήτηση με τους μαθητές και με τους δασκάλους.
Η Γ΄ τάξη του δημοτικού σχολείου, επιλέχθηκε γιατί είναι η μόνη τάξη (του δημοτικού) που περιλαμβάνει στο σχολικό της βιβλίο ενότητα από τη θεωρία των πιθανοτήτων.


ΕΝΘΕΤΟ 1: ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ (ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ)

Πιθανότητες

1. Σημειώστε με ένα Χ το χαρακτηρισμό που δίνετε στο καθένα από τα παρακάτω γεγονότα ή φαινόμενα.

Γεγονότα – φαινόμενα	τυχαίο	πιθανό	βέβαιο	αδύνατο
Ρίχνοντας ένα ζάρι ήρθε ο αριθμός 3.				
Ρίχνοντας ένα ζάρι ήρθε ένας από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6.				
Από μια σακούλα που έχει τρεις μπάλες, μια κόκκινη, μια πράσινη και μια άσπρη, έβγαλα μια μαύρη.				
Την Κυριακή το απόγευμα, ενώ ο καιρός ήταν καλός, το πέρασμα ενός σύννεφου προκάλεσε μικρή τοπική βροχή.				
Στις 15 του περασμένου Ιουλίου έβρεξε δυο μέρες συνεχώς.				
Τα σχολεία θα αρχίσουν να λειτουργούν τον Ιούλιο.				
Τα σχολεία θα ανοίξουν το Σεπτέμβριο.				

135 .....

2. Ποια είναι η πιθανότητα ένας συμμαθητής σου να επιλέξει

α) το μήλο;

Η πιθανότητα είναι $\frac{1}{2}$

β) το τρίγωνο;

Η πιθανότητα είναι —

γ) τον πράσινο ρόμβο;

Η πιθανότητα είναι –

δ) ένα κόκκινο σχήμα;

Η πιθανότητα είναι –

3. Αν τραβήξεις στην τύχη ένα φύλλο, ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξεις από τα παρακάτω αυτό που γράφει Κυριακή;

ΔΕΥΤΕΡ	ΤΡΙΤΗ	ΤΕΤΑΡΤΗ	ΚΥΡΙΑΚΗ	ΠΕΜΠΤΗ	ΠΑΡΑΣΚ	ΣΑΒΒΑΤ
ΜΑΗΣ	ΜΑΗΣ	ΜΑΗΣ	ΜΑΗΣ	ΜΑΗΣ	ΜΑΗΣ	ΜΑΗΣ

Η πιθανότητα είναι ....

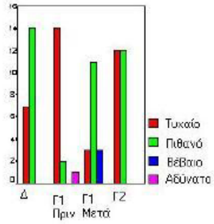
136 .....

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

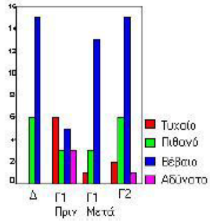
Τα αποτελέσματα της έρευνας παρουσιάζονται σε δύο μέρη:
α) στο πρώτο παρουσιάζονται τα δεδομένα με γραφήματα, κατασκευασμένα με το στατιστικό πρόγραμμα SPSS10.1 και αφορούν στις απαντήσεις των δασκάλων και των μαθητών στις πιθανολογικές δραστηριότητες όπως παρουσιάζονται στο βιβλίο της Γ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου, με σύγκριση και συσχέτιση των απαντήσεών τους.
Τα γραφήματα παρουσιάζουν τις απαντήσεις των δασκάλων και των μαθητών σε καθεμία από τις δραστηριότητες της ενότητας των πιθανοτήτων στο βιβλίο της Γ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου. Στην πρώτη ομάδα ραβδογραμμάτων, του κάθε γραφήματος, παρατίθενται οι απαντήσεις των δασκάλων (Δ), στη δεύτερη και τρίτη ομάδα οι απαντήσεις των μαθητών του πρώτου τμήματος της Γ΄ τάξης πριν (Γ1 πριν) και μετά τη διδασκαλία (Γ1 μετά) και στην τέταρτη ομάδα οι απαντήσεις των μαθητών του δεύτερου τμήματος της Γ΄ τάξης, μετά τη διδασκαλία της ενότητας (Γ2).
και β) στο δεύτερο μέρος της ανάλυσης γίνεται σχολιασμός των απαντήσεων των δασκάλων, στα ανοικτά ερωτήματα που τους τέθηκαν.

α) Η <u>πρώτη δραστηριότητα</u> παρουσιάζεται με λεκτική μορφή και πλαισιώνεται από πίνακα του οποίου η λειτουργία πρέπει να κατανοηθεί για να συμπληρωθεί στη συνέχεια. Ο πίνακας αυτός περιλαμβάνει επτά «γεγονότα – φαινόμενα», λεκτικά διατυπωμένα τα οποία πρέπει να χαρακτηριστούν ως «τυχαία» ή ως «πιθανά» ή ως «βέβαια» ή τέλος ως «αδύνατα».
Όσον αφορά στη δραστηριότητα αυτή, στην οποία χρησιμοποιείται ως διδακτικό υλικό, ο λόγος και ο πίνακας, παρατηρούμε από τα γραφήματα,

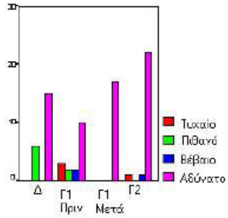
μεγάλη ποικιλία στις απαντήσεις τόσο των μαθητών όσο και των δασκάλων για το ίδιο γεγονός ή φαινόμενο:



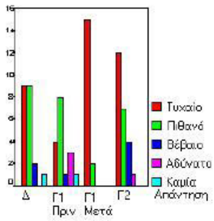
Γράφημα 1



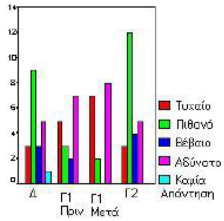
Γράφημα 2



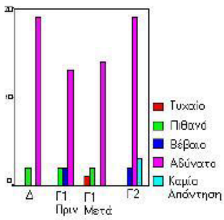
Γράφημα 3



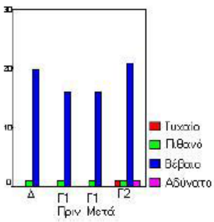
ράφημα 4



Γράφημα 5



Γράφημα 6



Γράφημα 7

Οι απαντήσεις, στο γράφημα 1 («Ρίχνοντας ένα ζάρι ήρθε ο αριθμός 3») κινούνται μεταξύ του 'τυχαίου' και του 'πιθανού'. Στην περίπτωση των δασκάλων και του πρώτου τμήματος μετά τη διδασκαλία (Γ1 Μετά) επικρατεί το πιθανό, ενώ στο ίδιο τμήμα πριν τη διδασκαλία επικρατεί το τυχαίο. Στο δεύτερο τμήμα το πιθανό και το τυχαίο επιλέγονται το ίδιο συχνά. Από τα παραπάνω γίνεται φανερή, η σύγχυση που υπάρχει μεταξύ του όρου 'τυχαίο' και του όρου 'πιθανό'.

Στο γράφημα 2 («Ρίχνοντας ένα ζάρι ήρθε ένας από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6.»), φαίνεται ότι επιλέγεται η σωστή απάντηση από όλους εκτός από τους μαθητές του πρώτου τμήματος πριν τη διδασκαλία της ενότητας (Γ1 Πριν). Ταυτόχρονα υπάρχει ποικιλία απαντήσεων από τους μαθητές, αλλά και από τους δασκάλους. Αυτό μπορεί να οφείλεται σε μη κατανόηση της εκφώνησης αφενός, αλλά και σε δυσκολία που προκαλείται από τις ίδιες τις πιθανολογικές εκφράσεις που χρησιμοποιούνται ή ίσως από την έλλειψη οικειότητας με το ζάρι.

Στο γράφημα 3 («Από μια σακούλα που έχει τρεις μπάλες, μια κόκκινη, μια πράσινη και μια άσπρη, έβγαλα μια μαύρη»), φαίνεται να επικρατεί η σωστή απάντηση που είναι το 'αδύνατο'. Όμως μόνο τα παιδιά μετά τη διδασκαλία τη δίνουν ως μοναδική απάντηση. Στις άλλες ομάδες εμφανίζονται και οι άλλες απαντήσεις. Η ποικιλία των απαντήσεων σε μια τέτοια ερώτηση μπορεί να οφείλεται στον τρόπο παρουσίασής της (λεκτικά), όπου στο κείμενο δε φαίνονται οι έγχρωμες μπάλες που υπάρχουν μέσα στη σακούλα. Ίσως μία εικονική εκφώνηση θα παρουσίαζε με σαφέστερο τρόπο το περιγραφόμενο υλικό χωρίς να αφήνει περιθώρια παρανόησης.

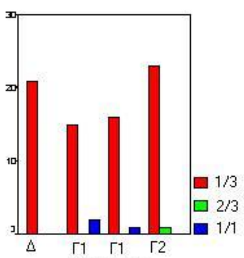
Και στο γράφημα 4 («Την Κυριακή το απόγευμα, ενώ ο καιρός ήταν καλός, το πέρασμα ενός σύννεφου προκάλεσε μικρή τοπική βροχή»), παρουσιάζεται ποικιλία απαντήσεων με επικρατέστερο το 'τυχαίο' και το 'πιθανό' γεγονός. Αυτό ίσως οφείλεται στις χρησιμοποιούμενες πιθανολογικές εκφράσεις αφενός και αφετέρου στο ότι πρόκειται για μία ασαφή ερώτηση όπου δε δίνονται διευκρινήσεις σχετικά με την εποχή του χρόνου και τον τόπο που μπορεί να συμβεί κάτι τέτοιο. Ίσως όλες οι απαντήσεις να πρέπει να θεωρηθούν σωστές, γιατί ο καθένας απαντάει ανάλογα με τις εμπειρίες που έχει (υποκειμενική προσέγγιση).

Στο γράφημα 5 («Στις 15 του περασμένου Ιουλίου έβρεξε δύο μέρες συνεχώς»), υπάρχει επίσης ποικιλία απαντήσεων που ίσως οφείλεται στη φύση της ερώτησης (καιρικά φαινόμενα) και τις χρησιμοποιούμενες πιθανολογικές εκφράσεις, όπως συμβαίνει και με την προηγούμενη ερώτηση. Αναρωτιέται κανείς αν υπάρχει μία απάντηση στο ερώτημα ή η απάντηση καθορίζεται σύμφωνα με τις εμπειρίες του καθενός.

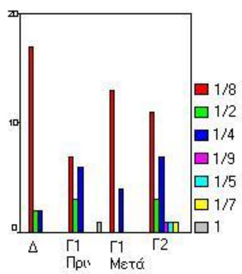
Στο γράφημα 6 («Τα σχολεία θα αρχίσουν να λειτουργούν τον Ιούλιο») θα περίμενε κανείς μία και μόνο απάντηση ('αδύνατο') παρ' όλα αυτά παρουσιάζονται και άλλες απαντήσεις και από τους δασκάλους και από τους μαθητές. Ίσως η βεβαιότητα με την οποία διατυπώνεται η εκφώνηση προκαλεί δυσκολία στην απάντηση.

Τέλος στο γράφημα 7 («Τα σχολεία θα ανοίξουν το Σεπτέμβριο»), οι απαντήσεις είναι πιο ξεκάθαρες και εκφράζουν βεβαιότητα, παρόλο που δε λείπουν και οι άλλες επιλογές ακόμα και στις απαντήσεις των δασκάλων.

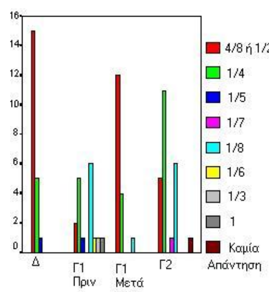
Η <u>δεύτερη δραστηριότητα</u> ζητάει από το μαθητή να βρει ποια είναι η πιθανότητα ένας συμμαθητής του να επιλέξει κάποια/ο από τις εικονιζόμενες εικόνες ή σχήματα (διαφορετικό κάθε φορά). Στην ερώτηση αυτή η λέξη «επιλογή» οδηγεί σε υποκειμενικές απαντήσεις που έχουν να κάνουν με την προτίμηση του συμμαθητή του παιδιού εφόσον η εύρεση της πιθανότητας και η επιλογή είναι δύο ασυμβίβαστα γεγονότα.



Γράφημα 8



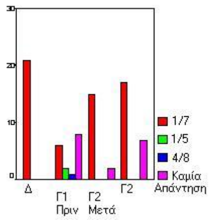
Γράφημα 9



Γράφημα 10

Όσον αφορά στη δραστηριότητα αυτή, στην οποία χρησιμοποιείται ως διδακτικό υλικό, ο λόγος, η εικόνα και το σχήμα, παρατηρούμε από τα γραφήματα, μεγάλη ποικιλία στις απαντήσεις τόσο των μαθητών όσο και των δασκάλων για το ίδιο ερώτημα, εκτός από το γράφημα 8 όπου οι απαντήσεις στην πλειοψηφία τους είναι σωστές και αφορούν στο ερώτημα: «Ποια η πιθανότητα ένας συμμαθητής σου να επιλέξει το τρίγωνο;»
Στο γράφημα 9 («Ποια είναι η πιθανότητα ένας συμμαθητής σου να επιλέξει τον πράσινο ρόμβο;») εκτός από τη σωστή απάντηση (1/8) που επικρατεί, πολύ συχνή είναι και η απάντηση ¼, γιατί είναι 4 τα πράσινα σχήματα («*έβαλα μόνο τα πράσινα*»), αλλά και το ½, γιατί θεωρούν ότι ή θα το πιάσουν ή δε θα το πιάσουν ή «*γιατί είναι δύο ρόμβοι, διαλέγω τον ένα*».
Τέλος, στο γράφημα 10 («Ποια είναι η πιθανότητα ένας συμμαθητής σου να επιλέξει ένα κόκκινο σχήμα;»), φαίνεται ότι υπάρχει μεγάλη ποικιλία στις απαντήσεις με κυρίαρχη τη σωστή απάντηση, τόσο στους δασκάλους όσο και στους μαθητές του πρώτου τμήματος μετά τη διδασκαλία. Στους ίδιους μαθητές πριν τη διδασκαλία και στους μαθητές του δεύτερου τμήματος η απάντηση που κυριαρχεί είναι το ¼, γιατί επηρεάζονται από τα 4 κόκκινα σχήματα, («*μέτρησα μόνο τα κόκκινα*») και το 1/8, γιατί θεωρούν κάποιο συγκεκριμένο κόκκινο σχήμα και όχι γενικά κόκκινο σχήμα («*τα μέτρησα όλα μαζί*»).

Η <u>τρίτη δραστηριότητα</u> ζητάει την πιθανότητα να τραβήξει ο μαθητής μια συγκεκριμένη κάρτα από τις εικονιζόμενες.
Όσον αφορά στη δραστηριότητα αυτή, στην οποία χρησιμοποιείται ως διδακτικό υλικό λόγος και εικόνες (κάρτες), φαίνεται από το γράφημα 11 («Αν τραβήξεις στην τύχη ένα φύλλο, ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξεις από τα παρακάτω αυτό που γράφει Κυριακή;») να επικρατεί η σωστή απάντηση (1/7). Υπάρχουν και περιπτώσεις που δε δίνεται καμία απάντηση από ορισμένα παιδιά. Αυτό οφείλεται στο ότι τα παιδιά μπερδεύονται πολύ με αυτή την ερώτηση λέγοντας συχνά «*δεν καταλαβαίνω τι εννοεί*» *ή* «*δεν καταλαβαίνω τι ζητάει*» *ή* «*θα απλώσω το χέρι μου και θα την πιάσω*». Αντίθετα από αυτό που συμβαίνει με τα παιδιά, αυτή η ερώτηση δε δημιουργεί καμία δυσκολία στους δασκάλους.



Γράφημα 11

β) Οι ανοικτές ερωτήσεις που τέθηκαν προέτρεπαν τους δασκάλους να σημειώσουν τυχόν ασάφειες στην παρουσίαση του συγκεκριμένου διδακτικού υλικού και να προτείνουν τι πρέπει να σχεδιαστεί αντί αυτού.
Οι δάσκαλοι αναφέρουν ασάφειες οι οποίες μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε δύο γενικές κατηγορίες: αυτές που αφορούν στο λόγο και αυτές που αφορούν στα σχήματα και στις εικόνες:
* Ως προς το λόγο (κείμενο) που χρησιμοποιείται:

i) <u>για τις πιθανολογικές εκφράσεις</u>, οι δάσκαλοι αναφέρουν ότι οι όροι 'τυχαίο' και 'πιθανό', προκαλούν σύγχυση και προβληματισμό: «*γιατί είναι ασαφείς για το μαθητή*» ή «*γιατί οι μαθητές δε γνωρίζουν τη λεπτή διαφορά μεταξύ τους, άρα δημιουργεί ασάφεια*» ή «*γιατί είναι δύσκολο να καταλάβει (ο μαθητής) τη διαφορά ανάμεσα στις έννοιες 'πιθανό'/ 'τυχαίο'*».
Προτείνουν να υπάρξει μια διαφορετικού είδους ομαδοποίηση των πιθανολογικών εκφράσεων: «*να αντικατασταθεί το τυχαίο μόνο από το πιθανό (γεγονός που ίσως συμβεί)*» ή «*να επιλεγεί η μία από τις δύο*» ή «*θα μπορούσα να βγάλω τη λέξη τυχαίο και να τεκμηριώσω την άποψή μου πως κάποιο πιθανό γεγονός είναι και τυχαίο*»
ii) <u>για τα παραδείγματα</u>, αναφέρουν ότι χρειάζονται περισσότερες διευκρινήσεις τα παραδείγματα με τον καιρό και με τα σχολεία: *«να αναφέρονται πιο συγκεκριμένα στοιχεία που αφορούν στο μήνα ή στην εποχή του χρόνου που συμβαίνει αυτό»* ή *«πολύ πιθανό στην Ελλάδα, για κάποιο λόγο, να προταθεί να ανοίξουν τα σχολεία τον Ιούλιο ποτέ δεν ξέρεις»*
* Ως προς τα σχήματα και τις εικόνες:
Αναφέρουν την ανυπαρξία συνάφειας μεταξύ του τι περιγράφεται και του τι εικονίζεται: «*ενώ το βιβλίο δείχνει ροζ σχήματα, η ερώτηση αναφέρεται σε κόκκινα*», «*ενώ όλες οι κάρτες είναι στη σειρά τους η ζητούμενη κάρτα βρίσκεται αλλού … και δε γίνεται φανερό τι σκοπό εξυπηρετεί αυτό*».
Προτείνουν να αντικατασταθεί η έκφραση «ένα κόκκινο σχήμα» με την έκφραση «*ένα ροζ σχήμα*» ή «*να χωριστούν τα σχήματα κατά χρώματα*» και γενικά να υπάρχει απόλυτη συνάφεια μεταξύ κειμένου και εικόνας γιατί διαφορετικά προκαλείται σύγχυση στο παιδί. Αναφέρουν ότι πρέπει να υπάρξει μεγαλύτερη ποικιλία υλικού που ίσως σε κάποιες περιπτώσεις να είναι χειροπιαστό για να μπορεί ο μαθητής να έρθει σε άμεση επαφή μ' αυτό για να απαντήσει.
Άλλες ασάφειες προκύπτουν έμμεσα από τις απαντήσεις των ίδιων των δασκάλων στα ερωτήματα. Όταν στην προτροπή για κατηγοριοποίηση του «ρίχνοντας ένα ζάρι ήρθε ένας από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6» απαντούν κάποιοι δάσκαλοι αντί 'βέβαιο', 'πιθανό', αυτό σημαίνει ότι ίσως η εκφώνηση δε γίνεται κατανοητή, ενώ στα σχόλια τους φαίνεται να είναι σαφής. Το ίδιο μπορούμε να υποθέσουμε και για το «από μια σακούλα που έχει τρεις μπάλες, μία κόκκινη, μία πράσινη και μία άσπρη, έβγαλα μία μαύρη» και «τα σχολεία θα αρχίσουν να λειτουργούν τον Ιούλιο» όπου αντί για 'αδύνατο' θεωρείται από κάποιους 'πιθανό'. Ίσως πάλι το 'πιθανό' να χρησιμοποιείται σύμφωνα με την «αρχή της ανεπαρκούς αιτίας», που ο οικονομολόγος John Maynard Keynes τη μετονόμασε σε «αρχή της αδιαφορίας». Σύμφωνα με αυτή την αρχή, αν δεν έχουμε βάσιμους λόγους για να υποστηρίξουμε ότι ένα γεγονός είναι αληθές ή ψευδές, τότε δίνουμε 50% σε κάθε εκδοχή.

5. Συμπεράσματα

Η εικόνα, το σχήμα και ο λόγος είναι τρία από τα διδακτικά υλικά που χρησιμοποιούνται ευρύτατα στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου για την παρουσίαση πληροφοριών και γνώσεων όπως επίσης και ως μέσα υποστήριξης της σκέψης, της επικοινωνίας και της μετάδοσης μαθηματικών εννοιών.

Η χρήση των διδακτικών αυτών υλικών δεν εξασφαλίζει από μόνη της τη σωστή πορεία για την επίτευξη του αποτελέσματος, που στην περίπτωσή μας είναι η εκπαίδευση των μαθητών στα μαθηματικά. Η αποτελεσματική χρήση τους προϋποθέτει τον κατάλληλο εκπαιδευτικό σχεδιασμό για το τι διδακτικό υλικό είναι κατάλληλο για κάθε μαθηματική ενότητα, αλλά και για κάθε ηλικιακή ομάδα. Πολλές φορές η χρήση του λόγου, της εικόνας και του σχήματος μπορεί να έχει και αρνητικά αποτελέσματα λόγω δυσκολιών που προκαλεί στους μαθητές, όπως η αδυναμία κατανόησης και ερμηνείας τους, η πολυσημία των στοιχείων τους, η προβολή μόνο ορισμένων πτυχών τους, η ασυμφωνία μεταξύ λόγου και εικόνας ή λόγου και σχήματος ή ακόμα και η χρήση τους σε μια μαθηματική έννοια με πολλές ιδιαιτερότητες, όπως είναι οι πιθανότητες.

Οι παραπάνω προβληματισμοί μας οδήγησαν να διερευνήσουμε τον τρόπο κατανόησης και διαχείρισης του διδακτικού υλικού στο κεφάλαιο των πιθανοτήτων της Γ΄ τάξης του δημοτικού, από μαθητές και δασκάλους.

Παρατηρήσαμε ότι χρησιμοποιείται ποικίλο διδακτικό υλικό (λόγος, εικόνα, σχήμα) για την παρουσίαση των πιθανοτήτων στο σχολικό εγχειρίδιο της Γ΄ δημοτικού. Από τις διαφορετικές απαντήσεις όμως που δίνονται για το ίδιο ερώτημα, υποθέτουμε είτε ότι δεν είναι το κατάλληλο υλικό για την εισαγωγή της έννοιας στα παιδιά αυτής την ηλικίας είτε ότι δεν παρουσιάζεται με τον κατάλληλο τρόπο και άρα δεν έχει το επιδιωκόμενο αποτέλεσμα.

Παρατηρείται από τα αποτελέσματα της έρευνας ότι υπάρχουν προβλήματα στην κατανόηση του συγκεκριμένου διδακτικού υλικού και από τους μαθητές και από τους δασκάλους. Τα προβλήματα αυτά έχουν κυρίως να κάνουν με το λόγο: ως προς τις χρησιμοποιούμενες πιθανολογικές εκφράσεις και ως προς τα παραδείγματα που παρατίθενται όπως επίσης και με τα σχήματα και τις εικόνες: ως προς τη συνάφειά τους με το κείμενο, ως προς τον τρόπο διάταξής τους και ως προς την ποικιλία τους.

6. Βιβλιογραφία

Βοσνιάδου, Σ. (1999). *Η Ψυχολογία των Μαθηματικών* Gutenberg Ψυχολογία.

Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). *The Evolution With Age of Probabilistic, Intuitively Based Misconceptions.* Journal for Research in Mathematics Education Vol. 28, No 1.

Kahneman, D, Slovic, P., & Tversky (1982). A. *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. New York: Cambridge University Press.

Καλαβάσης Φ. & Σκουμπουρδή, Χ. (2002). Κριτικές επισημάνσεις για τη χρήση των συνόλων στο νηπιαγωγείο και στις μικρές τάξεις του δημοτικού σχολείου. *Περιοδικό Γέφυρες.*

Ορφανός, Σ. & Καλαβάσης Φ. (2001). Παρανοήσεις που οφείλονται στις αναπαραστάσεις, κριτήρια αποτελεσματικότητας και πρόταση για ένα αναπαραστατικό σύστημα για τα κλάσματα. *Πρακτικά 18ου ΕΜΕ Ρόδος.*

Σκουμπουρδή, Χ. & Καλαβάσης, Φ. (2001). Απόψεις παιδιών του δημοτικού σχολείου για την έννοια της πιθανότητας και ο βαθμός κατανόησης του τρόπου παρουσίασης των προβλημάτων. *Πρακτικά 18ου ΕΜΕ Ρόδος.*

Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (1987) *Τα Μαθηματικά μου Γ΄ τάξη δημοτικού* Δεύτερο Μέρος Ο.Ε.Δ.Β.

ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙΙ

Εικόνα, σχήμα και λόγος στα μαθηματικά: Ιστορικά ζητήματα

Οι Δρόμοι Του Ημιτόνου: Από τη Βενετία στη νεοελληνική παιδεία και πίσω στην Βυζαντινή παράδοση

Γιάννης Θωμαΐδης — *Πειραματικό Σχολείο Πανεπιστημίου Μακεδονίας*

Νίκος Καστάνης — *Τμήμα Μαθηματικών Α.Π.Θ.*

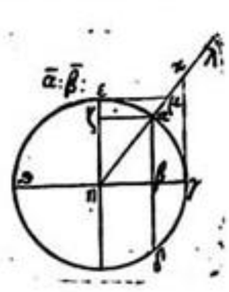
Η εισαγωγή του τριγωνομετρικού λόγου στη νεοελληνική παιδεία

Το 1749 εκδόθηκε στο τυπογραφείο του Αντωνίου Βόρτολι (Antonio Bortoli) της Βενετίας το τρίτομο μαθηματικό έργο, με τίτλο *ΟΔΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ*. Η έκδοση αυτή αποτελεί ένα σταθμό στην ιστορία της νεοελληνικής μαθηματικής παιδείας. Κι αυτό γιατί για πρώτη φορά έγιναν προσιτά, με το συγκεκριμένο έργο, στον ελληνικό μορφωτικό χώρο της μεταβυζαντινής εποχής μια σειρά από μαθηματικά θέματα, όπως π.χ. οι Λογάριθμοι και η Τριγωνομετρία. Παράλληλα επανεισήγαγε λησμονημένες μαθηματικές θεωρίες, όπως π.χ. η Γεωμετρία του Ευκλείδη. Το σημαντικότερο, όμως, δεν ήταν η συμβολή του στη διεύρυνση των μαθηματικών γνώσεων, αλλά το άνοιγμα ενός νέου μαθηματικού λόγου στη νεοελληνική παιδεία. Ήταν δηλαδή η αφετηρία ενός νέου μαθηματικού ιδεώδους, ενός νέου είδους μαθηματικής κατανόησης και μιας νέας μαθηματικής γλώσσας.

Το έργο αυτό δεν ήταν πρωτότυπο, αλλά μια επιλεκτική παράφραση από μια σχετική λατινική έκδοση. Σίγουρα δεν αντιπροσώπευε την πρωτοπορία των Μαθηματικών της εποχής εκείνης, ούτε υπήρχε περίπτωση να ήταν αυτής της κατηγορίας. Για την νεοελληνική παιδεία, ωστόσο, ήταν ένα καινοφανές άνοιγμα του μαθηματικού ορίζοντά της. Κι αυτό γιατί πρώτη φορά εισάγονται στην καθ' ημάς Ανατολή μια σειρά από νέες μαθηματικές έννοιες, θεωρίες και τεχνικές, που είχαν αναπτυχθεί στο Ισλάμ, το Μεσαίωνα και στη Δυτική Ευρώπη, την περίοδο της Αναγέννηση και του 17^{ου} αιώνα. Μια από τις πιο ενδιαφέρουσες διαστάσεις αυτής της μαθηματικής συμβολής στην πενιχρή, τότε, παιδεία των σκλαβωμένων ελλήνων ήταν η προσπάθεια προσαρμογής της ξενόφερτης ορολογίας στον ελληνικό μαθηματικό λόγο. Μια προσπάθεια που σε κάποιες περιπτώσεις ήταν αρκετά εύκολη, όπως π.χ. οι όροι της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, ενώ σε κάποιες άλλες ήταν αρκετά δύσκολη και απαιτούσε μια δημιουργική παρέμβαση. Σ' αυτή τη δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνονταν όλες οι νέες μαθηματικές γνώσεις που δεν είχαν αναπτυχθεί στον αρχαίο ελληνικό πολιτισμό και κατά συνέπεια δεν προϋπήρχε η αντίστοιχη σημασιολογική υποδομή. Το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτού του είδους, για την *ΟΔΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ*, ήταν η Τριγωνομετρία. Αξίζει λοιπόν η εξέταση της συμπεριφοράς του συγκεκριμένου έργου στη γλωσσική και μαθηματική αντιμετώπιση των βασικών τριγωνομετρικών όρων και ιδιαίτερα στον πρώτο εξ αυτών ως μια όψη της νεοελληνικής προσοικείωσης των νέων μαθηματικών γνώσεων.

Η Τριγωνομετρία εισάγεται στον δεύτερο τόμο της *ΟΔΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ* και συγκεκριμένα από τη σελίδα 393 και πέρα. Οι πρώτοι τριγωνομετρικοί όροι παρουσιάζονται ως εξής:

Trigon. Lib. 1. Fig. 2.



Θʹ: Ἡμίτονον ἐστὶν ἡ ἡμίσεια ὑποτεινούσης διπλασίου τόξου, ὡς ἡ αβ. Ἡμίτονον λέγεται τοῦ αγ, τόξου, ὅτι ἡμίσειά ἐστι τῆς αδ, ὑποτεινούσης τοῦ αγδ, τόξου διπλασίου τοῦ αγ. ἐστὶ δὲ τῶν ἡμιτόνων τὸ μὲν Ὀρθὸν, τὸ δὲ Πλάγιον, καὶ τοῦ ὀρθοῦ αὖθις τὸ μὲν Ὁλικὸν λέγεται, τὸ δὲ τοῦ τόξου, τὸ δὲ τοῦ παραπληρώματος.

Ιʹ: Ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστιν εὐθεῖα γραμμὴ ἐλάττων τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ κύκλου, πρὸς ὀρθὰς ἀπό τινος σημείου τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου ἀγομένη, ὡς ἡ αβ.

