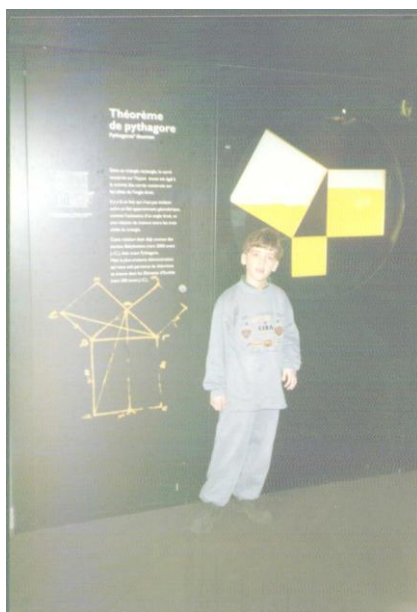


**Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΩΣ ΜΕΣΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ ΚΑΙ ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ**

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΧΑΣΑΠΗΣ

Επιμέλεια



**1^ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών
Θεσσαλονίκη, 8 & 9 Μαρτίου 2002**

**Αριστοτέλειο Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης
Διδασκαλείο Δημοτικής Εκπαίδευσης 'Δημήτρης Γληνός'**

Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΩΣ ΜΕΣΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ ΚΑΙ ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Επιμέλεια: ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΧΑΣΑΠΗΣ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 2002 1^η ΕΚΔΟΣΗ ΕΝΤΥΠΗ

ΑΘΗΝΑ 2020

2^η ΕΚΔΟΣΗ CD

© Δημήτρης Χασάπης για την παρούσα συλλογή

Οι συγγραφείς για τα κείμενα τους

Σελιδοποίηση-Μονταζ-Εκτύπωση

ART OF TEXT

Κ.Ν. Επισκόπου 4, 546 35 Θεσσαλονίκη

Τηλ.:031/218.546, 218.569

ISBN: 960-312-085-5

Περιεχόμενα

ΕΝΟΤΗΤΑ Ι

Επιστημολογικό και διδακτικό υπόβαθρο της χρήσης στοιχείων της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία και στη μάθηση των μαθηματικών στο σχολείο

Ευαγγελία Τρέσσου – Φατούρου

Σκέψεις για τη χρήση της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών

9

David Lingard

Η ιστορία των μαθηματικών: Ένα απαραίτητο στοιχείο του αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών του σχολείου

17

Νίκος Καστάνης

Η ιστορία των μαθηματικών ως συνιστώσα του μεταγνωστικού υποβάθρου των δασκάλων του σχετικού μαθήματος

27

Δημήτρης Χασάπης

Η διαμεσολάβηση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών:

Μια θεωρητική προσέγγιση

55

ΕΝΟΤΗΤΑ II

Θέματα διδακτικής προσαρμογής και προτάσεις αξιοποίησης στοιχείων της ιστορίας των μαθηματικών στο σχολικό περιβάλλον

Κώστας Ζαχάρος

Ο ρόλος του σχήματος στην αποδεικτική διαδικασία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και οι διδακτικές προοπτικές μιας ιστορικής «ανάγνωσης» της σύγκρισης και μέτρησης επιφανειών επιπέδων σχημάτων

67

Κώστας Χατζηκυριάκου

Η ιστορία στη διδασκαλία του πυθαγορείου θεωρήματος

81

Κώστας Νικολαντωνάκης

Πειραματική Γεωμετρία: Ένα παράδειγμα από την ιστορία της γεωμετρίας

93

Γιάννης Θωμαΐδης

Ιστορικές παρεκβάσεις στα όρια πρακτικής και θεωρητικής γεωμετρίας

105

ΕΝΟΤΗΤΑ III

Παρουσίαση ειδικών περιπτώσεων και προτάσεων αξιοποίησης θεμάτων από την ιστορία των μαθηματικών στη διδασκαλία τους στο Δημοτικό σχολείο και στο Γυμνάσιο

Νικολέττα Ισχυρλίδου & Δημήτρης Χασάπης

Ανάπτυξη μιας διδακτικής ενότητας για το Δημοτικό σχολείο με πυρήνα στοιχεία από την ιστορία των μαθηματικών: Η ιστορική εξέλιξη των αριθμητικών συστημάτων

115

Άγγελος Χατζηνικολάου

Η ιστορία των μαθηματικών στην προσπάθεια σχολικής ένταξης παιδιών Ρομά μέσα από την αξιοποίηση του παραδείγματος της ζωής της Υπατίας

127

Δημήτρης Χασάπης & Μαρία Κοτσακώστα

**Χρησιμοποιώντας ένα ιστορικό πρόβλημα των
μαθηματικών σε μια τάξη του Δημοτικού σχολείου**

137

Αναστάσιος Τοκμακίδης

**Οκτώ διδακτικές συμβουλές του Augustus de Morgan
σχετικά με τις δυσκολίες πάνω στη μελέτη των
στοιχειωδών μαθηματικών**

149

ΕΝΟΤΗΤΑ IV

Υλικό αναφοράς

Ελένη Γιαννακοπούλου

**Ένας κατάλογος πηγών στο διαδίκτυο για θέματα
ιστορίας των μαθηματικών και αξιοποίησης της
στην διδασκαλία των μαθηματικών**

165

Εισαγωγικό Σημείωμα

Στην παρούσα έκδοση περιλαμβάνονται κείμενα εισηγήσεων που παρουσιάστηκαν στο 1^ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών με θέμα “Η ιστορία των μαθηματικών ως μέσο διδασκαλίας των μαθηματικών στο Δημοτικό σχολείο και στο Γυμνάσιο”, που οργανώθηκε στις 8 και 9 Μαρτίου 2002 στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.

Βασική επιδίωξη του διημέρου αυτού συνεδρίου αποτέλεσε η συνάντηση εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, ερευνητών της μαθηματικής εκπαίδευσης και ιστορικών των μαθηματικών και η ανάπτυξη ενός προβληματισμού για τις δυνατότητες, τις προϋποθέσεις, τα πλαίσια και τα ενδεχόμενα πλεονεκτήματα της χρήσης στοιχείων της ιστορίας των μαθηματικών τόσο στην ανάπτυξη της διδασκαλίας όσο και στην υποστήριξη της μάθησης των μαθηματικών στο Δημοτικό σχολείο και στο Γυμνάσιο.

Η θεματολογία του συνεδρίου αναπτύχθηκε σε τρεις άξονες και την ίδια δομή ακολουθεί η δημοσίευση των κειμένων στην παρούσα έκδοση:

- Ζητήματα που συναρτώνται με το επιστημολογικό και διδακτικό υπόβαθρο της χρήσης στοιχείων της ιστορίας των μαθηματικών στην ανάπτυξη της διδασκαλίας και στην υποστήριξη της μάθησης των μαθηματικών στο σχολείο.
- Ζητήματα διδακτικής προσαρμογής και μεθόδευσης της χρήσης στοιχείων της ιστορίας των μαθηματικών στο σχολικό περιβάλλον και
- Παρουσίαση ειδικών περιπτώσεων και προτάσεων αξιοποίησης θεμάτων από την ιστορία των μαθηματικών στη διδασκαλία τους στο Δημοτικό σχολείο και στο Γυμνάσιο.

Στο διήμερο έλαβαν μέρος 240 εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, 48 εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, 8 σχολικοί σύμβουλοι και φοιτητές και φοιτήτριες.

Η Οργανωτική Επιτροπή

Δημήτρης Χασάπης, Επικ. Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε. Α.Π.Θ.

Κώστας Ζαχάρος, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

Νικολέτα Ιστυρλίδου, Εκπαιδευτικός Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης

Δημήτρης Κουσίδης, Εκπαιδευτικός Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης

Σπύρος Τρίκος, Εκπαιδευτικός Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης

Έχει η ιστορία των μαθηματικών θέση στη μαθηματική εκπαίδευση;

Ευαγγελία Τρέσσου

Αναπληρώτρια καθηγήτρια Π.Τ.Δ.Ε, Α.Π.Θ

Είναι σημαντικό για τη μαθηματική εκπαίδευση ότι εκπαιδευτικοί όλων των βαθμίδων ενδιαφερόμαστε για τη θέση που μπορεί να έχει η ιστορία των μαθηματικών στο περιεχόμενο της μαθηματικής εκπαίδευσης και τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να επηρεάσει τη διδασκαλία του σχολικού μαθήματος.

-Θα επηρεάσει και πρέπει να επηρεάζει τη διδασκαλία των μαθηματικών η ιστορία τους;

-Θα πρέπει να διδάξουμε και ιστορία στο πλαίσιο του μαθήματος των μαθηματικών;

-Η γνώση της ιστορίας των μαθηματικών είναι μια γνώση χρήσιμη για τον εκπαιδευτικό ή/και απαραίτητη για τα παιδιά;

-Που, πως, γιατί να συμπεριλάβουμε την ιστορία στα αναλυτικά προγράμματα;

-Θα διδαχθεί η ιστορία των μαθηματικών ως ξεχωριστό μάθημα, ως μέρος του μαθήματος Ιστορία των επιστημών για παράδειγμα, ή θα ενσωματωθεί ως υποσημειώσεις στο μάθημα των μαθηματικών, π.χ. κατά τη διδασκαλία του Πυθαγορείου θεωρήματος θα μαθαίνουν τα παιδιά και κάποιες πληροφορίες για τον ίδιο τον Πυθαγόρα;

-Η ιστορία θα επηρεάσει το περιεχόμενο των μαθηματικών με την προσθήκη νέων θεματικών περιοχών, για παράδειγμα το αριθμητικό σύστημα των Μάγια, ή θα επηρεάσει και τη διδασκαλία του περιεχομένου; Η μία τάση δεν αποκλείει φυσικά την άλλη

Για κάποια από αυτά τα ερωτήματα υποθέτω ότι θα ακουστούν ιδέες και απόψεις, θα αναπτυχθεί επιχειρηματολογία και θα γίνει συζήτηση σήμερα και αύριο.

Όλοι/ες, που βρισκόμαστε σήμερα εδώ, ασφαλώς δεν έχουμε ούτε την ίδια άποψη ούτε την ίδια σχέση και την ίδια στάση για την ιστορία των μαθηματικών. Όπως άλλωστε δεν έχουμε την ίδια προσωπική ιστορία και την ίδια «μαθηματική» ιστορία ως ένα μέρος της προσωπικής μας ιστορίας. Όμως γνωρίζουμε κάποια στοιχεία από την ιστορία των μαθηματικών και το ερώτημα είναι τι κάνουμε με αυτά; Θα ανασύρω σήμερα κάποια.

(α) Γνωρίζουμε ότι ο Ευκλείδης συγκαταλέγεται μεταξύ των μεγαλύτερων μαθηματικών της αρχαιότητας. Γνωστός ως ο συγγραφέας των Στοιχείων ή στοιχειώτης όπως αναφέρονταν συνήθως, ταυτίζεται σχεδόν με τη γεωμετρία. Τα Στοιχεία (13 βιβλία) του χρησιμοποιήθηκαν για πολλούς αιώνες ως βασικό κείμενο διδασκαλίας των μαθηματικών. Γνωρίζουμε επίσης ότι στην Ευκλείδεια Γεωμετρία η σύγκριση δύο μεγεθών γίνεται με τη μέθοδο της επίθεσης. Ίσα είναι δύο μεγέθη που τοποθετώντας το ένα επάνω στο άλλο διαπιστώνουμε την ισότητά τους.

(β) Γνωρίζουμε ότι ο Πυθαγόρας επισκέφθηκε τους Δελφούς όπου έμεινε και μνήθηκε στα μυστικά των αριθμών από τη Θεμιστόκλεια, την ιέρεια του ναού του Απόλλωνα. Ταξίδεψε και έμεινε πολλά χρόνια στην Αίγυπτο όπου έμαθε τη γλώσσα των ιερέων, μελέτησε τις βίβλους των αδύτων, σπούδασε την αιγυπτιακή φιλοσοφία, τα μαθηματικά, την αστρονομία και την ιατρική. Όταν οι Βαβυλώνιοι κατέλαβαν την Αίγυπτο ο Πυθαγόρας μεταφέρθηκε ως αιχμάλωτος στην Βαβυλώνα όπου μαθήτευσε κοντά στους Μάγους, τα μέλη της ιερατικής τάξης. Λέγεται ότι μετά τη Βαβυλώνα πήγε στην Ινδία όπου μαθήτευσε δίπλα στους Βραχμάνες σοφούς. Το 520 π.Χ. ο Πυθαγόρας επισκέφθηκε την κάτω Ιταλία όπου γνώρισε τη Θεανώ, ένθερμη μαθήτριά του, που έγινε αργότερα σύζυγός του. Η Θεανώ δίδασκε στην Πυθαγόρεια σχολή που επέτρεπε τη φοίτηση και σε γυναίκες, 18 γυναίκες παρακολούθησαν τη σχολή κατά τη διάρκεια της λειτουργίας της, και μετά το θάνατο του Πυθαγόρα ανέλαβε τη διεύθυνσή της μαζί με τις κόρες της. Η κόρη του Πυθαγόρα η Δαμώ υπήρξε αξιόλογη μαθηματικός το ίδιο και οι άλλες δύο κόρες του η Αργινώτη και η Μυία. Γνωρίζουμε επίσης ότι η πατρότητα του γνωστού σε όλους μας ως Πυθαγορείου θεωρήματος διεκδικείται και από τους Ινδούς, χωρίς ωστόσο να υπάρχουν ενδείξεις ότι οι Έλληνες πήραν την απόδειξη από την Ινδία. Φαίνεται ότι το θέμα αναπτύχθηκε σε κάθε μια από τις δύο χώρες ανεξάρτητα.

(γ) Γνωρίζουμε ότι το κινέζικο tangram, ένα είδος σύγχρονου παζλ, αποτελείται από επτά ευθύγραμμα σχήματα: δύο μεγάλα ίσα τρίγωνα, ένα μέτριου μεγέθους τρίγωνο, δύο μικρά ίσα τρίγωνα, ένα τετράγωνο και ένα παραλληλόγραμμο. Αυτά τα επτά ευθύγραμμα σχήματα αν συνδυαστούν κατάλληλα σχηματίζουν ένα τετράγωνο. Με διαφορετικούς συνδυασμούς μπορούν να σχηματίσουν άλλα κυρτά και ένα πλήθος μη κυρτών πολυγώνων και μια ποικιλία αναπαραστάσεων, για παράδειγμα ανθρώπινων μορφών που τρέχουν, κάθονται, χορεύουν ή κολυμπούν, ζώων, φυτών και αντικειμένων. Οι Κινέζοι, αποκαλούσαν το tangram, "πίνακα της σοφίας", καθώς χωρίς περίσκεψη και φαντασία δεν είναι εύκολο να παίξεις το παιχνίδι, και συνόδευαν το tangram με ένα μύθο που «δικαιολογούσε» αυτή την ενασχόληση με το συνδυασμό των 7 κομματιών.

(δ) Γνωρίζουμε τον Ινδό Ramanujan (1887-1920) για τη δουλειά του πάνω στον διαμερισμό αριθμών. Ο Ramanujan μια μαθηματική ευφυΐα που αναγνωρίστηκε πενήντα χρόνια μετά το θάνατό του, πήρε μια υποτροφία σε ηλικία 11 ετών για τις εξαιρετικές ικανότητές του στα μαθηματικά, απέτυχε όμως σε όλες τις άλλες εξετάσεις και έτσι δεν μπόρεσε να πάει στο Πανεπιστήμιο. Ο Hardy (1941)¹, εντυπωσιασμένος από τη δουλειά του Ramanujan, έγραφε γι' αυτόν στο βιβλίο του "Η απολογία ενός Μαθηματικού"

«Οφείλω σ' αυτόν περισσότερα από οποιονδήποτε άλλον στον κόσμο, με μία μόνον εξαίρεση.....»

«(Εγώ) δεν έκανα ποτέ τίποτε χρήσιμο. Καμιά δική μου ανακάλυψη δεν θα κάνει κάποια διαφορά, μικρή ή μεγάλη στο να γίνει ο κόσμος πιο ευχάριστος. Όταν είμαι αναγκασμένος να ακούω κουραστικούς και στομφώδεις ανθρώπους γύρω μου, όταν είμαι στενοχωρημένος, λέω στον εαυτό μου, έκανα κάτι που ποτέ εσείς δεν θα μπορέσετε να κάνετε. Συνεργάστηκα με τον Ramanujan.....»

¹ Hardy, G. H. (1941). *A mathematician's apology*. University Press, Cambridge.

Έχουμε λοιπόν την ιστορία, τις ιστορίες ανθρώπων που συνέβαλαν στη δημιουργία της ιστορίας. Τι μας λένε αυτές οι ιστορίες; Πως μπορούν να γονιμοποιήσουν την ιστορία των μαθηματικών;

(α) Από την ιστορία του Ευκλείδη μαθαίνω έναν τρόπο για να αποδείξω ότι δύο μεγέθη είναι ίσα.

(β) Από την ιστορία του Πυθαγόρα μαθαίνω ότι απόδειξη παρόμοια με αυτήν του Πυθαγόρα, για το γνωστό σε όλο τον κόσμο Πυθαγόρειο θεώρημα, έχουν κάνει διαφορετικοί λαοί ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο. Μαθαίνω επίσης ότι ο Πυθαγόρας ταξίδεψε στην Αφρική και στην Ασία και εκεί μαθήτευσε για χρόνια δίπλα στους σοφούς της εποχής. Μαθαίνω τέλος ότι μια γυναίκα τον μύησε στην αριθμοσοφία και ότι η γυναίκα του και οι τρεις του κόρες δίδαξαν μαθηματικά στη σχολή του στην κάτω Ιταλία.

(γ) Από την ιστορία του tangram μαθαίνω ότι εκεί, στην μακρινή Κίνα, ανέπτυσσαν τη φαντασία και την περίσκεψη «παίζοντας» με το συνδυασμό ευθυγράμμων σχημάτων.

(δ) Τέλος από την ιστορία του Ramanujan μαθαίνω ότι ένας Ινδός που δεν σπούδασε στο Πανεπιστήμιο γιατί δεν πέρασε στις εισαγωγικές εξετάσεις ήταν μια μαθηματική ιδιοφυΐα.

Πως αυτή η γνώση από την ιστορία των μαθηματικών μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη διδασκαλία του σχολικού μαθήματος;

(α) Η ιστορία του Ευκλείδη μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατανόηση της έννοιας του εμβαδού. Χρησιμοποιώντας στη διδασκαλία γνώσεις από τα στοιχεία του Ευκλείδη και εφαρμόζοντας τη μέθοδο που χρησιμοποιούσε για να αποδείξει την ισότητα δύο επιφανειών μπορεί να έχουμε καλύτερα αποτελέσματα στην κατανόηση της μέτρησης εμβαδού από τα παιδιά.

(β) Η ιστορία του Πυθαγόρα μπορεί να χρησιμοποιηθεί πολλαπλά. (1) για να δοθεί η δυνατότητα στα παιδιά να διαπιστώσουν μελετώντας το Πυθαγόρειο θεώρημα ότι στο ίδιο αποτέλεσμα (την απόδειξη του θεωρήματος) μπορούμε να φτάσουμε από διαφορετικές διαδρομές, (2) για να διαλυθεί το αυτονόητο ότι τα μαθηματικά είναι προϊόν αποκλειστικά του Δυτικού πολιτισμού. Η ιστορία των μαθηματικών αναδεικνύεται ως μια διαδρομή στη διαφορετικότητα και τα μαθηματικά φαίνεται ότι

δημιουργούνται και αναπτύσσονται μέσα από τις προσπάθειες πολλών ανθρώπων στον κόσμο, ανδρών και γυναικών, (3) για να διαλυθεί το αυτονόητο ότι τα μαθηματικά είναι μια αποκλειστικά ανδρική περιοχή. Από την ιστορία φαίνεται ότι και στην αρχαιότητα, υπήρχαν γυναίκες μαθηματικοί. Είναι μια πολύ καλή ευκαιρία να συζητηθούν οι παράγοντες που επηρέαζαν τη σχέση της γυναίκας με τα μαθηματικά και να γίνουν γνωστές οι πολιτισμικές και κοινωνικές συνθήκες που επέτρεπαν/απέκλειαν τη συμμετοχή της στη μαθηματική παιδεία.

(γ) Η ιστορία του tangram μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διδασκαλία περιεχομένου που αφορά σε ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων και στις μεταξύ τους σχέσεις, σε συγκρίσεις μεγεθών, σε μετρήσεις εμβαδών με αυθαίρετες μονάδες μέτρησης. Μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για να φανεί ότι λαοί σε διάφορα μέρη της γης ανέπτυξαν δραστηριότητες και παιχνίδια με τα οποία μπορούσαν να ασκηθούν σε διανοητική πειθαρχία. Δραστηριότητες αυτού του είδους μπορεί να φέρουν στο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών την ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα διάσταση του μύθου, και τη ζωντάνια της πολιτισμικής διαφορετικότητας. Ο εμπλουτισμός του αναλυτικού προγράμματος με δραστηριότητες που φέρνουν στην επιφάνεια και κάνουν γνωστούς και άλλους πολιτισμούς, δίνει την ευκαιρία στα παιδιά και στον/στην εκπαιδευτικό να συγκεντρώσουν πληροφορίες, να σχολιάσουν και να συζητήσουν τις δραστηριότητες στα ιστορικά, γεωγραφικά και πολιτισμικά τους πλαίσια και βγάζουν παιδιά και εκπαιδευτικό από τα στενά, περιορισμένα και περιοριστικά μονοπολιτισμικά συμφραζόμενα του περιεχομένου των διδακτικών εγχειριδίων. Δραστηριότητες και παιχνίδια διαφόρων λαών που στηρίζουν ή στηρίζονται σε μαθηματικές δραστηριότητες δίνουν τη δυνατότητα να αναγνωριστεί αξία σε άλλους πολιτισμούς και να δημιουργηθεί θετική στάση απέναντι σε πολιτισμικές μειονότητες. Δραστηριότητες και παιχνίδια άλλων λαών, συνυφασμένα με τις δραστηριότητες, τα προβλήματα και τις ασκήσεις του διδακτικού εγχειριδίου, δραστηριότητες δηλαδή που δεν εμφανίζονται ως επιλογές και συμπληρώματα του τυπικού περιεχομένου του προγράμματος σπουδών αλλά ως σημαντικές πλευρές ενός ενιαίου όλου, αποκτούν σημασία και συνδέουν τα άχρονα, άλυχα και αφηρημένα μαθηματικά με τους ανθρώπους που τα σκέφτονται και τα χρησιμοποιούν.

Η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να κάνει το μάθημα των μαθηματικών πιο ενδιαφέρον, πιο ελκυστικό, πιο ευχάριστο ώστε να δημιουργηθούν κίνητρα και να αναπτυχθούν θετικές στάσεις για τη μάθηση. Ο Αϊνστάιν είπε κάποτε σε μια συζήτηση για την εκπαίδευση ότι όλα τα πράγματα πρέπει να τα ερωτεύομαστε, η αγάπη είναι καλύτερος δάσκαλος από το καθήκον και ο Seymour Papert επίσης σε μια συνέντευξή του για την εκπαίδευση είπε ότι ο έρωτας είναι ο καλύτερος τρόπος να αποφασίσουμε το τι θα κάνουμε τελικά στη ζωή μας. Είπε επίσης ότι ο ρόλος της εκπαίδευσης θα έπρεπε να είναι να δίνει στους ανθρώπους τη δυνατότητα να γνωρίσουν τα πράγματα τα οποία θα μπορούσαν να ερωτευτούν, να τους εξοικειώσει με ενδιαφέροντα που θα μπορούσαν να γεμίσουν τη ζωή τους. Η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να βοηθήσει τα παιδιά να βρουν κάποιο νόημα, να δουν μια πρόκληση, να γοητευθούν από τα μαθηματικά, να θέλουν να τα μάθουν από ενδιαφέρον και όχι από καθήκον.

(δ) Η ιστορία του Ramanujan μπορεί να χρησιμοποιηθεί, εκτός από τη διδασκαλία που αφορά στην ανάλυση ενός αριθμού, για να κάνει ορατούς και μη ευρωπαϊούς μαθηματικούς στην ιστορία των μαθηματικών. Η μαθηματική ιστορία ορισμένων πολιτισμών αποσιωπάται από τη μαθηματική εκπαίδευση καθώς φαίνεται ότι όσοι παίζουν σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση του περιεχομένου της μαθηματικής εκπαίδευσης σε όλα τα επίπεδα έχουν επιλεκτική μνήμη. Έτσι ένα μεγάλο μέρος της ιστορίας μας χάνεται, μαζί της και ένα μεγάλο μέρος της εμπειρίας. Ένα μεγάλο μέρος της ιστορίας των μαθηματικών πιθανόν χάθηκε επειδή για πάρα πολλά χρόνια η παγκόσμια ταυτότητα των μαθηματικών ταυτίστηκε με την Ευρωπαϊκή ή δυτική ταυτότητα. Ένα μεγάλο μέρος των αποθεμάτων της τράπεζας εμπειρίας, που είναι η ιστορία, χάθηκαν γιατί πολλές από αυτές τις εμπειρίες δεν θεωρήθηκαν αξιόλογες. Ένα μεγάλο μέρος της μαθηματικής ιστορίας κάποιων πολιτισμών πιθανόν έσβησε κάνοντας φτωχότερη την ιστορία των μαθηματικών.

Η ιστορία στην περίπτωση του Πυθαγόρα, του tangram και του Ramanujan δίνει την ευκαιρία να συζητηθούν ζητήματα δύναμης και εξουσίας. Ποιοι αποφάσιζαν για παράδειγμα ότι οι γυναίκες δεν έχουν θέση στη μαθηματική παιδεία ή ότι τα μαθηματικά κάποιων πολιτισμών, είναι πρακτικά, λιγότερο

σημαντικά από τα μαθηματικά του δυτικού κόσμου; Έχει σχέση ο αποκλεισμός κάποιων ανθρώπινων ομάδων από τη μαθηματική παιδεία και ο αποκλεισμός κάποιων πολιτισμών από την ιστορία των μαθηματικών με μια προσπάθεια να διατηρηθεί ο έλεγχος και η δύναμη κάποιων κοινοτήτων σε βάρος κάποιων άλλων;

Τι αλλάζει λοιπόν, τι μπορεί να αλλάξει αν χρησιμοποιηθεί η ιστορία των μαθηματικών στη διδασκαλία του σχολικού μαθήματος; Από τα παραδείγματα που ανέφερα φαίνεται ότι

Μπορεί να αλλάξει το περιεχόμενο, αφού θα βάλουμε άλλους στόχους όπως, τα μαθηματικά ως πολιτισμικό χαρακτηριστικό, φύλο και εκπαίδευση, ρατσισμός και εκπαίδευση, κριτική εκπαίδευση, εκπαίδευση με ανθρώπινο πρόσωπο

Αλλάζει ο τρόπος διδασκαλίας αφού θα έχουμε άλλες επιδιώξεις και άλλο περιεχόμενο.

Αυτή είναι μια κατεύθυνση, ασφαλώς δεν είναι η μοναδική. Η εισαγωγή της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση μπορεί να γίνει με διαφορετικούς τρόπους, ανάλογα με το πώς βλέπει κανείς τα μαθηματικά και τους στόχους που έχει από τη μαθηματική εκπαίδευση.

Όπως και να είναι, η συζήτηση που γίνεται τα τελευταία χρόνια για τη θέση της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση θεωρώ ότι είναι πολύ σημαντική έστω και μόνον γιατί βάζει το θέμα για περισσότερη και πλουσιότερη ιστορία. Τη θεωρώ σημαντική ως αντίθετη στη γενική τάση για λιγότερη ιστορία, λιγότερη μνήμη, λιγότερη ποικιλία εμπειριών.

Η ιστορία των μαθηματικών: Ένα απαραίτητο στοιχείο του αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών του σχολείου

David Lingard

Mathematics Education Centre, Sheffield Hallam University

Θα παρουσιάσω στην εισήγησή μου μερικά επιχειρήματα για τους λόγους που πρέπει να θεωρήσουμε την ιστορία των μαθηματικών ως απαραίτητο στοιχείο του αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών του σχολείου και μερικά παραδείγματα για τους τρόπους που μπορεί να γίνει αυτό.

Νομίζω ότι πολλοί λόγοι συνηγορούν για την εισαγωγή της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών. Ας αρχίσω από τις απόψεις άλλων.

Απόψεις διάσημων μαθηματικών, όπως:

“Νομίζω ότι όποιος και όποια θέλει να προοδεύσει στα μαθηματικά πρέπει να μελετήσει τους κλασσικούς των μαθηματικών”

Neils Henrik Abel (1802 – 1829)

Απόψεις ιστορικών, όπως:

“Η μελέτη της ιστορίας των μαθηματικών θα βελτιώσει την προσωπικότητα των μαθηματικών. Θα διευρύνει το μυαλό τους, θα γλυκάνει την καρδιά τους και θα αναδείξει τα προτερήματά τους”

*George Sarton, στο βιβλίο ‘The study of the history of mathematics’,
1936*

Απόψεις κυβερνητικών φορέων, όπως:

“Οι εκπαιδευτικοί που έχουν λίγες γνώσεις της ιστορίας των μαθηματικών τείνουν να διδάσκουν μεμονωμένες μαθηματικές τεχνικές, χωρίς συσχέτιση ούτε με τα προβλήματα από τα οποία προήλθαν ούτε με την πρόοδο που προέκυψε από αυτές τις τεχνικές.

Είναι σημαντικό να ενημερώσουμε τα παιδιά ότι οι περισσότερες γνώσεις που διδάσκονται σήμερα ως τελικά προϊόντα είναι αποτελέσματα μακροχρόνιων αναζητήσεων και εμπνευσμένων διενέξεων.

Τα μαθηματικά μπορούν να διδαχθούν αποτελεσματικά μόνο στη βάση της ιστορίας τους

Εκθεση Υπουργείου Παιδείας Ηνωμένου Βασιλείου, 1958

Απόψεις εκπαιδευτικών, όπως:

“Τι είναι τα μαθηματικά; μόνο η κατανόηση του γεγονότος ότι τα μαθηματικά δεν ήταν πάντα αυτό που είναι σήμερα και ότι στο μέλλον θα διαφορετικά, με άλλα λόγια ότι τα μαθηματικά έχουν ιστορία, δίνει στην ερώτηση ένα ουσιαστικό νόημα”

*Torkil Heide, στο άρθρο ‘Why teach history of mathematics’,
The Mathematical Gazette, March, 1992*

Η δικιά μου άποψη:

“Πιστεύουμε ότι, κάποια γνώση και κατανόηση της ιστορίας των μαθηματικών, όπως επίσης και κάποια ενασχόληση μ’ αυτήν, είναι σημαντικά στοιχεία της εκπαίδευσης όλων των εκπαιδευτικών που διδάσκουν μαθηματικά, γιατί τους βοηθούν:

- (i) να αποκτήσουν ένα βαθύτερο νόημα των μαθηματικών,*
- (ii) να κάνουν πιο ανθρώπινα τα μαθηματικά κατά τη διδασκαλία τους*
- (iii) να τονίζουν τη συνέχεια στην ανάπτυξη των μαθηματικών και*
- (iv) να κατανοούν την πολύ-πολιτισμική κληρονομιά και την πολιτιστική συνάφεια των μαθηματικών”*

*David Lingard, στο British Society for the History of Mathematics
Newsletter, No 31, Άνοιξη 1996*

Και τέλος η άποψη του Ιωνάθαν:

Όπως όλοι οι μαθητές στον κόσμο, ο Ιωνάθαν είχε συναντηθεί με το Θαλή αρκετές φορές. Κάθε φορά όμως, ο καθηγητής του μιλούσε για το θεώρημα, ποτέ για τον άνθρωπο. Άλλωστε, στο μάθημα των μαθηματικών δεν συζητούσαν ποτέ για τους ανθρώπους. Πού και πού κάποιο όνομα έβγαινε στην επιφάνεια, Θαλής, Πυθαγόρας, Πασκάλ, Ντεκάρτ. Ήταν όμως ένα σκέτο όνομα. Σαν όνομα τυριού ή σταθμού του μετρό. Δεν μιλούσαν ποτέ για το πότε ή το πού συνέβη κάτι. Οι μαθηματικοί τύποι και οι αποδείξεις απλώς προσγειωνόντουσαν στον πίνακα. Σαν να μην τους είχε ποτέ κανείς δημιουργήσει, σαν να ήταν εκεί πάντα, όπως τα βουνά και τα ποτάμια. Εδώ και τα βουνά είχαν κάποια ιστορία, κάποια αρχή. Θα 'λεγε κανείς ότι τα Θεωρήματα ήταν διαχρονικότερα από τα βουνά και τα ποτάμια! Τα μαθηματικά, δεν είναι ούτε Ιστορία, ούτε Γεωγραφία, ούτε Γεωλογία. Αλήθεια, τι είναι; Η ερώτηση δεν μοιάζει να ενδιαφέρει πολύ κόσμο.

Ντενί Γκετζ, Το θεώρημα του Παπαγάλου, Εκδόσεις ΠΟΛΙΣ, Αθήνα, 1999, σ. 35.

Πέρα από όλα αυτά όμως (και νομίζω ότι ο Ιωνάθαν θα συμφωνούσε), η εισαγωγή της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία τους προκαλεί το ενδιαφέρον γιατί μπορεί να περιλαμβάνει:

Δολοφονία, βλέπε τη ζωή της Υπατίας,
Απάτες, βλέπε τη ζωή των Tartaglia, Cardano και Ferrari,
Ειδύλλιο και πολιτική δολοπλοκία, βλέπε τη ζωή του Evariste Galois,
Κοινωνικές διακρίσεις, βλέπε τη ζωή του James Joseph Sylvester,
Σκάνδαλο, βλέπε τη ζωή Emilie du Chatelet,
Ιδιοφυία παρά τις αντιξοότητες, βλέπε τη ζωή του Srinivasa Ramanujan,
Διωγμό, βλέπε τη ζωή του Galileo Galilei,
Μοναξιά και απελπισία, βλέπε τη ζωή της Sophie Germain,
Θρησκευτικό πάθος, βλέπε τη ζωή του Pascal ή
Ψύχωση, βλέπε τη ζωή του Αρχιμήδη.

Οι περισσότεροι από τους εκπαιδευτικούς που παρακολουθούν τα μαθήματα μου στην ιστορία των μαθηματικών με ρωτάνε πάντοτε «Γιατί δεν μιλάμε για όλα αυτά στο σχολείο;».

Πως μπορούμε να εισάγουμε στοιχεία της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία τους. Θα εκθέσω μερικά παραδείγματα διακρίνοντας τα σε παραδείγματα κατάλληλα για τα μαθηματικά του πρωτοβάθμιου σχολείου και παραδείγματα κατάλληλα για τα μαθηματικά του δευτεροβάθμιου σχολείου, αν και η διάκριση δεν είναι απλή. Υπάρχει σημαντική αλληλοκάλυψη των θεμάτων αυτών και η χρήση τους στη μια ή την άλλη βαθμίδα συναρτάται με τις ικανότητες των μαθητών και μαθητριών μας, όπως και πολλούς άλλους παράγοντες.

Στη διδασκαλία των μαθηματικών του πρωτοβάθμιου σχολείου μπορούν να χρησιμοποιηθούν:

- Αριθμητικά συστήματα άλλων πολιτισμών, όπως για παράδειγμα των αριθμητικών συστημάτων των Βαβυλωνίων ή των Μάγιας, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατανόηση των εννοιών της βάσης και της αξίας θέσης των ψηφίων του αριθμητικού συστήματος (βλέπε μια αντίστοιχη διδακτική πρόταση των Ισχυρλίδου και Χασάπη στον παρόντα τόμο).
- Τα Αιγυπτιακά κλάσματα¹, προσφέρουν εξαιρετικές ευκαιρίες διερευνητικών δραστηριοτήτων. Ειδικότερα στις μέρες μας, όπου με τη γενικευμένη χρήση των αριθμομηχανών (calculators) τα παιδιά στερούνται ευκαιριών άσκησης στις πράξεις των κλασμάτων.
- Τα δίκτυα και άλλες έννοιες της τοπολογίας, όπως για παράδειγμα η εργασία του Euler για το πρόβλημα των γεφυρών του Καίνινγκσμεπεργκ (βλέπε την αντίστοιχη εργασία των Χασάπη και Κοτσακώστα στον παρόντα τόμο), και αφού μιλάμε για τον Euler,
- Η εικασία του Goldbach², την οποία ο Euler δεν μπόρεσε να αποδείξει και γύρω από την οποία περιπλέκεται το μυθιστόρημα του Δοξιάδη, Ο θείος Πέτρος και η εικασία του Goldbach. Για την κατανόηση της εικασίας του Goldbach απαιτείται μόνο η γνώση της έννοιας του άρτιου αριθμού, του πρώτου αριθμού και της πρόσθεσης αριθμών.
- Προβλήματα από τη δουλειά του ινδού μαθηματικού Ramanujan (1887 – 1920) στις διαμερίσεις των αριθμών³. Η Ένωση Εκπαιδευτικών Μαθηματικών της Ινδίας έχει εκδώσει τρία εξαιρετικά βιβλία με συναφή προβλήματα για το Δημοτικό σχολείο, το Γυμνάσιο και το Λύκειο.

και λοιπά και λοιπά

Στη διδασκαλία των μαθηματικών του δευτεροβάθμιου σχολείου μπορούν να χρησιμοποιηθούν:

- Οι Κινέζικες αποδείξεις του Πυθαγορείου θεωρήματος⁴,
- Θεωρήματα από τις εργασίες του Ίππαρχου και του Πτολεμαίου⁵ για τον υπολογισμό των μηκών των χορδών ενός κύκλου με βάση τις γωνίες οι οποίες βαίνουν στα τόξα που ορίζονται από τις χορδές αυτές, τα οποία οδηγούν σε σημαντικές τριγωνομετρικές ταυτότητες, όπως για παράδειγμα

$$\eta\mu(\alpha \pm \beta) = \eta\mu \alpha \sigma\upsilon\nu \beta \pm \sigma\upsilon\nu \alpha \eta\mu \beta$$

- Το πρόβλημα των τεσσάρων χρωμάτων⁶ και οι συναφείς εργασίες των Guthrie, Kempe και De Morgan.
- Η προέλευση του περίφημου τριγώνου του Pascal⁷, το οποίο καταγράφεται στο ποίημα *Chandasutra* του Ινδού ποιητή Pingala του 200 π.Χ.
- Η μέθοδος του Ήρωνα για τον κατά προσέγγιση υπολογισμό της τρίτης ρίζας του π.
- Το πείραμα πιθανοτήτων του Buffon (George-Luis Leclerc), το οποίο μπορεί να αποτελέσει μια εξαιρετική και πολύ διασκεδαστική εισαγωγή στα μαθήματα ανάλυσης⁸.
- Ένα πλήθος εξαιρετικών προβλημάτων που περιλαμβάνονται στα βιβλία *Liber Abbaci* και *Liber Quadratorum* του Fibonacci, στους Αιγυπτιακούς πάπυρους του Ahmes και της Μόσχας, στο Κινέζικο βιβλίο *Εννέα Κεφάλαια της Τέχνης των Μαθηματικών*, στο Ινδικό βιβλίο *Mahavira* και σε πολλά άλλα. Γιατί πρέπει να κατασκευάζουμε νέα προβλήματα όταν υπάρχει στην ιστορία των μαθηματικών ένα τέτοιο πλήθος προβλημάτων;
- Στοιχεία από την εργασία του άραβα μαθηματικού Al-Khwarizmi για το «συμπλήρωμα του τετραγώνου», δηλαδή την επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού.
- Στοιχεία από τις εργασίες της Sophie Germain και του Gauss για την απόδειξη του Τελευταίου Θεωρήματος του Fermat, τα οποία οδήγησαν στον εντοπισμό των αριθμών της Germain⁹.

- Υπολογισμοί του όγκου κολουρης πυραμίδας και σύγκριση των Αιγυπτιακών και Κινέζικων μεθόδων.

- Η απόδειξη του Lambert ότι ο αριθμός π είναι άρρητος

και λοιπά και λοιπά

Θα ήθελα να τελειώσω αυτή τη σύντομη εισήγηση μου λέγοντας ότι η εισαγωγή της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών δεν είναι πρόβλημα περιεχομένου. Είναι πρόβλημα στάσης και πρόβλημα εικόνας της επιστήμης των μαθηματικών και των επιστημόνων μαθηματικών (Θυμηθείτε τον Ιωνάθαν!).

- Γιατί κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών δεν διαβάζουμε στα παιδιά ιστορίες;

- Γιατί δεν έχουμε εικόνες και φωτογραφίες μαθηματικών στους τοίχους των σχολικών τάξεων;

- Γιατί δεν τονίζουμε συνεχώς ότι οι μαθηματικοί δεν έχουν απαντήσεις για όλα, ότι οι και μαθηματικοί κάνουν λάθη και είναι απρόσεκτοι;

“Αυτό συνέβη όταν σχετίστηκα στενότερα με τον Taniyama. Ο Taniyama δεν ήταν καθόλου προσεκτικός στη δουλειά του ως μαθηματικός – έκανε ένα σωρό λάθη. Αλλά έκανε λάθη στη σωστή κατεύθυνση, οπότε στο τέλος εύρισκε σωστές απαντήσεις. Προσπάθησα να τον μιμηθώ, αλλά διαπίστωσα ότι είναι πολύ δύσκολο να κάνεις σωστά λάθη”

Goro Shimura (Η εικασία των Shimura – Taniyama δρομολόγησε την απόδειξη του τελευταίου θεωρήματος του Fermat από τον Andrew Wiles)

- Γιατί δεν υπογραμμίζουμε ότι τα μαθηματικά δεν συναρτώνται απαραίτητα με τους υπολογιστές;

“ ποτέ δεν χρησιμοποιώ υπολογιστή. Μερικές φορές μπορεί να μουντζουρώνω στο χαρτί. Άλλες φορές να ζωγραφίζω. Επιχειρώ να βρω τύπους”

Andrew Wiles (αναφέρεται στο βιβλίο το Τελευταίο θεώρημα του Fermat του Simon Singh).

- Γιατί δεν λέμε ότι η επιστήμη των μαθηματικών δεν αναπτύχθηκε και δεν συναρτάται υποχρεωτικά με το κριτήριο της χρησιμότητας; Ας δούμε τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς.

“Οι μαθηματικοί δεν μελετούν τα θεωρητικά μαθηματικά επειδή είναι χρήσιμα. Τα μελετούν γιατί στη μελέτη τους βρίσκουν ευχαρίστηση και βρίσκουν ευχαρίστηση γιατί στη μελέτη τους υπάρχει μια ιδιότυπη ομορφιά”

Henri Poincare (1854 – 1912)

Πιστεύω ότι αγνοώντας όλα αυτά τα ζητήματα στη διδασκαλία των μαθηματικών αδικούμε και τη μαθηματική εκπαίδευση και τα παιδιά που φοιτούν στο σχολείο γιατί

“ το πρωταρχικό ζήτημα δεν είναι Τι ξέρουμε, αλλά Πως μάθαμε αυτό που ξέρουμε”

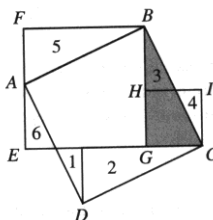
Αριστοτέλης (384 – 322 πΧ)

Σας ευχαριστώ και είμαι πάντα στη διάθεση σας για τη συζήτηση αυτών των θεμάτων¹⁰.

Σημειώσεις

- 1 Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι γνώριζαν και χρησιμοποιούσαν μόνο κλάσματα με αριθμητή 1 και επιπρόσθετα τα κλάσματα $\frac{2}{3}$ και $\frac{3}{4}$.
- 2 Ο Goldbach διατύπωσε το 1742 την εικασία ότι κάθε άρτιος αριθμός μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών. Για Παράδειγμα, $4=2+2$, $6=3+3$, $8=3+5$ κ.ο.κ. Η εικασία αυτή παρά το γεγονός ότι έχει επιβεβαιωθεί ότι αληθεύει για όλους τους άρτιους αριθμούς μέχρι και το 20 000 000 000 δεν έχει αποδειχθεί ότι ισχύει για κάθε άρτιο αριθμό.
- 3 Ο Ραμανούτζαν Σρινιβάσα, Ινδός μαθηματικός, ο οποίος παρόλο που δεν είχε σπουδάσει μαθηματικά διατύπωσε πολύ αξιόλογα συμπεράσματα για τις ιδιότητες των αριθμών συμβάλλοντας στην επέκταση της θεωρίας των αριθμών. Διαμέριση αριθμού αποκαλείται στη θεωρία των αριθμών κάθε παράσταση ενός ακεραίου θετικού αριθμού με τη μορφή αθροίσματος αριθμών, οι οποίοι προέρχονται από ένα σύνολο αριθμών με συγκεκριμένες ιδιότητες, όπως π.χ. το σύνολο των πρώτων αριθμών ή το σύνολο των αριθμών που είναι δυνάμεις του 2 ή του 3. Η εικασία του Goldbach αποτελεί μια τέτοια περίπτωση.

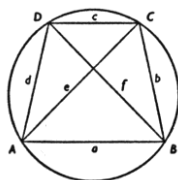
- 4 Οι κινέζικες αποδείξεις του θεωρήματος του Gou-Gu, αντίστοιχου του γνωστού στη Δύση Πυθαγορείου θεωρήματος βασίζονται στην κατάτμηση



γεωμετρικών σχημάτων σε επιμέρους σχήματα και στη συνέχεια στην ανασύνθεση τους σε διαφορετικά σχήματα, σε μια λογική αντίστοιχη του παιχνιδιού tangram. Μια από τις αποδείξεις αυτές απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα:

Στο ορθογώνιο τρίγωνο BGC σχηματίζουμε το τετράγωνο ABCD με πλευρά την υποτείνουσα BC και εμβαδόν c^2 . Μετακινούμε τα τρίγωνα 1, 2 και 3 στις θέσεις 4, 5 και 6 αντίστοιχα. Έτσι το αρχικό τετράγωνο ABCD μετασχηματίζεται (α) στο τετράγωνο EFBG με πλευρά την κάθετη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου BG και εμβαδόν b^2 και (β) στο τετράγωνο GHIC με πλευρά την κάθετη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου GC και εμβαδόν a^2 . Άρα $a^2 + b^2 = c^2$.

- 5 Με πιο γνωστό το αποκαλούμενο Θεώρημα του Πτολεμαίου



Αν ABCD είναι ένα τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο τότε είναι $e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d$

- 6 Η υπόθεση ότι απαιτούνται τέσσερα μόνο χρώματα για να χρωματιστεί ένας χάρτης, έτσι ώστε οι χώρες που συνορεύουν μεταξύ τους να είναι χρωματισμένες με διαφορετικό χρώμα, διατυπώθηκε αρχικά το 1852 από τον Φράνσις Γκούθρι μαθητή του γνωστού μαθηματικού Αυγούστου Ντε Μόργκαν στο Πανεπιστημιακό Κολέγιο του Λονδίνου. Από τότε απασχόλησε πολλούς μαθηματικούς και κατά καιρούς διατυπώθηκαν διάφορες αποδείξεις, οι οποίες όμως αποδεικνύονταν λανθασμένες. Έτσι "το πρόβλημα των τεσσάρων χρωμάτων" παρέμεινε χωρίς απόδειξη μέχρι το 1977, οπότε αποδείχτηκε με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή από τους αμερικανούς μαθηματικούς Άπελ και Χάκεν και αποτελεί πια ένα θεώρημα των μαθηματικών. Οι προσπάθειες για

την επίλυση του προβλήματος αυτού έγιναν αφορμή να δημιουργηθούν πολλές νέες μαθηματικές γνώσεις στον κλάδο των μαθηματικών που είναι γνωστός ως τοπολογία.

7 Ως τρίγωνο του Pascal είναι γνωστή η διάταξη των αριθμών

			1			
			1		1	
			1	2	1	
		1	3	3	1	
	1	4	6	4	1	
1	6	15	20	15	6	1

.....

η οποία χαρακτηρίζεται από διάφορες ιδιότητες, όπως για παράδειγμα:

- κάθε αριθμός είναι το άθροισμα των αριθμών που είναι πάνω δεξιά και πάνω αριστερά του, π.χ. $3=1+2$ ή
- κάθε αριθμός είναι το άθροισμα όλων των αριθμών της δεξιάς ή της αριστεράς διαγωνίου με αρχή πρώτο στη σειρά αριθμό που βρίσκεται πάνω δεξιά ή πάνω αριστερά του, π.χ. $15=5+4+3+2+1$ ή $15=10+4+1$

8 Το πείραμα πιθανοτήτων του Buffon συναρτάται με το εξής πρόβλημα: Ένα πάτωμα έχει παράλληλες γραμμές σε συγκεκριμένη απόσταση a μεταξύ τους. Μία βελόνα που έχει μήκος μικρότερου του μήκους a πέφτει στο πάτωμα. Ποια είναι η πιθανότητα να διασταυρωθεί η βελόνα με μια γραμμή του πατώματος;

9 Η Germain απέδειξε μια επιμέρους, αλλά γενική, περίπτωση του γνωστού στην ιστορία των μαθηματικών ως Τελευταίου Θεωρήματος του Φερμά:

Η εξίσωση $x^n + y^n = z^n$ έχει μη μηδενικές ακέραιες λύσεις για $n > 2$.

Για $n=2$ η εξίσωση αυτή είναι το γνωστό Πυθαγόρειο θεώρημα, ενώ οι Euler, Fermat, and Legendre βρήκαν λύσεις για $n=3$, $n=4$ και $n=5$ αντίστοιχα.

Οι προσπάθειες της Germain να αποδείξει το θεώρημα αυτό την οδήγησαν στον εντοπισμό των γνωστών ως αριθμών της Germain, που είναι οι άρτιοι πρώτοι αριθμοί p για τους οποίους και οι αριθμοί $2p+1$ είναι επίσης άρτιοι πρώτοι, όπως είναι π.χ. οι αριθμοί 3 και 7.

Η ιστορία των μαθηματικών ως συνιστώσα του μεταγνωστικού υποβάθρου των δασκάλων του σχετικού μαθήματος

Νίκος Καστάνης

Μαθηματικό Τμήμα Α.Π.Θ.

Εισαγωγή

Όλοι όσοι διδάσκουν Μαθηματικά έχουν ως εφόδιο τις αυθύπαρκτες και τελεσίδικες μαθηματικές γνώσεις που συσώρευσαν στη διάρκεια των σπουδών τους. Έχουν επίσης ως παρακαταθήκη την εξάσκησή τους στο χειρισμό των μαθηματικών ασκήσεων, που απέκτησαν κατά τη μακρόχρονη τριβή τους με τις εξεταστικές απαιτήσεις της σχολικής και πανεπιστημιακής μαθηματικής εκπαίδευσης. Μια εξάσκηση που μπορεί να χαρακτηριστεί από μια προσήλωση σε κατηγοροποιημένες και διαδικαστικές μορφές συμπεριφοράς κι αντίληψης.

