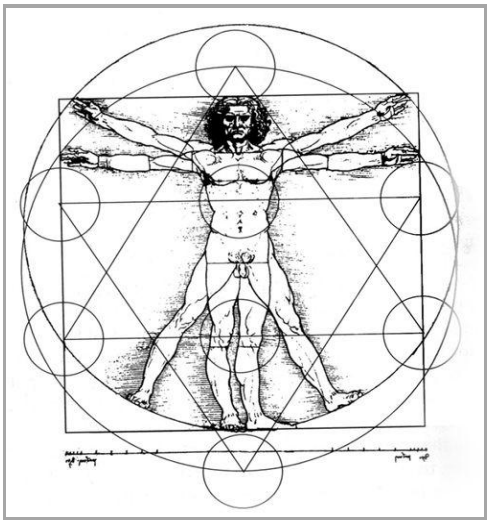
ΧΩΡΟΣ & ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΧΑΣΑΠΗΣ

Επιμέλεια



Πρακτικά 13ου Διημέρου Διαλόγου
για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Θεσσαλονίκη 8 & 9 Μαΐου 2015

ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΑΓΩΓΗΣ
ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗ ΗΛΙΚΙΑ

ΑΘΗΝΑ

ΧΩΡΟΣ & ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΧΑΣΑΠΗΣ (Επιμέλεια)

Έκδοση CD-ROM

Τμήμα Εκπαίδευσης & Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία

Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Ναυαρίνου 13α, 106 80 Αθήνα

ΑΘΗΝΑ 2015

ISBN 978-618-80640-4-1

© Δημήτρης Χασάπης για την παρούσα συλλογή
Οι συγγραφείς για τα κείμενα τους

Η εικόνα του εξωφύλλου: Ο Άνθρωπος του Βιτρούβιου, διάσημο σχέδιο του Λεονάρντο ντα Βίντσι, που φτιάχτηκε περίπου το 1490 σε ένα από τα ημερολόγιά του.

Στο ΔΙΗΜΕΡΟ ΓΙΑ ΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ παρουσιάζονται μόνον πρωτότυπες εργασίες, οι οποίες εντάσσονται στο σχετικό θέμα του συνεδρίου, δεν έχουν παρουσιαστεί σε άλλο συνέδριο, δεν έχουν δημοσιευτεί σε άλλο περιοδικό ή βιβλίο και ανταποκρίνονται στις διεθνώς καθιερωμένες απαιτήσεις της επιστημονικότητας.

Η Επιστημονική Επιτροπή διατηρεί το δικαίωμα επιλογής των υποβαλλόμενων εισηγήσεων με βάση εκτεταμένες περιλήψεις τους και φροντίζει για την αξιολόγηση των πλήρων κειμένων τους πριν την συμπερίληψη τους στα Πρακτικά του Διημέρου.

Για την αξιολόγηση τους, τα κείμενα των εισηγήσεων αποστέλλονται, ανώνυμα, σε δύο (2) κριτές από κατάλογο ειδικών για το εκάστοτε θέμα του Διημέρου επιστημόνων, στον οποίο συμπεριλαμβάνονται και τα μέλη της Επιστημονικής Επιτροπής.

Η αναδημοσίευση εισηγήσεων, οι οποίες έχουν δημοσιευτεί στα Πρακτικά του Διημέρου απαιτεί άδεια του Επιμελητή της έκδοσης.

Επιστημονική Επιτροπή

Ελένη Γιαννακοπούλου, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο
Ολυμπία Γκριμπίζη, Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση
Φραγκίσκος Καλαβάσης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Σόνια Καφούση, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Χαράλαμπος Λεμονίδης, Πανεπιστήμιο Δυτ. Μακεδονίας
Κώστας Νικολαντωνάκης, Πανεπιστήμιο Δυτ. Μακεδονίας
Στέλιος Παπακωνσταντίνου, Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση
Ελένη Σπανοπούλου, Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση
Χαρά Σταθοπούλου, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Δημήτρης Χασάπης, Πανεπιστήμιο Αθηνών
Άννα Χρονάκη, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

[λευκή σελίδα]

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η διδασκαλία της γεωμετρίας αποτέλεσε συστατικό στοιχείο της μαθηματικής εκπαίδευσης των παιδιών στα πρωτοβάθμια και στα δευτεροβάθμια σχολεία, τουλάχιστον από τις αρχές από του 19ου αιώνα, όταν θεσμοθετήθηκαν και αναπτύχθηκαν στις βιομηχανικές χώρες τα εκπαιδευτικά συστήματα όπως τα ξέρουμε σήμερα, ενώ εδώ και πολλά χρόνια έχουν εισαχθεί και στα προγράμματα της προσχολικής εκπαίδευσης δραστηριότητες νοητικής αντίληψης του χώρου και οικειοποίησης θεμελιωδών γεωμετρικών εννοιών από τα νήπια.

Η γεωμετρία, με διαφορετικά κατά περιόδους και χώρες περιεχόμενα, αλλά και διαφορετική έμφαση στα εκπαιδευτικά προγράμματα διδάχθηκε στα σχολεία στη βάση ποικίλων παραδοχών. Μεταξύ αυτών, οι παραδοχές για τη συμβολή της γεωμετρίας στην ανάπτυξη της νοητικής αναπαράστασης του χώρου, για τη συνεισφορά της στην καλλιέργεια της υποθετικο-παραγωγικής σκέψης και στην ανάπτυξη ικανοτήτων επίλυσης προβλημάτων, καθώς και για τις δυνατότητες που προσφέρει στη συσχέτιση των μαθηματικών με τον περιβάλλοντα χώρο των παιδιών τεκμηρίωσαν σε όλες τις εποχές τα κυρίαρχα επιχειρήματα για τον αναντικατάστατο ρόλο της (Ευκλείδειας) γεωμετρίας στην εκπαίδευση των παιδιών όλων των ηλικιών και σχολικών επίπεδων.

Χωρίς αμφιβολία, η διδασκαλία και η μάθηση της γεωμετρίας υποστηρίζει ταυτόχρονα νοητικές διαδικασίες οπτικοποίησης, συλλογισμού και κατασκευής σχημάτων, σχέσεων και καταστάσεων αναπαράστασης βασικών στοιχείων και όψεων του χώρου και από την οπτική αυτή προσφέρει πολλά μεθοδολογικά πλεονεκτήματα έναντι άλλων πεδίων της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Η ανάπτυξη, μάλιστα, τα τελευταία χρόνια εξαιρετικά εύχρηστων προγραμμάτων ηλεκτρονικών υπολογιστών και η αξιοποίηση δυνατοτήτων του διαδικτύου για τη μελέτη της γεωμετρίας έχουν ενισχύσει το ρόλο της στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Η ανάδειξη σχετικών προβληματισμών και ερευνητικών δραστηριοτήτων καθώς και συναφών πρωτοβουλιών ερευνητών και εκπαιδευτικών στη χώρα μας για την υποστήριξη της νοητικής οργάνωσης και αναπαράστασης του χώρου στο νηπιαγωγείο και για τη διδασκαλία και μάθηση της γεωμετρίας στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση αποτελεί τον κύριο στόχο του Διημέρου.

Στην παρούσα έκδοση περιλαμβάνονται τα κείμενα των εισηγήσεων, οι οποίες παρουσιάστηκαν στο Διήμερο αυτό.

Δημήτρης Χασάπης

Καθηγητής Τ.Ε.Α.Π..Η του Ε.Κ.Π. Α.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ Ι

Χώρος και γεωμετρία στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση: Προσεγγίσεις & Προβληματισμοί

Μιχάλης Μπαρτσίδης & Χρήστος Νασιόπουλος

Η έννοια του χώρου στη Φιλοσοφία *11*

Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης

Γεωμετρικός χώρος και Φυσικός χώρος : μια διαχρονική σχέση *43*

Χαράλαμπος Λεμονίδης

Παρουσίαση, ανάλυση και σύγκριση δύο σύγχρονων Προγραμμάτων Σπουδών της Γεωμετρίας *79*

Μαριάννα Τζεκάκη

Προσεγγίζοντας χωρικές και γεωμετρικές έννοιες στις μικρές ηλικίες *103*

Δημήτρης Χασάπης

Η μάθηση της Γεωμετρίας ως οικειοποίηση της χρήσης γεωμετρικών οργάνων *121*

Ελένη Γιαννακοπούλου

Το κυνήγι του χαμένου θησαυρού και η «χαμένη» από τη διαβίου μάθηση «χωρική ικανότητα» *139*

ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙ

Χώρος και γεωμετρία στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση: Διδακτικές Παρεμβάσεις & Ερευνητικά Εγχειρήματα

Σωτηρία Γεωργοτά, Σοφία Σουλιώτη & Κονδύλη Θεοδώρα

Χώρος και Γεωμετρία : μια διδακτική πρόταση για την κατανόηση των γεωμετρικών επίπεδων σχημάτων στην Προσχολική ηλικία 155

Ολυμπία Γκριμπίζη, Τάσος Παπάς, Μαργαρίτα Ρόμπου & Ελένη Σπανοπούλου

Μια πρώτη προσέγγιση της έννοιας της χρυσής τομής σε μαθητές / τριες της ΣΤ΄ Δημοτικού μέσα από την τέχνη του ψηφιδωτού και τη χρήση της τεχνολογίας 171

Αθανασία Ιγγλέζου

Το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Ελλάδα και η εξέλιξή του 199

Αναστασία Καρακώστα

Το μάθημα της γεωμετρίας ως όχημα υλοποίησης των γενικών διδακτικών στόχων του ΔΕΠΠΣ 213

Αρίσταρχος Κατσάρκας

Ψηφίδωση και εμβαδόν 231

Κωνσταντίνος Κόμπος

Διδασκαλία εμβαδών και τετραγωνικού μέτρου με τη χρήση ΤΠΕ 247

Παναγιώτα Κοταρίνου & Χαρούλα Σταθοπούλου

Από τον Ευκλείδειο σε 'άλλους' χώρους: Αμφισβητώντας τη μοναδικότητα του Ευκλείδειου χώρου με μαθητές Β' Λυκείου *259*