ΙΑʹ: Πλάγιον Ἡμίτονόν ἐστιν εὐθεῖά τις γραμμὴ ἐναπολαμβανομένη μεταξὺ τοῦ ὀρθοῦ Ἡμιτόνου, καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ὡς ἡ βγ, καὶ εζ· καλεῖται δὲ τὸ Πλάγιον Ἡμίτονον καὶ οἰστός.

ΙΒʹ: Ὁλικὸν Ἡμίτονόν ἐστιν ὀρθὸν Ἡμίτονον τεταρτημορίου, αὐτὴ δηλ: ἡ ἡμιδιάμετρος, οἷον ἡ εη. Ὁλικόν ἐστιν Ἡμίτονον τοῦ τε εαγ, τεταρτημορίου καὶ τοῦ εθ, διὸ καὶ μέγιστόν ἐστι τῶν λοιπῶν πάντων Ἡμιτόνων.

ΙΓʹ: Τόξου Ἡμίτονον ἐστὶν ὀρθὸν Ἡμίτονον ἐλάττονος ἢ μείζονος τόξου τοῦ τεταρτημορίου, ὡς τὸ αβ, ὅπερ Ἡμίτονον λέγεται τοῦ τε αγ, τόξου ἐλάττονος τοῦ εαγ, τεταρτημορίου, καὶ τοῦ αεθ, μείζονος τοῦ εθ, τεταρτημορίου. τὸ δὲ τοῦ τόξου Ἡμίτονον λέγεται καὶ τῆς γωνίας, ἧς τὸ τόξον μέτρον ἐστί. τὸ γὰρ αβ, Ἡμίτονον τοῦ αγ, τόξου, λέγεται ὅτι Ἡμίτονον τῆς τε ὑπὸ γηα, καὶ ὑπὸ αηθ, γωνίας.[1]

Παρατηρείται ότι ο όρος που ορίζεται αρχικά είναι το *ημίτονο*. Τι πιο φυσικό, θα σημειώσει ένας σημερινός μαθητής της δευτεροβάθμιας ελληνικής εκπαίδευσης. Και όλοι μας θα συμφωνήσουμε, γιατί έχουμε δεχθεί την ανάλογη μαθηματική παιδεία. Πόσο φυσικό όμως ήταν εκείνη την εποχή;
Η αλήθεια είναι ότι τότε, για πρώτη φορά, δημοσιοποιήθηκε ο όρος αυτός στη νεοελληνική παιδεία, διαμέσου της έκδοσης του συγκεκριμένου έργου. Και το σημαντικότερο, από τότε καθιερώθηκε στην ελληνική μαθηματική ορολογία. Δύο πολύ χαρακτηριστικές εκφάνσεις αυτής της καθιέρωσης είναι: 1) Η χρήση του ίδιου όρου στο βιβλίο *ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΑΙ ΑΙ ΑΡΧΟΕΙΔΕΣΤΑΤΑΙ* (Λειψία 1767), που μετάφρασε ο Ευγένιος Βούλγαρης (1716-1806) από το έργο του Johann Segner (1704-1777), γεγονός που μπορεί να διαπιστωθεί στο εξής απόσπασμα της σελίδας 363:

[1] Βλ. *ΟΔΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ Τόμος δεύτερος*,…Ενετίησιν Έτει τω Σωτηρίω ,αψμθʹ (1749), Εν τη Τυπογραφία Αντωνίου του Βόρτολι, σελ. 394.

ΤΜΗΜΑ ΤΡΙΤΟΝ.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΕΠΙΠΕΔΟΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 816.

Ἐὰν ἐπὶ κύκλου περιφερείας, ἧς διάμετρος μὲν ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, τόξον ληφθῇ ὁποῖον δήποτε ἀρχόμενον μὲν ἀπὸ τοῦ Α, ἐπὶ δὲ τὸ Δ ἐκπερατούμενον· ἀπὸ δὲ τοῦδε τοῦ κατὰ τὸ τόξον πέρατος Δ, κάθετος ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἀχθῇ ἡ ΔΕ, αὕτη δὴ ἡ ΔΕ Ἡμίτονον καλεῖται τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΔ, καὶ τῆς γωνίας ὡσαύτως, τῆς ὑπὸ τοῦ τόξου καταμετρουμένης.

2) Η αξιοποίηση του ίδιου όρου στον πρώτο τόμο του βιβλίου *ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΦΥΣΙΚΗΣ* (Λειψία, 1766) του Νικηφόρου Θεοτόκη (1731-1800), όπως παρατηρείται στο απόσπασμα της σελίδας 167:

§. 280. Ἡ Δύναμις Λ ἡ Παράλληλον ἔχουσα τὴν Φορὰν τῷ Κεκλιμένῳ Ἐπιπέδῳ λόγον ἔχει πρὸς τὸ Βάρος τοῦ παρ' αὐτῆς κατεχομένου Σώματος Δ, ὃν τὸ Ὀρθὸν Ἡμίτονον τῆς Κλίσεως τοῦ Ἐπιπέδου, πρὸς τὸ ὅλον Ἡμίτονον.

Ο συγκεκριμένος τριγωνομετρικός όρος, ωστόσο, δεν εμφανίστηκε στιγμιαία και ακλόνητα στον επιστημονικό ελληνικό λόγο. Είχε προϊστορία και μάλιστα πέρασε μια μακρά ιστορική περίοδο αμφιταλάντευσης. Πρόκειται για μια ενδιαφέρουσα ιστορική δυστοκία μιας εξωσωματικής γονιμοποίησης. Με άλλα λόγια μια πολύχρονη προσπάθεια σημασιολογικής προσαρμοστικότητας ενός γλωσσικά ετερογενούς μαθηματικού όρου στην ελληνική μαθηματική παιδεία.

Με τις επισημάνσεις αυτές, δύο ιστορικά ερωτήματα μπορούν να δημιουργηθούν άμεσα: 1) Ποιος ήταν ο εισηγητής του όρου ημίτονο στην ελληνική γλώσσα; Και πότε πρωτοπαρουσιάζεται σε ιστορική μαρτυρία; 2) Ποια ήταν η προηγούμενη ελληνική απόδοση του συγκεκριμένου όρου; Έτσι προκαλείται μια αναδρομή στο ιστορικό εκείνο στάδιο της αντικατάστασης μιας παλαιότερης και σημασιολογικά ασύμβατης ονομασίας του εν λόγω τριγωνομετρικού όρου με τη νεότερη και σημασιολογικά πρόσφορη ονοματοθεσία του. Μια αναδρομή που αποτυπώνει τη συγκεκριμένη γλωσσική εξέλιξη, αλλά σηματοδοτεί και την αντίστοιχη αλλαγή της νεοελληνικής μαθηματικής συμπεριφοράς στο πρώτο μισό του 18^{ου} αιώνα. Το ζητούμενο, λοιπόν, δεν είναι μόνο η χρονική και προσωπογραφική καταγραφή των σχετικών επιλογών, αλλά και η ανάδειξη των διαφορετικών επιστημονικών προθέσεων και προσανατολισμών.

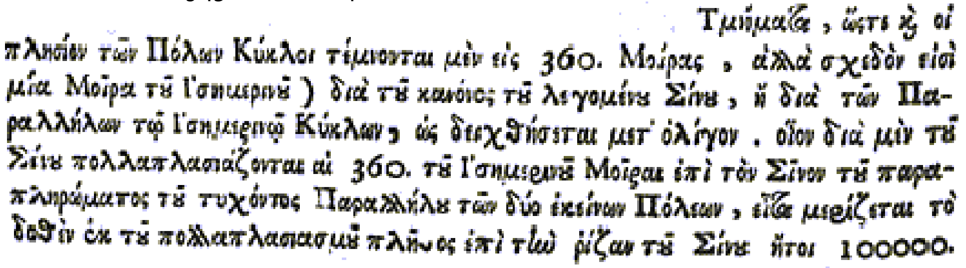
Πριν επιχειρηθεί μια ιστορική αναδρομή του συγκεκριμένου τριγωνομετρικού όρου θα πρέπει να σημειωθεί ότι η *ΟΔΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ* εκδόθηκε με την επιμέλεια του Μπαλάνου Βασιλόπουλου (1694-περ.1760), ο οποίος

στηρίχθηκε στο υλικό της αντίστοιχης διδασκαλίας του Μεθόδιου Ανθρακίτη (περ.1650/1660-περ.1736). Κατά συνέπεια η παρουσία του όρου ημίτονο στην *ΟΔΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ* μπορεί να οφείλεται στον Μπαλάνο Βασιλόπουλο, ο οποίος έδειξε μια "ελληνοκεντρική" συμπεριφορά στις μαθηματικές του προτιμήσεις. Δεν αποκλείεται η στάση του αυτή να προκάλεσε την ελληνοποίηση και τη σημασιολογική αποκατάσταση του νοηματικά άστοχου όρου *sinus* που είχε καθιερωθεί στα λατινικά και σε όλες τις λατινογενείς γλώσσες από το 12ο αιώνα. Αξίζει να αναφερθεί ότι η λέξη ημίτονο εκφράζει στην κυριολεξία τον μισό τόνο και ο τόνος (όπως και η υποτείνουσα) προέρχεται από το ρήμα τείνω, που ένα παραγόμενο ουσιαστικό του θα σημαίνει: κάθε τι με το οποίο τείνεται κάτι, δηλαδή έχει μια σημασία ανάλογη με τη λέξη χορδή (όπως χορδή μουσικού οργάνου ή πολεμικού τόξου).[2]
Αν και το ενδεχόμενο της συγκεκριμένης παρέμβασης από τον Μπαλάνο Βασιλόπουλο έχει κάποια βάση, ωστόσο η ιστορική προτεραιότητα και ο πρωταρχικός ρόλος του Μεθόδιου Ανθρακίτη στην επιλογή και προώθηση του περιεχομένου της *ΟΔΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ* στο χώρο της νεοελληνικής παιδείας, από τη δεκαετία του 1710, αποτελούν ισχυρότερα τεκμήρια για την πατρότητα της εν λόγω μεταφραστικής πρωτοβουλίας. Σε συνδυασμό, μάλιστα, με το γεγονός ότι ο όρος ημίτονο καταγράφεται στο χειρόγραφο *ΣΥΝΟΨΙΣ ΑΚΡΙΒΕΣΤΑΤΗ ΤΩΝ ΕΝ ΤΗ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΩΓΡΑΦΙΑ ΧΡΗΣΙΜΩΤΕΡΩΝ*[3], του 1732, από τις παραδόσεις του Ανθρακίτη, ενισχύεται σημαντικά (έως πιστοποιείται) η θέση ότι αυτός είχε τον πρωταρχικό ρόλο στο συγκεκριμένο θέμα.
Ο Ανθρακίτης ήταν ένας από τους σημαντικότερους δασκάλους του Γένους. Έδωσε μια ισχυρή ώθηση στη νεοελληνική μαθηματική παιδεία και έλαμψε στο μικρό κύκλο των μορφωμένων ελλήνων του πρώτου μισού του 18ου αιώνα. Αξίζει να επισημανθεί ότι η είσοδος του Ανθρακίτη σ' αυτόν τον μικρό κύκλο οφείλεται στον Χρύσανθο Νοταρά (1663;-1731), Πατριάρχη Ιεροσολύμων και εξέχουσα, τότε, προσωπικότητα των ελληνικών γραμμάτων. Ο Χρύσανθος Νοταράς ήταν αυτός που του έδωσε τη δυνατότητα να έρθει, αρχικά, στην Ήπειρο, από τη Βενετία όπου ζούσε, για να διδάξει Μαθηματικά και Φιλοσοφία. Ο ίδιος επίσης τον βοήθησε να αναπτύξει, στη συνέχεια, την εκπαιδευτική του δραστηριότητα στη Δυτική Μακεδονία και τον συμπαραστάθηκε στις δύσκολες ώρες των διωγμών του. Και το πατρονάρισμα αυτό δεν έγινε στο πνεύμα κάποιας χαριστικής ή συγγενικής εξυπηρέτησης, αλλά οφείλονταν στην αναγνώριση της επιστημονικής και φιλοσοφικής του κατάρτισης και ικανότητας. Μια αναγνώριση που στηρίζονταν στην προσωπική εκτίμηση του Χρύσανθου Νοταρά ως καλλιεργημένου και επιστημονικά μορφωμένου ανθρώπου.
Αυτή η επιστημονική συσχέτιση του Μεθόδιου Ανθρακίτη με τον Χρύσανθο Νοταρά δημιουργεί ένα ενδεχόμενο: ο όρος ημίτονο να χρησιμοποιήθηκε ή και να προέρχεται από τον φωτισμένο Πατριάρχη Ιεροσολύμων. Πρόκειται για μια υπόνοια όχι ανεδαφική, γιατί ο μορφωμένος ιεράρχης μελέτησε και ασχολήθηκε συστηματικά με την Αστρονομία, η οποία αξιοποιούσε στο

[2] Βλ. Θωμαΐδη, Γ., Καστάνη, Ν. : Η Εισαγωγή του Όρου "Ημίτονο" στη Νεοελληνική Μαθηματική Ορολογία, *Ενημερωτικό Φυλλάδιο του Ομίλου για την Ιστορία των Μαθηματικών*, τεύχος 10, 1989, σελ. 10-14, ειδ. σελ. 13.
[3] Βλ. Εθνική Βιβλιοθήκη της Ελλάδος, χειρόγραφο Νο 1247, Μέρος Α΄, φύλλο 132α.

έπακρο, την εποχή εκείνη, τις τριγωνομετρικές γνώσεις και μεθόδους. Το αξιόλογο, λοιπόν, αστρονομικό έργο του Νοταρά: *ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΑ ΓΕΩΓΡΑΦΙΚΑ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΙΚΑ* (Παρίσι, 1716) πρέπει να εξεταστεί σχετικά με το τριγωνομετρικό του λεξιλόγιο και ειδικότερα με τον όρο ημίτονο.

Μια προσεχτική ανίχνευση του συγκεκριμένου βιβλίου θα εντοπίσει στη σελίδα 110 το εξής απόσπασμα:



Τμήματα, ὥστε καὶ οἱ
πλησίον τῶν Πόλων Κύκλοι τέμνονται μὲν εἰς 360. Μοίρας, ἀλλὰ σχεδὸν εἰσὶ
μία Μοῖρα τοῦ Ἰσημερινοῦ) διὰ τοῦ κανόνος τοῦ λεγομένου Σίνου, ἢ διὰ τῶν Πα-
ραλλήλων τῷ Ἰσημερινῷ Κύκλων, ὡς δειχθήσεται μετ᾽ ὀλίγον. οἷον διὰ μὲν τοῦ
Σίνου πολλαπλασιάζονται αἱ 360. τοῦ Ἰσημερινοῦ Μοῖραι ἐπὶ τὸν Σίνον τοῦ παρα-
πληρώματος τοῦ τυχόντος Παραλλήλου τῶν δύο ἐκείνων Πόλεων, εἶτα μερίζεται τὸ
δοθὲν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πλῆθος ἐπὶ τὴν ῥίζαν τοῦ Σίνου ἤτοι 100000.

Και χωρίς δυσκολία μπορεί να διαπιστωθεί ότι παρουσιάζεται ο όρος *Σίνος* τέσσερις φορές. Ο όρος αυτός επανεμφανίζεται στις αμέσως επόμενες σελίδες, ενώ πουθενά δεν υπάρχει η λέξη ημίτονο. Έτσι παρατηρείται ότι ο Νοταράς δεν προσπάθησε να προσαρμόσει το συγκεκριμένο όρο στην ελληνική γλώσσα, απλά ελληνοποίησε τον λατινικό όρο *sinus*. Γεγονός που φανερώνει μια αντιδιαμετρική στάση σε σχέση μ’ αυτή του Ανθρακίτη. Παράλληλα εδραιώνεται η πατρότητα του όρου ημίτονο στον πρωτοπόρο δάσκαλο του Γένους.

Αυτή η πολύ διαφορετική συμπεριφορά του Νοταρά από την αντίστοιχη στάση του Ανθρακίτη στο συγκεκριμένο ζήτημα δεν πρέπει να είναι άσχετη με το διαφορετικό χαρακτήρα της επιστημονικής τους δραστηριότητας. Ο πρώτος ασχολήθηκε με την επιστήμη “ατομοκεντρικά”, ως ένας φιλομαθής. Δεν ανάπτυξε δημόσια επιστημονική δραστηριότητα. Έτσι η *ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΑ ΓΕΩΓΡΑΦΙΚΑ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΙΚΑ* δεν γράφτηκε για διδακτικούς σκοπούς, ούτε είχε ερευνητικό προορισμό. Ήταν, μάλλον, μια λόγια επιστημονική παρουσίαση κάποιων σύγχρονων γεωγραφικών και αστρονομικών δεδομένων, συνυφασμένων με τη νεοελληνική ορθολογικότητα της εποχής εκείνης. Αντίθετα το έργο του Ανθρακίτη ήταν καρπός σημαντικότατης διδακτικής προσπάθειας και η προσαρμοστικότητα των νέων γνώσεων στο φτωχό πνευματικό επίπεδο της, τότε, νεοελληνικής πραγματικότητας αποτελούσε πρωταρχικό καθήκον.

Αυτές ήταν οι νεοελληνικές συμπεριφορές στην πρωτο-διαμόρφωση του νεοελληνικού τριγωνομετρικού λόγου. Και όπως έχει επισημανθεί, οι συμπεριφορές αυτές δεν ήταν αυτόβουλες, αλλά συναρτημένες, με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, από το αντίστοιχο δυτικο-ευρωπαϊκό κατεστημένο. Ένα κατεστημένο με προβληματικό σημασιολογικό υπόβαθρο, εξ αιτίας κάποιων άστοχων διαπολιτισμικών μεταβιβάσεων του τριγωνομετρικού λόγου. Και είναι αλήθεια ότι δύσκολα μπορεί να κατανοηθεί η υπέρβαση του Ανθρακίτη αν δεν συνειδητοποιηθούν οι ιστορικές μεταβιβάσεις του τριγωνομετρικού λόγου από τον ένα πολιτισμό στον άλλο. Αυτό ακριβώς το θέμα θα αναλυθεί στη συνέχεια.

Οι "υποτεινόμενες ευθείες" της *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΤΑΞΕΩΣ*

> Πρὸς μὲν οὖν τὴν ἐξ ἑτοίμου χρῆσιν κανονικήν τινα μετὰ ταῦτα ἔκθεσιν ποιησόμεθα τῆς πηλικότητος αὐτῶν τὴν μὲν περίμετρον εἰς τξ τμήματα διελόντες, παρατιθέντες δὲ τὰς ὑπὸ τὰς καθ' ἡμιμοίριον παραυξήσεις τῶν περιφερειῶν ὑποτεινομένας εὐθείας, τουτέστι πόσων εἰσὶν τμημάτων ὡς τῆς διαμέτρου διὰ τὸ ἐξ αὐτῶν τῶν ἐπιλογισμῶν φανησόμενον ἐν τοῖς ἀριθμοῖς εὔχρηστον εἰς ρκ τμήματα διῃρημένης. πρότερον δὲ δείξομεν, πῶς ἂν ὡς ἔνι μάλιστα δι' ὀλίγων καὶ τῶν αὐτῶν θεωρημάτων εὐμεθόδευτον καὶ ταχεῖαν τὴν ἐπιβολὴν τὴν πρὸς τὰς πηλικότητας αὐτῶν ποιοίμεθα, ὅπως μὴ μόνον ἐκτεθειμένα τὰ μεγέθη τῶν εὐθειῶν ἔχωμεν ἀνεπιστάτως, ἀλλὰ καὶ διὰ τῆς ἐκ τῶν γραμμῶν μεθοδικῆς αὐτῶν συστάσεως τὸν ἔλεγχον ἐξ εὐχεροῦς μεταχειριζώμεθα.

Στο προηγούμενο απόσπασμα[4] από το 10ο κεφάλαιο του 1ου βιβλίου της *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΤΑΞΕΩΣ* (*ΑΛΜΑΓΕΣΤΗΣ*)[5], το οποίο επιγράφεται "Περί της πηλικότητος των εν κύκλω ευθειών", ο Πτολεμαίος (περ. 85-περ.165 μ.Χ.) ανακοινώνει ότι θα κατασκευάσει ένα "κανόνιον των εν κύκλω ευθειών", δηλαδή έναν πίνακα με τα μήκη των "υπό των περιφερειών υποτεινομένων ευθειών". Οι ευθείες αυτές δεν είναι παρά οι χορδές των τόξων ενός κύκλου ανά μισή μοίρα, από το τόξο μισής μοίρας μέχρι και το τόξο 180˚. Για την κατασκευή αυτού του πίνακα, η οποία περιγράφεται διεξοδικά, ο Πτολεμαίος, χρησιμοποιεί βασικές προτάσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και έναν κύκλο με ακτίνα διαιρεμένη σε 60 ίσα τμήματα (πρόκειται ουσιαστικά για ένα μοναδιαίο κύκλο στο εξηκονταδικό σύστημα της Πτολεμαϊκής Αστρονομίας). Κάθε τμήμα της ακτίνας (1τ) υποδιαιρείται επίσης σύμφωνα με το εξηκονταδικό σύστημα σε πρώτα και δεύτερα εξηκοστά και αποτελεί τη μονάδα μέτρησης των χορδών των τόξων του κύκλου.

Το "κανόνιον" με τα μήκη των χορδών των τόξων[6], το οποίο καταλαμβάνει ολόκληρο το 11ο κεφάλαιο του 1ου βιβλίου της *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΤΑΞΕΩΣ*, ανήκε στο βασικό μαθηματικό υπόβαθρο της Πτολεμαϊκής Αστρονομίας και ήταν απαραίτητο για τη χρησιμοποίηση των προτάσεων της Σφαιρικής Γεωμετρίας στους αστρονομικούς υπολογισμούς που αφορούν μετρήσεις τόξων των μέγιστων κύκλων της ουράνιας σφαίρας. Το πρώτο σχετικό παράδειγμα που δίνει ο Πτολεμαίος αφορά τον υπολογισμό της ηλιακής απόκλισης, δηλαδή του μήκους του τόξου ενός μέγιστου κύκλου της ουράνιας σφαίρας που περιέχεται ανάμεσα στο μέγιστο κύκλο του ουράνιου

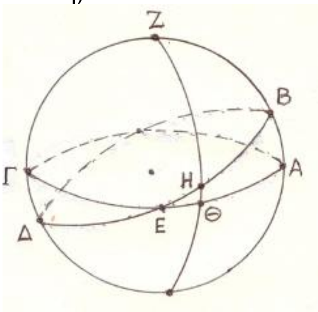
---

4 Βλ. Σπανδάγου, Ε.: *Η Μαθηματική Σύνταξις του Πτολεμαίου*, Αίθρα, 2003, σ. 60-61.

5 Το έργο αυτό του Πτολεμαίου, γραμμένο περίπου το 150 μ.Χ., στηρίζεται σε μεγάλο βαθμό και συστηματοποιεί αποτελέσματα προγενέστερων ελλήνων αστρονόμων και μαθηματικών όπως ο Ίππαρχος (2ος αι. π.Χ.) και ο Μενέλαος (1ος αι. μ.Χ.).

6 Αξίζει να σημειωθεί ότι ο Πτολεμαίος δεν χρησιμοποιεί τις φορτισμένες με μη μαθηματικές σημασίες λέξεις "τόξο" και "χορδή".

ισημερινού και του μέγιστου κύκλου της φαινόμενης τροχιάς του ήλιου, δηλαδή της εκλειπτικής.
Στο παρακάτω σχήμα, το ΑΓ είναι ένα ημικύκλιο του ισημερινού, ΒΔ το ημικύκλιο της εκλειπτικής που ορίζεται από το χειμερινό και θερινό τροπικό σημείο αντίστοιχα, ΕΗ το τόξο της εκλειπτικής που εκφράζει μια δεδομένη απόσταση του ήλιου Η από το σημείο Ε της εαρινής ισημερίας (ηλιακό μήκος) και ΗΘ το τόξο του μέγιστου κύκλου που διέρχεται από τους πόλους της ουράνιας σφαίρας και εκφράζει την αντίστοιχη απόσταση του ήλιου από τον ισημερινό (ηλιακή απόκλιση).



Για τον υπολογισμό της ηλιακής απόκλισης ο Πτολεμαίος χρησιμοποιεί το λεγόμενο σήμερα "θεώρημα του Μενελάου", σύμφωνα με το οποίο στο προηγούμενο σχήμα ισχύει:

$$\frac{\text{χορδή } 2ΖΑ}{\text{χορδή } 2ΑΒ} = \frac{\text{χορδή } 2ΘΖ}{\text{χορδή } 2ΘΗ} \cdot \frac{\text{χορδή } 2ΗΕ}{\text{χορδή } 2ΕΒ}$$

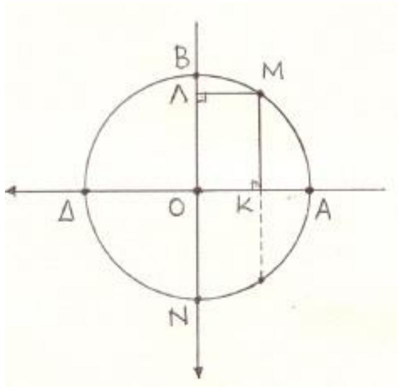
Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση, τα μήκη των χορδών των γνωστών τόξων σύμφωνα με τον πίνακα (δηλαδή χορδή 2ΖΑ = χορδή 2ΘΖ = χορδή 2ΕΒ = χορδή 180° = 120^τ, χορδή 2ΑΒ = χορδή 47° 42′ 40″ = 48^τ 31′ 55″ και χορδή 2ΗΕ = χορδή 60° = 60^τ)[7], ο Πτολεμαίος βρίσκει αρχικά ότι: χορδή 2ΘΗ = 24^τ 15′ 57″. Από τον πίνακα προκύπτει τώρα αντίστροφα ότι στη χορδή αυτή αντιστοιχεί το τόξο 2ΘΗ = 23° 19′ 59″ και άρα η ζητούμενη ηλιακή απόκλιση είναι ΘΗ = 11° 40′ κατά προσέγγιση ("έγγιστα").
Ο προηγούμενος χειρισμός, που συνίσταται ουσιαστικά από μια διαδικασία επίλυσης ενός σφαιρικού τριγώνου με τη βοήθεια τριγωνομετρικού πίνακα, παρουσιάζει ένα τεχνικό μειονέκτημα σχετικό με την πληθώρα των απαιτούμενων αριθμητικών πράξεων: τα γνωστά τόξα πρέπει πρώτα να διπλασιαστούν, να βρεθούν τα μήκη των χορδών των διπλάσιων τόξων από τον πίνακα, να υπολογιστεί το διπλάσιο του ζητούμενου τόξου από το θεώρημα του Μενελάου και εν συνεχεία το μισό του τελευταίου. Η διαδικασία αυτή απλοποιείται αισθητά (περιττεύουν οι διπλασιασμοί και υποδιπλασιασμοί των τόξων) αν ο πίνακας των χορδών αντικατασταθεί από έναν άλλο που δίνει για κάθε τόξο ΑΒ το μήκος της ημιχορδής του τόξου 2ΑΒ. Τότε θα ισχύει η σχέση:
χορδή 2ΑΒ = 2 ημιχορδή ΑΒ
και το προηγούμενο "θεώρημα του Μενελάου" θα έχει τη μορφή:

[7] Το τόξο ΑΒ (η λόξωση της εκλειπτικής) θεωρείται από τον Πτολεμαίο ίσο με 23° 51′ 20″.

$$\frac{\text{ημιχορδή } ZA}{\text{ημιχορδή } AB} = \frac{\text{ημιχορδή } \Theta Z}{\text{ημιχορδή } \Theta H} \cdot \frac{\text{ημιχορδή } HE}{\text{ημιχορδή } EB}$$

Οι *ορθές* και *αντίστροφες ημιχορδές* του *SURYA SIDDHANTA*

Αυτή η τεχνική βελτίωση φαίνεται ότι πραγματοποιήθηκε για πρώτη φορά από Ινδούς αστρονόμους και εκτίθεται σε έργα με αστρονομικό περιεχόμενο, όπως για παράδειγμα το ανώνυμο *SURYA SIDDHANTA* (τμήμα μιας σειράς με τίτλο *SIDDHANTAS*, γραμμένο γύρω στο 400 μ.Χ.) ή το *ARYABHATIYA* του Aryabhata (476-570 μ.Χ.), γραμμένο 100 χρόνια αργότερα. Τα έργα αυτά περιέχουν, σε έμμετρη Σανσκριτική γλώσσα, αναπόδεικτους κανόνες για την εκτέλεση αστρονομικών υπολογισμών καθώς και πίνακες που δίνουν για ορισμένα τόξα του πρώτου τεταρτημορίου την αντίστοιχη ημιχορδή του διπλάσιου τόξου.
Η τελευταία, η οποία αναφέρεται και ως *ορθή ημιχορδή*, θεωρείται (βλ. το παρακάτω σχήμα) ως η απόσταση ΜΚ του πέρατος του τόξου ΑΜ από μια ευθεία αναφοράς, με κατεύθυνση Ανατολή–Δύση, που διέρχεται από την αρχή του τόξου. Χρησιμοποιείται επίσης η *ημιχορδή του συμπληρωματικού τόξου* που θεωρείται ως η απόσταση ΜΛ του πέρατος του τόξου από μια ευθεία αναφοράς κάθετη προς την προηγούμενη, με κατεύθυνση Βορράς–Νότος καθώς και η λεγόμενη *αντίστροφη ημιχορδή*, δηλαδή η διαφορά ΚΑ της ακτίνας από την *ημιχορδή του συμπληρωματικού τόξου* (αύτη αναφέρεται επίσης και ως *βέλος*).



Η σχετική τεχνική ορολογία των ινδικών αστρονομικών έργων είναι η εξής[8]:
• *capa* (πολεμικό τόξο και κατ' επέκταση τόξο κύκλου)
• *samasta jya* ή *iya* ή *jiba* (χορδή πολεμικού τόξου και κατ' επέκταση χορδή κυκλικού τόξου)
• *ardhaiya iyardha* (*ημιχορδή*)
Πολλές φορές χρησιμοποιούνται για την έννοια της *ημιχορδής* οι λέξεις *jya* ή *jiva*, χωρίς το πρόθεμα ή επίθεμα *ardha*. Σ' αυτές τις περιπτώσεις αξιοποιούνται, προς διάκριση, οι όροι:

[8] Βλ. Gupta, R.C.: Invention, journey and triumph of the Indian sine: History and enlightenment. *Mathematics Teacher* (India), 23 (2), 1987, σσ.17–21, Joseph Cheverghese, G.: *The Crest of the Peacock. Non-European Roots of Mathematics*, Penguin, 1994, σ. 280 κ.ε.