Αρκεί όμως αυτός ο εξοπλισμός για τη διαμόρφωση κι ανάπτυξη μιας μαθηματικής μόρφωσης στα πλαίσια της γενικής παιδείας; Με άλλα λόγια, το απολυτοκρατικό υπόβαθρο των μαθηματικών σπουδών αυτών που διδάσκουν ή πρόκειται να διδάξουν σχολικά Μαθηματικών αποτελεί την ικανή προϋπόθεση για να καλλιεργήσουν ένα επίπεδο μαθηματικής παιδείας στην ευρύτερη κλίμακα των μαθητών; Είναι δηλαδή επαρκές για να μπορέσουν να ερμηνεύσουν και να εξηγήσουν τις σχολικές μαθηματικές γνώσεις, που υπερβαίνουν τις μηχανιστικές συμπεριφορές της απλής αναμετάδοσης της σχολικής ύλης να αναπτύξουν την κατανόηση και την κριτική σκέψη;

Είναι αλήθεια ότι αυτός ο προβληματισμός φέρνει στο προσκήνιο το ζήτημα της επιστημονικής και επαγγελματικής εξειδίκευσης αυτών που διδάσκουν ή πρόκειται να διδάξουν Μαθηματικά. Προβάλλει δηλαδή το θέμα όχι απλά της διαφοροποίησης τους από τις άλλες ειδικότητες των μαθηματικών, λόγου χάρη του αλγεβρίστα ή του στατιστικολόγου, αλλά

των ειδικών προϋποθέσεων για την επιστημονική τους ιδιαιτερότητα και την επαγγελματική τους κατάρτιση. Για το σκοπό αυτό αξίζει να τονιστεί η έμφαση που δίνεται από ειδικούς της Διδακτικής των Μαθηματικών στην ετερογένεια των γνωστικών πλαισίων και απαιτήσεων μεταξύ αυτών που θα διδάξουν Μαθηματικά και αυτών που θα εξειδικευτούν στα καθαρά ή τα εφαρμοσμένα Μαθηματικά.¹

Αν επικεντρωθεί τώρα η προσοχή στην επιστημολογική και λειτουργική υποδομή αυτών που διδάσκουν ή πρόκειται να διδάξουν Μαθηματικά, τότε αποκαλυπτική είναι η επισήμανση² των τεσσάρων διαστάσεων της: *της γνώσης-της γνώσης σχετικά με τη γνώση-της γνώσης για δράση-της δράσης*. Η πρώτη διάσταση, *αυτή της γνώσης*, περιλαμβάνει: τη σφαιρική μάθηση των προχωρημένων μαθηματικών θεωριών που αποτελούν τις σύγχρονες βάσεις της Μαθηματικής Επιστήμης και μια προσέγγιση των σχολικών Μαθηματικών από ανώτερη σκοπιά, παράλληλα με μια παιδαγωγική και ψυχολογική θεώρηση της μαθηματικής παιδείας. Η δεύτερη διάσταση, *δηλ. της γνώσης σχετικά με τη γνώση*, αφορά το παρασκήνιο της γνώσης, με άλλα λόγια την επίγνωση της φύσης, του ρόλου και της δυναμικής των Μαθηματικών. Η τρίτη διάσταση, *της γνώσης για δράση*, έχει να κάνει με το θεωρητικό πλαίσιο της οργάνωσης και μεθόδευσης της διδασκαλίας των σχολικών Μαθηματικών, όπως και της αξιολόγησης του μαθηματικού έργου στην τάξη. Και η τέταρτη διάσταση, *της δράσης*, αντιπροσωπεύει την πρακτική εξάσκηση και την εμπειρία στη διδασκαλία των σχολικών Μαθηματικών και την ανάπτυξη της σχολικής μαθηματικής παιδείας γενικότερα.

Οι διαστάσεις αυτές απεικονίζουν τις καθοριστικές συνιστώσες της επιστημονικής μόρφωσης και της επαγγελματικής κατάρτισης αυτών που διδάσκουν ή πρόκειται να διδάξουν Μαθηματικά στο σχολείο. Πιο

¹ Βλ. Fletcher, T.J.: Is the Teacher of Mathematics a Mathematician or Not?, στο βιβλίο: Steiner, H.-G. *The Education of Mathematics Teacher*, Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld, 1979, όπως και η δημοσίευση: Dörfler, W.: Mathematics, Mathematics Education and Mathematicians: An Unbalanced Triangle, *Bulletin of the International Commission on Mathematical Instruction*, December 2000.

² Βλ. Καδρυμίδου, Μ. / Καστάνη, Ν. / Οικονόμου, Α.: Μόρφωση και Επαγγελματική Κατάρτιση των Δασκάλων των Μαθηματικών, *Διάσταση*, 1-2, 1991, σελ. 18-28, ειδ. σελ. 26.

συγκεκριμένα, η συνισταμένη αυτών των συνιστουσών προσδιορίζει το ολοκληρωμένο εκείνο υπόβαθρο που διαμορφώνει και στηρίζει τους εκπαιδευτικούς με αρμοδιότητα τα σχολικά Μαθηματικά. Χωρίς δυσκολία, όμως, μπορεί να διαπιστωθεί ότι στην ελληνική πραγματικότητα η εν λόγω συνισταμένη είναι ακρωτηριασμένη. Στην προκειμένη περίπτωση η επιστημονική μόρφωση που παρέχουν τα Τμήματα Μαθηματικών στην Ελλάδα είναι απόλυτα προσηλωμένα σε μια συσσωρευτική αντίληψη της μαθηματικής γνώσης, όπου δεσπόζουν τα ιδιόρρυθμα τεχνάσματα εφαρμοσμένα σε προδιαγραφμένες θεματολογίες. Το μορφωτικό τους ιδεώδες είναι αυτό των σκληρών Μαθηματικών, δηλ. των ερευνητικών Μαθηματικών, που εν πολλοίς διαπνέονται από μια νοοτροπία των Μαθηματικών για τα Μαθηματικά. Με άλλα λόγια επικρατεί μια τεχνοκρατική αντίληψη στις μαθηματικές σπουδές στην Ελλάδα. Είναι μάλιστα πολύ ενδεικτική η άποψη, που είναι αρκετά διαδεδομένη στα εν λόγω Τμήματα, ότι *“η ποιότητα της διδασκαλίας στα Πανεπιστήμια ακολουθεί την έρευνα [στα σκληρά Μαθηματικά] σαν σκιά”*, ή ότι *“για να είσαι καλός δάσκαλος των Μαθηματικών πρέπει να ξέρεις καλά Μαθηματικά και να είσαι καλός άνθρωπος”*.³ Κι αυτό δεν είναι επιλήψιμο αν η αποκλειστική αποστολή τους είναι η επιστημονική προετοιμασία των αυριανών μαθηματικών της έρευνας. Η αντίφαση είναι ότι στην πραγματικότητα η συντριπτική πλειοψηφία των πτυχιούχων αυτών των Τμημάτων έχουν ως αντικείμενο απασχόλησης τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Η περιχαράκωση λοιπόν της προετοιμασίας των μαθηματικών της Μέσης Εκπαίδευσης στα πρότυπα των μαθηματικών της έρευνας αποτελεί μέγιστο εμπόδιο στην ανάπτυξη των ικανοτήτων κατανόησης της επιστημολογικής και πολιτιστικής υποδομής των Μαθηματικών και κατά συνέπεια μειώνει δραστικά τις δυνατότητες επικοινωνίας με μη μαθηματικούς. Από την άλλη μεριά τα Παιδαγωγικά Τμήματα αν και παρέχουν μια ευρεία παιδαγωγική και διδακτική μόρφωση, που στα Τμήματα Μαθηματικών αυτού του είδους μόρφωση είναι κατά κανόνα περιθωριοποιημένη έως ανύπαρκτη, εν τούτοις υστερούν κι αυτά, εκτός κάποιων εξαιρέσεων, στην καλλιέργεια της γνώσης σχετικά με τη μαθηματική γνώση, δηλ. υπολείπονται στο είδος εκείνο των σπουδών που

³ Βλ. Καστάνη, Ν.: *Μια Εισαγωγή στη Διδακτική των Μαθηματικών*, Θεσσαλονίκη 1996, σελ. 29.

αναδεικνύει το γνωστικό και πολιτισμικό υπόβαθρο της μαθηματικής δραστηριότητας.

Από τις επισημάνσεις αυτές διαφαίνεται ότι οι μαθηματικές σπουδές στα Ελληνικά Πανεπιστήμια κυριαρχούνται από μια τεχνοκρατική συσσώρευση, δηλ. από μια αθροιστική αντίληψη απόλυτων, αυθύπαρκτων, αμετάβλητων μαθηματικών γνώσεων⁴ και στερούνται της μεταγνωστικής μόρφωσης, δηλ. της “ευαισθητοποιημένης” γνώσης για τη φύση, τη σημασία και το ρόλο των Μαθηματικών. Έχει ωστόσο υπογραμμιστεί η σημασία της μεταγνωστικής παιδείας στη διδακτική δραστηριότητα των εκπαιδευτικών γενικά⁵ και των μαθηματικών ειδικότερα.⁶

Σχετικά με τη μεταγνώση στο πλαίσιο της μαθηματικής παιδείας

Διαισθητικά φαίνεται ότι ο περιορισμός της μαθηματικής γνώσης στο πλαίσιο της απλής πληροφόρησης δεν οδηγεί παρά σε μια μηχανιστική αποδοχή και συμπεριφορά. Διαφαίνεται επίσης ότι για τον απεγκλωβισμό από μια τέτοια περιχαράκωση απαιτείται ο εμπλουτισμός της μαθηματικής μόρφωσης με μια “ίσχυρή δόση” *επίγνωσης* των Μαθηματικών, δηλ. συνειδητοποίησης του παρασκηνίου της μαθηματικής γνώσης και της μαθηματικής παιδείας γενικότερα. Εύκολα, τώρα, μπορεί να παρατηρηθεί ότι το πεδίο καλλιέργειας κι ανάπτυξης της επίγνωσης του χαρακτήρα και του ρόλου των Μαθηματικών δεν είναι άλλο από το μεταγνωστικό υπόβαθρο της μαθηματικής κουλτούρας. Γι’ αυτό το λόγο, δημιουργείται ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον σχετικά με την υφή της μεταγνώσης στα πλαίσια της μαθηματικής παιδείας.

Στο πλαίσιο της Διδακτικής των Μαθηματικών ο όρος *μεταγνώση των Μαθηματικών* παρουσιάστηκε για πρώτη φορά το 1975 από την ερευνητική ομάδα του Ινστιτούτου Διδακτικής των Μαθηματικών του Πανεπιστημίου

⁴ Βλ. Καστάνη, Ν.: Τύποι διδακτικής ορθολογικότητας και είδη ιστορικής κατανόησης των Μαθηματικών, *Θέματα Παιδείας*, τευχ. 1, 2001, σελ. 51-57, ειδ. σελ. 52-53.

⁵ Βλ. Smith, B.O. : *Teachers for the Real World*, The American Association of Colleges for Teacher Education, 1969, σελ. 125 κ.ε.

⁶ Βλ. Otte, M. : Η Μόρφωση των Δασκάλων, *Διάσταση*, 1, 1994, σελ. 52-59, ειδ. σελ. 56 κ.ε.

Bielefeld της Γερμανίας.⁷ Συγκεκριμένα χρησιμοποιήθηκε κατά τη διάρκεια του σεμιναρίου για τις “Τάσεις και τα Προβλήματα της Εκπαίδευσης των Δασκάλων των Μαθηματικών”, που πραγματοποιήθηκε στις 2 με 6 Δεκεμβρίου 1975 στο Bielefeld.⁸ Μια σχετική, όμως, προσέγγιση είχε αναπτύξει νωρίτερα ο διαπρεπής άγγλος ειδικός στη Διδακτική των Μαθηματικών Richard R. Skemp. Ήδη από το 1961 χρησιμοποίησε τον όρο *αναστοχαστική νοημοσύνη (reflective intelligence)*,⁹ με την έννοια “της ικανότητας να αντιμετωπίζει κάποιος τις δικές του νοητικές διαδικασίες ως αντικείμενο συνειδητής παρατήρησης”,¹⁰ ένα είδος δηλ. ενδοσκόπησης και αυτοκριτικής ενός ατόμου για τις νοητικές του λειτουργίες και μεταλλαγές. Όπως μάλιστα διευκρίνισε, σε μια δημοσίευσή του,¹¹ η ιδέα αυτή αναπτύχθηκε από τον Jean Piaget στο αξιοσημείωτο βιβλίο του *La Psychologie de l' Intelligence*, που πρωτοεκδόθηκε το 1947, με τον όρο “αναστοχαστική αφαίρεση” και με τη σημασία της κατανόησης ή της συνειδητοποίησης του μηχανισμού άντλησης, αναδιοργάνωσης και εδραίωσης της γνώσης. Η αναστοχαστική λοιπόν νοημοσύνη αποτελεί ένα είδος αυτο-επίγνωσης του τρόπου ανάπτυξης της σκέψης, μ’ άλλα λόγια είναι μια προσέγγιση στο παρασκήνιο της γνωστικής συμπεριφοράς ενός ανθρώπου και κατά συνέπεια αντιπροσωπεύει μια ψυχολογική διάσταση του μεταγνωστικού υπόβαθρου της μαθηματικής γνώσης.

Αξίζει να αναφερθεί ότι ο όρος μεταγνώση (metacognition) εμφανίστηκε στη Γνωστική Ψυχολογία στις αρχές της δεκαετίας του 1970,¹² την εποχή

⁷ που απαρτίζονταν από τους : Thomas Mies, Michael Otte, Veronika Reiss, Heinz Steinbring, Dankwart Vogel, και συνεργάζονταν ο Gert Schubring.

⁸ Βλ. *Tendencies and Problems of the Training of Mathematics Teachers, Materials prepared by the working group “Mathematiklehrerbildung”*, Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld, December 1975, σελ. 106. Πρόκειται για ένα ερευνητικό πρόγραμμα που ολοκληρώθηκε το 1981 με την έκδοση του βιβλίου: Bromme, R. et al. : *Perspektiven für die Ausbildung der Mathematiklehrer*, Aulis Verlag Deubner, 1981.

⁹ Βλ. Skemp, R. R. : Reflective intelligence and mathematics, *British Journal for the Educational Psychology*, 31, 1961, σελ. 45-55.

¹⁰ Βλ. Skemp, R. R.: *Intelligence, learning and action*, Wiley, 1979, σελ. 175.

¹¹ Βλ. Skemp, R. R.: Reflective Intelligence, and the Use of Symbols, στο βιβλίο *The Process of Learning Mathematics*, ed. by L. R. Chapman, Pergamon Press, 1972, σελ. 195-205, ειδ. σελ. 195.

¹² Βλ. Flavell, J. H., Friedrichs, A. G. & Hoyt, J. D.: Developmental changes in memorisation processes, *Cognitive Psychology*, 1, 1970, σελ. 323-340, ειδ. σελ. 323.

δηλ. της πρωτοανάπτυξης του συγκεκριμένου κλάδου της Ψυχολογίας και σε συνάρτηση με τη δυναμική και τις αναζητήσεις της Τεχνητής Νοημοσύνης και των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών γενικότερα. Στα επόμενα χρόνια οι γνωστικοί ψυχολόγοι έδειξαν ενδιαφέρον στο συγκεκριμένο θέμα και ανάλυσαν διάφορες πλευρές του.¹³ Ο σχετικός προβληματισμός είχε ως αφετηρία τα ερωτήματα για το *“πως και υπό ποιες συνθήκες το άτομο συλλέγει, συντονίζει, και ολοκληρώνει την υπάρχουσα γνώση και δεξιότητές του σε νέες λειτουργικές οργανώσεις”*. Οπότε υποστήριζαν ότι *“για να γίνει κάτι τέτοιο θα πρέπει το άτομο να κατανοεί ποια είναι η υπάρχουσα γνώση του, αν αυτή επαρκεί για την αντιμετώπιση της συγκεκριμένης κατάστασης, αν πρέπει να τροποποιηθεί και να προσαρμοστεί στις νέες συνθήκες, αν χρειάζεται σχεδιασμός και στρατηγική πριν τη λύση του προβλήματος, αν η εκτέλεση των ενεργειών επίλυσης είναι ορθή και οδηγεί στο επιζητούμενο αποτέλεσμα. Αυτού του είδους η κατανόηση κινείται στην πραγματικότητα σε ένα επίπεδο ανώτερο από το επίπεδο της αυτόματης γνωστικής επεξεργασίας ή του εκτελεστικού μηχανισμού, γιατί προϋποθέτει ενημερότητα από πλευράς του ατόμου για προηγούμενες γνωστικές καταστάσεις. Για το λόγο αυτό είναι μετα-, ακολουθεί και παρακολουθεί τη γνώση, είναι μεταγνώση. Η μεταγνώση αναφέρεται, επομένως, στη γνώση που διαθέτει το άτομο για τις γνωστικές του λειτουργίες και τα προϊόντα τους και για ό,τι σχετίζεται με αυτά. Συνέπεια της γνώσης αυτής είναι η ενεργός παρέμβαση, παρακολούθηση, διόρθωση και συντονισμός των γνωστικών λειτουργιών προκειμένου να εξυπηρετηθεί κάποιος στόχος”*.¹⁴

Μέσα σ’ αυτό το πλαίσιο η έμφαση των αναλύσεων της μεταγνώσης δόθηκε στην

- αυτογνωσία των προσωπικών νοητικών λειτουργιών και πεποιθήσεων και στη
- ρύθμιση και τον έλεγχο των ατομικών γνωστικών δραστηριοτήτων.

Στο ψυχολογικό αυτό πρόγραμμα δεν άργησε να εκδηλωθεί το ενδιαφέρον και να εξεταστεί το μεταγνωστικό υπόβαθρο της μαθηματικής σκέψης. Οι

¹³ Βλ. Livingston, J.A.: Metacognition: An Overview, 1997, <http://www.gse.buffalo.edu/fas/shuell/cep564/Metacog.htm>

¹⁴ Βλ. Κωσταρίδου-Ευκλείδη, Α. : *Γνωστική Ψυχολογία*, εκδ. Art of Text, 1992, σελ. 135.

πρώτες σχετικές δημοσιεύσεις αυτής της σκοπιάς εμφανίστηκαν στα μέσα της δεκαετίας του 1980, με σημαντικότερη αυτή του γνωστού αμερικάνου ερευνητή της Διδακτικής των Μαθηματικών Alan Schoenfeld.¹⁵ Η δημοσίευση του Schoenfeld, η οποία σημειωτέον προκάλεσε μια ευρεία συζήτηση,¹⁶ εστιάστηκε στο μεταγνώστικο υπόστρωμα της διαδικασίας μάθησης των Μαθηματικών και υπέδειξε τρεις όψεις του : τις πεποιθήσεις και προδιαθέσεις (intuitions), την αυτο-επίγνωση των προσωπικών διαδικασιών σκέψης, τον έλεγχο και την αυτο-ρύθμιση. Συγκεκριμένα υποστήριξε ότι κάθε μαθητής διαμορφώνει τη μαθηματική του δραστηριότητα και συμπεριφορά, όχι ανεξάρτητα από τις πεποιθήσεις του και τις προδιαθέσεις του περί Μαθηματικών, ούτε ξεκομμένα από τις προηγούμενες εμπειρίες του στη προσπάθειά του να κατανοήσει τον κόσμο και να δώσει νόημα στην πραγματικότητα που βιώνει. Επισήμανε χαρακτηριστικά ότι οι μαθητές που αποκτούν την πεποίθηση ότι τα σχολικά Μαθηματικά δεν είναι άλλο παρά χειρισμοί μαθηματικών τύπων και τυποποιημένες διαδικασίες, χωρίς καμία σχέση με την πραγματική ζωή, την ανακάλυψη και τη λύση προβλημάτων, έχουν, κατά κανόνα, συμπεριφέρονται μηχανιστικά και αναπτύσσουν μια απωθητική ή παθητική στάση για τα Μαθηματικά.¹⁷ Παράλληλα υπογράμμισε τη σημασία της αυτό-συνείδησης των μαθητών για τη γνωστική τους κατάσταση, των γνωστικών τους δεξιοτήτων και ικανοτήτων. Στην προκειμένη περίπτωση ισχυρίστηκε ότι “η καλή [δεξιότητα] επίλυσης προβλημάτων [από ένα μαθητή] απαιτεί τη αποτελεσματική χρήση του τι γνωρίζει, εάν αυτός δεν έχει μια καλή επίγνωση του τι γνωρίζει, ίσως βρει δυσκολία στο να γίνει ένας επιδέξιος λύτης προβλημάτων”.¹⁸ Επίσης συσχέτισε τον έλεγχο και την αυτο-ρύθμιση με την οργάνωση και τη μεθόδευση του χρόνου και της προσπάθειας για την αντιμετώπιση ενός προβλήματος, ενός καθήκοντος.

¹⁵ Βλ. Garofalo, J. / Lester, F.K. JR. : Metacognition, Cognitive Monitoring, and Mathematical Performance, *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(3), 1985, σελ. 163-176, και Schoenfeld, A.H. : What's all the Fuss about Metacognition?, στο Schoenfeld, A.H.(ed.) : *Cognitive Science and Mathematics Education*, Lawrence Erlbaum Associates, 1987, σελ. 189-215.

¹⁶ Βλ. <http://mathforum.org/epigone/geometry-pre-college/clarwaysterd/> , <http://mathforum.org/epigone/geom.pre-college/234/>

¹⁷ Βλ. Schoenfeld, πρ. υπ. 15, σελ. 195-198.

¹⁸ Στο ίδιο, σελ. 190.

Ένα τέτοιο επιτελικό έργο προϋποθέτει: α) κατανόηση του προβλήματος ή του καθήκοντος, β) σχεδιασμό, γ) επίβλεψη των ενεργειών και των επιμέρους εκβάσεων και δ) εξέταση των διεξόδων ή αποφάσεις για το τι γίνεται και σε τι μάκρος χρόνου.¹⁹

Γίνεται φανερό ότι η οπτική γωνία του Schoenfeld για τη μεταγνωστική διάσταση της μαθηματικής σκέψης στηρίζεται στη Γνωστική Ψυχολογία που αναπτύχθηκε και καλλιεργήθηκε στις Η.Π.Α. από τα τέλη της δεκαετίας του 1960. Το κύριο γνώρισμα αυτής της προσέγγισης είναι η έμφαση στα προσωποπαγή χαρακτηριστικά του αναστοχασμού, δηλ. επικεντρώνεται στην αυτογνωσία και αυτοκριτική των υποκειμένων, που σημαίνει ότι αναδεικνύει την υποκειμενική, ατομοκεντρική, πλευρά του θέματος. Αυτή η προσήλωση παρατηρείται και στις άλλες σχετικές δημοσιεύσεις των αμερικάνων (και των επηρεασμένων απ' αυτούς) ειδικών στη Διδακτική των Μαθηματικών.²⁰

Διαφορετική είναι η προσέγγιση της μεταγνώσης, δηλ. της “αναστοχαστικής αφαίρεσης”, στο πλαίσιο της Γενετικής Επιστημολογίας του Piaget. Και αυτό γιατί είχε για βάση “την ύπαρξη παραλληλισμού μεταξύ της λογικής και θεωρητικής οργάνωσης της γνώσης και των αντίστοιχων ψυχολογικών διαδικασιών διαμόρφωσής της”²¹ από τη μια και αλληλοσυσχέτιζε την ιστορικο-γνωστική ανέλιξη της επιστημονικής σκέψης με την ψυχο-γενετική ανάπτυξη της νοημοσύνης ενός ανθρώπου²² από την άλλη. Οπότε η προσέγγιση του συνδύαζε την υποκειμενική πλευρά με την επιστημολογική πλευρά (δηλ. με τα χαρακτηριστικά του περιεχομένου της

¹⁹ Στο ίδιο, σελ. 190-191.

²⁰ Βλ. Campione, C / Brown, A.L. / Connell, M.L. : Metacognition: On the Importance of Understanding What You Are Doing, στο Charles, R.I. / Silver, E.A.(eds.): *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*, Lawrence Erlbaum Associates, 1988, σελ. 93-114, Lester, F.K.: Reflections about Mathematical Problem-Solving Research, στο ίδιο, σελ. 115-124, Schoenfeld, A.: Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense-Making in Mathematics, στο Grouws, D.(ed.): *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, MacMillan, 1992, σελ. 334-370, Hegedus, S.J.: Advanced Mathematical Thinking, Metacognition & The Calculus, 1998, στο <http://www.soton.ac.uk/~amt/amtpaper.htm> .

²¹ Βλ. Otte, M. : On the Question of the Development of Theoretical Concepts, *Communication & Cognition*, 13(1), 1980, σελ. 63-76, ειδ. σελ. 66.

²² Βλ. Damerow, P. : *Abstraction and Representation*, Kluwer Acad. Publ., 1996, σελ. 309.

επιστημονικής γνώσης) υπό το πρίσμα μιας ιστορικο-αναπτυξιακής θεώρησης.

Μετατοπισμένη προς μια πιο επιστημολογική απόχρωση ήταν η μεταγνωστική ανάλυση της ερευνητικής ομάδας του Bielefeld. Στην προκειμένη περίπτωση πρόβαλε τις εξής τρεις μεταγνωστικές συνιστώσες της μαθηματικής γνώσης : *Μεθοδολογία και Θεωρία της Επιστημονικής Εργασίας, Ιστορία των Μαθηματικών και Γνώση περί των Σχέσεων μεταξύ Μαθηματικών και άλλων Επιστημών ή Σχολικών Μαθημάτων*.²³ Αναφορικά με το μεταγνωστικό ρόλο της *Ιστορίας των Μαθηματικών* υποδεικνύεται η επιστημολογική ιστορία, που θα αναδεικνύει το παρασκήνιο της εννοιολογικής ανάπτυξης, την ιδιαίτερη φύση των μαθηματικών υλικών και την αλληλεξάρτηση της ανέλιξης των Μαθηματικών με την κοινωνική ανάπτυξη.²⁴

Η ιστορία των μαθηματικών ως μέσο μεταγνωστικής μόρφωσης

Τις περισσότερες φορές η *Ιστορία των Μαθηματικών* προβάλλεται ως ένα χρονογράφημα επιτευγμάτων και προικισμένων μαθηματικών.²⁵ Σε πολύ μικρότερη κλίμακα παρουσιάζεται ως συλλογή εύστροφων τεχνικών και αποδείξεων μαθηματικών προβλημάτων και θεωρημάτων του παρελθόντος.²⁶ Και σε ελάχιστες, έως σπάνιες, περιπτώσεις αντιμετωπίζεται ως ανέλιξη της μαθηματικής σκέψης ή ως πολιτισμική ανάπτυξη της μαθηματικής παιδείας.²⁷ Στα διαφορετικά αυτά είδη αναπαραστάσεων της *Ιστορίας των Μαθηματικών* αντιστοιχούν διαφορετικοί τύποι ιστορικής κατανόησης των Μαθηματικών και κατά συνέπεια διαφορετικά

²³ Βλ. Otte, M. : The Education and the Professional Life of Mathematics Teachers, στο *New Trends in Mathematics Teaching*, Vol. IV, Unesco, 1979, σελ. 107-133, ειδ, σελ. 125.

²⁴ Βλ. πρ. υπ. 8, σελ. 122.

²⁵ Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το έργο του G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, εκδ. Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 1972.

²⁶ Π.χ. το βιβλίο των N. Bourbaki, *Elements of the History of Mathematics*, Springer-Verlag, 1994.

²⁷ Για παράδειγμα το βιβλίο του R. Callinger *A Contextual History of Mathematics to Euler*, Prentice Hall, 1999, ή το βιβλίο *The Growth of Mathematical Knowledge*, edited by E. Grosholz and H. Breger, Kluwer Acad. Publishers, 2000.

μεταγνωστικά πλαίσια. Συγκεκριμένα η χρονολογική περιγραφή των μαθηματικών επιτευγμάτων δημιουργεί, κατά κύριο λόγο, την αντίληψη ότι τα Μαθηματικά διαμορφώθηκαν και διαμορφώνονται ως μια αλληλουχία ιδιοφυών εμπνεύσεων προικισμένων μαθηματικών. Η ιστορική παρουσίαση των έξυπνων τεχνασμάτων και αποδείξεων προβάλλει, ως επί το πλείστον, έναν μονοδιάστατο μεθοδολογισμό με μεταφυσικές αποχρώσεις. Αντίθετα η ανάδειξη των επιστημολογικών ιδιαιτεροτήτων, σε συνάφεια με τις αντίστοιχες πολιτισμικές συγκυρίες, φωτίζει τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα της μαθηματικής γνώσης και τα συσχετίζει με τη δυναμική του πολιτισμικού πλαισίου μέσα στο οποίο αναπτύσσεται και καλλιεργείται. Στην περίπτωση αυτή αποκαλύπτεται η φύση της μαθηματικής σκέψης και συμπεριφοράς ως συνέπεια συλλογικών καταστάσεων και μ' αυτό τον τρόπο εμπλουτίζεται σφαιρικά η μεταγνωστική πλευρά των Μαθηματικών.²⁸

Κατά κανόνα, το προσωπικό ή ακαδημαϊκό ενδιαφέρον για την ιστορία των Μαθηματικών δημιουργείται ως αντίδραση ή αντιπερισπασμό στην τεχνοκρατική καταπίεση της καθιερωμένης μαθηματικής παιδείας. Συνήθως η στροφή προς την ιστορία των Μαθηματικών γίνεται για να μετριαστεί ή να απεμπλακεί η παρεχόμενη μαθηματική παιδεία από την έντονη τυποκρατία και τον αντίστοιχο δογματισμό. Επιδιώκεται μ' αυτό τον τρόπο να εμπλουτιστούν τα σχολικά Μαθηματικά με μια ανθρωπιστική διάσταση, η οποία θα αναδεικνύει τη μαθηματική δημιουργικότητα ως ανέλιξη της ανθρώπινης σκέψης σε δυναμικές πολιτισμικές καταστάσεις. Κι έτσι να περιοριστεί η φορμαλιστική μονολιθικότητα. Αυτό όμως το ενδιαφέρον, για λιγότερη τεχνοκρατική και περισσότερη ανθρωπιστική μαθηματική παιδεία, κινδυνεύει να περιοριστεί σ' έναν επιφανειακό εξωραϊσμό, σε μια περικόσμηση της μαθηματικής γνώσης με ιστορικά επιθέματα, χωρίς οργανική σύνδεση του σύγχρονου μαθηματικού λόγου με τη διαχρονική κατανόησή του. Μάλιστα, σ' αυτές τις περιπτώσεις δεν είναι απίθανο να “δαιμονοποιηθεί” ο τυποκρατικός χαρακτήρας των σύγχρονων Μαθηματικών

²⁸ Βλ. Jahnke, H.N. : The Historical Dimension of Mathematical Understanding-Objectifying the Subjective, στο Ponte, J. da / Matos, J. : *Proceedings of the 18th PME Conference*, Univ. of Lisbon, 1994, vol. 1, σελ. 139-156, και Dennis, D.: The Role of Historical Studies in Mathematics and Science Educational Research, http://www.oswego.edu/multi-campus-nsf/Devid_Dennis_Chapter.htm.

και να προβληθούν ως αντιστάθμισμα τα “ζωντανά” Μαθηματικά ή τα Μαθηματικά της “πραγματικής ζωής”, μ’ άλλα λόγια να επικρατήσει μια ωφελιμιστική, πραγματιστική ή πρακτικο-ιστορική αντίληψη των Μαθηματικών ως η κατ’ εξοχήν παιδαγωγικά αρμόζουσα σκοπιά. Ένα τέτοιο ολίσθημα έχει ή θα έχει επίσης ανασταλτικές επιπτώσεις στην καλλιέργεια της μαθηματικής παιδείας, όπως και η φορμαλιστική εξόγκωση.

Είναι αλήθεια ότι η σύγχρονη Μαθηματική Επιστήμη έχει αναπτυχθεί σ’ ένα υψηλό επίπεδο θεωρητικής σκέψης, που χωρίς αμφιβολία εκφράζει μια κατάκτηση του σύγχρονου πολιτισμού. Το γεγονός αυτό όχι μόνο δεν μπορεί να αγνοηθεί, αλλά πρέπει να βρει μια απήχηση στη διαμόρφωση της μαθηματικής κουλτούρας του πολίτη της ηλεκτρονικής εποχής. Η δυσκολία πραγματοποίησης αυτής της προσδοκίας βρίσκεται στην αποκάλυψη της ιδιαιτερότητας του νέου τρόπου σκέψης των Μαθηματικών και στην ανάδειξή της στα σημερινά πλαίσια της μαθηματικής μόρφωσης των νέων. Αυτό προϋποθέτει τη συνειδητοποίηση του γνωστικού χαρακτήρα των Μαθηματικών απ’ αυτούς που τα διδάσκουν ή θα τα διδάξουν. Έτσι γίνεται φανερό η ανάγκη να είναι εφοδιασμένοι μ’ έναν εξοπλισμό από τη *Φιλοσοφία των Μαθηματικών*. Έναν εξοπλισμό που θα αναπτύξει το επιστημολογικό υπόβαθρο της κατανόησης του μαθηματικού τρόπου σκέψης και όχι έναν λογικοκρατικό σχολαστικισμό, ο οποίος έχει μια δεσπόζουσα θέση στον ακαδημαϊκό χώρο των μαθηματικών. Ανακύπτει λοιπόν το ζήτημα των διαφορετικών προσεγγίσεων στη *Φιλοσοφία των Μαθηματικών* και του προσδιορισμού της κατάλληλης, για την περίπτωση, οπτικής γωνίας.

Στο σημείο αυτό χρειάζονται κάποιες διευκρινίσεις για τη σημερινή κατάσταση της *Φιλοσοφίας των Μαθηματικών*. Και εκείνο που θα πρέπει να τονιστεί, πρώτα απ’ όλα, είναι η παρουσία δύο βασικών τάσεων στις τελευταίες εξελίξεις του εν λόγω τομέα. Η πρώτη που κυριαρχεί, από τη δεκαετία του 1930, στον κόσμο των ακαδημαϊκών μαθηματικών έχει για βάση τη λογικο-θεωρητική δομή και ορθολογικότητα, όπου η έμφαση δίνεται στη συντακτική συμπεριφορά των μαθηματικών προτάσεων και στη κωδικοποίηση της μαθηματικής αλήθειας. Μέσα σ’ αυτό το σκηνικό η μαθηματική γνώση προβάλλεται ως παράγωγο των συνδυαστικών

δυνατοτήτων ενός λογικού λογισμού και τα αντικείμενα της μαθηματικής σκέψης παρουσιάζονται ως γλωσσικές μορφές που λειτουργούν στα πλαίσια συντακτικο-παραγωγικών συστημάτων.²⁹ Το φιλοσοφικό αυτό ρεύμα ανάδειξε και ισχυροποίησε στη μαθηματική κοινότητα μια νοοτροπία “θεμελιωτισμού” (foundationalism), δηλαδή μια πεποίθηση και μια αξιολογική σκοπιά της μαθηματικής δραστηριότητας όπου η επίγνωση της λογικο-συντακτικής δομής των θεμελίων της αποτελεί την πεμπουσία της βαθύτερης κατανόησης των Μαθηματικών.³⁰ Το δεύτερο ρεύμα στη *Φιλοσοφία των Μαθηματικών*, που ξεπρόβαλε από τα τέλη της δεκαετίας του 1970 υπό την επίδραση των ιδεών του Imre Lakatos (1922-1974) και της *Γνωστικής Επιστήμης*, εστιάζει την προσοχή στις εννοιολογικές και μεθοδολογικές αλλαγές των Μαθηματικών σε συνάρτηση με το κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο αναφοράς.³¹ Ο προσανατολισμός αυτός έδωσε μια ισχυρή ώθηση στις επιστημολογικές διεισδύσεις και στις ιστορικές αναλύσεις των μαθηματικών γνώσεων, δηλαδή τους δύο βασικούς άξονες που ακτινογραφούν τη φύση και την ανέλιξη του περιεχομένου της μαθηματικής σκέψης.³² Παράλληλα διαπλέκονται οι ψυχολογικές και οι ανθρωπολογικές ή πολιτισμικές συνιστώσες στην κατανόηση της δομής, της λειτουργίας και της ανάπτυξης των Μαθηματικών.

Μέσα από τη σύγχρονη αυτή οπτική γωνία εμφανίστηκε στο προσκήνιο η ανάγκη του μεταγνωστικού εξοπλισμού των μαθηματικών της εκπαίδευσης. Κι αυτό γιατί η μαθηματική παιδεία απεγκλωβίστηκε από τη νοοτροπία και την ορθολογικότητα του *Λογικού Θετικισμού*, που περιόριζε τον ορίζοντα κατανόησης σε μια λογικοκρατική αυταρέσκεια και σ’ ένα φορμαλιστικό επιφανινόμενο, σε αντιπαράθεση με τα άλλα πεδία της ανθρώπινης

²⁹ Βλ. Machover, M.: Towards a New Philosophy of Mathematics, *The British Journal for the Philosophy of Science*, 34, 1983, σελ. 1-11

³⁰ Βλ. Corry, L.: Linearity and Reflexivity in the Growth of Mathematics, *Science in Context*, 3(2), 1989, σελ. 409-410.

³¹ Βλ. Καστάνη, Ν., πρ. υπ. 4, σελ. 53.

³² Βλ. για παράδειγμα Ernest, P.: *Philosophy of Mathematics Education*, The Falmer Press, 1991, Sierpinski, A. and Lerman, S.: *Epistemology of Mathematics and of Mathematics Education*, στο Bishop, A.J. et al.(eds.): *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Acad. Publ., 1996, σελ. 827-876, Thagard, P.: *Conceptual Revolutions*, Princeton Univ. Press, 1992, Rusnock, P. and Thagard, P.: *Strategies for Conceptual Change: Ratio and Proportion in Classical Greek Mathematics*, *Studies in History and Philosophy of Science*, 26(1), 1995, σελ. 107-131.

εμπειρίας.³³ Τόσο η ορμητική εισαγωγή και οι διδακτικές δυσκολίες του *δομικού τρόπου σκέψης*, στη δεκαετία του 1960, όσο και οι γνωστικές αλλαγές που απαιτούσε η *ηλεκτρονική παιδεία*, από τις αρχές του 1980, προκάλεσαν την ανάγκη για εμβάθυνση, κριτική σκέψη και αναστοχασμό στα ποιοτικά και πολιτισμικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής γνώσης και μόρφωσης, η οποία οδήγησε στην αποδέσμευση της θεώρησης των Μαθηματικών από την επικυριαρχία του *Λογικού Θετικισμού*. Οι εναλλακτικές προσεγγίσεις, όπως η φιλοσοφική σκοπιά του Imre Lakatos ή της *Γνωστικής Επιστήμης*, προϋποθέτουν τη μεταγνωστική συνειδητοποίηση, η οποία δεν είναι ανεξάρτητη από την ιστορική κατανόηση των αλλαγών της μαθηματικής σκέψης και κουλτούρας.

Με τη βοήθεια του μεταγνωστικού προβληματισμού ανατέμνονται μια σειρά ζητημάτων για τη φύση και αλλαγή του μαθηματικού πνεύματος, για τη γένεση και την καθιέρωση των νέων μαθηματικών ιδεών, θεωριών και μεθόδων, όπως και για τις μορφές αξιοποίησης των Μαθηματικών. Αξίζει, στην προκειμένη περίπτωση, να επισημανθεί ότι το υψηλό θεωρητικό της επίπεδο των σύγχρονων Μαθηματικών οφείλεται, εν πολλοίς, στη *σχεσιακή* φύση των μαθηματικών εννοιών, που σημαίνει ότι το περιεχόμενό τους δεν προέρχεται από γενίκευση εμπειρικών αντικειμένων, ούτε αντιπροσωπεύουν ονόματα ομοειδών πραγμάτων, αλλά σχέσεις μεταξύ πραγμάτων. Πολύ χαρακτηριστικά ο διακεκριμένος γερμανός φιλόσοφος Ernest Cassirer (1874-1945) υποστήριξε:

«Δεν μπορούμε να μιλήσουμε για μεμονωμένους ή απομονωμένους αριθμούς. Η ουσία του αριθμού είναι πάντοτε σχετική, όχι απόλυτη. Ο μεμονωμένος αριθμός είναι μονάχα μια μεμονωμένη θέση μέσα σε μια γενική συστηματική τάξη. Δεν έχει δικό του είναι, ούτε αυτοτελή πραγματικότητα. Το νόημά του καθορίζεται από τη θέση που κατέχει στο όλο αριθμητικό σύστημα....Στην πρόοδο των αριθμών δε συναντάμε εξωτερικό περιορισμό, ούτε “τελευταίον όρο”. Εκείνο που συναντάμε είναι ένας περιορισμός που απορρέει από μια ενδογενή λογική αρχή. Όλοι οι όροι συνδέονται μ’ έναν κοινό δεσμό. Προέρχεται

³³ Βλ. Otte, M. / Seeger, F.: The Human Subject in Mathematics Education and in the History of Mathematics, στο Biehler, R. et al.(eds.): *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, Kluwer Acad. Publ., 1994, σελ. 351-365, ειδ. σελ. 352-353.

από μια και μόνη γενετική σχέση, τη σχέση που συνδέει έναν αριθμό n με τον αμέσως επόμενο ($n+1$). Από την πολύ απλή τούτη σχέση μπορούμε να βγάλουμε όλες τις ιδιότητες των ακεραίων αριθμών. Το διακριτικό σημάδι και το μέγιστο λογικό προνόμιο αυτού του συστήματος είναι η πλήρης διαύγειά του. Στις σύγχρονες θεωρίες – του Φρέγκε και του Ράσσελ, του Πεάνο και του Ντέντεκιντ – ο αριθμός έχασε όλα τα οντολογικά του μυστικά».³⁴

Αυτή η απώλεια της οντολογικής βάσης, η οποία δεν προέκυψε αυθαίρετα αλλά ως συνέπεια της αλλαγής του μαθηματικού τρόπου σκέψης στις πρώτες δεκαετίες του 19^{ου} αιώνα (για παράδειγμα η ανάπτυξη των Αριθμητικών Συστημάτων, των μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών, της Θεωρίας Ομάδων), ανάδειξε τον φορμαλισμό ως ουσιαστικό επιστημολογικό άξονα των σύγχρονων Μαθηματικών. Μέσα από μια τέτοια μεταγνώστική ευαισθησία, διαφαίνεται ότι είναι μάλλον αφέλεια να εξορκίζεται ο φορμαλισμός, αντί να συνειδοποιείται η ιστορική του σημασία και η σημερινή του γνωστική αξία.

Από τις προηγούμενες επισημάνσεις φάνηκε η μορφωτική σημασία της μεταγνώσης των Μαθηματικών και σε συνάρτηση μ' αυτή ο αναστοχαστικός ρόλος της ιστορικής διείσδυσης στην ανέλιξη του μαθηματικού τρόπου σκέψης. Πολύ ενδεικτικά, μάλιστα, τονίστηκε:

«Η Διδακτική των Μαθηματικών πρέπει να πάρει σοβαρά υπ' όψη ότι δεν υπάρχει γνώση χωρίς μεταγνώση, ότι κάποιος δεν μπορεί να μάθει μια θεωρητική έννοια χωρίς μια ευαισθητοποίηση σχετικά με την έννοια, για να γίνει κατανοητό το είδος των υποστάσεων που εκείνες είναι. Η μεταγνώση, ωστόσο, μπορεί να αναπτυχθεί δια μέσου των ιστορικών μελετών».³⁵

Ένα παράδειγμα

Σ' όλο, σχεδόν, τον κόσμο, η ανάπτυξη της αρχαίας ελληνικής σκέψης αποτελεί ένα αξιοθαύμαστο γεγονός. Κάποιοι, μάλιστα, μιλούν για «ελληνικό θαύμα». Κατ' επέκταση, μέσα σ' αυτό το πνεύμα, αναφέρεται και

³⁴ Βλ. Cassirer, E.: *Δοκίμιο για τον Άνθρωπο. Εισαγωγή στη Φιλοσοφία του Ανθρώπινου Πολιτισμού*, εκδ. Κάλβος, 1972, σελ. 317.

³⁵ Βλ. Otte, M. / Seeger, F., πρ. υπ. 33, σελ. 354.

το “ελληνικό θαύμα στα Μαθηματικά”. Ίσως αυτή η στάση να εκφράζει μια υπερβολική έκπληξη και έναν διογκωμένο ενθουσιασμό. Δεν προέρχεται, όμως, από μια μυθοπλασία, από ένα πλασματικό κατασκευάσμα, γιατί απηχεί μια αξιοσημείωτη ιστορική πραγματικότητα: την πολιτισμική αναμόρφωση του Αρχαίου Κόσμου, η οποία αποτέλεσε τη μήτρα της σύγχρονης κουλτούρας. Και είναι αλήθεια ότι η πολιτισμική αυτή αναμόρφωση ήταν και είναι το επίκεντρο του ιστορικού ενδιαφέροντος κι ο απώτερος σκοπός μιας πληθώρας μελετών και αναλύσεων του αρχαίου ελληνικού τρόπου σκέψης και συμπεριφοράς. Πρόκειται για μια οπτική γωνία που είναι στενά συνυφασμένη με τη διαχρονική και ευρύτατα διαδεδομένη πεποίθηση ότι

*Η ευρωπαϊκή σκέψη αρχίζει με τους αρχαίους Έλληνες.*³⁶

Αυτή η στάση είναι, όπως φαίνεται, αρκετά ισχυρή, γιατί εμπνέει, ενεργοποιεί και νομιμοποιεί τους μελετητές της αρχαίας ελληνικής δημιουργίας. Αποτελεί ταυτόχρονα και το πλαίσιο διαμόρφωσης του θαυμασμού για την πνευματική και πολιτισμική ανέλιξη των αρχαίων Ελλήνων.

Μέσα σ’ αυτό το υψηλό επίπεδο ενδιαφέροντος και ιστοριογραφικής δυναμικής η ανάπτυξη των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών κατέχει μια κεντρική θέση. Κι όχι τυχαία, γιατί το συγκεκριμένο είδος επιστημονικής σκέψης άφησε ανεξίτηλα τα ίχνη του από την Αρχαιότητα μέχρι σήμερα. Στην προκειμένη περίπτωση αξίζει να αναφερθεί η πολύ χαρακτηριστική ρήση του διαπρεπή άγγλου ιστορικού των Μαθηματικών Sir Thomas L. Heath (1861-1940), όσον αφορά τα “Στοιχεία” του Ευκλείδη, η αντιπροσωπευτικότερη πραγματεία των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών:

*Κανένα ίσως έργο, εκτός από τη Βίβλο, δεν έχει τέτοια διάδοση.*³⁷

Μια επισήμανση που δεν έχασε την αξία της μέχρι τώρα, στην αρχή, δηλαδή, της 3^{ης} χιλιετίας μ. Χ. Κι αυτό γιατί το διεθνές ενδιαφέρον για το

³⁶ Βλ. Snell, B.: *Η Ανακάλυψη του Πνεύματος. Ελληνικές Ρίζες της Ευρωπαϊκής Σκέψης*, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τράπεζας, 1984, σελ. 9.

³⁷ Βλ. Καστάνη, Ν. / Τοκμακίδη, Τ.: Η ιστορική κληρονομιά των “Στοιχείων” του Ευκλείδη στην Ανθρωπότητα, στο βιβλίο: *ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ. ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΑ ΔΟΚΙΜΙΑ*, επιμέλεια Δ. Αναπολιτάνου και Β. Καρασμάνη, εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα, 1993, σελ. 67-92, ειδ. σελ. 67.

συγκεκριμένο έργο του Ευκλείδη διατηρείται αμείωτο, όπως καταδεικνύει η ανανεωμένη επανέκδοσή του στα γαλλικά, τη δεκαετία του 1990, η βελτιωμένη επανέκδοσή του στα κινεζικά το 1990 και η πρώτη μετάφρασή του στα μογγολικά το 1987.

Χωρίς αμφιβολία πρόκειται για μια απήχηση του Ευκλείδη σ' όλα τα γεωγραφικά μήκη και πλάτη του κόσμου και σ' όλες τις εποχές. Γεγονός που αναδεικνύει όχι μόνο τη δική του διαχρονικότητα και διαπολιτισμικότητα, αλλά και τη σπουδαιότητα όλης της μαθηματικής κληρονομιάς του αρχαίου ελληνικού πολιτισμού. Κι αυτό γιατί η επιστημονική και ιστορική αξία του έργου του δεν είναι ανεξάρτητη από την ωριμότητα και τη δυναμική του διανοητικού περιβάλλοντος απ' όπου προήλθε. Με άλλα λόγια, το έργο του Ευκλείδη δεν ήταν, ούτε μπορούσε να είναι αποκομμένο από την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των αρχαίων Ελλήνων της προ-αλεξανδρινής περιόδου. Θα μπορούσε, μάλιστα, να θεωρηθεί ως η πρώτη αποκορύφωση αυτής της πνευματικής ανέλιξης.

Είναι αλήθεια ότι οι σκέψεις αυτές διαπερνούν τον επιφανειακό θαυμασμό και φθάνουν σ' έναν βαθύτερο προβληματισμό, στο ζήτημα της συνεκτικότητας των εξατομικευμένων μαθηματικών γνώσεων του Αρχαίου Ελληνικού Πολιτισμού. Ανακύπτει, δηλαδή, το ερώτημα της διαμόρφωσης, τότε, ενός νέου είδους μαθηματικής σκέψης που διακρίνεται από τα αντίστοιχα είδη των προ-ελληνικών πολιτισμών της Μεσοποταμίας και της Αιγύπτου. Ο προβληματισμός αυτός μπορεί να τεθεί ως εξής:

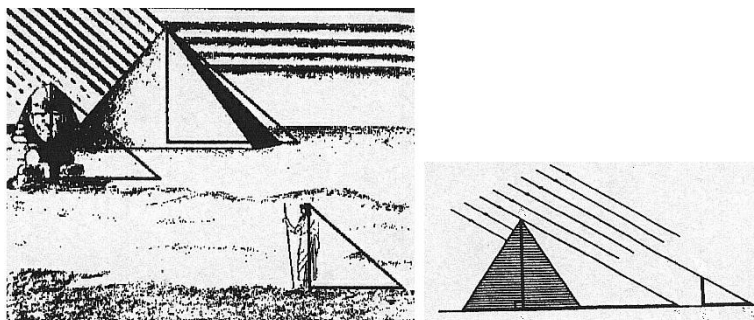
Τι χαρακτηρίζει τα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά;

Ποια είναι η ιδιαιτερότητα της μαθηματικής σκέψης του αρχαίου ελληνικού πολιτισμού;

Δίνεται έτσι μια οπτική γωνία για την κατανόηση του χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης στην Αρχαία Ελλάδα και για την πολιτισμική δικαιολόγησή του. Αυτό σημαίνει ότι διεγείρεται ένας *μεταγνωστικός* προβληματισμός για το επιστημολογικό και πολιτισμικό παρασκήνιο της ιδιομορφίας της μαθηματικής νοοτροπίας και δραστηριότητας των αρχαίων Ελλήνων. Με άλλα λόγια, ανοίγεται ένας δρόμος για τη διείσδυση στο υπόβαθρο της μαθηματικής σκέψης και συμπεριφοράς του αρχαίου ελληνικού πολιτισμού, με προσανατολισμό τα γνωστικά και συλλογικά

χαρακτηριστικά κι όχι διαμέσου ενός προπετάσματος από τεχνοκρατικά επιτεύγματα και ατομοκεντρική σπουδαιολογία.

Μια από τις πρώτες ενδείξεις του νέου τρόπου σκέψης την περίοδο της αρχαίας ελληνικής Αναγέννησης, του 6^{ου} π.Χ. αιώνα, είναι η μέτρηση του ύψους της πυραμίδας. Σύμφωνα με τον Πλούταρχο (περ. 50-130 μ.Χ.) και τον Διογένη Λαέρτιο (3^{ος} αιώνας μ.Χ.) ο Θαλής ο Μιλήσιος (περ. 625-546 π.Χ.) μέτρησε το ύψος της πυραμίδας συσχετίζοντας τη σκιά της με τη σκιά μιας ράβδου.³⁸ Όπως υποδεικνύουν όλες οι ιστορικές ανακατασκευές για το

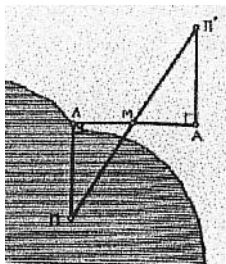


σκοπό αυτό ο Μιλήσιος σοφός μέτρησε τη σκιά της πυραμίδας, όταν η σκιά της ράβδου είναι ίση με το ύψος της, οπότε το μήκος της σκιάς της πυραμίδας θα ήταν όσο και το ύψος της. Από τη μεθόδευση αυτή διαπιστώνεται, χωρίς δυσκολία, ότι το θεωρητικό της υπόβαθρο στηρίζονταν σ' έναν έμμεσο τρόπο σκέψης. Δεν αντιμετωπίστηκε δηλαδή, ούτε μπορούσε να αντιμετωπισθεί, η μέτρηση αυτή μ' έναν άμεσο τρόπο, λόγου χάρη με την απ' ευθείας μέτρηση του συγκεκριμένου ύψους μ' ένα σχοινί που διαπερνάει κατακόρυφα την πυραμίδα από την κορυφή μέχρι τη βάση της.

Παρατηρείται λοιπόν ένας ιδιότυπος τρόπος σκέψης και πρωτότυπος, εφ' όσον δεν έχει σηματοδοτηθεί κάτι παρόμοιο στην ιστορία των Μαθηματικών πριν τον Θαλή. Θα πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι το περιστατικό αυτό του έμμεσου τρόπου σκέψης δεν είναι το μοναδικό που αποδίδεται στον Θαλή. Σύμφωνα με την δοξογραφική παράδοση, ένα

³⁸ Βλ. Τέζα, Χ.Α.: *Ο Θαλής ο Μιλήσιος και οι Αρχές των Επιστημών. Η Οδός προς τη Φιλοσοφία*, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Επιστημονική Επετηρίδα της Φιλοσοφικής Σχολής, Παράρτημα αρ. 44, 1990, σελ. 81-82.