Βασιλική Κοτρώτσου & Ελένη Μήτσου

Η σχέση των Μαθηματικών με τον ελληνικό παραδοσιακό χορό και η εισαγωγή μαθηματικών ευνοιών μέσα από τη διδασκαλία του σε παιδιά προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας *291*

Παρασκευή Λαμπάκη & Καλλιόπη Ντάσιου

Διαθεματική ενότητα για τη διδασκαλία των γεωμετρικών σχημάτων στην Α' Δημοτικού *313*

Άρης Μαυρομάτης, Αντώνης Νάνας & *Κούλα Πανάγου*

Η αξιοποίηση του πλατωνικού μύθου του σπηλαίου για τη μελέτη των γεωμετρικών σχημάτων *335*

Αλέξανδρος Μόσχος

Sketchpad και Γεωμετρία της πραγματικότητας – Δυναμική διερεύνηση σε προσομοιωμένο περιβάλλον *345*

Στέλιος Παπακωνσταντίνου & Παύλος Τουκίλογλου

Η διαπραγμάτευση της γεωμετρικής έννοιας του κύκλου με τη χρήση της ρομποτικής ως πολιτισμικού εργαλείου *365*

Πολυξένη Τριανταφυλλίδου

Σχήματα : Από την εμπειρική αναγνώριση στην ακριβή διατύπωση του γεωμετρικού ορισμού *379*

Ευάνθης Χατζηβασιλείου, Γιάννης Μιχάλης, Αποστολία Γιουψάνη & Μαρία Αναστασιάδου

Γνωρίζουν τις γεωμετρικές έννοιες οι μαθητές του Δημοτικού σχολείου; Μια πιλοτική προσπάθειαποτύπωσης της γνώσης περί Γεωμετρίας *389*

ΕΝΟΤΗΤΑ Ι

Χώρος και γεωμετρία στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση: Προσεγγίσεις & Προβληματισμοί

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΣΤΗ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ

Μιχάλης Μπαρτσίδης
Δρ. Φιλοσοφίας- ΑΠΘ

Χρήστος Νασιόπουλος
Φυσικός

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο χώρος ορίζεται το ιδεατό περιβάλλον μέσα στο οποίο εντοπίζονται οι παραστάσεις μας δηλαδή δεν είναι ένα πράγμα ούτε ένα αίσθημα αλλά μια παραγωγή ή μια κατασκευή του πνεύματος- νου: μια αφαίρεση ή μια apriori μορφή. Ο ομοειδής, ισότροπος, συνεχόμενος και απεριόριστος *γεωμετρικός* χώρος διακρίνεται από τον *ψυχολογικό*χώρο (νεωτερικές έννοιες της αναπαράστασης και της υποκειμενικότητας)οποίος,αντίθετα,συλλαμβάνεται όχι από την αφαίρεση αλλά από τις αισθήσεις.Ωστόσο, η αναζήτηση πάνω στη τομή αυτών τωνδυοεννοιών του χώρου προσδιορίζει την αναζήτηση της σχέσης γεωμετρίας και νοητικών διαδικασιών. Είναι χρήσιμη, ως προς αυτό το σκοπό, μια διπλή επισκόπηση: αφενόςτης κίνησης από τις πρώτες αντιλήψεις του χώρου στη γεωμετρία πίσω στις έννοιες του χώρου, από την εμπειρία στη φιλοσοφία και στην επιστήμη, από τον απόλυτο χώρο μέσω του χρόνου στη σχετικότητα και στις έννοιες του πεδίου (γεωμετρία και φυσική), αφετέρου, οι διαφορές της έννοιας/αναπαράστασης του χώρου σε σχέση με τις ιστορικές κοινωνικοπολιτικές μεταβολές και τις σύγχρονες φιλοσοφίες του χώρου: τόποι-ετεροτοπίες(γεωγραφία, αρχιτεκτονική, τέχνες). Η παρούσα διπλή εισήγηση επιχειρεί, λοιπόν, να συγκεντρώσει στοιχεία ορισμού την έννοιας του χώρου αρθρώνοντας Φιλοσοφία της Επιστήμης και Φιλοσοφία του νεωτερικού υποκειμένου.

Ο χώρος ορίζεται το ιδεατό περιβάλλον μέσα στο οποίο εντοπίζονται οι παραστάσεις μας δηλαδή δεν είναι ένα πράγμα ούτε ένα αίσθημα αλλά μια παραγωγή ή μια κατασκευή του πνεύματος- νου: μια αφαίρεση ή μια a priori μορφή. Ο ομοειδής, ισότροπος, συνεχόμενος και απεριόριστος γεωμετρικός χώρος διακρίνεται από τον ψυχολογικό χώρο (νεωτερικές έννοιες της *αναπαράστασης* και της υποκειμενικότητας) οποίος, αντίθετα, συλλαμβάνεται όχι από την αφαίρεση αλλά από τις αισθήσεις.

Ωστόσο, η αναζήτηση πάνω στη τομή αυτών των δυο εννοιών του χώρου προσδιορίζει την αναζήτηση της σχέσης γεωμετρίας και νοητικών διαδικασιών.

Τα μαθηματικά (άλγεβρα, γεωμετρία) είναι ίσως οι μόνες επιστήμες του ανθρώπου (είτε αυτές είναι θετικές είτε θεωρητικές-ανθρωπιστικές) που δεν σχετίζονται με τον χρόνο. Ο παράγοντας χρόνος είναι έξω από αυτές. Ίσως όμως αυτό το χαρακτηριστικό τους τους προσδίδει την ιδιαιτερότητα που έχουν, να μπορούν να τα χρησιμοποιούν όλες οι άλλες επιστήμες.

Από την άλλη όμως, ειδικά για τη γεωμετρία, που η σχέση της με την εμπειρία (και ιστορικά και φιλοσοφικά) είναι πολύ άμεση, αυτή η μη-απόσταση, η απουσία χρονικής αναφοράς, την καθιστά ή τουλάχιστον την καθιστούσε, για μεγάλο διάστημα, αιώνων, μη έγκυρη στην περιγραφή-αναπαράσταση του πραγματικού.

Έπρεπε να έρθει, με κάποιο τρόπο, το δέσιμό της με τον χρόνο, σε διάφορα στάδια, για να μεταβληθεί και αυτή της η ικανότητα, αλλά ταυτόχρονα να μεταβληθεί και η αντίληψή μας για την ίδια δομή του κόσμου.Ή έστω να αρχίσουμε να υποψιαζόμαστε τις πιθανές αποκλίσεις από την οπτική με την οποία γαλουχήθηκαν οι άνθρωποι (τουλάχιστον στον αποκαλούμενο δυτικό κόσμο).

Το ότι δεν μπορούμε να αποφύγουμε την χωρικότητα στη οποιαδήποτε αναπαράσταση που επιχειρούμε και του χρόνου συμπεριλαμβανομένου, έχειαναδραστικό ρόλο στην αντίληψη που διαμορφώνουμε για τον κόσμο.

Ταερωτήματα που ανακύπτουν, επιστημονικής, γνωσιοθεωρητικής όπως και οντολογικής υφής, είναι πολλαπλά: Οχώρος και ο χρόνος αποτελούν αυθύπαρκτες, αυτόνομες οντότητες, ή μπορούν να

εκληφθούν μόνοως ένα σύνολο διατάξεων, ως ένα σύστημα σχέσεων ανάμεσα στα υλικά αντικείμενα; Είναι ο χώρος και ο χρόνος υποκειμενικές κατηγορίες, παράγωγα του ανθρώπινου πνεύματος που χρησιμεύουν απλώς για την ταξινόμηση και διάταξη των γεγονότων, ή αποτελούν κατηγορίες του όντος, εξατομικευμένες μορφές του υπαρκτού;

Ποιες οι πιθανές σχέσεις αλληλεξάρτησης χώρου και χρόνου; Πώς συνδέονται ο χώρος και ο χρόνος με την κίνηση και την ύλη; Τα ερωτήματα αυτά εξακολουθούν να απασχολούν τη φιλοσοφική σκέψη καθώς και τη σύγχρονη φυσική επιστήμη, ιδιαίτερα στην προσπάθεια ανάπτυξης ενός κατάλληλου θεωρητικού σχήματος που στοχεύει στην ενοποίηση των θεμελιωδών δυνάμεων τηςφυσικής.

Είναι χρήσιμη, ως προς αυτό το σκοπό, μια διπλή επισκόπηση: αφενός της κίνησης από τις πρώτες αντιλήψεις του χώρου στη γεωμετρία πίσω στις έννοιες του χώρου, από την εμπειρία στη φιλοσοφία και στην επιστήμη, από τον απόλυτο χώρο μέσω του χρόνου στη σχετικότητα και στις έννοιες του πεδίου (γεωμετρία και φυσική), αφετέρου, οι διαφορές της έννοιας/αναπαράστασης του χώρου σε σχέση με τις ιστορικές κοινωνικοπολιτικές μεταβολές και τις σύγχρονες φιλοσοφίες του χώρου: τόποι-ετεροτοπίες (γεωγραφία, αρχιτεκτονική, τέχνες). Η παρούσα διπλή εισήγηση επιχειρεί, λοιπόν, να συγκεντρώσει στοιχεία ορισμού την έννοιας του χώρου αρθρώνοντας Φιλοσοφία της Επιστήμης και Φιλοσοφία του νεωτερικού υποκειμένου.

Α. Μια Αναδρομή

Το πέρασμα από την εποπτεία του χώρου στην επιστημονική συγκρότηση ενός αντικειμένου προς γνώση και στην απόδειξη, δεν είναι κάτι εκ των προτέρων δεδομένο ιστορικά. Απαιτείται μια τομή. Μάλιστα αυτό είναι μάλλον ένα απίθανο ενδεχόμενο.