- purna jya (πλήρης χορδή)
- koti jya (ημιχορδή του συμπληρωματικού τόξου)
- karma jya (ορθή ημιχορδή)
- utkrama jya (αντίστροφη ημιχορδή)
- isu ή bana (βέλος)

Εκτός από την καινοτομία που συνιστά η εισαγωγή της *ημιχορδής*, στους ινδικούς πίνακες χρησιμοποιείται μια διαφορετική μονάδα μέτρησης. Αντί για κύκλο με ακτίνα 60^{τ}, δηλαδή $3600'$, ο Aryabhata χρησιμοποιεί κύκλο ακτίνας $3438'$ (αυτό δίνει ο ίδιος ως μήκος της *ημιχορδής* του τόξου 90°, η οποία ισούται με την ακτίνα του κύκλου). Η τιμή αυτή προέρχεται μάλλον από στρογγυλοποίηση της 3437,7 που προκύπτει αν υπολογίσουμε την ακτίνα λαμβάνοντας υπόψη ότι το μήκος της περιφέρειας είναι $360 \odot 60 = 21600'$ και ότι ο Aryabhata χρησιμοποιεί για το π την προσέγγιση

$$\frac{62832}{20000} = 3,1416.$$

Η συγκεκριμένη επιλογή υποδηλώνει μια τάση χρησιμοποίησης του πρώτου εξηκοστού της μοίρας ως κοινής μονάδας μέτρησης τόξων και ημιχορδών. Ο van der Waerden (1903-1996) έχει υποστηρίξει ότι η επιλογή αυτή παρακινήθηκε από πρακτικούς λόγους, επειδή με τον τρόπο αυτό τα μήκη των πολύ μικρών τόξων που προκύπτουν από τις αστρονομικές μετρήσεις ταυτίζονται ουσιαστικά με τα μήκη των αντίστοιχων ημιχορδών (π.χ. η πρώτη είσοδος στον πίνακα του Aryabhata είναι το μήκος της ημιχορδής του τόξου $3^{\circ}\ 45' = 225'$ που δίνεται ίσο με $225'$ και η δεύτερη το μήκος της ημιχορδής του τόξου $7^{\circ}\ 30' = 450'$ που δίνεται ίσο με $449'$). Αναλύοντας στη συνέχεια ορισμένα σφάλματα των αστρονομικών πινάκων του Πτολεμαίου, καταλήγει στο συμπέρασμα ότι αυτά οφείλονται στη χρησιμοποίηση ενός πίνακα χορδών ή ημιχορδών, προγενέστερου και μικρότερης ακρίβειας αυτού της *Αλμαγέστης*, ο οποίος υπήρξε η βάση για την κατασκευή των παλαιότερων ελληνικών πινάκων (π.χ. εκείνων του Ιππάρχου) όσο και του πίνακα που παραθέτει ο Aryabhata. Ο van der Waerden εικάζει, ακόμη, ότι η κατασκευή αυτού του πρώτου πίνακα πραγματοποιήθηκε από τον Απολλώνιο (το συγγραφέα των *Κωνικών*), στο απολεσθέν έργο του *Ωκυτόκιον.*[9]

Η αραβική και λατινική παρετυμολογία της ινδικής *ημιχορδής*

Οι αστρονόμοι του Ισλάμ, οι οποίοι από τον 9ο αιώνα είχαν μελετήσει τόσο τα ελληνικά όσο και τα ινδικά αστρονομικά έργα, διατήρησαν την καινοτομία της εισαγωγής των *ορθών* και *αντίστροφων ημιχορδών* και προχώρησαν στην κατασκευή λεπτομερέστατων και ακριβέστατων πινάκων. Σύμφωνα με όλες τις υπάρχουσες μαρτυρίες, ο ινδικός τεχνικός όρος jiva για την *ημιχορδή* (χωρίς το πρόθεμα ardha = *ημι*) αποδόθηκε φωνητικά και μεταφέρθηκε στα ισλαμικά αστρονομικά κείμενα ως jib ή jyab, λέξεις δίχως νόημα στην

---

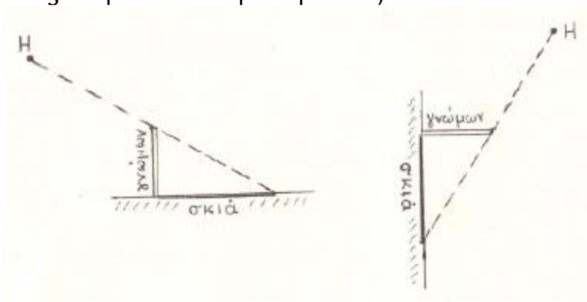
[9] Βλ. Waerden, B.L. van der: Reconstruction of a Greek Table of Chords. *Archive for History of Exact Sciences* 38, σσ.23-38 (1988). Για την επίδραση γενικότερα της ελληνικής στην ινδική Αστρονομία, βλ. Neugebauer, O.: *Οι Θετικές Επιστήμες στην Αρχαιότητα* (μετάφραση Χ. Ζερμπίνη & Ι. Αρζόγλου), Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης, 1986, σ. 219, 232.

αραβική γλώσσα. Η σχεδόν τυποποιημένη χρήση αυτών των όρων στους αστρονομικούς υπολογισμούς, αλλά και η συνήθεια των Αράβων να παραλείπουν την αναγραφή των φωνηέντων, είχε ως αποτέλεσμα να συγχέονται οι προηγούμενες με τις λέξεις *jayb* ή *jaib*, οι οποίες έχουν συγκεκριμένες σημασίες (σημαίνουν πρωταρχικά “κοιλότητα”, “κόλπος”, “θύλακας”, “πτυχή” και κατ’ επέκταση, “άνοιγμα ενός ρούχου”, όπως π.χ. τσέπη ή λαιμόκοψη). Οι λέξεις αυτές και οι αντίστοιχες σημασίες φαίνεται ότι καθιερώθηκαν τελικά ως υποκατάστατα του τεχνικού όρου *ημιχορδή* στα ισλαμικά αστρονομικά έργα.[10] Μπορεί εύλογα να υποθέσει κανείς, όπως παρατηρεί ο ιστορικός J. Tropfke (1866-1939), ότι άραβες συγγραφείς που ήταν εμβριθείς γνώστες της ινδικής επιστήμης (για παράδειγμα οι al–Battani και al-Biruni που έζησαν γύρω στο 900 και 1000 αντίστοιχα), γνώριζαν την προέλευση του jaib αλλά δεν αισθάνθηκαν την ανάγκη να αντικαταστήσουν αυτόν τον πολιτογραφημένο τεχνικό όρο με μια ορθή απόδοσή του στην αραβική γλώσσα.[11]

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι εκτός από τους πίνακες *ορθών* και *αντίστροφων ημιχορδών*, οι αστρονόμοι του Ισλάμ, προχώρησαν στην κατασκευή πινάκων και για άλλες παραμέτρους των αστρονομικών μετρήσεων.

Εισάγοντας μια σημαντική καινοτομία στο μαθηματικό υπόβαθρο της αστρονομίας, κατασκεύασαν επίσης πίνακες που παρέχουν το μήκος της σκιάς ενός οριζόντιου ή κάθετου γνώμονα σταθερού μήκους για διάφορες τιμές της γωνίας που σχηματίζει ο Ήλιος με τον ορίζοντα. Για τις *σκιές* αυτές, που απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα ως κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου, χρησιμοποιήθηκαν οι ακόλουθοι αραβικοί όροι:

- *al–zill al–mustawi* (*ορθή* ή *οριζόντια σκιά*, την οποία δημιουργεί ένας κάθετος γνώμονας σε μια οριζόντια επιφάνεια)
- *al–zill al–makus* (*αντίστροφη* ή *κάθετη σκιά*, την οποία δημιουργεί ένας οριζόντιος γνώμονας σε μια κάθετη επιφάνεια).[12]



[10] Αυτό τουλάχιστον συνάγεται άμεσα από τον τρόπο με τον οποίο, όπως θα δούμε στη συνέχεια, λατίνοι και βυζαντινοί συγγραφείς απέδωσαν τον όρο *ημιχορδή* από τα αραβικά στις αντίστοιχες γλώσσες.

[11] Βλ. Tropfke, J.: *Geschichte der Elementar–Mathematik*. Zweite Auflage (1921-1924, 7 Bände), Vereinigung Wissenschaftlicher Verleger, Band II(1), σ.212 κ.ε., Juschkewitsch, A.P.: *Geschichte der Mathematik im Mittelalter*, Pfalz-Verlag, 1964, σ. 295 κ. ε..

[12] Η χρήση της “σκιάς” ως βασικού υπολογιστικού εργαλείου σε προβλήματα μετρήσεων ανάγεται βέβαια σε πολύ αρχαιότερες εποχές και συναντάται σε διάφορες μαθηματικές παραδόσεις. Βλ.: Swetz, F. Trigonometry Comes Out of the Shadows, στο F. Swetz *et al* [eds]: *Learn from the Masters*, The Mathematical Association of America 1995, σσ. 57-71.

Η αντιμετώπιση αστρονομικών υπολογιστικών προβλημάτων με την ταυτόχρονη χρήση *χορδών*, *ημιχορδών* και *σκιών* έφερε γρήγορα στο προσκήνιο τις μεταξύ τους σχέσεις, οι οποίες βέβαια δεν είναι παρά ειδικές όψεις βασικών μετρικών σχέσεων στον κύκλο και το ορθογώνιο τρίγωνο (όπως το Πυθαγόρειο θεώρημα ή το θεώρημα του Θαλή).[13] Η μελέτη αυτών των σχέσεων από τους αστρονόμους του Ισλάμ, ιδιαίτερα τον Abu l-Wafa (940–998) στο έργο του *Zij al-Magisti* (δηλαδή *ΑΛΜΑΓΕΣΤΗ*) και τον Nasir al-Din al-Tusi (1201-1274) στο *Schakl al-Katta* (*Το θεώρημα της διατέμνουσας*), έβαλε τα θεμέλια για την ανάπτυξη ενός νέου μαθηματικού κλάδου, ο οποίος στη διάρκεια της Ευρωπαϊκής Αναγέννησης ονομάστηκε Τριγωνομετρία.[14]
Η προβληματική σχέση των αραβικών όρων jayb ή jaib με την υποκείμενη έννοια της *ημιχορδής* εκδηλώθηκε με χαρακτηριστικό τρόπο όταν τα ισλαμικά αστρονομικά έργα άρχισαν να μεταφράζονται στα λατινικά κατά τη διάρκεια του 12ου αιώνα. Ένας από τους πρώτους μεταφραστές, ο πολυταξιδεμένος Αδελάρδος από το Bath (1075-1160), ο οποίος γύρω στο 1120 μετέφρασε τους αστρονομικούς πίνακες του al-Khwarizmi (πρώτο μισό του 9ου αιώνα) προτίμησε μια φωνητική απόδοση των αραβικών όρων και μεταγραφή τους με λατινικούς χαρακτήρες:

- *elgeib el mustewi seu planum* για την *ορθή ημιχορδή*
- *elgeib el makus seu diminutum* για την *αντίστροφη ημιχορδή*.

Όπως σημειώνει ο ιστορικός A. von Braunmühl (1853-1908), στη λέξη *elgeib* αναγνωρίζει κανείς αμέσως τον αραβικό όρο *jaib* με το άρθρο el αντί του al.[15]
Την ίδια περίπου εποχή ο Πλάτων από το Tivoli, μεταφράζοντας στα λατινικά το *DE SCIENTIA STELLARUM* του al-Battani (του επονομαζόμενου "Πτολεμαίος των Αράβων") χρησιμοποιεί τον όρο *χορδή* (*corda*) με την ακόλουθη διευκρίνιση:

> Για να μη το επαναλαμβάνουμε συνεχώς, εφιστούμε την προσοχή στο γεγονός ότι σε ολόκληρη την πραγματεία η αναφορά στις χορδές γίνεται πάντοτε με την έννοια των *ημιχορδών* (*de medietatis cordis*), εκτός αν επισημαίνεται κατηγορηματικά ότι εννοούμε ολόκληρη τη *χορδή* (*corda integra*), κάτι όμως που σπανίως θα χρειαστεί να κάνουμε.[16]

Μισό περίπου αιώνα αργότερα ένας άλλος μεταφραστής, ο Γεράρδος από την Cremona (1114-1187), ο οποίος μετέφρασε τους *CANONES SIVE REGULAE SUPER TABULAS TOLETANAS* του al-Zarqali (περ.1050) και την *ASTRONOMIA* του Jabir ibn Aflah (περ.1145), αμφότερων αράβων της Ισπανίας, χρησιμοποιεί για την *ημιχορδή* τη λατινική λέξη *sinus*, επιχειρώντας προφανώς μια κατά λέξη μετάφραση της αραβικής *jaib* με την οποία το *sinus* έχει αντίστοιχες σημασίες.

[13] Βλ. Berggren, J.L.: *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer-Verlag (1986), σ.127 κ. ε.
[14] Για την εξέλιξη του συγκεκριμένου κλάδου βλ. Θωμαΐδη, Γ.: Αρχή και Εξέλιξη της Τριγωνομετρίας, *Μαθηματική Επιθεώρηση*, 24, 1981, σσ. 45-73.
[15] Βλ. Braunmühl, A. von.: *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*, Erster Teil, Teubner, 1900, σ.49.
[16] Βλ. Tropfke, ο.π. υποσημείωση 6, σ.213.

Ο όρος sinus, ακολουθώντας μια παράλληλη και εξίσου περίεργη διαδρομή με το αραβικό συνώνυμό του jaib, καθιερώθηκε τελικά ως η λατινική απόδοση της έννοιας της *ημιχορδής*, με την οποία βεβαίως δεν έχει την παραμικρή ετυμολογική συνάφεια. Μια μερική ερμηνεία αυτού του ιδιότυπου φαινομένου μεταφραστικών παρεκκλίσεων μας δίνει ο ιστορικός A.C. Crombie, ο οποίος σχολιάζοντας το μεταφραστικό πυρετό του 12ου αιώνα, μέσω του οποίου πραγματοποιήθηκε η υποδοχή της ελληνοαραβικής επιστήμης στο Δυτικό χριστιανικό κόσμο, επισημαίνει τα εξής:

Σ' αυτήν όμως την εργασία της μετάφρασης ελληνικών και αραβικών κειμένων αποτελούσαν σοβαρά εμπόδια η έλλειψη βαθύτερης γνώσης των γλωσσών αυτών, η δυσκολία των θεμάτων και η περίπλοκη τεχνική ορολογία. Οι μεταφράσεις γίνονταν συνήθως κατά λέξη, συχνά μάλιστα, όταν μια λέξη δεν ήταν κατανοητή, μεταγραφόταν απλώς με λατινικούς χαρακτήρες ώστε να αποδίδεται η αραβική ή εβραϊκή προφορά της.[17]

Βεβαίως η κατά λέξη μετάφραση άλλων αραβικών τεχνικών όρων, όπως οι *σκιές* που έχουν μια άμεση φυσική σημασία, δεν αντιμετώπιζε παρόμοια προβλήματα. Σε ένα χειρόγραφο σχετικό με τη χρήση του τεταρτημορίου, που έγραψε γύρω στο 1230 ο Ροβέρτος από το Montepessulano (Montpellier), η απόδοση των αραβικών όρων για τις *ορθές* και *αντίστροφες σκιές* γίνεται σύμφωνα με τα λατινικά συνώνυμά τους:

- *umbra recta* (*ορθή* ή *οριζόντια σκιά*)
- *umbra versa* (*αντίστροφη* ή *κάθετη σκιά*).

Η καθιέρωση του όρου sinus γίνεται φανερή από τη χρήση του σε μαθηματικά έργα που δεν εξυπηρετούσαν ανάγκες της αστρονομίας, γραμμένα στη λατινική γλώσσα από ευρωπαίους συγγραφείς. Στην *PRACTICA GEOMETRIAE* (1220) του Λεονάρδου από την Pisa (Leonardo Fibonacci), έργο που πραγματεύεται τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων και τη διαμέριση των σχημάτων, ο συγγραφέας ασχολείται με τον υπολογισμό του μήκους των *χορδών* (cordae) κυκλικών τόξων ακολουθώντας, όπως γράφει, τον "Tholomaeus", αλλά παράλληλα κάνοντας αναφορά στις λατινικές παρετυμολογίες των *ημιχορδών*:

- sinus rectus (*ορθή ημιχορδή*)
- sinus versus (*αντίστροφη ημιχορδή*), για την οποία χρησιμοποιεί επίσης τη λέξη
- sagitta, προφανώς ως απόδοση του αραβικού sahem (*βέλος*). [18]

Η χρησιμοποίηση των όρων αυτών από τον Leonardo Fibonacci (1170-περ.1250) έχει ιδιαίτερη συμβολική σημασία, καθώς υποδηλώνει την ολοκλήρωση μιας μεγάλης διαδρομής στη διάδοση και εξέλιξη των βασικών εννοιών που αποτέλεσαν τη βάση της κατοπινής Τριγωνομετρίας. Ο συγκεκριμένος μαθηματικός, ένας από τους επιφανέστερους του Ευρωπαϊκού Μεσαίωνα, είχε αποκτήσει βαθιές γνώσεις των ελληνικών και αραβικών Μαθηματικών στα τέλη του 12ου αιώνα, ταξιδεύοντας σε όλη σχεδόν τη λεκάνη της Μεσογείου και φθάνοντας μέχρι την Κωνσταντινούπολη. Η τελευταία αυτή επισήμανση φέρνει στο προσκήνιο ορισμένα ερωτήματα σχετικά με το ρόλο

---

[17] Βλ. Crombie, A.C.: *Από τον Αυγουστίνο στον Γαλιλαίο.* Τόμος Α΄, (μετάφραση Θ. Τσίρη & Ι. Αρζόγλου), Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης, 1989, σ. 54.

[18] Βλ. Braunmühl, βλ..πρ. υποσημείωση 9, σ.96 κ. ε.

των βυζαντινών λογίων, οι οποίοι βρίσκονταν σε ένα καίριο σταυροδρόμι των εξελίξεων πάνω στον άξονα Ανατολή – Δύση και ήταν φυσικά αποδέκτες των καινοτομιών που είχαν εισάγει στην Πτολεμαϊκή Αστρονομία οι αστρονόμοι της Ινδίας και του Ισλάμ.

Υποτεινόμενες ευθείες και _ημιχορδές_ στο Βυζάντιο

Το Βυζάντιο υπήρξε από τη μια μεριά κληρονόμος και θεματοφύλακας της αρχαίας ελληνικής επιστήμης και από την άλλη, λόγω της συνεχούς επαφή με την Ανατολή, χώρος υποδοχής των επιστημονικών έργων του Ισλάμ τα οποία σε αρκετές περιπτώσεις συνιστούσαν ουσιαστική καινοτομία και υπέρβαση των ελληνικών επιτευγμάτων. Ειδικότερα στον τομέα της Αστρονομίας, υπήρχε από τη μια μεριά το “βιβλικής” εμβέλειας έργο του Πτολεμαίου, μαθηματικά θεμελιωμένο στην Ευκλείδεια και τη Σφαιρική Γεωμετρία, το οποίο παρείχε ένα συμπαγές θεωρητικό και μεθοδολογικό υπόβαθρο για τη μελέτη των ουράνιων φαινομένων. Από την άλλη μεριά υπήρχε μια συσσώρευση ισλαμικών αστρονομικών έργων τα οποία, στηριζόμενα σε νεώτερες παρατηρήσεις και στην εισαγωγή νέων μαθηματικών εργαλείων (όπως οι λεπτομερείς πίνακες _ημιχορδών_ και _σκιών_), έδιναν ακριβέστερα και ταχύτερα αποτελέσματα.

Στο πλαίσιο αυτό ενδιαφέρον παρουσιάζει το ερώτημα σχετικά με τον τρόπο πρόσληψης των συγκεκριμένων εξελίξεων από τους βυζαντινούς λογίους. Κι αυτό γιατί στο γεωγραφικό τους περίγυρο υπήρχε μια καθολική αποδοχή των νέων μαθηματικών ιδεών και τεχνικών, που δεν ήταν δυνατόν να τους άφηνε αδιάφορους. Από την άλλη μεριά, όμως, ήταν περιχαρακωμένοι σε μια επιστημονική παιδεία με το “ειδικό βάρος” της αρχαιοελληνική παράδοσης.

Από τη μελέτη των πολυπληθών έργων αστρονομικού περιεχόμενου που γράφτηκαν στο Βυζάντιο μπορεί να διακρίνει κανείς την ύπαρξη δύο βασικών ρευμάτων. Το πρώτο ρεύμα, οι αρχές του οποίου ανάγονται στην πρώιμη βυζαντινή περίοδο, χαρακτηρίζεται από μια έμφαση στη διατήρηση και προβολή της αρχαιοελληνικής παράδοσης, δηλαδή τη *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΤΑΞΗ* του Πτολεμαίου. Το άλλο ρεύμα χαρακτηρίζεται από μια επίμονη αναζήτηση και αφομοίωση των εξελίξεων που είχαν λάβει χώρα στην Ανατολή. Ανάμεσα στα δύο ρεύματα δεν φαίνεται να υπάρχουν σαφείς διαχωριστικές γραμμές, αλλά μια ιδιότυπη συνύπαρξη της παράδοσης με τις νεότερες εξελίξεις ακόμη και στη διάρκεια του 14ου αιώνα.[19] Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η *ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΚΗ ΤΡΙΒΙΒΛΟΣ* του Θεοδώρου Μελιτηνιώτη (γραμμένη ανάμεσα στο 1360 και το 1368). Το δεύτερο μέρος αυτής της τριλογίας αποτελεί μια αυθεντική έκθεση της Αστρονομίας του Πτολεμαίου (π.χ. χρησιμοποιούνται αποκλειστικά οι _υποτεινόμενες ευθείες_ και οι αντίστοιχοι πίνακες της *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΤΑΞΕΩΣ*), ενώ στο τρίτο μέρος παρουσιάζεται η Αστρονομία όπως είχε διαμορφωθεί από τους

[19] Δεν είναι ασφαλώς τυχαίο το γεγονός ότι την περίοδο της ακμής των επιστημών στο Βυζάντιο, ανάμεσα στους σημαντικότερους εκπροσώπους της ορθόδοξης πτολεμαϊκής παράδοσης συγκαταλέγονται επιφανείς κρατικοί και εκκλησιαστικοί αξιωματούχοι, όπως οι Γεώργιος Παχυμέρης, Θεόδωρος Μετοχίτης, Νικηφόρος Γρηγοράς, Ισαάκ Αργυρός κ.α. Βλ. σχετικά: Νικολαΐδης, Θ. Οι επιστήμες στο Βυζάντιο: Η ιστορική παράδοση του νεώτερου Ελληνισμού, στο Γ. Καράς [επιμ.]: *Ιστορία και Φιλοσοφία των Επιστημών στον Ελληνικό χώρο* [υπό έκδοση, Αθήνα (2003)].

επιστήμονες του Ισλάμ. Μάλιστα, μια αρχική μορφή αυτού του τρίτου μέρους αυτονομήθηκε από το υπόλοιπο έργο και γνώρισε ευρύτερη διάδοση με τον τίτλο *ΠΑΡΑΔΟΣΙΣ ΕΙΣ ΤΟΥΣ ΠΕΡΣΙΚΟΥΣ ΠΡΟΧΕΙΡΟΥΣ ΚΑΝΟΝΑΣ* (1352).
Η πρώτη γραπτή μαρτυρία συστηματικής μελέτης από τους βυζαντινούς των αστρονομικών εξελίξεων που είχαν λάβει χώρα στην Ανατολή, φαίνεται να είναι ένα ανώνυμο έργο με τίτλο *ΜΕΘΟΔΟΙ ΨΗΦΟΦΟΡΙΑΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΚΩΝ*, η συγγραφή του οποίου έγινε την περίοδο 1060 – 1072 με πιθανότερες πηγές τα έργα των al-Khwarizmi και Habash al-Hasib (πρώτο μισό του 9^ου^ αιώνα).[20] Εδώ εμφανίζονται για πρώτη φορά στο Βυζάντιο οι *ημιχορδές* αντί για τις *υποτείνουσες ευθείες* του Πτολεμαίου. Συγκεκριμένα, ο ανώνυμος συγγραφέας χρησιμοποιεί τους όρους:
• *ευθεία ορθή* για την *ορθή ημιχορδή*,
• *ευθεία αντίστροφος* για την *αντίστροφη ημιχορδή*. [21]
Είναι ιδιαίτερα αποκαλυπτικό το γεγονός ότι η τεχνική ορολογία εμφανίζεται εδώ όχι μόνο σε άπταιστα ελληνικά αλλά και σε πλήρη σημασιολογική συμφωνία με την υποκείμενη έννοια (ακολουθώντας προφανώς την ινδική και αραβική πρακτική, ο ανώνυμος βυζαντινός συγγραφέας των *ΜΕΘΟΔΩΝ* παραλείπει το πρόθεμα "ημι" από τις ακριβέστερες εκφράσεις *ημιευθεία ορθή* και *ημιευθεία αντίστροφος*). Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ο Αδελάρδος από το Bath, μεταφράζοντας 50 περίπου χρόνια **αργότερα** το αστρονομικό έργο του al-Khwarizmi στα λατινικά, θα χρησιμοποιήσει για τους ίδιους τεχνικούς όρους απλοϊκές μεταγραφές με λατινικούς χαρακτήρες (*elgeib el mustewi* και *elgeib el makus* αντίστοιχα). Στις *ΜΕΘΟΔΟΥΣ* παρατίθεται και χρησιμοποιείται συστηματικά στους αστρονομικούς υπολογισμούς ένας πίνακας με τα μήκη των *ορθών ευθειών* για κάθε "κοινό αριθμό" (δηλαδή μήκος κυκλικού τόξου) ανά μία μοίρα, από 1˚ ως 359˚. Ο πίνακας αυτός έχει υπολογιστεί σύμφωνα με την πτολεμαϊκή παράδοση, σε κύκλο ακτίνας 60^τ^ αλλά ειδικά για τον υπολογισμό των ηλιακών εκλείψεων γίνεται χρήση και ενός άλλου πίνακα που αντιστοιχεί σε κύκλο ακτίνας 150^τ^. Το γεγονός αυτό, το οποίο επιβεβαιώνει ότι στη σύνταξη του συγκεκριμένου έργου χρησιμοποιήθηκαν περισσότερες από μία πηγές, συνοδεύεται από την αιφνίδια εμφάνιση ενός εξελληνισμένου αραβικού όρου για την έννοια της *ημιχορδής*, τη λέξη *περσίκιον*, στην
οποία ο συγγραφέας των *ΜΕΘΟΔΩΝ* σπεύδει να προσθέσει τη διευκρίνιση *ήτοι ευθείαν ορθότητα*[22]:

λαμβάνομεν τὰς μεταξὺ τῆς ἀκριβοῦς συνόδου
καὶ τῆς μεσημβρίας ὥρας ἰσημερινὰς καὶ πολυπλασιάσαντες
ταύτας ἐπὶ ιε, τὸ γινόμενον ποιοῦμεν περσίκιον ἤτοι εὐθεῖαν
ὀρθότητα, καὶ πολυπλασιάζομεν τὴν τοιαύτην εὐθεῖαν ἐπὶ δ

Τα προηγούμενα καθώς και ορισμένα άλλα στοιχεία που προκύπτουν από μια κριτική ανάγνωση των *ΜΕΘΟΔΩΝ*, δείχνουν την ιδιαίτερη μέριμνα του

[20] Βλ. Jones, A.: *An eleventh-century manual of Arabo-Byzantine astronomy.* Corpus des Astronomes Byzantins III, Gieben (1987).
[21] Βλ. Jones, ο.π., σ. 42 κ.ε.
[22] Βλ. Jones, ο.π., σ. 92 & 165. Η λέξη "περσίκιον" που συναντάται σε βυζαντινά κείμενα, σημαίνει, μεταξύ άλλων, "τσέπη", δηλαδή μια από τις πολλές σημασίες των αραβικών "jayb" ή "jaib" που χρησιμοποιήθηκαν ως υποκατάστατα για την έννοια της ημιχορδής.

ανώνυμου συγγραφέα όχι μόνο να εισάγει την ισλαμική τεχνική ορολογία, αλλά και να την προσαρμόσει πλήρως στο γλωσσικό ιδίωμα της *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΤΑΞΕΩΣ* του Πτολεμαίου. Αυτή όμως η πρώτη προσπάθεια εισαγωγής μιας εκσυγχρονισμένης ελληνικής μαθηματικής ορολογίας στη βυζαντινή Αστρονομία του 11ου αιώνα δεν φαίνεται να είχε κάποια διάρκεια, όπως τουλάχιστον αποδεικνύεται από την επόμενη απόπειρα εκσυγχρονισμού που έλαβε χώρα δύο αιώνες αργότερα.
Πρωταγωνιστής της νέας αυτής απόπειρας υπήρξε ο γιατρός και κληρικός Γεώργιος-Γρηγόριος Χιονιάδης, ο οποίος την περίοδο 1298-1302 διδάχτηκε στην Ταυρίδα την περσική Αστρονομία και εν συνεχεία μετέφρασε ορισμένα ισλαμικά αστρονομικά έργα. Στις μεταφράσεις αυτές, στις οποίες γίνεται μια ιδιότυπη ανάμειξη ελληνικών και εξελληνισμένων αραβικών όρων, οι μαθηματικές έννοιες της *ημιχορδής* και της *σκιάς* εμφανίζονται ως εξής[23]:

• *τραχηλαία* για την *ορθή ημιχορδή* (*al-jayb wa huwa al-mustawi*)
• *σαγίτα* για την *αντίστροφη ημιχορδή* (*al-sahm wa huwa al-jayb al-mankus*)
• *δδίλ μουσταμάλ* ή *σκίασμα* για τη *σκιά* (*al-zill al-mustamal wa huwa al-zill al-mankus*)

Επίσης ο Χιονιάδης, με μια σαφή απόκλιση από την καθιερωμένη πτολεμαϊκή ορολογία, χρησιμοποιεί τους όρους *νευρά* και *τόξο* αντί *υποτεινόμενη ευθεία* και *περιφέρεια κύκλου* αντίστοιχα.
Το επόμενο απόσπασμα είναι χαρακτηριστικό δείγμα γραφής του Χιονιάδη[24]:

> Ἔπειτα ἐζητήθη τὸ πλάτος τῆς πόλεως — ἤτοι τοῦ Ταυρές — τὰ $\overline{\lambda\eta}$ εἰς τὸ κανόνιον τοῦ ψήφου τοῦ σκιάσματος — ἤγουν εἰς τὸ δδίλ — καὶ κατ᾽ ἐναντίον ἐκείνων εὑρέθη ψῆφος οὗτος· $\overline{\mu\varsigma}$ $\overline{\nu\beta}$ $\overline{\lambda\eta}$. ἐγένοντο $\overline{\mu\varsigma}$ $\overline{\nu\gamma}$, τῶν $\overline{\lambda\eta}$ ὡς $\overline{\alpha}$ λογισθέντων. ἐτηρήθησαν οὖν ταῦτα εἰς τὰ $\overline{\zeta}$ $\overline{\iota\zeta}$, καὶ ἐξῆλθον $\overline{\varsigma}$ $\overline{\iota\beta}$ $\overline{\mu\gamma}$ $\overline{\kappa\alpha}$. τοῦτό ἐστιν ἡ τραχηλαία τοῦ ντατὶλ ναάρ — ἤτοι τῆς ὀρθώσεως τῆς ἡμέρας.
> Τὰ $\overline{\kappa\alpha}$ εἰώθησαν. κατ᾽ ἐναντίον τῆς τραχηλαίας ἐκρατήθη τὸ τόξον. ἐπεὶ δὲ οὐχ εὑρέθη ἐκεῖ ψῆφος ἴσος, ἐκρατήθη ὁ ψῆφος ἀπὸ τῶν $\overline{\varepsilon}$ — $\overline{\varepsilon}$ $\overline{\iota\gamma}$ $\overline{\mu\varsigma}$. ἀφῃρέθησαν ταῦτα ἐξ ἐκείνων — ἤτοι τῆς τραχηλαίας· κατελείφθησαν $\overline{\nu\eta}$ $\overline{\nu\zeta}$. κατ᾽ ἐναντίον τῶν $\overline{\varepsilon}$ $\overline{\iota\gamma}$ $\overline{\mu\varsigma}$ εὑρέθη περίσσεια $\overline{\alpha}$ $\overline{\gamma}$. ταῦτα ἐμερίσθησαν εἰς τὰ $\overline{\nu\eta}$ $\overline{\nu\zeta}$· ἐξῆλθον $\overline{\nu\varsigma}$ λεπτά. ἐτέθησαν εἰς τὰ $\overline{\varepsilon}$, καὶ ἐγένοντο $\overline{\varepsilon}$ $\overline{\nu\varsigma}$. τοῦτό ἐστι ντατὶλ ναάρ — ἤτοι ὄρθωσις τῆς ἡμέρας.