δεύτερο μεθοδολογικά όμοιο πρόβλημα που έλυσε ο Μιλήσιος σοφός ήταν η μέτρηση της απόστασης ενός πλοίου από το λιμάνι.³⁹ Στην περίπτωση αυτή μια υποθετική ανακατασκευή της λύσης εξής: χαράσσεται η κάθετη ευθεία ΛΜΑ στη νοητή γραμμή ΛΜ (Λιμάνι-Πλοίο), έτσι ώστε $\Lambda M = M A$, στη συνέχεια προσδιορίζεται το σημείο Π' πάνω στην κάθετη ευθεία της ΛΜΑ στο Α και με την ιδιότητα να φαίνεται απ' αυτό το Π μέσω του Μ (μ' άλλα λόγια το Π' να είναι στην ίδια ευθεία με το Π και το Μ).⁴⁰



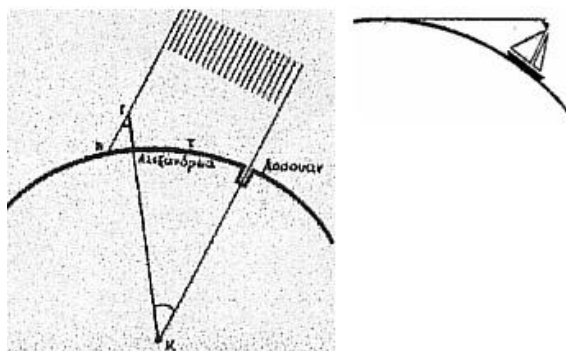
Το ερώτημα που δημιουργείται, τώρα, είναι: υπάρχουν άλλες ιστορικές μαρτυρίες, ενδείξεις ή εκφάνσεις που να πιστοποιούν τον έμμεσο τρόπο σκέψης στον αρχαίο ελληνικό πολιτισμό και να είναι ιστοριογραφικά ισχυρότερες απ' αυτές που αποδίδονται στον Θαλή;

Η πιο πειστική περίπτωση είναι η μέτρηση της ακτίνας της γης από τον Ερατοσθένη τον Κυρηναίο, τον 3^ο αιώνα π.Χ. Πρόκειται για ένα επίτευγμα που ήταν αδύνατον να προκύψει με άμεσο τρόπο. Προήλθε μ' έναν έμμεσο συλλογισμό. Συγκεκριμένα συνδυάστηκε η μέτρηση της γωνίας που σχηματίζει η κατακόρυφος με τις προσπίπτουσες ακτίνες του ηλίου (πιθανότατα με τη βοήθεια του λόγου μιας ράβδου προς τη σκιά της) στην Αλεξάνδρεια, τη στιγμή που οι ακτίνες του ήλιου έπεφταν κατακόρυφα στη Σήνη (σημερινό Ασσουάν), τη μέτρηση της Απόστασης Αλεξανδρείας-Σήνης και την αξιοποίηση των μαθηματικών ιδιοτήτων για τις εντός εναλλάξ γωνίες και των ισοσκελών τριγώνων.⁴¹

³⁹ Βλ. στο ίδιο σελ. 82-83.

⁴⁰ Βλ. Τσιμπουράκη, Δ.: *Η Γεωμετρία και οι Εργάτες της στην Αρχαία Ελλάδα*, Αθήνα, 1985, σελ.40-41.

⁴¹ Βλ. Cohen, M.R. and Drabkin, I.E.: *A Source Book in Greek Science*, Harvard Univ. Press, ⁵1975, σελ. 151-153, Couder, P.: *Η Ιστορία της Αστρονομίας*, εκδ. Ι. Ν. Ζαχαρόπουλος, 1964, σελ. 47-48, Τσιμπουράκη, Δ., πρ. υπ. 40, σελ. 95.



Μια επίσης χαρακτηριστική περίπτωση έμμεσου τρόπου σκέψης είναι η συνειδητοποίηση του σφαιρικού σχήματος της γης. Πρόκειται για μια γνωστική εξέλιξη που πραγματοποιήθηκε, όπως φαίνεται, με την αξιοποίηση κάποιων παρατηρησιακών ενδείξεων, όπως π.χ. η σταδιακή απώλεια οπτικής επαφής ενός πλοίου όταν απομακρύνεται από το λιμάνι, όπου χάνεται πρώτα το σκάφος και μετά το κατάρτι, ή το εσωτερικό τόξο της σελήνης στις διάφορες φάσεις της, ή ακόμη η αλλαγή των αστερισμών με τη μετατόπιση σε διαφορετικά γεωγραφικά μήκη. Τα πρώτα ίχνη της ιδέας αυτής σηματοδοτούνται στην προ-πλατωνική περίοδο και καθιερώθηκε την εποχή του Πλάτωνα.⁴²

Διαφαίνεται λοιπόν ότι ο έμμεσος τρόπος σκέψης διαποτίζει το επιστημολογικό υπόβαθρο του αρχαίου ελληνικού πολιτισμού. Δύσκολα, όμως, έως αδύνατο μπορεί να αποδοθεί κάτι ανάλογο στους προ-ελληνικούς πολιτισμούς. Περιπτώσεις όπως αυτές που αναφέρθηκαν ήταν μάλλον ασύμβατες με τους πρώτους μεγάλους πολιτισμούς που δημιουργήθηκαν στη Μεσοποταμία και στην Αίγυπτο, οι οποίοι χαρακτηρίζονται κύρια από έναν εμπειρισμό και μια αμεσότητα. Έτσι δημιουργείται το ερώτημα:

*Τι μεσολάβησε και άνοιξε ο πνευματικός εκείνος
ορίζοντας που εξέθρεψε τον έμμεσο τρόπο σκέψης;*

Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να επισημανθούν οι αλλαγές στην αρχαία ελληνικά κουλτούρα και συμπεριφορά, που αναμόρφωσαν τη θεωρητική υποδομή του περιεχομένου και των διαδικασιών σκέψης.

⁴² Βλ. Dicks, D.R.: *Η Πρώιμη Ελληνική Αστρονομία*, εκδ. Δαίδαλος/Ι. Ζαχαρόπουλος, 1991, σελ. 68, 129, Couder, P., πρ. υπ. 41, σελ. 47-48.

Τρεις σημαντικότερες πολιτισμικές καινοτομίες άλλαξαν τη νοοτροπία και την πνευματική στάση των αρχαίων Ελλήνων και πρώτα αυτών που ζούσαν στο Ανατολικό Αιγαίο, από τον 6^ο π.Χ. αιώνα περίπου. Συγκεκριμένα εμφανίστηκε και εδραιώθηκε ένα νέο είδος διακυβέρνησης και εξουσίας, ένας νέος τρόπος εμπορικών συναλλαγών και ένα νέο μέσο επικοινωνίας.⁴³ Μ' άλλα λόγια πρόβαλαν, γύρω στον 6^ο αιώνα π.Χ., τρεις νέες θεσμικές και νοητικές καταστάσεις: *η δημοκρατία, το νόμισμα και το αλφάβητο*. Αξίζει να αναλυθούν, λίγο, αυτές οι νέες συνιστώσες του αρχαίου ελληνικού πολιτισμού.

Είναι κοινή αλήθεια ότι ένα από τα κύρια στοιχεία που χαρακτηρίζουν την αρχαία ελληνική κοινωνία, την προ-αλεξανδρινή περίοδο, αποτελεί η δημοκρατία σε μια σειρά από ελληνικές πόλεις. Και όλοι λίγο-πολύ γνωρίζουν ότι η δημοκρατία ως σύστημα διακυβέρνησης, άσκησης εξουσίας και συλλογικής συμπεριφοράς είναι κάτι πολύ διαφορετικό, διαμετρικά αντίθετο, από τα δεσποτικά καθεστώτα των προ-ελληνικών πολιτισμών της Μεσοποταμίας, της Αιγύπτου, της Περσίας, αλλά και αυτών της αρχαϊκής ελληνικής περιόδου. Η ειδοποιός διαφορά τους εκδηλώνεται στον τρόπο άσκησης της εξουσίας. Στην προκειμένη περίπτωση τα δεσποτικά συστήματα διακυβέρνησης από μια αμεσότητα στην άσκηση της εξουσίας, του είδους “αποφασίζουμε και διατάσσουμε”. Αντίθετα, στις δημοκρατίες των ελληνικών πόλεων υπήρχαν έμμεσες μόνο δυνατότητες άσκησης της διακυβέρνησης, δια μέσου της συγκατάθεσης και του ελέγχου θεσμοθετημένων συλλογικών οργάνων. Πολύ χαρακτηριστικά ο έγκριτος άγγλος ιστορικός Antony Andrewes παρατήρησε ότι “*Στην Αθήνα κανένας δεν ασκούσε εξουσία για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα από όσο μπορούσε να πείθει την εκκλησία του δήμου ότι οι απόψεις του είναι σωστές, και ήταν αναγκασμένος να πείθει το ίδιο ή ελαφρώς διαφορετικό ακροατήριο με την πάροδο του χρόνου, χωρίς διακοπή*”.⁴⁴ Και ο Αγησίλαος Ντόκας συμπληρώνει “*οι αρμοδιότητες των ανωτέρων κρατικών αξιωματούχων*

⁴³ Βλ. Lloyd, G.E.R.: *Αρχαία Ελληνική Επιστήμη. Μέθοδοι και Προβλήματα*, Τόμος Α', εκδ. Αλεξάνδρεια, 1996, σελ. 212 κ.ε. Vernant, J.-P.: *Η Καταγωγή της Ελληνικής Σκέψης*, εκδ. Δίπτυχο, 1966. Austin, M.M. / Vidal-Naquet, P.: *Οικονομία και Κοινωνία στην Αρχαία Ελλάδα*, εκδ. Δαιδαλός/Ι. Ζαχαρόπουλος, 1998, σελ. 88 κ.ε.

⁴⁴ Βλ. Andrewes, A.: *Αρχαία Ελληνική Κοινωνία*, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης, 1987, σελ. 273.

ήσαν, εξαιτίας της δύναμης που είχαν η Εκκλησία του Δήμου, η Βουλή και τα λαϊκά δικαστήρια, εξαιρετικά περιορισμένες...Ακόμη και ο Περικλής, που είχε συγκεντρώσει ένα πλήθος πολιτικών, κυβερνητικών και στρατιωτικών αρμοδιοτήτων, ήταν κυρίαρχος στην Εκκλησία του Δήμου και καθόριζε τις αποφάσεις της μόνο χάρη στη δύναμη της προσωπικότητας του και του λόγου. Η θέση του ήταν νομικά επισφαλής, γιατί ο Δήμος μπορούσε στην επιχειροτονία που γινόταν σε κάθε πρωτανεία να τον απομακρύνει από το αξίωμα και να τον παραπέμψει σε δικαστήριο”.⁴⁵ Επισημαίνεται, λοιπόν, όχι μόνο ο έμμεσος τρόπος διακυβέρνησης, αλλά και η αντίστοιχη κοινωνική συμπεριφορά και νοοτροπία των πολιτών της δημοκρατικής πόλης. Εδώ αξίζει να αναφερθεί ότι η πρώτη δημοκρατική διακυβέρνηση, που είναι γνωστή, πραγματοποιήθηκε στη Χίο, γύρω στο 600 π.Χ.⁴⁶



Στο πεδίο, τώρα, των εμπορικών δραστηριοτήτων παρατηρείται ένας σημαντικός νεωτερισμός στο δυτικό τμήμα της Μικράς Ασίας, κατά τον 7^ο αιώνα π.Χ. Ήταν η χρήση του νομίσματος ως μέσο συναλλαγών. Η εμφάνιση και η κυκλοφορία των νομισμάτων “διέλυε”, σύμφωνα με τον διαπρεπή άγγλο ιστορικό George Thomson, “όλες τις παλιές συνθήκες”,⁴⁷ γεγονός που δεν ήταν άσχετο με τις κοινωνικές ανακατατάξεις, ούτε με τη θεσμοποίηση και λειτουργία των μορφών δημοκρατικού πολιτεύματος σε κάποιες ελληνικές πόλεις. Αναφορικά με το θέμα ο Αριστοτέλης τόνισε, στα *Ηθικά Νικομάχεια*, τον διαμεσολαβητικό ρόλο του νομίσματος στην

⁴⁵ Βλ. Ντόκα, Α.: *Η Αθηναϊκή Δημοκρατία*, Βιβλιοπωλείον της “Εστίας”, σελ. 78.

⁴⁶ Βλ. Thomson, G.: *Η Αρχαία Ελληνική Κοινωνία. Οι Πρώτοι Φιλόσοφοι*, εκδ. Κέδρος, 1987, σελ. 211.

⁴⁷ Στο ίδιο, σελ. 208.

ποσοτική εκτίμηση και σύγκριση ετερογενών προϊόντων και έτσι την ανταλλακτική ισοδυναμία ανόμοιων πραγμάτων.⁴⁸ Έχει μάλιστα επισημανθεί ότι το ζήτημα αυτό της ισοδυναμίας ανάγεται στους Πυθαγόρειους, που το αντιμετώπισαν με τη βοήθεια των αναλογιών.⁴⁹ Η ανέλιξη των ανταλλακτικών ισοδυναμιών από το εμπειρικό πλαίσιο του εμπορίου σ' ένα ευρύτερο πεδίο θεώρησης, όπως για παράδειγμα στις σχέσεις των μηκών χορδής με τους παραγόμενους μουσικούς ήχους, αντίστοιχα, ή των διαφορετικών πολιτικών δικαιωμάτων και υποχρεώσεων στο δημοκρατικό πολίτευμα, δεν ήταν άσχετη με την ανάπτυξη της ισότητας και των αναλογιών στα Μαθηματικά.⁵⁰ Από την άλλη μεριά οι προ-ελληνικοί πολιτισμοί, όπως και στην αρχαϊκή ελληνική περίοδο, έκαναν τις ανταλλαγές άμεσα, δηλ. είδος με είδος. Συγκεκριμένα “από πολύ νωρίς στην ιστορία της Μεσοποταμίας χρησιμοποιείται το κυριότερο δημητριακό, το κριθάρι, σαν μέτρο της αξίας και γενικό ανταλλακτικό μέσο”.⁵¹ Στην αρχαία Αίγυπτο “χρησιμοποιούνται αρχικά ως μονάδες αναφοράς για τη μέτρηση της ανταλλακτικής αξίας διάφορα είδη-αλυσίδες, φουσερά, σανδάλια κ.ο.κ. Αργότερα θα χρησιμοποιηθεί σαν μέτρο της ανταλλακτικής αξίας ένα σταθερό βάρος μετάλλου, χρυσού, ασημιού ή και χαλκού”.⁵² Αλλά και “ο Όμηρος αναφέρει στην Ιλιάδα πως ο Γλαύκος αντάλλαξε τη χρυσή του πανοπλία αξίας 100 βοδιών με τη μπρούντζινη πανοπλία του Διομήδη αξίας 9 βοδιών”.⁵³



Η τρίτη αξιοσημείωτη καινοτομία του αρχαίου ελληνικού πολιτισμού είναι η επαναστατική αλλαγή του τρόπου επικοινωνίας με την εδραίωση της αλφαβητικής κωδικοποίησης του γραπτού λόγου. Το νέο αυτό σύστημα γραφής διεύρυνε αρκετά τις

⁴⁸ Βλ. Austin, M.M. / Vidal-Naquet, P., πρ. υπ. 43, σελ. 308.

⁴⁹ Βλ. Snell, B., πρ. υπ. 36, σελ. 290.

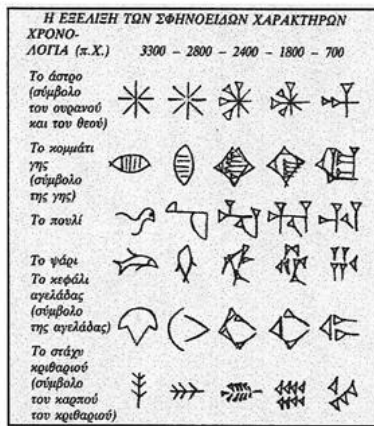
⁵⁰ Βλ. Harvey, F.D.: Two Kinds of Equality, *Classica et Mediaevalia*, 26, 1965, σελ. 101-146.

⁵¹ Βλ. Θεοχάρη, Π.Δ.: *Αρχαία και Βυζαντινή Οικονομική Ιστορία*, εκδ. Παπαζήση, 1983, σελ. 36.

⁵² Στο ίδιο, σελ. 27.

⁵³ Στο ίδιο, σελ. 70.

εκφραστικές δυνατότητες μ' επακόλουθο να ανοίξει ένας νέος ορίζοντας αφηρημένης σκέψης.⁵⁴



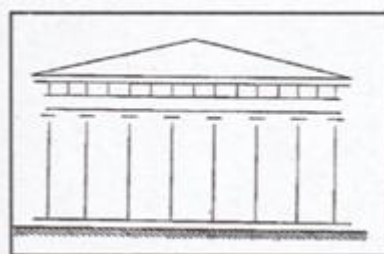
Και αυτό γιατί η αλφαβητική γραφή πρόβαλε μια νέα γλωσσική και γνωστική συμπεριφορά. Η συγκεκριμένη αλλαγή γίνεται φανερή όταν συγκριθούν τα εικονογραφικά, κατά βάση, συστήματα γραφής των προελληνικών πολιτισμών με την αλφαβητική γραφή. Στην προκειμένη περίπτωση μπορεί να διαπιστωθεί ότι στα εικονογραφικά συστήματα τα σημαινόμενα εκφράζονται άμεσα με την οπτική τους αναπαράσταση, ενώ στην αλφαβητική γραφή αυτό γίνεται έμμεσα, γιατί κάθε γραπτή λέξη είναι ένας συνδυασμός συμβόλων που δεν έχουν νόημα από μόνα τους. Να σημειωθεί ότι το ελληνικό αλφάβητο προήλθε από το φοινικικό αλφάβητο και εξελίχθηκε από τον 8^ο αιώνα π.Χ. με διάφορες τοπικές ιδιομορφίες. Το 403 π.Χ. έγινε ένα σημαντικό βήμα ομογενοποίησης του, όταν οι Αθηναίοι υιοθέτησαν, με ψήφισμα, το ιωνικό αλφάβητο της Μιλήτου.⁵⁵

Οι τρεις αυτές καινοτομίες αποτελούν το “γενετικό υλικό” του αρχαίου ελληνικού πολιτισμού και τον επιστημολογικό του φορέα. Ο πυρήνας αυτού του “υλικού” είναι ο έμμεσος τρόπος σκέψης. Αξίζει να αναφερθεί ένα παράδειγμα, από τα πολλά που υπάρχουν, όπου μπορεί να επισημανθεί η πολιτισμική αξία του έμμεσου τρόπου σκέψης στην αρχαία ελληνική πραγματικότητα και να φανεί η δημιουργικότητά του.

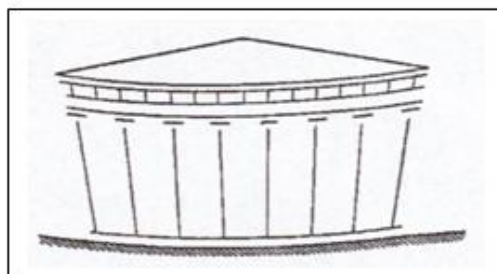
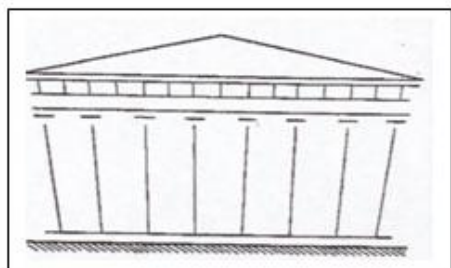
⁵⁴ Βλ. Vernant, J.-P.: *Μύθος και Σκέψη στην Αρχαία Ελλάδα*, εκδ. Εγνατία, σελ. 356.

⁵⁵ Βλ. Jean, G.: *Η γραφή, η Μνήμη του Ανθρώπου*, εκδ. Δελθανάση, 1991, σελ. 206-207.

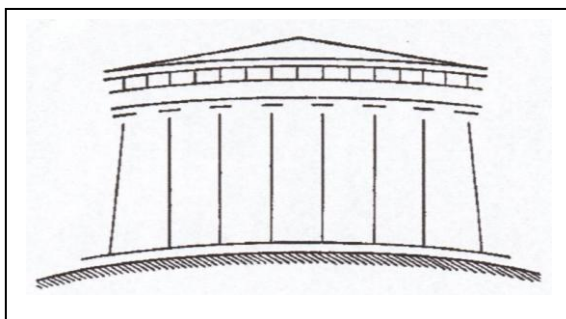
Ο Παρθενώνας είναι ένα από χαρακτηριστικότερα σύμβολα του “ελληνικού θαύματος”. Η ακτινοβολία του, στον κόσμο όλο, είναι πολύ μεγάλη. Γιατί, όμως; Τι είναι αυτό που προκαλεί τον υπέρμετρο θαυμασμό; Είναι μόνο ένα μνημείο που σηματοδοτεί μια ένδοξη περίοδο της ιστορίας του πολιτισμού; Ή αναδεικνύει μια σημαντική ιδιαιτερότητα της κατασκευής του που προσιδιάζεται με την πολιτισμική και πνευματική πρόοδο της ελληνικής κουλτούρας; Η σκοπιά αυτή δίνει τη δυνατότητα να ξεπεραστεί το επιφανινόμιο και να αποκαλυφθούν στοιχεία του καλλιτεχνικού και διανοητικού “παρασκηνίου” του αρχαίου ελληνικού πολιτισμού. Και αυτό γιατί μπορεί να φωτίσει την πολιτισμική απήχηση του τρόπου σκέψης και συμπεριφοράς στις αισθητικές ευαισθησίες των αρχαίων Ελλήνων. Συγκεκριμένα ο Ικτίνος (5^{ος} αιώνας π.Χ.), ο αρχιτέκτονας του Παρθενώνα, ήθελε να δώσει στο ναό της Ακρόπολης την εξής μορφή:



Γνώριζε, όμως, ότι αν τον κατασκεύαζε μ’ αυτό το πρότυπο, τότε το αποτέλεσμα θα είχε τις εξής οπτικές παραμορφώσεις:



Για να αποφύγει τις αισθητικές αυτές ατέλειες έκανε τις εξής αντισταθμιστικές παρεμβάσεις:



Έτσι δημιούργησε ένα αρχιτεκτόνημα υψηλής ποιοτικής στάθμης, που οφείλεται σε μια εκλεπτυσμένη ευαισθησία και σ' ένα βαθύ αναστοχασμό. Τα χαρακτηριστικά αυτά γίνονται φανερά όταν το εν λόγω μνημείο συγκριθεί με τις Πυραμίδες και τα Ζιγκουράτ. Στην περίπτωση αυτή ο Παρθενώνας ακτινοβολεί το μεγαλείο της αρμονίας και της αισθητικής ανάτασης, ενώ οι Πυραμίδες και τα Ζιγκουράτ προβάλλουν το μεγαλοπρεπές του όγκου τους. Με άλλα λόγια, στην πρώτη περίπτωση αντανακλάται η διεισδυτικότητα του έμμεσου τρόπου σκέψης και καλλιτεχνικής στάσης, ενώ στη δεύτερη αποτυπώνεται η υπερβολή της άμεσης δύναμης και αίγλης, δηλαδή τη μεγαλοπραγμοσύνη της εξουσία που αντιπροσωπεύει.

Μέσα στη ριζοσπαστική αλλαγή που επέφερε ο έμμεσος τρόπος σκέψης στον αρχαίο ελληνικό πολιτισμό, η μαθηματική σκέψη δεν μπορούσε να μείνει στατική. Εκτινάχθηκε σε πολύ υψηλό επίπεδο και δημιούργησε την πρώτη “επανάσταση” στην ιστορία των Μαθηματικών.⁵⁶ Αξίζει να επισημανθούν ότι δύο νέες συνιστώσες που επέφεραν την επιστημολογική μεταλλαγή στη μαθηματική σκέψη του αρχαίου ελληνικού πολιτισμού ήταν η ισότητα και η απόδειξη. Όσο αφορά την πρώτη έχει επισημανθεί η συνάφεια της με τις πολιτισμικές διαστάσεις που εξέθρεψαν τον έμμεσο τρόπο σκέψης. Εκείνο όμως που θα πρέπει να υπογραμμισθεί είναι η απουσία της ισότητας και της λειτουργικότητάς της από την πολιτισμική και την επιστημολογική συγκυρία της προ-ελληνικής ιστορικής

⁵⁶ Βλ. Dauben, J.: Conceptual revolutions and the history of mathematics: two studies in the growth of knowledge, στο Gillies, D.(ed.): *Revolutions in Mathematics*, Clarendon Press, 1992, σελ. 49-82, ειδ. σελ. 52-57.

πραγματικότητας. Και αυτό γιατί οι σύγχρονοι ιστορικοί των Μαθηματικών παραγνωρίζουν το γεγονός αυτό και παραμορφώνουν την ιστορική κατανόηση προβάλλοντας, κατά κανόνα, αναχρονιστικές ανακατασκευές.⁵⁷

Επίσης και η προέλευση της απόδειξης είναι στενά συνυφασμένη με τον έμμεσο τρόπο σκέψης, γιατί αποτελεί το απαραίτητο στήριγμα για την αποδοχή των αποτελεσμάτων και των συμπερασμάτων της. Για παράδειγμα ο Θαλής δεν μπορούσε απλώς να ανακοινώσει το αποτέλεσμα των συλλογισμών και των μετρήσεων του για τον υπολογισμό του ύψους της πυραμίδας, έπρεπε να το τεκμηριώσει, διαφορετικά θα εκλαμβάνονταν ως μαγική ή μεταφυσική η ικανότητά του αυτή. Στον άμεσο τρόπο σκέψης και συμπεριφοράς δεν τίθεται, εκ των πραγμάτων, τέτοιο ζήτημα. Θα πρέπει, ωστόσο, να σημειωθεί ότι η ανάπτυξη της απόδειξης στον αρχαίο ελληνικό πολιτισμό δεν ήταν ανεξάρτητη και από την καλλιέργεια της επιχειρηματολογίας στη Ρητορική, στη Φιλοσοφία, στην πολιτική και στη δημόσια ζωή.

Αυτή η θεώρηση της αρχαίας ελληνικής μαθηματικής σκέψης, που δεν περιχαράκωνεται απλά στις περιγραφές των σπουδαίων επιτευγμάτων και στις αυθεντίες του συγκεκριμένου πολιτισμού, αλλά επιδιώκει την ανάδειξη της επιστημολογικής ιδιαιτερότητας σε συνδυασμό με τις αντίστοιχες ανθρωπολογικές μεταλλαγές, έχει ως κύριο άξονα τη μεταγνωστική προσέγγιση του θέματος. Και αυτή η μεταγνωστική προσέγγιση μπορεί να χαρακτηριστεί ως πολιτισμικός αναστοχασμός (cultural reflexivity). Αρκετά ενδεικτική, για τον εν λόγω προβληματισμό, είναι η εξής επισήμανση:

*“Ο πρώτος ακρογωνιαίος λίθος της [επιστημονικής ανάπτυξης] ήταν το δεύτερο επίπεδο κατανόησης (second-order concept) της απόδειξης που αναπτύχθηκε στην κλασσική Ελλάδα”.*⁵⁸

⁵⁷ Τις περισσότερες φορές γιατί είναι επηρεασμένοι από έναν ιστοριογραφικό πλατωνισμό, βλ., για παράδειγμα, Θωμάδη, Γ. / Κασάνη, Ν.: Ο όρος “Γεωμετρική Άλγεβρα” στο στόχαστρο μιας σύγχρονης επιστημολογικής διαμάχης, στο βιβλίο: *ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ. ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΑ ΔΟΚΙΜΙΑ*, επιμέλεια Δ. Αναπολιτάνου και Β. Καρασμάνη, εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα, 1993, σελ. 27-52.

⁵⁸ Βλ. Elkana, Y.: The Emergence of Second-order Thinking in Classical Greece, στο *Eisenstadt, S.N.(ed.): Axial Age Civilizations*, State Univ. of New York Press, 1986, σελ. 40-64, ειδ. σελ. 64.

Και αυτό το δεύτερο επίπεδο κατανόησης δεν είναι άλλο παρά εκείνο της συνειδητής και συστηματικής σκέψης σχετικά με τη σκέψη, δηλαδή της μεταγνωστικής κατανόησης.

Η μεταγνωστική, λοιπόν, κατανόηση των Μαθηματικών, και στην κατεύθυνση αυτή της ιστορικής τους ανάπτυξης, αποτελεί τον *ακρογωνιαίο λίθο* των μαθηματικών της εκπαίδευσης. Και αυτό γιατί ενισχύει σημαντικότερα τον “επαγγελματικό” τους εξοπλισμό που τους επιτρέπει να εξηγήσουν και να ερμηνεύσουν τα Μαθηματικά. Με άλλα λόγια τους διευκολύνει να επικοινωνήσουν με μη-μαθηματικούς στο θεματικό πλαίσιο της ειδικότητάς τους.

Η διαμεσολάβηση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών

Δημήτρης Χασάπης

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Α.Π.Θ.

Η διαμεσολάβηση της ιστορίας των μαθηματικών στη διερεύνηση της μάθησης και στη διδασκαλία των μαθηματικών με στόχο τη βελτίωση των αποτελεσμάτων της, είναι μια πολύ παλιά ιδέα. Διατυπώθηκε ως πρόταση με σχετική πληρότητα στις αρχές της δεκαετίας του 1960 στα πλαίσια των συζητήσεων που αναπτύχθηκαν εκείνη την εποχή για την μεταρρύθμιση της μαθηματικής εκπαίδευσης και έκτοτε επανέρχεται με περισσότερη ή λιγότερη έμφαση και με διάφορες αφορμές σε συστάσεις διεθνών και εθνικών συλλογικών οργάνων (όπως είναι η Διεθνής Επιτροπή Μαθηματικής Εκπαίδευσης – ICMI, το Εθνικό Συμβούλιο Εκπαιδευτικών Μαθηματικών των ΗΠΑ – NCTM, 1989 ή η Μαθηματική Ένωση Αμερικής των ΗΠΑ), σε επεξεργασίες ειδικών ομάδων μελέτης (όπως είναι η Διεθνής Ομάδα Μελέτης των Σχέσεων Ιστορίας και Παιδαγωγικής των Μαθηματικών), σε εισηγήσεις και συζητήσεις διεθνών και εθνικών συνεδρίων (όπως το 6^ο Διεθνές Συνέδριο για τη Μαθηματική Εκπαίδευση του Διεθνούς Συμβουλίου Μαθηματικής Εκπαίδευσης - ICMI, Σεβίλλη Ισπανίας, 1996 ή τα συνέδρια της Βρετανικής - BSHM ή της Ιταλικής – SISM Εταιρείας για την Ιστορία των Μαθηματικών) και σε πλήθος δημοσιευμάτων σε περιοδικά και συλλογικούς τόμους που αναφέρονται σε ζητήματα μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης (εντελώς ενδεικτικά, Katz, 2000, Swetz et. al., 1995)

Από όλη αυτή τη δραστηριότητα και το πλήθος των αναλύσεων φαίνεται να προκύπτει ως γενικό συμπέρασμα μια ομοφωνία για τη θετική συμβολή που

η διαμεσολάβηση της ιστορίας των μαθηματικών φαίνεται να έχει στη διερεύνηση της μάθησης και στη διδασκαλία των μαθηματικών. Ο Fauvel (1991) μάλιστα, ένας από τους πρωτεργάτες και δραστήριο μέλος των συζητήσεων για την εισαγωγή της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο απαριθμεί σε ένα μόνο κείμενο δέκα πέντε λόγους για τους οποίους οι εκπαιδευτικοί οφείλουν να καταστήσουν την ιστορία συστατικό στοιχείο της διδασκαλίας των μαθηματικών¹. Τόσο στο συγκεκριμένο όσο και σε παρόμοια κείμενα (για παράδειγμα, Avital 1995, Bidwell 1993, Ernest 1998, Garner 1996, Jones 1989, Katz 1993, Kleiner 1993, Swetz 1995, Rickey 1995, Sawyer 1997, Scriba 1975, Sfard 1995, Swetz 1995α, 1995β, Voolich 1993), η θετική συμβολή στοιχείων της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών φαίνεται να τεκμηριώνεται σε τρεις κατηγορίες επιχειρημάτων:

- Η ιστορία των μαθηματικών αναδεικνύει και υπογραμμίζει τον ανθρώπινο χαρακτήρα της μαθηματικής δραστηριότητας.
- Η ιστορία των μαθηματικών προκαλεί το ενδιαφέρον και συμβάλλει στη συγκρότηση μιας θετικής στάσης απέναντι στα μαθηματικά και
- Η ιστορία των μαθηματικών συνεισφέρει στην κατανόηση των εννοιών και των μαθηματικών προβλημάτων, αναδεικνύοντας τα πλαίσια και τις συνθήκες προέλευσης τους αλλά και τους όρους της εξέλιξης τους .

Με έμφαση στη μια ή στην άλλη κατηγορία επιχειρημάτων έχει σήμερα διαμορφωθεί μεταξύ των ερευνητών της μαθηματικής εκπαίδευσης και των εκπαιδευτικών μια ευρεία, τουλάχιστον σε θεωρητικό επίπεδο, συναίνεση για τη χρησιμότητα της εισαγωγής στοιχείων της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Στο επίπεδο του σχολείου της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης τώρα, όπου επιχειρήθηκε η εισαγωγή στοιχείων της ιστορίας των μαθηματικών στα αναλυτικά προγράμματα, στα σχολικά βιβλία ή στις διδακτικές δραστηριότητες έχει ακολουθήσει μια από τις ακόλουθες δύο λογικές.

Μια πρώτη λογική *πρόσθεσης* ιστορικών στοιχείων, η οποία δεν βασίζεται σε μια συνολική τροποποίηση και προσαρμογή του αναλυτικού

προγράμματος των μαθηματικών, αλλά στην προσθήκη αποσπασματικών εκθέσεων ιστορικών επεισοδίων, συνοπτικών παραθέσεων δεδομένων για τη ζωή και το έργο μεγάλων μαθηματικών και παρουσιάσεων μεμονωμένων ιστορικών προβλημάτων, παρενθετικά και στο περιθώριο του περιεχομένου των συναφών ή των υποτιθέμενα συναφών θεματικών ενοτήτων του αναλυτικού προγράμματος ή και μόνο των σχολικών βιβλίων. Μια τέτοια περίπτωση αποτελεί η εισαγωγή στοιχείων της ιστορίας των μαθηματικών με τη μορφή ένθετων “ιστορικών σημειωμάτων” σε επιλεγμένα κεφάλαια των βιβλίων των μαθηματικών του Γυμνασίου στη χώρα μας και άλλων βαθμίδων της εκπαίδευσης σε άλλες χώρες.

Μια δεύτερη λογική αρνείται τη δυνατότητα λειτουργικής συνύφανσης των σύγχρονων μαθηματικών που πρέπει να διδάσκει το σχολείο με στοιχεία της ιστορικής τους εξέλιξης, χωρίς όμως να αρνείται την παιδαγωγική χρησιμότητα της ιστορίας των μαθηματικών καθαυτής. Θεωρεί όμως, ότι κάθε τέτοιο εγχείρημα καταλήγει αναπόφευκτα είτε στην αποδόμηση του περιεχομένου και στον αποπροσανατολισμό της διδασκαλίας των μαθηματικών είτε στη διαστρέβλωση των ιστορικών δεδομένων ώστε να υπηρετούν τις ανάγκες του παρόντος και επομένως στην αλλοίωση του χαρακτήρα της ιστορίας ως αυτοτελούς επιστημονικής πρακτικής (για παράδειγμα, Fried, 2001). Γι’ αυτό προβάλλει μια λογική *διάκρισης*, υποστηρίζοντας την εισαγωγή στοιχείων της ιστορίας των μαθηματικών στο δευτεροβάθμιο κατά κανόνα σχολείο και ιδίως στις τελευταίες τάξεις του, ως ένα ξεχωριστό διδακτικό αντικείμενο, το οποίο διδάσκεται σε συνδυασμό και παράλληλα με το μάθημα των μαθηματικών λειτουργώντας υποστηρικτικά, αλλά αυτόνομα και σε σαφή διάκριση από αυτό.

Σε μια παραπέρα ανάπτυξη της λογικής αυτής και ως παραλλαγή της προβάλλεται η διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών μέσα από κατάλληλα επιλεγμένα, αυθεντικά όμως, ιστορικά κείμενα των μαθηματικών (ενδεικτικά, Laubenbacher and Pengelley 1992, 1996, Shulman 1998). Για την εκδοχή αυτή, η χρήση των πρωτότυπων πηγών της ιστορίας είναι η μόνη αποτελεσματική και ενδεδειγμένη πρακτική για τη διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών στο σχολείο.

Μια τρίτη τέλος λογική η οποία προκύπτει ως εκδοχή, αλλά σύμφωνα με όλα τα διαθέσιμα δεδομένα δεν έχει επιχειρηθεί μέχρι σήμερα καμιά

ολοκληρωμένη και σε έκταση υλοποίηση της, είναι η συνολική αναθεώρηση ενός αναλυτικού προγράμματος μαθηματικών και η ενσωμάτωση σ' αυτό της ιστορίας ως συστατικού στοιχείου του, στη βάση του οποίου επιλέγεται και οργανώνεται το περιεχόμενο και καθορίζεται η ακολουθία ανάπτυξης της διδασκαλίας των μαθηματικών στο σχολείο. Ένα από τα ελάχιστα αλλά χαρακτηριστικά παραδείγματα της λογικής αυτής αποτελεί ένα πρόγραμμα διδασκαλίας στοιχείων του διαφορικού λογισμού, που αναπτύχθηκε από τον Katz (1993).

Από όσα εκτέθηκαν συνοπτικά και αναπόφευκτα ελλειπτικά προηγουμένως προκύπτει η ακόλουθη διαπίστωση.

Σε μια χρονική περίοδο μεγαλύτερη των σαράντα ετών έχει συσσωρευτεί ένα αξιόλογο ως προς τον όγκο σώμα θεωρητικών αναλύσεων και παιδαγωγικών θέσεων, όπως επίσης και μια πληθώρα κάθε είδους και μορφής διδακτικού υλικού, και έχει διαμορφωθεί μια ευρύτατη συναίνεση στην ερευνητική και εκπαιδευτική κοινότητα για τις θετικές επιπτώσεις της διαμεσολάβησης της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών. Παράλληλα όμως, έχει καταστεί εμφανής η αδυναμία πρακτικής αξιοποίησης των αναλύσεων, των θέσεων και των υλικών αυτών στο επίπεδο της μαθηματικής εκπαίδευσης στο σχολείο της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, αφού οι όποιες προτάσεις και εφαρμογές καταγράφονται, έχουν αφενός ένα μερικό ή και πολλές φορές αποσπασματικό χαρακτήρα και αφετέρου δεν εξασφαλίζουν μια αποδοχή, η οποία να επιτρέπει τη διάδοση και την επέκτασή τους.

Το γεγονός αυτό συνιστά εκ πρώτης όψεως ένα παράδοξο, το οποίο δεν φαίνεται να θίγεται, στις συναφείς αναλύσεις ή συζητήσεις και αυτό είναι πραγματικά εντυπωσιακό. Κι' όμως το φαινομενικά παράδοξο αυτό γεγονός, αναδεικνύει ουσιαστικά ένα από τα καίρια σημεία του υπό συζήτηση θέματος, αφού οδηγεί άμεσα στο εξής ερώτημα:

Ποιοι είναι οι παράγοντες που καθορίζουν - και στην προκείμενη περίπτωση με βάση όλες τις ενδείξεις δυσχεραίνουν - την ενσωμάτωση ιστορικών διαστάσεων των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο, παρά τις θετικές επιπτώσεις που οι θεωρητικές αναλύσεις αποδίδουν σε ένα τέτοιο εγχείρημα;

Η απάντηση του ερωτήματος αυτού και η ερμηνεία του παραδόξου που το υποβάλλει, όπως και πολλών άλλων αδιεξόδων και αντίστοιχων ερωτημάτων που αφορούν τη μαθηματική εκπαίδευση, θα πρέπει κατά τη γνώμη μου να αναζητηθεί στις κυρίαρχες παραδοχές για τη φύση και το χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης και στις σχέσεις των παραδοχών αυτών με τα περιεχόμενα και τις πρακτικές της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Γιατί κυρίαρχα χαρακτηριστικά του περιεχομένου και των πρακτικών της διδασκαλίας των μαθηματικών ενσωματώνουν και υλοποιούν σε μεγάλο βαθμό τις κυρίαρχες παραδοχές για τη φύση και το χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης και αντίστροφα η κυρίαρχη, όπως και κάθε, φιλοσοφική-επιστημολογική θεώρηση της μαθηματικής γνώσης εμπεριέχει και υποβάλλει αντίστοιχες προσεγγίσεις σε καθοριστικά χαρακτηριστικά της διδασκαλίας των μαθηματικών. Η ενσωμάτωση επομένως ιστορικών διαστάσεων των μαθηματικών, ως συστατικού στοιχείου της διδασκαλίας τους στο σχολείο, προϋποθέτει μια αντίστοιχη επιστημολογική θεώρηση της μαθηματικής γνώσης.

Η κυρίαρχη από τις αρχές του προηγούμενου αιώνα μέχρι τις μέρες μας επιστημολογική θεώρηση της μαθηματικής γνώσης οικοδομείται σε παραδοχές μεταξύ των οποίων περιλαμβάνονται οι ακόλουθες, διατυπωμένες εντελώς συνοπτικά:

- Η μαθηματική γνώση συγκροτείται από ένα σύνολο προτάσεων (ορισμοί, αξιώματα, θεωρήματα) και μια σειρά αποδείξεων (διαδικασιών ελέγχου και τεκμηρίωσης) της αλήθειας των προτάσεων αυτών.
- Οι αποδείξεις της αλήθειας των μαθηματικών προτάσεων βασίζονται αποκλειστικά σε ένα σύνολο παραδοχών (αξιώματα και ορισμοί) και σε μια σειρά κανόνων λογικής συνεπαγωγής, που αποτελούν μέρος μιας παραδεκτής τυπικής-παραγωγικής λογικής.
- Αφού οι αποδείξεις της αλήθειας των μαθηματικών προτάσεων είναι αποκλειστικά λογικές, χωρίς καμία προσφυγή στην εμπειρική πραγματικότητα, η μαθηματική γνώση είναι κατά συνέπεια αδιάψευστη, αντικειμενική και απόλυτη, εξαρτημένη μόνο από τις παραδοχές της και τους κανόνες της τυπικής-παραγωγικής λογικής.

- Η μαθηματική γνώση, ως αδιάψευστη, αντικειμενική και απόλυτη γνώση - ουσιαστικά ως εξ ορισμού αληθής – υποκείμενη μόνο στη δική της εσωτερική λογική είναι επομένως ανεξάρτητη από κάθε χρονικό και κοινωνικό δεδομένο, ανεξάρτητη δηλαδή από κάθε ιστορική εξέλιξη και κοινωνική πρακτική².
- Η μαθηματική γνώση είναι κατά συνέπεια απαλλαγμένη πλήρως από τα εμπειρικά δεδομένα και τις αντιφάσεις της κοινωνικής πραγματικότητας, πλήρως ανεξάρτητη από τις κυρίαρχες κοινωνικές αξίες και άρα ιδεολογικά ουδέτερη.
- Η μαθηματική γνώση αναπτύσσεται συσσωρευτικά και αδιάλειπτα με την προσθήκη νέων μαθηματικών αληθειών, οι οποίες αποτελούν ένα τελεσίδικα περατωμένο και ολοκληρωμένο προϊόν της ανθρώπινης σκέψης.

Στα πλαίσια του επιστημολογικού αυτού προτύπου η ιστορία δεν αποτελεί συστατικό στοιχείο της μαθηματικής γνώσης, αφού η μαθηματική γνώση δεν αποτελεί πρώτιστα ένα ιστορικό και κοινωνικό προϊόν. Κάτω από την κυριαρχία αυτής της θεώρησης της μαθηματικής γνώσης, η ενσωμάτωση ιστορικών δεδομένων στη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο είναι ουσιαστικά ανέφικτη και όπου επιχειρείται δεν μπορεί παρά να έχει αποσπασματικό και ευκαιριακό χαρακτήρα.

Τα τελευταία όμως χρόνια και έπειτα από δεκαετίες προβληματισμού και διαλόγου διευρύνεται - σύμφωνα με όλα τα δεδομένα που προκύπτουν από τη διεθνή βιβλιογραφία - η αμφισβήτηση του κυρίαρχου επιστημολογικού προτύπου της μαθηματικής γνώσης, βασικά στοιχεία του οποίου σκιαγραφήθηκαν προηγούμενα και διάφορες εναλλακτικές εκδοχές που προτάσσουν τον ιστορικό και κοινωνικό χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης, από διαφορετικές βέβαια φιλοσοφικές αφετηρίες, προβάλλονται και κερδίζουν έδαφος στην επιστημονική και εκπαιδευτική κοινότητα.

Οι εκδοχές αυτές οικοδομούνται στη βάση της παραδοχής, ότι η μαθηματική γνώση - όπως και κάθε επιστημονική γνώση - είναι κοινωνική κατασκευή, υποκείμενη στα ιστορικά καθορισμένα κοινωνικά και πολιτισμικά πλαίσια του σταδίου ανάπτυξης της. Δεν αποτελεί κατά συνέπεια μια αδιάψευστη, αντικειμενική και απόλυτη γνώση, αυτόνομη και

κατηγορικά διακριμένη από τις άλλες μορφές της ανθρώπινης γνώσης, απαλλαγμένη από τα εμπειρικά δεδομένα και τις αντιφάσεις της κοινωνικής πραγματικότητας (Kitcher 1983, Tymoczo 1986, Wittgenstein 1956). Αντίθετα - όπως και κάθε επιστημονική γνώση – είναι προϊόν κοινωνικής δραστηριότητας υποκείμενη σε διαρκείς διαψεύσεις και αναθεωρήσεις (Lakatos 1976/1996). Επομένως για τις εκδοχές αυτές, η μαθηματική γνώση δεν αποτελεί ένα τελεσίδικα περατωμένο προϊόν της ανθρώπινης δραστηριότητας, εκφρασμένο οριστικά από ένα κλειστό σύστημα προτάσεων (ορισμών, αξιωμάτων και θεωρημάτων) και μια σειρά δεδομένων τεκμηρίωσης και απόδειξης της αλήθειας των προτάσεων αυτών, αλλά ως προϊόν κοινωνικής δραστηριότητας εντάσσεται σε ιστορικά καθορισμένα κοινωνικά και πολιτιστικά πλαίσια, που καθορίζουν το επίπεδο και προσδιορίζουν την κατεύθυνση ανάπτυξης της. Η ιστορία δηλαδή, αποτελεί συστατικό στοιχείο των προτάσεων και των διαδικασιών ελέγχου και τεκμηρίωσης της αλήθειας των προτάσεων αυτών, που συγκροτούν τη μαθηματική γνώση.

Στα πλαίσια αυτών των εκδοχών θεώρησης της μαθηματικής γνώσης υπάρχουν επομένως όλες οι προϋποθέσεις για την οργανική ένταξη της ιστορικής διάστασης ως συστατικού στοιχείου της διδασκαλίας των μαθηματικών στο σχολείο της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στην προοπτική επομένως της επικράτησης τους και μόνο μπορεί να θεωρηθεί εφικτή μια ριζική αναθεώρηση των κυρίαρχων προτύπων της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Σημειώσεις

¹ Λόγοι για την εισαγωγή της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο (Fauvel, 1991):

- Συμβολή στον πολλαπλασιασμό των κινήτρων για μάθηση.
- Ανάδειξη του ανθρώπινου χαρακτήρα της μαθηματικής δραστηριότητας.
- Η ιστορική εξέλιξη υποδεικνύει μια διάταξη της ύλης των μαθηματικών στο αναλυτικό πρόγραμμα.
- Η γνώση της ιστορίας της ανάπτυξης των εννοιών συμβάλλει στην κατανόησή τους.
- Τροποποίηση των αντιλήψεων των παιδιών για τα μαθηματικά.

- Ανάδειξη της αξίας των νεώτερων τεχνικών μέσα από τη σύγκριση τους με παλιότερες τεχνικές.
 - Συμβολή στην ανάπτυξη πολύ-πολιτισμικών προσεγγίσεων στα μαθηματικά.
 - Παροχή ευκαιριών και δυνατοτήτων διερευνητικών δραστηριοτήτων.
 - Συμβολή στην κατανόηση νοητικών εμποδίων των παιδιών στην κατανόηση αλγεβρικών εννοιών.
 - Ενθάρρυνση των παιδιών μέσα από τη συνειδητοποίηση του γεγονότος, ότι και άλλοι άνθρωποι στο παρελθόν είχαν προβλήματα με τα μαθηματικά.
 - Ενίσχυση των παιδιών που μαθαίνουν πιο γρήγορα να προχωρήσουν σε παραπέρα διερευνήσεις προβλημάτων.
 - Συμβολή στην κατανόηση του ρόλου των μαθηματικών στην κοινωνία.
 - Κάνει τα μαθηματικά πιο ελκυστικά ή τουλάχιστον λιγότερο απωθητικά στα παιδιά.
 - Η ιστορική διερεύνηση προκαλεί το ενδιαφέρον και εξάπτει τη φαντασία των παιδιών.
 - Παρέχει ευκαιρίες διαθεματικής προσέγγισης των μαθηματικών.
- ² Υπονοούμενη παραδοχή της οπτικής αυτής είναι η ύπαρξη απόλυτα ορθών και τελεσιδίκων ολοκληρωμένων μαθηματικών αληθειών, οι οποίες “ανακαλύπτονται” ή “μαθαίνονται” και η κατανόηση τους είναι κατά συνέπεια μια νοητική διαδικασία ανάλογη της βιολογικής διαδικασίας της “αφομοίωσης”.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

- Arcavi, A., Bruckheimer, M. & Ben-Zvi, R.(1982), Maybe a Mathematics Teacher Can Profit from the Study of the History of Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 3, 30–37.
- Avital, S. (1995), History of Mathematics Can Help Improve Instruction and Learning, in F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson & V. Katz (eds.), *Learn from the Masters*, The Mathematical Association of America, Washington, DC, 3–12.
- Bidwell, J. K. (1993), Humanize Your Classroom with the History of Mathematics, *Mathematics Teacher*, 86 (6), 461-64.
- Bos, Henk J. M. (1976), History of Mathematics in the Mathematics Curriculum at Utrecht University, *Historia Mathematica*, 3 473-76.
- Calinger, R. (ed.), (1996), *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching*, Mathematical Association of America, Washington, D.C.

- Corry, L. (1989), Linearity and Reflexivity in the Growth of Mathematical Knowledge, *Science in Context*, 3(2), 409–440.
- Ernest P. (1998), The History of Mathematics in the Classroom, *Mathematics in School*, 27 (4), 25-31.
- Fauvel, J. (1991), Using History in Mathematics Education, *For the Learning of Mathematics*, 11(2), 3-6.
- Fauvel, J. & Gray, J. (1987), The History of Mathematics: A Reader, The Open University, London.
- Freudenthal, G. (1996), Pluralism or Relativism?, *Science in Context*, 9, 151–163.
- Fried, M. N. (2001), Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? *Science & Education*, 10, 391–408.
- Furinghetti, F. (2000), The History of Mathematics as a Coupling Link between Secondary and University Teaching, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*; 31 (1), 43-51.
- Furinghetti, F. (1997), History of Mathematics, Mathematics Education, School Practice: Case Studies in Linking Different Domains, *For the Learning of Mathematics*, 17, 55-61.
- Garner, M. (1996), The Importance of History in Mathematics Teaching and Learning, *Interface '96*, Atlanta.
- Hitchcock, G. (1997), Teaching the Negatives, 1870-1970: A Medley of Models, *For the Learning of Mathematics*, 17, 17-25.
- Jardine, R. (1997), Active Learning Mathematics History, *Primus*, 7, 115-21.
- Jones, P. S. (1989), The History of Mathematics as a Teaching Tool. Στο Historical Topics for the Mathematics Classroom, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Va., 1-17.
- Katz, V. J. (2000), Using History to Teach Mathematics: An International Perspective, The Mathematical Association of America, Washington, DC.
- Katz, V. J. (1995), Napier's Logarithms Adapted for Today's Classroom . Στο F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson & V. Katz (eds.), Learn from the Masters, The Mathematical Association of America, Washington, DC, 49–56.