Δεν θα ακολουθήσουμε (λόγω χρόνου και τόπου) μια ιστορική διαδρομή, όπως θα έπρεπε, μέσω της ιστορίας της επιστήμης. Θα μείνουμε μόνο σε ορόσημα, χάνοντας ένα πολύτιμο στοιχείο, αυτό της κατανόησης αλλά κερδίζοντας χρόνο για να ειπωθεί αυτό που είναι να ειπωθεί από τούτη την παρέμβαση.

Μια γραμμή εξιστόρησης είναι η σχέση της γεωμετρίας με την άλγεβρα.

Στις απαρχές (Ευκλείδης-Πλάτων) η γεωμετρία θεωρήθηκε η γεννήτορος των μαθηματικών.

Στον Καρτέσιο έχουμε την αναστροφή: Τα μαθηματικά είναι αυτά που γεννούν τη γεωμετρία.

Τέλος με τον Hilbert έχουμε την αυτόνομη δυνατότητα ύπαρξης της γεωμετρίας.

Μια άλλη γραμμή είναι αυτή που συσχετίζει τον χώρο με την ύλη.

Αρχικά, η έννοια του χώρου προέκυψε από τα αντικείμενα και τις σχέσεις τους (η ύλη παράγει τον χώρο. Ο χώρος δεν είναι κενός)

Στη συνέχεια (ατομικές θεωρίες) ο χώρος ανυψώνεται σε αυτόνομη ύπαρξη, και η ύλη απλά «πέφτει» μέσα σ' αυτόν. Ευκλείδεια γεωμετρία.

Τέλος (σχετικότητα) η ύλη και πάλι είναι αυτή που διαμορφώνει τον χώρο άρα και την γεωμετρία του.

Οι ρίζες της Γεωμετρίας εντοπίζονται σε κάποιες αναπτυγμένες κοινωνίες της Ανατολής από την 5η ως και τη 2η χιλιετία π.Χ.

Οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι, Αιγύπτιοι, Ινδοί και Κινέζοι είναι από τους πρώτους που ανάπτυξαν τη Γεωμετρία. Δεν είναι τυχαίο ότι οι λαοί αυτοί ζούσαν κοντά σε μεγάλα ποτάμια. Ο Τίγρης και ο Ευφράτης, ο Νείλος, ο Ινδός και ο Γάγγης με τις συχνές τους πλημμύρες μετέβαλλαν το γύρω χώρο σ' ένα απέραντο λασπότοπο. Οι κάτοικοι επομένως αντιμετώπιζαν επιτακτική την ανάγκη να μετρούν τη γη, να επανακαθορίζουν τα όρια των αγρών και να επινοούν τρόπους κατασκευής αρδευτικών έργων, ώστε να ελέγχονται οι πλημμύρες και έτσι αντί για λασπότοπους να έχουν πλούσιους σιτοβολώνες και ορυζώνες. Αποτέλεσμα των αδιάκοπων αυτών προσπαθειών ήταν η δημιουργία και ανάπτυξη της Γεωμετρίας.

Για τους ανατολικούς λοιπόν λαούς η γεωμετρία ήταν ανάγκη και πρακτική εφαρμογή για την χωροθέτηση και την μηχανική της κατασκευής έργων υποδομής (γέφυρες, δρόμους, κ.α.) ή οικοδομικές κατασκευές.

Με τη γεωμετρία ήρθαν σε επαφή και οι Έλληνες κυρίως με το Θαλή το Μιλήσιο, ο οποίος είναι και ο πρώτος που εισάγει την έννοια της *"απόδειξης"* ως μέσον επαλήθευσης μιας γεωμετρικής πρότασης. Ο Πυθαγόρας έθεσε την γεωμετρία σε πλήρως θεωρητικό και φιλοσοφικό επίπεδο, αλλά ολοκλήρωσε και την έννοια και την πρακτική της αποδεικτικής διαδικασίας. Ονόμαζε δε την γεωμετρία ο Πυθαγόρας *ιστορία* (*«καλειτοδέη γεωμετρία πρόςΠυθαγόρου ιστορία.»*). Η λέξη ιστορία από την ετυμολογία της σημαίνει γνώση μέσα από έρευνα, αλλά αυτό δεν είναι αρκετό. Την βαθύτερη σημασία και ερμηνεία της χρήσης αυτής της λέξης, δεν παρουσιάζει κανένας φιλόσοφος και ο Ιάμβλιχος αρκείται στην πληροφοριακή μόνο καταγραφή. Μην ξεχνάμε ότι η αποκάλυψη των βαθύτερων μυστικών δινόταν σε μαθητές, μετά από εξαντλητικό έλεγχο της εσωτερικής αξίας τους. Θεώρησε επίσης την γεωμετρία ως μία εκ των τεσσάρων επιστημών, οι οποίες αποτελούν μέρος της φιλοσοφίας και θεολογίας του συστήματος του. Οι άλλες τρεις επιστήμες είναι η αριθμητική, η μουσική και η αστρονομία και όλες σχετίζονται εννοιολογικά μεταξύ τους έχοντας ενιαία θεωρητική βάση. Έτσι θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο Θαλής είναι ο ιδρυτής της θεωρητικής γεωμετρίας, ενώ ο Πυθαγόρας είναι ο θεμελιωτής της.

Στους Έλληνες λοιπόν η Γεωμετρία παίρνει πρώτη φορά την έννοια της καθαρής γνώσης και επιστήμης. Γενικά αυτό θεωρείται ότι ολοκληρώθηκε με τον Ευκλείδη, αλλά ήδη ο Πλάτωνας δείχνει ότι αυτή η θέση είχε καθιερωθεί από πολύ παλαιότερα στους Έλληνες. Εκφράζει ο τελευταίος μάλιστα την άποψη στα έργα του «Πολιτεία» και «Επινομίς» ότι η "γεωμετρία" σαν λέξη είναι γελοία *(γελοιον ονομα γεωμετρίαυ)*, αναφερόμενος στο ότι ετυμολογικά σημαίνει «μετράω την γη», ακολουθώντας έτσι την άποψη της χρήσης της γεωμετρίας για την μέτρηση των πραγμάτων του υλικού κόσμου και όχι για την άσκηση της ψυχής στην θέαση των αιώνιων αληθειών[1].

---

[1]Ο Πλάτωνας παρουσίασε τις αριθμητικές και τις γεωμετρικές έννοιες ως τον ιδανικό κόσμο, ή *κόσμο των ιδεών*. Υποστήριξε μάλιστα πως ο κόσμος είναι κατασκευασμένος από πέντε στερεά που σήμερα ονομάζονται Πλατωνικά στερεά και είναι τα πέντε κυρτά κανονικά πολύεδρα: το τετράεδρο(ή τριγωνική πυραμίδα), το εξάεδρο (ή κύβος), το οκτάεδρο, το δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο. Την άποψη αυτή για τον κόσμο δεχόταν και ο Αριστοτέλης, αλλά και πολύ μετά από αυτόν οι Αλχημιστές και πολλοί άλλοι μέχρι και σήμερα

Οι Έλληνες γεωμέτρες προσέγγιζαν την γεωμετρία σαν επιστήμη καθαρής γνώσης και έπρεπε να βρίσκουν αποδείξεις εφαρμοζόμενες με τον *κανόνα* και τον *διαβήτη*, σύμφωνα με τις επιταγές που καθορίστηκαν οριστικά από τον Ευκλείδη περίπου το 300 π.Χ. με το βιβλίο του "Στοιχεία" που αποτελείται από 13 τόμους. Δημιούργησαν έτσι την αποδεικτική θεωρητική γεωμετρία , σε αντίθεση με την εμπειρική γεωμετρία που επικρατούσε, εξέλιξη η οποία κορυφώνεται στην Αλεξανδρινή εποχή. Η γεωμετρία είναι ο πρώτος κλάδος των μαθηματικών που τοποθετήθηκε σε αξιωματική βάση από τον Ευκλείδη στα "Στοιχεία" του, και δικαιολογημένα ονομάζεται "Ευκλείδεια γεωμετρία". Το πιο χαρακτηριστικό γνώρισμα της ευκλείδειας γεωμετρίας είναι το *πέμπτο αίτημα* του Ευκλείδη, δηλαδή ότι θα πρέπει να δεχθούμε αξιωματικά ότι *από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μόνο μία παράλληλος*, γιατί δε μπορούμε να το αποδείξουμε.

ΟΑριστοτέλης, από τη μεριά του, διατυπώνει το φιλοσοφικό ερώτημα για τον χώρο με περισσή καθαρότητα: «Ανοχώρος είναι ή δεν είναι, και πώς είναι και τι είναι» (...περί τό που ώσπερ και περί απείρου γνωρίζειν,ει έστιν ή μή, και πως έστι, και τι εστίν(ΦυσικάΔ1,208α27-28). Ο Αριστοτέλης «πλησιάζει περισσότερο από ότι η πλατωνική προσέγγιση προς μια σύγχρονη συνολοθεωρητική αντίληψη, σύμφωνα με την οποία τα μαθηματικά αντικείμενα μπορούν να ορισθούν ως κλάσεις ισοδυναμίας άλλων αντικειμένων»[2] και «...τα γεωμετρικά αντικείμενα μοιάζουν με τις μορφές. Κατά μια έννοια, τα γεωμετρικά αντικείμενα *είναι* οι μορφές των φυσικών αντικειμένων. Βέβαια είναι Αριστοτελικές και όχι Πλατωνικές Μορφές. Τα μαθηματικά αντικείμενα που παράγονται μέσω αφαίρεσης δεν υπάρχουν πριν από ή ανεξάρτητα από τα φυσικά αντικείμενα από τα οποία έχουν αφαιρεθεί».[3]

Η έννοια του γεωμετρικού χώρου, μπορεί να χαρακτηριστεί κυρίως ως εμπειρική, στην ιστορική περίοδο πριν την αξιωματική συστηματοποίηση της Γεωμετρίας.