Σε ελεύθερη νεοελληνική μετάφραση το κείμενο αυτό μπορεί να αποδοθεί ως εξής:

> Έπειτα ζητήθηκε το [γεωγραφικό] πλάτος της πόλεως - δηλαδή της Ταυρίδος – που είναι 38° στον πίνακα με τις τιμές της σκιάς – δηλαδή στο δδίλ – και απέναντι από εκείνο βρέθηκε ο εξής αριθμός: 46τ 52′ 38″. Το μετατρέψαμε σε 46τ 53′, θεωρώντας τα 38″ ως 1′. Αυτά πολλαπλασιάστηκαν με 7′ 57″ [η "σκιά" της ηλιακής απόκλισης], και προέκυψε ο 6τ 12′ 43″ 21‴. Αυτός είναι η τραχηλαία του ντατίλ ναάρ – δηλαδή της ορθώσεως της ημέρας.

---

[23] Βλ. Pingree, D. *The astronomical work of Gregory Chioniades*, Vol. I., Corpus des Astronomes Byzantins II, Gieben, 1985, σσ. 11-12, 88-95.
[24] Βλ. Pingree, ο.π., σ.250-251.

> Τα 21‴ παραλείφθηκαν. Απέναντι από την τραχηλαία αναζητήθηκε το τόξο. Επειδή όμως δεν βρέθηκε εκεί ίσος αριθμός, αναζητήθηκε ο αριθμός που αντιστοιχεί στις 5˚ – ο 5ι 13′ 46″. Αυτός αφαιρέθηκε από εκείνον – δηλαδή από την τραχηλαία: η διαφορά βρέθηκε 58′ 57″. Απέναντι από το 5ι 13′ 46″ βρέθηκε [στον πίνακα] διαφορά 1′ 3″. Μ' αυτό διαιρέθηκε το 58′ 57″: βρέθηκε πηλίκο 56 λεπτά. Αυτά προστέθηκαν στις 5˚, και έγιναν 5˚ 56′. Αυτό είναι το ντατίλ ναάρ – δηλαδή η όρθωσις της ημέρας.

Η χρησιμοποίηση της συγκεκριμένης ορολογίας από τον Χιονιάδη οδηγεί σε ορισμένες ενδιαφέρουσες επισημάνσεις και θέτει μια σειρά από ερωτήματα:
- Η προφανής σχέση της ελληνικής λέξης *τραχηλαία* με το "τραχηλιά" = "άνοιγμα ενός ρούχου στο λαιμό" = "λαιμόκοψη", ή με το "τράχηλος" ως ένας από τους όρους που προσδιόριζε τη σχέση της χερσονήσου με το υδάτινο περιβάλλον[25], δημιουργεί μια άμεση συσχέτιση με τις συνώνυμες λέξεις που χρησιμοποιήθηκαν για να αποδοθεί η έννοια της *ημιχορδής*, δηλαδή την αραβική "jayb" και τη λατινική *sinus*. Θα μπορούσε να υποστηριχτεί ότι ο Χιονιάδης μεταφράζει κατά λέξη το "jayb" στα ελληνικά, όπως ακριβώς έκαναν οι δυτικοί μεταφραστές των μέσων του 12ου αιώνα. Η απόδοση όμως του *sahm* (ή *sahem*) με τη λατινικής προέλευσης *σαγίτα* αντί του ελληνικού "βέλος", δημιουργεί το ερώτημα αν ο Χιονιάδης γνώριζε, γύρω στο 1300, τη σχετική λατινική ορολογία. Την περίοδο της κατοχής της Κωνσταντινούπολης από τους Δυτικούς (1204–1261) είχαν ήδη πραγματοποιηθεί οι κυριότερες μεταφράσεις των ισλαμικών αστρονομικών έργων στα λατινικά και είχε παγιοποιηθεί η σχετική ορολογία (σε έργα όπως η *PRACTICA GEOMETRIAE* του Fibonacci), γεγονός που καθιστά πολύ πιθανή τη γνώση της από ορισμένους λατινομαθείς βυζαντινούς λογίους.
- Μια άλλη επισήμανση αφορά την ανάμειξη ελληνικών και αραβικών τεχνικών όρων, γεγονός τελείως ασυμβίβαστο με το άψογο αρχαιοελληνικό γλωσσικό ιδίωμα της Πτολεμαϊκής Αστρονομίας που καλλιεργούσαν όχι μόνο οι "ορθόδοξοι" βυζαντινοί αστρονόμοι, αλλά, όπως είδαμε, είχε τηρήσει προσεκτικά τον 11ο αιώνα και ο ανώνυμος συγγραφέας των αραβικής προέλευσης *ΜΕΘΟΔΩΝ*. Ο επίσης γιατρός Γεώργιος Χρυσοκόκκης, ο οποίος με το έργο του *ΕΞΗΓΗΣΙΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΤΑΞΙΝ ΤΩΝ ΠΕΡΣΩΝ* (1346-47) προσάρμοσε και διέδωσε ευρύτατα τις αρχικές μεταφράσεις του Χιονιάδη επισημαίνει το συγκεκριμένο ζήτημα με χαρακτηριστικό τρόπο[26]:

> οὐ πᾶσαν οἴκοθεν ἐργασόμενος, ἀλλ' ἐκ Περσῶν μὲν ἔχων ὅσα παρὰ τοῦ ἡμῶν διδασκάλου βαρβάρως ἐξελληνίσθησαν, εἰ καί τινα ῥυθμὸν Ἑλληνικὸν πολλὰ μοχθήσας τούτοις ἐνέθηκα, τὰ πλείω δὲ καὶ ἐκ τῶν Ἑλληνικῶν βιβλίων ληψόμενος·

[25] Βλ. Βλαχάκος, Π.: *Νικηφόρος Γρηγοράς. Φυσική Γεωγραφία και Ανθρωπογεωγραφία στο Έργο του*, Ζήτρος, 2002, σελ. 165.
[26] Βλ. Mercier, R.: *An Almanac for Trepizond for the year 1336*, Corpus des Astronomes Byzantins VII, Academia, 1994, σ. 94. Για το έργο του Χρυσοκόκκη, βλ. Νικολαΐδης, Θ.: Η έκδοση της "Συντάξεως περσικής Αστρονομίας" του Γεωργίου Χρυσοκόκκη, στο *Οι Επιστήμες στον Ελληνικό Χώρο*, Αθήνα, Κέντρο Νεοελληνικών Ερευνών Ε.Ι.Ε./ Τροχαλία (1997), σσ.57-71.

Το γεγονός ότι ο Χιονιάδης φαίνεται να αδιαφορεί για την τήρηση του “επίσημου” πτολεμαϊκού ιδιώματος και ιδιαίτερα η χρησιμοποίηση όρων με ποικίλες και καθημερινές σημασίες (όπως *νευρά* και *τόξο*), δεν μπορεί να είναι τελείως άσχετο με την πρόθεσή του να γίνει το συγκεκριμένο έργο εύληπτο και άρα αποδεκτό από μια ευρύτερη κατηγορία αναγνωστών. Ενδιαφέρον από την άποψη αυτή παρουσιάζουν ορισμένες διδακτικής φύσεως παρατηρήσεις που διατυπώνει στην εισαγωγή[27]:

> ὅτι δὲ πρὸς σαφήνειαν καθ᾽ ὅσον ἔδει τὸ βιβλίον τοῦτο ἐξείργασται παρ᾽ ἡμῶν, ἐντεῦθεν πάντως καὶ τοῖς μικρὰ συνορῶσι δῆλον γενήσεται. εἰ δέ γε καὶ τοῦτο οὕτω πρὸς εὐκρίνειαν λεχθὲν δίχα διδαχῆς, ἐπεὶ καὶ τὰ καλὰ | διδακτά, οὐκ ἔτι καταληπτόν, οὐκ ἀφ᾽ ἡμῶν ἢ ἀπ᾽ αὐτοῦ τοῦ πράγματος ἅτε κεκτημένου καθ᾽ αὑτὸ τὴν δυσχέρειαν, πλὴν ἀλλὰ ῥᾷον τούτου ἢ τῶν ἄλλων ὅσα περὶ τῶν τοιούτων διαλαμβάνει ὁ σπουδαῖος περιγενήσεται.

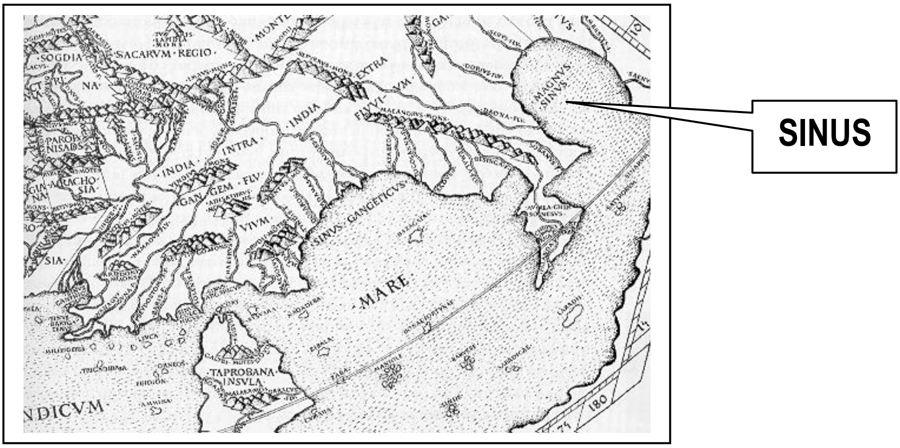
Εκτός από τα ερωτήματα που αφορούν την προέλευση των νεολογισμών του Χιονιάδη, εγείρεται επίσης και ένα βασικό ερώτημα που αφορά τη συνέχειά τους, δηλαδή την υποδοχή και ενσωμάτωσή τους στην ελληνική μαθηματική ορολογία. Παρά το γεγονός ότι η ισλαμική Αστρονομία γνώρισε ιδιαίτερη διάδοση στο Βυζάντιο από τα μέσα του $14^{ου}$ αιώνα και οι νεολογισμοί που εισήγαγε ο Χιονιάδης αποτελούσαν βασικό τμήμα της σχετικής ορολογίας[28], ο τεχνικός όρος *τραχηλαία* δεν επιβίωσε τελικά στη νεοελληνική γλώσσα (σε αντίθεση με το λατινικό *sinus*, που υπήρξε η βάση όλων των αντίστοιχων όρων στις ευρωπαϊκές γλώσσες). Μια προφανής και εύκολη ερμηνεία, η διακοπή της συνέχειας που προκλήθηκε από την πτώση του Βυζαντίου το 1453, δεν κρίνεται ικανοποιητική. Οι αυξανόμενες επαφές με τη Δύση κατά την τελευταία βυζαντινή περίοδο, μέσα από την προσπάθεια να διαφανεί το Βυζάντιο ως συνδετικός κρίκος ανάμεσα στον αρχαιοελληνικό και τον αναγεννώμενο ευρωπαϊκό πολιτισμό, φαίνεται ότι ευνοούσαν την καλλιέργεια μιας λόγιας επιστημονικής γλώσσας που θα εξυπηρετούσε πρωταρχικά αυτόν το σκοπό. Είναι ενδεικτικό το γεγονός ότι επιφανείς εκπρόσωποι αυτού του ρεύματος, όπως ο Γεώργιος Πλήθων-Γεμιστός (περ.1360-1452) και ο μαθητής του καρδινάλιος Βησσαρίων (περ.1400-1472), ασχολήθηκαν ιδιαίτερα με την Αστρονομία και μάλιστα ο τελευταίος χρησιμοποίησε για την έννοια της *ημιχορδής* τον όρο *κόλπωμα*.[29] Ο όρος αυτός, ο οποίος δεν έχει καμιά ετυμολογική συνάφεια με τη συγκεκριμένη έννοια, αποτελεί προφανώς μια απόπειρα λόγιας απόδοσης του λατινικού sinus στα ελληνικά, δεδομένου ότι ο τελευταίος είχε ευρύτατη χρήση στους γεωγραφικούς χάρτες της εποχής με τη σημασία του “θαλάσσιου κόλπου”.

---

[27] Βλ. Pingree, ο.π. υποσημείωση 18, σ.36.

[28] Βλ. σχετικά Neugebauer, O.: Studies in Byzantine Astronomical Terminology. *Transactions of the American Philosophical Society*. New Series. Vol.50, Part 2. (1960), pp. 3-45.

[29] Βλ. σχετικά Tihon, A. L’astronomie Byzantine à l’aube de la Renaissance. *Byzantion* 66/1, (1996), σσ.244-280, ιδιαίτερα σ.265.



Τμήμα Λατινικής Έκδοσης του Χάρτη του Πτολεμαίου (1490)

Αυτή η προσέγγιση προς το sinus υποδηλώνει, με συμβολικό τρόπο, την ευρύτερη προσέγγιση προς τη Δυτική Αναγέννηση, η οποία μετά την πτώση του Βυζαντίου υπήρξε ο αποκλειστικός φορέας επιστημονικής προόδου και τροφοδότης νέων επιστημονικών ιδεών στον τουρκοκρατούμενο ελληνικό χώρο. Η προσέγγιση προς το sinus φαίνεται να ολοκληρώνεται 3 αιώνες αργότερα, όταν ο Χρύσανθος Νοταράς στην *ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΑ ΓΕΩΓΡΑΦΙΚΑ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΙΚΑ* (1716) χρησιμοποιεί τον “*κανόνα του λεγομένου Σίνου*” για να προσδιορίσει την απόσταση δύο πόλεων πάνω στη γήινη σφαίρα. Η ελληνική μαθηματική ορολογία βρίσκεται μόλις ένα βήμα πριν από την υιοθέτηση μιας πραγματικότητας, την οποία επιβάλλει η διεθνής επιστημονική πρακτική και η τάση για ομογενοποίηση.

Η πρωτοβουλία του Μεθόδιου Ανθρακίτη να πλάσσει και να χρησιμοποιήσει λίγα χρόνια αργότερα στην *ΟΔΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ* (1749) τον όρο *ημίτονο* υπήρξε, από πολλές πλευρές, μια πράξη ιδιοφυής και επαναστατική. Πρώτον, γιατί ανέτρεψε μια εξέλιξη που φαινόταν προδιαγεγραμμένη και αναπόφευκτη. Δεύτερον, γιατί κατάφερε να αποκαταστήσει μια σχέση “σημαίνοντος – σημαινόμενου” που φαινόταν να έχει χαθεί οριστικά. Και τρίτον γιατί, μέσα από ένα σύντομο ορισμό, ανέδειξε με σχεδόν ποιητικό τρόπο την εννοιολογική εξέλιξη και συνέχεια ανάμεσα στις αρχαίες *υποτείνουσες ευθείες* και τις νεώτερες *ημιχορδές*:

Ημίτονον εστίν η ημισεία υποτεινούσης διπλασίου τόξου.

Παραγωγική μέθοδος και Οπτική μέθοδος για την δραστηριότητα της απόδειξης στην γεωμετρία

Κώστας Νικολαντωνάκης
Δρ Ιστορίας Μαθηματικών , Τεχνικό Μουσείο Θεσσαλονίκης

«Το να λες είναι καλό, το να βλέπεις είναι καλύτερο, το να αγγίζεις είναι τέλειο»
Κινέζικη παροιμία

«Μια εικόνα αξίζει όσο χίλιες λέξεις»
Κινέζικη παροιμία

Εισαγωγή

Τι θα μπορούσαν να ήταν τα μαθηματικά στερημένα από αξιώματα, ορισμούς, θεωρήματα, υποθετικό-παραγωγικούς συλλογισμούς, με μια λέξη τα μαθηματικά στερημένα από ότι τα κάνει αυτό που είναι σήμερα ;
Αυτά θα ήταν χωρίς αμφιβολία μια σειρά από τετριμμένες συλλογές αριθμητικών συνταγών, μια λογιστική, θα μπορούσε να ήταν η απάντησή μας. Στις γεωμετρικές αποδείξεις, πρέπει να αφηγείσαι και να κοιτάς ένα σχήμα. Στην κινέζικη γεωμετρική απόδειξη «χωρίς λόγια», το παιχνίδι των χρωμάτων έχει ως λειτουργία να προτείνει μια πορεία σκέψης η οποία ταυτίζει τον συλλογισμό με την κίνηση του σχήματος, ενώ στην ελληνική γεωμετρική απόδειξη, ο λόγος έχει ως λειτουργία να περιγράψει ένα σχήμα ακίνητο και να σηματοδοτήσει την πορεία της «αλήθειας που λέγεται». Αυτή η πρώτη σύγκριση δηλώνει την θέση του γεωμέτρη μεταξύ της κίνησης και της προσήλωσης στον λόγο και το σχήμα. Υπό αυτή την οπτική γωνία θα εξετάσουμε ορισμένες γεωμετρικές αποδείξεις του Ευκλείδη και του Liu Hui, αφού δώσουμε αρχικά κάποια στοιχεία που αφορούν τα κινέζικα μαθηματικά, σαφώς λιγότερο γνωστά και μελετημένα σε σχέση με τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά.

Κινέζικα Μαθηματικά

Τα μαθηματικά που αναπτύχθηκαν στην Κίνα περιέχουν σημαντικά αποτελέσματα, τα οποία δεν στηρίζονται σε συλλογισμούς απόλυτα παραγωγικούς. Αυτά τα αποτελέσματα βασίζονται ωστόσο σε συνεπείς και πειστικές λειτουργικές μεθόδους, σε μαθηματικά λογικά δικαιολογημένα. Είμαστε λοιπόν μπροστά σε μια μαθηματική παράδοση, μη Δυτική, της αρχαιότητας και του Μεσαίωνα, η οποία δίνει ιδιαίτερη σημασία στην απόδειξη, αν και πρόκειται για έναν ιδιαίτερο είδος απόδειξης, η οποία κάνει επίκληση στην οπτική πραγματικότητα. Η εγκυρότητα των κινέζικων συλλογισμών βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στην άμεση μαρτυρία της όρασης. Γι' αυτό, στα κινέζικα μαθηματικά μπορούμε να μιλήσουμε για «δείχνω» αντί για αποδεικνύω. Ωστόσο, το άμεσα οπτικό δεν πρέπει συστηματικά και άκαμπτα να έρχεται σε αντίθεση με το αφηρημένο-επαγωγικό, διότι το αποδεικτικό σύστημα των κινέζων δεν περιορίζεται μόνον στην μαρτυρία των ματιών, βασίζεται επίσης σε ένα ολόκληρο εργοτάξιο έξυπνων και λειτουργικών μεθόδων σχετικά με σύνθετους χειρισμούς επιφανειών και όγκων.

Πιο συγκεκριμένα, τα κινέζικα μαθηματικά χρησιμοποιούν την αρχή αμεταβλητότητας των επιφανειών και των όγκων ορίζοντας, ότι κάθε σχήμα του επιπέδου ή του χώρου διατηρεί την ίδια επιφάνεια (ή τον ίδιο όγκο) όταν είναι κομματιασμένο σε έναν αριθμό κομματιών και στην συνέχεια αυτά επανενωθούν σε μια άλλη μορφή.

Οι κινέζοι μαθηματικοί εκτελούν μετακινήσεις των κομματιών. Οι αθροιστικές ισότητες των επιφανειών ή των όγκων που παράγονται με αυτό τον τρόπο αφορούν δύο σχήματα διακριτά δηλ. από την μια μεριά ένα πρώτο σχήμα που δίνεται στην αρχή το οποίο κομματιάζεται με έναν ad hoc τρόπο και από την άλλη μεριά ένα δεύτερο σχήμα που κατασκευάζεται από το πρώτο με επανένωση. Ορισμένες φορές μελετούν περισσότερα αντίτυπα από το ίδιο σχήμα. Έχουν λοιπόν να κάνουν με επιφάνειες ή με όγκους που πολλαπλασιάζονται. Αλλά εκτός από την πρόσθεση ή τον πολλαπλασιασμό, χρησιμοποιούν επίσης την διαίρεση ή την αφαίρεση των επιφανειών ή των όγκων.

Τι είναι λοιπόν τα σχήματα των κινέζων ; Αντικείμενα σκέψης ή υλικά αντικείμενα ; Τα κείμενα που έχουν φτάσει ως εμάς μας πληροφορούν ότι ο μαθηματικός πρέπει να χειριστεί τα κομμάτια. Ο όρος που χρησιμοποιείται για να περιγράψει αυτά τα κομμάτια -qi- αφήνει να εννοηθεί ότι πρόκειται για πραγματικά αντικείμενα, όπως τα κομμάτια ενός οποιουδήποτε παιχνιδιού. Αυτά τα κομμάτια είναι χρωματισμένα, κίτρινο, κόκκινο και μπλε, γεγονός που μας επιτρέπει να τα ξεχωρίζουμε μεταξύ τους. Επίσης τα αντίστοιχα κείμενα αφθονούν σε ρήματα που εκφράζουν συγκεκριμένες δράσεις, οι οποίες πρέπει να εκτελεστούν με τα κομμάτια, τέτοιες όπως: κόβω, στριφογυρίζω, μετακινώ, κλείνω (ένα κενό), γεμίζω, κομματιάζω.

Τα παραδείγματά μας υπάρχουν στο εγχειρίδιο Jiuzhang suanshu (Εννέα κεφάλαια για την τέχνη του υπολογισμού), το οποίο είναι το αρχαιότερο κινέζικο εγχειρίδιο μαθηματικών που έφτασε μέχρι εμάς, και μας μεταφέρει στην δυναστεία των Χαν (206 π.Χ.–220 μ.Χ.). Αποτελείται από μια σειρά προβλημάτων τα οποία συνοδεύονται από τις συνταγές επίλυσής τους. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι αυτές οι συνταγές διαθέτουν και τις αποδείξεις τους. Ωστόσο αυτές οι αποδείξεις δεν είναι τόσο αρχαίες όσο το πρωτότυπο κείμενο, τις βρίσκουμε σε διάφορα σχόλια* που δημοσιεύονται από τα τέλη του 3^{ου} αιώνα της περιόδου μας.

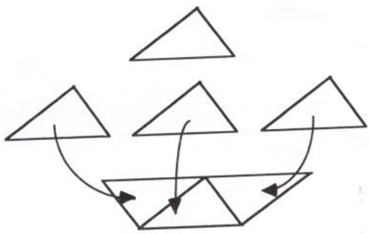
Όπως έφτασαν μέχρι εμάς, το κείμενο και τα σχόλια του δεν περιέχουν σχήματα. Τα σχήματα που θα παρουσιάσουμε στην συνέχεια είναι αναπαράσταση που στηρίζεται στα κείμενα ορισμένων σχολιαστών, δηλ. αυτές οι αναπαραστάσεις δεν είναι τυχαίες. Τα αρχαιότερα σχόλια που περιέχουν συστηματικά σχήματα μας πηγαίνουν μέχρι τον 18^{ο} αιώνα. Αυτή την περίοδο, πολλοί μορφωμένοι, υπό την αιγίδα του αυτοκράτορα Qialong (1736-1796) έκαναν μια προσπάθεια να εκδώσουν και να αποκαταστήσουν κριτικά ορισμένα σημαντικά και αξιόλογα κείμενα της κινέζικης παράδοσης.

Αποδεικτικός λόγος

Τι εκφράζεται μέσω του αποδεικτικού λόγου ?

Αυτή η ερώτηση προσπαθεί να διαχωρίσει από την μία μεριά, αυτό που παρατηρείται από την ματιά ενός σχήματος ως αίσθηση, δηλ. αυτό που είναι ένα απλό γεγονός και από την άλλη μεριά, αυτό που παρατηρείται από την όψη ενός σχήματος ως αντίληψη, δηλ. αυτό που είναι μια πράξη που φέρει έναν σκοπό, μια πρόθεση. Αν το πούμε διαφορετικά πρόκειται για μια αντίθεση του αισθητού με το νοητικό.

Ας θεωρήσουμε τρία σχήματα του ίδιου τριγώνου, τα οποία τα τοποθετήσαμε με έναν ιδιαίτερο τρόπο. Αυτή η τακτοποίηση εστιάζει το κοίταγμά μας προς την αντίληψη των τριών γωνιών του τριγώνου, γεγονός που μας οδηγεί να αντιληφθούμε ότι το γεωμετρικό άθροισμα αυτών των τριών γωνιών είναι μια επίπεδη γωνία. Αυτό συμβαίνει διότι οι τρεις γωνίες αυτής της τακτοποίησης είναι, κατά περίπτωση, τα «ίδια και διαφορετικά» τρίγωνα, διότι οι θέσεις τους στο χαρτί είναι διαφορετικές. Η εκφώνηση δηλαδή σχετικά με το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου υπαγορεύεται από μια αναγκαιότητα νοητική.

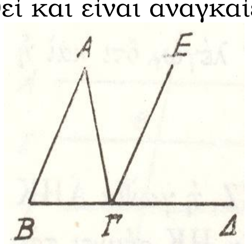


Η εκφώνηση σχετικά με το άθροισμα των γωνιών δεν αναφέρεται μόνον σε αυτό το τρίγωνο που βρίσκεται μπροστά στα μάτια μας, αλλά σε οποιοδήποτε τρίγωνο. Η κατασκευή του σχήματος απαιτεί μια κίνηση του σώματος. Μπορούμε να σκεφθούμε αυτή την κίνηση όπως αυτές των τριών αντιτύπων του τριγώνου που έρχονται να κολλήσουν σε μια τακτοποίηση καθώς και όπως αυτή του χεριού μας που φέρει αυτά τα τρία αντίτυπα. Δεν είναι ούτε ο ορισμός του τριγώνου ούτε η αντίληψη του τριγώνου ως ιδεατό σχήμα, που μας οδηγούν στην κατασκευή. Η εκφώνηση δεν χρειάζεται τον ορισμό του τριγώνου αλλά μια άλλη κίνηση, αυτή του βλέμματος, της ματιάς. Η κίνηση του ματιού επιτρέπει να δούμε κατά περίπτωση τις τρεις γωνίες ως αυτές του τριγώνου και ως αυτές που δημιουργούν μια επίπεδη γωνία. Η απόδειξη προσπαθεί να εισάγει το άθροισμα των γωνιών που έχει κατασκευαστεί σε δύο διαφορετικές κατευθύνσεις, και να ειδωθεί ως (1) ίσο με το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου και (2) ίσο με δύο ορθές. Κάθε γωνία παρατηρείται δύο φορές, είναι κατά περίπτωση η «ίδια και διαφορετική» από την αλλαγή της θέσης της.

Το πέρασμα από το τρίγωνο αντικείμενο ως θέση της όρασης, στο τρίγωνο αντικείμενο ως θέση της νόησης, πραγματοποιείται από μια κίνηση του σώματος, από την αντιγραφή-επικόλληση και μια κίνηση του ματιού, από τα «ίδια και διαφορετικά». Μέσω αυτού του περάσματος η νόηση διατυπώνει την ανάγκη της γεωμετρικής εκφώνησης: το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές γωνίες.

Με ποιόν τρόπο εκφέρεται ο αποδεικτικός λόγος ?

Ας εξετάσουμε με ποιόν τρόπο εκφράζεται αυτή η ανάγκη διαβάζοντας την απόδειξη της πρότασης 32 του 1ου βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Υπενθυμίζουμε ότι το έργο του Ευκλείδη αποτελεί ένα αξιωματικό-παραγωγικό σύστημα, κάθε βιβλίο ξεκινά από μια σειρά ορισμών και αξιωμάτων και στη συνέχεια κάθε απόδειξη προκύπτει από αξιώματα και προηγούμενες προτάσεις (θεωρήματα ή προβλήματα). Σε αυτό το σημείο θα ασχοληθούμε αρχικά με το σχήμα της πρότασης 32 και με τον λόγο που συνοδεύει αυτό το σχήμα. Το σχήμα πάνω στο οποίο στηρίζεται ο λόγος είναι ένα ακίνητο σχήμα και είναι το προηγούμενο σχήμα κουτσουρεμένο κατά ένα μέρος. Εδώ παραμένουν μόνον τα αναγκαία στοιχεία που επιτρέπουν να συνάγουμε το αποτέλεσμα. Δεν υπάρχουν τρία τρίγωνα, αλλά ένα τρίγωνο και δύο ευθείες, η πρώτη προεκτείνει μια ευθεία που ορίζει το τρίγωνο και η δεύτερη είναι παράλληλη σε μια ευθεία που ορίζει επίσης το τρίγωνο. Ενώ το σχήμα που αποτελούνταν από τα τρία τρίγωνα έκανε την εκφώνηση αναγκαία, εδώ οι ευθείες έχουν προστεθεί και είναι αναγκαίες στον λόγο.



Θα χαρακτηρίσουμε αντίστοιχα με σύμβολα (σ) και (ο) τα στοιχεία του λόγου που τοποθετήθηκαν στην θέση των κινήσεων του σώματος και του ματιού (όρασης).