- Katz, V. J. (1993), Using the History of Calculus to Teach Calculus, *Science & Education*, 2, 243–249.
- Katz, V. J. (1986), Using History in Teaching Mathematics , *For the Learning of Mathematics*, 6 13-19.
- Kitcher, P. (1983), *The Nature of Mathematicsl Knowledge*, Oxford University Press, Oxford.
- Kleiner, I. (1993), Functions: Historical and Pedagogical Aspects, *Science & Education*, 2, 183–209.
- Krussel, L. (2000), Using History to Further the Understanding of Mathematical Concepts, *Primus*, 10 (3), 273-76.
- Lakatos, I. (1976), *Proofs and Refutations*, Cambridge Univerity Press, Cambridge.
Ελληνική έκδοση: Lakatos, I. (1996), *Αποδείξεις και Ανασκευές*, Τροχαλία, Αθήνα.
- Laubenbacher, R. and Pengelley, D. (1992), Great Problems of Mathematics: A Course Based on Original Sources, *American Mathematical Monthly*, 99, 313-317.
- Laubenbacher, R. and Pengelley, D. (1996), *Mathematical Masterpieces: Teaching with Original Sources*. Στο R. Calinger (ed.) *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching*, Mathematical Association of America, Washington, D.C., 257-260.
- McBride, C. C., and James H. R. (1977), The Effects of History of Mathematics on Attitudes toward Mathematics of College Algebra Students, *Journal for Research in Mathematics Education*, 1, 57-61.
- Marshall G. L. and Rich B. S. (2000), The Role of History in a Mathematics Class, *Mathematics Teacher*, 93 (8), 704-6
- National Council of Teachers of Mathematics (1989), *Historical Topics for the Mathematics Classroom*, NCTM, Reston, VA.
- Ponza, M. V. (1998), A Role for the History of Mathematics in the Teaching and Learning of Mathematics: An Argentinian Experience, *Mathematics in School*, 27 (4), 10-13.
- Radford, L. (1997), On Psychology, Historical Epistemology, and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics, *For the Learning of Mathematic*, 17(1), 26-33.

- Rickey, V. F. (1996), The Necessity of History in Teaching Mathematics. Στο R. Calinger (ed.) *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching*, Mathematical Association of America, Washington, D.C., 251-60.
- Rickey, V. F. (1995), My Favorite Ways of Using History in Teaching Calculus. Στο F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson & V. Katz (eds.), *Learn from the Masters*, The Mathematical Association of America, Washington, DC, 123–134.
- Sfard, A. (1995), The Development of Algebra: Confronting Historical and Psychological Perspectives, *Journal of Mathematics Behavior*, 14, 15–39.
- Sawyer, W. (1997), Mathematics as History, *Mathematics in School*, 26, 2-3.
- Scriba, C. J. (1975), The Place and Function of a ‘Historical Introduction’ in the Curriculum for Mathematics Students, *Historia Mathematica*, 2, 322-31.
- Shulman, B. (1998), Math-Alive! Using Original Sources To Teach Mathematics in Social Context. *Primus*; 8, 1-14.
- Swetz, F. J. (1995^a), Using Problems from the History of Mathematics in Classroom Instruction. Στο F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson & V. Katz (eds.), *Learn from the Masters*, The Mathematical Association of America, Washington, DC, 25–38.
- Swetz, F. (1995^β), Some Not So Random Thoughts about the History of Mathematics—Its Teaching, Learning, and Textbooks, *Primus*, 5, 97-107.
- Swetz, F., Fauvel, J., Bekken, O., Johansson, B. & Katz, V. (1995), *Learn from the Masters*, The Mathematical Association of America, Washington, D.C.
- Tymoczko, T. (1993), Humanistic and Utilitarian Aspects of Mathematics. Στο A. M. White (ed.), *Essays in Humanistic Mathematics*, The Mathematical Association of America, Washington, DC, 11–14.
- Tymoczko, T. (ed.), (1986), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Birkhauser, Boston.
- Van Maanen, J. A. (1997), New Maths May Profit from Old Methods, *For the Learning of Mathematics*, 17 39-46.
- Voolich, E. D. (1993), Using Biographies to ‘Humanize’ the Mathematics Class, *Arithmetic Teacher*, 41 16-19

White A. M. (ed.), (1993), *Essays in Humanistic Mathematics*, The Mathematical Association of America, Washington, DC

Wilder, R.L. (1981), *Mathematics as a Cultural System*, Pergamon, Oxford.

Wittgenstein, L. (1956), *Remarks on the Foundations of Mathematics*, revised edition, MIT Press, Cambridge, 1978.

Ο ρόλος του σχήματος στην Ευκλείδεια Γεωμετρία και οι διδακτικές προοπτικές μιας ιστορικής «ανάγνωσης» της έννοιας του εμβαδού

Κώστας Ζαχάρος

Δρ. Επιστημών Αγωγής - Καθηγητής στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση

Το σχήμα καταλαμβάνει ένα κεντρικό ρόλο στην αποδεικτική διαδικασία της ευκλείδειας γεωμετρίας και αποτελεί ένα ουσιώδες μέρος της ρητορικής της απόδειξης. Αποδεικτικές τεχνικές που αναπτύσσονται στα πλαίσια της ευκλείδειας γεωμετρίας, όπως για παράδειγμα η «επίθεση» που εφαρμόζεται στην ισότητα των τριγώνων, δεν περιορίζονται σε μια αισθητηριακή αντίληψη των σχημάτων. Απαιτούν τον προσδιορισμό κριτηρίων και την ανάπτυξη λογικών συμπερασμάτων ώστε η «επίθεση» να αποτελέσει μια νοητική διαδικασία.

Η σύνθεση της αισθητηριακής αντίληψης του σχήματος και των συντελούμενων νοητικών λειτουργιών, κάνουν το παιδαγωγικό εγχείρημα της διδασκαλίας της ευκλείδειας γεωμετρίας εξαιρετικά ενδιαφέρον. Επιπλέον, η έρευνα στο χώρο της μαθηματικής παιδείας υπογραμμίζει το γεγονός ότι ο σεβασμός των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών των μαθηματικών αντικειμένων που καλούμαστε να διδάξουμε, όπως αυτά προσδιορίζονται στο θεωρητικό πλαίσιο της ευκλείδειας γεωμετρίας, συνεισφέρει θετικά στην διδασκαλία.

Τα θέματα που υπαινικτικά θίχτηκαν εδώ θα αποτελέσουν το αντικείμενο της παρουσιάσής μας αυτής.

1. Γεωμετρικό σχήμα: σύνθεση της γραφικής αναπαράστασης και της έννοιας.

Οι γνωστικές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και μαθήτριες κατά την διδασκαλία του μαθήματος της Γεωμετρίας θα αποδοθούν σε μεγάλο βαθμό στην αδυναμία διάκρισης των γεωμετρικών εννοιών με τους ορισμούς τους από τη μια και των γραφικών αναπαραστάσεών τους από την άλλη. Οι δύο αυτές διακριτές κατηγορίες, δηλαδή οι εικονικές αναπαραστάσεις και οι έννοιες, συνθέτουν την «*εικονική έννοια*» (figural concept) [Fischbein 1993]. Οι εικονικές έννοιες είναι «πνευματικές κατασκευές που χαρακτηρίζονται από όλες τις ιδιότητες των εννοιών (γενικότητα, αφαίρεση, τελειότητα) και που την ίδια στιγμή εμπεριέχουν τις ιδιότητες της εικόνας (σχήμα, διαστάσεις, θέσεις στο χώρο)... Στην πραγματικότητα, (...), πρόκειται για μια ιδεατή κατάσταση που συνήθως πραγματώνεται στο εξασκημένο μυαλό του μαθηματικού» [Fischbein 1993, σ. 150]. Συμπερασματικά, οι εικονικές έννοιες είναι «*το ιδεώδες μιας διαδικασίας συγχώνευσης και ολοκλήρωσης μεταξύ των λογικών και των εικονικών όψεων*» [Fischbein 1993, σ. 150].

Η απόδοση των χαρακτηριστικών αυτών στο γεωμετρικό σχήμα υπογραμμίζει τη διδακτική σημασία που πρέπει να αποδοθεί στην ανάπτυξη της εικονικής έννοιας, αφού αυτή δεν είναι το φυσικό αποτέλεσμα της γνωστικής ανάπτυξης του ατόμου. Μια βασική δυσκολία που εμφανίζεται στο χειρισμό των εικονικών εννοιών οφείλεται συνήθως σε μια ηγεμονία της εικόνας και των περιορισμών της, γεγονός που υποβαθμίζει την σημασία της έννοιας και του ορισμού. Το γεγονός αυτό έχει τα χαρακτηριστικά ενός επιστημολογικού εμποδίου, αφού οι εδραιωμένες, από το προφανές του συγκεκριμένου σχήματος αντιλήψεις, εμποδίζουν την γνωστική μεταπήδηση σε ένα δευτερογενές επίπεδο όπου κυριαρχούν οι νοητικές λειτουργίες της αφηρημένης λογικής γνώσης. Ενδεικτικό παράδειγμα της δυσκολίας σύνθεσης της εικόνας και της μαθηματικής έννοιας και του ορισμού, αποτελεί το γεωμετρικό σημείο: Ενώ στο γεωμετρικό του ορισμό το σημείο είναι μια οντότητα μηδενικής διάστασης, στη γραφική του αναπαράσταση σημειώνεται με μια θέση στο δισδιάστατο χώρο. Δηλαδή, στο τρόπο παρουσίασής του περιέχει διαστάσεις. Εδώ, χάνεται η ιδεατή καθαρότητα της εικονικής έννοιας και αυτό αποτελεί μια

πηγή γνωστικής σύγκρουσης. Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, ένα οποιοδήποτε σχέδιο δεν αποτελεί από μόνο του γεωμετρική εικόνα, αλλά απλά ένα γράφημα. Η γεωμετρική εικόνα είναι μια πνευματική εικόνα, αφηρημένη και ιδεατή, οι ιδιότητες της οποίας έχουν απολύτως προσδιορίζονται από τον ορισμό.

2. Η απόδειξη στο εννοιολογικό πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας: Επιστημολογικές αποσαφηνίσεις και η διδακτική της σημασία.

Πιθανόν η αρχική μαθηματική απόδειξη να είναι το «δεικνύναι, το καθιστάν ορατόν το συγκεκριμένο» (Szabo 1973 σ. 258). Πρόκειται ουσιαστικά για «νοητικά πειράματα» που κυριαρχούν στα προ-ευκλείδεια μαθηματικά [Lakatos 1996, σ. 29]. Όμως, η ευκλείδεια απόδειξη ακολουθεί τον παραγωγικό τρόπο σκέψης: Αρχικά διατυπώνεται η πρόταση ως υπόθεση. Στη συνέχεια ερμηνεύεται η υπόθεση αυτή σε μια περίπτωση η οποία χαρακτηρίζεται ως «συγκεκριμένη». Με την χρήση του συγκεκριμένου παραδείγματος γίνεται η απόδειξη της υπόθεσης. Τέλος, η απόδειξη προσλαμβάνει γενική αποδεικτική ισχύ με την διατύπωση του «όπερ έδει δείξαι» [Szabo 1973, σ. 256].

Όπως ήδη αναφέρθηκε προηγούμενα, ο τρόπος ένταξης των σχημάτων στην αποδεικτική διαδικασία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας δείχνει ότι ο ρόλος τους δεν περιορίζεται μόνο σε παιδαγωγικούς σκοπούς αλλά αποτελούν μια ουσιώδη λογική συνιστώσα της αποδεικτικής διαδικασίας [Netz, 1999]. Όμως, η προσφυγή στο συγκεκριμένο σχήμα δεν ενέχει τον ρόλο της απόδειξης. Αν και είναι αναγκαία η συγκεκριμένη παράσταση και η απόδειξη προϋποθέτει την αισθητηριακή αντίληψη του σχήματος, προϋπάρχει δηλαδή μια οπτική απόδειξη της υπόθεσης, εν τούτοις, «το δεικνυόμενον με εμπειρικών και παραστατικών τρόπον, υπεστηρίζετο (...) βήμα προς βήμα, υπό μιας λογικής σκέψεως. Η συγκεκριμένη παράστασις απετέλει μόνον τον *πυρήνα της αποδείξεως*» [Szabo 1973, σ. 260].

Στο χώρο της μαθηματικής παιδείας έχει αναπτυχθεί μια συζήτηση σχετικά με την αναγκαιότητα διδασκαλίας της ευκλείδειας γεωμετρίας. Αν και η υποθετικο-παραγωγική μέθοδος έχει ταυτιστεί με τα αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά και με τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, εν τούτοις αυτά

κατηγορούνται από τους οπαδούς της αυστηρότητας στην απόδειξη ότι χρησιμοποιούν πολύ συχνά την γεωμετρική ενόραση στις αποδείξεις. Προκύπτει λοιπόν ένα πρόβλημα νομιμοποίησης της απόδειξης, των συνθηκών που ευθύνονται γι' αυτή τη νομιμοποίηση, των δισταγμών και των δυσκολιών που συνοδεύουν την εμφάνισή της.

Ο Ευκλείδης, για παράδειγμα, χρησιμοποιεί για την απόδειξη μιας πρότασης στην ισότητα των τριγώνων, την *επίθεση* (την επικάλυψη) του ενός πάνω στο άλλο. Ο συλλογισμός της απόδειξής του στηρίζεται άμεσα πάνω στο σχήμα. Όμως το σχήμα «δεν είναι απλό υπόβαθρο του διαλογισμού, παριστάνει το αντικείμενο πάνω στο οποίο φέρεται ο διαλογισμός και είναι μέσα από την ενόραση του αντικειμένου που σχηματίζεται ο διαλογισμός» [Bkouche 1992, σ. 72]. Αντίθετα, η αλγεβρική απόδειξη δεν έχει την θεωρητική ανάγκη της παράστασης των αντικειμένων, «είναι καθαρά τυπική, κάθε ενόραση έχει χαθεί και γι' αυτό έχει χαθεί και κάθε σημασία που είναι διαφορετική απ' αυτή που συνδέεται με τον χειρισμό των συμβόλων. Αλλά αυτό που χάνει σε σημασία, το κερδίζει από την δυναμικότητα του νοήματος ...Συνεπώς ο διαλογισμός θα μετατραπεί, τουλάχιστον θεωρητικά, σε μια καθαρή σύνταξη. Έτσι μετασχηματισμοί των αντικειμένων και των μεθόδων οδηγούν οι μεν στους δε θέτοντας ξανά την αιτιολόγηση των συνθηκών νομιμοποίησης των αποδείξεων» [Bkouche 1992, σ. 74-78].

Η πολλαπλότητα των αποδείξεων θέτει το πρόβλημα της *ιστορικότητάς* τους και των συνθηκών που συντελούν κάθε φορά στη νομιμοποίησή τους. Η διερεύνηση αυτών των συνθηκών βοηθούν στην κατανόηση της εξέλιξης της επιστήμης των Μαθηματικών, μέσα από τα προβλήματα που τίθενται και την προσπάθεια επίλυσής τους. Γιατί, κάθε φορά που μπαίνει σε αμφισβήτηση το κύρος των αποδείξεων, δημιουργείται η αναγκαιότητα νέων προσεγγίσεων.

Η ιστορική προσέγγιση της έννοιας της απόδειξης, που θίγεται εδώ, δεν στοχεύει στην δημιουργία μιας σχετικιστικής αντίληψης, όσον αφορά την νομιμότητα της απόδειξης. Απεναντίας μας εξοπλίζει με ένα ερμηνευτικό πλαίσιο που «μας κάνει να αμφιβάλλουμε σοβαρά για την συσσωρευτική διαδικασία, μέσα απ' την οποία υποτίθεται ότι οι μεμονωμένες συνεισφορές στην επιστήμη συντίθενται» [Kuhn 1987, σ. 64]. Η ιστορική προσέγγιση

μας τονίζει ότι «οι συνθήκες νομιμοποίησης, οι απαιτήσεις της αυστηρότητας, είναι δεμένες με την ίδια τη φύση των προβλημάτων που έχουν θιχθεί και με τις συνθήκες που επιτρέπουν να επικυρώσουμε την βεβαιότητα των αναφερόμενων εκφωνήσεων, βεβαιότητα που κατασκευάζεται στο γενικό πλαίσιο στο οποίο τα θιγόμενα προβλήματα έχουν μελετηθεί και επιλυθεί» [Bkouche 1991, σ. 81].

Επιστρέφοντας ξανά στις αποδείξεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που στηρίζονται σε μια οπτική θεώρηση του σχήματος, πρέπει να επισημάνουμε πως εδώ ο διαλογισμός εδράζεται στην αισθητηριακή αντίληψη του αντικειμένου, αλλά παράλληλα αυτονομείται απ' αυτήν. Διαφορετικά θα είχαμε μια παθητική θεώρηση του σχήματος που δεν θα συνέβαλε στην οικοδόμηση καινούργιας γνώσης. Γιατί «οι γνώσεις μας δεν προέρχονται ούτε μόνο από την αίσθηση ούτε μόνο από την αισθητηριακή αντίληψη, ...Δεν γνωρίζουμε, πράγματι, ένα αντικείμενο, παρά μόνο ενεργώντας πάνω του και μεταμορφώνοντάς το...» [Piaget 1981, σ. 71-72]. Σε αντίθεση λοιπόν με μια περιορισμένη άποψη του ορθολογισμού, που υποστηρίζει τον ολοκληρωτικό διαχωρισμό του διαλογισμού από το αισθητό, η Ευκλείδεια αντίληψη νομιμοποιεί τα επιχειρήματά της από την αισθητή θεώρηση του αντικειμένου, που παριστάνεται με το σχήμα και από την άλλη, η ανάπτυξη αυτή του διαλογισμού είναι που προσδίδει έναν αφηρημένο χαρακτήρα στο συγκεκριμένο σχήμα. Έτσι, «οφείλουμε να αποκαταστήσουμε το 'μάτι' σαν ένα νόμιμο όργανο της ανακάλυψης και του συμπερασμού» [Davis 1993, σ. 342].

Από τα παραπάνω μπορούμε να συνάγουμε ότι το αφηρημένο μαθηματικό αντικείμενο δεν είναι κάτι το σταθερό και δεδομένο, αλλά οικοδομείται κατά τα στάδια της γνωστικής ανάπτυξης που μας επιτρέπουν να γνωρίσουμε τις ιδιότητές του. Επιπρόσθετα, η συγκρότηση της λογικής γνώσης εδράζεται πάνω στο αισθητό και το εμπειρικό. Συνεπώς στο πεδίο της διδακτικής πράξης μπορούμε να αποδεχτούμε ότι:

- i. Οι αποδείξεις ενδέχεται να είναι πολλαπλές, τόσο για λόγους που συνδέονται με την ηλικία και το επίπεδο γνωστικής ανάπτυξης, όσο και γιατί συντελείται ένας συνεχής μετασχηματισμός στον τρόπο ύπαρξης της γνώσης παράλληλα με την ανάπτυξή της.

- ii. Η «απόδειξη μπορεί να θιχθεί αρκετά νωρίς στην διδασκαλία» [Bkouche 1991, σ. 85] αρκεί η κατασκευή του μαθηματικού αντικειμένου να εναρμονίζεται με το επίπεδο γνωστικής ανάπτυξης του μαθητή.
- iii. Τέλος, η οικειοποίηση του μαθηματικού αντικειμένου που περιγράφεται από το σχήμα δεν είναι αυθόρμητη συνέπεια της εισαγωγής των μαθημάτων Γεωμετρίας, αλλά μιας συστηματικής ενασχόλησης και διδασκαλίας.

3. Η "επίθεση" ως αποδεικτική μέθοδος και η έννοια του εμβαδού

3.1 Η αρχή της «επίθεσης»

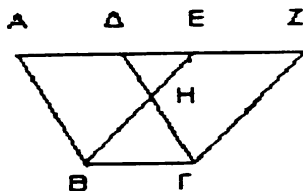
Όπως ήδη αναφέρθηκε, μια βασική αρχή της ευκλείδειας γεωμετρίας για τη σύγκριση δύο μεγεθών είναι η *αρχή της επίθεσης* (της επικάλυψης). Σύμφωνα με την αρχή της επίθεσης σαν ίσα θα οριστούν δύο μεγέθη που, επιθέτοντας το ένα στο άλλο, διαπιστώνουμε την ισότητά τους [Bkouche 1992, σ. 80-81]. Η επικάλυψη αποτελεί μια συνήθη σχολική πρακτική στη σύγκριση γεωμετρικών σχημάτων ήδη από το Δημοτικό. Όμως, ενώ για τις μικρότερες σχολικές ηλικίες έχει τα χαρακτηριστικά της άμεσης δράσης, για τις μεγαλύτερες η δράση αυτή είναι μια νοητική διεργασία κατά την οποία διερευνώνται οι όροι και οι συνθήκες για την σύγκριση.

Πράγματι, ενώ η Γεωμετρία φαίνεται να στηρίζεται σε μια εμπειρική άποψη που συσχετίζει ένα στερεό σώμα και την *κίνησή* του πάνω σ' ένα άλλο προκειμένου να συμπεράνουμε την ισότητά τους, στην πραγματικότητα ως ένα υποθετικό-παραγωγικό σύστημα στοχεύει στην διατύπωση κανόνων που θα προβλέπουν «εκ των προτέρων τις συνθήκες της ισότητας» [Bkouche 1992, σ. 82] των συγκρινόμενων σωμάτων. Τα κριτήρια της ισότητας που διατυπώνονται επιτρέπουν την απαλοιφή της κίνησης. Έχουμε δηλαδή μια προσπάθεια μεταφοράς από τα εμπειρικά δεδομένα στην οικοδόμηση λογικής γνώσης, δηλαδή γνώσης που στηρίζεται σε λογικές πράξεις.

3.2 Οι διδακτικές προοπτικές μιας ιστορικής “ανάγνωσης” της έννοιας του εμβαδού.

Χρησιμοποιούμε εδώ μια διασταλτική ερμηνεία της έννοιας της επίθεσης που περιλαμβάνει και την έννοια του εμβαδού. Εξάλλου, ο λογισμός που αναπτύσσεται πάνω στα εμβαδά δεν σχετίζεται με την σύγχρονη αλγεβρική του έκφραση, αλλά «άμεσα πάνω στη φύση των μεγεθών» [Bkouche 1992, σ. 85] και σε ένα «ποιοτικό» προσδιορισμό τους. Ο Ευκλείδης για να δείξει ότι δύο σχήματα έχουν ίσα εμβαδά «απόδειχνε ότι το ένα απ' αυτά μπορεί να χωριστεί σε μέρη τέτοια ώστε, αν κατάλληλα αναπροσαρμοστούν, να παράγουν το άλλο σχήμα» [Bunt, Jone & Bedient 1981, σ. 205]. Η μέθοδος της σύγκρισης εμβαδών στην Ευκλείδεια Γεωμετρία στηρίχθηκε ουσιαστικά στην πρόταση 35 των ‘Στοιχείων’ του Ευκλείδη:

“τα παραλληλόγραμμα τα επί της αυτής βάσεως όντα και εν ταις αυταίς παραλλήλοις ίσα αλλήλοις εστίν (Τα παραλληλόγραμμα τα έχοντα την αυτήν βάση και ευρισκόμενα μεταξύ των αυτών παραλλήλων είναι μεταξύ τους ίσα)” [Ευκλείδου Γεωμετρία 1952, Στοιχείων Βιβλίων Ι, σ. 72-73] (σχήμα 1).



Σχήμα 1

Το παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ είναι ισοδύναμο με το παραλληλόγραμμα ΕΒΓΖ.

Η πρόταση αυτή θα συνδυαστεί με τις “κοινές έννοιες” 2, 3 και 7:

Κοινή έννοια 2: “Και εάν από ίσων ίσα προστεθεί τα όλα εστίν ίσα (και εάν εις ίσα προστεθούν ίσα τα προκύπτοντα είναι μεταξύ των ίσα)”.

Κοινή έννοια 3: “Και εάν ίσοις από ίσα αφαιρεθή, τα καταλειπόμενά εστίν ίσα (και εάν από ίσων αφαιρεθούν ίσα, τα υπόλοιπα είναι μεταξύ των ίσα)”.

Κοινή έννοια 7: “Και τα εφαρμόζοντα επ’ ἀλλήλα είναι ίσα μεταξύ των (και τα εφαρμόζοντα επ’ ἀλλήλα είναι ίσα μεταξύ των)” [Ευκλείδου Γεωμετρία 1952, Στοιχείων Βιβλίον Ι, σ. 38-39].

Επιπρόσθετα, γίνεται χρήση της πρότασης 1 του VI βιβλίου των ‘Στοιχείων’:

“Τα τρίγωνα και τα παραλληλόγραμμα το υπό το αυτό ύψος όντα προς ἀλλήλα εστίς ως αι βάσεις (τα τρίγωνα και τα παραλληλόγραμμα τα οποία είναι υπό το αυτό ύψος, είναι μεταξύ των ως αι βάσεις)” [Ευκλείδου Γεωμετρία 1952, Στοιχείων Βιβλίον VI, σ. 69].

Παρατηρούμε εδώ ότι η έννοια της *ισότητας* που περιέχεται στην πρόταση 35, καθώς και στις κοινές έννοιες 2, 3 και 7 δεν αναφέρεται στην αριθμητική ισότητα που προκύπτει από τη μέτρηση του εμβαδού και οπωσδήποτε δεν σημαίνει αριθμητική ισοδυναμία επιφανειών. «Στην πραγματικότητα η έννοια της ισοδυναμίας δεν φαίνεται να είναι βασική έννοια των *Στοιχείων*, αφού ο Ευκλείδης δεν χρησιμοποιεί λέξη που να αναφέρεται σε αυτή» [Fowler 1987, σ. 11]. Παρατηρούμε δηλαδή, ότι στην διαδικασία της σύγκρισης των επιφανειών στην Γεωμετρία του Ευκλείδη, διατηρούνται τα φυσικά χαρακτηριστικά της έννοιας της επιφάνειας.

Τα μαθηματικά στις δυτικές κοινωνίες αναπτύσσονται ήδη από τον 16^ο αιώνα σε μια προοπτική αριθμητικοποίησης, με αποκορύφωμα την αριθμητική τυποποίηση του 19ου και 20ου αιώνα που συναντάμε στον κλάδο της μαθηματικής ανάλυσης. Αυτή η τάση της αριθμητικοποίησης διεισδύει σε όλους τους κλάδους των μαθηματικών. Στην Γεωμετρία, για παράδειγμα, «οι ευθείες αντιμετωπίζονται ως ‘μήκος’, το ‘εμβαδόν’ ενός ορθογωνίου γίνεται το γινόμενο των μηκών, της βάσης και του ύψους και αυτή η αντίληψη προσδιορισμού επεκτείνεται στο εμβαδόν των περισσότερων δισδιάστατων σχημάτων» [Fowler 1987, σ. 8-9]. Η λογική αυτή επεκτείνεται και στα τρισδιάστατα σχήματα και βέβαια στις καθαρά αλγεβρικές κατασκευές των ν-διάστατων ($\nu > 3$) σχημάτων, όπου οι ιδιότητές τους εκφράζονται αλγεβρικά. Όμως, «τα Ελληνικά Μαθηματικά, μέχρι τον 2ο πχ. αιώνα, είναι σε μεγάλο βαθμό διαφορετικά» και «φαίνονται να είναι απολύτως μη-αριθμητικοποιημένα» [Fowler 1987, σ. 10]. Έτσι, θα ήταν λάθος κατά την άποψή μας να βλέπουμε στην ευκλείδεια γεωμετρία «το

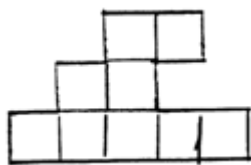
παρελθόν του πεδίου της να αναπτύσσεται γραμμικά προς τη σημερινή πλεονεκτική θέση (...). Με την κατάλληλη επιλογή και με την παραποίηση, οι επιστήμονες παλιότερων εποχών παρουσιάζονται να έχουν εργαστεί πάνω στο ίδιο σύνολο σταθερών κανόνων, που έφτασαν να φαίνονται επιστημονικά έγκυροι μετά την πιο πρόσφατη (επιστημονική) επανάσταση στη θεωρία και τη μέθοδο» [Kuhn 1987, σ. 217].

Τις απόψεις που διατυπώθηκαν παραπάνω για τα ειδικά χαρακτηριστικά της ευκλείδειας γεωμετρίας και της διδασκαλίας της προσπαθήσαμε να αποτυπώσουμε σε έρευνά μας με μαθητές και μαθήτριες της τελευταίας τάξης του Δημοτικού και της πρώτης τάξης του Γυμνασίου¹. Οι μαθητές και μαθήτριες καλέστηκαν να αντιμετωπίσουν προβλήματα μέτρησης επιφανειών και συμμετείχαν σε μια διδασκαλία όπου τονίστηκαν τα εννοιολογικά χαρακτηριστικά της διαδικασίας μέτρησης επιφανειών επιπέδων σχημάτων, δηλαδή τονίστηκε:

- *Η μέθοδος σύγκρισης επιφανειών που χρησιμοποιείται στο θεωρητικό πλαίσιο της ευκλείδειας γεωμετρίας, σύμφωνα με την οποία, όταν θέλουμε να δείξουμε ότι δύο σχήματα έχουν ίσα εμβαδά, δείχνουμε ότι το ένα απ' αυτά μπορεί να χωριστεί σε μέρη τέτοια ώστε, αν κατάλληλα ανασυντεθούν, να δημιουργήσουν το άλλο σχήμα.*
- *Η αρχή της «επίθεσης», σύμφωνα με την οποία η σύγκριση δύο μεγεθών θα επιτευχθεί επιθέτοντας το ένα πάνω στο άλλο. Εδώ χρησιμοποιήσαμε μια διασταλτική ερμηνεία της έννοιας της "επίθεσης" που εμπεριέχει και την μέτρηση/επικάλυψη επιφανειών.*
- *Τέλος, στη μέτρηση χρησιμοποιήθηκαν εργαλεία μέτρησης που προσιδιάζουν στις μετρούμενες επιφάνειες. Συγκεκριμένα οι μαθητές/τριες προτρέπονται να χρησιμοποιήσουν για την μέτρηση το τετραγωνικό εκατοστό που είναι σχεδιασμένο στο φύλλο εργασίας που τους δίνεται. Τους δίνεται, επίσης και ένας αβαθμολόγητος χάρακας (κανόνας) για την διευκόλυνση στην χάραξη ευθειών.*

¹ Αναλυτικά στοιχεία για τα χαρακτηριστικά της έρευνας βρίσκονται στο: Κ. Ζαχάρος, 2000.

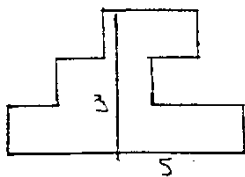
Η ανάλυση και αξιολόγηση των δεδομένων έδειξαν ότι τα προτεινόμενα εργαλεία μέτρησης που διέθεταν οι μαθητές και μαθήτριες, «υπέδειξαν» στρατηγικές αντιμετώπισης των προβλημάτων και επηρέασαν την οργάνωση της δραστηριότητάς τους, γεγονός που απαντάται και σε άλλες έρευνες με ανάλογη προοπτική [Nunes, et al. 1993]. Επιπλέον, διαπιστώθηκε η θετική συμβολή της διαδικασίας μέτρησης επιφανειών με επίθεση (επικάλυψη). Οι κυρίαρχες στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν από τους μαθητές και τις μαθήτριες περιείχαν τον τετραγωνισμό των επιφανειών και την απαρίθμηση των τετραγωνικών μονάδων όπως, για παράδειγμα, φαίνεται στο σχήμα 2.



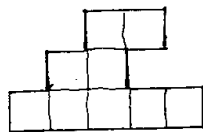
Σχήμα 2

Η στρατηγική της επικάλυψης που εφαρμόζεται από τους μαθητές και τις μαθήτριες

Αντίθετα, οι μαθητές και μαθήτριες του δείγματος που δεν είχαν υποβληθεί στην ειδική διδασκαλία, αλλά διδάχτηκαν την ενότητα της μέτρησης επιφανειών με έμφαση στη χρήση των τύπων, χρησιμοποίησαν κύρια πολλαπλασιαστικές μεθόδους. Ο τύπος που απαντάται εδώ συχνά είναι ο τύπος $E = \text{βάση} \times \text{ύψος}$ ή $E = \text{μήκος} \times \text{πλάτος}$, που χρησιμοποιείται ακόμη και σε περιπτώσεις που η εφαρμογή του είναι αδύνατη ή οδηγεί σε αντιφατικά αποτελέσματα. Για παράδειγμα, το εμβάδόν του παραπάνω σχήματος μερικές φορές υπολογίζεται με τη χρήση του τύπου $3 \times 5 = 15 \text{cm}^2$ (σχήμα 3), ενώ άλλες φορές θα υπολογιστεί από τον ίδιο μαθητή με δυο τρόπους: με τον τετραγωνισμό και την απαρίθμηση των τετραγώνων που θα βρεθεί 9cm^2 , ενώ πολλαπλασιαστικά θα βρεθεί ίσο με $5 \times 4 = 20 \text{cm}^2$ (όπου 5 είναι τα τετραγωνάκια που εφάπτονται της βάσης και 4 αυτά που απομένουν) (σχήμα 4).



Σχήμα 3



Σχήμα 4

Οι πολλαπλασιαστικές στρατηγικές

Οι μαθητές και μαθήτριες που χρησιμοποιούν τις στρατηγικές πολλαπλασιασμού για τον υπολογισμό των εμβαδών των σχημάτων, ενώ με τη χρήση των τύπων μπορεί να υπολογίσουν σωστά την αριθμητική έκφραση του εμβαδού στη περίπτωση του ορθογωνίου, συχνά δεν κατανοούν το φυσικό περιεχόμενο της αριθμητικής έκφρασης του εμβαδού. Για παράδειγμα, όταν τους δίνεται ένα ορθογώνιο διαστάσεων 3×5 , ενώ βρίσκουν ότι $E = 3 \times 5 = 15 \text{ cm}^2$, όταν ερωτώνται πόσα τετραγωνάκια του ενός εκατοστού χωράνε στην επιφάνεια του σχήματος, πολύ συχνά, αδυνατούν να δώσουν απαντήσεις ή δίνουν λαθεμένες.

3.3 Η οικοδόμηση των μονάδων μέτρησης επιφανειών.

Στην έρευνα της διδακτικής των μαθηματικών έχει επισημανθεί ότι η διαδικασία της επιλογής της μονάδας μέτρησης και της επικάλυψης της μετρούμενης επιφάνειας είναι ένα θεμελιακό συστατικό της παιδικής οικοδόμησης της έννοιας του εμβαδού [Wheatley et.al. 1996, Reynolds et.al. 1996]. Στις έρευνες αυτές προβάλλεται η άποψη ότι η οικοδόμηση και ο συντονισμός των μονάδων αποτελεί τη βάση της παιδικής έλλογης δραστηριότητας στο θέμα του εμβαδού. Η διαδικασία της οικοδόμησης μοναδιαίων ενοτήτων είναι μια πνευματική διαδικασία τεμαχισμού της εμπειρικής πραγματικότητας κατά την οποία απομονώνεται ένα χαρακτηριστικό της, ενώ την ίδια στιγμή το χαρακτηριστικό αυτό εντάσσεται σε μια ολιστική προοπτική. Στους ψυχολογικούς μηχανισμούς που λειτουργούν εδώ εντοπίζονται δύο στρατηγικές προσέγγισης που λειτουργούν παράλληλα: Στη μια τα γεωμετρικά σχήματα γίνονται αντιληπτά ως *ολότητες*, δηλαδή ως ευρύτερες γεωμετρικές μονάδες. Στην

άλλη, το γεωμετρικό σχήμα «κατακτάται» σταδιακά μονάδα-μονάδα. Στην ανάλυση της παραπάνω πορείας διακρίνονται διάφορα επίπεδα νοητικών λειτουργιών, όπως:

- η οικοδόμηση ενός ειδώλου του σχήματος,
- η δημιουργία ενός νοητικού «καλύμματος» της επιφάνειας,
- η οικοδόμηση ενός επαναλαμβανόμενου προτύπου που θα αποτελέσει τη μοναδιαία επιφάνεια, και τέλος,
- ο συντονισμός του επιλεγμένου προτύπου με το «κάλυμμα».

Επιχειρώντας να επικαλύψουν ένα ιδιαίτερο σχήμα οι μαθητές/τριες τυποποιούν την πρόθεση επικάλυψης αυτού του σχήματος και παράλληλα δημιουργούν ένα πρότυπο-μονάδα που θα χρησιμοποιηθεί στην επικάλυψη [Reynolds 1996].

Πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι η επιλογή της τετραγωνικής επιφάνειας που έχει καθιερωθεί ως μονάδα μέτρησης επιφανειών δεν είναι μια αυτονόητη και αυθόρμητη επιλογή των παιδιών, όταν αυτά δεν έχουν εξοικειωθεί με τις διαδικασίες μέτρησης που απαντώνται στη θεσμοθετημένη εκπαίδευση. Σε έρευνες που διερευνούν τις επιλογές μονάδων μέτρησης που κάνουν οι μαθητές και μαθήτριες από ένα σύνολο σχημάτων, καθώς και την πιθανή συσχέτιση του σχήματος της μετρούμενης επιφάνειας με το σχήμα της επιλεγμένης μονάδας [Maher & Beattys, 1986, Heraud, 1987], διαπιστώθηκε ότι τα παιδιά επιλέγουν κάθε φορά ένα μοναδικό τύπο σχήματος ως μονάδα μέτρησης και πως το σχήμα της μετρούμενης επιφάνειας επηρεάζει την επιλογή της μονάδας. Η μονάδα μέτρησης έχει, συνήθως, το σχήμα της μετρούμενης επιφάνειας.

Σύνοψη

Στην παρουσίασή μας εδώ προσπαθήσαμε να αναδείξουμε τη σημασία της απόδειξης στο πλαίσιο του θεωρητικού προτύπου της ευκλείδειας γεωμετρίας και αναφερθήκαμε στον ειδικότερο ρόλο του σχήματος στη διαδικασία αυτή. Υπογραμμίσαμε τον ρόλο της απόδειξης στην διαδικασία ανάπτυξης της γνώσης και τονίσαμε την παιδαγωγική συνεισφορά στρατηγικών διδασκαλίας που αντλούν στοιχεία από την ιστορική εξέλιξη των γεωμετρικών εννοιών. Εδώ παρουσιάσαμε την περίπτωση της μέτρησης

της επιφάνειας επιπέδων σχημάτων με τη στρατηγική της επικάλυψης που παραπέμπει στη γενική στρατηγική της «επίθεσης» που χρησιμοποιείται στην ευκλείδεια γεωμετρία για την σύγκριση μεγεθών. Πρόθεσή μας ήταν να αναδειχθεί η θετική συνεισφορά διδακτικών πρακτικών που εμφορούνται από τις παραπάνω ιδέες.

Βιβλιογραφικές αναφορές

- BKOUICHE, R., 1991. Για την απόδειξη. *Τετράδια Διδακτικής των Μαθηματικών*, τεύχος 9, σ. 79-87, Θεσσαλονίκη.
- BKOUICHE, R., 1992. Προβληματισμοί για την ιστορία της Γεωμετρίας. *Τετράδια Διδακτικής των Μαθηματικών*, τεύχος 10-11 σ. 67-130, Θεσσαλονίκη.
- BUNT, L., JONES, P., & BEDIENT, J., 1981. *Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών μαθηματικών*. Γ.Α.Πνευματικός, Αθήνα.
- DAVIS, P., 1993. Visual Theorems. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 24, no. 4, pp. 333-344. [notes 7, αρ. καταλ. 57].
- HERAUD, B., 1987. *Conceptions of Area Units by 8-9 Year Old Children*. PME XI, vol. III, pp. 299-304, Montreal, Canada.
- FISCHBEIN, E., 1993. The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 24, no. 2, pp. 139-162.
- FOWLER, D., 1987. *The Mathematics of Plato's Academy*. Clarendon Press, Oxford.
- NUNES, T., LIGHT, P., & MASON, J., 1993. Tools for thought: the measurement of length and area. *Learning and Instruction*, vol. 3, pp. 39-54, Great Britain.
- KUHN, S.T., 1987. *Η δομή των επιστημονικών επαναστάσεων*. Εκδόσεις Σύγχρονα Θέματα, β' έκδοση, Θεσσαλονίκη.
- LAKATOS, I., 1996. *Αποδείξεις και Ανασκευές. Η λογική της Μαθηματικής Ανακάλυψης*. Εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα.
- MAHER, A., C. & BEATTYS, 1986. *Examining the Construction of Area and Its Measurement by Ten to Fourteen Year Old Children*. In G. Lappan & R. Even (Eds.), proceedings of the 8th annual meeting of the N. A. branch of the P.M.E., East Lansing: Michigan State, pp. 163-168.

- NETZ, R., 1999. Greek Mathematical Diagrams: Their Use and Their Meaning. *For the learning of mathematics*, vol. 18, no. 3, pp.33-39.
- PIAGET, J., 1981. *Ψυχολογία και επιστημολογία*. Έκδοση Υποδομή, Αθήνα.
- REYNOLDS, A., & WHEATLEY, G., 1996. Elementary Students' Construction and Coordination of Units in an Area Setting. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 27, no. 5, pp. 564-581.
- SZABO, A., 1973. *Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών*. Εκδόσεις Τεχνικού Επιμελητηρίου Ελλάδος, Αθήνα.
- WHEATLEY, G., & REYNOLDS, A., 1996. The construction of abstract units in geometric and numeric settings. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 30, no. 1, pp. 67-83
- ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, 1952. *Στοιχείων βιβλία 1,2,3,4*. Μετάφραση-σχόλια Ε. Σ. Σταμάτης, εκδ. Ν. Α. Σακκούλα, Αθήνα.
- ZAXAPOΣ, K., 2000. *Η συμβολή πολιτισμικών και ιστορικών παραμέτρων στο χειρισμό προβλημάτων της Γεωμετρίας: Μια εμπειρική έρευνα για τον τρόπο με τον οποίο μαθητές και μαθήτριες της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης αντιμετωπίζουν προβλήματα μέτρησης επιφανειών*. Ερευνητική εργασία για την Διδακτορική Διατριβή, που εκπονήθηκε στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.

Η ιστορία στο πυθαγόρειο θεώρημα

Κώστας Χατζηκυριάκου

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας.

1. Το πυθαγόρειο θεώρημα: η διατύπωσή του και η θέση του στα Στοιχεία του Ευκλείδη

Το πυθαγόρειο θεώρημα είναι η πρόταση μζ' του πρώτου βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη: «Εν τοις ορθογωνίοις τριγώνοις το από της την ορθήν γωνίαν υποτεινούσης πλευράς τετράγωνον ίσον εστί τοις από των την ορθήν γωνίαν περιεχουσών πλευρών τετραγώνοις». Στη νεοελληνική γλώσσα συνήθως το αποδίδουμε με την πρόταση: «Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτεινούσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του», απαλύνοντας τον γεωμετρικό χαρακτήρα της αρχαιοελληνικής διατύπωσης. Αν θέλαμε να μείνουμε πιστοί στο γεωμετρικό ύφος του αρχαίου κειμένου θα μεταφράζαμε: «Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο με πλευρά την υποτεινούσα είναι ίσο προς τα τετράγωνα που έχουν πλευρές τις δύο καθέτους». Δηλαδή, το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά την υποτεινούσα είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές τις κάθετες πλευρές του τριγώνου. Μολονότι ο Ευκλείδης δεν αναφέρεται άμεσα σε εμβαδά, κατ' ουσίαν αποδεικνύει την πρόταση μζ' συγκρίνοντας εμβαδά τριγώνων, τετραγώνων και ορθογωνίων παραλληλογράμμων στο σχήμα που είναι γνωστό ως «καρέκλα της νύφης», της «φορτωμένης γριας» κ.λπ¹.

Η αμέσως επόμενη πρόταση του πρώτου βιβλίου, μη', είναι η αντίστροφη του πυθαγορείου θεωρήματος: «Αν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο μιας

¹ Βλ. λ.χ. στο *Ευάγγελος Σταμάτης, Ευκλείδου Γεωμετρία*, τ.1, σ. 94-6, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα 1975.

πλευράς ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών, τότε αυτό είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά αυτή». Ο Ευκλείδης την αποδεικνύει με την προσφιλή του μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής². Επομένως η πυθαγόρεια σχέση χαρακτηρίζει ακριβώς τα ορθογώνια τρίγωνα.

Ο Ευκλείδης αποδεικνύει ξανά το πυθαγόρειο θεώρημα –σε γενικευμένη μορφή– στο έκτο βιβλίο ως πρόταση λα': «Εν τοις ορθογωνίοις τριγώνοις τό από της την ορθήν γωνίαν υποτεινούσης πλευράς είδος ίσον εστί τοις από των την ορθήν γωνίαν περιεχουσών πλευρών είδεσι τοις ομοίοις τε και ομοίως αναγραφόμενοις», δηλαδή «Στα ορθογώνια τρίγωνα το σχήμα με βάση την υποτεινούσα είναι ίσο με το άθροισμα των ομοειδών με αυτό σχημάτων με βάση τις δύο κάθετες πλευρές»³. Η απόδειξη του Ευκλείδη είναι ουσιαστικά η απόδειξη του θεωρήματος μέσω ομοιότητας τριγώνων που συναντάμε συχνά σε εγχειρίδια γεωμετρίας⁴.

2. Στοιχεία της ιστορίας του πυθαγορείου θεωρήματος⁵

Στην ελληνική παράδοση, το πυθαγόρειο θεώρημα αποδίδεται –όπως μαρτυρεί και η ονομασία του– στον Πυθαγόρα (περίπου 572-497 π.Χ.). Ωστόσο παρά τους ποικίλους σχετικούς μύθους που διασώζονται δεν γνωρίζουμε ούτε τι ακριβώς απέδειξε αυτός ούτε πώς. Γνωρίζουμε ότι οι Πυθαγόρειοι γνώριζαν τύπο για τον υπολογισμό των πυθαγορείων τριάδων, αλλά η πυθαγόρεια σχέση ήταν γνωστή και σε άλλους πολιτισμούς πριν από την εποχή που έζησε ο Πυθαγόρας. Παραδείγματος χάρη, στην παλαιοβαβυλωνιακή πλάκα BM 85196 εμφανίζεται το πρόβλημα της δοκού

² Ο.π., σ. 96

³ Βλ. στο Ευάγγελος Σταμάτης, *Ευκλείδου Γεωμετρία*, τ.2, σ. 126-27, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα 1953.

⁴ Βλ. στο *Ευκλείδεια Γεωμετρία*, Ο.Ε.Δ.Β. των Γ. Θωμαΐδη, Θ. Ξένου, Γ. Παντελίδη, Α. Πούλου, Γ. Στάμου, σ. 210.

⁵ Για την ιστορία του πυθαγορείου θεωρήματος, βλ. . πρόχειρα Carl B. Boyer & Uta C. Merzbach, *Η Ιστορία των Μαθηματικών*, (μετ. Βίβιαν Κουσουλάκου), εκδ. Γ.Α. Πνευματικού, σ. 39-43, 83-84, σ.123 και σ. 222-3. Εδώ ακολουθώ το Victor J. Katz, *A History of Mathematics, An Introduction*, 2nd ed., Addison-Wesley σ. 30-35 (Το βιβλίο αυτό, σε δική μου μετάφραση, θα κυκλοφορήσει από τις Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης).

που επιλύεται με τη χρήση της πυθαγόρειας σχέσης, ενώ οι πυθαγόρειες τριάδες εμφανίζονται στην περίφημη πλάκα Plimpton 322. Στις ινδικές *Σουλβασούτρας* (κανόνες των σκοινιών) το θεώρημα υπονοείται στην κατασκευή: «χορδή που τεντώνεται (σταυροειδώς) περί ενός τετραγώνου παράγει διπλάσιο εμβαδόν». Στο ίδιο κείμενο υπάρχουν παραδείγματα πυθαγόρειων τριάδων, λόγου χάρη η (12, 35, 37). Στο ένατο κεφάλαιο του κινεζικού *Τσιου-Τσανγκ Σουάν-Σου* (*Εννέα Κεφάλαια για τη Μαθηματική Τέχνη*), τα προβλήματα 9 και 14, λόγου χάρη, είναι άμεσες εφαρμογές του πυθαγορείου θεωρήματος, ενώ τα προβλήματα που αφορούν μήκη ορθογωνίων οδηγούν σε ρητές απαντήσεις. Παραδείγματος χάρη, εμφανίζεται η πυθαγόρεια τριάδα (91, 60, 109). Μια ειδική περίπτωση του θεωρήματος, που εύκολα μπορεί να γενικευθεί, συναντάται στο κινεζικό *Τσου Πέι Σουάνγκ Τσίνγκ* (*Κλασική Αριθμητική του Γνώμονα και των Κυκλικών Ουράνιων Μονοπατιών*).

Το πυθαγόρειο θεώρημα είναι όντως πιθανό ότι οδήγησε στην έννοια του αρρήτου. Ωστόσο πώς έγινε αυτό δεν είναι άμεσα γνωστό και οι μόνες σχετικές νύξεις προέρχονται από τον Αριστοτέλη⁶. Από την άλλη, έχει υποστηριχθεί ότι η γεωμετρική γλώσσα των Ελλήνων αναπτύχθηκε ακριβώς για να μπορέσουν αυτοί να παρακάμψουν την αναφορά σε άρρητες ποσότητες, κάτι που αποφεύγεται αν αντί με μήκη εργαζόμαστε με «εμβαδά»⁷.

3. Το πυθαγόρειο θεώρημα και η ιστορία του στο ελληνικό αναλυτικό πρόγραμμα σήμερα

Το πυθαγόρειο θεώρημα δεν συμπεριλαμβάνεται στην ύλη του Δημοτικού σχολείου. Συμπεριλαμβάνεται ωστόσο στην ύλη των μαθηματικών της δευτέρας Γυμνασίου και φυσικά στην ύλη της γεωμετρίας του Λυκείου.

Η παράγραφος 3.1, *Οι Πραγματικοί Αριθμοί*, του βιβλίου *Μαθηματικά της Β' Γυμνασίου* (Ο.Ε.Δ.Β., 1996), αρχίζει με το πυθαγόρειο θεώρημα το οποίο

⁶ Αριστοτέλης, *Αναλυτικά Πρότερα*, ι. 23, 41 α 26-27.

⁷ Βλ. Lucas N. H. Bunt-Phillip S. Jones-Jack D. Bedient, *Οι Ιστορικές Ρίζες των Στοιχειωδών Μαθηματικών*, (μετ. Α. Φερεντίνου-Νικολακοπούλου), σ. 205-7, εκδ. Γ. Α. Πνευματικού, Αθήνα, 1981.

στην παράγραφο 3.2 χρησιμοποιείται στην ημιτελή εισαγωγή των πραγματικών αριθμών. Την παράγραφο 3.1 ακολουθεί ιστορικό σημείωμα που δεν συνδέεται οργανικά με τη διδασκαλία του θεωρήματος. Ανεκμετάλλευτο, λόγου χάρη, μένει το γεγονός ότι η παρουσιαζόμενη απόδειξη του πυθαγορείου θεωρήματος σίγουρα βασίζεται στην κινεζική «απόδειξη» που βρίσκουμε στο *Τσου Πέι*. Δεν γίνεται καμιά αναφορά στις πυθαγόρειες τριάδες που είναι δυνατό να βοηθήσουν και στην ιστορική τοποθέτηση του θεωρήματος και στην ενοποιημένη ανάπτυξη της γεωμετρίας, της τριγωνομετρίας και της άλγεβρας που ακολουθείται. Συνοπτικά, η χρήση της ιστορίας στο παρόν εγχειρίδιο δεν ανταποκρίνεται ούτε στις σύγχρονες αντιλήψεις για τη διδασκαλία των μαθηματικών ούτε σε εκείνες για τη διδασκαλία της ίδιας της ιστορίας.

4. Η αξιοποίηση της ιστορίας στη διδασκαλία του πυθαγορείου θεωρήματος

Στο περίφημο βιβλίο του *Toward a Theory of Instruction* (1966), ο Jerome Brunner, δείχνει πώς μπορεί να διδαχθεί -με ό,τι θα αποκαλούσαμε τεχνικές «γεωμετρικής άλγεβρας»- το δευτεροβάθμιο ανάπτυγμα $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ σε παιδιά του Δημοτικού σχολείου. Ωστόσο το ερώτημα γιατί κάτι πρέπει να διδαχθεί προηγείται του ερωτήματος πώς μπορεί ή πρέπει αυτό να διδαχθεί. Θα υποστηρίξω ότι η προσέγγιση που προτείνω, και η οποία συνδέει το πυθαγόρειο θεώρημα με την ύλη του Δημοτικού σχολείου, ανοίγει τον δρόμο για την ορθότερη διδασκαλία του θεωρήματος και στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο, τόσο από την πλευρά της ιστορίας όσο και από την πλευρά των μαθηματικών.

Ζητούμενο βέβαια δεν είναι η εισαγωγή της τάδε ή δείνα ύλης στο Δημοτικό σχολείο. Ζητούμενα είναι η καλή διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών και τεχνικών και, δεδομένης της δομής του εκπαιδευτικού συστήματός μας, ζητούμενη επίσης είναι μια προσέγγιση στα μαθηματικά που στο μεν Δημοτικό προετοιμάζει για τα μαθηματικά του Γυμνασίου, στο δε Γυμνάσιο δεν αγνοεί ό,τι συνέβη στο Δημοτικό, αλλά το χρησιμοποιεί γόνιμα για την περαιτέρω ανάπτυξη της λογικομαθηματικής σκέψης των μαθητών και μαθητριών.