---

[2]. Δ. Αναπολιτάνος, Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών, σελ. 55-56, εκδ. Νεφέλη

[3]Σ. Σαπίρο, Σκέψεις για τα μαθηματικά: Η φιλοσοφία των μαθηματικών, σελ, 74, εκδ. παν/μιου Πατρών

Κι αυτό γιατί αποτελούσε, σύμφωνα με μια εκδοχή, εμπειρική γενίκευση των τόπων (δηλ. των περιοχών), όπου βρίσκονται και οροθετούνται τα φυσικά και γεωμετρικά αντικείμενα οι θεωρητικές έννοιες εκφράζουν σχέσεις κι όχι αντικείμενα ή γενικεύσεις αντικειμένων, ούτε ονόματα επιστημονικών όρων. Κατά συνέπεια, η θεωρητική σκέψη είναι σχεσιακή σκέψη, δηλ. σκέψη με βάση τις σχέσεις. Κι έχει, μάλιστα, επισημανθεί ότι η μαθηματική γνώση είναι, βασικά, θεωρητική γνώση, μ᾽ άλλα λόγια, σχεσιακή γνώση.

Για πάνω από χίλια χρόνια, τα τέσσερα βιβλία του Αριστοτέλη που έγραψε για τη φυσική παρείχαν τα θεμέλια για τις φυσικές επιστήμες στο δυτικό κόσμο. Ενώ ο Ηράκλειτος είχε θεωρήσει ότι το σύμπαν είναι σε διαρκή εξέλιξη και όλα ρέουν χωρίς αρχή και τέλος, ο Παρμενίδης δίδαξε ότι η κίνηση είναι ασυμβίβαστη με το Ον το οποίο είναι Μονάδα, συνεχής και αιώνια. Ο Αριστοτέλης ενσωματώνει τις δύο αυτές ιδέες στο «κοσμογονικό του σύστημα. Η μεταβολή τώρα συσχετίζεται με τη γη και το φεγγάρι λόγω ατελειών.

Η αμεταβλητότητα βρίσκεται σε άλλους πλανήτες, στον ήλιο και τα αστέρια επειδή είναι τέλεια, αμετάβλητα και αιώνια. Με σύγχρονους όρους, μπορούμε να πούμε ότι στο πρότυπο του Αριστοτέλη, υπήρχε απόλυτος χρόνος, απόλυτος χώρος και ένα πλαίσιο απόλυτης ηρεμίας, που παρέχονται από τη γη.

Αυτή ήταν η κυρίαρχη κοσμοθεωρία την εποχή που ο Ισαάκ Νεύτων ήταν φοιτητής στο Πανεπιστήμιο του Κέμπριτζ τα χρόνια 1661-65. Είκοσι χρόνια αργότερα, ο Newton ανέτρεψε αυτό το δόγμα. Μέσα από το έργο του Principia, που δημοσιεύθηκε το 1686, παρείχε ένα νέο πρότυπο. Ο χρόνος αναπαριστάνεται από ένα μονοδιάστατο συνεχές και ήταν απόλυτος, ο ίδιος για όλους τους παρατηρητές. Όλες οι ταυτόχρονες εκδηλώσεις αποτελούσαν το 3-διαστάσεων χωρικό συνεχές. *Αλλά δεν υπήρχε καμένα πλαίσιο απόλυτης ανάπαυσης.* Χάρη και στον Κοπέρνικο, η γη είχε χάσει την μέχρι τότε προνομιακή της θέση. Ήδη στη σχετικότητα του Γαλιλαίου, όλοι οι αδρανειακοί παρατηρητές είναι από φυσική άποψη, ισότιμοι. Το Principia κατέστρεψε επίσης την αριστοτελική ορθοδοξία καταργώντας τη διάκριση μεταξύ ουρανού και γης. Οι ουρανοί δεν είναι πια αμετάβλητοι. Ένα μήλο που πέφτει στη γη και τοι πλανήτες σε τροχιά γύρω από τον ήλιο τώρα υπόκεινται στους ίδιους νόμους. Ουρανοί δεν

ήταν πλέον τόσο μυστηριώδης, έξω από τα όρια του ανθρώπινου μυαλού.

Το Principia έγινε η νέα ορθοδοξία και κυριαρχούσε για πάνω από 150 χρόνια.

Μετά τον Νεύτωνα:

1. Με την ανάπτυξη των αριθμητικών πράξεων μεταξύ των γεωμετρικών μεγεθών, από τον RenéDescartes (1596-1650), δόθηκε η δυνατότητα να ενοποιηθεί η κλασική έννοια του αριθμού, με την έννοια του μεγέθους, μ' άλλα λόγια, στην έννοια του αριθμού συνυφάνθηκαν τόσο οι διακριτοί αριθμοί όσο και οι συνεχείς αριθμοί. Την ίδια ιστορική περίοδο, δηλ. το δεύτερο μισό του 17ου αιώνα και στις αρχές του 18ου αιώνα, η ισότητα άρχισε να αποδεσμεύεται από την ισότητα με αναλογίες και καθιερώνονται οι αριθμητικές εξισώσεις εν γένει. (Αναλυτική Γεωμετρία)

2. Η έννοια του χώρου αναπτύχθηκε, στην πρώιμη Αναγέννηση, με την εισαγωγή και καλλιέργεια της Γραμμικής Προοπτικής. Και με αυτή, δεν άλλαξε μόνο η φύση της αναπαράστασης του χώρου, αλλά δημιουργήθηκε και η ιδέα του συστήματος αναφοράς, η οποία γονιμοποίησε την Αναλυτική Γεωμετρία, στα μέσα του 17ου αιώνα, και τη Παραστατική Γεωμετρία, αργότερα. Παράλληλα, η ίδια ρίζα εξέθρεψε και την προβολική αντίληψη στη Γεωμετρία. Στα δύο αυτά ρεύματα της Γεωμετρίας, η έννοια του χώρου ανανεώθηκε, σε σχέση με την τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, με πιο θεαματική μετεξέλιξη τελικά, τις Μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες. Ωστόσο, η Προβολική Γεωμετρία έπαιξε καταλυτικό ρόλο στην αναδιοργάνωση της γεωμετρικής σκέψης τον 19ο αιώνα. Κι αυτή η νέα ώθηση που δόθηκε από την Προβολική Γεωμετρία δεν οφείλεται, μόνο, στη συσσώρευση νέων θεωρημάτων και ορισμών, αλλά στην εισαγωγή νέων επιστημολογικών βάσεων, όπως η *Αρχή της Συνέχειας,* που πρότεινε ο JeanVictorPoncelet (1788-1867), σύμφωνα με την οποία, "τα γεωμετρικά σχήματα προέρχονται το ένα από το άλλο με συνεχή αλλαγή, διατηρώντας το καθένα τις ιδιότητες του άλλου". Πρόκειται για μια νέα επιστημολογική συσχέτιση των γεωμετρικών γνώσεων, η οποία αποδέσμευσε τη Γεωμετρία από τους φραγμούς της γεωμετρικής εποπτείας. Γεγονός, που δεν άφησε αδιάφορους τους πρωτοπόρους των Μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών: Nikolai I. Lobachevsky (1792-1856) και JánosBolyai (1802-1860).

Η σχέση γεωμετρίας και πραγματικότητας

Όπως δείχνει τουλάχιστον η περίπτωση της εξαιρετικά επιτυχούς αστρονομίας του Πτολεμαίου, η χρήση των μαθηματικών στην αναπαράσταση (μέσω κύκλων, επικύκλων, κτλ) των ουράνιων κινήσεων ήταν ήδη νομιμοποιημένη, και σε κάθε περίπτωση δεν ήταν καινοφανής στην επιστημονική επανάσταση. Γιατί, λοιπόν, αυτή η μετάβαση μέσω της χρήσης των μαθηματικών από την ποιοτική εξήγηση στην ποσοτική περιγραφή ήταν τόσο ανατρεπτική ώστε να χαρακτηρίζεται «επανάσταση»; Για μια ικανοποιητική απάντηση στο ερώτημα αυτό απαιτείται να διακρίνουμε μεταξύ εργαλειακής και μεταφυσικής νομιμοποίησης της εφαρμοσιμότητας των μαθηματικών στην φυσική. Η εργαλειακή χρήση των μαθηματικών, δηλαδή η χρήση που αρκείται στο «σώζειν τα φαινόμενα» χωρίς να αξιώνει ότι περιγράψει πώς είναι πραγματικά ο κόσμος, ήταν ήδη νομιμοποιημένη μετά την μακραίωνη επιτυχία της μαθηματικής αστρονομίας του Πτολεμαίου ακριβώς επειδή ήταν μεταφυσικά ακίνδυνη στο πλαίσιο της αριστοτελικής παράδοσης. Αντιθέτως, η μεταφυσική νομιμοποίηση κατά την επιστημονική επανάσταση της χρήσης των μαθηματικών προϋπέθετε ότι μπορούσαν να καμφθούν οι μείζονες αντιρρήσεις που όρθωνε η κρατούσα αριστοτελική φυσική φιλοσοφία στην αξίωση ότι τα μαθηματικά δικαιούνται έναν ουσιώδη και αδήριτο ρόλο στην κοσμολογία. Επειδή οι αντιρρήσεις αυτές δεν θα μπορούσαν να καμφθούν χωρίς να παραβιαστούν θεμελιώδεις αρχές της αριστοτελικής παράδοσης, η επίλυση του μεταφυσικού προβλήματος που έθετε η εφαρμοσιμότητα των μαθηματικών συνδέεται άρρηκτα με την αναβίωση κατά την Αναγέννηση της πλατωνικής και πυθαγόρειας παράδοσης.

Χαρακτηριστικά, στη σύγκρουση που καθόρισε την έκβαση της επιστημονικής επανάστασης –και όπως αυτή η σύγκρουση προεικονίζεται με θαυμαστή καθαρότητα ήδη στους προλόγους του εργαλειοκράτη Α. Οσιάντερ και πλατωνιστή Ν. Κοπέρνικου που εμφανίζονται στο βιβλίο του δεύτερου «Περί των Περιστροφών των Ουρανίων Σφαιρών»–αντιπαρατέθηκαν, αντιστοίχως, η χρήση της γεωμετρίας ως απλώς εργαλείου που μπορεί να περιγράφει με ακρίβεια ή «να σώζει» τα φαινόμενα με την χρήση αυτής της επιστήμης

ως μοναδικά ικανής να αποκαλύψει την πραγματική φύση και δομή του κόσμου.