Σε κάθε τρίγωνο, όταν προεκτείνουμε μια πλευρά, η εξωτερική γωνία είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών, και το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές.	
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ας προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ μέχρι το σημείο Δ. Λέω, ότι η εξωτερική γωνία ΑΓΔ είναι ίση με τις δύο απέναντι εσωτερικές γωνίες τις ΓΑΒ, ΑΒΓ και οι τρεις εσωτερικές γωνίες οι ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ είναι ίσες με δύο ορθές.	(σ)
Ας φέρουμε από το σημείο Γ την ΓΕ παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ (θ.31).	(σ)
Επειδή η ΑΒ είναι παράλληλη προς την ΓΕ και αυτές τέμνονται από την ΑΓ, οι εναλλάξ γωνίες ΒΑΓ, ΑΓΕ είναι ίσες μεταξύ τους (θ. 29).	
Στη συνέχεια, επειδή η ΑΒ είναι παράλληλη προς την ΓΕ και τέμνονται από την ΒΔ, η εξωτερική γωνία ΕΓΔ είναι ίση με την απέναντι εσωτερική ΑΒΓ (θ.29).	(ο)
Και δείξαμε επίσης ότι η γωνία ΑΓΕ είναι ίση με την ΒΑΓ.	
Άρα όλη η γωνία ΑΓΔ είναι ίση με τις δύο απέναντι εσωτερικές τις ΒΑΓ, ΑΒΓ	(ο)
(κοινή έννοια 2).	(ο)
Ας προστεθεί σε αυτές η κοινή ΑΓΒ. Άρα οι γωνίες ΑΓΔ, ΑΓΒ είναι ίσες με τις τρεις γωνίες ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ (κοινή έννοια 2).	(ο)
Αλλά οι γωνίες ΑΓΔ, ΑΓΒ είναι ίσες με δύο ορθές (θ.13). Άρα οι ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ είναι ίσες με δύο ορθές (κοινή έννοια 1).	(ο)
	(ο)

Όσον αφορά την κίνηση του σώματος, οι φράσεις που φανερώνουν την προέκταση μιας ευθείας και την χάραξη μιας παράλληλης, δηλώνουν ότι αυτές οι ευθείες έχουν χαραχθεί. Αντίθετα το «εγώ» είναι που λέει, που προφέρει τον λόγο. Όσον αφορά την κίνηση του ματιού, το διπλό κοίταγμα στις γωνίες υποδηλώνετε από τις λέξεις «επίσης» και «αλλά». Οι λέξεις «άρα» και «επειδή» χρησιμοποιούνται για τις ισότητες των εσωτερικών και εξωτερικών γωνιών του τριγώνου που εξάγονται από την πρόταση 29 του 1ου βιβλίου των *Στοιχείων* και από την ισότητα των αθροισμάτων που συνάγονται από την κοινή έννοια 2. Με αυτό τον τρόπο, η κίνηση του σχήματος, δηλ. αυτή του σώματος και αυτή του ματιού έχουν αντικατασταθεί από ένα ξετύλιγμα, αυτό του λόγου αυτού που προφέρει.

Οι ορισμοί του Ευκλείδη ορίζουν τα ακίνητα σχήματα. Ο ορισμός 15 σχετικά με τον κύκλο και ο ορισμός 19 σχετικά με τα τρίγωνα δεν έχουν απαραίτητα έναν λειτουργικό ρόλο στις αποδείξεις αλλά χρησιμοποιούνται κυρίως για να ορίζουν τα αντικείμενα.

Τα αξιώματα του 1ου βιβλίου χωρίζονται σε αιτήματα και κοινές έννοιες. Τα τρία πρώτα αιτήματα απαιτούν ότι είναι πάντοτε δυνατές οι κατασκευές της ευθείας και του κύκλου. Σημειώνουμε ότι αυτές οι κατασκευές με τον κανόνα και τον διαβήτη αντιστοιχούν σε χειρισμό οργάνων. Τα αιτήματα δηλώνουν, υπό μορφή λόγου, τις κινήσεις που διευθύνουν τις κατασκευές των ακίνητων σχημάτων των ορισμών και των αποδείξεων. Επιτρέπουν να κατασκευαστεί μια αφθονία σχημάτων, συμπληρωματικών ευθειών, οι οποίες είναι αναγκαίες στις αποδείξεις.

Το 4ο αίτημα βεβαιώνει την ισότητα των ορθών γωνιών. Το 5ο αίτημα επιτρέπει να κριθεί η τομή των δύο ευθειών τοπικά, ή ακόμη όπου το μάτι μπορεί να αναπληρώσει το χέρι.

Αιτήματα

1.	Ζητείται να γίνει παραδεκτό ότι από οποιοδήποτε σημείο στο οποιοδήποτε σημείο άγεται ευθεία γραμμή.	(σ)
2.	Και πεπερασμένη ευθεία προεκτείνεται σε ευθεία κατά τρόπο συνεχή.	(σ)
3.	Και με οποιοδήποτε κέντρο και διάστημα γράφεται κύκλος.	(σ)
4.	Και όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.	(ο)
5.	Και αν ευθεία που συναντάει δύο ευθείες σχηματίζει δύο εσωτερικές και προς το ίδιο μέρος γωνίες που έχουν άθροισμα μικρότερο των δύο ορθών, τότε οι δύο ευθείες προεκτεινόμενες επ' άπειρο συναντιούνται σε κείνα τα μέρη τους όπου βρίσκονται οι μικρότερες των δύο ορθών.	(ο) (σ)

Οι κοινές έννοιες αφορούν το «ίδιο και διαφορετικό», την κίνηση του ματιού. Η πρώτη κοινή έννοια δηλώνει ότι τα ίσα προς το ίδιο είναι και μεταξύ τους ίσα.

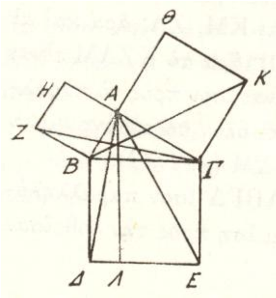
Κοινές έννοιες

1.	Αυτά που είναι ίσα προς το ίδιο είναι και μεταξύ τους ίσα	(ο)
2.	Και εάν σε ίσα προστεθούν ίσα, τα προκύπτοντα είναι μεταξύ τους ίσα.	(ο)
3.	Και εάν από ίσα αφαιρεθούν ίσα, τα υπόλοιπα είναι μεταξύ τους ίσα.	(σ)
4.	Και εάν σε άνισα προστεθούν ίσα, τα προκύπτοντα είναι άνισα.	(ο)
5.	Και τα διπλάσια του αυτού είναι μεταξύ τους ίσα.	(σ)
6.	Και τα του αυτού μισά είναι μεταξύ τους ίσα.	(ο)
7.	Και αυτά που εφαρμόζουν το ένα πάνω στο άλλο είναι ίσα μεταξύ τους..	(σ)
8.	Και το όλο είναι μεγαλύτερο από το μέρος.	(σ)
9.	Και δύο ευθείες δεν περικλείουν επιφάνεια.	(σ)

Ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί πολύ λίγο την 7η κοινή έννοια. Συγκεκριμένα στην 4η πρόταση του 1ου βιβλίου των *Στοιχείων*, δηλ. στην πρώτη περίπτωση ισότητας τριγώνων, του επιτρέπει να ταυτίσει δύο τρίγωνα το ένα πάνω στο άλλο. Η ισότητα σημαίνει σε αυτή την περίπτωση δύο γεγονότα (1) ότι δύο σχήματα μπορεί να κατέχουν τον ίδιο τόπο και (2) μια αλλαγή του τόπου.
Όταν ένας έλληνας γεωμέτρης γράφει ότι δύο σχήματα είναι ίσα, αυτό δεν σημαίνει ότι είναι απαραίτητα τοποθετημένα το ένα πάνω στο άλλο, αλλά αυτό μπορεί να σημαίνει ότι οι επιφάνειές τους είναι ίσες.
Οι κοινές έννοιες 2 και 3 αναφέρονται στην δυνατότητα προσθήκης και αφαίρεσης ίσων αντικειμένων σε ίσα. Προσθέτω και αφαιρώ δεν έχουν εδώ μια αριθμητική σημασία. Πρόκειται για γεωμετρικές κατασκευές, προσθέτω μια ευθεία σε μια άλλη σημαίνει ότι προεκτείνω την πρώτη με την δεύτερη, προσθέτω δύο σχήματα σημαίνει να τα παραθέσω, όπως εκτελεί στο 2ο βιβλίο των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης.
Στις κοινές έννοιες όπως και στα αιτήματα, ένας λόγος κίνησης εκφράζει τις κατασκευές των σχημάτων. Στις αποδείξεις των προτάσεων, τα σχήματα περιγράφονται με παθητικό τρόπο και ο στοχασμός εκτελείται μέσω της ακινησίας τους.
Είπαμε ότι το πέρασμα από το τρίγωνο αντικείμενο της όρασης στο τρίγωνο αντικείμενο της νόησης πραγματοποιείται από μια κίνηση του σώματος και από μια κίνηση του ματιού. Στον αξιωματικό λόγο το πέρασμα από το αντικείμενο του ορισμού σε αυτό που θα γίνει το ακίνητο αντικείμενο της απόδειξης πραγματοποιείται από τα αξιώματα, όπου ορίζονται οι κινήσεις του σώματος, τις κατασκευές και τις κινήσεις του ματιού μέσα από τους μετασχηματισμούς των ισοτήτων.

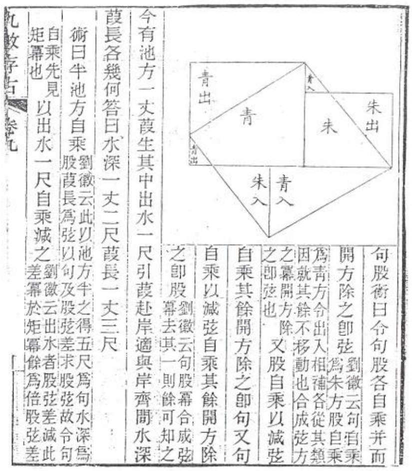
Το θεώρημα του Πυθαγόρα: Ελληνική και Κινέζικη απόδειξη

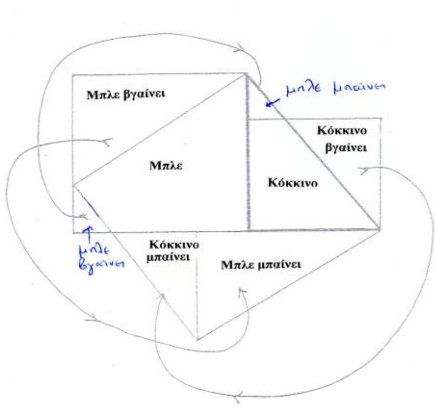
Η απόδειξη του Ευκλείδη στοχάζεται ένα σχήμα όπου προστέθηκαν οι απαραίτητες ευθείες στον παραγωγικό λόγο, δηλ. οι κάθετες ΑΛ και οι ευθείες ΖΓ, ΒΚ, ΑΔ και ΑΕ. Πρέπει να αποδειχθεί ότι το τετράγωνο ΒΓΔΕ είναι ίσο (σε επιφάνεια) με το άθροισμα των τετραγώνων ΑΒΖΗ και ΑΓΚΘ. Αυτή η πρόταση είναι η προ-τελευταία του 1ου βιβλίου και η απόδειξη συνάγεται από έναν σημαντικό αριθμό προτάσεων που προηγούνται, ιδιαίτερα, οι προτάσεις που διατυπώνουν ότι δύο παραλληλόγραμμα με ίδια βάση και που βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων είναι ίσα (σε επιφάνεια) και ένα τρίγωνο είναι ίσο σε επιφάνεια με ένα παραλληλόγραμμο με ίδια βάση και που βρίσκεται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων. Η απόδειξη είναι αρκετά μακροσκελής, διότι ο Ευκλείδης προσπαθεί επίσης να αποδείξει την συνευθειακότητα των ΑΓ και ΑΗ του τετραγώνου που έχει κατασκευαστεί στην ΑΒ. Χρησιμοποιεί αρκετά σημαντικό αριθμό από «επειδή» και «άρα».



Το σχήμα του Πυθαγορείου Θεωρήματος από τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη (Πρόταση 47, 1ο βιβλίο).

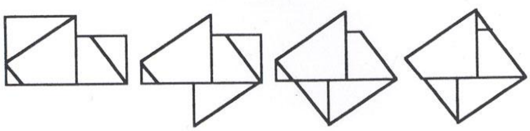
Η ευκλείδεια απόδειξη βασίζεται στην λογική προφάνεια αντί για την γεωμετρική προφάνεια, σε έναν λόγο και όχι στην αντίληψη του σχήματος. Η απόδειξη μας εγκαταλείπει στο γιατί, διότι δεν γνωρίζουμε γιατί πρέπει να χαράξουμε όλες αυτές τις συμπληρωματικές γραμμές που επιτρέπουν να συμπεράνουμε και διότι δεν αναφέρει γιατί ο γεωμέτρης σκέφτηκε αυτή την εκφώνηση αληθή, κάτι το οποίο είναι αναγκαίο πριν την απόδειξη.
Σχετικά με το πρώτο πρόβλημα του κεφαλαίου 9 του Jiuzhang suanshu, ο σχολιαστής – μαθηματικός Liu Hui (περίπου 270 μ.Χ.) παρουσιάζει επίσης το θεώρημα του Πυθαγόρα ξεκινώντας από ένα σχήμα (που δυστυχώς έχει χαθεί) στο οποίο μετακινεί κάποια μέρη. Η ακριβής λεπτομέρεια της τεχνικής του δεν μας είναι απόλυτα γνωστή αλλά η φύση της δεν αφήνει αμφιβολία, πρόκειται για μια ανατομή (dissection). Παρακάτω παρουσιάζουμε μια αναπαράσταση του σχήματος του Liu Hui. Σύμφωνα με αυτή την αναπαράσταση, ξεκινώντας από ένα τρίγωνο ορθογώνιο, στις πλευρές του οποίου σχεδιάσαμε τα αντίστοιχα τετράγωνα, με τέτοιον τρόπο ώστε το (φυσικό) τετράγωνο της υποτείνουσας καλύπτει μερικώς καθένα από τα δύο φυσικά τετράγωνα των δύο πλευρών της ορθής γωνίας. Η υποκείμενη ιδέα σε αυτή την κατασκευή διασφαλίζει την δυνατότητα να ανασχηματιστούν φυσικά το τετράγωνο της υποτείνουσας καλύπτοντας τα άλλα δύο τετράγωνα των πλευρών της ορθής γωνίας. Το κείμενο του κινέζικου σχήματος μας δίνει λακωνικά πληροφορίες σχετικά με το σχήμα δηλ. τις ακόλουθες οδηγίες: κόκκινο βγαίνει και μπλε μπαίνει. Αυτές οι οδηγίες σημαίνουν ότι πρέπει να βγάλεις κάποια κομμάτια κόκκινα και μπλε με σκοπό να τα κάνεις να μπουν στην θέση των κομματιών που αντιστοιχούν στο ίδιο χρώμα με αυτά.
Η απόδειξη του Lui Hui δεν χρησιμοποιεί λόγο παρά μόνον τέσσερις λέξεις μπλε, κόκκινο, βγαίνει και μπαίνει.


今有池方一丈葭生其中出水一尺引葭赴岸適與岸齊問水深葭長各幾何答曰水深一丈二尺葭長一丈三尺
術曰半池方自乘以出水一尺自乘減之
句股術曰句股各自乘并而開方除之即弦
又股自乘以減弦自乘其餘開方除之即句又句自乘以減弦自乘其餘開方除之即股



Το Θεώρημα του Πυθαγόρα όπως αποδεικνύεται με την ανατομή

Οι λέξεις μπαίνει και βγαίνει υποδεικνύουν τις κινήσεις του σώματος και οι λέξεις μπλε και κόκκινο τις κινήσεις του ματιού που αντιλαμβάνεται τα σχήματα που είναι τα ίδια. Το σχήμα του Lui Hui όπως μπορούμε να το δούμε αποκαθιστώντας μια προς μια όλες τις φάσεις της κατασκευής που ξεκινά από τα δύο τετράγωνα που κατασκευάζονται στις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου για να ληφθεί το τετράγωνο της υποτείνουσας.



Ο παλμός μεταξύ του επαγωγικού και του οπτικού

Ο Lui Hui γράφει «αν διευκρινίζουμε με πρόζα και διαφωτίζουμε με τις εικόνες, τότε θα είμαστε ικανοί να αγγίξουμε την λακωνικότητα το ίδιο καλά με την κατανόηση, την καθαρότητα το ίδιο καλά με την ακρίβεια». Οι δύο προηγούμενες αποδείξεις αντιστοιχούν σε δύο σημασίες της απόδειξης, αυτής του φωτίζω και αυτή του πείθω, η πρώτη από την μεριά της όρασης (όψης) του σχήματος και η δεύτερη από την μεριά του λόγου. Η φράση του Lui Hui προφέρει μια συμμαχία του παραγωγικού και του οπτικού. Η μαθηματική απόδειξη χρειάζεται το παραγωγικό να μην απορρίπτει το οπτικό καθώς και το οπτικό να μην απορρίπτει το παραγωγικό. Η συνύπαρξη του παραγωγικού με το οπτικό δείχνει από την μεριά του δασκάλου των μαθηματικών την βούληση να φωτίσει και να πείσει.

Ο αποδεικτικός λόγος έχει αποκρυσταλλωθεί μέσα στην σελίδα αλλά η γραφή ή η μελέτη αυτού του κειμένου πραγματοποιείται μέσα σε ένα ασταμάτητο παλμό της σκέψης μεταξύ του ακίνητου του κειμένου και την δυνατότητα της κίνησης των σχημάτων. Οι κινήσεις του ματιού που κοιτάει τα σχήματα δεν αναφέρονται μέσα στο κείμενο. Αλλά παράδοξα, η σαφήνεια του κειμένου χρειάζεται αυτό που δεν έχει ειπωθεί να δανειστεί από την σκέψη.

Η αναγκαιότητα της εκφώνησης δεν υποδεικνύεται από την πορεία του λόγου, αλλά η κίνηση και τα χρώματα υποδεικνύουν μια νοητική πορεία. Μεταξύ των αποδείξεων, ελληνική και κινέζικη, υφίσταται μια ανατροπή του ακίνητου και του κινητού. Η πρώτη συλλογίζεται ένα σχήμα ακίνητο και ξετυλίγει τον λόγο της, η δεύτερη βασίζεται στην κίνηση του σχήματος και προφέρει μιαν αφήγηση η οποία δεν κινητοποιείται μέσα σε έναν λόγο.

Σημειώσεις

*Αυτό που ονομάζουμε σχόλιο είναι ένα ετερογενές λογοτεχνικό είδος που εστιάζεται γύρω από την επεξήγηση του κειμένου, την φιλολογία, την ιστορική φωνητική, την ιστορία, την γεωγραφία και την λογική εξήγηση. Σχετικά με αυτό το τελευταίο τα κινέζικα σχόλια αναφέρονται στην μαθηματική απόδειξη.

** Η τεχνική που μόλις είδαμε παρουσιάζει κάποια όρια, διότι ότι μπορεί να γίνει για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα δεν σημαίνει ότι εφαρμόζεται με προφανή τρόπο σε ένα άλλο πρόβλημα. Πρέπει δηλ. να υπάρχει μια συνεχής (εφ)ευρετική προσπάθεια κάθε φορά.

Βιβλιογραφία

E. Barbin, Démontrer : convaincre ou éclairer ? Signification de la démonstration mathématique au XVIIe siècle, in *Les procédures de preuve sous le regard de l'historien des sciences et des techniques*, Cahiers d' histoire et de philosophie des sciences, no 40, 1992, p. 29-49.

E. Barbin, La démonstration : pulsation entre le visuel et le discursif, in *Produire et lire des textes de démonstrations*, IRM, Université de Rennes, 2000.

E. Barbin, Η Μαθηματική Απόδειξη : Επιστημολογικές σημασίες και Διδακτικά ζητήματα, *Ζητήματα Ιστορίας των Μαθηματικών*, Όμιλος για της Ιστορία των Μαθηματικών, Νο 18, Μάρτιος 1989.

Jean-Claude Martzloff, Quelques exemples de démonstrations en mathématiques chinoises, in *La démonstration mathématique dans l' histoire*, IREM de Besancon, 1990.

Ε. Σ. Σταμάτη, *Ευκλείδου Γεωμετρία, Στοιχεία, Βιβλία 1, 2, 3, 4. Εισαγωγή-Αρχαίο Κείμενο-Μετάφραση*, ΟΕΔΒ, Αθήνα, 1975.

Δ. Χασάπης, *Διδακτική Βασικών Μαθηματικών Εννοιών, Αριθμοί και Αριθμητικές πράξεις*, Εκδόσεις Μεταίχμιο, 2000.

Η συμπληρωματικότητα αριθμητικής και γεωμετρίας

Αναστάσιος Τοκμακίδης
Δρ. Μαθηματικών – Διαπολιτισμικό Γυμνάσιο Ευόσμου

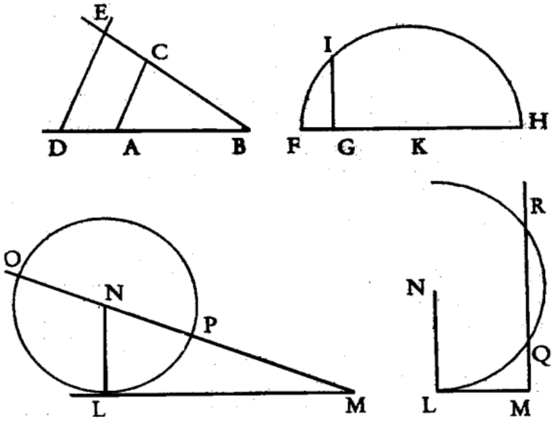
Η έννοια της «συμπληρωματικότητας» πρωτοεμφανίστηκε στην κβαντοφυσική του N. BOHR (1885-1962), για να μπορέσει αφενός να δικαιολογήσει την αλληλεπίδραση που υπάρχει ανάμεσα στις μετρήσεις και τα αντικείμενα ενός φυσικού φαινομένου και αφετέρου να προσαρμόσει με τον καλύτερο δυνατό τρόπο στην καθομιλουμένη την ορολογία αυτής της νέας επιστήμης. Στη συνέχεια, η έννοια αυτή εξελίχθηκε σε θεμελιώδες μεθοδολογικό εργαλείο της σύγχρονης φιλοσοφίας των Μαθηματικών [OYTE 1990b, 1994]. Η συμπληρωματικότητα αριθμητικής και γεωμετρίας έχει άμεση εφαρμογή στη Διδακτική των Μαθηματικών, όπως θα προσπαθήσουμε να σκιαγραφήσουμε στη συνέχεια με τη βοήθεια των εννοιών της ορίζουσας, της ομάδας και των αναλογιών.

Από αρχαιοτάτων χρόνων τα Μαθηματικά θεωρούνταν μία αισθητική, οπτική τέχνη, με την ανάπτυξη της γεωμετρίας να αποτελεί το αποκορύφωμα της ιστορικής τους εξέλιξης. Ειδικότερα η γεωμετρία των αρχαίων Ελλήνων είχε δύο χαρακτηριστικά γνωρίσματα: Από τη μία πλευρά προσπαθούσε «να συλλάβει ενορατικά τις μαθηματικές οντότητες σε άμεση πνευματική θεώρηση» [BOUTROUX, 75] και από την άλλη *αντανακλούσε μία αρμονία μεταξύ του αντικειμένου και των μέσων της,* όπου η επόπτη-α των αντικειμένων θα έπρεπε να καθορίζει και το μεθοδολογικό πλαίσιο αναφοράς.

Ο DESCARTES (1596-1650) έδωσε το τελειωτικό χτύπημα στο ιδεώδες αυτό των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών. Επιχειρώντας να τονίσει εντονότερα το κατασκευαστικό στοιχείο στα Μαθηματικά, έριξε τη «σκιά» του πάνω στο διττό αυτό χαρακτήρα των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών. Μέσα από τη *Géométrie* του, το 1637, δια-τύπωσε, πρώτος αυτός στην Ιστορία των Μαθηματικών, την ταυτότητα της αριθμητικής με τη γεωμετρία χωρίς κανέναν περιορισμό.[1] Μέσα από την ταυτοποίηση αυτή ο DESCARTES ήθελε να πετύχει αυτό που δεν κατάφεραν οι αρχαίοι Έλληνες, *να εισάγει δηλαδή μία συσχέτιση μέσα στο σύνολο της μαθηματικής γνώσης και με τον τρόπο αυτό να διαμορφώσει μία συστηματική βάση για μία ευρύτερη γενίκευση των Μαθηματικών.* Χρησιμοποιώντας τις αριθμητικές δομές και ιδιαίτερα το γεγονός ότι «όλη η αριθμητική περιέχει μόνο τέσσερα είδη πράξεων» ταξινόμησε τα γεωμετρικά προβλήματα και τα συσχέτισε μεταξύ τους. Παρουσίασε, λοιπόν, τα τέσσερα ακόλουθα δια-γράμματα του σχ. 1,

[1] Χαρακτηριστικό είναι το γεγονός ότι ακόμη και στο 16ο αιώνα χρησιμοποιούνταν διαφορετική ορολογία για τις ίδιες πράξεις: “multiplicare”, αν είχαμε να κάνουμε με αριθμούς, “ducere” για τα μεγέθη, αντίστοιχα.

επισημαίνοντας μέσα από αυτά την αλληλουχία των γεωμετρικών κατασκευών με τις αριθμητικές πράξεις.[2]



ΣΧΗΜΑ 1

Έτσι, αφού «όλα τα προβλήματα της συνήθους γεωμετρίας μπορούν να κατασκευαστούν με την αποκλειστική εφαρμογή του λιγοστού, που περιέχεται στα τέσσερα ανωτέρω σχήματα», άσκησε την κριτική του στους «αρχαίους», γιατί προφανώς το είχαν παραβλέψει αυτό, «αφού δεν φείδονταν του κόπου της συγγραφής ογκωδών βιβλίων, όπου μπορεί να αναγνωρίσει κανείς μόνο τη διάταξη των θεωρημάτων τους, ενώ *φαίνεται πως δεν κατείχαν την αληθινή μέθοδο,* που παρέχει όλα αυτά τα θεωρήματα, παρά μόνο συνέλεγαν εκείνες [τις μεθόδους] που συναντούσαν στο διάβα τους» [υπογρ. Α.Τ.] Με τον τρόπο αυτό τέθηκαν οι βάσεις της *αριθμητικοποίησης των Μαθηματικών* του $19^{ου}$ αιώνα, που εκτός από την έννοια του αριθμού είχε στον πυρήνα της και την έννοια της συνάρτησης [OTTE 1990a, ΤΟΚΜΑΚΙΔΗΣ 1990]. Αξίζει να επισημάνουμε εδώ τη σημαντική ώθηση που έδωσε στην καθιέρωση των ορθογωνίων συστημάτων συντεταγμένων η εργασία του A. COMTE, το 1843.

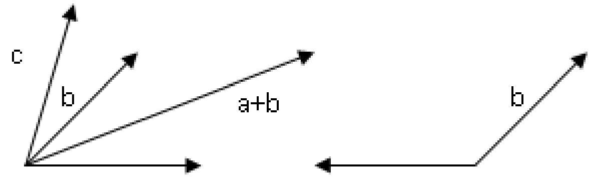
Ο «ίσκιος» αυτός του ΚΑΡΤΕΣΙΟΥ σχολιάστηκε από τον G.W. LEIBNIZ (1646-1716), στο έργο του *Σχετικά με την Ανάλυση της Θέσης (Zur Analysis der Lage),* ως εξής: «Η αναγωγή των γεωμετρικών προβλημάτων στην άλγεβρα, *ο προσδιορισμός δη-λαδή της μορφής ενός σχήματος με εξισώσεις,* αποτελεί μία διεξοδική εργασία· κι ακόμη δυσκολότερη και διεξοδικότερη είναι η αναγκαιότητα να βρεθεί ο δρόμος της επιστροφής από τις εξισώσεις στις κατασκευές, από την άλγεβρα στη γεωμετρία» [LEIB-NIZ, V, 178, υπογρ. Α.Τ.]. Ο H. GRASSMANN (1809-1877), το 1844, στην εισαγωγή της διανυσματικής του θεωρίας *(Ausdehnungslehre),* ασκεί επίσης κριτική στον DES-CARTES: «Στη συνήθη μεθοδολογία, *η εισαγωγή των αυθαίρετων*

2 Τα σχήματα της πρώτης σειράς αφορούν το πρώτο στην κατασκευή του γινομένου (δ΄ ανάλογος) και το δεύτε-ρο στην κατασκευή της τετραγωνικής ρίζας (μέση ανάλογος), ενώ τα άλλα δύο αφορούν στην κατασκευή του α-γνώστου x μίας εξίσωσης β΄ βαθμού, που προκύπτει από την αναγωγή ενός προβλήματος σε αλγεβρική μορφή.

συντεταγμένων, που δεν προσφέρουν τίποτε στο αντικείμενο, συσκοτίζει την κεντρική ιδέα, και ο λογισμός καθίσταται μηχανικιστικός φορμαλισμός, που δεν προσφέρει τίποτε στο νου και που έτσι τον νεκρώνει» [A_1, 9, υπογρ. Α.Τ.]. Και οι δύο, τόσο ο LEIBNIZ όσο και ο GRAS-SMANN, ασχολήθηκαν με τα Μαθηματικά επεκτείνοντας τις εφαρμογές της αριθμητικής στη γεωμετρία μέσα από την ανάπτυξη της ίδιας της έννοιας της άλγεβρας και των αλγεβρικών πράξεων. Η προσπάθεια αυτή παρέμεινε για το LEIBNIZ σε προγραμματικό επίπεδο, αφού ο ίδιος δεν θεωρούσε την άλγεβρα ως γενικευμένη αριθμητική, αλλά υποταγμένη στη συνδυαστική τέχνη *(ars combinatoria),* ενώ στον GRASSMANN καρποφόρησε με την ανακάλυψη της γραμμικής άλγεβρας.

Είναι αλήθεια πως και η καρτεσιανή ταύτιση της αριθμητικής με τη γεωμετρία είχε από τη γένεσή της κιόλας σημαντικές ελλείψεις. Π.χ., ο DESCARTES δεν μπορούσε να ερμηνεύσει γεωμετρικά τις αρνητικές ρίζες των αλγεβρικών εξισώσεων. *Το αρνητικό πρόσημο έχει στο έργο του ΚΑΡΤΕΣΙΟΥ μόνο τελεστική λειτουργία. Έτσι, δεν αποτελεί σύμπτωση το γεγονός ότι τόσο η Γεωμετρία της Θέσης (1803) (Géométrie de Po-sition) του L. CARNOT (1753-1823) όσο και ο Βαρυκεντρικός Λογισμός (1827) (Der baryzentrische Calcül) του A.F. MÖBIUS (1790-1868), αλλά και άλλα σημαντικά έργα του 19ου αιώνα, που στόχευαν στην ανανέωση των Μαθηματικών μέσα από τη συσχέτιση της ανάλυσης με τη γεωμετρία, είχαν ως αφετηρία τους το λεγόμενο «πρόβλημα των ση-μείων». Άλλωστε και η βασική ιδιότητα του εξωτερικού γινόμενου του GRASSMANN, η αντισυμμετρικότητα, προέκυψε μέσα από την «παρατήρηση της αρνητικής διεύθυνσης στη γεωμετρία»* [A_1,1]. Θεωρώντας το παραλληλόγραμμο ως αντικείμενο προκύπτει αμέσως από την ισότητα των εμβαδών του ακόλουθου σχ. 2 η επιμεριστική (γραμμική) ιδιότητα: $c \wedge (a+b) = c \wedge a + c \wedge b$.