Ειδικότερα, η κατανόηση της έννοιας του εμβαδού αποτελεί στόχο του αναλυτικού προγράμματος του Δημοτικού σχολείου. Όπως είναι γνωστό η ενασχόληση με την ενότητα αυτή στο σχολείο συχνά περιορίζεται στη διδασκαλία των τύπων για τον υπολογισμό εμβαδών επίπεδων σχημάτων και την απομνημόνευσή τους από τους μαθητές και τις μαθήτριες. Ωστόσο, στο πλαίσιο της διδασκαλίας του εμβαδού μπορεί να εισαχθεί η μελέτη του πυθαγορείου θεωρήματος (χωρίς κατ' ανάγκη άμεση αναφορά σε αυτό) ή ιδεών που δείχνουν προς αυτό. Το πυθαγόρειο θεώρημα ιστορικά είναι και θεώρημα για τα εμβαδά, όπως φαίνεται τόσο από την πρόταση μζ' του πρώτου βιβλίου όσο και από την λα' του έκτου βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Η εμβαδική προσέγγιση στο πυθαγόρειο θεώρημα αφενός βοηθά στην κατανόηση της έννοιας του εμβαδού, αφετέρου παρακάμπτει την έννοια του άρρητου αριθμού που δεν μπορεί να εισαχθεί νωρίς, προετοιμάζοντας ωστόσο τον δρόμο για τη μαθηματικά ορθή πραγμάτευσή του.

Η προσέγγιση στο πυθαγόρειο που θα αναπτύξω εκκινεί από το Δημοτικό σχολείο και φθάνει ως το Λύκειο. Αξιοποιεί διδακτικά την ιστορία του θεωρήματος και σε συνδυασμό με τη χρήση χειραπτικών μαθησιακών εργαλείων (manipulatives) μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές και τις μαθήτριες του Δημοτικού και του Γυμνασίου με παιδαγωγικά και μαθηματικά ορθό τρόπο στη μαθηματική αποδεικτική μέθοδο που εισάγεται αργότερα.

Η προσέγγιση αυτή πέρα από το ότι διευκολύνει τη συστηματική μελέτη του πυθαγορείου θεωρήματος και κάνει πιο ενδιαφέρουσα τη διδασκαλία του αποτελεί επίσης παράδειγμα διαθεματικής προσέγγισης στη διδασκαλία και μπορεί να βρει εφαρμογή τόσο στο πλαίσιο της εισαγόμενης «ευέλικτης ζώνης» όσο και στο πλαίσιο της διδασκαλίας μέσω «εργασιών» (projects).

Στην προτεινόμενη προσέγγιση οι πρακτικές και οι γνώσεις των μη ελληνικών πολιτισμών δεν υποτιμούνται ως τεχνικές και γνώσεις μιας δήθεν παιδικής ηλικίας της ανθρωπότητας που φθάνει στην ωριμότητά της με τον δυτικό πολιτισμό. Μια τέτοια προσέγγιση είναι άγονη, μετατρέπει την ιστορία των άλλων πολιτισμών σε σύνολο από γραφικές, άχρηστες πληροφορίες και τροφοδοτεί μοντέλα εθνοκεντρικής αντίληψης. Εδώ, οι μη ευκλείδειες προσεγγίσεις αντιμετωπίζονται ισότιμα και αναδεικνύεται η

παιδαγωγική τους αξία. Ανάλογα με το μαθησιακό πλαίσιο ορισμένες από τις λύσεις που έδωσαν μη ελληνικοί πολιτισμοί μπορεί να είναι παιδαγωγικά πιο πρόσφορες. Εκκινώντας από αυτές, μελετώντας τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά τους, συγκρίνοντάς τες με την αρχαιοελληνική προσέγγιση που επικράτησε, οι μαθητές και οι μαθήτριες κατανοούν τελικά καλύτερα το πυθαγόρειο καθώς κάτω από την κομψή αλγεβρική σχέση μεταξύ των μηκών των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου, που οι περισσότεροί μας τη θυμούνται τελικά ως μια «παραξενιά» των ορθογώνιων τριγώνων, ανακαλύπτουν πολλαπλά νοηματικά και σημειωτικά στρώματα.

5. Η χρήση της ιστορίας σε ενδεικτικές δραστηριότητες

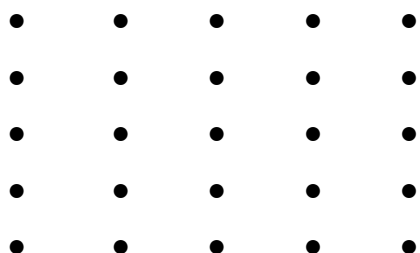
Ένα πολύ χρήσιμο χειραπτικό εργαλείο για τη διδασκαλία των εμβαδών είναι ο γεωπίνακας. Πρόκειται για μια επίπεδη επιφάνεια που φέρει συνήθως εικοσιπέντε «ραβδόκια». Συνοδεύεται από πολύχρωμα λαστιχάκια με τα οποία μπορεί κανείς να ορίσει ποικίλες περιοχές πάνω του τεντώνοντάς τα κατάλληλα. Το πλαστικό υλικό με το οποίο είναι συνήθως κατασκευασμένος ο γεωπίνακας και ο έντονος χρωματισμός του τον καθιστούν εμφανισιακά ελκυστικό. Ωστόσο στην επιφάνειά του και στις δραστηριότητες που μπορεί να σχεδιαστούν γι' αυτόν, είναι δυνατόν να αναγνωρίσουμε την αρχαία χαρακτηριστική επιφάνεια των μαθηματικών, την άμμο, και τις αρχαίες πρακτικές των αιγύπτιων αρπεδοναπτών, των χωρομετρών της εποχής. Πρακτικές με μακρά διάρκεια που, παρά τον σκεπτικισμό του van der Warden⁸, ταιριάζουν με τις σύγχρονες πρακτικές βαλκάνιων ημιεγγράμματων μαστόρων. Από την άλλη, ο γεωπίνακας δείχνει στην κατεύθυνση του χαρτιού μιλιμετρέ που προσφέρεται σε πιο αφηρημένη χειρογραφική χρήση. Εν ολίγοις ο γεωπίνακας είναι ένα εργαλείο επάνω στο οποίο είναι δυνατό να δούμε ποικίλες σημειωτικές πρακτικές της γεωμετρικής επιστημικής παράδοσης.

Το παιδί, παίζοντας με τον γεωπίνακα, μπορεί να έρθει σε επαφή με ορισμένες από τις προβληματικές καταστάσεις που αντιμετώπισαν οι

⁸ Βλ. B. L. van der Waerden, *Η Αφύπνιση της Επιστήμης* (μετ. Γ. Χριστιανίδη), Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, σ. xxiv.

άνθρωποι στο παρελθόν τους, να ανακαλύψει –έστω καθοδηγούμενο- τις λύσεις που έδωσαν και να συνειδητοποιήσει τους περιορισμούς των εκάστοτε υλικών και νοητικών εργαλείων τους.

Οι συνήθεις γεωπίνακες του εμπορίου δεν επιτρέπουν εμβαδά μεγαλύτερα του 16. Η δασκάλα μπορεί ωστόσο να κατασκευάσει όποιου μεγέθους γεωπίνακα θέλει και μάλιστα η κατασκευή ενός γεωπίνακα από τα παιδιά μπορεί να αποτελέσει διδακτική δραστηριότητα.



Σχηματική αναπαράσταση γεωπίνακα εμπορίου

Οι δραστηριότητες που περιγράφονται παρακάτω εντάσσουν οργανικά τα όσα γνωρίζουμε για την ιστορία του θεωρήματος στη διδασκαλία του. Μπορεί να δοθούν τόσο στο Δημοτικό όσο και στο Γυμνάσιο. Ωστόσο στο πλαίσιο μιας δραστηριότητας, ανάλογα με τη βαθμίδα της εκπαίδευσης, είναι δυνατόν να προχωρήσουμε σε περισσότερες μαθηματικές και ιστορικές λεπτομέρειες, σε περισσότερες «πολιτισμικές» λεπτομέρειες.

Δραστηριότητα πρώτη: Να οριστεί με το λαστιχάκι περιοχή με εμβαδόν 1 (μοναδιαίο τετράγωνο). Κατόπιν να οριστούν περιοχές με εμβαδόν 2, 3, 4, Ποια είναι η μεγαλύτερη περιοχή που μπορεί να οριστεί έτσι;

Δραστηριότητα δεύτερη: Να οριστούν με το λαστιχάκι τετραγωνικές περιοχές με εμβαδόν 1, 4, 9, 16.

Δραστηριότητα τρίτη: Να οριστεί με το λαστιχάκι τετραγωνική περιοχή με εμβαδόν 2. Κατόπιν με εμβαδόν 8.

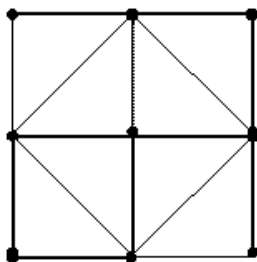
Δραστηριότητα τέταρτη: Να οριστεί με το λαστιχάκι τετραγωνική περιοχή με εμβαδόν 5 ($= 1 + 4$). Σχημάτισε τετράγωνο με εμβαδόν 10 ($= 9$

+ 1) κ.ο.κ. Γενικά, αν σου δώσω τετραγωνικές περιοχές εμβαδού A και B αντίστοιχα, πώς μπορείς να κατασκευάσεις τετραγωνική περιοχή με εμβαδόν $A + B$;

Δραστηριότητα πέμπτη: Μπορείς να ορίσεις με το λαστιχάκι τετραγωνική περιοχή εμβαδού 3 στον γεωπίνακα; Ναί, όχι, γιατί;

Στο πλαίσιο των δύο πρώτων δραστηριοτήτων μπορεί να συζητηθούν στην τάξη οι απαρχές της Γεωμετρίας, η ετυμολογία του όρου, οι αρπεδονάπτες και τα σχετικά αποσπάσματα του Ηροδότου.

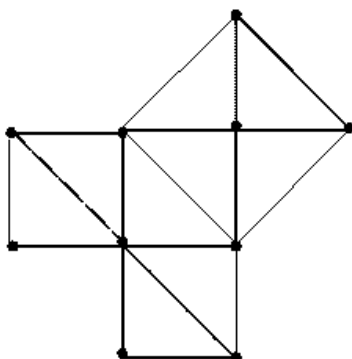
Στη δεύτερη δραστηριότητα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε δημιουργικά τη λύση που έδωσαν οι Βαβυλώνιοι στο πρόβλημα του διπλασιασμού της άνω επιφάνειας του τετραγωνικού βωμού. Ο [υπο]διπλασιασμός τετραγωνικής επιφάνειας με τη μέθοδο των Βαβυλωνίων αναπαρίσταται όμορφα και αιτιολογείται εύκολα στον γεωπίνακα. Πρόκειται ουσιαστικά για ειδική περίπτωση του πυθαγορείου θεωρήματος της οποίας η απόδειξη μπορεί να κατανοηθεί και από παιδιά των τελευταίων τάξεων του Δημοτικού σχολείου.



Ο ορισμός τετραγώνου με εμβαδόν 2 στον γεωπίνακα

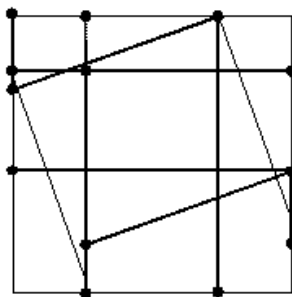
Η δραστηριότητα αυτή στα πρώτα χρόνια του Γυμνασίου από την άλλη μπορεί να οδηγήσει σε συζήτηση τόσο για τον βαβυλωνιακό πολιτισμό (στοιχεία του οποίου διδάσκονται στο μάθημα της ιστορίας), όσο και για την περίφημη σκηνή μεταξύ του Σωκράτη και του παιδα (δούλου) στον πλατωνικό *Μένωνα*. Η επίλυση του προβλήματος αυτού από τον παιδα, με την τεχνική της «καθοδηγούμενης ανακάλυψης», έχει σημαντική θέση στη θεμελίωση της πλατωνικής γνωσιολογίας που βλέπει τη γνώση ως ανάμνηση.

Στο πλαίσιο της ίδιας δραστηριότητας κατασκευάζουμε τετράγωνο με εμβαδόν 2 και με το κλασικό σχήμα της «καρέκλας της νύφης». Πώς; Ορίζουμε με τα λαστιχάκια δύο μοναδιαία τετράγωνα όπως στο παρακάτω σχήμα και με τα τέσσερα ορθογώνια τρίγωνα από τα οποία αποτελούνται, πάλι, με λαστιχάκια ορίζουμε το τετράγωνο με πλευρά την υποτείνουσα δείχνοντας τη ζητούμενη ισότητα.



Το τετραγωνικό εμβαδόν 2 μέσω της καρέκλας της νύφης στον γεωπίνακα

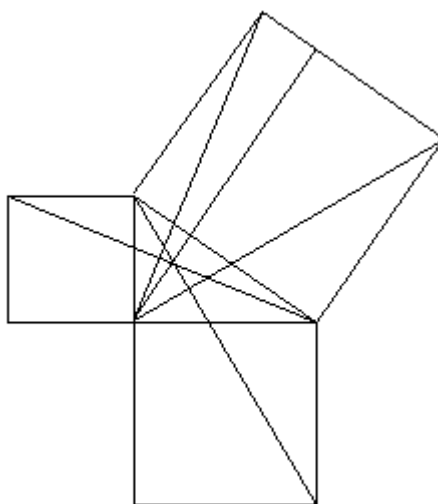
Στο πλαίσιο της τέταρτης δραστηριότητας μπορούμε να ορίσουμε στον γεωπίνακα τετράγωνο με εμβαδόν 10 και να δείξουμε το πυθαγόρειο θεώρημα για εμβαδά 1, 9 και 10 με τη βοήθεια της κινεζικής μεθόδου που υπονοείται στο *Τσου-Πέι*. Με παρόμοια τεχνική μπορούμε να ορίσουμε στον γεωπίνακα τετράγωνο με εμβαδόν 5 ($= 1 + 4$). Ακόμη μπορούμε να δούμε ότι η κινεζική προσέγγιση οδηγεί στο βαβυλωνιακό σχήμα όταν επιχειρούμε να ορίσουμε τετραγωνικό εμβαδόν 2 ($= 1 + 1$).



Η κινεζική απόδειξη του πυθαγορείου θεωρήματος στον γεωπίνακα

Οι ίδιες δραστηριότητες σε τάξεις του Γυμνασίου μπορεί να οδηγήσουν σε βαθύτερη μελέτη του πυθαγορείου θεωρήματος. Αξίζει πλέον να περάσουμε στο χαρτί μιλιμετρέ, όπου μπορούμε να σχεδιάσουμε μεγαλύτερα ορθογώνια τρίγωνα, τετράγωνα κ.λπ. Βλέπουμε ωστόσο το χαρτί μιλιμετρέ ως μια πιο αφηρημένη αναπαράσταση του γεωπίνακα και όχι μέσω του καρτεσιανού επιπέδου και των συντεταγμένων. Το χαρτί μιλιμετρέ, ο κανόνας και το μολύβι μας βοηθούν να υπερβούμε τους περιορισμούς στο μέγεθος που θέτει ο γεωπίνακας. Ωστόσο με αυτά δεν εγκαταλείπουμε τη λογική του που τώρα τη συνδέουμε με το ιστορικά μεταγενέστερο μαθηματικό «όφως» της αναλυτικής γεωμετρίας, χωρίς μάλιστα να χρειαστεί να περάσουμε από την έννοια του συστήματος συντεταγμένων.

Ο μαθητής και η μαθήτρια σταδιακά οδηγούνται να συνειδητοποιήσουν ότι το πυθαγόρειο θεώρημα αιτιολογεί μια τεχνική που επιτρέπει τη σύνθεση δύο δοσμένων τετραγωνικών εμβαδών A και B στο τετραγωνικό εμβαδόν $A + B$ βάσει του σχήματος του κινεζικού *Τσου Πέι*. Το πέραςμα πια στην πρώτη ευκλείδεια απόδειξη, που επίσης είναι εμβαδική, είναι εύκολο. Ο Ευκλείδης επίσης συγκροτεί τετράγωνο εμβαδού $A+B$ από δύο δοσμένα τετραγωνικά εμβαδά A , B , απλά ακολουθώντας διαφορετική μέθοδο. Τα εμβαδά των τετραγώνων επί των κάθετων πλευρών μετασχηματίζονται σε εμβαδά δύο ορθογώνιων παραλληλογράμμων από τα οποία απαρτίζεται το τετράγωνο επί της υποτείνουσας. Εάν $AB\Gamma$ είναι το ορθογώνιο τρίγωνο, A η ορθή γωνία, Δ το ίχνος του ύψους επί την υποτείνουσα, τότε το τετράγωνο με πλευρά την AB είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές την υποτείνουσα και το $B\Delta$, ενώ το τετράγωνο με πλευρά την $A\Gamma$ είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές την υποτείνουσα και το $\Delta\Gamma$. Οι δύο αυτές σχέσεις ισεμβαδικότητας μπορεί να εκφραστούν ως σχέσεις αναλογίας που προκύπτουν από την παρατήρηση ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$ είναι όμοια προς το αρχικό τρίγωνο $AB\Gamma$. Αλλά αυτή δεν είναι παρά η δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος.



Το πυθαγόρειο θεώρημα στα Στοιχεία του Ευκλείδη

Συμπερασματικά, με την ενύφανση της ιστορίας του θεωρήματος στη διδασκαλία του οι μαθητές και οι μαθήτριες όχι μόνον μαθαίνουν τρεις κλασικές αποδείξεις του πυθαγορείου θεωρήματος, αλλά και αναπόφευκτα αντιμετωπίζουν τα μεγάλα ερωτήματα της ιστορίας του: Ποια είναι η σχέση μεταξύ των αποδείξεων αυτών; Ποια είναι η σχέση κάθε απόδειξης με τον πολιτισμό που την παρήγαγε; Ποιοι ήταν οι άνθρωποι που τις επινόησαν και τι ήθελαν να κάνουν;

Με άλλα λόγια πίσω από την επιβλητική μορφή του θεωρήματος-μνημείου στον κόσμο των Ιδεών, αρχίζουν να διακρίνουν τα σώματα εκείνων που κοπίασαν να το λαξεύσουν.

Πειραματική Γεωμετρία: ένα παράδειγμα από την Ιστορία της Γεωμετρίας

Κων/νος Νικολαντωνάκης

Δρ Ιστορίας των Θετικών Επιστημών και της Τεχνολογίας

Η μελέτη της Ιστορίας των Μαθηματικών μας δείχνει ανάγλυφα ότι η μαθηματική σκέψη και οι μαθηματικές γνώσεις οικοδομούνται βαθμιαία, μέσα από δυσκολίες, λάθη, εικασίες και εμπόδια, στην προσπάθεια να λυθούν προβλήματα που θέτουν οι κοινωνικές και επιστημονικές ανάγκες. Η Διδακτική των μαθηματικών έχει αρχίσει να αναγνωρίζει, ότι τα προβλήματα, που οδήγησαν στην ανάδυση κάποιας μαθηματικής έννοιας, καθώς και τα εμπόδια, που χρειάστηκε να υπερνικηθούν για να αποκτηθεί μια πλήρης κατανόηση της έννοιας αυτής, μπορούν να παίξουν ένα πολύ σημαντικό ρόλο στη μελέτη των καταστάσεων μάθησης και διδασκαλίας. Αντικειμενικός σκοπός είναι να δημιουργήσουμε καταστάσεις – προβλήματα ικανά να ευνοήσουν την ανάπτυξη του γνωστικού συστήματος του μαθητή. Η μελέτη της ιστορικής γέννησης μιας μαθηματικής έννοιας είναι ένα από τα μέσα που χρησιμοποίησαν οι σύγχρονες έρευνες για να εκθέσουν την ομάδα εκείνων των προβλημάτων, που η κατασκευή της έννοιας που εξετάζεται, οδήγησε στη λύση τους.

Στο πλαίσιο της Ιστορίας των Μαθηματικών μπορούμε να διακρίνουμε απλοποιώντας περιόδους στις οποίες αντιστοιχούν διαφορετικές έννοιες για την γεωμετρία. Η λέξη γεωμετρία ετυμολογικά σημαίνει μέτρηση της γης.

Μια μεγάλη περίοδος στην ιστορία της αποτελεί η λεγόμενη πειραματική γεωμετρία. Σ' αυτήν ανήκει ένα σύνολο τεχνικών μέτρησης και επισήμανσης. Μ' αυτήν ασχολήθηκαν οι χωρομέτρες (αρπεδονάπτες), οι

αστρονόμοι και οι αρχιτέκτονες της Ελληνικής, Ρωμαϊκής και Μεσαιωνικής εποχής.

Είναι σημαντικό σ' αυτό το σημείο να αναφέρουμε επιγραμματικά δύο πολύ σημαντικές περιόδους της γεωμετρίας.

Η πρώτη, μετά το Θαλή τον Μιλήσιο και τον Πυθαγόρα, όταν διαμορφώνεται σε επιστήμη με τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη τον 3^ο αιώνα π.Χ. και η θέση της μέσα στα μαθηματικά είναι τόσο σημαντική ώστε οι όροι γεωμέτρης και μαθηματικός ταυτίζονται.

Η δεύτερη ξεκινά το 19^ο αιώνα με την εμφάνιση των μη ευκλείδειων γεωμετριών με τους (Bolyai, Riemann, Lobatchevski), όπου αυτή η επιστήμη αποσυνδέεται πλήρως από τον αισθητό κόσμο.

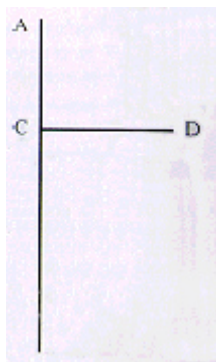
Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε κυρίως με δραστηριότητες από την πειραματική γεωμετρία. Θα χρησιμοποιήσουμε δύο εργαλεία, το ένα του 10^{ου} και το δεύτερο του 16^{ου} αιώνα. Αυτά χρησιμοποιούνταν για να πραγματοποιούνται σκοπεύσεις που επέτρεπαν τον προσδιορισμό απρόσιτων αποστάσεων : πλάτος ενός ποταμού, απομάκρυνση ενός πλοίου, ύψος ενός δέντρου και ενός πύργου κτλ. Η χρήση αυτών των εργαλείων βασίζεται στις ιδιότητες των ισοσκελών και των ορθογωνίων τριγώνων. Η ύπαρξη αυτών των τριγώνων πάνω στο εργαλείο δίνει ύπαρξη σε οπτικά τρίγωνα στο χώρο και αναδύει την αναγκαιότητα της κατανόησης της έννοιας του τριγώνου.

Απώτερος στόχος μας είναι, μετά τον σχεδιασμό και την κατασκευή των εργαλείων, να οδηγήσουμε τους μαθητές να τα χειριστούν στην πραγματικότητα. Τα παρουσιάζουμε μέσω καταστάσεων – προβλημάτων οι οποίες κεντρίζουν το ενδιαφέρον τους και τους οδηγούμε μέσω πραγματικών μετρήσεων και σχεδιασμού να κατανοήσουν την αναγκαιότητα απόκτησης δεξιοτήτων και ικανοτήτων στο σχεδιασμό των σχημάτων και γνώσης ιδιοτήτων τριγώνων.

Κατασκευή των εργαλείων

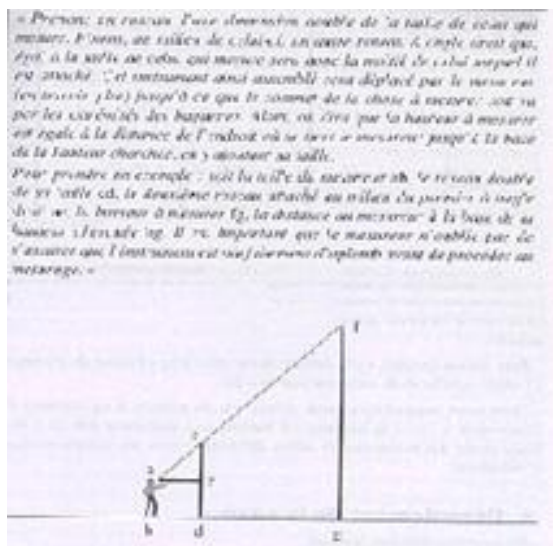
1. Το πρώτο εργαλείο που αναφέρεται στην Γεωμετρία του Gerbert d' Aurillac του 10^{ου} αιώνα χρησιμοποιούνταν κυρίως για την μέτρηση υψών. Το πόδι της καθέτου είναι απρόσιτο και το έδαφος εντός κάποιας

ακτίνας θεωρείται οριζόντιο. Το συγκεκριμένο εργαλείο αποτελείται από δύο κομμάτια ξύλο, το ένα μήκους 1,50 μ. και το άλλο 0,40 μ περίπου. Αυτά τοποθετούνται κάθετα μεταξύ τους έτσι ώστε να σχηματίζεται ένα ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο.



$$AC = CD$$

Απόσπασμα από το κείμενο του Gerbert d' Aurillac



2. Το δεύτερο εργαλείο σημειώνεται από τον Errard (1594) και χρησιμοποιούνταν για την μέτρηση μιας απρόσιτης οριζόντιας απόστασης. Αποτελείται από δύο κομμάτια ξύλου τα οποία συνδέονται με τέτοιο τρόπο ώστε να διατηρούν σταθερή μια προεπιλεγμένη γωνία.

Υλικά : Εργαλείο του Gerbert d' Aurillac.

Οργάνωση : συζήτηση στην τάξη και ομαδική εργασία έξω από την τάξη.

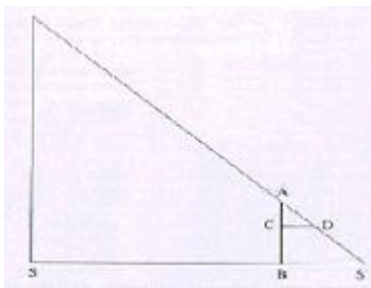
Τοποθετούμε τους μαθητές μπροστά σε μια κατάσταση – πρόβλημα, θέτοντας τους το εξής ερώτημα «με ποιο τρόπο μπορούμε να μετρήσουμε το ύψος ενός δέντρου το οποίο βρίσκεται μέσα στην αυλή του σχολείου ή στην γειτονιά μας ;»

Αρχικά κατασκευάζουμε το εργαλείο και δίνουμε στους μαθητές χρόνο για να το μελετήσουν. Αναφέρουμε ότι το συγκεκριμένο εργαλείο το χρησιμοποιούσαν στην Αρχαιότητα και τον Μεσαίωνα για να απαντήσουν ανάλογα ερωτήματα. Το ερώτημα που αναδύεται είναι με ποιόν τρόπο το χρησιμοποιούσαν.

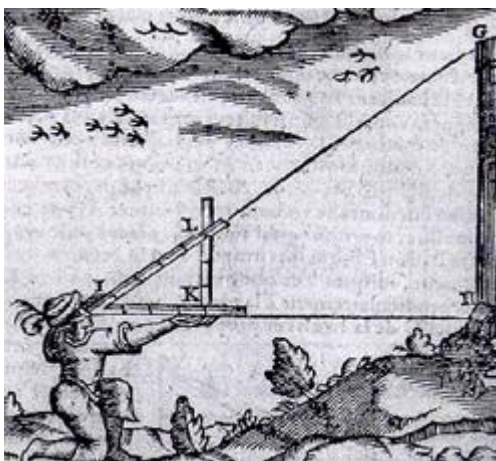
Όλοι οι μαθητές βρίσκονται χωρισμένοι σε μικρές ομάδες των 4-5 ατόμων, έχουν στην κατοχή τους το εργαλείο και βρίσκονται σε μια διαδικασία κατάθεσης ιδεών. Σταδιακά θα αναδυθεί η ιδέα του να στοχεύσουμε ψηλά κρατώντας το ξύλο κατακόρυφα. Οι μαθητές χωρισμένοι σε ομάδες τοποθετούν το εργαλείο κατακόρυφα και σημαδεύουν την κορυφή του δέντρου. Μέσω της πράξης γίνεται φανερό η ανάγκη να δοθεί σε κάθε μαθητή ένας ρόλος, δηλ. αυτός που σημαδεύει, αυτός που ελέγχει το αλφάδι, αυτός που σημαδεύει με την κιμωλία την θέση της καθέτου στο έδαφος κτλ.

Σταδιακά αναδύονται αποφάνσεις της μορφής «Αν σταθούμε πιο μακριά σημαδεύουμε πιο ψηλά, αν σταθούμε πιο κοντά σημαδεύουμε πιο χαμηλά».

Σταδιακά αναδύεται το ιδεατό τρίγωνο. Οι κορυφές του, οι δύο άκρες του δέντρου, η θέση του εργαλείου. Οι πλευρές του, το δέντρο, η γραμμή που θα μετρήσουμε στο έδαφος και η οπτική ακτίνα. Μέσα από αυτά τα στοιχεία αναδύεται η γεωμετρική έννοια : πλευρά τριγώνου. Μετρούμε λοιπόν την απόσταση μεταξύ του δέντρου και του εργαλείου.



Το τρίγωνο ACD είναι ισοσκελές ορθογώνιο. Όταν το εργαλείο είναι κατακόρυφο όπως και το προς μέτρηση ύψος είναι ίσο με SS' ($SB + BS' = SB + AB$, διότι ABS' είναι ορθογώνιο και ισοσκελές).



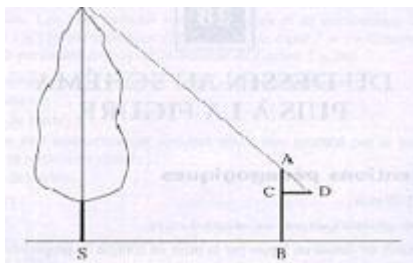
Δραστηριότητα 2

Παιδαγωγικός σκοπός: Να οδηγήσουμε τους μαθητές να αναπαραστήσουν την κατάσταση που έζησαν και να μετασχηματίσουν ένα σχέδιο σε γεωμετρικό σχήμα λαμβάνοντας υπόψιν τους τις ιδιότητες του.

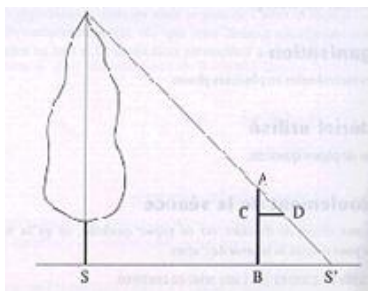
Υλικά: Φύλλα χαρτιού με τετραγωνάκια.

Ζητάμε από τους μαθητές να σχεδιάσουν την κατάσταση πειραματισμού και μετρήσεων για να βρουν το ύψος του δέντρου χρησιμοποιώντας χαρτί με τετραγωνάκια. Σταδιακά εμφανίζεται η ανάγκη να χρησιμοποιήσουμε τις γραμμές για να αναπαραστήσουμε το δέντρο, το εργαλείο και το έδαφος και να ευθυγραμμίσουμε τα σημεία A και D του εργαλείου με την κορυφή του

δέντρου. Παρατηρούμε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές και ορθογώνιο. Όσο πιο ακριβές είναι το σχήμα μας τόσο ευκολότερα θα οδηγηθούμε στα σωστά συμπεράσματα.



Σχεδιάζοντας την κατάσταση διαπιστώνουμε ότι η απόσταση μεταξύ του δέντρου και του εργαλείου δεν είναι ίση με το ύψος του δέντρου. Το ενδιαφέρον τρίγωνο δεν είναι εκείνο που αρχικά πιστεύαμε αλλά εκείνο που παράγεται αν προεκτείνουμε την οπτική ακτίνα στο έδαφος. Το τρίγωνο είναι ισοσκελές και ορθογώνιο και βρίσκουμε στο έδαφος μια απόσταση ίση με το ύψος του δέντρου.



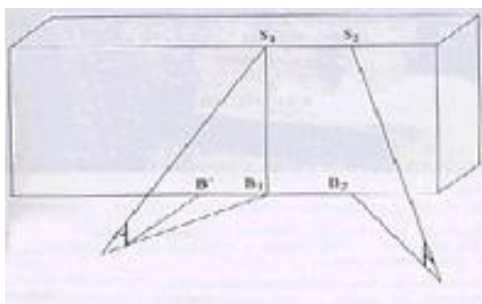
Δραστηριότητα 3

Παιδαγωγικός σκοπός: Οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις τους σε μια κατάσταση λίγο διαφορετική από την δραστηριότητα 2.

Στο πλαίσιο της τρίτης κατά σειρά δραστηριότητας θα προσπαθήσουμε να μετρήσουμε το ύψος του σχολείου.

Οι ομάδες των μαθητών καλούνται να δραστηριοποιηθούν αυτόνομα η μια από την άλλη σε διαφορετικά σημεία της αυλής. Μετά από διάφορες μετρήσεις περνάμε στον σχεδιασμό της δραστηριότητας και συζητάμε τα διάφορα αποτελέσματα. Αυτό που πρέπει να προσέξουμε είναι ότι το σημείο που σκοπεύουμε στην σκεπή του σχολείου και το σημείο στο πόδι

της κάθετου ίσως να μην βρίσκονται πάνω στην ίδια κάθετη. Ίσως χρειαστεί να επέμβουμε για να εξηγήσουμε την αναγκαιότητα να μετρήσουμε την απόσταση στο έδαφος από το εργαλείο μέχρι το σημείο του τοίχου που βρίσκεται στην κάθετη από την σκεπή και όχι προς το κοντινότερο σημείο. Οι μαθητές για να εξασφαλίσουν την κάθετη μπορούν να χρησιμοποιήσουν στοιχεία από το κτίριο (παράθυρα, σωληνώσεις).



Δραστηριότητα 4

Παιδαγωγικός σκοπός: - Να οδηγηθούν οι μαθητές να μελετήσουν ένα ισοσκελές τρίγωνο ή να επαναχρησιμοποιήσουν τις ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου.

- Να γεωμετριοποιήσουν μια κατάσταση.

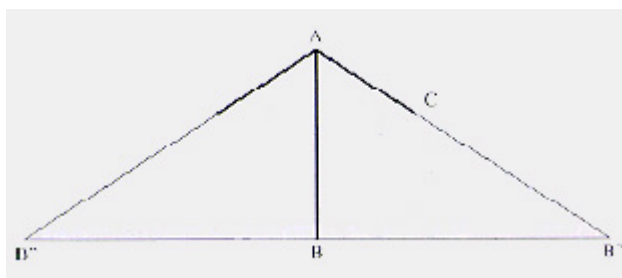
Υλικά: εργαλείο του Errard.

Θέτουμε τους μαθητές μπροστά σε μια κατάσταση – πρόβλημα . «Βρισκόμαστε στις όχθες ενός ποταμού που δεν μπορούμε να διασχίσουμε και θέλουμε να μετρήσουμε το πλάτος του». Τι πρέπει να κάνουμε ; (Σε περίπτωση μη ύπαρξης ποταμού μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν δρόμο).

Οι μαθητές αφού έχουν κατασκευάσει κατά ομάδες το εργαλείο του Errard, το μελετούν και συζητάνε τις διάφορες ιδέες και σκέψεις τους. Σταδιακά μπορούμε να σκεφτούμε ότι θα πρέπει να τοποθετήσουμε το εργαλείο κατακόρυφα στην όχθη του ποταμού και το δεύτερο μη σταθερό κομμάτι ξύλου να στοχεύει την αντίπερα όχθη.

Σ' αυτή την δραστηριότητα έχουμε ένα ιδεατό ορθογώνιο τρίγωνο στο οποίο υπάρχουν ως γνωστά στοιχεία μια πλευρά (το εργαλείο) και η γωνία.

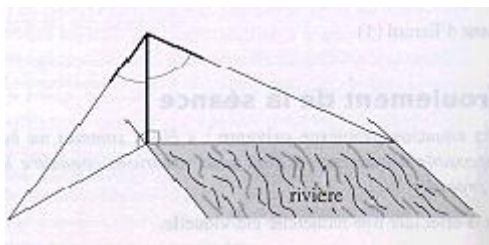
Στρέφοντας το εργαλείο προς την ξηρά στο σημείο όπου βρισκόμαστε, μετατρέπουμε την απρόσιτη απόσταση σε προσιτή κάνοντας χρήση ιδιοτήτων ισοσκελών τριγώνων.

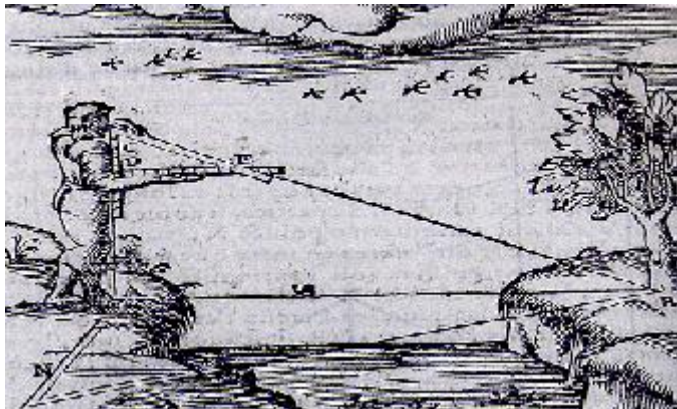


Ο παρατηρητής βρίσκεται στην όχθη του ποταμού. Τοποθετεί το AC με τρόπο ώστε να στοχεύει την αντίπερα όχθη B'. Περιστρέφουμε ολόκληρο το εργαλείο γύρω από το AB και προσδιορίζουμε το B'' πάνω στο έδαφος προς την μεριά μας.

Η απρόσιτη απόσταση BB' είναι ίση με την προσιτή και μετρήσιμη απόσταση BB''.

Χωρίς να είναι απαραίτητο το εργαλείο να εκτελεί ένα ημικύκλιο, μπορούμε να διατηρήσουμε αυτή την ιδέα γιατί επιτρέπει τον σχεδιασμό ισοσκελών τριγώνων και μας επιτρέπει να συζητήσουμε τις ιδιότητες αυτών των τριγώνων.





Η θέση του σχήματος στην γεωμετρία

Ένα γεωμετρικό σχήμα μπορεί να είναι (1) μια αναπαράσταση στοιχείων μιας κατασκευασμένης πραγματικότητας και (2) μια αναπαράσταση ιδεατών εννοιών μιας θεωρίας. Το πέρασμα από την κατάσταση (1) στην κατάσταση (2) συχνά αγνοείται. Αυτό το πέρασμα περιγράφει ένα σημαντικό στάδιο στην δημιουργία της έννοιας του γεωμετρικού σχήματος. Η απουσία αυτού του σταδίου οδηγεί σε μια από τις βασικότερες δυσκολίες της διδασκαλίας της γεωμετρίας.

Μέσω των παραπάνω δραστηριοτήτων θελήσαμε να επικεντρώσουμε την προσοχή μας στο στάδιο όπου το σχέδιο γίνεται αφηρημένο γεωμετρικό σχήμα αναγκαίο στη επεξεργασία και την σύνθεση της σκέψης. Οι παραπάνω δραστηριότητες μας επιτρέπουν να σχεδιάσουμε γεωμετρικά σχήματα που έχουν κάποια σημασία. Σ' αυτά οι οπτικές ακτίνες γίνονται ευθείες, τα δέντρα γίνονται ευθύγραμμα τμήματα, οι διάφορες θέσεις γίνονται σημεία τα οποία με την σειρά τους δημιουργούν τρίγωνα τις ιδιότητες των οποίων μελετάμε και χρησιμοποιούμε για το προς επίλυση πρόβλημα.

Η πειραματική γεωμετρία παρουσιάζει το πλεονέκτημα να χρησιμοποιεί υλικά στοιχεία (εργαλεία του Gerbert d' Aurillac, Errard) αλλά και ιδεατά (οπτικές ακτίνες). Επιτρέπει να μελετήσουμε την σύνδεση μεταξύ δύο ειδών στοιχείων, όταν το σχέδιο της πραγματικότητας γίνεται γεωμετρικό σχήμα. Οι οπτικές ακτίνες σχεδιάζονται και ταυτίζονται με τις γραμμές που

χαράζουμε μ' έναν χάρακα, και στην συνέχεια ταυτίζονται με τις αφηρημένες ευθείες γραμμές. Τα δέντρα καθώς και τα εργαλεία περνούν από την ίδια διαδικασία και αποχτούν το ίδιο status.

Βιβλιογραφία

- Errard de Bar-le-Duc, *La Géométrie et Pratique générale d' icelle*, Paris, 1594.
- E. Fourrey, *Curiosités géométriques*, Vuibert, 1907, rééd. 1994.
- Gerberti (postea Silvestri II papae), *Opera mathematicae*, (972-1003), Berlin, 1899.
- M. Serres, *Les Origines de la géométrie*, Flammarion, 1993.
- C. Laborde, « Σύγχρονες τάσεις στη Διδακτική των Μαθηματικών και της Πληροφορικής», *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, 25 (1985), σ. 47-49.
- Γ. Θωμαΐδη – Ν. Καστάνη, «Μια διαχρονική εξέταση της σχέσης της Ιστορίας με τη Διδακτική των Μαθηματικών», *Ευκλείδης Γ'*, 16 (1987), σ. 61-92.

Ιστορικές παρεκβάσεις στα όρια της πρακτικής και θεωρητικής γεωμετρίας

Γιάννης Θωμαΐδης

Δρ. Μαθηματικών – Πειραματικό Σχολείο Πανεπιστημίου Μακεδονίας

Εισαγωγή

Ένα κομβικό σημείο στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών αποτελεί η μετάβαση από τις εμπειρικές – πρακτικές γνώσεις, που έχουν κυρίως αλγοριθμικό χαρακτήρα, στις θεωρητικές γνώσεις που εντάσσονται στο πλαίσιο ενός μαθηματικού συστήματος και υποβάλλονται στη διαδικασία της απόδειξης. Η μετάβαση αυτή αναδεικνύεται σε οξύ διδακτικό πρόβλημα στην περίπτωση της Γεωμετρίας, όπου ένα πλήθος γεωμετρικών γνώσεων που έχουν διδαχθεί οι μαθητές στο Δημοτικό και το Γυμνάσιο γίνεται εξ αρχής αντικείμενο διαπραγμάτευσης στο Λύκειο, μέσα στο αυστηρό θεωρητικό πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Οι μαθητές πρέπει τώρα να κατακτήσουν τη λιτή και περιεκτική γλώσσα των γεωμετρικών ορισμών και προτάσεων, να κατανοήσουν τη σκοπιμότητα της λογικής θεμελίωσης και απόδειξης και να αποκτήσουν την ικανότητα επινόησης και διατύπωσης αποδεικτικών συλλογισμών.

Πολλές εμπειρικές έρευνες μικρής και μεγάλης κλίμακας έχουν δείξει ότι μόνο ένα πολύ μικρό ποσοστό μαθητών είναι σε θέση να διεκπεραιώσει με επιτυχία αυτό το εγχείρημα και αρκετές θεωρητικές αναλύσεις ή επισκοπήσεις έχουν επιχειρήσει να δώσουν μια ερμηνεία και να σκιαγραφήσουν κάποιες προοπτικές επίλυσης του προβλήματος (Hershkowitz *et al.* 1990/1996· Clements & Battista 1992· Hershkowitz *et al.* 1996· Mammama & Villani 1998· Θωμαΐδης & Πούλος 2000).

Στην εργασία αυτή θα εξετάσουμε το ζήτημα της μετάβασης από την πρακτική στη θεωρητική Γεωμετρία μέσα από μια διπλή ιστορική

προοπτική. Συγκεκριμένα, θα φέρουμε στο φως και θα αξιολογήσουμε ορισμένα ιστορικά στοιχεία τα οποία δείχνουν ότι το συγκεκριμένο διδακτικό πρόβλημα απασχολούσε τους μαθηματικούς ήδη από την αρχαιότητα, και ότι για την αντιμετώπισή του επιστρατεύονταν μέσα που ανάγονται στην προέλευση της Γεωμετρίας ως «επιστήμης» που ασχολείται με τη «μέτρηση της γης». Αυτή η ιστορική προοπτική δεν αποτελεί συνήθως συνιστώσα των ερευνών που ασχολούνται με τη μάθηση της Γεωμετρίας, παρά το γεγονός ότι η Ιστορία των Μαθηματικών κερδίζει τα τελευταία χρόνια συνεχώς έδαφος ως πεδίο αναφοράς των ερευνητών της Διδακτικής αλλά και όσων διδάσκουν Μαθηματικά σε όλα τα επίπεδα της εκπαίδευσης (Biehler 1994· Fauvel & Maanen 2000).

Η προέλευση της Γεωμετρίας και τα Στοιχεία του Ευκλείδη

Ο αρχαίος ιστορικός Ηρόδοτος, στο δεύτερο από τα βιβλία του, που είναι αφιερωμένο στην ιστορία της Αιγύπτου, αναφέρει ότι ο Φαραώ Σέσωστρις (περίπου 1850 π.Χ.) είχε χωρίσει την καλλιεργήσιμη γη σε ίσα τετράγωνα αγροτεμάχια τα οποία μοίρασε στους Αιγυπτίους. Έτσι απέκτησε μια πηγή εσόδων ορίζοντας την πληρωμή ενός ετήσιου φόρου. Όταν κάποιος έχανε, λόγω της ανόδου των νερών του Νείλου, ένας μέρος της γης του, ανέφερε το γεγονός και ο Σέσωστρις έστελνε υπαλλήλους να μετρήσουν το μέρος κατά το οποίο η γη είχε ελαττωθεί, έτσι ώστε να πληρωθεί φόρος ανάλογος με αυτόν που είχε αρχικά επιβληθεί. Νομίζω, γράφει ο Ηρόδοτος, ότι με τον τρόπο αυτό ανακαλύφθηκε η Γεωμετρία και μεταφέρθηκε στην Ελλάδα.

Η εμπειρική προέλευση της Γεωμετρίας από διαδικασίες που αναφέρονται στη μέτρηση της γης επιβεβαιώνεται από πολλές άλλες πηγές σχετικές με την αρχαία πολεοδομία, την αρχιτεκτονική και γενικά τα δημόσια έργα, όπως π.χ. η περίφημη σήραγγα του Ευπαλίνου στη Σάμο που κατασκευάστηκε γύρω στο 550 π.Χ. (Cuomo, 2001). Στους δύο αιώνες που ακολούθησαν, αυτό το πρωτογενές υλικό εμπειρικών γεωμετρικών γνώσεων μετασχηματίστηκε στο θεωρητικό σύστημα που εκτίθεται με λογική αυστηρότητα στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Αν και οι λεπτομέρειες αυτής της εξέλιξης δεν είναι γνωστές, οι σύγχρονοι ιστορικοί των Μαθηματικών συγκλίνουν στο συμπέρασμα ότι η θεωρητική συγκρότηση της Γεωμετρίας

οφείλεται αφενός στην ύπαρξη σημαντικών ανοικτών προβλημάτων (π.χ. ο διπλασιασμός του κύβου, η ανακάλυψη της ασυμμετρίας) και αφετέρου σε ορισμένα θεμελιώδη χαρακτηριστικά του αρχαίου ελληνικού πολιτισμού. Στα τελευταία συμπεριλαμβάνεται η δημοκρατική οργάνωση της πόλης-κράτους, που επιβάλλει την κριτική συμμετοχή στα κοινά και την ανάπτυξη γνωστικών εργαλείων ελέγχου της αλήθειας. Τα στοιχεία αυτά έδωσαν τα ερεθίσματα σε μια μικρή σχετικά ομάδα φιλοσόφων να αναπτύξουν στο μέγιστο βαθμό τη θεωρητική μαθηματική γνώση, στηριζόμενοι στον ιδεατό χαρακτήρα των γεωμετρικών εννοιών και στις αρχές της αξιωματικής θεμελίωσης και της λογικής απόδειξης (Knorr 1975· 1986· Netz 1999). Το αποτέλεσμα αυτής της εξέλιξης αποτυπώνεται στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, όπου η θεωρητική γνώση εκτίθεται χωρίς καμιά αναφορά στην εμπειρική προέλευση των εννοιών ή τις εφαρμογές τους, και χωρίς φανερές διδακτικές προθέσεις. Μοναδικό κριτήριο και σημείο αναφοράς φαίνεται να αποτελούν οι εσωτερικές ανάγκες ανάπτυξης της μαθηματικής θεωρίας.

Τα θεμελιώδη αυτά γνωρίσματα, που διαφοροποιούν τις θεωρητικές έννοιες από τις εμπειρικές γνώσεις, δεν αποτελούσαν το καθολικά αποδεκτό πρότυπο φιλοσοφικής και επιστημονικής σκέψης στον αρχαίο Ελληνικό κόσμο. Είναι γνωστό ότι φυσικοί φιλόσοφοι όπως ο Δημόκριτος είχαν διατυπώσει επιχειρήματα με τα οποία έδειχναν τον αντιφατικό χαρακτήρα των ιδεατών γεωμετρικών σχημάτων, ενώ οι Επικούρειοι φιλόσοφοι χλεύαζαν την τακτική του Ευκλείδη να αποδεικνύει με κάθε αυστηρότητα τελείως προφανείς ιδιότητες των σχημάτων.

Ο θεωρητικός χαρακτήρας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως πρόβλημα διδασκαλίας και μάθησης κατά την αρχαιότητα

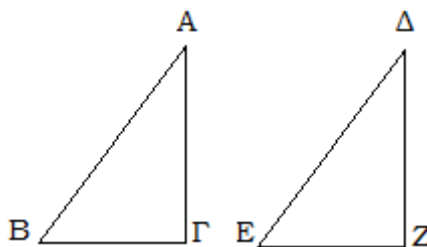
Η μεγάλη δυσκολία που προκαλούσε η διάδοση των θεωρητικών Μαθηματικών, μέσω της διδασκαλίας και μάθησης, σ' ένα κοινό ευρύτερο από αυτό των «ειδικών» αποτυπώνεται ευδιάκριτα στα πολυπληθή ερμηνευτικά σχόλια τα οποία συνοδεύουν τους χειρόγραφους κώδικες των αρχαίων μαθηματικών κειμένων. Ιδιαίτερα διαφωτιστικό είναι από την άποψη αυτή το έργο του νεοπλατωνικού φιλόσοφου Πρόκλου (5^{ος} αι. μ.Χ.), ο οποίος έγραψε ένα ολόκληρο έργο με σχόλια στο 1^ο βιβλίο των *Στοιχείων*

του Ευκλείδη. Ο Πρόκλος ήταν καθηγητής στην Ακαδημία του Πλάτωνα στην Αθήνα και όπως φαίνεται δίδασκε μεταξύ άλλων Μαθηματικά σε αρχάριους όσο και προχωρημένους σπουδαστές της Φιλοσοφίας (Morrow 1970· Σπανδάγος 2001β). Είναι χαρακτηριστικό, για το ζήτημα που εξετάζουμε, ότι στο έργο αυτό ο Πρόκλος καταβάλλει ιδιαίτερη προσπάθεια να διευκρινίσει τα λεπτά σημεία της γεωμετρικής θεωρίας στους αναγνώστες του επικαλούμενος, σε αρκετές περιπτώσεις, τις εμπειρικές γεωμετρικές γνώσεις που χρησιμοποιούνται στην καθημερινή ζωή.

Ένα πρώτο παράδειγμα των ερμηνευτικών παρεμβάσεων του Πρόκλου εμφανίζεται στην προσπάθεια του να εξηγήσει την ανάγκη της σχολαστικής ακρίβειας στη διατύπωση των θεωρημάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Είναι χαρακτηριστικό ότι η παρέμβαση αυτή εμφανίζεται στο πρώτο ουσιαστικά θεώρημα των Στοιχείων, που δεν είναι άλλο από το λεγόμενο σήμερα 1^ο κριτήριο ισότητας των τριγώνων. Η ακριβής διατύπωση του θεωρήματος από τον Ευκλείδη έχει ως εξής:

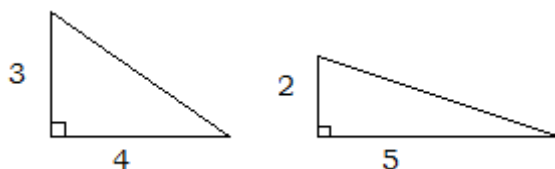
Στοιχεία, Βιβλίο I, Πρόταση 4

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευράς [ταῖς] δυοῖ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρα καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρα, ὑφ' ἧς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.