Παρόλα αυτά, απόσταση ανάμεσα στον χώρο και στον χρόνο, παραμένει ενεργή. Και η συσχέτιση της γεωμετρίας-μαθηματικών με τον κόσμο βρισκόταν ακόμη σε σπαργανώδη μορφή.Στον Γαλιλαίο, στον Νεύτωνα, στον Ντεκάρτ, ακόμα και στον Λάιμπνιτς και σε όσους συστηματικά ασχολήθηκαν, η ουσιαστική αλληλοσυσχέτηση των δυο εννοιών παραμένει ζητούμενο.Έπρεπε να περιμένουμε την αυγή του 20ου αιώνα για να πραγματωθεί.

Β. Η έννοια του χώρου στη φιλοσοφία του νεωτερικού υποκειμένου- Καντ, «η Κοπερνίκεια αντιστροφή»

Στον Descartes η ενόραση και σαφήνεια δεν είναι η ίδια έννοια με εκείνη της εποπτείας του Καντ. Η έκταση ταυτίζεται με το σώμα και η ύλη με την έκταση. Ο χώρος είναι επ᾽ άπειρον διαιρέσιμος. Η σκέψη ταυτίζεται με την ψυχή. Οι δυο πλευρές της υπόστασης αποτελούν τον περίφημο δυισμό ψυχής σώματος. Επινόησε την αναλυτική γεωμετρία. Γενικά, κυριαρχεί ο ορθολογισμός που εμπνέεται από στη φιλοσοφία των μαθηματικών και της γεωμετρίας. Στην ορθολογική σκέψη πηγαίνουμε από σαφείς ιδέες σε σαφείς ιδέες εκκινώντας από προφανή αξιώματα και προκείμενες.

Στον Spinoza το ορθολογικό στοιχείο, που εμπνέει τηνmoregeometrico δομή καθώς και την subspeciesaeternitaties της *Ηθικής* του, αναφέρεται σε μια εσωτερική αναγκαιότητα του λόγου και την εγγυάται το οντολογικό παρά το επιστημολογικό επίπεδο. Στον Σπινόζα έχουμε την «ενορατική γνώση»(cognitionintuitive) του 3ου είδους γνώσης.

Ο Leibniz δίνει κεντρικό ρόλο στη μαθηματική λογική. Όπως μετέπειτα στον Καντ η γενίκευση αποτελεί σκέψη 2ου βαθμού η οποία αναφέρεται στις ίδιες τις λειτουργίες της. Αναπτύσσει μια συμβολική ή μεταφορική μαθηματική ως φιλοσοφία όπου κάθε κατηγορία αντιστοιχεί σε μια μαθηματική συνάρτηση. Ο σχεσιακός χώρος του Leibniz διαφέρει από τον απόλυτο του Νεύτωνα ορίζοντας έτσι μια διαμάχη σχετικά με την έννοια του χώρου.[Pleiade: 29]

Το πρόβλημα του χώρου παραλαμβάνεται από τον Καντ ο οποίος ταλαντεύεται αρχικά μεταξύ των δύο συλλήψεων.Τελικά, δίνει μια δική του λύση υιοθετώντας τον απόλυτο χώρο του Νεύτωνα και αναδεικνύοντας την εποπτεία σε ιδιαίτερη βαθμίδα της γνώσης διακριτή από την απλή αντίληψη, όπου ο apriori*χώρος* παίζει τον κεντρικό ρόλο. Η λύση αυτή έμελλε να αποτελέσει μια από τις ρίζες της μεγαλειώδους υπερβατολογικής σύλληψης του νεωτερικού υποκειμένου.

Υποκείμενο: σχεδόν απόλυτη επίγνωση των λειτουργιών την ώρα της δράσης (δυνατότητα ελέγχου). Οι πράξεις είναι αποτέλεσμα έλλογων λειτουργιών [Καντιανή αντίληψη του υποκειμένου (αλλά της διαφεύγει η περίπτωση ασυνείδητης δράσης ενός ατόμου, όταν δηλαδή δεν υπάρχει έλεγχος επί των πράξεων και πρότερη έλλογη επεξεργασία τους)]

«Ο Καντ θεμελιώνει την αρχιτεκτονική του λόγου στον αμετάβλητο χαρακτήρα της γεωμετρικής δόμησης» (Bachelard : 22).

Το σχήμα του υποκειμένου στον Καντ:

Εποπτεία είναι όταν βλέπεις «ότι αιωρείται μπροστά σου το αντικείμενο». Σημαίνει ότι βλέπεις αυτό που δεν βλέπεις, έχεις εποπτεία αυτού που δεν εμπίπτει στην αντίληψη σου.

Υποκειμενικότητα: «Εγώ είμαι ένα πράγμα που σκέφτεται». Η συνείδηση, δηλαδή, του εαυτού και του κόσμου.

Υποκείμενο: Είναι αυτό που είναι ικανό να πει «εγώ», μιλώντας για τον εαυτό του και που έχει συνείδηση του εαυτού του και του κόσμου (υπάρχει συνθήκη σχέσης).

Όσον αφορά στον Καρτέσιο, αυτός δεν είπε «Εγώ σκέφτομαι», αλλά ουσιαστικά μίλησε για ένα πράγμα που σκέφτεται, μια σκεπτόμενη υπόσταση (πολλαπλές διατυπώσεις για μια σκεπτόμενη υπόσταση – ένα πράγμα που σκέφτεται – χωρίς όμως να τις συνδέει με το «εγώ». Αντιλαμβάνεται ότι υπάρχουν σκεπτόμενες υποστάσεις, αντιλαμβάνεται ότι κι ο ίδιος σκέπτεται, αλλά δεν τα ταυτίζει ποτέ στο κείμενό του. Ο πρώτος που τα ταύτισε και ανέφερε την έννοια του υποκειμένου, συμπεριλαμβάνοντας τη «συνείδηση» είναι ο Kant!)

Η έννοια του υποκειμένου δομήθηκε από τον Locke και τον Kant, σύμφωνα με τη Νεωτερική Φιλοσοφία.Το υποκείμενο (subjectum) στον Μεσαίωνα δεν έχει αποκτήσει ακόμα την έννοια της συνείδησης και συνεχίζει να διατηρεί την έννοια του Αριστοτελικού υποκειμένου. Δεν έχει ένα κέντρο (Εγώ), αλλά αποτελείται από τρία στοιχεία.

Οι μορφές που μετατρέπουν τις απλές ιδέες σε σύνθετες (Συσχετισμός απλών ιδεών σε σύνθετες) είναι: οι Τρόποι (χώρος και χρόνος), οι Υποστάσεις και οι Σχέσεις (συσχετισμοί).

Ο Locke στο «Ταυτότητα και Διαφορά» προσδιορίζει:

1. τον Χώρο-Χρόνο: η έκταση (όγκος) είναι η σταθερά στον χώρο (place), ενώ στον χρόνο (time) η σταθερά είναι beginning.

2. την Ύπαρξη (existence/being): ορίζεται βάσει του χώρου και του χρόνου που καταλαμβάνει το κάθε πράγμα ξεχωριστά. Επίσης, σχετίζεται με την κίνηση, η οποία συνίσταται από τη διαδοχή στιγμών. Ο Νους είναι η συνείδηση/το στοιχείο αυτής της ενεργητικότητας. Το 'πράγμα' είναι αυτό που υπάρχει. Η ύπαρξη αναγνωρίζεται με τη διαδοχή στιγμών (στιγμές ύπαρξης). Προϋπόθεση: η συνείδηση της διαδοχής, μέσω π.χ. της μνήμης, της ανάμνησης.

Kant: από το υποκείμενο εξαρτάται η γνώση μας για το αντικείμενο κι όχι από το ίδιο το αντικείμενο (δανείζεται την κοπερνίκεια αντιστροφή: η Γη γυρίζει γύρω από τον Ήλιο κι όχι όλοι οι υπόλοιποι πλανήτες γύρω από τη Γη).

Στον Locke το κέντρο είναι το mind και είναι μια δομή. Στον Kant υπάρχει το κέντρο ως μια ενότητα. Στον Kant συναντάμε τους όρους Bewusstsein (εσωτερική συνείδηση - Γερμανικά) και Selbst (εαυτός - Γερμανικά).Εμφανίζεται μια μετατροπή της έννοιας της συνείδησης: αυτό είναι το πέρασμα από τον Locke στον Kant.

Η συνείδηση πλέον είναι η γνώση των παραστάσεών μας των αντικειμένων, δηλαδή ο σύνδεσμος μεταξύ των εποπτειών και των εννοιών!

Εμπειριστική και Ορθολογική παράδοση: ο Kant προσπαθεί να συνενώσει, να συναρθρώσει αυτές τις δύο παραδόσεις, δηλαδή τον Locke με τον Descartes, την εποπτεία με την έννοια. Με άλλα λόγια,

στον Kant διαπιστώνουμε τη σύνδεση της Διάνοιας (έννοιες) με την Αισθητηριακότητα (εποπτείες).

Ο Kant αναζητά όχι την πηγή της γνώσης, αλλά ποιες είναι οι δυνατότητες της γνώσης σε κάθε παράδοση (συνθήκες-όροι δυνατότητας γνώσης): «Τι και Πώς μπορώ να γνωρίζω». Έτσι, ξεφεύγει από τις δύο παραπάνω παραδόσεις (εμπειρισμός και ορθολογισμός) και δομεί το υποκείμενο που αυτό καθορίζει τη γνώση. Υπερβαίνει τις προηγούμενες παραδόσεις αλλάζοντας το βασικό ερώτημα.

Υπερβατικό: πέρα από την εμπειρία ≠ Υπερβατολογικό (έννοια στον Kant): φτιάχνω ένα σχήμα.

Εικόνα 1: Αναπαράσταση της συγκρότησης του υποκειμένου κατά τον Kant

Στην περιοχή του Λόγου τοποθετείται η γνώση της γνωστικής ικανότητας προς τα πράγματα (σχέση της γνώσης με τα πράγματα κι όχι η γνώση για αυτά – δευτεροβάθμια σχέση).