Η σημασία της θεμελιώδους αυτής ιδιότητας της γραμμικής άλγεβρας προκύπτει από την αναγκαιότητα της εισαγωγής της ισότητας, αφού για τα διανυσματικά μεγέθη, όπως ξέρουμε, η σχέση $\gamma = \alpha+\beta$ δεν συνεπάγεται την ισότητα των μέτρων $|\gamma| = |\alpha|+|\beta|$. Τέλος, από την ιδιότητα $(a+b)^2 = 0$, *εφόσον δεν μπορεί να κατασκευαστεί παραλληλόγραμμο με μία μόνο πλευρά,* προκύπτει η αντισυμμετρική ιδιότητα $a \wedge b = -a \wedge b$. Η τελευταία μπορεί να ερμηνευθεί με απλούστερο εποπτικό τρόπο, αν δοθεί στις επιφάνειες των παραλληλογράμμων κάποιος προσανατολισμός.



Σχημα 2

Το πρώτο σχεδιάγραμμα του σχ. 1, που αναφέρεται στην καρτεσιανή κατασκευή του γινομένου, μπορεί να ερμηνευθεί και με τη βοήθεια της ομοιότητας. Δεν εξαρτάται, λοιπόν, από κάποια μετρική, εκτός από την ίδια την ευκλείδεια. Έτσι, αποδεικνύεται πως ήταν απαραίτητη για την εξέλιξη των Μαθηματικών του 19^{ου} αιώνα μία θεωρία μετρικών σχέσεων, ανεξάρτητων από κάποια μετρική, που να αναφέρεται στις σχέσεις των αφηρημένων μεγεθών που περιλαμβάνονται στο αντικείμενό της. *Ακριβώς έτσι γεννήθηκε και η γραμμική άλγεβρα· τη στιγμή δηλ. που τα Μαθηματικά αναγνώρισαν ότι το αντικείμενό τους δεν αποτελείται από διάφορα μεγέθη ή αντικείμενα, αλλά από τις μεταξύ τους σχέσεις και αναλογίες.*

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της τάσης των Μαθηματικών του 19^{ου} αιώνα αποτελεί *η έννοια της ορίζουσας D,* όπως εκφράζεται μέσα από το ακόλουθο θεμελιώδες λήμμα της δεύτερης θεωρίας του GRASSMANN, της A_2:

«$Vb_i \equiv Ua_i \ \square\ b_1\wedge\ldots\wedge b_p = D\cdot a_1\wedge\ldots\wedge a_p$» ή «$b_1\wedge\ldots\wedge b_p = \lambda\cdot a_1\wedge\ldots\wedge a_p$ αν και μόνο αν ταυτίζονται οι διανυσματικοί υποχώροι U, V ενός δεδομένου χώρου W, που παράγονται από τα διανύσματα $\{a_i\}$, $\{b_i\}$, $1\leq i\leq p$, αντίστοιχα» [TOKMAKIDIS 1995, 348].

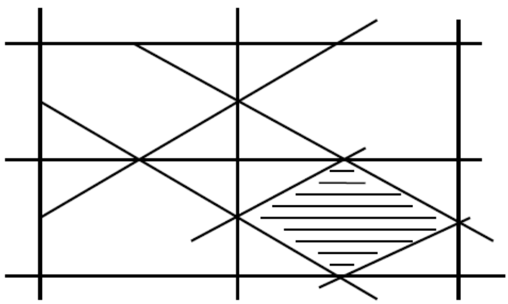
Η θεώρηση αυτής της «κατασκευαστικής αφαίρεσης» [OTTE 1990c] του GRASS-MANN δεν θα μπορούσε να γίνει χωρίς τη βοήθεια της γεωμετρίας. *Στο ίδιο context εντάσσεται και το πιο στοιχειώδες, αλλά εξίσου σημαντικό παράδειγμα του μιγαδικού επιπέδου* [BECKER 1975, 214-216]. *Με τη βοήθειά του ο C.F. GAUSS (1777-1855) επισήμανε πρώτος το γεγονός ότι το περιεχόμενο των μαθηματικών θεωρητικών εννοιών δε συνίσταται στα αντικείμενα αλλά στις μεταξύ τους σχέσεις. Καθόρισε έτσι την απαρχή των σύγχρονων καθαρών Μαθηματικών, που συνήθως αποκαλούνται «δομές».*

Η ορίζουσα, όμως, ακόμη και στην κλασικότερη εφαρμογή της, *στην επίλυση δηλαδή των γραμμικών συστημάτων, εκφράζει* μία παρόμοια δυναμική. Η ιστορική της εξέλιξη [ΤΟΚΜΑΚΙΔΗΣ 1989] μέχρι και τον ορισμό της από τον A.-L. CAUCHY (1789-1857) ως *εναλλάσσουσας συμμετρικής συνάρτησης (fonction symétrique alternée)* [CAYCHY 1815], αποδεικνύει ότι αποτελούσε το κατεξοχήν φορμαλιστικό εργαλείο για την επίλυση αρκετών φυσικομαθηματικών προβλημάτων. Αξίζει να επισημάνουμε εδώ το κίνητρο του πολυγραφότατου, ίσως, αυτού Γάλλου μαθηματικού του 19^{ου} αιώνα, όπως εκφράζεται στην εισαγωγή των *Cours d'analyse: «Σχετικά με τη διδακτική μέθοδο αναζήτησα να δώσω την ίδια αυστηρότητα που απαιτείται και στη γεωμετρία,* ώστε να μη χρειαστεί ποτέ να καταφύγω σε αποδείξεις προερχόμενες από τη γενικότερη ισχύ της άλγεβρας. … αυτού του είδους οι επαγωγικές διαδικασίες οδηγούν σε μία επέκταση των αλγεβρικών τύπων, ενώ οι ίδιες … ισχύουν ως επί το πλείστον μόνο κάτω από ορισμένες συνθήκες και για τις συγκεκριμένες τιμές των μεγεθών που περιέ-χουν. *Προσδιορίζοντας, λοιπόν, επακριβώς αυτές τις συνθήκες και τις τιμές, καθώς και τη σημασία των συμβόλων που χρησιμοποιώ, αίρω κάθε αμφιβολία και οι διάφοροι τύποι παριστάνουν πλέον μόνο σχέσεις μεταξύ πραγματικών μεγεθών»* [HUZLER 1828, viii, υπογρ. Α.Τ.]. Έτσι, *η έννοια* *της συνάρτησης θεμελιώνεται αποκλειστικά από την ιδιότητα της συνέχειας,* που ορίζεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο [CAUCHY 1821, 48 κ.έ], όπως και σήμερα, μέσα από τη συνθήκη: $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$, για $|h| < \delta$.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα της συμπληρωματικότητας της αριθμητικής με τη γεωμετρία μας προσφέρει και *η έννοια της ομάδας*. Η διαμόρφωση αυτής της θεμελιώδους και απλής μαθηματικής έννοιας «ταλαιπώρησε» τους περισσότερους μαθηματικούς του 19^{ου} αιώνα [WUSSING 1969]. Η έννοια της ομάδας θεμελιώνεται πάνω σε μία καθορισμένη δομή. *Ποια είναι, λοιπόν, τα στοιχεία στα οποία αναφέρεται αυτή η δομή; Αν* τα στοιχεία ενός συνόλου, που συνδέονται μεταξύ τους με μία πράξη, επαληθεύουν τους συγκεκριμένους κανόνες της πράξης αυτής, τότε μιλάμε στα Μαθηματικά για μία ομάδα. Με μία πρόταση θα έλεγε κανείς ότι η εξίσωση $a \bullet x = b$ έχει πάντα λύση, $\forall a,b$. Η συγκεκριμενοποίηση της έννοιας της ομάδας αφορά στη συνέχεια τον προσδιορισμό των αόριστων αυτών στοιχείων της. Ας υποθέσουμε, π.χ., ότι έχουμε το διμελές σύνολο 1 και -1 και πως η δεδομένη πράξη είναι ο πολλαπλασιασμός. *Έχουμε, λοιπόν, την αναπαράσταση μίας ομάδας και όχι την ίδια την ομάδα.* Σίγουρα στα Μαθηματικά υπάρχει *μία μοναδική ομάδα με δύο στοιχεία,* που επιτρέπουν, όμως, άπειρες αναπαραστάσεις. Προσδιορίζοντας μάλιστα τον τύπο των στοιχείων και την πράξη που τα συνδέει, οδηγούμαστε σε τελείως διαφορετικές αναπαραστάσεις.

Παρατηρώντας τις γεωμετρικές κινήσεις στο επίπεδο, ας προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε τη διαφορά του Δ από το Ν [πβλ. σχ. 3]. *Ποιοι μετασχηματισμοί, λοιπόν, αφήνουν το γράμμα Δ αναλλοίωτο;* Σίγουρα *ο ταυτοτικός μετασχηματισμός, που αφήνει αμετάβλητη την κατάσταση, και η αξονική συμμετρία.* Έτσι, οδηγούμαστε στο ακόλουθο συμπέρασμα: Η ομάδα όλων των συμμετριών του γράμματος Δ αποτελείται από την ταυτοτική και την αξονική συμμετρία, που αναπαριστά με ξεχωριστό τρόπο η μονοσήμαντα ορισμένη διμελής ομάδα.

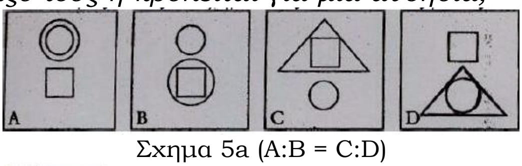
Σχημα 3



Σχημα 4

Με το ίδιο σκεπτικό, οι μετασχηματισμοί που αφήνουν αναλλοίωτο το γράμμα Ν είναι πάλι *ο ταυτοτικός και η περιστροφή κατά 180° περί το*

μέσον του άξονα ή η σημειακή συμμετρία. Πάλι προκύπτει μία παράσταση της ίδιας ομάδας, παρόλο που έχουμε να κάνουμε με δύο διαφορετικές γεωμετρικές απεικονίσεις. Η μία, π.χ., αλλάζει τον προσανατολισμό στο επίπεδο, η άλλη όχι. *Οι συμμετρικές ομάδες του Δ και του Ν ταυτίζονται, σε αφηρημένο επίπεδο μεταξύ τους, δεν ταυτίζονται, όμως, σε γεωμετρικό επίπεδο, πράγμα που επισημαίνεται κι από τη διαφορετική μορφή των γραμμάτων αυτών.* Η συγκεκριμένη εφαρμογή μιας αφηρημένης έννοιας εμπλουτίζει λοιπόν την έννοια αυτή, προσθέτοντάς της κάποια νέα γνωρίσματα. Στην προηγούμενη περίπτωση των δύο γραμμάτων είχαμε την αξονική και τη σημειακή συμμετρία ή περιστροφή, σε μία τρίτη περίπτωση θα έχουμε τους αριθμούς, σε μία τέταρτη τις μεταθέσεις κ.ο.κ. Η περίπτωση της συμμετρικής ομάδας του Δ ή του Α ή του Τ κ.ά. συναντάται και στο σχ. 4, στην περίπτωση των ορθογωνίων και των ρόμβων [WEYL 1960].
Σε όλες τις προηγούμενες κατασκευαστικές γενικεύσεις «δεν έπαιζαν θεμελιώδη ρόλο τα αφηρημένα αντικείμενα αυτά καθαυτά, αλλά οι συγκεκριμένες αναπαραστάσεις τους. Κι αφού κάθε αντικείμενο έχει ποικίλους τρόπους αναπαράστασης, προκύπτουν και ποικίλες δυνατότητες γενίκευσης. Από την άλλη πλευρά, ο αξιωματικός χαρακτηρισμός του αντικειμένου μάς βοηθάει να κυριαρχήσουμε με καθορισμένο τρόπο πάνω σ' αυτήν την πολλαπλότητα και μας απαλλάσσει από τον κόπο των ξεχωριστών αποδείξεων κάθε περίπτωσης, όπως συμβαίνει στην κλασική Ευκλείδεια γεωμετρία» [OTTE 1994, 78]. Έτσι, δεν θα πρέπει να ταυτίζεται το αφηρημένο αντικείμενο με οποιαδήποτε από τις αναπαραστάσεις του.
Από όλα τα προηγούμενα φαίνεται *η σημασία της αναλογίας για τη Διδακτική των Μαθηματικών, αφού αναλογία δεν σημαίνει τίποτε άλλο από τη δομή των σχέσεων που συνδέουν τα μέρη ενός «συστήματος» μεταξύ τους.* Τα προηγούμενα παραδείγματα πάνω στην έννοια της συμμετρίας δείχνουν με χαρακτηριστικό τρόπο τη διαμόρφωση σχέσεων δομών στα Μαθηματικά. Άλλοι μαθηματικοί έχουν την άποψη ότι «η αλγεβρική παράσταση $x^2+y^2+z^2$ έχει περισσότερα κοινά στοιχεία – από πλευράς συμμετρίας – με ένα ισόπλευρο τρίγωνο, παρά με την παράσταση $xy+zt$» [ATIYAH 1974, 214]. Ας σχολιάσουμε, λοιπόν, την έννοια της αναλογίας, όπως αυτή παρουσιάζεται στις απεικονίσεις, στο σχ. 5a και 5b αντίστοιχα [OTTE 1994, 187]. *Είναι ισοδύναμες αυτές οι σχηματικές απεικονίσεις μεταξύ τους ή πρόκειται για μία ανοησία;*

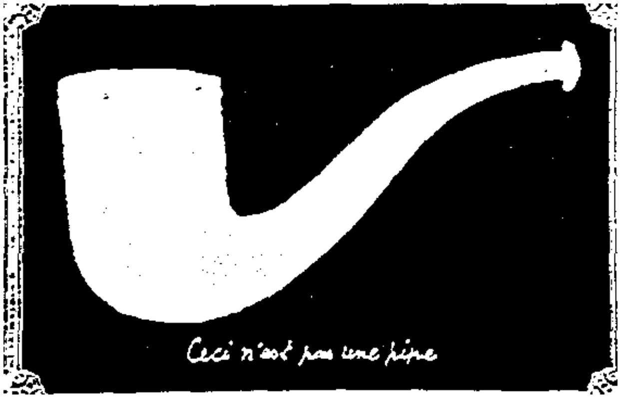


Σχημα 5a (A:B = C:D)

Σχημα 5b

Ξεκινώντας από τη δεύτερη εικονοσειρά παρατηρούμε ότι το σχ. 5b αποτελείται από φιγούρες που σχηματίστηκαν από το γνωστό κινέζικο παιχνίδι *tangrahm.* Και οι 4 φιγούρες έχουν μία κοινή σχέση ως προς την έννοια του «εμβαδού», αφού όλες κατασκευάστηκαν από τα ίδια 7 γεωμετρικά αντικείμενα, άρα είναι ισεμβαδικές. Παρά, λοιπόν, την προφανή διαφορετικότητά τους, το εμβαδόν τους παραμένει αναλλοίωτο [πβλ. εδώ το θεώρημα των Bolyai/Gerwin στον 5ο τόμο της *Enzykopädie der Elementarma-thematik*, σύμφωνα με το οποίο η έννοια του ισεμβαδικού πολύγωνου είναι ισοδύναμη με αυτήν του ισοδιαχωρίσιμου]. Το πρώτο ζεύγος του σχ. 5b μπορεί, π.χ., να περιγραφεί και με λόγια ως «η πτώση του Κινέζου χορευτή». Οι εικόνες του σχήματος αυτού θα λέγαμε ότι ισοδυναμούν με τις μεταβολές που υφίσταται κάποια αλγεβρική εξίσωση από το μαθητή. Όλο το σχ. 5b *«μας δείχνει την παραγωγικότητα της αλγοριθμικής αντίληψης, που βασίζεται στη διαφορετικότητα της ομοιογένειας,* που μπορεί να διαμορφωθεί πάνω στη βάση της διαφοράς του 0 και του 1, όπως καταμαρτυρά ο σύγχρονος ηλεκτρονικός υπολογιστής» [OTTE 1994, 188, υπογρ. Α.Τ.]. Από την άλλη πλευρά, η αναλογία των γεωμετρικών σχημάτων στο σχ. 5a είναι εποπτικά πιο βατή, όμως λιγότερο δυναμική και για το λόγο αυτό πιο αδιαφανής. Δεν διακρίνεται εδώ κάποια σταθερή μαθηματική έννοια, πάνω στην οποία θα μπορούσε να στηριχθεί κανείς, όπως η έννοια του «εμβαδού» στο σχ. 5b. Σίγουρα, όμως, και τα δύο αυτά παραδείγματα αποδεικνύουν για μία ακόμη φορά τον αφηρημένο «αναλλοίωτο» χαρακτήρα των μαθηματικών εννοιών απέναντι στις αναλογίες, όπως αυτός έχει αναδειχθεί και μέσα από τη συνολική εξέλιξη της ιστορίας των επιστημών.

Οι αναλογίες και οι μεταφορές στην ουσία είναι πιο πολυσήμαντες, πιο ευρείες, πιο «υποκειμενικές», πιο ατελείς από τις έννοιες. Αυτό προκύπτει από τη σχεδόν απεριόριστη χρήση τους, αλλά και μέσα από την εύθραυστη φύση τους: «Ποτέ μην πας μακριά με μία αναλογία, γιατί αυτή θα καταρρεύσει σαν χάρτινος πύργος» [HOFSTADTER 1985]. Θα πρέπει, λοιπόν, οι αναλογίες να εφαρμόζονται μόνο σε ξεχωριστές περιπτώσεις σαφών εννοιών και με σχετική οικονομία. Έτσι, επισημαίνουμε το παράδοξο οι αναλογίες να μην έχουν πάντοτε την απαιτουμένη εφαρμοσιμότητα, μολονότι κυριαρχούν στη σκέψη μας και για το λόγο αυτό είναι τόσο σημαντικές. Οι αναλογίες τονίζουν, επίσης, εντονότερα από τις έννοιες το γεγονός ότι όλη η σκέψη εξελίσσεται με σύμβολα. «Και ο δημιουργικός ρόλος των συμβόλων αποκτά τότε μόνο την πραγματική του σημασία, όταν η έννοια και το σύμβολο, η γνώση και η αναπαράστασή της δεν ταυτίζονται μεταξύ τους» [OTTE 1994, 189], όπως πολύ εύστοχα επισημαίνει με τον τρόπο του και ο σουρεαλιστής ζωγράφος René Magritte:



Αν και η φιλοσοφία τόσο του 19ου όσο και του 20ου αιώνα είναι στενά συνυφασμένη με τις προσπάθειες θεμελίωσης των Μαθηματικών, αρκετοί θετικιστές μαθηματικοί δεν εμβαθύνουν σε φιλοσοφικά ζητήματα. Τους αρκεί ένα υπολογιστικό φορμαλιστικό θέμα, όπου μπορούν να εφαρμόσουν όλη τη μαεστρία τους. Για άλλους, όμως, μία εξίσωση που αφήνεται έτσι στον αέρα δεν έχει απολύτως κανένα ενδιαφέρον. «Σ' όλες τις εποχές υπάρχουν μαθηματικοί, βιρτουόζοι στις πράξεις με τα φορμαλιστικά σύμβολα, όπως ακριβώς υπάρχουν βιρτουόζοι μουσικοί, που η τεχνική τους σου κόβει την ανάσα, ακόμη κι αν η μουσική τους ικανότητα είναι ασήμαντη. *Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι και μεγάλοι δάσκαλοι – ο Gauss, ο Riemann κι αργότερα ο Einstein – συμμερίζονταν το ίδιο πάθος για τη σημασία, παρά για τη λαμπρότητα των πράξεων με μαθηματικούς τύπους.* Φυσικά ο Gauss επέδειξε ανυπέρβλητη μαεστρία στο φορμαλισμό, κάτι τόσο αυτονόητο όμως γι' αυτόν, που επισημαίνεται μόνο αν εξυπηρετεί κάποιον απώτερο σκοπό (όπως η εκτέλεση του Bach στο εκκλησιαστικό όργανο). Σ' ένα γράμμα του απορεί μάλιστα, πώς ένας τόσο μεγάλος αναλύστας, όπως ο Lagrange, εντρυφούσε περιστασιακά στις φορμαλιστικές πράξεις χωρίς να σκέφτεται, ενώ ο ίδιος ποτέ δε θα έγραφε μία εξίσωση, αν δε γνώριζε την πραγματική της σημασία (πβλ. τα λόγια αυτά του Gauss με το "σύγχρονο" ορισμό των Μαθηματικών: Ένα απάνθισμα ασήμαντων πράξεων με ασήμαντα σύμβολα)».[3]

Το κείμενο αυτό υπογραμμίζει για μία φορά ακόμη τη «συνεχή διαμάχη» των μαθηματικών εννοιών με τα μαθηματικά σύμβολα, τη συμπληρωματικότητα σημαίνοντος και σημαινόμενου, αναδεικνύοντας την έννοια αυτή και ειδικότερα τη συμπληρωματικότητα αντικείμενου και μεθόδου σε ξεχωριστό εργαλείο της Διδακτικής των Μαθηματικών.

[3] LANCZOS 1970, 251, υπογρ. Α.Τ. Για τον *Riemann,* πβλ. ΤΟΚΜΑΚΙΔΗΣ 1997.

Βιβλιογραφια

ATIYAH M.F., 1974, *Wandel und Fortschritt in der Mathematik,* στο M. OTTE(Hg.), *Mathematiker über die Mathematik,* 203-218, Heidelberg: Springer.

BECKER O., 1975, *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung,* Frankfurt am Main: Suhrkamp.

BOHR N., 1964, *"Komplementarität",* στο *Atomphysik und menschliche Erkenntnis,* Braunschweig: Vieweg.

BOUTROUX P., 1927/1968, *Das Wissenschaftsideal der Mathematiker,* Teubner, Leipzig/Wiesbaden.

CAUCHY A.-L., 1815, *Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suiye des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment,* Œuvres Complètes, 2e Serie, Bd I, 91-169.

—, 1821, *Cours d'analyse,* Œuvres Complètes, 2e Serie, Bd III.

COMTE A., 1843, *Traité élémentaire de géométrie analytique à deux et à trois dimensions,* Paris: Carilian-Coeury & Dalmont.

DESCARTES R., 1923/1969, *Géométrie,* μτφ. L. Schlesinger, Leipzig. Reprint Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

GRASSMANN H., 1844, (A_1), *Die Ausdehnungslehre von 1844,* στο *Gesammelte Mathematische und Physikalische Werke,* hg. F. ENGEL, 1894/1896, I, 1-319.

—, 1862, (A_2), *Die Ausdehnungslehre, vollständig und in strenger Form bearbeitet,* Enslin, Berlin.

HOFSTADTER D.R. 1985, *Gödel, Escher, Bach,* Stuttgart, Klett-Cotta.

HUZLER C.G.B., 1828, *A.L. Cauchys Lehrbuch der algebraischen Analysis,* Königsberg.

LANCZOS C., 1970, *Space through the ages,* Academic Press, London.

LEIBNIZ G.W., 1849-1863/1971, *Mathematische Schriften,* C.I. GERHARDT (Hg.), I - VII, Berlin-Halle. Reprint Hildesheim: Olms.

OTTE M., 1990a, *Stichwort "Funktion",* στην *Europäische Enzyklopädie der Wissenschaften,* 211-214, Hamburg.

—, 1990b, *Stichwort "Komplementarität",* στο ίδιο, 847-849.

—, 1990c, *Gleichheit und Gegenständlichkeit in der Begründung der Mathematik im 19. Jahrhundert dargestellt am Beispiel der Auffassungen von H. Grassmann, B. Bolz-ano und G. Frege,* στο KÖNIG, G.(Hrsg.): *Konzepte des mathematischen Unendlich-en,* 219-268, Göttingen.

—, 1994, *Das Formale, das Soziale und das Subjektive,* Frankfurt am Main: Suhrkamp

ΤΟΚΜΑΚΙΔΗΣ Α., 1989, *Ιστορική καταγωγή της έννοιας της ορίζουσας: Το πέρασμά της από βοηθητικό σύμβολο σε μαθηματική θεωρία,* ΔΙΑΣΤΑΣΗ **4,** 36-63.

—, 1990, *Ελληνική απόδοση του [OTTE 1990a],* Ενημερωτικό Δελτίο του Ομίλου Ιστορίας των Μαθηματικών **14**, 9-15.

—, 1997, *BERNHARD RIEMANN (1826-1866): «Σχετικά με τις υποθέσεις, που θεμελιώνουν τη γεωμετρία»,* ΜΙΚΡΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ & ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙ-ΚΩΝ, Θεσ/νίκη.

TOKAMKIDIS A., 1995, *Der Determinantenbegriff bei Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) und Hermann Günther Grassmann (1809-1877),* Ph.D., Thessaloniki, Aristoteles Universität.

— 1996, *Der Begriff der Determinante in Hermann Günther Grassmanns "Ausdehnungsleh-re",* N.K. Artemiadis & N.K. Stefanidis(eds): *Proceedings of the 4th International Congress of Geometry, 409*-416.

— 1997, *Der Beitrag von A.-L. Cauchy (1789-1857) zur Entwicklung des Determinantenbegriffes,* Br. D'Amore & A. Gagatsis(eds): *Didactics of Mathematics - Technology in Education,* 271-302.

WEYL H., 1960, *Symmetrie,* Basel: Birkhäuser.

WUSSING H., 1969, *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes. Ein Beitrag zur Ensteh-ung der abstrakten Gruppentheorie,* Berlin.

Ιχνηλατώντας τρεις εποχές του σχήματος στα σχολικά μαθηματικά

Κώστας Χατζηκυριάκου
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

Στο πρώτο βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη *όριο* είναι αυτό στο οποίο περατώνεται κάτι (ορισμός 13) και *σχήμα* αυτό που περιέχεται μέσα σε κάποιο όριο ή κάποια όρια (ορισμός 14)[1]. *Κύκλος* τότε είναι το επίπεδο σχήμα που περιέχεται μέσα σε μία γραμμή, που λέγεται *περιφέρεια* και είναι τέτοια που όλα τα ευθύγραμμα τμήματα με το ένα πέρας τους σε αυτήν και το άλλο σε ένα σημείο που βρίσκεται μέσα στο σχήμα (και λέγεται κέντρο του κύκλου) είναι ίσα (ορισμός 15)[2]. *Ευθύγραμμα σχήματα* είναι εκείνα που περιέχονται μέσα σε ευθείες γραμμές, τα τρίπλευρα μέσα σε τρεις, τα τετράπλευρα μέσα σε τέσσερις και τα πολύπλευρα μέσα σε περισότερες από τέσσερεις (ορισμός 19). Στο ενδέκατο βιβλίο των *Στοιχείων* άλλωστε ως *στερεό* ορίζεται αυτό που έχει μήκος, πλάτος και βάθος (ορισμός.1). Καθώς τα στερεά περατώνονται σε επιφάνειες (ορισμός 2), η πυραμίδα, το πρίσμα, η σφαίρα, ο κώνος, ο κύλινδρος, ο κύβος, το οκτάεδρο και το εικοσάεδρο ορίζονται ως *στερεά σχήματα.*

Την ευκλείδεια προσέγγιση, που ο παραγωγικός χαρακτήρας της δεν αποκλείει τη διαίσθηση και ιδιαίτερα την αίσθηση της όρασης, ακολουθεί το βιβλίο των μαθηματικών της πέμπτης δημοτικού[3]. Ας δούμε δύο παραδείγματα:

Στη σελίδα 59 του δεύτερου μέρους του βιβλίου *Τα μαθηματικά μου*[4] για την πέμπτη τάξη του δημοτικού σχολείου, η έννοια του τριγώνου εισάγεται με το ακόλουθο πρόβλημα: «Σε ένα φύλλο του τετραδίου σας να ορίσετε τρία σημεία Α, Β και Γ, που να μη βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία. Χαράξτε τα ευθύγραμμα σχήματα, που ενώνουν τα τρία αυτά σημεία. Χρωματίστε το εσωτερικό του σχήματος, που προκύπτει. α. Ποιο σχήμα προκύπτει; β. Ποια είναι τα κύρια στοιχεία του;» Στο εδάφιο *σκεφτόμαστε* διαβάζουμε: «α. *Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ με την επιφάνεια που περικλείουν* [υπογράμμιση δική μου] αποτελούν το τρίγωνο ΑΒΓ». Λίγες σελίδες παρακάτω

---

[1] Σχετικά με τον ορισμό αυτό βλέπε το T.L. Heath, *Euclid, The Thirteen Books of the Elements*, Dover, σ. 182, τ. 1.

[2] Σχετικά με τον ορισμό του κύκλου βλέπε το T.L. Heath, *Euclid, The Thirteen Books of the Elements*, Dover, σ. 184, τ. 1.

[3] Ευκλείδεια είναι και η προσέγγιση στη σημασία του *γεωμετρικού σχήματος* στο σχετικό και πολύ σαφές λήμμα του *Λεξικού της Κοινής Νεοελληνικής του* Ινστιτούτου Νεοελληνικών Σπουδών (1998): «β. (γεωμ.) $β_1$. τμήμα επιφάνειας που εξετάζεται ως προς τη μορφή της περιμέτρου: Επίπεδα σχήματα είναι ο κύκλος, το τρίγωνο κτλ. $β_2$. στερεό σώμα που εξετάζεται ως προς τη μορφή της εξωτερικής επιφάνειας: Στερεά σχήματα είναι ο κύβος, ο κύλινδρος κτλ.». Ανατρέχοντας στο λήμμα *περίμετρος* του ίδιου λεξικού διαβάζουμε: «η κλειστή τεθλασμένη γραμμή στην οποία τελειώνει ένα επίπεδο σχήμα και το συνολικό μήκος της». Ειδικότερα, σύμφωνα με το λεξικό αυτό «τρίγωνο είναι το γεωμετρικό σχήμα που έχει τρεις πλευρές και τρεις γωνίες», ενώ κύκλος στη γεωμετρία σημαίνει την «επίπεδη επιφάνεια που ορίζεται από κλειστή γραμμή, την περιφέρεια, της οποίας όλα τα σημεία απέχουν εξίσου από ένα σημείο, το κέντρο».