Ο Πρόκλος τονίζει με έμφαση το γεγονός ότι τα τρίγωνα πρέπει να έχουν δύο πλευρές ίσες «εκατέραν εκατέρα», δηλαδή ίσες μία προς μία και όχι απλά δύο πλευρές ίσες. Και αναφέρει ως παράδειγμα δύο ορθογώνια τρίγωνα, που το ένα έχει κάθετες πλευρές 3 και 4 μονάδων ενώ το άλλο 5 και 2 μονάδων.

Στην περίπτωση αυτή, οι δύο πλευρές του ενός τριγώνου είναι ίσες με τις δύο πλευρές του άλλου, επειδή το άθροισμά τους είναι 7 σε κάθε περίπτωση. Αυτό όμως δεν αποδεικνύει ότι το ένα τρίγωνο είναι ίσο με το άλλο. Το εμβαδόν του πρώτου είναι 6 ενώ το εμβαδόν του δεύτερου είναι 5 και η αιτία αυτής της διαφοράς είναι ότι οι πλευρές δεν είναι ίσες μία προς μία.



Αυτό το γεγονός, γράφει ο Πρόκλος, το εκμεταλλεύθηκαν ορισμένοι στις διανομές των αγροτεμαχίων. Ενώ έλαβαν το μεγαλύτερο από δύο χωρία, απόκτησαν τη φήμη του δίκαιου επειδή το άθροισμα των πλευρών ήταν ίδιο σε κάθε περίπτωση και φάνηκε έτσι ότι πήραν ίσο μερίδιο.

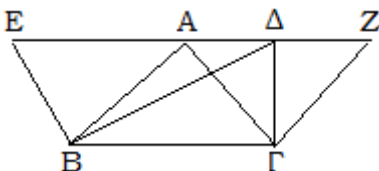
Ο Πρόκλος επανέρχεται στο ίδιο ζήτημα λίγο παρακάτω καθώς διευκρινίζει τις έννοιες «εμβαδόν» και «περίμετρος» ενός τριγώνου. Δύο τρίγωνα που έχουν ίσες περιμέτρους, γράφει, για να έχουν ίσα εμβαδά θα πρέπει να έχουν ίσες και τις γωνίες κατά μήκος μιας πλευράς. Συμβαίνει σε ορισμένες περιπτώσεις τα εμβαδά να είναι ίσα και οι περίμετροι άνισες ή οι περίμετροι να είναι ίσες και τα εμβαδά άνισα.

Ο προσδιορισμός του μεγέθους μιας επιφάνειας από το μήκος της περιμέτρου και όχι από το εμβαδόν φαίνεται ότι αποτελούσε συνήθη πρακτική κατά την αρχαιότητα¹, αλλά ταυτόχρονα και ένα εμπόδιο στην κατανόηση ορισμένων γεωμετρικών θεωρημάτων. Ο Πρόκλος αξιοποιεί διδακτικά το γεγονός ότι η γνώση της θεωρητικής γεωμετρίας συμβάλλει στη διάλυση αυτής της πλάνης, καθώς σχολιάζει την πρόταση 37 του 1^{ου} βιβλίου των Στοιχείων. Η πρόταση αυτή εκφράζει μια ιδιότητα σχετική με τα εμβαδά των τριγώνων που έρχεται σε σύγκρουση με την άμεση εμπειρία. και για το λόγο αυτό οι αρχαίοι την κατέτασσαν στα λεγόμενα «παράδοξα θεωρήματα».

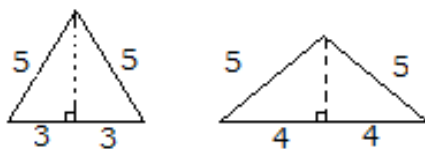
¹ Ο Θουκυδίδης για παράδειγμα, εκτιμά το μέγεθος της Σικελίας από το χρόνο που απαιτείται για τον περίπλου της (Heath 1925 σ.332).

Στοιχεία, Βιβλίο I, Πρόταση 37

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



Πολλοί απορούν με αυτή την πρόταση, γράφει ο Πρόκλος. Πώς είναι δυνατό σε δύο τρίγωνα που έχουν την ίδια βάση, οι άλλες πλευρές να αυξάνουν ἐπ' ἀπειρον ανάμεσα σε δύο παράλληλες και όμως η ισότητα των χωρίων να παραμένει αμετάβλητη; Αυτή η απορία δημιουργείται σε όσους συνδέουν την ισότητα των χωρίων με την ισότητα των περιμέτρων, όπως οι χωρογράφοι που υπολογίζουν τα μεγέθη των πόλεων από τις περιμέτρους. Στις διανομές των κτημάτων ορισμένοι παραπλάνησαν τους υπόλοιπους παραχωρώντας σ' αυτούς μεγαλύτερη περίμετρο με μικρότερο εμβαδόν κερδίζοντας έτσι όχι μόνο γη αλλά και τη φήμη του έντιμου πολίτη! ²



Αν πρόκειται να διαλέξουμε, συνεχίζει ο Πρόκλος, ανάμεσα σε δύο ισοσκελή τρίγωνα με πλευρές 5, 5, 6 και 5, 5, 8, που έχουν περίμετρο 16 και 18 αντίστοιχα, είναι πιθανό ότι ο «άπειρος γεωμετρίας» θα ξεγελαστεί και θα διαλέξει το τρίγωνο με τη μεγαλύτερη περίμετρο. Ο γεωμέτρης όμως θα αντιληφθεί ότι τα χωρία είναι ίσα παρά το γεγονός ότι έχουν άνισες περιμέτρους, διότι καθένα έχει εμβαδόν 12. Αν φέρουμε την κάθετη από την κορυφή θα χωρίσουμε τη βάση σε δύο ίσα μέρη. Έτσι στο ένα τρίγωνο το μισό της βάσης θα είναι 3 και στο άλλο 4, ενώ αντίστροφα η κάθετη θα

² Ο Πάππος στο 3^ο βιβλίο της *Συναγωγής* (προτάσεις 40 και 41) δείχνει τον τρόπο κατασκευής ενός παραλληλογράμμου ή τριγώνου που έχει μικρότερο εμβαδόν από δοθέν παραλληλόγραμμο ή τρίγωνο αντίστοιχα, αλλά μεγαλύτερη περίμετρο από αυτό (Σπανδάγος 2001α).

είναι 4 στο πρώτο και 3 στο δεύτερο (σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα).

Αν τώρα πολλαπλασιάσουμε την κάθετη με το μισό της βάσης θα βρούμε το εμβαδόν του τριγώνου· και αυτό είναι ίδιο σε κάθε περίπτωση, είτε πολλαπλασιάσουμε το 3 επί το 4 είτε το 4 επί το 3!

Τα προηγούμενα σχόλια και παραδείγματα του Πρόκλου δείχνουν ότι οι εμπειρικές γεωμετρικές γνώσεις, πάνω στις οποίες οικοδομήθηκε η θεωρητική Ευκλείδεια Γεωμετρία, αποτελούν ένα αναγκαίο εμπόδιο το οποίο πρέπει να υπερβεί η μάθηση της τελευταίας, αλλά και μια δεξαμενή ιδεών για την οργάνωση της διδασκαλίας. Οι πλάνες ως προς τη σχέση εμβαδού και περιμέτρου, και η εκμετάλλευσή τους από ορισμένους επιτήδειους της αρχαιότητας στη διανομή της γης, αξιοποιήθηκαν από τον Πρόκλο με επιδέξιο τρόπο, ώστε να «περάσει» κάποια μηνύματα σχετικά με τις ιδιαιτερότητες και δυνατότητες της θεωρητικής Γεωμετρίας. Ή, για να το θέσουμε πιο επιγραμματικά, να προβάλλει τη διαφορά ανάμεσα στον «άπειρο γεωμετρίας» και το «γεωμέτρη» και να προτρέψει έτσι τους αναγνώστες του έργου του να ασχοληθούν σοβαρά με τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Το ερώτημα στο οποίο οφείλουμε βέβαια να απαντήσουμε τώρα είναι το εξής: Ποια σχέση έχουν όλα τα παραπάνω με τη διδασκαλία και μάθηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας τη σημερινή εποχή;

Η σημασία των ιστορικών παρεκβάσεων

Σε μια προηγούμενη εργασία μας είχαμε παρουσιάσει τα αποτελέσματα μερικών ιστορικών παρεμβάσεων στη διάρκεια της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο (Θωμαΐδης 1990). Εκείνες οι παρεμβάσεις είχαν προκληθεί ως αντίδραση στο ασφυκτικό αναλυτικό πρόγραμμα, που καθιστά τη διδασκαλία ένα αγώνα δρόμου για την κάλυψη της ύλης και την αξιολόγηση των μαθητών. Οι μαθητές ασχολήθηκαν με τη θεωρία και τις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου μέσα από μια ιστορική προοπτική, όχι για να αποκτήσουν περισσότερες τεχνικές γνώσεις, αλλά για να εκτιμήσουν το ρόλο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην επίλυση σημαντικών επιστημονικών προβλημάτων και, μέσω αυτών, τη μεγάλη σημασία της στην εξέλιξη του πολιτισμού. Μια άμεση και πολύ φανερή

επίδραση εκείνων των παρεκβάσεων υπήρξε στην αλλαγή της στάσης των μαθητών. Όπως σημειώναμε τότε:

... οι ιστορικές παρεκβάσεις λειτούργησαν πολύ αποτελεσματικά σαν συμπληρωματικό στοιχείο της διδασκαλίας, ιδιαίτερα σε στιγμές που η κανονική ροή της διδασκαλίας δημιουργούσε φαινόμενα αρνητικών αντιδράσεων και αδιαφορίας σε πολλούς μαθητές. Διεγείροντας την περιέργεια και το ενδιαφέρον των μαθητών, έδειξαν ότι τα θεωρήματα και οι ασκήσεις του σχολικού βιβλίου, από αντικείμενα μιας ψυχρής θεωρητικής ανάπτυξης, μπορούν να γίνουν κίνητρα για συζήτηση και συμμετοχή σε δημιουργικές δραστηριότητες (ο.π., σ.39).

Η καλλιέργεια θετικών στάσεων οι οποίες στηρίζονται στην εκτίμηση της σημασίας του μαθήματος από τους μαθητές, αποτελεί μια τελείως απαραίτητη προϋπόθεση της διδασκαλίας, ιδιαίτερα όταν αυτή βρίσκεται στο κρίσιμο στάδιο της μετάβασης από την πρακτική προς τη θεωρητική μαθηματική γνώση. Τα παραδείγματα από το έργο του Πρόκλου μας υποδεικνύουν ότι για την καλλιέργεια τέτοιων στάσεων στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας υπάρχει μια ανεξάντλητη πηγή, που δεν είναι άλλη από την ιστορική εξέλιξη αυτού του επιστημονικού κλάδου. Η σημασία της θεωρητικής γνώσης, που εδράζεται στην ιδέα της αξιωματικής θεμελίωσης και την έννοια της απόδειξης, αναδεικνύεται με τον πλέον πειστικό τρόπο όταν τα θεωρητικά αποτελέσματα χρησιμοποιούνται για να αποκαλυφθούν τα σφάλματα στα οποία μπορεί να οδηγήσουν οι εμπειρικές παρατηρήσεις και οι μετρήσεις, δηλαδή τα στοιχεία που συνιστούν τον πυρήνα της Πρακτικής Γεωμετρίας. Η δυνατότητα και η αναγκαιότητα να συνδυαστούν οι εμπειρικές και οι θεωρητικές γνώσεις στη Γεωμετρία δεν είναι βέβαια ένα ζήτημα που τεκμηριώνεται μόνο ιστορικά. Πρόσφατες έρευνες στη Διδακτική των Μαθηματικών δείχνουν ότι αυτή η δυνατότητα μπορεί να στηριχτεί σε πειραματικά δεδομένα, και προτείνεται η εισαγωγή αποδεικτικών συλλογισμών κατά τη διδασκαλία γεωμετρικών εννοιών ακόμη και στο Δημοτικό Σχολείο (Κούρκουλος, Τζανάκης & Θεολογίτου 2000).

Κλείνουμε αυτή την εισήγηση με μια παρατήρηση που αφορά περισσότερο τους σκεπτικιστές και τους «ρεαλιστές», οι οποίοι υποστηρίζουν ότι μοναδικό κίνητρο για τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών

αποτελούν οι εξετάσεις και η συμφυής με αυτές ασκησιολογία (χαρακτηρίζοντας ως «χάσιμο χρόνου» κάθε άλλη διδακτική πρωτοβουλία, όπως π.χ. οι ιστορικές παρεκβάσεις). Στις πανελλήνιες εξετάσεις Γεωμετρίας της Β' Λυκείου έχουν εμφανιστεί τα τελευταία χρόνια ως «προβλήματα» διάφορα θέματα σχετικά με τα εμβαδά αγροτεμαχίων. Επίσης στους διαγωνισμούς του Α.Σ.Ε.Π. για το διορισμό εκπαιδευτικών, θέματα που αφορούν τη σύγκριση εμβαδών και περιμέτρων ή την αξιολόγηση της σημασίας των ιστορικών σημειωμάτων στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Ελπίζουμε ότι αυτή η παρατήρηση θα διευρύνει την αντίληψη για τη «χρησιμότητα» της Ιστορίας των Μαθηματικών, αλλά δεν θα οδηγήσει σε μια φροντιστηριακού τύπου «αξιοποίησή» της!

Βιβλιογραφικές Αναφορές

- Biehler, R. (1994). History and Epistemology of Mathematics and Mathematics Education. In R. Biehler *et al* [eds.], *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 327-333). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Clements, D. & Battista, M. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. In D. Grouws [ed.], *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan Publishing Company.
- Cuomo, S. (2001). *Ancient Mathematics*. London: Routledge.
- Heath, Th. (1925). *Euclid. The Thirteen Books of the Elements*. Vol. 1 (Books I and II). New York: Dover Publications.
- Fauvel, J. & Maanen, J. van. (2000). *History in Mathematics Education. The ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Hershkowitz, R. *et al.*, (1990/1996). Ψυχολογικές όψεις της μάθησης της Γεωμετρίας. *Ερευνητική Διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών* 1, pp. 93-135.
- Hershkowitz, R. *et al.* (1996). Space and Shape. In A. Bishop *et al* [eds.], *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 161-204). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

- Knorr, W. (1975). *The Evolution of the Euclidean Elements. A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Knorr, W. (1986). *The Ancient Tradition of Geometric Problems*. Boston: Birkhäuser.
- Mammana, C. & Villani, V. (1998). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Morrow, G. (1970). *Proclus. A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Princeton: Princeton University Press.
- Netz, R. (1999). *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics. A Study in Cognitive History*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Θωμαΐδης, Γ. (1990). Ιστορικές παρεκβάσεις στο μάθημα της Γεωμετρίας. *Ευκλείδης Γ'*, τεύχος 25, σσ. 27-41.
- Θωμαΐδης, Γ. & Πούλος, Α. (2000). *Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.
- Κούρκουλος, Μ., Τζανάκης, Κ. & Θεολογίτου, Κ. (2000). Η Ευκλείδεια Γεωμετρία στο Δημοτικό Σχολείο. Παραδείγματα και πειραματική διερεύνηση. *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, τεύχος 113, σσ. 64-76 και τεύχος 114, σσ. 75-81.
- Σπανδάγος, Ε. (2001α). *Η Μαθηματική Συναγωγή του Πάππου του Αλεξανδρέως*. Τόμος Α'. Αθήνα: Εκδόσεις Αίθρα.
- Σπανδάγος, Ε. (2001β). *Τα Σχόλια του Πρόκλου στο α' βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδου*. Αθήνα: Εκδόσεις Αίθρα.

Ανάπτυξη μιας ενότητας διδακτικών δραστηριοτήτων για το ολοήμερο σχολείο με πυρήνα στοιχεία από την ιστορία των μαθηματικών: Η ιστορική εξέλιξη των αριθμητικών συστημάτων

Νικολέττα Ισχυρλίδου & Δημήτρης Χασάπης

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Α.Π.Θ.

Πλαίσιο ανάπτυξης της ενότητας των διδακτικών δραστηριοτήτων

Το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης αποτελεί σήμερα μια μοναδική, παγκόσμια κοινά αποδεκτή γλώσσα. Πριν φτάσουμε στην κοινή αυτή παραδοχή εμφανίστηκαν στην ιστορία των λαών αρχαίοι πολιτισμοί που ο καθένας επινόησε το δικό του αριθμητικό σύστημα. Η επινόηση των συστημάτων αυτών ήταν συνάρτηση των αναγκών και του περιβάλλοντος του κάθε λαού.

Σε μια προσπάθεια να γνωρίσουν οι μαθητές/τριες την ιστορική εξέλιξη των αριθμητικών συστημάτων, τη χρηστική και τη λειτουργική τους αξία στο περιβάλλον και στις συνθήκες των πολιτισμών που τα δημιούργησαν, τις ανάγκες που τα καθιέρωσαν και τα κατάργησαν, σχεδιάστηκε ένας φάκελος δραστηριοτήτων με θέμα: «Η ιστορική εξέλιξη των αριθμητικών συστημάτων». Οι δραστηριότητες του φακέλου αυτού αποτελούν μιας διδακτική πρόταση για εφαρμογή στα προγράμματα δημιουργικών δραστηριοτήτων των σχολείων διευρυμένου ωραρίου (ολοήμερο σχολείο).

Στο σχεδιασμό της ενότητας των διδακτικών δραστηριοτήτων που περιγράφονται εδώ, θεωρήθηκαν ως βασικοί τρεις παράμετροι, ώστε η υλοποίηση των προτεινόμενων δραστηριοτήτων να είναι δυνατή και εφαρμόσιμη:

Η πρώτη παράμετρος αφορά στις γνωστικές και ψυχοκινητικές ανάγκες και στα ενδιαφέροντα των μαθητών/τριών στα οποία απευθύνονται οι

συγκεκριμένες δραστηριότητες. Δηλαδή, στις ανάγκες και στα ενδιαφέροντα των μαθητών/τριών της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης του Δημοτικού σχολείου καθώς και στους μαθητές/τριες όλων των τάξεων του Γυμνασίου.

Η δεύτερη παράμετρος, σε στενή συσχέτιση με την προηγούμενη, καλύπτει τη γνωστική, συναισθηματική και μετα-γνωστική διάσταση της μάθησης και της διδασκαλίας. Τα παιδιά της ηλικίας στην οποία αναφερόμαστε έχουν ήδη αναπτύξει, σύμφωνα με την εξελικτική ψυχολογία, τις προαπαιτούμενες νοητικές ικανότητες (μετάβαση από την αισθησιοκρατούμενη στην αφηρημένη σκέψη) και τις γνωστικές δεξιότητες σύγκρισης, ανάλυσης, σύνθεσης και κρίσης (Παρασκευόπουλος, 1983) προκειμένου να εμπλακούν ενεργητικά στις διαδικασίες διαπραγμάτευσης του διδακτικού υλικού που προτείνουμε. Εξάλλου, η καλλιέργεια των ψυχο-γνωστικών ικανοτήτων των μαθητών/τριών μέσα από την εναλλακτική προσέγγιση των μαθηματικών είναι και ένας από τους ευρύτερους στόχους της παρούσας πρότασης.

Η τρίτη παράμετρος περιλαμβάνει τα δεδομένα της σύγχρονης ελληνικής εκπαιδευτικής πραγματικότητας (υλικοτεχνική υποδομή, εκπαιδευτικό προσωπικό, ωρολόγιο πρόγραμμα, αναλυτικό πρόγραμμα κ.α).

Είναι αυτονόητο, ότι η παρούσα πρότασή δεν βασίζεται στην τυπική σχέση - τουλάχιστον σε γνωστικό επίπεδο - που έχει παγιωθεί μεταξύ των παιδιών και της διδακτικής ύλης των μαθηματικών και ούτε ενδιαφέρεται για την ανάπτυξη μιας καινούριας διδακτικής μεθοδολογίας για την διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών του αναλυτικού προγράμματος. Δίχως να παρεκκλίνει από τις βασικές παιδαγωγικές επιδιώξεις και τους βασικούς σκοπούς των γνωστών διδακτικών προσεγγίσεων των μαθηματικών, κύριος στόχος της είναι η διαδικασία των προτεινόμενων δημιουργικών δραστηριοτήτων να λειτουργήσει ως μέσο για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και των πολλαπλών διαστάσεων που πλαισιώνουν την ιστορικά συγκροτημένη επιστήμη των μαθηματικών.

Ξεκινώντας από την χρηστική τους διάσταση και μέσα από μια ιστορικο-πολιτισμική προσέγγιση επιδιώκουμε να αντιληφθούν οι μαθητές/τριες, ότι τα μαθηματικά δεν είναι απλώς ο χειρισμός αριθμών και συμβόλων, μαθηματικών σχέσεων και πράξεων αλλά πάνω απ' όλα είναι ένα

πολιτισμικό εργαλείο παρόμοιο με αυτό της γλώσσας που δημιουργήθηκε από τις ίδιες ανάγκες που γέννησαν την γλώσσα και εμπεριέχει την ίδια δυναμική που εμπεριέχεται στην γλώσσα (Vygotsky, 1997).

Συγκεκριμένα, επιδιώκεται να διαπιστώσουν οι μαθητές/τριες ότι τα μαθηματικά είναι σε επικοινωνιακή βάση μια κωδικοποιημένη γλώσσα που γεννιέται από τις κοινωνικές, οικονομικές και πολιτιστικές ανάγκες των λαών και που εξελίσσονται ακολουθώντας παράλληλα την ιστορική πορεία της εξέλιξης των κοινωνιών, μεταφέροντας διαχρονικά τα βασικά αρχέτυπα πολιτισμικά στοιχεία των λαών που τα επινόησαν. Σύμφωνα με τον Leibnitz, τίποτα δεν είναι σπουδαιότερο από το να δει κανείς καθαρά την προέλευση μιας μαθηματικής ιδέας, ούτε η ίδια η ιδέα.

Οι δραστηριότητες λοιπόν που προτείνονται, επιδιώκουν να μεταφέρουν τους μαθητές/τριες σε ένα ταξίδι στο χρόνο στη διάρκεια του οποίου όπου εμπλεκόμενοι και οι ίδιοι/ες θα γνωρίσουν την προέλευση των αριθμητικών συστημάτων και τις ανάγκες που τα δημιούργησαν, ανάγκες με καθαρά κοινωνικές καταβολές, έτσι ώστε να αντιληφθούν κατά το δυνατόν τις ιστορικές, φιλοσοφικές, διαπροσωπικές και δια-κοινωνικές δομές και προεκτάσεις της επιστήμης των Μαθηματικών (Cobb 1998, Χασάπης 2000).

Περιεχόμενο και οργάνωση της ενότητας των διδακτικών δραστηριοτήτων

Ο σχεδιασμός της ενότητας των διδακτικών δραστηριοτήτων διέπεται από μία σειρά διδακτικών αρχών, που στηρίζουν την εναλλακτική μορφή της πρότασής μας ως προς το περιεχόμενο, ως προς την διαδικασία και ως προς την μεθοδολογία ανάπτυξής τους.

α) Περιεχόμενο των διδακτικών δραστηριοτήτων

Κάθε διδακτική δραστηριότητα έχει ένα κεντρικό θέμα (π.χ Αιγυπτιακό αριθμητικό σύστημα, οι αριθμομηχανές, συγκριτική μελέτη των αρχαίων αριθμητικών συστημάτων, κ.ο.κ.) και αποτελείται από επιμέρους δραστηριότητες οι οποίες στόχο έχουν να καλλιεργήσουν ποικίλες δεξιότητες των μαθητών/τριών. Οι επιμέρους αυτές δραστηριότητες

οργανώνονται ακολουθώντας διαδοχικά τα ιστορικά στάδια εξέλιξης και διαμόρφωσης των αριθμητικών συστημάτων στον κάθε πολιτισμό.

Περίληπτική παρουσίαση της δομής μιας δραστηριότητας:

Η προϊστορία των αριθμών

Στόχοι – επιδιώξεις

1. *Η κατανόηση του ιστορικού γεγονότος, ότι υπήρξε μια εποχή στην ιστορία της ανθρωπότητας κατά την οποία ο άνθρωπος δεν ήξερε να αριθμεί..*
2. *Η κατανόηση του ιστορικού γεγονότος, ότι η αρίθμηση είναι εφεύρεση του ανθρώπινου νου.*
3. *Η κατανόηση των βασικών αρχών και η ανάπτυξη ευχέρειας χρήσης του συστήματος αρίθμησης των προϊστορικών ανθρώπων.(αρχή της αντιστοίχισης μονάδας με μονάδα-σχέση διαδοχής).*
4. *Η κατανόηση του γεγονότος, ότι στις τεχνικές της αρίθμησης εφαρμόζεται η αρχή της αντιστοίχισης ένα προς ένα (αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία), εισάγεται μια σχέση διαδοχής και μια έννοια βάσης της αρίθμησης.*

Υλικά

Διαφάνειες, έντυπο υλικό με τις πρώτες αριθμητικές δραστηριότητες του ανθρώπου, χρωματιστές χαρτοσακούλες , πετραδάκια, ένα κομμάτι ξύλου, κ.α.

Πληροφορίες [περίληπτικά]

Ο άνθρωπος των προϊστορικών χρόνων δεν μπορούσε να συλλάβει την αφηρημένη έννοια των αριθμών. Η αριθμητική του ικανότητα περιοριζόταν στην άμεση αντίληψη. Οι πρώτες αφηρημένες έννοιες που συνέλαβε ήταν η μονάδα ,η δυάδα και η πολλαπλότητα.

Οι προϊστορικοί άνθρωποι αρχικά σημείωναν τους εννέα πρώτους αριθμούς με την επανάληψη μικρών κάθετων γραμμών .Αργότερα υπακούοντας στον φυσικό νόμο της άμεσης αντίληψης μέχρι και τεσσάρων αντικειμένων, ομαδοποιούσαν τις μονάδες, σε τριάδες ή τετράδες.

Η πρώτη αριθμητική μέθοδος που επινόησε ο άνθρωπος για να αντιμετωπίσει τις καθημερινές του ανάγκες(καταμέτρηση ζώων, τροφών ,λάφυρων πολέμου κ.α) ήταν η αντιστοίχιση ένα προς ένα. Τα μέλη του σώματος που είχαν παραταχθεί από πριν με μία καθορισμένη σειρά εισήγαγαν την σχέση διαδοχής και την έννοια της βάσης.

Χάρη στην μέθοδο της αντιστοίχισης μονάδας με μονάδα, στην σχέση διαδοχής(Bunt-Jones-Bedient, 1981) και την έννοια της βάσης, ο προϊστορικός άνθρωπος μπόρεσε να κάνει αριθμητική πριν συνειδητοποιήσει και γνωρίσει τι είναι αφηρημένος αριθμός..

Ερωτήσεις κλειδιά

1.Από που προέρχονται οι αριθμοί; Πως γεννήθηκαν οι αριθμοί;

2.Πώς μετρούσαν οι πρωτόγονοι άνθρωποι;

3.Πως ο άνθρωπος ξεπέρασε τις φυσικές ικανότητές του και κατάφερε να απαριθμεί, να μετρά και να υπολογίζει οτιδήποτε ξεφεύγει από την άμεση αντίληψή του;

Διαδικασία προσέγγισης και διαχείρισης

Δίνεται στους μαθητές διδακτικό υλικό καλά σχεδιασμένο ,έτσι ώστε να εμπλακούν σε αρχέγονες διαδικασίες μέτρησης λύνοντας προβλήματα που αφορούν τις πρακτικές σύγχρονες ανάγκες τους.

Διδακτικές δραστηριότητες - Στόχοι - επιδιώξεις

Δραστηριότητα 1

Να σημειωθεί η προϊστορική περίοδος της ανθρωπότητας πάνω στην ιστορική γραμμή (δίνεται βοηθητικά και ο παρακάτω πίνακας):

	<i>ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΓΡΑΦΗΣ</i>	<i>ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΣΗΜΕΙΩΣΗΣ</i>
30000- 20000 π.Χ	<i>Οι πρώτες ιχνογραφίες</i>	<i>Τα πρώτα χαραγμένα οστά της προϊστορίας. Εμφάνιση των σουμερικών ψηφίων και των αιγυπτιακών ιερογλυφικών.</i>
2700π.Χ	<i>Εμφάνιση των σφηνοειδών σχημάτων στα σουμερικά πλακίδια</i>	<i>Εμφάνιση σφηνοειδών ψηφίων.</i>
2500- 2000 π.Χ	<i>Οι μεσοποτάμιοι λαοί δανείζονται τους σφηνοειδείς χαρακτήρες για να σημειώσουν την δική τους γλώσσα.</i>	<i>Οι μεσοποτάμιοι λαοί δανείζονται τα σουμερικά σφηνοειδή ψηφία και τα εφαρμόζουν σιγά –σιγά στη βάση δέκα.</i>
1900- 1800π.Χ		<i>Εμφάνιση της αρχαιότερης γραπτής θεσιακής αρίθμησης στους Βαβυλώνιους σοφούς(σύστημα βάσης του εξήντα και σφηνοειδή ψηφία.)</i>

Ο πίνακας συνεχίζεται

Δραστηριότητα 2

Προτείνουμε βιβλιογραφία ή διευθύνσεις στο διαδίκτυο για να ανατρέξουν οι μαθητές/τριες σε ιστορικές πηγές και να συγκεντρώσουν το κατάλληλο υλικό που αναφέρεται στην αρίθμηση κατά την προϊστορική περίοδο της ανθρωπότητας. Αφού συζητήσουν κατά ομάδες για το κοινωνικό, οικονομικό και πολιτιστικό πλαίσιο μέσα στο οποίο κινήθηκε η

προϊστορική περίοδος, καταγράφουν τα συμπεράσματά τους. Κάθε ομάδα ανακοινώνει τα συμπεράσματά της στην τάξη και όλοι/ες μαζί τα συζητούν. Εναλλακτικά, κάθε ομάδα μαθητών/τριών μπορεί να αναζητήσει πληροφορίες για ένα συγκεκριμένο πεδίο, π.χ μία ομάδα να συγκεντρώσει υλικό για τα ιστορικά χαρακτηριστικά της περιόδου, άλλη ομάδα για τα οικονομικά χαρακτηριστικά, άλλη ομάδα για τα κοινωνικά κ.ο.κ έτσι ώστε αφού γίνουν οι ανακοινώσεις από κάθε ομάδα και ακολουθήσει διάλογος να καταλήξουν όλοι/ες μαζί στο να αναδείξουν μια εικόνα της περιόδου με σχετική πληρότητα και σε σχέση πάντα με τον επιδιωκόμενο στόχο.

Δραστηριότητα 3

Να σχεδιάσουν οι μαθητές/τριες, αφού εργαστούν κατά ομάδες, μια παραγγελία στο παντοπωλείο της γειτονιάς καταγράφοντας βήμα προς βήμα ποιες προφορικές οδηγίες θα έδιναν σε αυτόν που θα εκτελούσε την παραγγελία, αν δεν γνώριζε να αριθμεί και να διαχειρίζεται το νόμισμα.

Παράδειγμα:

Παραγγελία: Να αγοράσει 3 κιλά φακές, 2 κιλά ζάχαρη, 4 κιλά σταφύλια.

Εκδοχή: Μπορούμε να ετοιμάσουμε 3 καφέ σακουλάκια και να τα συσχετίσουμε με τα τρία κιλά φακές, 2 άσπρα σακουλάκια και να τα συσχετίσουμε με τα δύο κιλά ζάχαρη και 4 πράσινα σακουλάκια και να τα συσχετίσουμε με τα τέσσερα κιλά σταφύλια. Σε κάθε σακουλάκι βάζουμε το αντίτιμο του κάθε κιλού σε ένα νόμισμα και ζητούμε από τον παραγγελιολήπτη να ανταλλάξει στο παντοπωλείο το κάθε σακουλάκι με το αντίστοιχο κιλό του προϊόντος της παραγγελίας μας.

Να σκεφτούν οι μαθητές/τριες σήμερα όπως οι πρωτόγονοι άνθρωποι την περίοδο που δεν ήξεραν να μετρούν με αριθμούς .

Να αντιληφθούν ότι τέτοιου είδους σκέψεις βοήθησαν το ανθρώπινο μυαλό να προχωρήσει και να εφεύρει νέους τρόπους και μεθόδους πιο αποτελεσματικές, για να λύσει τα πρακτικά καθημερινά προβλήματα. (Hughes, 1999).

Ακολουθεί διάλογος, μεταξύ των μαθητών /τριών για να συγκρίνουν τους δικούς τους τρόπους σκέψης, με τον τρόπο που σκέφτονταν οι πρώτοι άνθρωποι, όταν ήθελαν να έχουν ακριβείς πληροφορίες για τον αριθμό των ζώων στα κοπάδια τους και να κάνουν σωστές εμπορικές συναλλαγές με τα προϊόντα τους κ.α

Μέσα σε πλαίσια εποικοδομητικού διαλόγου οι μαθητές κάνοντας χρήση των προϋπαρχουσών ιδεών για την αρίθμηση συνειδητοποιούν ότι σχεδόν όλοι οι άνθρωποι από τα πανάρχαια χρόνια έως και σήμερα αναπτύσσουν αρχικά τους ίδιους μηχανισμούς για την αριθμητική μέτρηση.

Μαθαίνουν λέξεις και έννοιες από τον κώδικα της γλώσσας των μαθηματικών π.χ αρίθμηση, καταμέτρηση, αναλογία, σχέση διαδοχής και τις χρησιμοποιούν σε πραγματικές συνθήκες επικοινωνίας (καλλιέργεια του προφορικού λόγου)

Λεξιλόγιο

Αριθμητική ικανότητα, αναλογία, αντιστοίχιση, σχέση, διαδοχή, πολλαπλότητα, εφεύρεση, επινόηση

Αξιολόγηση

Σε μία φυλή ιθαγενών ο βοσκός όταν έβγαζε τα ζώα για βοσκή τοποθετούσε 35 πετραδάκια όσα ήταν τα ζώα του. Την πρώτη ημέρα όταν επέστρεψε το κοπάδι στη στάνη περίσσεψε ένα πετραδάκι. Την δεύτερη μέρα όταν έβγαλε τα ζώα από τη στάνη χρειάστηκε ένα επιπλέον πετραδάκι για να τα μετρήσει.

Πόσα ήταν τα ζώα που επέστρεψαν την πρώτη μέρα;(τι κατάλαβε ο βοσκός;)

Πόσα ήταν τα ζώα που βγήκαν από την στάνη την δεύτερη ημέρα;(τι να συνέβη άραγε;)

Να σχολιάσουν γραπτά οι ομάδες τις μεθόδους και τεχνικές που χρησιμοποιούσαν οι άνθρωποι για να μετρούν την περίοδο αυτή και να τις συγκρίνουν με την αντίστοιχη σημερινή μέθοδο που χρησιμοποιούμε στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.

- Η κάθε δραστηριότητα καλύπτει στο εβδομαδιαίο πρόγραμμα του διευρυμένου ωραρίου 2 –3 διδακτικές ώρες.
- Στην σειρά και την εσωτερική δομή των δραστηριοτήτων τηρείται η αρχή της ιστορικής ακολουθίας..
- Το διδακτικό υλικό οργανώνεται σε τέσσερα επίπεδα:

1^ο επίπεδο:

Παρουσίαση των αριθμητικών συστημάτων με βάση την ιστορική και πολιτισμική εξέλιξή τους.

Η προϊστορία των αριθμών.	Αιγυπτιακό αριθμητικό σύστημα (Bunt, Jones & Bedient, 1981)	Βαβυλωνιακό αριθμητικό σύστημα (Boyer & Merzbach, 1997)	Αρχαίο Ελληνικό αριθμητικό σύστημα (Heath, 2001)	Ρωμαϊκό αριθμητικό σύστημα	Σύγχρονο Δεκαδικό αριθμητικό σύστημα
---------------------------	---	---	--	----------------------------	--------------------------------------

2^ο επίπεδο

Συγκριτική παρουσίαση των αριθμητικών συστημάτων

Με την βοήθεια της ιστορικής γραμμής δείχνουμε την σειρά εμφάνισης των αριθμητικών συστημάτων.

Παραθέτουμε τις αφίσες της πολιτισμικής εξέλιξης των αριθμητικών συστημάτων με την αντίστοιχη ιστορική σειρά. Ακολουθεί επεξεργασία της δραστηριότητας..

3^ο επίπεδο

Σύγχρονα αριθμητικά συστήματα διαφορετικά από το δεκαδικό

Μαθαίνουμε μέσω της ιστορίας των μαθηματικών , για το πενταδικό, το εξαδικό κ.α αριθμητικά συστήματα και επιμένουμε στην κατανόηση και εξάσκηση στο δυαδικό σύστημα που είναι η γλώσσα της λειτουργίας των Η/Υ σήμερα.

Ακολουθεί επεξεργασία της δραστηριότητας.

4^ο επίπεδο

Από τις πρώτες αριθμομηχανές μέχρι τους Η/Υ

Το ανθρώπινο χέρι η πρώτη αριθμομηχανή , οι άβακες , η αριθμομηχανή του Pascal (Σαλταμπίδα, 1987) , ο υπολογιστής τσέπης και τέλος οι Η/Υ είναι ένα ταξίδι με σταθμούς τα επιτεύγματα της επιστήμης και της τεχνολογίας.

- Η προσέγγιση γίνεται **διαθεματικά**. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθηματικές έννοιες παρουσιάζονται σε συνάρτηση με άλλες γνωστικές περιοχές. Θα σχεδιαστούν δραστηριότητες τέτοιες που θα δίνουν στους μαθητές/τριες τη δυνατότητα της χρήσης των μαθηματικών εννοιών μέσα από τη διερεύνηση άλλων γνωστικών περιοχών.
- Πολυμορφία, ποικιλία και πρωτοτυπία των οπτικών και απτικών υλικών. Χρησιμοποιείται ποικιλία οπτικών και απτικών υλικών και δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην ενθάρρυνση των παιδιών για αυτοσχέδιες κατασκευές, πολλές από τις οποίες είτε είναι αναπαραστάσεις πρωτόγονων αριθμητικών βοηθημάτων είτε ακόμη και δικές τους επινοήσεις. Στην συλλογή αυτού του υλικού συγκαταλέγονται απλά καθημερινά υλικά τα οποία αποτελούν και την πρώτη ύλη καθώς και το ερέθισμα για ποικιλία δραστηριοτήτων: Πέτρες, χαλίκια, χαρτοσακούλες, πηλός, πάπυρος, σπύρτα, χάντρες αλλά και γεωγραφικοί χάρτες, εικόνες αρχαιολογικών ευρημάτων, εικόνες αριθμομηχανών από το τεχνικό μουσείο και άλλα παρόμοια υλικά.

β) Διαδικασία ανάπτυξης των διδακτικών δραστηριοτήτων

Η ενότητα των διδακτικών δραστηριοτήτων αναπτύσσεται με βάση την αρχή ότι τα μαθηματικά είναι μια κοινωνική κατασκευή.

Έτσι, επιδιώκεται η ενεργός συμμετοχή των μαθητών/τριών για την κατανόηση της ιστορικής εξέλιξης των αριθμητικών συστημάτων ως ανθρώπινης δραστηριότητας. Στην ενότητα των διδακτικών δραστηριοτήτων που σχεδιάσαμε δεν είναι αυτοσκοπός η δηλωτική γνώση και η απομνημόνευση των αρχαιότερων αριθμητικών συστημάτων, αλλά μέσα από τη γνώση αυτή και τη συγκριτική μελέτη αυτών των συστημάτων

που είτε αναπτύχθηκαν συγχρόνως, είτε σε διαφορετικές ιστορικές στιγμές από διαφορετικούς πολιτισμούς, να αντιληφθούν οι μαθητές/τριες την εξέλιξη της ιστορικό -πολιτισμικής αυτής διαδικασίας, καθώς επίσης τις ομοιότητες και τις διαφορές των οργανωτικών και λειτουργικών αρχών που τα διέπουν.

Τέλος, βασική μας επιδίωξη αποτελεί μέσα από αυτήν την εξελικτική διαδικασία οι μαθητές/τριες να κατανοήσουν τα πλεονεκτήματα του σημερινού δεκαδικού συστήματος αρίθμησης και με βάση το παράδειγμα αυτό να προβληματιστούν για τις διαδικασίες ανάπτυξης της ανθρώπινης γνώσης.

γ) Μεθοδολογία ανάπτυξης των διδακτικών δραστηριοτήτων

Πυρήνα της ανάπτυξης των διδακτικών δραστηριοτήτων αποτελεί η ενεργή συμμετοχή των μαθητών/τριών οργανωμένων σε μικρές ομάδες.. Η διδακτική προσέγγιση που προτείνουμε πιστεύουμε ότι επηρεάζει τη στάση των μαθητών/τριών απέναντι στα μαθηματικά βοηθώντας τους να συνειδητοποιήσουν ότι τα μαθηματικά είναι μέρος της παράδοσης και του πολιτισμού όλων ανεξαιρέτως των λαών και ως μία τέτοια παγκόσμια κληρονομιά δεν μπορεί παρά να διεκδικείται από όλους τους ανθρώπους ανεξάρτητα από τη φυλή και την εθνότητα τους.

Βιβλιογραφία

- Βοσνιαδου, Σ. (επιμ.), 1998, Η ψυχολογία των μαθηματικών, Gutenberg, Αθήνα.
- Boyer C. B. & Merzbach, U. C., (1977), Η ιστορία των μαθηματικών.
- Bunt L. N.H., Jones, P. S. & Bedient, J. D. (1981), Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών μαθηματικών, Εκδόσεις Γ.Α Πνευματικού, Αθήνα.
- Cobb, P. (1989), Experiential, cognitive and anthropological perspectives in mathematics education, *For Learning Mathematics*, vol.9, no. 2, 32-42.
- Heath, T. L. (2001), Ιστορία των Ελληνικών μαθηματικών, Εκδόσεις Κε.Επ.Εκ., Αθήνα.

- Ζαχαρος Κ. , Τρεσσου Ε. , Χασαπης Δ. (1997), Στρατηγικές μαθητών της Α΄ λυκείου στην αντιμετώπιση προβλημάτων μέτρησης επιφανειών. Η συμβολή του πολιτισμικού-ιστορικού «εργαλείου», *14^ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας*,. *Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία*, Μυτιλήνη.
- Hughes, M. (1999), Τα παιδιά και η έννοια των αριθμών, Gutenberg, Αθήνα.
- Παρασκευοπουλος Ν.Ι , (1983), Εξελικτική Ψυχολογία , τομ 3, Αθήνα.
- Χασαπης, Δ. (2000), Διδακτική βασικών μαθηματικών εννοιών, Μεταίχμιο, Αθήνα
- Vygotsky, L. (1988), Σκέψη και γλώσσα, Εκδόσεις Γνώση, Αθήνα.
- Vygotsky, L. (1997), Νους στην κοινωνία, Gutenberg, Αθήνα.

Η ιστορία των μαθηματικών στην προσπάθεια σχολικής ένταξης παιδιών Ρομά: Η αξιοποίηση του παραδείγματος της Υπατίας

Άγγελος Χατζηνικολάου

3^ο Δημοτικό Σχολείο Μενεμένης

Τα μαθήματα που θα περιγράψω διαμορφώθηκαν στα πλαίσια της προσπάθειας ένταξης των παιδιών Ρομά του προπαρασκευαστικού τμήματος ή της τάξης υποδοχής που λειτουργεί στο 3^ο Δημοτικό Σχολείο Μενεμένης (Δενδροπόταμος). Ο γενικότερος σκοπός της τάξης είναι να αποκτήσουν τα παιδιά τις δεξιότητες γραφής και ανάγνωσης για να μπορέσουν να ενταχθούν σε εύθετο χρόνο στις αντίστοιχες τάξεις προκειμένου να απορροφήσουν το δημόσιο και κοινωνικό πλούτο της εκπαίδευσης (Τσιάκαλος, 1998). Η συγκεκριμένη εναλλακτική διδακτική πρόταση αξιοποίησης του ιστορικού παραδείγματος της Υπατίας αποτελεί πρόκληση και ταυτόχρονα προσπάθεια άρσης όλων εκείνων των μηχανισμών του μοντέλου της ταξινόμιας αντικειμενικών διδακτικών στόχων, που αφενός ισχύουν κατά κόρον στα σύγχρονα αναλυτικά προγράμματα της εκπαίδευσης με στόχους εθνικής και θρησκευτικής ομοιομορφίας και αφετέρου ορθώνονται ως εμπόδια στην απορρόφηση της εκπαίδευσης από τα παιδιά Ρομά, παιδιά που βιώνουν καθημερινά συνθήκες φτώχειας και κοινωνικού αποκλεισμού. Η ένταξη στην εκπαίδευση καθίσταται ακόμα πιο δύσκολη γι' αυτά τα παιδιά ιδίως όταν τόσο η οργάνωση των προγραμμάτων σπουδών όσο και το περιεχόμενο, ως ύλη διδασκαλίας, διαποτίζονται από ιδεολογίες εθνικής και θρησκευτικής ομοιομορφίας οι οποίες εμπλουτίζονται καθημερινά από τις κυρίαρχες ιδεολογίες του παρα-προγράμματος, που αποτελούν γνώμονα συμμόρφωσης για όλα τα παιδιά μιας και κατέχουν κυρίαρχη θέση στην ιεράρχηση των αξιών του εκπαιδευτικού συστήματος.

Πριν προχωρήσω στην περιγραφή της οργάνωσης των μαθημάτων κρίνεται σκόπιμο να σας παρουσιάσω το προπαρασκευαστικό τμήμα. Σ' αυτό φοιτούν 20 παιδιά Ρομά ηλικίας 9-14 χρόνων από τα οποία τα 4 είναι Ρομά Αλβανικής καταγωγής. Στο πρόγραμμα της Υπατίας το οποίο οργανώθηκε σε συνεργασία με την Ε' Τάξη συμμετείχαν 6 παιδιά του προπαρασκευαστικού τμήματος ηλικίας 11-14 χρονών. Όλα τα παιδιά ζουν σε συνθήκες φτώχειας και εξαθλίωσης σε παράγκες ή σε μικρά σπίτια των 30-40 τ.μ. όπου "στοιβάζονται" επταμελείς τους τουλάχιστον οικογένειες. Οι συνθήκες αυτές αποτελούν τον κυρίαρχο παράγοντα της μη τακτικής φοίτησής τους στο σχολείο, κάτι που δεν μπορεί να αναλυθεί στα πλαίσια της παρούσας εργασίας. Θεωρείται δε σκόπιμο να τονιστεί ότι τα παιδιά συμμετέχουν σε μαθήματα και άλλων τάξεων κατά τις ώρες της γυμναστικής, της μελέτης περιβάλλοντος κλπ. καθώς και σ' όλες τις εκδηλώσεις του σχολείου.

Αξιωματική θέση της παιδαγωγικής διαδικασίας για την όσο το δυνατό επιτυχέστερη ένταξη των παιδιών αυτών στο σχολείο από το οποίο αποκλείονται για χρόνια και αποτελεί αναγκαία συνθήκη είναι η συνεργασία ανάμεσα στους/στις εκπαιδευτικούς με όλα τα παιδιά και η κριτική τοποθέτηση απέναντι στους θεσμούς και τις λειτουργίες του εκπαιδευτικού συστήματος που δημιουργούν μια σειρά από εμπόδια στην σχολική απορρόφηση και κατ' επέκταση στην σχολική επιτυχία των παιδιών Ρομά.

Κατά τον Cummins (1999) το αξίωμα αυτό θεωρείται απαραίτητη διαδικασία η οποία εστιάζεται στα πλαίσια της λογικής ως αναγκαίας συνθήκης για τη συνεργατική δημιουργία της δύναμης από υποκείμενα που διδάσκουν σε μια διαδικασία διαπραγμάτευσης στη σχολική τάξη. Μέσα σ' αυτή τη διαδικασία ο/η εκπαιδευτικός ως μέλος συνήθως της κυρίαρχης ομάδας έχει τη δυνατότητα να αναπαράγει ή να αμφισβητήσει την κυρίαρχη ιδεολογία και την όποια εξουσία παράγεται απ' αυτή.

Με τη διατύπωση του τίτλου μπορούμε ν' αναφερθούμε σ' ένα σύνολο διαδικασιών που λαμβάνουν χώρα από τη στιγμή που σχεδιάστηκε το συγκεκριμένο παράδειγμα ως την ολοκλήρωσή του. Μ' άλλα λόγια από την απόφαση σχετικά με τις προθέσεις και τους σκοπούς το γνωστικό

αντικείμενο μέχρι την εμπέδωση της συγκεκριμένης ύλης από τα παιδιά (Τσιάκαλος 1992).

Θέλω επίσης να προκαταλάβω θέτοντας κάποιες γενικόλογες σκέψεις που έχουν να κάνουν με το προτεινόμενο πλαίσιο διδασκαλίας το οποίο φαίνεται ότι είναι γεμάτο δημιουργικές προκλήσεις οι οποίες προφυλάσσουν από τον κίνδυνο να μετατραπεί η καθημερινή εκπαιδευτική διαδικασία σε ρουτίνα, όμως αυτό δε σημαίνει σε καμιά περίπτωση ότι το συγκεκριμένο διδακτικό έργο δεν εξαρτάται από τις υπαρκτές συνθήκες μέσα στις οποίες συντελείται [ότι δηλαδή από μόνο του μπορεί να αποτελέσει πρόταση εκπαιδευτικής μεταρρύθμισης] και οι οποίες χαρακτηρίζονται από μια σειρά γραφειοκρατικών διαδικασιών κυριαρχικά δομημένων οι οποίες σε τελική ανάλυση επηρεάζουν την ένταξη των παιδιών Ρομά.

Η διαμόρφωση των όποιων σκοπών για σχεδιασμό και υλοποίηση των μαθημάτων του συγκεκριμένου ιστορικού γεγονότος κρίνεται ως απαραίτητο να οριοθετηθούν στα πλαίσια των επιρροών που δέχονται. Η απαίτηση ξεκάθαρων προθέσεων έχει ως αποτέλεσμα την αποσαφήνιση των σκοπών και στόχων οι οποίοι θα διαμορφώσουν όλο το πλαίσιο της οργάνωσης – υλοποίησης των μαθημάτων της “Υπατίας” και θα οριοθετήσουν το περιεχόμενο, τις τεχνικές δραστηριότητες καθώς και την αξιολόγηση με τη μορφή κάποιων συμπερασμάτων για όλους/ες τους εμπλεκόμενους (Τσιάκαλος, 1992).

Οι βασικές προθέσεις διαμορφώνονται α) Γύρω από την ένταξη των συγκεκριμένων παιδιών Ρομά στο σχολείο προκειμένου ν’ απορροφήσουν τον πλούτο της εκπαίδευσης από του οποίου την απορρόφηση παρεμποδίζονται καθώς και τη διαμόρφωση σχέσεων φιλίας και συνεργασίας μεταξύ όλων των παιδιών Ρομά και μη Ρομά καθώς και των εκπαιδευτικών προκειμένου να συμβάλλουν στη διαμόρφωση αντιρατσιστικών στάσεων, αντιλήψεων και συμπεριφορών (Τσιάκαλος, 2000).

β) Δεύτερη προϋπόθεση διαμόρφωσης των προθέσεων μας για τη οριοθέτηση των στόχων αποτέλεσε ότι τα ιστορικά γεγονότα είναι δημιουργήματα συγκεκριμένων πολιτικών, κοινωνικών, οικονομικών και θρησκευτικών παραγόντων, όποτε αυτά εκδηλώθηκαν.

Διαμόρφωση σκοπών και στόχων

Με βάση τα παραπάνω οφείλουμε να συγκεκριμενοποιήσουμε τους σκοπούς και τους στόχους της διδακτικής παρέμβασης. Η οριοθέτηση των σκοπών θα συμβάλλει από τη μια στην πολύπλευρη εξέταση του ιστορικού γεγονότος της ζωής της Υπατίας και από την άλλη θα διαμορφώσουν όλο εκείνο το πλαίσιο των μεθόδων διδασκαλίας.

Για λόγους ευκολίας και όχι ιεραρχική αξιολόγηση παραθέτουμε τους εξής σκοπούς.

1. Να γνωρίσουν τα παιδιά τη θέση της γυναίκας στην εποχή της Υπατίας και το ρόλο της στη διαμόρφωση του ιστορικο-πολιτικού γίνεσθαι της εποχής.
2. Να αναδειχθούν μέσα από την προβολή του θετικού παραδείγματος της Υπατίας, αλλά και άλλων γυναικών της εποχής οι επιτυχίες τους στα μαθηματικά ή στην πολιτική. Αυτό όμως θα γίνει όχι μόνο ως μια εξαιρετική περίπτωση αλλά και ως αποτέλεσμα συγκεκριμένων κοινωνικοοικονομικών συνθηκών που βίωσαν οι γυναίκες αυτές.
3. Να αναδειχθούν οι κίνδυνοι που συνεπάγονται με την εμφάνιση του θρησκευτικού φανατισμού καθώς και με τη βία, με αποκορύφωμα τη σφαγή και τον εξαναγκασμό.
4. Να αναδειχθεί το φαινόμενο της εκπαίδευσης της εποχής της Υπατίας ως αποτέλεσμα οικονομικής και κοινωνικοπολιτικής δύναμης.
5. Να μάθουν τα παιδιά να οριοθετούν τα γεγονότα στο χρόνο χρησιμοποιώντας τις έννοιες οριοθέτησης προ και μετά Χριστού.
6. Να μάθουν τα παιδιά να χρησιμοποιούν το χρόνο για χρήση της καθημερινότητάς τους.