Kant: «Δεν μπορώ να γνωρίσω το πράγμα καθ' εαυτό (DasDing) [το τοποθετεί στην κάτω θέση του σχήματός του]

Αυτή είναι η «Κοπερνίκεια αντιστροφή» του Kant: αποσύρει το «πράγμα καθ' εαυτό» από το επίκεντρο της γνώσης και τοποθετεί εκεί το «Εγώ νοώ» (δηλαδή το Υποκείμενο) [τα αντικείμενα πρέπει να προσδιορίζονται προς τη γνώση]. Στο Β' XVI & Β' XVII της Β' έκδοσης της *Κριτικής του Καθαρού λόγου* περιλαμβάνεται η «Κοπερνίκεια

αντιστροφή» (a priori γνώση: προσδιορίζεται κάτι ως προς τα αντικείμενα – το Συμβολικό κατά τον Lacan)

Για να κατανοήσουμε το καντιανό εγχείρημα και να εντοπίσουμε σε αυτό την έννοια του χώρου είναι απαραίτητες ορισμένες διακρίσεις.

Στην πρώτη διάκριση τέμνονται *Αισθητικότητα (Αισθητηριακότητα) και Διάνοια* οι οποίες ορίζουν το πεδίο των παραστάσεων-(representations).

Ο Kant δε βάζει σε προτεραιότητα τη μία απ' τις δύο αυτές έννοιες, αλλά τις διακρίνει ως προς τη λειτουργία τους (Β' 75) :

Αισθητικότητα: ικανότητα του πνεύματος να προσλαμβάνει παραστάσεις εφόσον κατά κάποιον τρόπο κάτι επιδρά σε αυτό

Διάνοια: ικανότητα του πνεύματος που επιτρέπει να συντίθενται οι παραστάσεις μέσω ορισμένων κανόνων, ώστε να δίδονται οι έννοιες (Begriff).

Η εποπτεία, λοιπόν, χαρακτηρίζεται από μια δεκτικότητα, ενώ η Διάνοια έχει μια αυτενέργεια. Χωρίς την πρώτη δε θα μας δινόταν κανένα αντικείμενο, ενώ χωρίς τη Διάνοια δε θα μπορούσαμε να νοήσουμε κανένα από αυτά.

Σύμφωνα με μια δεύτερη διάκριση*Apriori / aposteriori*:

Ο πρώτος όρος σημαίνει 'άσχετα και ανεξάρτητα από κάθε εμπειρία' και συνδέεται με το «καθαρό». Αντιτίθεται στο εμπειρικό, όμως δεν είναι έμφυτο και γι' αυτό διαχωρίζεται από τη Διάνοια (Ορθολογισμός: η διάνοια είναι έμφυτη [Β' 1: πρώτη παράγραφος στην εισαγωγή του κειμένου]). Ο όρος a priori αναφέρεται στην ιδιότητα της γνωστικής μας ικανότητας.Ο Kant δεν ενδιαφέρεται για τη γέννηση της εμπειρίας, αλλά γι' αυτό που ενυπάρχει στην εμπειρία a priori (όχι έμφυτα). Αυτές ακριβώς είναι οι Συνθετικές a priori κρίσεις.

Η Τρίτη διάκριση ανάμεσα σε *Φαινόμενα / Πράγματα καθαυτά* είναι εκείνη με την οποία προκαλείται ένας μερισμός, διχασμός, δυισμός με τον οποίο το πεδίο της αντικειμενικότητας διχάζεται (scissiondel' objet). Τα Φαινόμενα είναι οι πρώτες παραστάσεις(Erscheinung).

Τα Πράγματα καθαυτά ("Dingansich") δεν μπορούμε να τα γνωρίζουμε, δεν μπορούμε να διεισδύσουμε στην υπόσταση.Τα

πράγματα που γίνονται αντικείμενο των αισθήσεών μας είναι Φαινόμενα. Μόνο αυτά μπορούμε να γνωρίζουμε!

Η apriori Αισθητικότητα (εποπτεία)αναφγέρεται στον χώρο και τον χρόνο.

Η apriori Διάνοια προσδιορίζεται με τις 12 κατηγορίες (12 μορφές Διάνοιας) ως προς την ποσότητα, την ποιότητα, τη σχέση (ουσία-αιτία-κοινωνία) και τον τρόπο (δυνατότητα-ύπαρξη-αναγκαιότητα).

Οι Ιδέες στον Kant: συνίστανται α) στην Ψυχή (Υποκείμενο, Λόγος), β) στον Κόσμο και γ) στον Θεό.

Η Εποπτεία και η Διάνοια είναι αυστηρές, αλλά προσανατολίζονται από τις Ιδέες. Γι' αυτό οι τελευταίες αποκαλούνται 'ρυθμιστικά (καθολικά) ιδεώδη' (τέλος του κύκλου του Kant) που προσανατολίζουν τις παραπάνω (Εποπτεία και Διάνοια) προς το DasDing (το αδύνατο!).

Η πρωτοτυπία του Kant απαντάται σε τρεις διατυπώσεις:

1. Η αλήθεια της αντιληπτικής φαινομενικότητας είναι εσωτερική στη σκέψη (βρίσκεται εντός της σκέψης)
2. Η πραγματικότητα είναι επίσης εσωτερική και αποτελεί αντικείμενο της σκέψης. Η αντικειμενικότητα αναφέρεται στις συνθήκες ικανότητας και λειτουργίες δηλαδή τη δομή του υποκειμένου.
3. Ένας σκεπτόμενος εαυτός αυτοαναγνωρίζεται στις λογικές του λειτουργίες.

Για τον Kant η αλήθεια βρίσκεται μέσα στο υποκείμενο! Είναι κλασικός ιδεαλιστής.

Το υποκείμενο του Kant «υποτάσσεται μέσα του» Είναι 'δέσμιο' (υπεύθυνο) της δικιάς του δραστηριότητας (νοητικής). Το υποκείμενο του Kant είναιη γενική ατομικότητα που προκύπτει από τη διάδραση μεταξύ των ικανοτήτων της γνώσης (εποπτεία, αντίληψη, νόηση κλπ). Η διάδραση αυτή συγκροτεί τον κόσμο («Κοπερνίκεια αντιστροφή») και δίνει νόημα στο γεγονός της δράσης μας μέσα σε αυτόν.Ο Kant υποτάσσει όλη τη γνωστική διαδικασία για την παραγωγή της καθαρής νοήσεως στην Κρίση (judgment). Αξιοποιεί την παράδοση στην οποία ο Αυγουστίνος μιλάει για τρία στοιχεία που απλώς επικοινωνούν μεταξύ τους και οLocke τα οργανώνει.Ο Kant δημιουργεί μια ιεραρχία και

μια κυριαρχία: η παράσταση των παραστάσεων δημιουργεί την ιεραρχία. Η Αισθητικότητα και η Διάνοια υποτάσσονται στον Λόγο. Από την πρώτη περνάμε στη δεύτερη κι από εκεί στον Λόγο[4]. Με άλλα λόγια, ο Kant υποστηρίζει πως όλες οι παραστάσεις μας είναι συνειδητές.

Β1. Η έννοια της εποπτείας (Anschaung)και η a priori έννοια του χώρου και του χρόνου

Ειδικά τώρα για την έννοια του χώρου ο Καντ δίνει στην*Κριτική του Καθαρού Λόγου*τα παρακάτω μεταφυσικά επιχειρήματα:

«1. Ο χώρος δεν είναι εμπειρική έννοια, που συνάγεται από εξωτερικές εμπειρίες. Γιατί, για να μπορούν συγκεκριμένα αισθήματα ν' αναφερθούν σε κάτι έξω από μένα, πρέπει να υπάρχει ήδη σα βάση η αντίληψη του χώρου.[A23/B38

2. Ο χώρος είναι μια αναγκαία αντίληψη a priori, στην οποία βασίζονται όλες οι εξωτερικές εποπτείες. Δεν μπορεί ποτέ να φανταστεί κανείς πως δεν υπάρχει χώρος, αν και μπορούμε να φανταστούμε ότι δεν υπάρχει τίποτε μέσα στο χώρο.

3. Ο χώρος δεν είναι συμπερασματική ή, όπως λένε, γενική έννοια για οποιεσδήποτε σχέσεις των πραγμάτων, αλλά μια καθαρή εποπτεία. Γιατί κατ' αρχή μόνον έναν ενιαίο χώρο μπορεί να φανταστεί κανείς, κι όταν μιλάει κανείς για πολλούς χώρους εννοεί μ' αυτό μονάχα τμήματα ενός και του αυτού μοναδικού χώρου.[A24-5/B 39-40].

4. Ο χώρος νοείται σαν ένα άπειρο μέγεθος. Κατά μια έννοια δεν μπορεί να νοηθεί σαν να περιείχε μέσα της ένα ατελείωτο πλήθος παραστάσεων. Κι εν τούτοις ο χώρος νοείται έτσι. Συνεπώς η πρωταρχική ιδέα για το χώρο είναι εποπτεία και όχι έννοια» [B 40].

---

[4]Διαλεκτική: σύνδεση Λόγου και Ιδεών)[βλ. Kant, Immanuel, *Κριτική του Καθαρού Λόγου*, Α' μέρος (1977-79)/μτφρ Αναστάσιος Γιανναράς, Αθήνα: Παπαζήση, «Υπερβατική Αναλυτική-Περί της παραγωγής των καθαρών εννοιών του νου», Β' έκδοση, §16, σελ. 81].