[4] *Τα μαθηματικά μου*, Ε τάξη δημοτικού, δεύτερο μέρος, Γ. Αλβανός κ.α., Ο.Ε.Δ.Β. , 1999.

ορίζεται ότι περίμετρος τριγώνου είναι το άθροισμα των μηκών των πλευρών του, ενώ εμβαδόν τριγώνου το γινόμενο μιας βάσης επί το αντίστοιχο ύψος δια δύο. Η τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓ που ορίζει το τρίγωνο δεν ονομάζεται.
Στη σελίδα 101 του ίδιου βιβλίου, η κ Φανή δένει το γαϊδουράκι της στο λιβάδι να βοσκήσει και αυτό βοσκεί σε όση επιφάνεια του επιτρέπει το σκοινί με το οποίο είναι δεμένο. Τα ερωτήματα που ακολουθούν είναι ποια είναι η επιφάνεια αυτή, ποια είναι τα κύρια στοιχεία της και πώς μπορούμε να τη σχεδιάσουμε. Στο εδάφιο *σκεφτόμαστε* που ακολουθεί διαβάζουμε: «α. Η επιφάνεια που βόσκησε το γαϊδουράκι περιορίζεται από μία γραμμή που λέγεται κύκλος. Ο κύκλος μαζί με την επιφάνεια που περικλείει είναι ένας κυκλικός δίσκος. β. Το σημείο Ο είναι το κέντρο του κύκλου. Όλα τα σημεία του κύκλου απέχουν εξίσου από το κέντρο του». Τα σχετικά με τον κύκλο επαναλαμβάνονται στο πρώτο μέρος του βιβλίου *Τα μαθηματικά μου*[5] για την έκτη τάξη του δημοτικού σχολείου. Τονίζεται η διάκριση μεταξύ κύκλου και κυκλικού δίσκου ενώ ο όρος *περιφέρεια* δεν αναφέρεται[6].
Στα *Μαθηματικά*[7] της πρώτης γυμνασίου, στη σελίδα 204, διαβάζουμε: «Στη γεωμετρία δεχόμαστε ότι τα σχήματα είναι σύνολα σημείων». Αμέσως μετά γίνεται διάκριση ανάμεσα σε επίπεδα σχήματα σαν το τρίγωνο, του οποίου όλα τα σημεία βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, και στερεά σχήματα σαν την πυραμίδα, της οποίας τα σημεία δεν βρίσκονται όλα πάνω στο ίδιο επίπεδο. Η εικόνα που συνοδεύει το κείμενο υπονοεί ότι το οριζόμενο από τρία σημεία Α, Β, και Γ τρίγωνο απαρτίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ μαζί με την (επίπεδη) επιφάνεια που περικλείουν. Ο κύκλος και ο κυκλικός δίσκος ορίζονται λίγες σελίδες παρακάτω, όπως στο βιβλίο της έκτης δημοτικού. Ως σχήματα ορίζονται επίσης το ευθύγραμμο τμήμα, αλλά και ολόκληρη η ευθεία γραμμή. Η νεωτερική αυτή αντίληψη για το σχήμα, ως σύνολο σημείων, που απηχεί λιγότερο την αναλυτική γεωμετρία, στοιχεία της οποίας δίνονται στην παράγραφο 2.2 του βιβλίου, και περισσότερο τη νεωτερική συνολοθεωρία και σημειακή τοπολογία εισάγεται εδώ σιωπηρά[8] και αιτιολογείται με τη βοήθεια των κόκκων του φωτογραφικού χαρτιού.

Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία της πρώτης και δευτέρας τάξης του λυκείου[9], διαβάζουμε: «Τη μορφή (σχήμα) κάθε στερεού σώματος την αντιλαμβανόμαστε από την επιφάνειά του. Το σύνολο των σημείων τα οποία χωρίζουν το χωρίζουν από το περιβάλλον του ονομάζεται επιφάνεια του

[5] *Τα μαθηματικά μου*, πρώτο μέρος, Στ τάξη δημοτικού, Γ. Αλβανός κ.α., Ο.Ε.Δ.Β., 1998.
[6] Γενικά σε όλα τα βιβλία του δημοτικού και του γυμνασίου προκρίνεται η χρήση του ζεύγους *κυκλικός δίσκος-κύκλος* (πρόκειται μάλλον για λανθάνοντα αγγλισμό, circular disk-circle) αντί του παλαιότερου ζεύγους *κύκλος-περιφέρεια*. Δεδομένης της ευρείας χρήσης της λέξης *περιφέρεια* η γλωσσική αυτή επιλογή δημιουργεί συχνά σύγχυση στους εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.
[7] *Μαθηματικά*, Α Γυμνασίου, Α. Αλιμπινίσης, Ο.Ε.Δ.Β., 2001.
[8] Τη μοντέρνα αυτή προσέγγιση υιοθετούν τα άλλα δύο έγκυρα λεξικά της νεοελληνικής γλώσσας: το μεν *Νέο Ελληνικό Λεξικό* του Κριαρά (1994) ορίζει το *γεωμετρικό σχήμα* ως «σύνολο σημείων, που μας παρέχει την εικόνα γραμμής επιφανείας ή στερεού: σχήμα ευθύγραμμο/τραπεζίου/κωνικό», το δε *Λεξικό της Νέας Ελληνικής Γλώσσας* του Μπαμπινιώτη (1998) ορίζει το γεωμετρικό σχήμα ως «σύνολο σημείων στην ευθεία, το επίπεδο ή τον χώρο: γραμμικό/επίπεδο/τετράγωνο/ορθογώνιο/κυκλικό σχήμα».
[9] *Ευκλείδεια Γεωμετρία*, Α και Β ενιαίου λυκείου, Η. Αργυρόπουλος κ.α., Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα 2001, σ. 9.

σώματος» [10]. Αμέσως μετά όμως διαβάζουμε επίσης ότι «αρχικά θα ασχοληθούμε με τη μελέτη σχημάτων ή γραμμών, που βρίσκονται σε μια ειδικού τύπου επιφάνεια, το επίπεδο». Η πραγμάτευση που ακολουθεί άρρητα αποδέχεται ότι σχήμα είναι σύνολο σημείων. Πράγματι, το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από δύο σημεία Α και Β είναι σχήμα (καθώς είναι το σύνολο που μέλη του είναι τα σημεία Α, Β και τα σημεία της οριζόμενης από αυτά ευθείας που βρίσκονται μεταξύ τους). Κύκλος είναι το επίπεδο σχήμα του οποίου όλα τα σημεία απέχουν εξίσου από από ένα σημείο Ο. Η τεθλασμένη γραμμή ορίζεται επίσης ως σχήμα, ενώ ως πολύγωνο ορίζεται μια κλειστή, απλή τεθλασμένη γραμμή. Εμφανίζεται εδώ το παράδοξο, σε ένα βιβλίο που τιτλοφορείται Ευκλείδεια Γεωμετρία η προσέγγιση στην έννοια του σχήματος να μην είναι ευκλείδεια: τα πολύγωνα δεν ορίζονται ως χωρία αλλά ως τεθλασμένες γραμμές[11].

Η προσέγγιση αυτή μολονότι μαθηματικά σωστή[12], διδακτικά κατά τη γνώμη μου υστερεί για δύο λόγους. Πρώτον επειδή η εμπέδωση της κλασικής διάκρισης μεταξύ του σχήματος και της ορίζουσας γραμμής του, που εξειδικεύεται στο ζεύγος ευθύγραμμο σχήμα-περίμετρος και κύκλος-περιφέρεια, πρέπει να είναι βασικός διδακτικός στόχος των σχολικών μαθηματικών. Το επίπεδο σχήμα έχει εμβαδόν και η ορίζουσα γραμμή του μήκος. Το στερεό σχήμα έχει όγκο και η ορίζουσα επιφάνειά του εμβαδόν. Ιστορικά σε αυτό το νοητικό πλαίσιο γίνονται κατανοητά και επιλύονται τα προβλήματα του υπολογισμού του μήκους καμπύλης, του υπολογισμού του εμβαδού επίπεδου σχήματος ή ορίζουσας επιφάνειας στερεού και του υπολογισμού του όγκου στερεού. Δεύτερον, επειδή η αλλαγή *παραδείγματος* (*paradigm*) για το σχήμα γίνεται χωρίς επαρκή συζήτηση και αιτιολόγηση.

Ιστορικά, η μίξη της ελληνικής γεωμετρίας με την αραβική άλγεβρα οδήγησε στην αναλυτική γεωμετρία και τον νεωτερικό απειροστικό λογισμό (Calculus) που θα επιλύσει τα παραπάνω προβλήματα. Κορύφωση λογισμού αυτού μπορούμε να θεωρήσουμε το θεώρημα του Green και το θεώρημα του Gauss. Το πρώτο ουσιαστικά μας λέει ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από μια κλειστή γραμμή C που έχει εφαπτομένη σε κάθε σημείο και είναι προσανατολισμένη με φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ωρολογίου είναι το μισό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος

$$\oint_C -\mathrm{x}d\mathrm{x} + \mathrm{y}d\mathrm{y}\,.$$

Με το θεώρημα του Green αναδεικνύεται με ακριβή τρόπο η σχέση ανάμεσα στη μορφή της ορίζουσας καμπύλης ενός επίπεδου σχήματος και την έκταση που αυτό καταλαμβάνει στο επίπεδο.

---

[10] Η πρόταση αυτή απηχεί την απάντηση του Σωκράτη στον *Μένωνα* (76Α): «Σχήμα είναι το πέρας του στερεού».

[11] Ωστόσο, αργότερα τα πολύεδρα και τα στερεά εκ περιστροφής ορίζονται στο δέκατο τρίτο κεφάλαιο του ίδιου βιβλίου –φυσικά-ως περιοχές του χώρου.

[12] Το πιο περίφημο ίσως βιβλίο που την ακολουθεί είναι το *Grundlagen der Geometrie* του Δαβίδ Χίλμπερτ, η έβδομη έκδοση του οποίου χωρίς τα παραρτήματά της κυκλοφορεί στα ελληνικά ως *Θεμέλια της Γεωμετρίας*, σε μετ. Στρ. Παπαδόπουλου, εκδ. Τροχαλία, Αθήνα 1995. Στο βιβλίο αυτό ο Χίλμπερτ ακολουθεί μια αξιωματική, τυποκρατική, μη διαισθητική προσέγγιση που εμπνέεται από τη συνολοθεωρία και την τοπολογία των σημειακών συνόλων και η οποία πρέπει να κατανοηθεί μέσα στο επιστημολογικό πλαίσιο της εποχής του.

Το δεύτερο ουσιαστικά μας λέει ότι ο όγκος του στερεού που ορίζεται από κλειστή επιφάνεια Σ που έχει εφαπτόμενο επίπεδο σε κάθε σημείο, είναι το ένα τρίτο του επιεπιφάνειου ολοκλήρωματος

$$\oiiint_{\Sigma} xdxdy + ydydz + zdxdy \ .$$

Αντίστοιχα με το θεώρημα του Gauss αναδεικνύεται με ακριβή τρόπο η σχέση ανάμεσα στη μορφή της ορίζουσας επιφάνειας ενός στερεού σχήματος και την έκταση που αυτό καταλαμβάνει στον χώρο[13].

Ο απειροστικός λογισμός και η ανάλυση οδήγησαν στη σύλληψη παράδοξων σχημάτων: συνεχείς γραμμές που δεν έχουν πουθενά εφαπτομένη, καμπύλες που γεμίζουν «επίπεδα» σχήματα (καμπύλη του Peano), επιφάνειες με μία μόνον πλευρά (ταινία του Möbius).

Η ενασχόληση με τη θεμελίωση της ανάλυσης και την αποσαφήνιση των εννοιών της οδήγησε στη συνολοθεωρία και στη νεωτερική αντίληψη του ολοκληρωμένου απείρου. Χάρη σε αυτές, τον περασμένο αιώνα η ανθρώπινη φαντασία κατόρθωσε να συλλάβει «κλασματοειδή» (*fractal*) σχήματα, σαν τη *χιονονιφάδα του Koch*[14], χαρακτηριστικά της μετανεωτερικής εποχής[15].

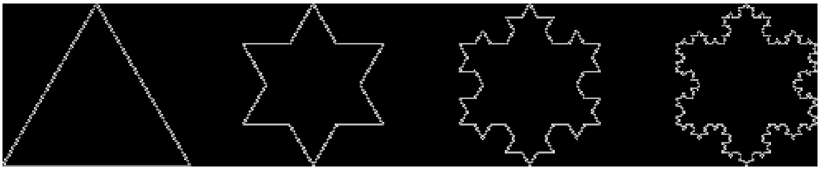
Για την κατασκευή της χιονονιφάδας του Koch, ξεκινούμε με ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 1. Αυτό έχει προφανώς περίμετρο $\Pi_1 = 3$ και εμβαδόν $E_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Χωρίζουμε κάθε πλευρά του σε τρία ίσα μέρη. Με βάση το μεσαίο τμήμα κάθε πλευράς κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο. Η περίμετρος του αστεροειδούς σχήματος που προκύπτει είναι ίση με $\Pi_2 = 3\cdot(\frac{4}{3})$, ενώ το εμβαδόν του ίσο με $E_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\frac{1}{9})\cdot 3$. Χωρίζουμε την πλευρά του δεύτερου αυτού σχήματος σε τρία ίσα μέρη και με βάση το μεσαίο από αυτά κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο. Η περίμετρος του νέου σχήματος $\Pi_3 = 3\cdot(\frac{4}{3})^2$, ενώ το εμβαδόν του ίσο με $E_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\frac{1}{9})\cdot 3 + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\frac{1}{9})^2\cdot 3\cdot 4$. Όταν επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία στο τρίτο σχήμα, θα προκύψει ένα τέταρτο σχήμα με περίμετρο $\Pi_4 = 3\cdot(\frac{4}{3})^3$ και εμβαδόν $E_4 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\frac{1}{9})\cdot 3 +$

[13]Για τα θεωρήματα Green και Gauss βλ.πρόχειρα στο G.B.Thomas & R.L. Finney, *Απειροστικός λογισμός-Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, διανυσματικές συναρτήσεις και σειρές*, τόμος II.

[14] Η ακολουθία των στιγμιοτύπων της καμπύλης του Koch που ορίζει τη χιονονιφάδα του Koch εμφανίζεται, χωρίς να ονοματίζεται, στην άσκηση 6 της σελίδας 94 του βιβλίου Άλγεβρα, Β ενιαίου λυκείου των Σ. Ανδρεαδάκη κ.α., Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα 2002. Δυστυχώς χάνεται η ευκαιρία να μελετηθεί η χιονονιφάδα ως μετανεωτερικό σχήμα με πεπερασμένο εμβαδόν και άπειρη σε μήκος ορίζουσα καμπύλη. Για τη χιονονιφάδα του Koch και άλλα κλασματοειδή σχήματα, καθώς και για τη διδακτική αξιοποίησή τους βλ. το Thomas J. Bannon, *Fractals and Transformations, Mathematics Teacher*, v. 84, n. 3, March 1991, Dane R. Camp, *A Fractal Excursion*, Mathematics Teacher, v. 84, n. 4, April 1991. Για την καμπύλη του Koch και τη διάστασή της, βλ επίσης Donald Davis, *Η Φύση και η Δύναμη των Μαθηματικών*, Π.Ε.Κ., Ηράκλειο 2001, κεφ. 5, μετ. Δ. Καραγιαννάκη & Μ. Μαγειρόπουλου.

[15] Βλ. Ζαν Φρανσουά-Λυοτάρ, *Η μεταμοντέρνα κατάσταση*, εκδ. Γνώση, 1988, σ. 139.

$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\frac{1}{9})^2\cdot 3\cdot 4 + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\frac{1}{9})^3\cdot 3\cdot 4^2$. (Βλέπε Σχήμα). Προφανώς επομένως το ν-οστό τέτοιο σχήμα έχει περίμετρο $\Pi_\nu = 3\cdot(\frac{4}{3})^\nu$ και εμβαδόν $E_\nu = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\frac{1}{9})\cdot 3 + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\frac{1}{9})^2\cdot 3\cdot 4 + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\frac{1}{9})^3\cdot 3\cdot 4^2 + \ldots + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\frac{1}{9})^3\cdot 3\cdot 4^{\nu-2}$.



Σχήμα. Τα πρώτα τέσσερα βήματα στην κατασκευή της χιονονιφάδας του Koch.

Ποιο είναι το όριο της ακολουθίας Π_ν; Ποιο είναι το όριο της ακολουθίας E_ν; Βασικές γνώσεις για τα όρια ακολουθιών μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε ότι η Π_ν απειρίζεται, δηλαδή έχει όρους οσοδήποτε μεγάλους, ενώ η E_ν τείνει στον αριθμό $2\cdot\frac{\sqrt{3}}{5}$, δηλαδή υπάρχουν όροι της ακολουθίας αυτής οσοδήποτε κοντά θέλουμε στον αριθμό $2\cdot\frac{\sqrt{3}}{5}$. Άλλωστε εύκολα βλέπουμε ότι κανένα από τα παραπάνω άπειρα στο πλήθος «στιγμιότυπα» δεν υπερβαίνει τα όρια του τετραγώνου που έχει πλευρά $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$ και εμβαδόν $\frac{4}{3}$. Δεχόμενοι ωστόσο ότι σχήμα είναι σύνολο σημείων και όντας ικανοί πια να «βλέπουμε» το ολοκληρωμένο άπειρο, αντιλαμβανόμαστε ότι μέσα στο τετράγωνο αυτό «φωλιάζει» ένα σχήμα με πεπερασμένο εμβαδόν και άπειρη περίμετρο.

Η κατασκευή της χιονονιφάδας του Koch ξεκινά με ένα ισόπλευρο τρίγωνο που το βλέπουμε να κείται ολόκληρο στη δισδιάσταση σελίδα μας και η κατασκευή του είναι το περιεχόμενο της πρώτης πρότασης των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Τη χιονονιφάδα του Koch από την άλλη, παρόλο που είναι δυνατόν να την περιγράψουμε πλήρως στη μαθηματική γλώσσας μας και να την εννοήσουμε στην ολότητά του, μπορούμε να τη «δούμε» μόνο στη δυναμική ανάπτυξή της στην οθόνη του υπολογιστή.

Ανάμεσα στο ευκλείδειο σχήμα του ισόπλευρου τριγώνου και το κλασματοειδές σχήμα της χιονονιφάδας του Koch μεσολαβούν ετερογενείς «επιστημολογικές μήτρες». Λόγου χάρη, από την «ευκλείδεια» μήτρα αναδύονται σχήματα που κατασκευάζονται μόνο με κανόνα και διαβήτη πάνω στην άμμο, από την «αναλυτική» σχήματα που χαράζονται με καμπυλόγραμμα και χάρακες πάνω σε τετραγωνισμένο χαρτί, και από την πρόσφατη, των «δυναμικών συστημάτων», σχήματα που μορφοποιούνται διαρκώς πάνω στην οθόνη του υπολογιστή. Η διδακτική προσέγγιση που δεν παραμελεί να ανασκάπτει το σύγχρονο σημασιακό έδαφος και να αποκαλύπτει τα επιστημολογικά στρώματα που βρίσκονται από κάτω του μπορεί να είναι πολύ γόνιμη.

ΕΝΟΤΗΤΑ IV

Υλικό αναφοράς

Η πλαισίωση των μαθηματικών: κείμενα, πλαίσια, διακειμενικότητα και υποκειμενικότητα

Jeff Evans
Middlesex University, UK

Anna Tsatsaroni
University of Patras, GR

Η πολιτική των αναλυτικών προγραμμάτων και η έρευνα της μαθηματικής εκπαίδευσης είχαν και εξακολουθούν να έχουν ως αφετηρία τους την υπόθεση ότι το περιεχόμενο των μαθηματικών έχει μια ενιαία υπόσταση (essence), ανεξάρτητη από το πλαίσιο και μη υποκείμενη σε ερμηνεία ή «ανάγνωση». Σε αντίθεση με αυτή την ουσιοκρατική άποψη για την γνώση, ισχυριζόμαστε ότι οι προτάσεις με τις οποίες διατυπώνονται τα μαθηματικά προβλήματα, οι λύσεις, τα επιχειρήματα, οι αποδείξεις κλπ. μπορούν όλα να θεωρηθούν ως *κείμενα* και όπως θα υποστηριχθεί το πλαίσιο καθαυτό πρέπει να θεωρηθεί ως κείμενο.

Κατ' αρχάς, το κείμενο δεν είναι κάτι δεδομένο: πολλαπλές αναγνώσεις του κειμένου είναι δυνατές και δεν υπάρχει μία προνομιακή ανάγνωση. Το κείμενο είναι ευμετάβλητο κατά πολλούς τρόπους, ακόμα και όταν φαίνεται ότι οι λέξεις στη σελίδα παραμένουν οι ίδιες. Πρώτο, το νόημά του δεν συγκροτείται άπαξ και δια παντός, μεταβάλλεται με τις αλλαγές στον ιστορικό χρόνο και μεταβάλλεται με τις αλλαγές στη ζωή ενός ατόμου. Αν ξαναδιαβάσουμε ένα κείμενο δέκα ή είκοσι χρόνια αργότερα το νόημά του έχει αλλάξει. Δες, για παράδειγμα, το μενού στο Παράρτημα (γραμμένο στις αρχές του 1980). Δεύτερο, σε κάθε δεδομένη στιγμή το κείμενο δεν είναι αδιαμφισβήτητο αλλά μπορεί να διαβαστεί με διαφορετικούς τρόπους. Τρίτο, το κείμενο είναι ανοιχτό: υπάρχουν εν δυνάμει εξωτερικοί σύνδεσμοι σε ποικίλες κατευθύνσεις, οι οποίοι είναι πολύ σημαντικοί για την κατανόηση του τρόπου που κάποιος ερμηνεύει το κείμενο και τι κάνει με αυτό (ή τι κάνει το κείμενο σε αυτό). Επομένως, αν πολλαπλές αναγνώσεις του κειμένου είναι δυνατές, αν δεν υπάρχει μια προνομιακή ανάγνωση, τότε μπορεί να γίνει αποδεκτή η μετα- δομιστική θέση ότι το κείμενο δεν είναι τα γράμματα στη σελίδα αλλά αυτό που παράγεται σε μια ανάγνωση (Derrida, 1976).

Έτσι χρειάζεται να συζητήσουμε πώς παράγονται τα κείμενα, πώς σχετίζονται με τα συμφραζόμενα (contexts) και πώς παράγουν υποκειμενικότητα. Ενδιαφερόμαστε για τις αριθμητικές ικανότητες (numeracy) των ενηλίκων και πώς ο τρόπος σκέψης τους αναφορικά με συγκεκριμένα προβλήματα, καθώς και το συναίσθημά τους, σε συγκεκριμένες κοινωνικές περιστάσεις, προσιδιάζουν στο κοινωνικό πλαίσιο (context) (με την ευρεία έννοια). Θα ισχυριστούμε ότι η νόηση και το συναίσθημα των ατόμων, όπως και το κοινωνικό πλαίσιο, βασίζονται ή συγκροτούνται από λόγους και πρακτικές.

Απόσπασμα από το άρθρο Evans, J. & Tsatsaroni, A. (2000), Mathematics and its publics: texts, contexts and users, *Social Epistemology*, vol. 14, no. 1, 55-68.
Απόδοση στα Ελληνικά: Ελένη Γιαννακοπούλου & Δημήτρης Χασάπης

Υπάρχει η τάση να σκεφτόμαστε το *πλαίσιο* ως κάτι υλικό, κάτι έξω από το κείμενο, ως υπόβαθρο. Αυτός είναι βασικά ο τρόπος που σκέφτονται το πλαίσιο οι ωφελιμιστικές (και παραδοσιακές) προσεγγίσεις. Όμως, το πρόβλημα είναι ότι αυτό ενέχει την παραδοχή ότι υπάρχει ένα πλαίσιο «προ του λόγου» (pre-discursive), το οποίο υφίσταται πριν από το κείμενο ή περιβάλλει το κείμενο. Υπάρχουν πολλοί τρόποι για το χειρισμό αυτού του ζητήματος.

Η Lave (1988) παρουσιάζει μια «διαλεκτική» προσέγγιση στη μελέτη των αριθμητικών πρακτικών των ενηλίκων αγοραστών. Από το ένα μέρος, το πλαίσιο των αγορών τους και του είδους των αριθμητικών ή μαθηματικών δραστηριοτήτων τους είναι το σουπερμάρκετ ως *αρένα* με ορισμένες *αντικειμενικές* ιδιότητες. Από το άλλο, μιλάει για το πλαίσιο αυτό ως μια κοινωνική *κατάσταση* (setting), η οποία *διαβάζεται με διαφορετικούς τρόπους* από διαφορετικούς αγοραστές. Έτσι, η μελέτη της επικεντρώνεται στο σουπερμάρκετ ως μια αντικειμενική αρένα αγορών – η οποία μπορεί επομένως να μελετηθεί ως ένα αντικείμενο με όρους πολιτικής οικονομίας, και ως μία κατάσταση με υποκειμενικά νοήματα η οποία μπορεί να μελετηθεί στο μικρο-επίπεδο της ανάλυσης.

Η Walkerdine (Walkerdine *et a*l., 1989) φαίνεται να μειώνει τη σημασία της αρένας ως αντικειμενικής όταν λέει «Δεν υπάρχει απλή υλικότητα έξω από τις πρακτικές μέσα από τις οποίες διαβάζεται» (σ. 192). Αυτό, όμως, δεν σημαίνει ότι αντιμετωπίζει την κατάσταση ως υποκειμενική, ως εξαρτώμενη από τα άτομα που εργάζονται ή ψωνίζουν ή κάνουν οτιδήποτε. Μάλλον, η πραγματικότητα/υλικότητα διαβάζεται και ερμηνεύεται μέσα από τις κοινωνικές πρακτικές, οι οποίες οργανώνονται (ρυθμίζονται) από ορισμένους λόγους και οι οποίες, επομένως, είναι οι ίδιες κοινωνικές: *κοινωνικές πρακτικές λόγου*. Η έρευνά της αντιπροσωπεύει μια προσπάθεια σύνθεσης του αντικειμενικού και του υποκειμενικού, του ατομικού και του κοινωνικού.

Οι προαναφερθείσες έρευνες υποστηρίζουν την άποψη ότι το κοινωνικό πλαίσιο καθαυτό πρέπει να ειδωθεί, κατά μία έννοια, ως *κειμενοποιημένο* με τον ίδιο τρόπο που υποστηρίξαμε ότι πρέπει να αντιμετωπιστεί και το κείμενο. Αυτό σημαίνει ότι για να κατανοήσει κάποιος το πλαίσιο πρέπει να είναι ικανός να το παρουσιάσει στον εαυτό του. Δεν μπορεί να υπάρξει «προ του λόγου» (pre-discursive) πλαίσιο: το να το περιγράψεις και το να εμπλακείς με αυτό είναι ήδη εμπλοκή με ορισμένα είδη γλώσσας και λόγου. Έτσι η ιδέα των πλαισίων ως κειμενοποιημένων τονίζει τη σπουδαιότητα της *ανάλυσης* των πλαισίων – και όχι την αντιμετώπισή τους ως δεδομένων. Αφού ο μετασχηματισμός τους παραμένει μία πάντοτε ανοιχτή εκδοχή. Όπως το θέτει ο Derrida:

> Κάθε σημείο, γλωσσικό ή μη-γλωσσικό, προφορικό ή γραπτό σε μια μικρή ή μεγάλη μονάδα μπορεί … να διαρρήξει κάθε δεδομένο πλαίσιο …δημιουργώντας και εγχαράσσοντας τον εαυτό του, ή εγχαρασσόμενο σε νέα πλαίσια (Derrida,1988, σ. 79).

Αυτό μας οδηγεί στο ζήτημα της *διακειμενικότητας*. Ο Bakhtin δείχνει τους τρόπους μέσα από τους οποίους οι λεκτικές διαμορφώνονται από πρότερες λεκτικές εκφράσεις και επομένως μπορεί να ιδωθούν ως απόκριση σε αυτές (Fairclough, 1992, κεφ. 4). Έτσι οι σημερινές ειδήσεις για τη Μέση Ανατολή σχετίζονται με τις χθεσινοβραδινές και εκείνες των προηγούμενων ημερών, όπως επίσης – αυτό είναι δυσκολότερο να το φανταστούμε – σχετίζονται με επόμενα κείμενα, με την έννοια ότι τα προεξοφλούν, αφού αυτά τα επόμενα κείμενα θα σχετίζονται αναδρομικά με τα σημερινά. Στο *Μικρό Κόσμο* του David Lodge (1984), ένας από τους κύριους χαρακτήρες προκαλεί αναταραχή σε ένα διεθνές συνέδριο υποστηρίζοντας ότι τα γραφτά του T. S. Eliot επηρέασαν το έργο του Shakespeare. Εκ πρώτης όψεως αυτό είναι παράλογο – γιατί πώς θα μπορούσαν τα έργα του Eliot στον $20^{ο}$ αιώνα να επηρεάσουν κείμενα του $16^{ου}$ και $17^{ου}$ αιώνα; Όμως αυτό που ο Lodge λέει είναι ότι όταν ανατρέχουμε στα κείμενά του και διαβάζουμε τον Shakespeare, τον ξανα-διαβάζουμε μέσα από τις ιδέες του $20^{\;ου}$ αιώνα, στις οποίες περιλαμβάνονται και εκείνες του Eliot.

Η έννοια της διακειμενικότητας μας παρέχει δύο επιπλέον ιδέες. Καταδεικνύει την αδυναμία διάκρισης μεταξύ κειμένου και πλαισίου. Όπως γράφει ο Derrida, «Η φράση … δεν υπάρχει τίποτα έξω από το κείμενο … δεν σημαίνει παρά: δεν υπάρχει τίποτα εκτός πλαισίου» (1988, σ. 136-137). Η διακειμενικότητα, επίσης, καταδεικνύει το αδιαχώριστο του ενός πλαισίου από το άλλο. Για την Kristeva (1986), μαθήτρια και μεταφράστρια του Bakhtin, είναι η εισαγωγή της ιστορίας ή της κοινωνίας μέσα σε ένα κείμενο, και η εισαγωγή του κειμένου αυτού μέσα στην ιστορία.