Δραστηριότητες κατά την εκπαιδευτική διαδικασία

Με βάση τις παιδαγωγικές προθέσεις και όπως αυτές διαμορφώθηκαν σε σκοπούς και στόχους καθώς και η αξιοποίηση της ύλης του ιστορικού γεγονότος οδήγησαν στην οργάνωση κάποιων δραστηριοτήτων:

α) Οργανώθηκαν ομάδες μικτές, στις οποίες συμμετείχαν και τα παιδιά του προπαρασκευαστικού τμήματος. Η σύνθεση των ομάδων δεν ήταν σταθερή

σε όλες τις συναντήσεις, οπότε κάθε φορά που ολοκληρωνόταν μια εργασία παρουσιάζονταν στην τάξη.

β) Η διερεύνηση του βίου της Υπατίας οργανώθηκε με βάση τη διαθεματική προσέγγιση συνδέοντας γνωστικά πεδία της Ιστορίας, της γλώσσας, των μαθηματικών και της αισθητικής αγωγής (Χρυσafiδης, 1994):

- Όλα μαζί τα παιδιά φυλλομέτρησαν το βιβλίο της Ιστορίας της Ε΄ τάξης Δημοτικού στο οποίο εντόπισαν και σημείωσαν τις σελίδες στις οποίες υπάρχουν φωτογραφίες ή σκίτσα γυναικών. Δική τους διαπίστωση αποτέλεσε ότι το βιβλίο της Ιστορίας βάση της έρευνάς τους είναι ανδροκρατούμενο και οι ελάχιστες εικόνες με γυναίκες, τις παρουσιάζουν συνήθως στο σπίτι. Απουσιάζουν από τη δημόσια ζωή της εποχής της Υπατίας.
- Δεύτερο στοιχείο διερεύνησης του ίδιου βιβλίου αποτέλεσε η εκπαίδευση των παιδιών της εποχής που μας ενδιαφέρει. Από τη διερεύνηση διαπιστώσαμε πως η εκπαίδευση ήταν υπόθεση των πλουσίων και των κοινωνικά και πολιτικά καταξιωμένων της εποχής, ενώ οι φτωχοί που αποτελούσαν την πλειοψηφία αποκλείονται απ' αυτήν.
- Τα παιδιά του προπαρασκευαστικού τμήματος στα πλαίσια του αλφαριθμητισμού τους κατέγραψαν τις παραπάνω διαπιστώσεις στο εξής κείμενο.
- “Φυλλομετρήσαμε το βιβλίο Ιστορίας Ε΄ τάξης
- Είδαμε ζωγραφιές οι πιο πολλές είχαν άντρες. Στο σχολείο είχε
- μόνο αγόρια και ήταν πλούσια. Οι γυναίκες ήταν πάντα στο σπίτι”
- Μια άλλη ομάδα διερεύνησε στο βιβλίο της Ιστορίας το πολιτικό και θρησκευτικό πλαίσιο της εποχής της Υπατίας 375 μ.Χ.-415 μ.Χ. (Ιστορία Ε΄ Δημοτικού ΟΕΔΒ).
- Αξιοποιήσαμε από πηγές βιογραφικά στοιχεία της Υπατίας και μια ομάδα το παρουσίασε: “Η Υπατία γεννήθηκε το 370 μ.Χ. όταν ήταν βασιλιάς ο Ιουλιανός και πέθανε το 415 μ.Χ. όταν ήταν βασιλιάς ο Μ Θεοδόσιος. Ήταν κόρη του φιλοσόφου μαθηματικού Θέωνος του Αλεξανδρέως, ήταν η μόνη γνωστή που γνωρίσαμε μαθηματικός της Αρχαίας Ελλάδας. Μιλούσε πάρα πολύ ωραία και όταν μίλαγε τη θαύμαζαν. Όμως οι φανατικοί Χριστιανοί τη σκότωσαν, αλλά πρώτα την κομματιάσαν με όστρακα και μετά την έκαψαν. Πέρασαν από τότε 1587

χρόνια” (Σπανδάγος, 2002, 1991, Τσέλερ-Νεστλέ 1980). Κρίνεται σκόπιμο να αναφερθεί πως η ηλικία των παιδιών δεν μας επέτρεψε να αξιοποιήσουμε τη φιλοσοφική σκέψη της Υπάτης όπως αυτή διαμορφώθηκε στο φιλοσοφικό πλαίσιο της εποχής της.

- Μια άλλη ομάδα κατέγραψε και παρουσίασε γυναίκες μαθηματικούς της αρχαιότητας ως την εποχή της Υπατίας (Σπανδάγος, ο.π.).
- Διαπιστώσαμε και πόσα λίγα χρόνια έζησε, αφού κάναμε την σχετική αφαίρεση.
- Τα παιδιά του προπαρασκευαστικού τμήματος, με τη βοήθεια παιδιών της Ε΄ τάξης έμαθαν να κατασκευάζουν τη χρονογραμμή και πάνω σ’ αυτή τοποθέτησαν την περίοδο ζωής της Υπατίας, οπότε μέτρησαν εύκολα πόσα χρόνια πέρασαν από τότε.
- Τρία παιδιά αντέγραψαν το σκίτσο της Υπατίας.

Οι δραστηριότητες ολοκληρώθηκαν σε 6 ωριαίες συναντήσεις των δύο τμημάτων. Στην τελευταία όπου παρουσιάστηκαν όλες οι δραστηριότητες αντικείμενο συζήτησης αποτέλεσε το τραγικό τέλος της ζωής της Υπατίας το οποίο ήταν αποτέλεσμα του φανατισμού.

Μερικές διαπιστώσεις ως επιμύθιο

Α. Η εφαρμογή του ιστορικού παραδείγματος της Υπατίας ως υλικό διδασκαλίας συνδέεται με μια διαφορετική οπτική θεώρηση όχι μόνο της ιστορίας των μαθηματικών, αλλά και του τρόπου με τον οποίο διδάσκεται η ιστορία στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση.

Οι προτάσεις εμβαθύνσεων που συνήθως αναγράφονται στα βιβλία Ιστορίας των δασκάλων για τη διδασκαλία της ιστορίας εστιάζονται στην εύρεση ομοιοτήτων ή διαφορών μεταξύ γεγονότων κατά την ώρα διδασκαλίας, συγκρίσεις μεταξύ προσώπων που έζησαν σε διαφορετικές εποχές, κατανόηση του περιεχομένου κ.λ.π. Έτσι τα γεγονότα συσχετίζονται επιφανειακά ανάμεσα στο δίπολο παρελθόντος – παρόντος προκειμένου να σφυρηλατηθεί η εθνική συνείδηση των Ελλήνων και Ελληνίδων, να εμπεδωθεί η εθνική συνέχεια της φυλής και βέβαια η διαμόρφωση ομοιομορφου πληθυσμού της χώρας για να αποφευχθούν τυχόν αμφισβητήσεις. Έτσι η διδασκαλία της ιστορίας μαζί με άλλα μαθήματα

όπως πολιτική αγωγή, γλώσσα κ.λ.π. αναλαμβάνουν να εξοστρακίσουν κάθε διαφορετική άποψη και να επιβάλλουν τις κυρίαρχες απόψεις της ομοιογένειας και ομοιομορφίας προς τις οποίες οφείλουν να συμμορφώνονται όλοι οι μαθητές και όλες οι μαθήτριες.

Τα παραπάνω δεν είναι ξεκομμένα από τους βασικούς σκοπούς της διδασκαλίας της Ιστορίας. Σ' αυτούς αναφέρονται οι έννοιες “της διαμόρφωσης της ιστορικής σκέψης” και της “ιστορικής συνείδησης”, όμως όταν αυτές αναλύονται φαίνεται ότι κλείνουν προς προδιαγεγραμμένες και επιφανειακές κρίσεις. Έτσι στον ίδιο το γενικό σκοπό του μαθήματος διατυπώνεται ότι η ανάπτυξη της ιστορικής σκέψης αφορά μόνο την “κατανόηση” των ιστορικών γεγονότων, ενώ όσο αφορά την καλλιέργεια της ιστορικής συνείδησης και την ανάλυσή της τίθενται θέματα διαμόρφωσης συμπεριφοράς με το χαρακτηρισμό ως “υπεύθυνη συμπεριφορά”, χωρίς να ορίζει τι εννοείται με τον όρο υπεύθυνη συμπεριφορά. Προφανώς όμως αν αυτό συσχετιστεί με την εμπειρία του εκπαιδευτικού παρελθόντος και τις διαστάσεις του ρόλου που έπαιξε και παίζει το κρυφό αναλυτικό πρόγραμμα γίνεται εύκολα κατανοητό ότι η μη σαφής οριοθέτηση των εννοιών έχει ως στόχο στην επιβολή αυτονόητων της κυρίαρχης ιδεολογίας με την επικράτηση και επιβολή ακραίων θέσεων εθνοκεντρισμού και θρησκευτικής ομοιομορφίας κάτι που δεν μπορεί ν' αναλυθεί στην παρούσα εργασία (Π.Σ. 2000, ΔΕΕΠΣ, 2001, Φραγκουδάκη, 1997, Νούτσος, 1983).

Β. Οι προαναφερθείσες αρχές των σκοπών της διδασκαλίας της Ιστορίας ισχύουν για τα περισσότερα σχολεία της επικράτειας χωρίς να επιδέχονται αμφισβητήσεις. Ισχύουν ακόμα και για κείνα τα σχολεία στα οποία φοιτούν παιδιά αλλοδαπών ή γλωσσικών μειονοτήτων όπως οι Ρομά μερικά από τα οποία ονομάστηκαν και βάσει νόμου Διαπολιτισμικά όπως και το 3^ο Δημοτικό Σχολείο Μενεμένης.

Η διδακτική παρέμβαση με τον τρόπο που σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε έδωσε αφορμή να εκδηλωθούν:

- 1) Συμπεριφορές κριτικής προσέγγισης κατά τη διερεύνηση του ιστορικού χρόνου που έζησε η Υπατία.

- 2) Να εκδηλωθούν συμπεριφορές συνεργασίας ανάμεσα σε παιδιά Ρομά και μη Ρομά και όλα να έχουν την ευκαιρία να αναλάβουν πρωτοβουλία και να παρουσιάσουν δικά τους κείμενα όπως αυτά αξιολόγησαν την περίοδο.
- 3) Τέθηκαν οι βάσεις για μια γνωριμία καλύτερη μεταξύ των παιδιών των δύο τάξεων με προοπτική συνεργασίας και σε άλλες θεματικές ενότητες, κάτι που θα συμβάλλει στην ένταξη των παιδιών του προπαρασκευαστικού τμήματος στις κανονικές τάξεις.

Τέλος ως γενική παρατήρηση η αξιοποίηση του συγκεκριμένου ιστορικού παραδείγματος της Υπατίας της γεωμετρικής έδωσε σ' όλους μας τη δυνατότητα να εκφραστούμε δημιουργικά κάτι που αποτέλεσε συνδεδετικό κρίκο και διαμόρφωσε σχέσεις ανάμεσα στα παιδιά των δύο τάξεων και στους εκπαιδευτικούς.

Αναφορές σε πηγές

1. Προγράμματα Σπουδών Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Τόμος Θεωρητικές Επιστήμες, σελ. 181, ΥΠΕΠΘ, Παιδ/κό Ινστιτούτο 2000.
2. Βιβλία Δασκάλου Ιστορίας Γ, Β, Ε, ΣΤ. ΟΕΔΒ.
3. Βιβλίο Ιστορίας Ε' τάξης. ΟΕΔΒ.
4. Π.Δ. Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΔΕΠΠΣ), ΦΕΚ 1366/Τ.Β./18/10/2001.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

1. Cummins J.: Ταυτότητες υπό διαπραγμάτευση. Εκπαίδευση με σκοπό την Ενδυνάμωση, επιμ. Ελ Σκούρτου, σελ. 188-189 Gutenberg 1999.
2. Τσέλερ-Νεστλέ. Ιστορία της Ελληνικής Φιλοσοφίας, μεταφ. Χ. Θεοδωρίδη, 3^η Έκδοση, Βιβλ. της "Εστίας", σελ. 397-399.
3. Βανδώρος Γερ.: Γενική Ιστορία. τ.Α σελ. 303-311.

4. Κωσταράς Φ.. Φιλοσοφική Προπαιδεία. σελ. 278-283, 1991.
5. Καλοκαιρινός Κ.. Ιστορία Ρωμαϊκή και Βυζαντινή, σελ. 152-158 και σελ. 192-197.
6. Σπανδάγος Ε.. Γυναίκες μαθηματικοί της Αρχ. Ελλάδας, Ευκλείδης, τευχ. Ιαν – Φεβρ1991.
7. Σπανδάγος Ε.. Γυναίκες μαθηματικοί της Αρχ. Ελλάδας,, Ιστορικά, τευχ. 122, 14-2-202, Ελευθεροτυπία.
8. Τσιάκαλος Γ.: Εκπαιδευτικό έργο: Από το σχεδιασμό στην υλοποίηση, στο Εκ/κό Έργο. Προβληματισμός και σχεδιασμός, Υλοποίηση, Αξιολόγηση, σελ. 68-86, ΟΛΜΕ, 1992.
9. Τσιάκαλος Γ.: Κοινωνικός Αποκλεισμός: Ορισμοί, πλαίσιο και σημασία στο Κοιν. Αποκλεισμός στην Ελλάδα, Επιμ. Κ. Κασσιμάτη, σελ. 39-65, Gutenberg 1998.
10. Τσιάκαλος Γ.: Οδηγός Αντιρατσιστικής εκπαίδευσης, σελ. 70-72, Ελληνικά Γράμματα 2000.
11. Φραγκουδάκη Α.. Τα αναγνωστικά βιβλία του Δημοτικού Σχολείου, γ' έκδοση σελ. 179-195, Θεμέλιο.
12. Χρυσαφίδης Κ.: Βιωματική Επικοινωνιακή Διδασκαλία, Gutenberg 1998.

Χρησιμοποιώντας ένα ιστορικό πρόβλημα των μαθηματικών ως επίκεντρο μαθηματικής δραστηριότητας σε μια τάξη του Δημοτικού σχολείου

Δημήτρης Χασάπης & Μαρία Κοτσακώστα

*Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης
& 1^ο Πειραματικό Δημοτικό Σχολείο Α.Π.Θ.*

Θεωρητική αφετηρία

Αν θεωρήσουμε τη μαθηματική γνώση ως προϊόν μιας διερευνητικής δραστηριότητας η οποία επιδιώκει μια διαρκώς βελτιούμενη κατανόηση της πραγματικότητας, και όχι ως ένα σταθερό σύνολο καθιερωμένων συμπερασμάτων (Davis and Hersh 1980, Lakatos 1976, Tymoczko 1986), τότε οφείλουμε να προσεγγίσουμε τη μάθηση των μαθηματικών ως μια γενεσιουργό διαδικασία κατασκευής νοημάτων, που συγκροτούνται από τον κάθε άνθρωπο προσωπικά μέσα σε ιστορικά όμως διαμορφωμένο και κοινωνικά καθιερωμένο πλαίσιο.

Η διδασκαλία των μαθηματικών επομένως, ως μια κοινωνικά οργανωμένη δραστηριότητα μάθησης οφείλει να παρέχει την αναγκαία υποστήριξη στις προσωπικές διερευνήσεις των μαθητών και μαθητριών, δημιουργώντας καταστάσεις μάθησης που υποκινούν αμφιβολίες και παρέχουν εμπειρίες ανάπτυξης μαθηματικών δραστηριοτήτων.

Με αφετηρία προβληματισμούς που αναπτύσσονται στο πλαίσιο αυτό για τη μαθηματική γνώση και τη διδασκαλία της και στόχο μια μαθηματική εκπαίδευση η οποία πέρα από την εκμάθηση γνώσεων και τεχνικών επιδιώκει την ανάπτυξη νοητικών δεξιοτήτων από το σύνολο των μαθητών και μαθητριών, αναδεικνύεται τα τελευταία χρόνια η πρόταση μιας νέας διδακτικής πρακτικής για τα μαθηματικά, η οποία βασίζεται σε δραστηριότητες ‘διερεύνησης’ (Greenes 1996, Lerman 1989).

Οι δραστηριότητες ‘διερεύνησης’ αναπτύσσονται με επίκεντρο προβληματικές καταστάσεις, οι οποίες προκαλούν το ενδιαφέρον, εξάπτουν την περιέργεια και κινητοποιούν την προσοχή των παιδιών. Έχουν πολλά κοινά στοιχεία αλλά και ουσιώδεις διαφορές με τις τυπικές καταστάσεις επίλυσης προβλημάτων με κυρίαρχη εκείνη των διαφορετικών στόχων. Οι τυπικές μαθηματικές καταστάσεις επίλυσης προβλημάτων στοχεύουν πρώτιστα στην εξοικείωση των παιδιών με τη μαθηματική γνώση και στην ανάπτυξη ικανοτήτων εφαρμογής της για την επίλυση μαθηματικών και μη προβλημάτων, ενώ οι δραστηριότητες “διερεύνησης” επιδιώκουν την ανάπτυξη της λογικής σκέψης, του επιστημονικού πνεύματος και των ικανοτήτων επικοινωνίας μεταξύ των παιδιών.

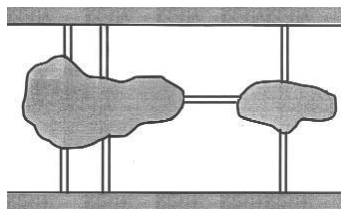
Στη βάση αυτή, η διατύπωση και ο έλεγχος υποθέσεων και εικασιών αποτελεί συστατικό στοιχείο κάθε δραστηριότητας διερεύνησης και ως προαπαιτούμενο ή παράγωγο των διαδικασιών αυτών, η οργάνωση και ερμηνεία των δεδομένων και απαιτούμενων στοιχείων με την ανάπτυξη λογικών συλλογισμών και την αξιοποίηση μαθηματικών γνώσεων και τεχνικών συνιστούν βασικές διαστάσεις της.

Η ομαδική εργασία και ο διάλογος για την ανταλλαγή σκέψεων, απόψεων και ιδεών αποτελεί το αναγκαίο πλαίσιο ανάπτυξης μιας δραστηριότητας με τα χαρακτηριστικά που προαναφέρθηκαν. Το πλαίσιο αυτό διαμορφώνει ένα από τα παιδαγωγικά πλεονεκτήματα των δραστηριοτήτων διερεύνησης, δεδομένου ότι επιτρέπει και ενθαρρύνει τη συμμετοχή όλων των παιδιών μιας σχολικής τάξης στα διάφορα επίπεδα ανάπτυξης της δραστηριότητας, ανεξάρτητα από τις διαφορές τους στο επίπεδο κατάκτησης των μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων.

Ένα ιστορικό πρόβλημα των μαθηματικών ως επίκεντρο μιας δραστηριότητας διερεύνησης

Η δραστηριότητα “διερεύνησης” που περιγράφεται εδώ αναπτύχθηκε στην ΣΤ΄ τάξη του 1^{ου} Πειραματικού Δημοτικού Σχολείου του Α.Π.Θ. με επίκεντρο ένα από τα ιστορικά προβλήματα των μαθηματικών, γνωστό ως ‘Πρόβλημα των Επτά Γεφυρών του Καίνιγκσμπεργκ’. Σύμφωνα με τους ιστορικούς των μαθηματικών, το πρόβλημα αυτό απασχόλησε τον Λέοναρντ Όυλερ το 1735 και η λύση του αποτέλεσε την αφετηρία για τη θεμελίωση μιας μαθηματικής θεωρίας με πολλές εφαρμογές, που είναι γνωστή σήμερα ως θεωρία γραφημάτων. Το Καίνιγκσμπεργκ, ιστορική

πόλη της παλιάς Πρωσίας, είναι χτισμένο στις όχθες ενός ποταμού, και σε δύο νησιά που υπάρχουν μέσα στον ποταμό. Οι τέσσερες τομείς στους οποίους χωρίζεται η πόλη, οι δύο όχθες του ποταμού και τα δύο νησιά, συνδέονται μεταξύ τους με επτά γέφυρες, όπως σχηματικά απεικονίζεται στο διάγραμμα 1.



Διάγρ. 1

Το ζητούμενο είναι μια συνεχής διαδρομή η οποία θα περνάει από όλες τις γέφυρες, αλλά μια μόνο φορά από κάθε γέφυρα. Ο Όυλερ απέδειξε, ότι μια τέτοια διαδρομή είναι αδύνατη¹.

Το πρόβλημα παρουσιάστηκε στα παιδιά από τη δασκάλα τους (και εισηγήτρια εδώ) ως αφήγηση ενός μυστηρίου που τέθηκε από μια παρέα περιπατητών στον κύριο Λεονάρδο Όυλερ κατά την επίσκεψή του στην πόλη του Καίनिγκσμπεργκ και η δραστηριότητα διερεύνησής του αναπτύχθηκε στη διάρκεια μιας διδακτικής ώρας. Τα παιδιά είχαν στη διάθεση τους αντίτυπα συγκεκριμένων παραλλαγών του σχεδιαγράμματος της πόλης, που παρουσιάζονται παρακάτω κατά την παρουσίαση στοιχείων της δραστηριότητας. Ο ρόλος της δασκάλας εντοπίστηκε στο συντονισμό της συζήτησης και έμμεσα, μέσα από αυτόν στον προσανατολισμό των νοητικών δραστηριοτήτων των παιδιών, στην κατεύθυνση της διατύπωσης ερωτήσεων και συμπερασμάτων, τα οποία επιτρέπουν την ανάπτυξη της δραστηριότητας σε προσχεδιασμένες και παιδαγωγικά επιδιωκόμενες κατευθύνσεις.

Οι διάλογοι που αναπτύχθηκαν κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας ηχογραφήθηκαν και συσχετίστηκαν με τα σχέδια των παιδιών που αποτύπωναν τους ελέγχους των εικασιών τους κατά τα διάφορα στάδια εξέλιξης της διερεύνησης.

Η ανάπτυξη της δραστηριότητας διερεύνησης του ‘προβλήματος των γεφυρών του Καίनिγκσμπεργκ’ κλιμακώθηκε σε τρεις φάσεις, καθεμιά από τις οποίες χαρακτηρίστηκε από διαφορετικά ερωτήματα και κατά συνέπεια από διαφορετικούς στόχους και διαφορετικές στρατηγικές προσέγγισης τους.

Στην πρώτη φάση τίθεται αρχικά το ερώτημα: ‘Υπάρχει μια διαδρομή, η οποία περνάει από όλες τις γέφυρες της πόλης, αλλά από κάθε γέφυρα μια μόνο φορά;’. Στη συνέχεια το ερώτημα αυτό συμπληρώνεται με ένα δεύτερο ερώτημα: ‘Έχει σημασία για την ύπαρξη ή μη της ζητούμενης διαδρομής το σημείο εκκίνησης;’ ‘Μήπως δηλαδή υπάρχει και άρα μπορεί να βρεθεί μια τέτοια διαδρομή εάν ξεκινάει από μια συγκεκριμένη όχθη του ποταμού ή από ένα συγκεκριμένο νησάκι;’

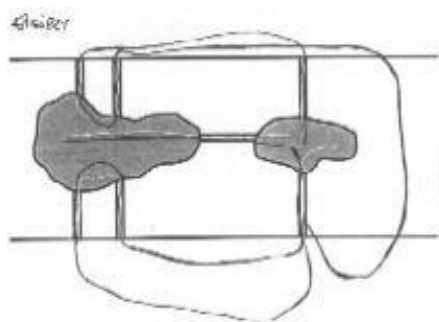
Στη δεύτερη φάση ανάπτυξης της δραστηριότητας και με δεδομένες τις αρνητικές απαντήσεις στα προηγούμενα ερωτήματα τίθεται ένα πιο συγκεκριμένο ερώτημα, το οποίο προσανατολίζει τη δραστηριότητα διερεύνησης του προβλήματος όχι μόνο σε μια απάντηση, αλλά παράλληλα και σε μια αιτιολόγηση της απάντησης: ‘Για την ύπαρξη ή μη της ζητούμενης διαδρομής έχει σημασία ο αριθμός των γεφυρών;’ Στη συνέχεια και με δεδομένη τη θετική απάντηση, το ερώτημα αυτό προσανατολίζεται στο ερώτημα του αριθμού των γεφυρών που συνδέουν τις όχθες και τα νησάκια του ποταμού: ‘Για την ύπαρξη ή μη της ζητούμενης διαδρομής έχει σημασία ο αριθμός των γεφυρών συνολικά ή οι επιμέρους αριθμοί των γεφυρών που συνδέουν κάθε όχθη του ποταμού και κάθε νησάκι;’

Στην τρίτη φάση η ανάπτυξης τη δραστηριότητας προσανατολίζεται άμεσα στην τελική απάντηση του προβλήματος των γεφυρών του Καίνιγκσπεργκ: Μία διαδρομή, όπως η ζητούμενη, είναι δυνατή μόνο στην περίπτωση που δύο το πολύ τομείς της πόλης (δύο όχθες, δύο νησάκια ή μια όχθη και ένα νησάκι) συνδέονται με τους άλλους με περιττό αριθμό γεφυρών, χωρίς να έχει καμία σημασία ούτε ο αριθμός των τομέων της πόλης που συνδέονται με τους άλλους με άρτιο αριθμό γεφυρών ούτε ο συνολικός αριθμός των γεφυρών της πόλης. Η λύση εκτέθηκε στα παιδιά, αφού δημιουργήθηκε το κατάλληλο πλαίσιο ερωτημάτων, ως η λύση του μυστηρίου που επιτεύχθηκε από τον κύριο Λεονάρδο Όυλερ, πολλά χρόνια πριν από τις μέρες μας.

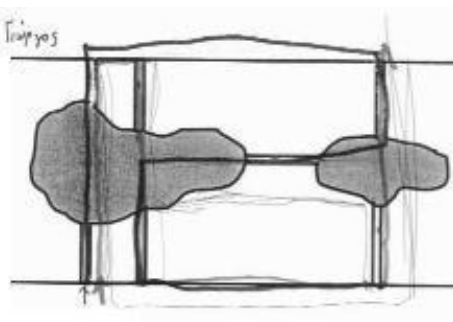
Χαρακτηριστικά δεδομένα της δραστηριότητας των παιδιών σε κάθε φάση ανάπτυξης της διερεύνησης του ‘προβλήματος των γεφυρών του Καίνιγκσπεργκ’ εκτίθενται και σχολιάζονται συνοπτικά στα επόμενα.

Παρουσίαση επιλεγμένων στοιχείων από την ανάπτυξη της δραστηριότητας σε μια τάξη του Δημοτικού σχολείου

Σε πρώτη φάση, τα παιδιά αντιμετώπισαν το αρχικό ερώτημα της δραστηριότητας για την ύπαρξη μια διαδρομής, η οποία να περνάει από όλες τις γέφυρες της πόλης, αλλά από κάθε γέφυρα μια μόνο φορά, έχοντας στη διάθεση τους το σχεδιάγραμμα της πόλης (διάγραμμα 1). Στη φάση αυτή, τα παιδιά επιχείρησαν να βρουν μια διαδρομή ξεκινώντας από διάφορα σημεία και σε μερικές από τις προσπάθειες τους χάραξαν διαδρομές, οι οποίες περνούσαν από μια γέφυρα δύο φορές ή και διέσχιζαν το ποτάμι στην προσπάθειά τους να περάσουν απ' όλες τις γέφυρες. Οι απόπειρες των παιδιών για την επίλυση του προβλήματος στη φάση αυτή φαίνεται να κυριαρχούνται από την προτεραιότητα του στόχου να βρουν μια διαδρομή η οποία να περνάει από όλες τις γέφυρες, με συνέπεια πολλές φορές να παραβλέπουν τους όρους του προβλήματος, οι οποίοι απαιτούσαν η διαδρομή αυτή να περνάει από όλες τις γέφυρες αλλά από κάθε γέφυρα μια μόνο φορά. Στα διαγράμματα 2 και 3 απεικονίζονται δύο τέτοιες χαρακτηριστικές προσπάθειες των παιδιών.



Διάγρ. 2



Διάγρ. 3

Μετά από αλληπάλληλες δοκιμές και λάθη, τα οποία επισημαίνονταν από τα ίδια τα παιδιά ή και τη δασκάλα, όλα τα παιδιά συμφώνησαν μεταξύ τους και κατέληξαν στο συμπέρασμα, ότι δεν μπορούν να βρουν μια διαδρομή σύμφωνα με τους όρους του προβλήματος, χωρίς όμως να μπορούν και να δικαιολογήσουν αυτή την αδυναμία.

Στο επόμενο βήμα ανάπτυξης της δραστηριότητας, τα παιδιά προσανατολίστηκαν στο ερώτημα της αφετηρίας της διαδρομής και τέθηκαν άμεσα από τη δασκάλα τα συναφή ερωτήματα: Μήπως η ύπαρξη μιας

διαδρομής εξαρτάται από την αφετηρία της; Τι γίνεται αν η διαδρομή ξεκινάει από τη μια ή την άλλη όχθη του ποταμού, από το μεγάλο ή από το μικρό νησάκι;

Συστηματοποιώντας τώρα τις προσπάθειες τους να βρουν μια διαδρομή, όπως η ζητούμενη, ξεκινώντας κάθε φορά από διαφορετική αφετηρία και εξαντλώντας όλες τις δυνατές αφετηρίες μιας διαδρομής (πάνω ή κάτω όχθη του ποταμού, μικρό ή μεγάλο νησί) τα παιδιά εντοπίζουν και θέτουν το πρόβλημα του αριθμού των γεφυρών, από διαφορετικές βέβαια οπτικές και με διάφορες διατυπώσεις, όπως οι ακόλουθες:

Δασκάλα: Βρήκατε μια διαδρομή;

Δανάη: Όχι, δεν βρήκαμε, γιατί έπρεπε.....(σκέφτεται για λίγο).....μόνο έξι γέφυρες μπορούμε να περάσουμε γιατί μία περισσεύει πάντα.

Γιώργος Κ.: Εγώ δεν βρήκα κάτι. Γιατί όπως είπε και η Δανάη, πάντα, όπως και να κάνεις μια διαδρομή, μένει μια γέφυρα, στην οποία για να πας, χρειάζεται να περάσεις διπλή φορά από άλλη.

Στη συζήτηση που ακολουθεί, μερικά παιδιά διατυπώνουν το πρόβλημα του αριθμού των γεφυρών πιο συγκεκριμένα, ενώ άλλα παιδιά απλώς προβληματίζονται με τον αριθμό των γεφυρών:

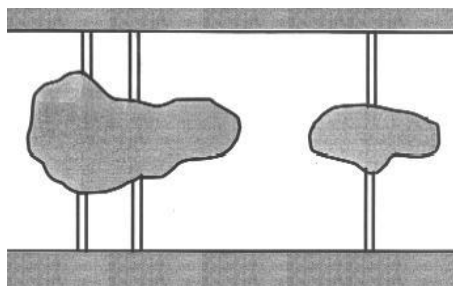
Αλέξανδρος: Νομίζω ότι αν σβήναμε μια οποιαδήποτε γέφυρα απ' όλες αυτές που υπάρχουν, θα μπορούσαμε να τις περάσουμε όλες.

Δασκάλα: Μάλιστα, δηλαδή ποιο είναι το πρόβλημα;

Αμίν: Ότι ο αριθμός από τις γέφυρες δεν είναι ζυγός.

Γιώργος: Δεν έχει σχέση που ο αριθμός δεν είναι ζυγός, γιατί και ζυγός να ήταν δεν είναι πάντα σίγουρο ότι μπορούμε να περάσουμε όλες τις γέφυρες..... Αν είναι δέκα γέφυρες, ας πούμε, πάλι δεν θα μπορούσαμε να τις περάσουμε.

Αξιοποιώντας τους προβληματισμούς των παιδιών για τον αριθμό των γεφυρών ως λόγου για τον οποίο δεν υπάρχει μια διαδρομή όπως η ζητούμενη, δίνεται στα παιδιά ένα σχεδιάγραμμα, όπου υπάρχουν έξι αντί επτά γέφυρες και εισάγονται στη δεύτερη φάση ανάπτυξης της δραστηριότητας (διάγραμμα 4).



Διάγρ. 4

Υπάρχει τώρα μια διαδρομή που να περνάει από όλες τις γέφυρες, αλλά από κάθε γέφυρα μία μόνο φορά; Τα παιδιά εντοπίζουν αμέσως μια τέτοια διαδρομή. Ξεκινάει από την πάνω (17/23 παιδιά) ή την κάτω όχθη του ποταμού (6/23 παιδιά) και με διάφορους συνδυασμούς για τη διάβαση των γεφυρών καταλήγει αντίστοιχα στην κάτω ή στην πάνω όχθη του ποταμού.

Στη συζήτηση που ακολουθεί τίθεται από τη δασκάλα το ζήτημα των σημείων εκκίνησης και κατάληξης των διαδρομών που βρήκαν τα παιδιά και διαπιστώνεται ότι όλες οι διαδρομές τους ξεκινούν ή από την πάνω όχθη και καταλήγουν στην κάτω, ή από την κάτω και καταλήγουν στην πάνω όχθη του ποταμού. Ζητείται να βρεθεί μια διαδρομή που να ξεκινάει από το μεγάλο ή το μικρό νησάκι του ποταμού.

Αφού δοκιμάσουν διάφορες διαδρομές τα παιδιά καταλήγουν και διατυπώνουν το συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει μια τέτοια διαδρομή:

Αλέξανδρος Γ.: Αυτό είναι αδύνατον, δε γίνεται.

Γιώργος Γ.: Δεν υπάρχει κάποια διαδρομή για να πάμε από κάθε γέφυρα μια φορά.

Δασκάλα: Συμφωνείτε όλοι ότι δεν υπάρχει μια διαδρομή που να ξεκινάει από το μεγάλο ή από το μικρό νησάκι του ποταμού;

Μαθητές/τριες: Ναι ... ναι

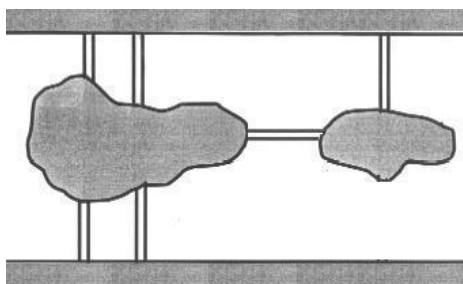
Δασκάλα: Τι συμβαίνει; Γιατί αν ξεκινήσουμε από την πάνω ή από την κάτω όχθη του ποταμού μπορούμε να βρούμε μια διαδρομή η οποία να περνάει από όλες τις γέφυρες και από κάθε γέφυρα μια μόνο φορά, ενώ αν ξεκινήσουμε από το μεγάλο νησάκι ή από το μικρό νησάκι δεν μπορούμε να βρούμε μια τέτοια διαδρομή; Τι διαφορετικό έχουν οι όχθες από τα νησάκια του ποταμού;

Έτσι τα παιδιά προσανατολίζονται στο ερώτημα του αριθμού των γεφυρών που υπάρχουν ανάμεσα στις όχθες και τα νησάκια του ποταμού και στη σημασία των αριθμών αυτών για την ύπαρξη ή μη της ζητούμενης διαδρομής.

Οι απαντήσεις των παιδιών στο ερώτημα αυτό διακρίνονται σε δύο κατηγορίες. Η μια κατηγορία απαντήσεων εντοπίζει ως διαφορά τον αριθμό των γεφυρών ανάμεσα στις όχθες και στα νησάκια του ποταμού: κάθε νησάκι έχει 2 ή 4 γέφυρες, ενώ κάθε όχθη έχει 3 γέφυρες. Η άλλη κατηγορία απαντήσεων των παιδιών εντοπίζει ως διαφορά τη θέση των γεφυρών και στη μη ύπαρξη μιας γέφυρας ανάμεσα στα δύο νησάκια του ποταμού:

Ηλίας: Τα νησάκια δεν συνδέονται μεταξύ τους, ενώ οι όχθες συνδέονται με τα νησάκια.

Η συζήτηση επικεντρώνεται στη διερεύνηση του ερωτήματος της διάταξης των έξι γεφυρών ανάμεσα στις όχθες και στα νησάκια του ποταμού. Δίνεται στα παιδιά ένα σχεδιάγραμμα, όπου οι έξι γέφυρες έχουν διαφορετική διάταξη ανάμεσα στις όχθες και στα νησάκια του ποταμού και υπάρχει μια γέφυρα ανάμεσα στα δύο νησάκια (διάγραμμα 5).



Διάγρ. 5

Με αυτή τη διάταξη των έξι γεφυρών υπάρχει τώρα μια διαδρομή που να περνάει από όλες τις γέφυρες, αλλά από κάθε γέφυρα μία μόνο φορά; Τα παιδιά μετά από μερικές προσπάθειες εντοπίζουν μια τέτοια διαδρομή. Ξεκινάει από την πάνω όχθη του ποταμού και με διάφορους συνδυασμούς για τη διάβαση των γεφυρών καταλήγει στο μεγάλο νησάκι (18/23 παιδιά) ή αντίστροφα (5/23 παιδιά).

Τίθεται ξανά από τη δασκάλα και συζητείται το ζήτημα των σημείων εκκίνησης και κατάληξης των διαδρομών που βρήκαν τα παιδιά και κατά συνέπεια των διαφορών που υπάρχουν ανάμεσα στην πάνω όχθη του ποταμού και το μεγάλο νησάκι σε σύγκριση με την κάτω όχθη και το μικρό νησάκι.

Όλα τα παιδιά εντοπίζουν τώρα και εκφράζουν με διάφορες διατυπώσεις ως βασική διαφορά τον αριθμό των γεφυρών που έχει η κάθε όχθη του ποταμού και το κάθε νησί: Η πάνω όχθη του ποταμού έχει 3 γέφυρες, το μεγάλο νησάκι 5 γέφυρες, ενώ η κάτω όχθη του ποταμού έχει 2 γέφυρες και το μικρό νησάκι έχει 2 γέφυρες.

Μετά από συζήτηση που κατευθύνεται από τη δασκάλα για τις ομοιότητες και τις διαφορές των διαδρομών που βρήκαν τα παιδιά στις δύο διαφορετικές διατάξεις των έξι γεφυρών ανάμεσα στις όχθες του ποταμού και στα νησάκια (διαγράμματα 4 και 5), όλα τα παιδιά καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι αυτό που έχει σημασία είναι ο αριθμός των γεφυρών που υπάρχει στην καθεμία όχθη του ποταμού και στο καθένα νησάκι από τα οποία ξεκινάει και στα οποία καταλήγει κάθε διαδρομή.

Τα περισσότερα παιδιά διατυπώνουν το συμπέρασμα αυτό εντελώς ειδικά και με βάση το συγκεκριμένο πρόβλημα:

..... : ξεκινάω από μέρος που έχει 3 ή 5 γέφυρες και όχι 2 ή 4 γέφυρες...

ενώ δύο παιδιά μετά από προτροπή της δασκάλας γενικεύουν:

Σταύρος: Για να βρω μια διαδρομή πρέπει να ξεκινάω από μια όχθη, που έχει μονό αριθμό γεφυρών ή από ένα νησί που έχει μονό αριθμό γεφυρών.

Δασκάλα: Και πού να τελειώνει η διαδρομή μου;

Αλέξανδρος: Σε μια όχθη, που έχει πάλι μονό αριθμό γεφυρών ή σε ένα νησί που έχει μονό αριθμό γεφυρών.

.....
Αμίν: Πρέπει από κει που ξεκινάμε και εκεί που τελειώνουμε να είναι μονός αριθμός γεφυρών.

.....
Με βάση το συμπέρασμα αυτό τα παιδιά εισάγονται στην τελική φάση ανάπτυξης της δραστηριότητας. Η δασκάλα μοιράζει το αρχικό σχεδιάγραμμα των γεφυρών της πόλης του Καίνιγκσμπεργκ (διάγραμμα 1),

θέτει ξανά το αρχικό ερώτημα και ζητάει από τα παιδιά να βρουν μια εξήγηση: Γιατί δεν μπορούμε να βρούμε μια διαδρομή, η οποία να περνάει από όλες τις γέφυρες της πόλης, αλλά από κάθε γέφυρα μια μόνο φορά, αφού υπάρχουν σημεία με μονό αριθμό γεφυρών για να ξεκινήσουμε και να τερματίσουμε τη διαδρομή μας;

Τα παιδιά προβληματίζονται και πειραματίζονται ξανά με διάφορες διαδρομές, αδυνατούν όμως να διατυπώσουν μια εξήγηση για την αδυναμία τους να βρουν μια διαδρομή, όπως η ζητούμενη. Με εξαίρεση δύο παιδιά, τα οποία εντοπίζουν και διατυπώνουν μια εξήγηση:

Χρυσάνθη: Δεν μπορούμε να βρούμε μια διαδρομή γιατί παντού υπάρχει μονός αριθμός γεφυρών.

Γιώργος: Ναι, γιατί, κυρία, τώρα έχουμε πολλές αρχές για να αρχίσουμε μια διαδρομή και έχουμε και πολλά σημεία για να τελειώσουμε και δεν ξέρουμε ποιο να διαλέξουμε.

Αξιοποιώντας αυτές τις εξηγήσεις των παιδιών, η δασκάλα εκθέτει τη λύση του προβλήματος των γεφυρών του Καίνιγσμπεργκ και αναφέρει στα παιδιά ότι επιτεύχθηκε από τον κύριο Λεονάρδο Όυλερ πολλά χρόνια πριν από τις μέρες μας: Μία διαδρομή, όπως η ζητούμενη, είναι δυνατή μόνο στην περίπτωση που το πολύ δύο τομείς της πόλης (δύο όχθες, δύο νησάκια ή μια όχθη και ένα νησάκι) συνδέονται με τους άλλους με περιττό αριθμό γεφυρών. Ο αριθμός των τομέων της πόλης που συνδέονται με τους άλλους με άρτιο αριθμό γεφυρών, όπως και ο συνολικός αριθμός των γεφυρών της πόλης δεν έχουν καμία σημασία για τη λύση του προβλήματος.

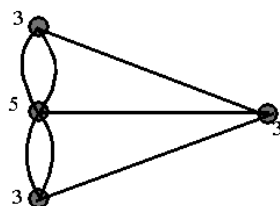
Μετά από αυτό, δίνονται στα παιδιά σχεδιαγράμματα, στα οποία υπάρχουν περισσότερες από επτά γέφυρες και σε διάφορες διατάξεις ανάμεσα στις όχθες και στα νησάκια του ποταμού της πόλης του Καίνιγσμπεργκ, στα οποία χαράζοντας διάφορες διαδρομές επιβεβαιώνουν τους όρους για την ύπαρξη μιας λύσης του προβλήματος.

Η δραστηριότητα ολοκληρώνεται με μια ελεύθερη συζήτηση στην οποία συμμετέχουν με ζωηρό ενδιαφέρον όλα τα παιδιά σχολιάζοντας μεταξύ τους τις διάφορες διαδρομές, που κατά περίπτωση και σύμφωνα με τους όρους του προβλήματος έχουν χαράξει. Γεγονός, που κατά την εκτίμηση μας επιβεβαιώνει τα παιδαγωγικά πλεονεκτήματα των δραστηριοτήτων "διερεύνησης", οι οποίες αναπτύσσονται στη σχολική τάξη με αφετηρία και επίκεντρο ιστορικά προβλήματα των μαθηματικών, τα οποία προκαλούν το ενδιαφέρον, εξάπτουν την περιέργεια και κινητοποιούν την προσοχή των

παιδιών. Οι δραστηριότητες αυτές, δημιουργούν προϋποθέσεις και διαμορφώνουν πλαίσια για την ανάπτυξη της λογικής σκέψης, του επιστημονικού πνεύματος και των ικανοτήτων επικοινωνίας μεταξύ των παιδιών. Πάνω από όλα ενθαρρύνουν και δεν αποκλείουν τη συμμετοχή όλων των παιδιών μιας σχολικής τάξης στα διάφορα επίπεδα ανάπτυξης των δραστηριοτήτων αυτών, ανεξάρτητα από τις διαφορές τους στο επίπεδο κατάκτησης των μαθηματικών γνώσεων και στην ευχέρεια λόγου.

Σημειώσεις

- ¹ Κάθε τομέας της πόλης συνδέεται με τους άλλους με περιττό αριθμό γεφυρών (3 ή 5).



Έτσι φτάνοντας σε έναν τομέα από μια γέφυρα (1), μπορείς να φύγεις από μια άλλη (2), αλλά την επόμενη φορά που θα φτάσεις διασχίζοντας την τρίτη γέφυρα (3) είναι αδύνατον να ξαναφύγεις χωρίς να περάσεις μια γέφυρα για δεύτερη φορά. Άρα κάθε τομέας μπορεί να είναι το τέλος της διαδρομής. Κάθε τομέας όμως μπορεί να είναι και η αρχή της διαδρομής, αφού ξεκινώντας από εκεί μπορείς να φύγεις από μια γέφυρα (1), να επιστρέψεις από μια άλλη (2) και να ξαναφύγεις από μια τρίτη (3). Άρα κάθε τομέας με περιττό αριθμό γεφυρών μπορεί να είναι η αρχή ή το τέλος της ζητούμενης διαδρομής. Κάθε διαδρομή όμως έχει μόνο μια αρχή και μόνο ένα τέλος. Άρα μόνο δύο το πολύ τομείς μπορεί να συνδέονται με τους άλλους με περιττό αριθμό γεφυρών, γεγονός που δεν συμβαίνει στην συγκεκριμένη περίπτωση.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

- Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.
- Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.
- Davis, P., & Hersh, R. (1980). *The mathematical experience*. Boston: Birkhauser.
- Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer.
- Greenes, C. (1996). Investigations: Vehicles for learning and doing mathematics. *Journal of Education*, 178(2), 35-49.
- Jarvela, S. (1996). New models of teacher-student interaction: A critical review. *European Journal of Psychology of Education*, 11(3), 249-268.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lerman, S. (1989). Investigations: Where to now? In P. Ernest (Ed.), *Mathematics teaching: The state of the art* (pp. 73-80). London: Falmer.
- Mason, J. (1991). Mathematical problem solving: Open, closed and exploratory in the UK. *ZDM*, 91(1), 14-19.
- NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Oliveira, H., Segurado, I., Ponte, J. P., & Cunha, M. H. (1997). Mathematical investigations in the classroom: A collaborative project. In V. Zack, J. Mousley, & C. Breen (Eds.), *Developing practice: Teachers' inquiry and educational change* (pp. 135-142). Geelong: Centre for Studies in Mathematics, Science and Environmental Education.
- Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of the mathematical method*. Princeton: Princeton University Press.
- Silver, E. A. (1993). On mathematical problem posing. *Proceedings of PME 15* (Vol I, pp. 66-85), Tsukuba, Japan.
- Tymoczko, T. (1986). *New directions in the philosophy of mathematics*. Boston: Birkhauser.
- Wood, T. (1994). Patterns of interaction and the culture of the mathematics classroom. In S. Lerman (Ed.), *Cultural perspectives on the mathematics classroom* (pp. 149-168). Dordrecht: Kluwer.

Οκτώ διδακτικές συμβουλές του A. de Morgan σχετικά με τις δυσκολίες πάνω στη μελέτη των στοιχειωδών μαθηματικών¹

Αναστάσιος Τοκμακίδης

Δρ. Μαθηματικών – Υποδιευθυντής Διαπολιτισμικού Γυμνασίου Ευόσμου

1. Εισαγωγή

Ο Augustus De Morgan γεννήθηκε στη Μαδέιρα των Ινδιών, στις 27 Ιουνίου 1806, αλλά απ' τον Απρίλιο του 1807 μέχρι το θάνατό του, στις 18 Μαρτίου 1871, έζησε στη Μ. Βρετανία. Μελετώντας τη βιογραφία του επισημαίνουμε τα εξής σημαντικά γεγονότα της ζωής του:

- 1827:** Αποφοιτά από το Trinity College του Cambridge,
- 1828:** Εκλέγεται καθηγητής Μαθηματικών στο London University, το σημερινό University College of London (U.C.L.),
- 1831:** Παραιτείται από το U.C.L σ' ένδειξη διαμαρτυρίας για την απόλυση ενός συναδέλφου του,
- 1836:** Επαναπροσλαμβάνεται στο U.C.L λόγω θανάτου του αντικαταστάτη του,
- 1837:** Παντρεύεται τη Sophia-Elizabeth Frend,²
- 1866:** Παραιτείται οριστικά από το U.C.L., λόγω αλλαγής στάσης του

¹ Η εργασία που ακολουθεί βασίζεται στην [ΤΟΚΜΑΚΙΔΗΣ 2002], που γίνεται στα πλαίσια του 4^{ου} προγράμματος μεταδιδακτορικής έρευνας στην Ελλάδα του Ι.Κ.Υ., μ' επιβλέπουσα τη ΜΑΡΙΑ ΠΑΝΤΕΚΗ, Λέκτορα του Τμήματος Μαθηματικών της Σχολής Θετικών Επιστημών του Α.Π.Θ.

² Στο έργο της, [S. DE MORGAN 1882], όπως και στην πρόσφατη διδακτορική διατριβή, [RICE 1997], οφείλουμε πολλές από τις πληροφορίες για τη ζωή και το έργο του.

ιδρύματος στο ζήτημα της θρησκευτικής ουδετερότητας.
Εκλέγεται Α' πρόεδρος της Μαθηματικής Εταιρείας του Λονδίνου.

Η εργασία μας περιορίζεται στο “παραδοσιακό, εμπειρικό στάδιο” [PYCIOR 1983] της καριέρας του (1828-1835), που υποδιαιρείται στις εξής δύο περιόδους, όπως προκύπτει κι από τον προηγούμενο χρονολογικό πίνακα: Τη θητεία του στο U.C.L. (1828-1831) και τη “λευκή περίοδο (1831-1835)” [RICE 1997], κατά τη διάρκεια της οποίας ο De Morgan δραστηριοποιήθηκε στα πλαίσια της Εταιρείας για τη Διάχυση της Ωφέλιμης Γνώσης (Society for the Diffusion of Useful Knowledge, SDUK). Στο περιοδικό *Quarterly Journal of Education (QJE)* (1831-1835) και στην 29-τομη *Penny Cyclopaedia* (1833-1846), την Εγκυκλοπαίδεια της Εταιρείας αυτής, δημοσίευσε πάνω από 700 άρθρα κι εργασίες.

Το εναρκτήριο μάθημα³ του De Morgan στο Πανεπιστήμιο του Λονδίνου, σχετικά με τη μελέτη των Μαθηματικών [DE MORGAN 1828] και οι πρώτες δημοσιεύσεις του την περίοδο αυτή μαρτυρούν έναν άνθρωπο, που διακρίνονταν από έντονες διδακτικές ανησυχίες. Έτσι, λοιπόν, εκτός απ' τη συνεισφορά του στη λογική με τους νόμους που φέρουν τ' όνομά του και τη διαμόρφωση της συμβολικής άλγεβρας κατά το 19^ο αιώνα [NOVY 1973], το ενδιαφέρον του για διάφορα μαθηματικά παράδοξα⁴ και την αγάπη του για την Ιστορία των Μαθηματικών, αξίζει κανείς να τον μνημονεύσει και για τις διδακτικές του προτάσεις.⁵ Για το λόγο αυτό, παρουσιάζουμε στην §2 τις κλασικότερες δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στην μελέτη των στοιχειωδών Μαθηματικών,⁶ όπως αυτές επισημαίνονται μέσα από το [DE MORGAN 1831a] ή [SDM]. Τέλος, στην §3 αναλύουμε διεξοδικά τις διδακτικές συμβουλές του, που αποκτούν ξεχωριστή σημασία μέσα από τις σύγχρονες αντιλήψεις της Διδακτικής των Μαθηματικών (§4).

³ Την πρόσβασή μου στο χειρόγραφο αυτό, που δεν είναι δημοσιευμένο πουθενά και στη βιβλιογραφία μας εμφανίζεται ως [DE MORGAN 1828], τη χρωστώ στη Μ. ΠΑΝΤΕΚΗ.

⁴ “Τη χρονιά x^2 ήμουν x ετών” είναι ενδεικτικά ένα από αυτά.

⁵ Έτσι επεκτείνουμε τα ερευνητικά μας ενδιαφέροντα από την ηπειρωτική Ευρώπη [ΤΟΚΜΑΚΙΔΗΣ 1995] στη Μ. Βρετανία.