Ως συνέχεια στην κατεύθυνση του Καντ ο Φίχτε αναπτύσσει με εύληπτο τρόπο που οφείλεται στην διαλογική μορφή που χρησιμοποεί, την έννοια της εποπτείας και του χώρου στα παρακάτω αποσπάσματα. Είναι πολύ χρήσιμη για την κατανόηση της έννοιας οι διάλογοι στο έργο του Φίχτε *Ο προορισμός του ανθρώπου,* Μέρος 2, Γνώση:

«Αναγνωρίζω ότι προχωρώ μονίμως με το να επεκτείνω αυτό που μέσα στο αίσθημα είναι στην πραγματικότητα μόνον ένα σημείο. Με το να παραθέτω το ένα πλάι στο άλλο ό,τι κανονικά θα έπρεπε να τοποθετώ το ένα μετά το άλλο, αφού μέσα στο απλό αίσθημα εν γένει δεν υπάρχει παράθεση αλλά χρονική ακολουθία. Ανακαλύπτω ότι στην πράξη προχωρώ ακριβώς με τον τρόπο που ο γεωμέτρης με αφήνει να κατασκευάζω τα σχήματά του και να επεκτείνω το σημείο σε ευθεία, την ευθεία σε γεωμετρική επιφάνεια. Απορώ πώς έφτασα εδώ»(61)

Τι είναι η εποπτεία;

«Εγώ: κάτι τέτοιας υφής, ώστε εντός του να μπορεί κανείς να σύρει γραμμές προς όλες τις κατευθύνσεις και να ορίσει σημεία, δηλαδή ως χώρος.

Πνεύμα: …κάτι που προέρχεται από σένα τον ίδιο μπορεί να αποτελέσει φαινόμενο για σένα ως Είναι εκτός σου… Διείσδυσες στην πραγματική πηγή των παραστάσεων των πραγμάτων έξω από σένα. Αυτή η παράσταση δεν είναι αντίληψη, αφού μόνο τον εαυτό σου αντιλαμβάνεσαι, ούτε σκέψη είναι…. Τα πράγματα δεν σου εμφανίζονται μέσω αντιπροσώπου αποκτάς άμεση συνείδηση του πράγματος που υπάρχει… συ ο ίδιος είσαι αυτό το πράγμα… είσαι η περατότητά σου μέσω του εσώτερου λόγου[Grund] της ουσίας σου, καθώς στέκεις εμπρός στον εαυτό σου τον ίδιο και ερριμένος έξω από αυτόν. Ό,τι παρατηρείς έξω από σένα δεν είσαι παρά συ ο ίδιος. Αυτή η συνείδηση πολύ ορθά ονομάστηκε εποπτεία.»(79).

Με την εποπτεία βλέπω αυτό που δεν βλέπω:

«δεν είμαι απλά πρακτικό ον αλλά και διάνοια. Εποπτεύω προσέτι το ότι αισθάνομαι. Με αυτόν τον τρόπο αποκτώ από μένα τον ίδιο και από την ουσία μου τη γνώση ενός Είναι. Το αίσθημα μεταβάλλεται σε ένα αισθητό. Το κόκκινο πάθημα, το λείο πάθημα κ.ο.κ. μεταβάλλεται σε ένα κόκκινο, λείο κ.ο.κ. έξω από μένα το οποίο, τόσο το ίδιο όσο και το ότι γίνεται αίσθημα, το εποπτεύω εν χώρω, καθώς η εποπτεία μου η

ίδια είναι ο χώρος. Κι έτσι πιστεύω ότι βλέπω ή αισθάνομαι με την αφή επίπεδες επιφάνειες τις οποίες στην πραγματικότητα ούτε βλέπω ούτε αισθάνομαι. Απλά εποπτεύω την όραση ή την αφή ως όραση ή αφή μιας επίπεδης επιφάνειας»,(80).

Στην *Κριτική της κριτικής δύναμης*του Καντ, ωστόσο, η σχέση ανάμεσα σε κρίση, χώρο και γεωμετρία μετατοπίζει την αρχική διάκριση μεταξύ καθαρής υπερβατολογικής εποπτείας και αισθητηριακότητας (sensibility). Οι αισθητικοί κανόνες είχαν εναρμονιστεί με τις εννοιολογικές κατηγορίες της Κριτικής του καθαρού λόγου τώρα όμως αποτελούν μέρος μιας σχέσης ανάμεσα σε κρίση, λόγο και παραγωγικής φαντασίας(Rawes 20). Η αισθητικότητα η δύναμη της οποίας είχε περιοριστεί τώρα επανέρχεται ως μέρος της ευρύτερης σχέσης που απαρτίζεται από στοχαστική σκέψη και αισθητική κρίση. Η στοχαστική κρίση αντιπροσωπεύει ένα ειδικό τύπο μιας αισθητικής δραστηριότητας μια σχέση στην οποία το μερικό υπάγεται στο απροσδιόριστο, στο σωματικό, στην κρίση, κάτι ανάλογο με την «καλλιτεχνική δράση». Αυτή αποκαλείται από τον Καντ «αισθητική στοχαστική κρίση».

Από την *Πρώτη κριτική* στην *Τρίτη* συμβαίνει μια λοιπόν μια μετατόπιση των εννοιών της γεωμετρίας και του χώρου:

- όσον αφορά τον χώρο ο Καντ μετατοπίζεται από την έννοια του απόλυτου χώρου προς ένα είδοςχωρικής διάστασης- ικανότητας, κρίσης *ενσώματης* στο ατομικό υποκείμενο.

- όσον αφορά τη γεωμετρία από εκείνη ως κλάδου της μαθηματικής λογικής προς μια σειρά κρίσεων, εργαλείων και παραστάσεων σχηματιζόμενων από *συναισθήματα.*

Ορίζεται έτσι η *παραγωγική φαντασία*, της οποίας ο ρόλος είχε περιοριστεί στην Β' έκδοση της Κριτικής του Καθαρού Λόγου, ως η ενεργητικότητα που κατασκευάζει μέσω των αισθημάτων και ενσώματων σχέσεων τη σχέση αναστοχαστικού υποκειμένου και γεωμετρικών σχημάτων. Το σκεφτόμενο σώμα και η φαντασία δρούν στην παραγωγή του χώρου ως μια εσωτερικά παραγόμενη εποπτεία η οποία δεν ανάγεται σε μια εξωτερικά προερχόμενη μορφή.

Πέρα από τον Καντ:

- ο υπερβατολογικός ιδεαλισμός, κυρίως με βάση το έργο του Fichte, αναπτύσσει τη δυνατότητα να αποσπαστεί η καθαρή εποπτεία του αισθητού από το «πράγμα καθ'εαυτό»(dasding), δηλαδή να αναφέρεται πλέον σε μια συγκροτητική δραστηριότητα (Tatsache).

- αντιστρόφως, η επιστημολογία της κβαντικής φυσικής διερευνά το πρόβλημα της ορατότητας(visualizability), η οποία να μην συνδεεται με τα αισθητά δεδομένα αλλά με τη θεωρητική δυνατότητα της αναπαράστασης (Anschaulickeit). Ο NeilBohr με τις «χωροχρονικές αναπαραστάσεις» του και ο Heisenberg με τις συμβολικές αναλογίες.

  Οι σημασίες που πήρε ο όρος της εποπτείας γύρω στα 1920 συνιστούν μια ρήξη με το καντιανό πλαίσιο και αφορούν τα μαθηματικά καιτ η φυσική.

-τρίτον, η εποπτεία αναπτύσσεται από τον Husserl και την φαινομενολογία γενικά σε μια κίνηση αντίστροφη με τη συγκρότηση του καντιανού υποκειμένου ως η επαναπροσέγγιση του αντικειμένου(Gegenstand).

Γ. Η τομή του νέου επιστημονικού πνεύματος στον 20ο αι. και ο χωροχρόνος

Όπως ειπώθηκε, το Principia του Νεύτωνα έγινε η νέα ορθοδοξία και κυριαρχούσε για πάνω από 150 χρόνια. Ο κλονισμός ήρθε στα τέλη του 19ου αιώνα, κατ' αρχήν από τον Maxwell πάνω στην εργασία του για τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα. Και κυρίως ήταν η ταχύτητα διάδοσης των η/μ κυμάτων, που εμφάνιζε μια σταθερή τιμή, ανεξάρτητη από το σύστημα αναφοράς. Φαινόταν ότι άπειρη ταχύτητα διάδοσης δεν μπορεί να υπάρξει. Η άμεση προσφυγή ήταν ο Αιθέρας: επιστροφή σε μια Αριστοτελική αντίληψη, ότι η φύση καθορίζει ένα πλαίσιο απόλυτης ηρεμίας.

Ο Αϊνστάιν, χρησιμοποιεί απλά νοητικά πειράματα για να υποστηρίξει ότι, εφόσον η ταχύτητα c του φωτός είναι μια παγκόσμια σταθερά, η ίδια για όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές, η έννοια του ταυτόχρονου δεν μπορεί να ισχύει. Διαχωρισμένα χωρικά γεγονότα που εμφανίζονται ως ταυτόχρονα σε έναν παρατηρητή δεν μπορεί να

είναι έτσι για ένα άλλο παρατηρητή, που κινείται ομοιόμορφα σε σχέση με τον πρώτο. Η ειδική σχετικότητα ήταν γεγονός.

Ο χώρος κι ο χρόνος δεν μπορούν πια να είναι ασύνδετοι και απόλυτοι. Αλληλοσχετίζονται σ ένα τετραδιάστατο συνεχές που ονομάζεται πια χωρόχρονος. Η Γεωμετρία του είναι αυτή του Minkowski. Αλλά και αυτή ουσιαστικά είναι μια ευκλείδεια γεωμετρία.

Μισό αιώνα πριν από την ανακάλυψη της γεωμετρίας του χωρόχρονου, ο Riemann είχε επεκτείνει την ευκλείδεια γεωμετρία προς μια άλλη κατεύθυνση. Ο Gauss, δάσκαλος του Riemann, είχε προηγουμένως μελετήσει την εσωτερική γεωμετρία των καμπύλων επιφανειών στον ευκλείδειο χώρο. Η εσωτερική γεωμετρία περιέχει τις ιδιότητες εκείνες μιας επιφάνειας που μπορούν να οριστούν ανεξάρτητα από τον περιβάλλοντα χώρο, όπως η θεωρία των γεωδαισιακών, των ελάχιστων καμπυλών επί της επιφάνειας με δοθέντα άκρα.