Ποια είναι η σημασία όλων αυτών για τα μαθηματικά και για τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών; Η προβληματική του κειμένου, του πλαισίου, και της διακειμενικότητας έχει κάποια επίδραση στην έρευνα της μαθηματικής εκπαίδευσης. Μία από τις πιο εμφανείς συνέπειες υπήρξε η αμφισβήτηση του ισχυρισμού της καθολικότητας της μαθηματικής γνώσης. Γιατί υποστηρίζει την ιδέα ότι το νόημα μιας μαθηματικής πράξης ή ενός μαθηματικού σημαίνοντος, όπως είναι το αριθμητικό ψηφίο ή το ποσοστό, δεν είναι καθολικό. Είναι καταρχήν αμφίβολο και *χωρίς ενιαία υπόσταση* – και ο τρόπος που αποκτά το νόημά του προέρχεται από το πλαίσιο. Δηλαδή, το νόημα συγκροτείται από, υποστηρίζεται από, και διαμορφώνεται μέσα στους λόγους και τις πρακτικές που εγγράφεται ή χρησιμοποιείται. Έτσι, αν ψωνίζω, ο υπολογισμός της τιμής μιας μονάδας έχει ορισμένα χαρακτηριστικά αφού διενεργείται ενώ ψωνίζω. Θα είχε διαφορετικά χαρακτηριστικά – ίσως, για παράδειγμα, ως προς την απαιτούμενη ακρίβεια - αν εκτελούνταν ως ένα πρόβλημα των σχολικών μαθηματικών. Ως εκ τούτου, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι αυτό που φαίνεται ως «ίδιος υπολογισμός» δεν είναι ίδιος – αφού είναι μέρος μιας διαφορετικής πρακτικής, η οποία χρησιμοποιεί διαφορετικούς όρους που κάνουν διαφορετικά είδη διακρίσεων, και η οποία αντιπροσωπεύει διαφορετικούς σκοπούς και αξίες. Ένας μαθητής εκτελώντας ένα υπολογισμό ενώ ψωνίζει έχει διαφορετικές προθέσεις και περιορισμούς από αυτούς που έχει όταν εκτελεί τον υπολογισμό σε ένα μάθημα των μαθηματικών. Οι υπολογισμοί πρέπει να είναι πιο ακριβείς στη σχολική τάξη, αφού αυτό είναι το απαιτούμενο, ή αυτό ικανοποιεί το δάσκαλο, επειδή αυτό συνιστά το έγκυρο αποτέλεσμα ενός υπολογισμού στις πρακτικές της σχολικής αξιολόγησης. (Evans , 2000).

Στις συνεντεύξεις του Evans σε μια μελέτη ενηλίκων σπουδαστών (Evans and Tsatsaroni, 1994, Evans, 2000), υπήρχαν δύο ερωτήσεις, οι οποίες απαιτούσαν τον υπολογισμό ενός ποσοστού 10%. Η μία ερώτηση είχε τη μορφή: «Ποιο είναι το 10% του 6.65;». Δόθηκε στους ερωτώμενους σε ένα απλό φύλλο χαρτί. Μια άλλη ερώτηση δόθηκε στο αντίγραφο ενός μενού εστιατορίου, οπότε ο υπολογισμός του 10% τοποθετήθηκε στο ευρύτερο κοινωνικό πλαίσιο της εξόδου για φαγητό. Στους σπουδαστές υποβλήθηκαν *ερωτήσεις, οι οποίες αναφέρονταν σε ένα πλαίσιο (contexting question*s) και στη συγκεκριμένη περίπτωση:

- (C.1) Έχεις πάει ποτέ σε εστιατόριο που έχει μενού όπως αυτό;
- (C.2) Ποιο από τα διαθέσιμα πιάτα θα διάλεγες; και
- (C.3) Τι φιλοδώρημα θα έδινες (αν έδινες) σε ένα τέτοιο εστιατόριο με ένα τέτοιο μενού;

Η ανάλυση των απαντήσεων των σπουδαστών σε αυτή την ερώτηση υποδεικνύει ότι οι δραστηριότητες στις οποίες αναφέρονται οι ερωτήσεις δεν αποτελούν απλά παραδείγματα του «ίδιου» μαθηματικού προβλήματος[1].

Όπως προαναφέρθηκε, θα πρέπει να προσεγγίσουμε αυτές τις «μαθηματικές» δραστηριότητες ως κείμενα. Το Κείμενο 1 και το Κείμενο 2 (δες παράρτημα) είναι από πολλές απόψεις διαφορετικά. Πρώτα-πρώτα, το Κείμενο 1 είναι αφηρημένο, ανεξάρτητο πλαισίου (φαινομενικά), με εξειδικευμένο περιεχόμενο και γλώσσα. Το Κείμενο 2 είναι συγκεκριμένο, εξαρτημένο από ένα πλαίσιο, με μη εξειδικευμένο περιεχόμενο και γλώσσα. Κατά πρώτον, επομένως, οι *γλωσσικοί τους κώδικες είναι διαφορετικοί.* Δεύτερον, αυτά τα κείμενα προέρχονται κατά κανόνα από *διαφορετικούς λόγους* (*discourse*s*),* στην πρώτη περίπτωση από τον εκπαιδευτικό λόγο και στη δεύτερη από τον καθημερινό λόγο. Αυτό επηρεάζει το πλαίσιο "επίλυσης του προβλήματος" και τις κοινωνικές σχέσεις. Το εξειδικευμένο εκπαιδευτικό πλαίσιο απαιτεί εξειδικευμένους πόρους λόγου, ενώ οι κοινωνικές σχέσεις είναι εμφανώς ή αφανώς (Bernstein, 1990, 1996, Dowling, 1998) ιεραρχικές (μαθητής/δάσκαλος). Σε πλαίσια καθημερινότητας, από το άλλο μέρος, όπως τα εστιατόρια, τα «μέσα» είναι διαφορετικά. Δεν θα υπάρχει, συνήθως, διαθέσιμη μια αριθμομηχανή (calculator) και μερικά εστιατόρια, στην πράξη, υπολογίζουν, τα ίδια αντί για σένα, το 10% του λογαριασμού για το φιλοδώρημα! Πάνω απ' όλα όμως, οι υπολογισμοί είναι διαφορετικοί ως προς το νόημα τους. Γιατί εγγράφονται ή αποτελούν μέρος διαφορετικών δραστηριοτήτων ή πρακτικών, όπου διακυβεύονται διαφορετικά πράγματα. Έτσι μπορούμε να δούμε το πλαίσιο, ως κάτι που βασίζεται στη δραστηριότητα (καθημερινή, σχολική, εργασιακή δραστηριότητα) και διαμορφώνεται ή συγκροτείται από *πρακτικές λόγου (discursive* practices) – καθεμία με τους δικούς της σκοπούς, κοινωνικές σχέσεις και μέσα.

Αυτό θέτει το ερώτημα του πώς συγκροτείται η υποκειμενικότητα μέσα σε αυτές τις πρακτικές λόγου. Πρώτα-πρώτα, μπορεί να υποστηριχτεί ότι τα *κείμενα θέτουν τα άτομα σε θέσεις (position*s*),* θέσεις υποκειμένου. Έτσι, τα κείμενα των σχολικών μαθηματικών, ας πούμε, μπορεί να θέσουν τα κορίτσια στη θέση κάποιου, ο οποίος δεν μπορεί πραγματικά να κάνει καμία εργασία που έχει να κάνει με μηχανήματα, ή στη θέση κάποιου, ο οποίος στο πλαίσιο της σχολικής τάξης λειτουργεί ως αρωγός (Walkerdine *et a*l. , 1989), ή στη θέση κάποιου, ο οποίος δεν ενδιαφέρεται πραγματικά για τα πιο περίπλοκα και δυναμικά ζητήματα των υποθέσεων του γραφείου, και υποβιβάζεται σε

[1] Συσχετίζοντας τις "τοποθετήσεις" (positionings) των ερωτώμενων στα δύο προβλήματα. Δες Evans (2000, κεφ. 9).

ένα ρόλο υφισταμένου. Ωστόσο, μπορεί κανείς να εντοπίσει προβλήματα με την άποψη ότι τα κείμενα παράγουν υποκειμενικές θέσεις.

Το πρώτο πρόβλημα είναι ότι αυτή η άποψη είναι μάλλον αιτιοκρατική: αν τα κείμενα τοποθετούν κάποιον, δεν του αφήνεται πολύς χώρος για δράση. Για παράδειγμα, η πρώιμη δουλειά του Foucault επικεντρώθηκε σε μεγάλο βαθμό στο πώς τα ιδρύματα, όπως τα ψυχιατρεία, οι κλινικές, οι φυλακές της Γαλλίας του 18ου και 19ου αιώνα, παρήγαγαν ορισμένα είδη υποκειμενικότητας στους ανθρώπους που δούλευαν σε αυτά, όχι μόνο στους εγκλείστους, αλλά και στους φύλακες.

Όμως, επιπλέον, θα πρέπει να αναγνωρισθεί η δράση/προθετικότητα του υποκειμένου, η δυνατότητα επιλογής του:

> Ο άνθρωπος δημιουργεί τη δικιά του ιστορία αλλά όχι στις συνθήκες της δικιάς του επιλογής (Marx, 1852/1968).

Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως μία προσπάθεια εξισορρόπησης του καταναγκασμού και της μερικής αιτιοκρατίας των ιστορικών συνθηκών μέσα στις οποίες βρίσκονται οι άνθρωποι, με τις πιθανότητες της ελευθερίας (μιας κοινωνικής τάξης τουλάχιστον) να δημιουργούν την ιστορία τους. Επομένως, το πρώτο πρόβλημα είναι το αιώνιο πρόβλημα της αιτιοκρατίας και της ελευθερίας.

Προκειμένου να αποφευχθεί ο υπερ-προσδιορισμός που ενυπάρχει στη διερεύνηση των υποκειμενικών θέσεων, αλλά και ο αυθορμητισμός των ατόμων που έχουν μια επιλογή, όταν ο Evans (2000) διερευνούσε πώς οι σπουδαστές προσέγγιζαν κάθε ένα από αυτά τα προβλήματα στις συνεντεύξεις που προαναφέρθηκαν, θεώρησε ως δεδομένη μια διαδικασία δύο φάσεων. Πρώτα από όλα, αναγνωρίζοντας μια μερική αιτιοκρατία επιχείρησε να αναλύσει ποιοι λόγοι ήταν *εν ενεργεία* στη συγκεκριμένη κατάσταση της συνέντευξης. Δηλαδή, επιχείρησε να εξειδικεύσει και να αναλύσει τους λόγους, οι οποίοι θα μπορούσαν ενδεχομένως να τοποθετήσουν τα άτομα *γενικά.* Σε αυτή τη γενική ανάλυση μπορούμε να δούμε για το πρόβλημα του φιλοδωρήματος και τα παρόμοια ότι κανονικά ενεργοποιούνταν περισσότεροι από ένας λόγοι στη συγκεκριμένη κατάσταση και ότι δημιουργούνταν περισσότερα από ένα σύνολα υποκειμενικών θέσεων.

Το δεύτερο πρόβλημα, όταν αναλύονται οι εν ενεργεία λόγοι και οι υποκειμενικές θέσεις στη κατάσταση της συνέντευξης, είναι ότι ακόμα και μια μερική αιτιοκρατία προϋποθέτει μια έννοια κειμένου, ως κάτι που είναι οριοθετημένο με σταθερά νοήματα. Αν και είναι ορθό ότι - όπως το Κείμενο-1 και το Κείμενο-2 δηλώνουν (δες Παράρτημα) - μερικά κείμενα είναι πιο οριοθετημένα από άλλα, η τοποθέτηση των *συγκεκριμένων* ατόμων αποτελεί πάντα ένα ερώτημα εμπειρικής διερεύνησης. Από αυτό προκύπτει η ανάγκη μιας δεύτερης φάσης στην ανάλυση, κατά την οποία ο Evans μελέτησε τις απομαγνητοφωνημένες συνεντεύξεις για να αποφασίσει ποιες από εκείνες τις εν ενεργεία πρακτικές ή ποιοι συνδυασμοί πρακτικών τοποθετούσαν, στην πραγματικότητα, κάθε συγκεκριμένο άτομο, και επομένως εμπλέκονταν στην παραγωγή της υποκειμενικότητας - κάνοντας διαθέσιμες ορισμένες ιδέες, φορτίζοντας συναισθηματικά το πρόβλημα, διευκολύνοντας τον κριτικό στοχασμό, αναδεικνύοντας σκοπούς, θέτοντας ορισμένα πράγματα υπό αμφισβήτηση, κλπ.

Για παράδειγμα, με αναφορά στο Κείμενο-2, η φάση της γενικής ανάλυσης αποδίδει δύο υποκειμενικές θέσεις στους ερωτώμενους, αντίστοιχες των πρακτικών των σχολικών μαθηματικών και της εξόδου για φαγητό. Οπότε, στη φάση της ειδικής ανάλυσης είναι αναγκαίο να εξετάσουμε κάθε μία απομαγνητοφωνημένη συνέντευξη (περιλαμβανομένων των γραπτών «πρόχειρων» σημειώσεών τους) για να δούμε τι πραγματικά έχει λεχθεί και έχει γίνει. Για παράδειγμα, κάποιοι χρησιμοποίησαν χαρτί και μολύβι για να κάνουν υπολογισμούς. Αυτό θεωρήθηκε ως μία ένδειξη ότι μπήκαν στη θέση των σχολικών μαθηματικών, αφού κανονικά δεν θα χρησιμοποιούσαν τα μέσα αυτά σε ένα εστιατόριο. Κυρίως όμως, η ανάλυση των απομαγνητοφωνημένων συνεντεύξεων έγινε αναζητώντας τη χρήση βασικών σημαινόντων στο λόγο των υποκειμένων, όρων (ή συμβόλων) που ενδεχομένως εντάσσονται ή έχουν νόημα σε μια πρακτική, αλλά όχι σε άλλη. Επομένως, προκειμένου να κατανοηθεί ποια είναι η κατάσταση για ένα συγκεκριμένο υποκείμενο, πρέπει κάποιος να αποφασίσει – ή να αναγνωρίσει – ποια δραστηριότητα ή ποια πρακτική είναι αυτή, και επομένως ποια μέσα επιστρατεύουν οι δρώντες για να εμπλακούν σε ένα έργο, όπως είναι η ανάπτυξη μιας συνομιλίας ή η επίλυση ενός προβλήματος.

Αποκαλέσαμε το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας δύο φάσεων *τοποθέτηση* (*positioning*) για να το διακρίνουμε από μια πιο αιτιοκρατική οπτική της όλης διαδικασίας, η οποία θα μίλαγε για *θέσεις* (*position*s) ή υποκειμενικές θέσεις (*subjec*t-*position*s), καταγράφοντάς το ως μια προσπάθεια να χειριστούμε τις σχέσεις δομής/φορέα (structure/agency) ή αιτιοκρατίας/ελευθερίας (determinism/freedom). Η έννοια της τοποθέτησης, στη δική μας οπτική, υποστηρίζει και περιορίζει το υποκείμενο, μέσα από τον καθορισμό ορίων στο παιγνίδι των σημαινόντων, στη παραγωγή του νοήματος, αλλά δεν μπορεί να περιορίσει όλες τις εν δυνάμει αμφισημίες των μαθηματικών νοημάτων και των «μαθηματικών» υποκειμένων.

Συνοψίζοντας, υποστηρίξαμε ότι τα μαθηματικά δεν έχουν μια ενιαία υπόσταση, και ό,τι φαίνεται ως ίδιο «μαθηματικό» πρόβλημα πρέπει να προσεγγισθεί ως ένα κείμενο. Το πλαίσιο της δραστηριότητας, συγκροτούμενο στο πλέγμα των βασικών σημαινόντων, παράγει υποκείμενα των οποίων η τοποθέτηση μπορεί να βοηθήσει στην ερμηνεία της σκέψης, του συναισθήματος και της δραστηριότητάς τους κατά την επίλυση προβλημάτων.

References

Bernstein, B., 1990, *The Structuring of Pedagogic Discourse* (London: Routledge).

Bernstein, B., 1996, *Pedagogy*, *Symboli c Control and Identity* : *Theor*y, *Resear*ch, *Critique* (London: Taylor & Francis).

Derrida , J., 1976, *Of Grammatolog*y, G. C. Spivak (trans.) (Baltimore: The Johns Hopkins University Press).

Derrida , J. , 1988, *Limited Inc* (Evanston, IL: Northwestern University Press).

Dowling, P. , 1998, *The Sociology of Mathematics Education: Mathematical Myth*s}*Pedagogic Texts* (London : Falmer Press).

Evans, J., 1999 , Building bridges : re¯ections on the problem of transfer of learning in mathematics. *Educational Studies in Mathematic*s, 39, 23-44.

Evans, J. , 2000, *Adult*s*'Mathematical Thinking and Emotions* : *A Study of Numerate Practices* (London: Falmer Press).

Evans, J. and Tsatsaroni, A., 1994 , Language and subjectivity in the mathematics classroom, in S. Lerman (ed.) *The Culture of the Mathematics Classroom* (Dordrecht , NL: Kluwer), pp. 169±190.
Fairclough, N. , 1992, *Discourse and Social Change* (Cambridge: Polity Press).
Kristeva, J., 1986, Word, Dialogue and Novel, in T. Moi (ed.) *The Kristeva Reader* (Oxford : Basil Blackwell), pp. 34± 61.
Lave, J. , 1988, *Cognition in Practice: Mind, Mathematics and Culture in Everyday Life* (Cambridge: Cambridge University Press).
Lave, J. and Wenger, E., 1991, *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation* (Cambridge: Cambridge University Press).
Lodge, D. , 1984, *Small World* (London : Penguin Books).
Marx, K., 1852/1968, The eighteenth Brumaire of Louis Napoleon, in K. Marx and F. Engels, *Selected Works* (London: Lawrence and Wishart) , pp. 96-179.
Sewell, B., 1981, *Use of Mathematics by Adults in Everyday Life* (Leicester: ACACE).
Walkerdine, V. and Girls and Mathematics Unit, 1989, *Counting Girls Out* (London: Virago).

Παράρτημα

Κείμενο-1: ένα αφηρημένο 10% πρόβλημα
Ποιο είναι το 10% του 6.65;

Κείμενο-2: το μενού

ΚΟΤΟΠΟΥΛΟ MARYLAND	Σερβίρεται με γλυκό καλαμπόκι, τηγανητή μπανάνα, μπέικον, φρέσκια ντομάτα, γαλλικά φασολάκια, ψητή πατάτα γεμιστή με ξινή κρέμα και κρεμμύδια ή τηγανητές πατάτες. Ψωμί και βούτυρο. Παγωτό ή επιλογή τυριών, μπισκότα και βούτυρο.	£3.75
ΠΙΑΤΟ ΘΑΛΑΣΣΙΝΩΝ	Σερβίρεται με σως ταρτάρ, γαλλικά φασολάκια, ψητή πατάτα γεμιστή με ξινή κρέμα και κρεμμύδια ή τηγανητές πατάτες Ψωμί και βούτυρο. Παγωτό ή επιλογή τυριών, μπισκότα και βούτυρο.	£3.53
ΨΗΤΗ ΠΕΣΤΡΟΦΑ 10 oz	Σερβίρεται με σως ταρτάρ, γαλλικά φασολάκια, ψητή πατάτα γεμιστή με ξινή κρέμα και κρεμμύδια ή τηγανητές πατάτες Ψωμί και βούτυρο. Παγωτό ή επιλογή τυριών, μπισκότα και βούτυρο.	£3.81
Καφές	Σκέτος ή με κρέμα	27p
Καφέδες με Αλκοόλ	Σερβίρονται σε μεγάλες κούπες με κρέμα: Ιρλανδικός *(Irish Whiskey)*, Καραϊβικής *(Rum)*, Ρωσικός *(Vodka)*, Παριζιάνικος *(Brandy)*, Καλυψώ *(Tia Maria)*, Highland *(Scotch Whisky)*, Mine Hosts *(Cointreau)* Οι καφέδες με αλκοόλ περιέχουν ζάχαρη εκτός αν ζητηθούν χωρίς.	67p

Πηγή : Sewell (1981)

Μια επιλεγμένη βιβλιογραφία για τις σημειωτικές όψεις των μαθηματικών και της μαθηματικής εκπαίδευσης

Ελένη Γιαννακοπούλου & Δημήτρης Χασάπης
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Δημοσιεύσεις σε Αγγλική Γλώσσα

Chapman, A. (*2002*). Social semiotic of language and learning in school mathematics. In A. Sáenz-Ludlow, M. Anderson, S. Zellweger, and V. Cifarelli (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From thinking to interpreting to knowing*. Ottawa: Legas Publishing.

Cifarelli, V. V. (2000). Mental projections in mathematical problem solving: Abductive inference and schemes of action in the evolution of mathematical knowledge. In Nakahara, T., and Koyama, M. (Eds.), *Proceedings of the 24th Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Educatio*n, 2, 185-192. Hiroshima, Japan: The Nishiki Print Co.

Cifarelli, V. V. (1999). Abductive inference: Connections between problem posing and solving. In Zaslavsky, O. (Ed.), *Proceedings of the 23rd Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 2, 217-224. Haifa, Israel: The Technion Printing Center.

Cifarelli, V. V. (1999). Abduction, generalization, and abstraction in mathematical problem solving. In C. W. Spinks, & J. Deely (Eds.), *Semiotics 1998: Proceedings of the Twenty-Third Annual Meeting of the Semiotic Society of America* (pp. 97-113), Toronto, Canada: Peter Lang.

Cobb, P., E. Yackel, & K. McClain (Eds.)(2000). *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectivies on discourse, tools, and instructional desig*n. New Jersey/London: Lawrence Erlbaum Associates.

Desforges, C.W. & Bristow S. (1994). Reading to learn Mathematics in the Primary Age Range. In P. Ernest, (Ed.), *Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematics Educatio*n, 215-239. London: The Falmer Press.

Duval, R (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processing. In R. Suttherland and J. Mason (Eds.), *Exploring Mental Images with Computers in Mathematics Educatio*n, 142-157. Berlin: Springer

Duval, R (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana and V. Villani (Eds.), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. Boston/Dordrecht: Kluwer Academic publishers.

Ernest, P. (2002). The epistemic subject in mathematical activity. In A. Sáenz-Ludlow, M. Anderson, S. Zellweger, and V. Cifarelli (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From thinking to interpreting to knowing*. Ottawa: Legas Publishing.

Ernest, P. (1994). The Dialectical Nature of Mathematics. In P. Ernest (Ed.), *Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspectiv*e, 33-48. London:The Falmer Press.

Ernest, P. (1997). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematic*s. Albany, New York: State University of New York Press.

Ernest, P. (1998). The Relation between Personal and Public Knowledge from an Epistemological Perspective. In F. Seeger, J. Voight, and U. Waschescio, (Eds.), *The Culture of the Mathematics Classroo*m, 245-268. Cambridge: Cambridge University Press.

Godino J. and Batanero, C. (2002). Semiotic functions in teaching and learning mathematics. In A. Sáenz-Ludlow, M. Anderson, S. Zellweger, and V. Cifarelli (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From thinking to interpreting to knowing*. Ottawa: Legas Publishing.

Kaput, J. (2000). On the development of human representational competence from an evolutionary point of view: From episodic to virtual culture. In F. Hitt and M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Educatio*n, 1, 27-47. Columbus,Ohio: ERIC.

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). Where mathematics come from: How the embodied mind brings mathematics into being. New york: Basic Books.

Lemke, J. (2002). Mathematics in the middle: measure, picture, gesture,sign, and word. In A. Sáenz-Ludlow, M. Anderson, S. Zellweger, and V. Cifarelli (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From thinking to interpreting to knowing*. Ottawa: Legas Publishing. *pp. 215-234*

McNamara, O. (2002). Locating Saussure in contemporary mathematics discourse. In A. Sáenz-Ludlow, M. Anderson, S. Zellweger, and V. Cifarelli (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From thinking to interpreting to knowing*. Ottawa: Legas Publishing.

Morgan, C. (2002). The linguistic construction of social identities in mathematical communities. In A. Sáenz-Ludlow, M. Anderson, S. Zellweger, and V. Cifarelli (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From thinking to interpreting to knowing*. Ottawa: Legas Publishing.

Núñez, R. (2000). Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics. In Nakahara, T., and Koyama, M. (Eds.), *Proceedings of the 24th Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Educatio*n, 2, 185-192. Hiroshima, Japan: The Nishiki Print Co.

O'Halloran, K.L. (2002). Implications of multi-semiotic constructions for mathematics education. In A. Sáenz-Ludlow, M. Anderson, S. Zellweger, and V. Cifarelli (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From thinking to interpreting to knowing*. Ottawa: Legas Publishing.

O'Halloran, K. L. (2000). Classroom Discourse in Mathematics: A Multisemiotic Analysis, *Linguistics and Education*, 10/3 (Special Edition), 359-388.

O'Halloran, K. L. (1999b). Towards a Systemic Functional Analysis of Multisemiotic Mathematics Texts. *Semiotica*, 124 - 1/2, 1-29.

Otte, M. (1986). What is a Text? In B. Christiansen, A.G. Howson, M. Otte (Eds.), *Perspectives on Mathematics Educatio*n, 173-203. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Otte, M. (1983). Textual Strategies. *For the Learning of Mathematic*s, 3 (3), 15-28.

Otte, M. (1990). Arithmetics and Geometry - Some Remarks on the Concept of Complementarity. *Studies in Philosophy and Education 10, (37-62).*

Otte, M. (1991). Style as a Historical Category. *Science in Context 4, 233-26*4.

Otte, M. (1994). Intuition and Logic in Mathematics. In D.E. Robitaille/D.H. Wheeler/C. Kieran (Eds.), *Selected Lectures from the 7th International Congress on Mathematical Educatio*n. Les Presses de l' Université Laval, Sainte -Foy (271-284).

Otte, M. (1997b). Mathematics, Semiotics,and the Growth of Social Knowledge. *For the Learning of Mathematic*s, 17(1), 47-54.

Otte, M. (1997c). Mathematics as an Activity and the Analytic-Synthetic Distinction. In M. Otte, M. Panza (Eds.), *Analysis and Synthesis in Mathematic*s, 261-271. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Otte, M. (1997d). Analysis and Synthesis in Mathematics from the Perspective of Charles S.Peirce's Philosophy. In: M. Otte, M. Panza (eds.), *Analysis and Synthesis in*
*Mathematic*s, 327-362. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Otte, M. (1997). Mathematics, semiotics, and the growth of social knowledge. *For the Learning of Mathematics 17, 1,47-54.*

Otte, M. (1998). Limits of constructivism: Kant, Piaget, and Peirce. *Science and Education 7, 425-450.*

Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematic*s. New York: Routledge.

Presmeg, N. C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies, and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematic*s, 23, 595-610.

Presmeg, N. C. (1997). Reasoning with metaphors and metonymies in mathematics learning. InL. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images* (pp. 267-279). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Presmeg, N. C. (1998). A semiotic analysis of students' own cultural mathematics. Research Forum Report, in A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of* *the 22 nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol.1, pp. 136-151.

Radford, L. (1998). On Signs and Representations. A Cultural Account, Scientia Paedagogica Experimentalis, Vol. 35 (1), 277-302.

Radford, L. (1999). The Rhetoric of Generalization, Proceedings of the 23 rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Haifa, Technion-Israel Institute of Technology, Vol. 4, 89-96.

Radford, L.: (2000) Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis, *Educational Studies in Mathematic*s, 42 (3), 237-268.

Radford, L. (2000). Students' processes of symbolizing in algebra. A semiotic analysis of the production of signs in generalizing tasks, in: T. Nakahara and M. Koyama (eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of* Mathematics Education (PME-24), Hiroshima University, Japan, 4, 81-88.

Radford, L (2001). Factual, Contextual and Symbolic Generalizations in Algebra, *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educatio*n, Utrecht University, The Netherlands. Vol. 4, 81-88.

Radford, L. (2002). On culture and mind: A post-Vygotskian semiotic perspective with an example from Greek mathematical thought. In A. Sáenz-Ludlow, M. Anderson, S. Zellweger, and V. Cifarelli (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From thinking to interpreting to knowing*. Ottawa: Legas Publishing.

Rotman, B. (1987). Signifying nothing: The semiotics of zero. London: McMillan.

Rotman, B. (1988). Toward a semiotics of mathematics. Semiotica 72, 1-35.

Sáenz-Ludlow, A. (1998a). Iconic means in children’s understanding of the division algorithm. In C. W. Spinks and J. Deely (Eds.). *Semiotics, 199*7, 118-13*0.* Toronto, Canada: Peter Lang.

Sáenz-Ludlow, A. (1999). Symbolic activity in mathematics classrooms: A semiotic perspective. In C. W. Spinks and J. Deely (Eds.). *Semiotics 199*8, 156-17*0.* Toronto,Canada: Peter Lang.

Sáenz-Ludlow, A. (2002). Classroom mathematics discourse as an evolving interpreting game. In A. Sáenz-Ludlow, M. Anderson, S. Zellweger, and V. Cifarelli (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From thinking to interpreting to knowing*. Ottawa: Legas Publishing.

Sfard, A. (1997). A commentary: On metaphorical roots of conceptual growth. In L. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images (339-371*). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum associates.

Vile, A. (2002). Mathematics in flatland: A Percian, trialectic view of the nature of mathematics. In A. Sáenz-Ludlow, M. Anderson, S. Zellweger, and V. Cifarelli (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From thinking to interpreting to knowing*. Ottawa: Legas Publishing.

Vile, A. (1999). What can semiotics do for mathematics education? In L. Brown (ed.). *Making meaning in mathematics: A collection of extended and refereed papers from BSLRM – the British Society for Research into Learning Mathematics, York: QED.*

Vile, A. (1996). *Peirce, the Interpretant (a tripartite division of experience) and Mathematica Meanin*g. International Congress for Mathematics Education, 20, Seville.

Vile, A, & Lerman, S. (1996). Semiotics as a description in matematical domains. *Proceedings of the 20 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educatio*n. Valencia, 4, 395-402.

Vile, A, & Polovina, S. (1998). *Thinking of or Thinking Through Diagrams? The Case of Conceptual Graphs. Thinking With Diagrams 9*8, Wales.

Whitson, J.A. (1997). Cognition as a Semiosic Process: from Situated Mediation to Critical Reflective Transcendence. In D. Kirshner and J. Whitson (Eds.), *Situated Cognition* (Κεφ. 7). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Δημοσιεύσεις σε Γαλλική Γλώσσα

Duval, R (1988). Graphiques et equations: L'articulation de deux registers. *Annales de didactique et de Sciences Cognitive*s, 1, 235-255.

Duval, R (1991). L'organisation 1991). L'organisation déductive du discourse: Inreaction entre structure profonde et structure de surface dans l'accés à la demonstration, (avec M. A. Egret). *Annales de didactique et de Sciences Cognitive*s, 2, 41-65.

Duval, R (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la demonstration. *Educational Studies in Mathematic*s, 22 (3), 233-261.

Duval, R (1995). Sémiosis et pensée humaine. Bern: Peter Lang.

Duval, R. (2000). Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques,* 20/2 pp.135-170.

Δημοσιεύσεις σε Γερμανική Γλώσσα

Otte, M., H. Steinbring (1977). Probleme der Begriffsentwicklung-zum Stetigkeits-begriff Didaktik der Mathematik (16-25).

Otte, M., Chr. Keitel, F. Seeger (1980). Text, Wissen, Tätigkeit Scriptor, Königstein/Ts., 244 Seiten.