⁶ Το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται κύρια στην αριθμητική και την άλγεβρα.

2. Οι κλασικότερες δυσκολίες των μαθητών

“The groundwork of the mathematics is the science of arithmetic. It is the necessary forerunner of algebra, of which indeed it is, or ought to be, a constituent part. [...] The student would find algebra an easy generalization of arithmetic”.

[DE MORGAN 1830]

Το [SDM] ήταν διαρθρωμένο ως προς το περιεχόμενο σε 4 μέρη – αριθμητική, άλγεβρα, γεωμετρία (άμεσα συσχετισμένη με τη λογική) και τριγωνομετρία – σύμφωνα με το έργο *Essais sur l'Enseignement en général et sur celui des Mathématiques en particulier* του Lacroix. Μετά από μία φιλοσοφική εισαγωγή σχετικά με τη φύση και το αντικείμενο των Μαθηματικών συναντάμε την αριθμητική ως προαπαιτούμενο της άλγεβρας [σ. 4-18]. Οι πρώτες ιδέες της αριθμητικής προέρχονται από τις αρχικές παρατηρήσεις. Έτσι, **οι θεμελιώδεις έννοιες του αριθμού και του μεγέθους** δεν επιδέχονται κάποιον ορισμό, αφού για το De Morgan θεωρούνται “απλούστατοι”. Παράλληλα, επισημαίνεται **η αναγκαιότητα εισαγωγής των κατάλληλων ορισμών** στην κατάλληλη θέση και επικρίνονται οι κλασικοί Ευκλείδειοι ορισμοί του σημείου και της ευθείας. Η απλότητα των αριθμητικών υπολογισμών βασίζεται κύρια στο δεκαδικό σύστημα θέσης, που ο μαθητής είναι καλό να το συγκρίνει και με άλλα αριθμητικά συστήματα. Ο ίδιος ο De Morgan αντιπαραβάλλει το δεκαδικό σύστημα με το 9-δικό και στις τέσσερις αριθμητικές πράξεις [SDM, 6-7].

Οι **στοιχειώδεις αριθμητικοί κανόνες** έχουν ως αφετηρία την εξοικείωση του μαθητή με τα αλγεβρικά σύμβολα +, -, x, =, όπως και με το αντίστοιχο της διαίρεσης, που προηγούνται της εισαγωγής των γνωστών κι αγνώστων ποσοτήτων, των γεωμετρικών ερμηνειών του θετικού κι αρνητικού προσήμου και των εκθετών. **Ο μαθητής πρέπει να μάθει να κάνει απλούς, αλλά και δύσκολους υπολογισμούς**, όπως $1+8+4 \square 6=4+2+1$ ή $2 \times 2 + 12 \times 12 = 14 \times 10 + 2 \times 2 \times 2$. **Το πρώτο διδακτικό εμπόδιο που πρέπει να ξεπεραστεί είναι η σύγχυση που προέρχεται από την ταύτιση διαφόρων πράξεων μεταξύ τους, επειδή δίνουν το ίδιο εξαγόμενο**. Έτσι, η αντιμεταθετική ιδιότητα $4 \times 7 = 7 \times 4$ “αποτελεί μία πρόταση, που χρήζει αποδείξεως και δεν πρέπει να θεωρείται δεδομένη” [ό.π.]. Ιδιαίτερη προσοχή

δίνεται, επίσης, στη **δυνατότητα γενίκευσης μίας αρχής**, πράγμα που προσφέρεται μέσα από την εφαρμογή των αριθμητικών κανόνων από τους μικρούς στους μεγαλύτερους φυσικούς αριθμούς. Το αν θα το κατανοήσει ο μαθητής, εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από το δικό του συλλογισμό, αφού “τα Μαθηματικά παρουσιάζονται κατ’ αυτόν τον τρόπο, επειδή αποτελούν τη μοναδική επιστήμη, στην οποία δεν πρέπει να εμπιστεύεται την αυθεντία κανενός” [SDM, 8].

Η ανάλυση ενός αριθμού σε πρώτους παράγοντες προηγείται της εισαγωγής των εννοιών του ΜΚΔ και του ΕΚΠ. Οι δύο τελευταίες παίζουν αποφασιστικό ρόλο και πρέπει να κατανοηθούν πολύ καλά μέσα από τις ασκήσεις, για να έχει ο μαθητής την κατάλληλη πρόσβαση στην κλασματική θεωρία, η οποία χωρίζεται στ’ αριθμητικά και τα δεκαδικά κλάσματα. Η έννοια των ισοδύναμων κλασμάτων βοηθά στην εισαγωγή των ομώνυμων με το ΕΚΠ κι έτσι **φθάνουμε σ’ ένα άλλο διδακτικό εμπόδιο: “Τι σημαίνει ο πολλαπλασιασμός των κλασμάτων;”** Ο De Morgan τον ερμηνεύει γεωμετρικά, με τη βοήθεια του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, όπως γίνεται και με τους φυσικούς αριθμούς. Το γινόμενο $3 \times 5 = 15G$ (G = τετράγωνο) μπορεί, π.χ., να χρησιμοποιηθεί και για την κατανόηση του πολ/μού $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}G$. Αυτό, βέβαια, προϋποθέτει την **εποπτική ικανότητα** της μετατροπής των μονάδων μέσω της ομοιοθεσίας των ορθογωνίων παραλληλογράμων.

G				

Παράλληλα, επισημαίνεται η διαφορετικότητα του γινομένου ως αποτέλεσμα από την πράξη του πολλαπλασιασμού. Αυτή η **εννοιολογική καθαρότητα** βοηθά στη “διαμόρφωση μίας γλώσσας, που πρέπει να προσεγγίζει την τελειότητα σε κάθε βαθμό. Και πολύ περισσότερο που τα Μαθηματικά εξαρτώνται από μία καλά διαμορφωμένη γλώσσα” [SDM, 12], είτε αναφερόμαστε στο αντικείμενο, είτε στη μεθοδολογία ή τα συμβολικά μέσα.

“Έτσι, πριν απ’ την εισαγωγή του στην άλγεβρα ο μαθητής πρέπει “να’χει συλλάβει κριτικά ό,τι έμαθε στην αριθμητική, ιδιαίτερα τους συλλογισμούς που συνάντησε εκεί, καθώς και τη χρήση των εισαγωγικών συμβόλων. Η άλγεβρα είναι στην αρχή “απλά αριθμητική μ’ άλλο όνομα και πιο γενικευμένα σύμβολα”⁷ και οι κανόνες της είναι παρόμοιοι μ’ αυτούς που έχει διδαχθεί στην αριθμητική. Ποια είναι, λοιπόν, η αφετηρία της άλγεβρας για τον De Morgan; Οι συμβολισμοί και οι αρχές, “με τα πρόσημα και τη σημασία των οποίων πρέπει οπωσδήποτε να εξοικειωθεί” [SDM, 20] ο μαθητής, προτού περάσει στους στοιχειώδεις κανόνες της άλγεβρας.

Στο 6^ο κεφάλαιο του SDM επισημαίνεται, λοιπόν, η εισαγωγή των γραμμάτων για την απλούστευση των αλγεβρικών εκφράσεων. Έτσι, η πρόταση “το ημίαθροισμα και η ημιδιαφορά δύο αριθμών δίνουν ως αποτέλεσμα τον πρώτο αριθμό” γράφεται αρχικά ως εξής:

$$\frac{FirstNo + SecondNo}{2} + \frac{FirstNo - SecondNo}{2} = FirstNo, \quad (1)$$

που οδηγεί μετά στη σχέση $\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = x.$ (2)

Εδώ $x-y > 0$, αφού η εισαγωγή του αρνητικού προσήμου έπεται στο SDM. Γι’ αυτό και το x είναι ο μεγαλύτερος αριθμός.

Ακολουθούν σε επανάληψη οι σημαντικότερες ιδιότητες των 4 αριθμητικών πράξεων με τη βοήθεια των γραμμάτων του λατινικού αλφαβήτου. Ξεχωριστή προσοχή δίνεται στη διαφορετικότητα των εννοιών του συντελεστή και του εκθέτη, δηλ. **στο κλασικό διδακτικό λάθος των πρώτων γυμνασιακών τάξεων, της σύγχυσης των δύο βασικών πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.**

$$2x = x+x$$

$$x^2 = x \times x = xx$$

$$3x = x+x+x$$

$$x^3 = x \times x \times x = xxx$$

$$4x = x+x+x+x$$

$$x^4 = x \times x \times x \times x = xxxx$$

&c

&c

⁷ [SDM, 17]. Στην παράθεση των πρωτότυπων κειμένων, σ’ όλη αυτήν την εργασία, η υπογράμμιση με έντονη γραφή σημαίνει ότι έχει γίνει από εμάς, ενώ η πλάγια γραφή σημαίνει ότι έχει γίνει από το συγγραφέα.

Αυτό επισημαίνεται με την αντικατάσταση διαφόρων τιμών στη θέση του x . Παρόμοια εξάσκηση των μαθητών στην αντικατάσταση διαφόρων φυσικών τιμών και στο σωστό υπολογισμό του τελικού αποτελέσματος μίας αλγεβρικής παράστασης θεωρείται αποφασιστικής σημασίας για το πέρασμα στην κατεξοχήν μελέτη της άλγεβρας. Αυτό, τόσο σε απλές εξισώσεις α' βαθμού, $3x-4 = 2x+8$ για $x=12$, όσο και σε πιο σύνθετες αλγεβρικές παραστάσεις με δύο μεταβλητές, όπως:

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} = a + b - \frac{2ab}{2a - b}, \text{ για } a = 4 \text{ και } b = 2. \text{ Για τον De Morgan η έννοια}$$

της συνάρτησης είναι πανταχού παρούσα, χωρίς να έχει οριστεί.

Τέλος, ο De Morgan επισημαίνει στη συνέχεια τις δυσκολίες των μαθητών τόσο στην επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση, τους κανόνες των προσήμων, την αναγωγή ομοίων όρων και τις δυνάμεις των πολυωνύμων, καθώς και στις θεμελιώδεις αλγεβρικές ταυτότητες [SDM, 29], την επίλυση πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων εξισώσεων και το αρνητικό πρόσημο, στο οποίο αφιερώνει ολόκληρο το 9^ο κεφάλαιο του SDM. Ιδιαίτερα τονίζουμε την **τοπική και χρονική ερμηνεία του αρνητικού προσήμου ως αντίθετη διεύθυνση και προηγούμενο χρονικό διάστημα** αντίστοιχα, καθώς και τη χρήση των αντίθετων ποσοτήτων $a-b$ και $b-a$ σε αρκετά εμπειρικά παραδείγματα.

3. Οι διδακτικές παρατηρήσεις του A. DE MORGAN

“And we may ask, how comes that reasoning, utterly banished from arithmetic and algebra, preserved its place as an essential of geometry?”

[De Morgan 1831b]

Ο De Morgan αφιερώνει ολόκληρο το 12^ο κεφάλαιο της SDM στις μεθοδολογικές συμβουλές του “για τον τρόπο μελέτης στην άλγεβρα”. Πρόκειται για τις ακόλουθες **οκτώ διδακτικές παρατηρήσεις, που στοχεύουν άμεσα στη διαμόρφωση ενός καθαρά αλγεβρικού συλλογισμού**, που ως την εποχή εκείνη θεωρούνταν αποκλειστικό προνόμιο της γεωμετρίας, όπως επισημαίνεται κι από το ανωτέρω παράθεμα. Αυτές είναι οι εξής:

I. Στην ανάγνωση της άλγεβρας πρωταρχική σημασία πρέπει να δοθεί στην προσπάθεια της τέλει κατανόησης των διαφόρων διαδικασιών, που παραθέτονται, καθώς και στην αλληλουχία τους. Αυτό δεν επιτυγχάνεται με την πολλαπλή ανάγνωση του βιβλίου, όση προσοχή κι αν έχει δοθεί. Είναι αδύνατο κάθε μαθηματική διαδικασία να συσσωρευτεί με τον τρόπο που πρέπει, ώστε να πούμε ότι ο μαθητής την κατέχει πλήρως. Πρέπει να δοθούν πολλά παραδείγματα και να διερευνηθούν κρυμμένες λεπτομέρειες σε προσθέσεις, πολλαπλασιασμούς, εξαγωγές τετραγωνικών ριζών κ.ά. Αυτά ο μαθητής “θα πρέπει να τα επεξεργάζεται με την πένα του, που δεν θα την αφήνει από το χέρι του” [SDM, 60]. Το πρώτο στάδιο, λοιπόν, στην εκμάθηση των αλγεβρικών διαδικασιών περιλαμβάνει την αναγραφή του συμβολικού μέρους του συγκεκριμένου αντικείμενου, συσσωρεύοντας το στα μέρη που σχετίζονται άμεσα μ’ αυτό και προσθέτοντας μόνο εκείνες τις λέξεις που είναι τελείως απαραίτητες για την επεξήγηση των διαφόρων συνδετικών βημάτων, δηλαδή πολύ λιγότερα πράγματα απ’ ό,τι συνήθως υπάρχει στα βιβλία. Αυτό μπορεί να φανεί ενοχλητικό σε όσους δεν το έχουν δοκιμάσει, όμως, σίγουρα, **μία συντομότερη μέθοδος παρουσίασης, συνεπικουρούμενη από τη συγκέντρωση που μας παρέχει η δύναμη της γραφής, θα παρεμποδίσει το μπέρδεμα και τις δυσκολίες, οι οποίες – σε τελευταία ανάλυση – δεν θα πρέπει να απογοητεύουν το νεαρό αναγνώστη, ο οποίος προσπαθεί να κατανοήσει το νέο τρόπο συλλογισμού, που εκφράζεται μέσα από μία νέα γλώσσα. Παράλληλα, ο μαθητής θα πρέπει να επισημαίνει τα σημεία που δεν έχει κατανοήσει πλήρως, καταγράφοντάς τα, ώστε να τα διαγράψει στο μέλλον, μόλις δηλαδή τα ξεπεράσει. Θα πρέπει να θυμόμαστε και να εντείνουμε την προσοχή μας στο γεγονός ότι **στην αλγεβρική διαδικασία η συνέχεια στον τρόπο συλλογισμού, εξαρτάται από τα σύμβολα και τον τελεστικό μηχανισμό τους, πράγμα που δε συμβαίνει στη γεωμετρία.****

II. Η άφιξη σ’ ένα νέο κανόνα ή διαδικασία θα πρέπει να ωθήσει το μαθητή στην επεξεργασία πληθώρας παραδειγμάτων, ικανών να του προσφέρουν την ικανοποίηση της κατανόησης και της ορθής εφαρμογής του ζητούμενου κανόνα ή της ζητούμενης διαδικασίας. Εδώ συναντάται και η πρώτη δυσκολία, αφού στα βιβλία πολλοί κανόνες εμφανίζονται χωρίς παραδείγματα. Στην απόδειξη της ορθότητας των εφαρμογών του μπορεί να χρησιμοποιήσει την προηγούμενη γνώση, που

έχει κατανοήσει. Ο De Morgan παραθέτει εδώ την εκθετική ιδιότητα, εφαρμόζοντάς την στη διωνυμική θεωρία

$$(a+x)^{7/3} \cdot (a+x)^{2/3} = (a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3,$$

και τις απειροσειρές. Έτσι, “αποδεικνύονται διάφορα θεωρήματα, που δημιουργούσαν αμφιβολία στον αρχάριο σχετικά με τη γενικότητα του τρόπου συλλογισμού” [SDM, 61].

III. Μία πεπλεγμένη απόδειξη – όσον αφορά στους αριθμούς και τη γενικότητα των συμβόλων είναι καλό να εφαρμόζεται σε μερικές ειδικές περιπτώσεις. Έτσι, η διωνυμική θεωρία μπορεί να εφαρμοστεί πρώτα στην παράσταση $(1+x)^{2/3}$ και μετά στην $(1+x)^{m/n}$. Όμοια και στο γινόμενο των n όρων $(x+a)(x+b)(x+c)\dots(x+n)$, όπου πρώτα μελετάμε το γινόμενο των δύο πρώτων όρων, μετά των τριών, των τεσσάρων κτλ. Ο επαγωγικός αυτός τρόπος σκέψης ενδείκνυται τόσο για τη θεωρία των μεταθέσεων, των συνδυασμών και των πιθανοτήτων, όσο και για τη θεωρία εξισώσεων, όπου αντί της γενικής εξίσωσης της μορφής $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \dots + Lx + M = 0$ μπορούμε να μελετήσουμε τις εξισώσεις γ' ή δ' βαθμού. Όμως, σε καμία περίπτωση, δεν πρέπει να παραμελήσουμε την καταγραφή όλων εκείνων των παραστάσεων που περιέχουν άπειρους όρους, γιατί “σ’ αυτές θα πρέπει να εξασκηθεί ο μαθητής, προτού προχωρήσει επιτυχώς σε ανώτερους κλάδους των Μαθηματικών” [ό.π.].

IV. Η αναφορά σε προηγούμενα θεωρήματα πρέπει να γίνεται, όπου αυτό είναι απαραίτητο, και ο μαθητής πρέπει να είναι ικανοποιημένος από το γεγονός ότι δεν έχει ξεχάσει την απόδειξή τους. Κι αν συμβαίνει αυτό, τότε δεν χρειάζεται να το επαναλάβει και θα κατανοήσει το πλεονέκτημα της σωστής μελέτης, αφού θα έχει συγκρατήσει μόνο εκείνα τα στοιχεία που του χρειάζονται για τη συνέχεια και θα’χει, ευτυχώς, υπερκεράσει όλα εκείνα τα περιττά πράγματα, που περιέχουν ακόμη και τα καλύτερα βιβλία.⁸

V. Ο μαθητής δεν πρέπει να χάνει την ευκαιρία της εξάσκησης του στους αριθμητικούς υπολογισμούς, γιατί από την ευκολία που έχει με τις

⁸ Ο De Morgan αναφέρει εδώ ενδεικτικά τα Στοιχεία του Ευκλείδη, όπου “πολλά θεωρήματα είναι ασήμαντα, θεωρούνται πορίσματα και υπάρχουν περισσότερο ως υπόβαθρο των προτάσεων που ακολουθούν” [SDM, 61].

εφαρμογές της άλγεβρας τόσο στα πρακτικά ζητήματα, όσο και στους λογαριθμικούς πίνακες, την επίπεδη και σφαιρική τριγωνομετρία, θα φανεί η εμπέδωση της αντίστοιχης θεωρίας. Ιδιαίτερο βάρος πρέπει να δοθεί κύρια στην αριθμητική των δεκαδικών κλασμάτων που, αν δεν εμπεδωθεί τέλεια, δεν θα μπορέσει να εμβαθύνει κανείς στη διωνυμική θεωρία, τους λογάριθμους ή τα συνεχή κλάσματα.

VI. Η μέγιστη δυσκολία που προσφέρει η άλγεβρα στο συλλογισμό – ίσως και η μοναδική, που έχει κάποια σημασία – **είναι η χρήση του αρνητικού συμβόλου** σ' εκφράσεις, όπως οι $-a$, a^{-x} ή στους φανταστικούς αριθμούς.⁹ Ο πρωτόπειρος μαθητής θεωρεί σχετικά εύκολη την παράσταση $(-a)(-a) = a^2$, δυσκολεύεται όμως πολύ με τον πολλαπλασιασμό $(a^m + a^n)(b^m + b^n)$. **Και γιατί συμβαίνει αυτό; Από τον προηγούμενο τρόπο μελέτης.** “Από τα νήπια ακόμη, δε μαθαίνει κάτι που να προέρχεται από την παρατήρησή του, δε συνάγει κάποια αλήθεια με την εξάσκηση της λογικής του. Ακόμη και οι πίνακες της αριθμητικής, που με λίγη σκέψη και υπολογισμό θα μπορούσε να τους κατασκευάσει από μόνος του, παρουσιάζονται έτοιμοι μπροστά του και θεωρείται ικανός να τους απομνημονεύσει. Έτσι, **χωρίς να έχει δια-μορφώσει κάποιο κριτικό πνεύμα**, φθάνει στην επιστήμη της άλγεβρας τελείως προετοιμασμένος να πιστέψει στην αλήθεια οποιουδήποτε κανόνα του παρατεθεί, αρκούμενος στην αυθεντία του συγγραφέα του βιβλίου που του έχει συστηθεί. Έτσι, δεν εκπλήσσει κανέναν το γεγονός ότι θεωρεί τη δυσκολία κατανόησης μιας [αλγεβρικής] διαδικασίας ανάλογη με τον τρόπο απομνημόνευσης κι εφαρμογής του δεδομένου κανόνα, **χωρίς να πάρει καθόλου υπόψη του τη φύση του τρόπου συλλογισμού, πάνω στον οποίο θεμελιώθηκε ο κανόνας αυτός**” [SDM, 62]. Έτσι, ξεχωριστή σημασία στην υπερπήδηση της δυσκολίας αυτής δίνεται στην **επαγωγική μέθοδο**, που μέχρι τότε δεν

⁹ Άλλα προβλήματα παρουσιάζονται, επίσης, σε σχέση με τους ενδογενείς παράγοντες των διάφορων μαθηματικών τομέων, που δεν επηρεάζουν, όμως, τον αρχάριο μαθητή, αφού άπτονται περισσότερο της φιλοσοφίας: Ο De Morgan εννοεί τις άκαρπες προσπάθειες απόδειξης του αιτήματος των παραλλήλων του Ευκλείδη και τη δια-μάχη των ροών του Newton με τα διαφορικά του Leibniz στα πλαίσια του διαφορικού λογισμού.

εντάσσονταν στο συνηθισμένο μαθηματικό συλλογισμό.¹⁰ Άλλωστε στο De Morgan οφείλουμε τον όρο “μαθηματική επαγωγή”, που εισάγεται το 1840 στην Penny Cyclopaedia. Π.χ., τα αναπτύγματα των $(a+b)^2$ και $(a+b)^3$, με απλή εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας, οδηγούν κάποιον πιο εύκολα στις αποδείξεις της διωνυμικής θεωρίας.

Στη συνέχεια, ο De Morgan σχετικά τόσο με τις **γενικές αποδείξεις**, που “δεν έχουν πείσει το σύνολο των σπουδαστών”, γιατί “δεν έχουν ανακαλύψει σ’ αυτές κάποια χρησιμότητα”, όσο και με την αναγκαιότητα των **αυστηρών αποδείξεων**, που προέκυψαν ως “ένσταση” στην προηγούμενη διαδικασία, ανατρέχει στα ακόλουθα λόγια του Laplace: “Ο Newton επέκτεινε στις κλασματικές και αρνητικές δυνάμεις την αναλυτική έκφραση που είχε ανακαλύψει για τις αντίστοιχες ακέραιες και θετικές τιμές. Στην επέκταση αυτή βλέπουμε ένα από τα μεγάλα πλεονεκτήματα της αλγεβρικής γλώσσας, που εκφράζει αλήθειες, γενικότερες από αυτές που είχαμε αρχικά σκεφθεί, έτσι ώστε, κάνοντας αυτές τις επεκτάσεις, να προκύπτει μία πληθώρα νέων αληθειών, πέραν του τύπου, που έχει θεμελιωθεί πάνω σε περιορισμένες προϋποθέσεις. Αρχικά ο κόσμος φοβόταν να παραδεχθεί τις γενικές συνέπειες, που του παρείχαν οι αναλυτικοί τύποι. *Μία πληθώρα, όμως, παραδειγμάτων τους επιβεβαίωσε*, ώστε τώρα εμείς, χωρίς φόβο, να υποχωρούμε στην καθοδήγηση της ανάλυσης, μέσα απ’ όλα τα συμπεράσματα, στα οποία μας οδηγεί και οι πιο ευχάριστες ανακαλύψεις να αναπηδούν από το τόλμημα αυτό. Πρέπει, όμως, να παρατηρήσουμε ότι είναι απαραίτητες και οι προφυλάξεις, ώστε ν’ αποφύγουμε να δώσουμε στους τύπους μεγαλύτερη επέκταση απ’ ότι πραγματικά τους ταιριάζει και θα ήταν πάντοτε καλό να αποδεικνύουμε αυστηρά τα αποτελέσματα, στα οποία καταλήγουμε” [SDM, 62-63].

Σίγουρα οι μαθητές δεν είναι έτοιμοι να αμφισβητήσουν έναν εύκολο πρακτικό κανόνα, που επιβεβαιώνεται με παραδείγματα, εξαιτίας των δυσκολιών, που επιφέρει η καθιέρωσή του. Αυτό το γεγονός επιβεβαιώνεται και από την Ιστορία των Μαθηματικών. Έτσι, στο έργο του Διόφαντου συναντώνται οι ιδιότητες $(+a)(-b) = -ab$ και $(-a)(-b) = +ab$ ως αξίωμα, όπως

¹⁰ Την εποχή που μελετάμε η επαγωγική μέθοδος κυριαρχούσε στα αλγεβρικά μαθήματα του Laplace στην Ecole Normale (1795), που, ως επί το πλείστον, αναφέρονταν στο τύπο του διωνύμου και το νόμο της βαρύτητας του Νεύτωνα.

και στα περσικά σχόλια των αλγεβρικών έργων των Hindoo. Κι αυτό γιατί οι καθαρά υπολογιστικές ανάγκες της εποχής εκείνης δεν έθεταν κάποιο ζήτημα για την **καθολικότητα της αλγεβρικής γλώσσας**, που θα καθιστούσε αναγκαία σίγουρα μία βαθύτερη διερεύνηση των πρώτων αρχών της ίδιας της άλγεβρας, όπως συνέβη κύρια κατά το 19^ο αιώνα.

VII. Κάθε μαθητής είναι καλό να'χει συγκεντρωμένους σ' έναν "πίνακα" όλους εκεί-νους τους χρήσιμους και βασικούς αλγεβρικούς τύπους, ώστε να αποκτήσει μία "ορθή μνήμη και να κερδίζει χρόνο για να δουλεύει ξεκούραστα στους ανώτερους τομείς της επιστήμης" [SDM, 63]. Οφείλει, επίσης, να μπορεί να διαβάσει και την ξένη βιβλιογραφία.¹¹

VIII. "Το βάρος που δίνεται στη μελέτη της άλγεβρας πρέπει να εξαρτάται άμεσα από το σκοπό των εφαρμογών της" [SDM, 63-64]. Εδώ ο De Morgan διαχωρίζει τα πρακτικά Μαθηματικά από τα ανώτερα Μαθηματικά. Στα πρώτα η άλγεβρα χρησιμεύει ως οδηγός για την τριγωνομετρία, τους λογάριθμους και την επίλυση των εξισώσεων, με ιδιαίτερη έμφαση στις αριθμητικές πράξεις και τις προσεγγιστικές μεθόδους. Οι δύο τελευταίες είναι προαπαιτούμενα και των ανώτερων Μαθηματικών, που επεκτείνονται στην επίλυση των εξισώσεων γ' βαθμού και άνω, τις εφαρμογές της άλγεβρας στη γεωμετρία και το διαφορικό λογισμό.

4. Συμπέρασμα

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω, καταλήγουμε στο ακόλουθο **διδασκτικό μοντέλο του De Morgan**, πρωτοπόρο και ξεχωριστό για την εποχή του [HOWSON 1982], πολύ επίκαιρο για τη δική μας:

¹¹ Ο De Morgan θεωρεί εδώ τελείως απαραίτητη τη γνώση της γαλλικής γλώσσας. Έτσι, παραπέμπει τον αναγνώστη του στις *Essais sur l'Enseignement en général et sur celui des Mathématiques en particulier* του Lacroix, τη *La Langue des Calculs* του Condillac, τα αλγεβρικά άρθρα της *Encyclopédie*, που τα περισσότερα είναι γραμμένα από τον D'Alembert, καθώς και στην αγγλική μετάφραση της *Sammlung von Beispielen* του Hirsch ή την άλγεβρα του M. Bourdon [SDM, 63].

ΔΑΣΚΑΛΟΣ

→

ΜΑΘΗΤΗΣ

←

1. Παρουσίαση του
πρώτου αξιώματος (first
principle),

όπως υπάρχει στο βιβλίο.

3. Επισημάνση των
λέξεων-κλειδιά ή αλλαγές
στα σχήματα.

5. Μεθοδολογικές
παραλλαγές μέσα από την
εμπειρία του

6α,β. Σαφής διατύπωση
του κανόνα.

7α. Επαρκής επεξεργασία
απλών παραδειγμάτων.

8. Πιο σύνθετες ασκήσεις
για επίλυση στο σπίτι.

Μαθηματική
Γνώση

↕

Κατανόηση
του
Μαθηματικού
Συλλογισμού

2. Εφαρμογές της αρχής
σε απλούστατα
παραδείγματα.

4. Γίνονται οι κατάλληλες
αλλαγές χωρίς να
κατανοηθεί

ο συλλογισμός

6α,β. Σαφής διατύπωση
του κανόνα από τους
ικανότερους μαθητές.

7β. Επαρκής επεξεργασία
απλών παραδειγμάτων.

Το διδακτικό αυτό μοντέλο, αρκετά συνηθισμένο σήμερα, έχει σίγουρα γαλλικές ρίζες. Ο ίδιος ο De Morgan, ο “δορυφόρος της Αναλυτικής Εταιρείας” [RICHARDS 1987] του Cambridge, ήταν ένθερμος υποστηρικτής του έργου του Lacroix: Ακολουθώντας τα περιεχόμενα της *Essais* του τελευταίου για τα Μαθηματικά [LACROIX 1828], χώρισε το SDM σε 4 μέρη (αριθμητική, άλγεβρα, γεωμετρία, τριγωνομετρία). Μέσω αυτού οδηγήθηκε στο έργο του Condillac, επισημαίνοντας την παρατήρησή του, ότι “ένας κανόνας είναι όπως το στήθαιο της γέφυρας: Εμποδίζει έναν απρόσεκτο διαβάτη να πέσει, δεν το βοηθά όμως να προχωρήσει μπροστά” [DE MORGAN 1830, 13]. Στις προτάσεις του για τη μελέτη της άλγεβρας, επισημαίνουμε την επίδραση των μαθημάτων του Laplace στην Ecole Normale, ιδιαίτερα στην ορθή εφαρμογή της επαγωγικής μεθόδου και στη σωστή χρήση της αυστηρής απόδειξης (θέση VI). Ενδεικτικά

επαναλαμβάνουμε την εισαγωγή στο SDM της πρότασης “το ημιάθροισμα και η ημιδιαφορά δύο αριθμών δίνουν ως αποτέλεσμα τον πρώτο αριθμό” [SDM, 18], όπως παρουσιάστηκε από τους τύπους (1) και (2) στην §2. Τέλος, οι δύο τελευταίες θέσεις παραπέμπουν, η μεν VII στον Euler, η δε VIII αποτελεί τη δική του συνεισφορά, με την ιδιαίτερη έμφαση στη σημασία των εφαρμογών των Μαθηματικών, που έχει τις ρίζες της στη θητεία του στο Cambridge κι αποτελεί άμεση επίδραση του έργου του William Whewell (1794-1865) πάνω σε ζητήματα φυσικής μηχανικής.¹²

Αυτές οι διδακτικές συμβουλές του De Morgan σχετικά με την προσπάθεια αναζήτησης ενός αλγεβρικού συλλογισμού, που μέχρι και τις πρώτες δεκαετίες του 19^{ου} αιώνα θεωρούνταν αποκλειστικό προνόμιο της γεωμετρίας, προϋποθέτουν ένα σημαντικό γεγονός: Η αυστηρή και συγκεκριμένη ερμηνεία κάθε μαθηματικού όρου βασίζεται σε προφανή αξιώματα. Πάνω σ’ αυτά στηρίζεται η αυστηρά λογική απόδειξη κι “όταν ο συλλογισμός φθάσει στο συμπέρασμά του, αυτό μπορεί ν’ αποδειχθεί αληθές ή ψευδές με τη μέτρηση στη γεωμετρία και τους απλούς υπολογισμούς στην άλγεβρα. Αυτό παρέχει σιγουριά κι είναι απολύτως αναγκαίο, αφού ... ο συλλογισμός είναι πια ο μαθητής κι όχι ο δάσκαλος” [SDM, 3].

¹² Οι Whewell, George Peacock (1791-1858) και George Biddell Airy (1801-1892) ήταν οι ονομαστότεροι από τους επτά παιδαγωγούς, που είχαν υπό την εποπτεία τους το De Morgan κατά τη φοίτησή του στο Trinity College του Cambridge (1823-1827). Ο De Morgan συνδέθηκε μαζί τους με μακρόχρονη φιλία και τον επηρέασαν σημαντικά στη διαμόρφωση της επαγγελματικής του καριέρας.

Βιβλιογραφία

- DE MORGAN A. 1828, An introductory lecture delivered at the opening of the mathematical classes in the university of London.
- 1830, *Remarks on elementary education in science*, London.
- 1831a, *On the study and difficulties of mathematics*, London.
- 1831b, On mathematical instruction, *QJE* 1, 264-279.
- 1833a, On the method of teaching the elements of geometry, Part I, *QJE*, 35-49.
- 1833b, Method of teaching geometry, No II, *QJE*, 237-251.
- 1835a, *The elements of arithmetic*, 3^d edition, London.
- 1835b, *The elements of algebra*, London.
- DE MORGAN S.E. 1882, *Memoir of Augustus De Morgan by his wife Sophia Elizabeth De Morgan*, London.
- GRATTAN-GUINNESS I. 1992, An eye for method: Augustus De Morgan and mathematical education, *Paradigm Number Nine*, 1-7.
- HOWSON A.G. 1982, *A history of mathematics education in England*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- LACROIX S.F. 1828. *Essais sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier*, Paris (α' έκδοση 1805).
- LAPLACE P.S. 1795, Leçons de mathématiques professées à l'Ecole Normale en 1795, *Œuvres complètes*, Vol. XIV, 10-177.
- NOVY, L., 1973, *Origins of modern algebra*, Academia, Prague.
- O'CONNOR, J.J. & E.F. ROBERTSON, 1996, Augustus De Morgan, *Encyclopædia Britannica*.
- OTTE, M., 1994, *Das Formale, das Soziale und das Subjektive*, Suhrkamp, Frankfurt am Main.
- PANTEKI M. 1992, Relationships between algebra, differential equations and logic in England: 1800-1860, Ph.D., London (Council of National Academic Awards).

- PYCIOR H.M. 1983, Augustus De Morgan's algebraic work: the three stages, *Isis* 74 (272), 211-226.
- RICE A. 1997, *Augustus De Morgan and the development of university mathematics in London in the 19th century*, Ph.D., Middlesex University.
- RICHARDS, J.L., 1987, Augustus De Morgan, the history of mathematics, and the foundations of algebra, *Isis* 78, 7-30.
- SCHOLZ E. 1990, *Geschichte der Algebra*, Wissenschaftsverlag, Mannheim/Wien/Zürich.
- TOKMAKIDΗΣ A. 1995, *Η έννοια της ορίζουσας στο έργο των Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) και Hermann Günther Grassmann (1809-1877)*, διδακτορική διατριβή, Α.Π.Θ.
- 2002, Η επικαιρότητα των απόψεων του Augustus de Morgan για τη διδακτική των στοιχειωδών Μαθηματικών, 4^ο πρόγραμμα μεταδιδακτορικής έρευνας στην Ελλάδα, Ι.Κ.Υ. (υπό περάτωση).

Ένας κατάλογος πηγών στο διαδίκτυο για θέματα ιστορίας των μαθηματικών και αξιοποίησης της στην διδασκαλία των μαθηματικών

Ελένη Γιαννακοπούλου

Δρ. Παιδαγωγικής

Το διαδίκτυο (internet) περιέχει έναν ευρύτατο σε πλήθος και ποικιλία κατάλογο διευθύνσεων για διάφορα θέματα ιστορίας μαθηματικών και αποτελεί την πιο προσιτή πηγή εύκολης αναζήτησης πληροφοριών για αντίστοιχα θέματα. Είτε ενδιαφέρει η ιστορία των μαθηματικών ως αυτοτελές επιστημονικό αντικείμενο είτε ως μέσο για να βελτιώσει την σχέση των παιδιών με τα μαθηματικά εντασσόμενη σε ποικίλες διδακτικές πρωτοβουλίες το Διαδίκτυο προσφέρεται ως ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο.

Το διαθέσιμο στο Διαδίκτυο υλικό εκτείνεται από κείμενα και εκθέματα επιστημονικών μουσείων μέχρι διδακτικά υλικά και σχέδια μαθημάτων.

Στη συνέχεια παρατίθεται ένας κατάλογος διευθύνσεων, οι οποίες περιλαμβάνουν υλικά σχετικά με την ιστορία των μαθηματικών και την αξιοποίηση της στην διδασκαλία των μαθηματικών. Διευθύνσεις που οι εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης μπορούν να αξιοποιήσουν για ενδεχόμενα παραδείγματα της χρήσης στοιχείων της ιστορίας των μαθηματικών τόσο στην ανάπτυξη της διδασκαλίας τους, όσο και στην υποστήριξη της μάθησης των μαθηματικών στο Δημοτικό σχολείο και στο Γυμνάσιο. Οι διευθύνσεις αυτές μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν από τους ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης, αλλά και τους ιστορικούς των μαθηματικών για την αναζήτηση απαντήσεων σε εξειδικευμένες ερωτήσεις ή για την ανεύρεση πηγών και στοιχείων για την ιστορία των μαθηματικών.

Οι διευθύνσεις αυτές έχουν ταξινομηθεί σε ευρύτερες κατηγορίες, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι κάθε μία από αυτές εντάσσεται αποκλειστικά σε μία μόνο κατηγορία.

1. ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΙΣ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΥΝ ΚΑΤΑΛΟΓΟΥΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΩΝ

DAVID JOYCE'S HISTORY OF MATHEMATICS WEB RESOURCES

<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/mathhist/webresources.html>

Ένας κατάλογος με σχετική πληρότητα, ο οποίος περιέχει κυρίως γενικές διευθύνσεις πηγών για την ιστορία των μαθηματικών.

DAVID CALVIS'S HISTORY OF MATHEMATICS WEB SITES

<http://www2.bw.edu/~dcalvis/history.html>

Ένας ενημερωμένος κατάλογος με διευθύνσεις ταξινομημένες με βάση την εποχή στην οποία αναφέρονται.

FRED RICKEY'S OF BOWLING GREEN UNIVERSITY, USA HOME PAGE

<http://ernie.bgsu.edu/~vrickey/>

Ένας από τους πρώτους καταλόγους διευθύνσεων για την χρήση της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών

LINKS TO INFORMATION ON NUMBER SYSTEMS

<http://mathforum.org/alejandre/numerals.html>

Κατάλογος διευθύνσεων για τα αριθμητικά συστήματα.

THE MATHEMATICAL MUSEUM-HISTORY WING

<http://elib.zib-berlin.de:88/Math-Net/Links/mathe-museum.hist.html>

Το τμήμα ιστορίας του μαθηματικού μουσείου, το οποίο περιέχει διευθύνσεις με εκθέματα, βιβλία, βάσεις δεδομένων και σελίδες γενικού ενδιαφέροντος για την ιστορία των μαθηματικών, την ιστορία των υπολογιστών και των συναφών συστημάτων.

TRINITY COLLEGE, DUBLIN, HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE: HISTORY OF MATHEMATICS WEB DIRECTORY

<http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/Links.html>

Ένας εξαιρετικά οργανωμένος και εκτεταμένος κατάλογος πηγών στο Διαδίκτυο για την ιστορία των μαθηματικών.

2. ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΙΣ ΕΓΚΥΚΛΟΠΑΙΔΙΚΟΥ ΧΑΡΑΚΤΗΡΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

DAVID JOYCE'S HISTORY OF MATHEMATICS HOME PAGE

<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/mathhist/mathhist.html>

Μία από τις πλουσιότερες ιστοσελίδες με στοιχεία από την ιστορία των μαθηματικών. Περιέχει κείμενα ιστορίας των μαθηματικών σε διάφορες ταξινομήσεις, βιβλιογραφίες και παραπομπές.

ST ANDREWS MACTUTOR HISTORY OF MATHEMATICS

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/>

Περιέχει πλήθος υλικών για την εξέλιξη όλων των κλάδων των μαθηματικών. Σε ιδιαίτερο τμήμα της υπάρχει μια μοναδική συλλογή των πιο γνωστών καμπυλών στην ιστορία των μαθηματικών.

TRINITY COLLEGE, DUBLIN, HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE

<http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/HistMath.html>

Περιέχει στοιχεία από την ιστορία των μαθηματικών με έμφαση στα μαθηματικά και τους μαθηματικούς 17^{ου} και 18^{ου} αιώνα (Hamilton, Boole, Berkeley, Newton και Cantor).

3. ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΙΣ ΜΕ ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

A COMMON BOOK OF π

<http://ernie.bgsu.edu/~carother/pi/Pi1.html>

Περιέχει μια συνοπτική αλλά πλήρη ιστορία των προσπαθειών για τον ακριβή υπολογισμό της τιμής του π .

CALENDAR: A HISTORY

<http://www.ernie.cummings.net/calendar.htm>

Περιέχει μια πλήρη ιστορία των ημερολογίων και πολλά στοιχεία από την ιστορία της μέτρησης του χρόνου.

FAMOUS PROBLEMS IN THE HISTORY OF MATHEMATICS

<http://mathforum.org/isaac/mathhist.html>

Περιέχει ιστορικά προβλήματα και πολύ γνωστά παράδοξα των μαθηματικών, όπως το πρόβλημα των γεφυρών του Königsburg, το πρόβλημα του υπολογισμού της τιμής του π κ.α. μαζί με μια συναφή βιβλιογραφία.

MATH WORDS, AND SOME OTHER WORDS, OF INTEREST

<http://www.geocities.com/Paris/Rue/1861/etyindex.html>

Περιέχει στοιχεία για την προέλευση περισσότερων από 120 μαθηματικών όρων.

THE METRIC SYSTEM

<http://www.uffda.com/~bink/metric.html>

Περιέχει στοιχεία και πηγές της ιστορίας του μετρικού συστήματος.

4. ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΙΣ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΥΝ ΙΣΤΟΡΙΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑ ΓΕΩΓΡΑΦΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ

ANCIENT INDIA'S CONTRIBUTION TO MATHEMATICS

<http://india.coolatlanta.com/GreatPages/sudheer/maths.html>

Μια γενική ιστορία της συμβολής των Ινδών στην ανάπτυξη των μαθηματικών από το 1000 π.Χ. μέχρι το 1000 μ.Χ. από το βιβλίο του Birodkar Sudheer "India's Contribution to World Culture".

ARAB CIVILIZATION - MATHEMATICS AND ASTRONOMY

http://www.fav.net/acMath_1.html

Περιέχει μια επισκόπηση της συμβολής των Αράβων στα μαθηματικά και την αστρονομία από το αριθμητικό σύστημα και την άλγεβρα μέχρι τα ναυτικά ημερολόγια.

BABYLONIAN MATHEMATICS

http://www.tmeg.com/bab_mat/bab_mat.htm

Περιέχει στοιχεία για το αριθμητικό σύστημα και τα μαθηματικά των Βαβυλωνίων.

EGYPTIAN FRACTIONS

<http://www.ics.uci.edu/~eppstein/numth/egypt/>

Μια περιήγηση στα Αιγυπτιακά κλάσματα (κλασματικές μονάδες) και ένας κατάλογος διευθύνσεων για τα μαθηματικά των αρχαίων Αιγυπτίων.

EGYPTIAN MATHEMATICS PROBLEMS

<http://eyelid.ukonline.co.uk/ancient/maths1.htm>

<http://eyelid.ukonline.co.uk/ancient/maths2.htm>

<http://eyelid.ukonline.co.uk/ancient/maths3.htm>

Μαθηματικά προβλήματα από τα μαθηματικά των αρχαίων Αιγυπτίων για μαθητές/τριες Λυκείου.

MAYAN NUMBERS

http://www.vpds.wsu.edu/fair_95/gym/um001.html

Μια σύντομη παρουσίαση του αριθμητικού συστήματος των Μάγια.

SYMBOL, FORM AND NUMBER IN ANCIENT EGYPT

<http://www.seshat.ch>

Ιστοσελίδα για τα μαθηματικά των αρχαίων Αιγυπτίων με πολλά στοιχεία για τα κοινωνικά και θρησκευτικά δεδομένα της εποχής.

WONDERS OF ANCIENT GREEK MATHEMATICS

<http://www.perseus.tufts.edu/GreekScience/Students/Tim/Contents.html>

Περιέχει μια συλλογή γεωμετρικών προβλημάτων που διατυπώθηκαν και επιλύθηκαν στα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά.

5. ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΙΣ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΥΝ ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

CARL FRIEDRICH GAUSS

<http://www.geocities.com/RainForest/Vines/2977/gauss/gauss.html>

Περιέχει μια πλήρη βιογραφία του Gauss.

HYPATIA OF ALEXANDRIA

<http://www.polyamory.org/~howard/Hypatia>

Περιέχει έναν εκτεταμένο κατάλογο πηγών και μια βιβλιογραφία για την Υπατία.

MATHEMATICIANS OF THE AFRICAN DIASPORA

<http://www.math.buffalo.edu/mad/mad0.html>

Περιέχει κείμενα για τη συμβολή Αφρικανών επιστημόνων στην ανάπτυξη των μαθηματικών από τους αρχαίους χρόνους μέχρι σήμερα

MATHEMATICIANS OF THE 17TH AND 18TH CENTURIES

<http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/RBallHist.html>

Μια συλλογή βιογραφιών για τους μαθηματικούς του 17^{ου} και 18^{ου} αιώνα.

NEWTONIA

<http://www.cn.cern.ch/~mcnab/n/>

Μια συλλογή υλικών για τον Νεύτωνα καθώς και για τους ανθρώπους που σχετίστηκαν μαζί του.

PAST NOTABLE WOMEN OF MATHEMATICS

<http://www.cs.yale.edu/homes/tap/past-women-math.html>

Περιλαμβάνει ιστορικά στοιχεία για διάσημες γυναίκες μαθηματικούς.

PORTRAITS OF STATISTICIANS

<http://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/>

Περιέχει περισσότερες από 200 βιογραφίες και φωτογραφίες μαθηματικών που συνέβαλλαν στην ανάπτυξη της στατιστικής.

RICHARD WESTFALL'S ARCHIVE OF THE SCIENTIFIC COMMUNITY IN THE 16TH AND 17TH CENTURIES

<http://es.rice.edu/ES/humsoc/Galileo/Catalog/catalog.html>

Περιέχει βιογραφικά δεδομένα για τους επιστήμονες του 16^{ου} και 17^{ου} αιώνα, μεταξύ των οποίων περιλαμβάνονται 170 μαθηματικοί.

ST ANDREW'S ARCHIVE

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/BiogIndex.html>

Περιέχει περισσότερες από 1.000 βιογραφίες μαθηματικών ταξινομημένες αλφαβητικά και χρονολογικά. Περιέχει επίσης χάρτες με τους τόπους γέννησης των μαθηματικών.

THE ALAN TURING HOME PAGE

<http://wadham.ox.ac.uk/~ahodges/Turing.html>

Μια πλούσια και καλά οργανωμένη ιστοσελίδα για τη ζωή του Alan Turing, πρωτοπόρου της ανάπτυξης των υπολογιστών, στην οποία περιέχονται και στοιχεία για την ιστορία των υπολογιστών.

THE ERATOSTHENES PAGE

<http://www.terraworld.net/users/d/devans/Erast.htm>

Ιστοσελίδα αφιερωμένη στη συμβολή του Ερατοσθένη στα μαθηματικά.

THE HALL OF GREAT MATHEMATICIANS

<http://www.siu.edu/~dcollin/mathfame.html>

Περιέχει σύντομες βιογραφίες διάσημων μαθηματικών ταξινομημένες αλφαβητικά.

6. ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΙΣ ΜΟΥΣΕΙΩΝ ΜΕ ΕΚΘΕΜΑΤΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

IMSS—THE INSTITUTE AND MUSEUM OF THE HISTORY OF SCIENCE, FLORENCE: GALILEO ROOM

<http://galileo.imss.firenze.it/museo/b/egalilg.html>

Εκθέματα της αίθουσας Γαλιλαίου του Ινστιτούτου και Μουσείου Ιστορίας των Επιστημών της Φλωρεντίας. Περιέχει επίσης μια βιογραφία του Γαλιλαίου καθώς και βιογραφίες των ανθρώπων που σχετίστηκαν μαζί του.

LIBRARY OF CONGRESS VATICAN EXHIBIT MATHEMATICS ROOM

<http://sunsite.unc.edu/expo/vatican.exhibit/exhibit/mathematics/Mathematics.html>

Ιστοσελίδα της βιβλιοθήκης του Βατικανού με Ελληνικά και Λατινικά χειρόγραφα μαθηματικών και αστρονομίας. Περιλαμβάνονται μια έκδοση των Στοιχείων του Ευκλείδη του 9^{ου} αιώνα και εκδόσεις έργων του Αρχιμήδη του 13^{ου} και 15^{ου} αιώνα.

THE MUSEUM OF THE HISTORY OF SCIENCE, OXFORD

<http://www.mhs.ox.ac.uk/>

Ιστοσελίδα του Μουσείου Ιστορίας των Επιστημών της Οξφόρδης. Οι συλλογές του "Οι Μετρητές : Μια εικόνα των Μαθηματικών του 16^{ου} αιώνα" και "Η γεωμετρία του πολέμου 1500-1750 " περιέχουν ενδιαφέρουσες εικόνες και στοιχεία από την ιστορία των μαθηματικών.

7. ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΙΣ ΜΕ ΔΙΑΔΑΚΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ

A MATHEMATICAL JOURNEY THROUGH TIME

<http://nunic.nu.edu/~frosamon/history/math.html>

Περιέχει την ιστορία των μαθηματικών σε μια αλληλοδραστική χρονοσειρά από 3000 π.Χ. μέχρι σήμερα.

EUCLID'S GEOMETRY: HISTORY AND PRACTICE

<http://mathforum.org/geometry/wwweuclid/>

Περιέχει πλήθος διδακτικών υλικών για τα Στοιχεία του Ευκλείδη.

HISTORY OF MATHEMATICS WITH ORIGINAL SOURCES

http://www.ma.iup.edu/~gstoudt/history/ma350/sources_home.html

Μια συλλογή υλικών για τη διδασκαλία των μαθηματικών με βάση πρωτότυπες πηγές. Περιλαμβάνει επίσης μια συναφή βιβλιογραφία καθώς και θέματα εργασιών για σπουδαστές/στρίες.

MATHEMATICAL CONNECTIONS

<http://www.aug.edu/dvskel/welcome.html>

On-line περιοδική έκδοση για την ιστορία και τη φιλοσοφία των μαθηματικών. Περιέχει άρθρα και προτάσεις για τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία τους.

TEACHING HISTORY OF MATHEMATICS

<http://ernie.bgusu.edu/~vrickey/institute/teach-hist-biblio.html>

Περιέχει ένα κατάλογο άρθρων στην αγγλική γλώσσα για τη διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών.

TEACHING WITH ORIGINAL HISTORICAL SOURCES IN MATHEMATICS

<http://math.nmsu.edu/~history/>

Περιέχει κείμενα για την ιστορία των μαθηματικών και το ρόλο της στη διδασκαλία με βάση πρωτότυπες πηγές.

THE MOLDY OLDIES

http://www.isoc.org/isoc/whatis/conferences/inet/96/proceedings/c7/c7_3.htm

Ιστορίες από την ζωή μαθηματικών για παιδιά των πρώτων σχολικών τάξεων του δημοτικού σχολείου.

8. ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΙΣ ΜΕ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΥΛΙΚΟ

A BIBLIOGRAPHY OF COLLECTED WORKS OF MATHEMATICIANS

<http://math.cornell.edu/~library/collectedwks.html>

Περιέχει μια εκτεταμένη και σχετικά πλήρη βιβλιογραφία των έργων καθώς και επιστολές διάσημων μαθηματικών.

BRITISH SOCIETY FOR THE HISTORY OF MATHEMATICS ABSTRACTS

<http://www.dcs.warwick.ac.uk/bshm/abs.html>

Περιέχει περιλήψεις άρθρων για την ιστορία των μαθηματικών ταξινομημένων με βάση τα ονόματα των συγγραφέων. Σε χωριστό κατάλογο περιλαμβάνονται περιλήψεις άρθρων για τη χρήση της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών.

TEXTBOOKS FOR A HISTORY OF MATHEMATICS COURSE

<http://ernie.bgsu.edu/~vrickey/mini/books.html>

Περιέχει ένα κατάλογο διδακτικών βιβλίων για τη διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών.

TEXTS ON THE HISTORY OF MATHEMATICS

<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/mathhist/textbooks.html>

Περιέχει ένα κατάλογο βιβλίων ιστορίας των μαθηματικών.