Ο Riemann, θεωρώντας μια επιφάνεια με την εσωτερική της γεωμετρία ως αυθύπαρκτο δισδιάστατο καμπύλο χώρο, γενίκευσε την όλη θεωρία σε οποιοδήποτε πλήθος διαστάσεων, εισάγοντας την έννοια του πολυδιάστατου καμπύλου χώρου.

Η ευκλείδεια γεωμετρία περιέχεται ως ειδική περίπτωση στη γεωμετρία του Riemann, ως η περίπτωση κατά την οποία η καμπυλότητα είναι παντού μηδέν. Η καμπυλότητα ενός χώρου Riemann εκδηλώνεται στη σχέση γειτονικών γεωδαισιακών, που διαφέρει από εκείνη μεταξύ γειτονικών ευθειών στον ευκλείδειο χώρο.

Η ανακάλυψη της μη ευκλείδειας γεωμετρίας περί το 1830 ήταν αναπόφευκτη και συνοδεύεται από την εμφάνιση των ίδιων διαλεκτικών τάσεων τόσο στη φιλοσοφία όσο και στην επιστήμη

Ο Αϊνστάιν, μετά τη συμβολή του Minkowski, συγκέντρωσε τις προσπάθειές του στο να επινοήσει θεωρία για τη βαρύτητα, πέραν της νευτώνειας, η οποία να είναι συμβατή με την ενότητα του χωροχρόνου, που μόλις είχε αποκαλυφθεί. Η σκέψη του επέμεινε στο ότι δεν μπορεί να είναι τυχαίο ότι η μάζα ορίζει ταυτόχρονα και την αδράνεια ενός σώματος και την έλξη του προς τα άλλα. Το γεγονός αυτό, στο πλαίσιο της νευτώνειας θεωρίας, έχει ως επακόλουθο όλες οι δοκιμαστικές μάζες να έχουν την ίδια επιτάχυνση σ’ ένα πεδίο βαρύτητας, όπως πρώτος είχε διαπιστώσει ο Γαλιλαίος.

Ο Αϊνστάιν αντιλήφθηκε τότε ότι, ως προς ένα σύστημα αναφοράς σε ελεύθερη πτώση σ' ένα πεδίο βαρύτητας, αυτό σημαίνει ότι η ίδια η δύναμη της βαρύτητα απαλείφεται, και το μόνο που παραμένει είναι το διαφορικό της, η παλιρροϊκή δύναμη που προξενεί απόκλιση των γειτονικών δοκιμαστικών μαζών. Τούτο του θύμισε την απόκλιση των γειτονικών γεωδαισιακών στη γεωμετρία του Riemann, κάτι που αποτελεί εκδήλωση της καμπυλότητας. Έτσι ο Αϊνστάιν, γενικεύοντας τη γεωμετρία του χωρόχρονου του Minkowski, κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο με τον οποίο ο Riemann γενίκευσε την ευκλείδεια γεωμετρία του χώρου οδηγήθηκε στην έννοια του καμπύλου χωρόχρονου και στην ανακάλυψη ότι η βαρύτητα δεν είναι παρά η καμπυλότητα του χωρόχρονου με την πυκνότητα ενέργειας της ύλης, νόμο που έχει τη μορφή μη γραμμικού συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων, των εξισώσεων Αϊνστάιν, και ενσωματώνει και το νόμο της βαρύτητας και τους νόμους κίνησης της ύλης.

Ο χώρος και ο χρόνος υποβιβάστηκαν σε συμβατικές μόνο έννοιες, όπως ακριβώς είναι το μήκος και το πλάτος σ' ένα επίπεδο, και μόνο ο χωρόχρονος, το ίδιο το επίπεδο, έμεινε ως απόλυτη πραγματικότητα.

Ο απόλυτος χώρος του Νεύτωνας επηρεάζει τα σώματα αλλά δεν επηρεάζεται από αυτά και είναι κενός. Αντίθετα στον Αϊνστάιν επηρεάζεται ο χωρόχρονος από ταχύτητα σώματος και δεν είναι κενός! Η ύλη επηρεάζει τη μορφή του χωρόχρονου τροποποιώντας τις ιδιότητές του, τον παραμορφώνει, και από την άλλη ο χωρόχρονος δρα πάνω στην ύλη και καθορίζει την κίνηση και την κατάστασή της.

Ο απόλυτος χωρισμός του χώρου και του χρόνου ευνοούσε την αναλυτική εποπτεία.

Το νέο πνεύμα (μη κατευθείαν επιστημολογία) επιφέρει ανακατατάξεις σε όλο το ζήτημα της εποπτείας. Αυτή δεν μπορεί να λογίζεται πλέον ως πρωτογενής, πρώτη έρχεται μια έλλογη σπουδή που πραγματώνει ένα είδος θεμελιώδους δυικότητας.

Ο υλισμός προϋποθέτει ότι η ύλη εντοπίζεται σε έναν ορισμένο χώρο και της απαγορεύει να δρα εκεί που δεν βρίσκεται.

Ο εντοπισμός της ύλης στον χώρο χωρίζει καταχρηστικά τις γεωμετρικές και τις χρονικές ιδιότητες

Δεν πρέπει να χωρίζουμε το ζήτημα της δομής της ύλης και το ζήτημα της χρονικής συμπεριφοράς της. Το σημείο τομής μεταξύ χωρικών και χρονικών ιδιοτήτων στεγάζει το πλέον δυσνόητο μεταφυσικό αίνιγμα.

Το φωτόνιο αποτελεί εμφανέστατα έναν τύπο πράγματος- κίνησης. Όσο πιο μικρό είναι ένα αντικείμενο τόσο καλύτερα πραγματώνει το χωροχρονικό σύνθετο που συνιστά την ίδια την ουσία του φαινομένου. Ο διευρυμένος υλισμός απαλλαγμένος από την αρχική γεωμετρική αφαιρετικότητά του. Μπορούμε να μιλάμε για *εξαΰλωση του υλισμού*: ανυψώνει τη φαντασία, αρχικά διαπαιδαγωγημένη από τις χωρικές μορφές, μέχρι την υπερ-γεωμετρια του χωροχρόνου και τελικά την απάλειψη του χωροχρόνου προς όφελος της αφηρημένης δομής των ομάδων. Τότε θα κατοικούμε πραγματικά εκείνον τον χώρο συντεταγμένης αφαίρεσης όπου η σχέση προέχει του όντος.

Η σχέσεις ύλης ενέργειας φανερώνουν την χειραφέτηση της εποπτείας, έως τώρα υπερβολικά χωρικής και υπερβολικά σίγουρης για την αρχική πραγματολογική κατάκτηση της . Χάρη στην ενέργεια το άτομο είναι εξίσου γίγνεσθαι και ον, κίνηση και πράγμα. Το άτομο είναι το στοιχείο του γίγνεσθαι-ον το οποίο σχηματοποιείται στον χωρόχρονο.

Δυό παρανοήσεις σχετικά με την ερμηνεία της Σχετικότητας

1. Παράδειγμα του πώς έχουν περάσει λάθος αντιλήψεις όχι μόνο στους απλούς πολίτες άλλα και σε επιστήμονες: Αν ρωτήσουμε κάποιον τι θα συμβεί αν κινείται με ταχύτητα 99.99% της ταχύτητας του φωτός, θα πάρουμε πιθανά σαν απάντηση: Λόγω του φαινομένου Lorentz – Fitzgerald, θα συσταλεί ο χώρος και θα διασταλεί ο χρόνος.

Μια οριακά καλύτερη απάντηση: πράγματι θα είναι στριμωγμένος επίπεδα, σαν τηγανίτα και το ρολόι θα τρέχει αργά, αλλά αυτό δεν θα ήταν αισθητό. Γιατί θα έχουν συρρικνωθεί τα αναλογικά ραβδιά μέτρησης, και έτσι θα μετρήσει τα πράγματα ως το αρχικό τους μέγεθος. Και οι λειτουργίες του εγκεφάλου θα έχουν αντίστοιχα επιβραδυνθεί, έτσι δεν θα ήταν αισθητή η καθυστέρηση των ρολογιών.

Η πραγματικά σχετικιστική απάντηση είναι: αυτή τη στιγμή ταξιδεύετε στο 99.99 τοις εκατό, η ταχύτητα του φωτός-ως προς κάποιο απολύτως θεμιτό αδρανειακό σύστημα. δεν είναι πιο σωστό να πούμε ότι είστε

τώρα σε κατάσταση ηρεμίας από το να πούμε ότι κινείστε απειροελάχιστα κοντά στην ταχύτητα του φωτός. Πράγματι, εκτός από τα πράγματα που ταξιδεύουν με την ταχύτητα του φωτός, δεν έχει νόημα να αποδίδουμε καμιά απόλυτη ταχύτητα σε κάθε αντικείμενο. Χωρίς να είναι αμετάβλητες, οι υποφωτεινές ταχύτητες δεν είναι πραγματικές ιδιότητες των αντικειμένων. Ως εκ τούτου, δεν μπορεί να υπάρξει καμία δυναμική επίδραση του "ταξιδιού κοντά στην ταχύτητα του φωτός" επειδή δεν υπάρχει καμία τέτοια αντικειμενική κατάσταση του να ταξιδεύει κοντά στην ταχύτητα του φωτός. Τα πράγματα δεν θα συρρικνωθούν ούτε θα επιβραδυνθούν. Μάλλον, υπάρχουν πάντα απείρως πολλοί τρόποι έκφρασης χωροχρονικών διαστημάτων όσον αφορά την απόσταση στο χώρο και το χρόνο που πέρασε. Κανένας από αυτούς τους τρόπους, αναπαριστώμενοι από διάφορα αδρανειακά συστήματα, δεν είναι περισσότερο, ή λιγότερο έγκυρος, από οποιοδήποτε άλλο.

2. Μια άλλη παρανόηση είναι αυτό που αποκαλείται «ταχύτητα του φωτός».

Αν και έχει διαστάσεις ταχύτητας, στη σχετικότητα αποτελεί μια σταθερά. Δηλώνει τη σχέση αναλογίας των χωρικών και χρονικών διαστάσεων του χωροχρονικού συνεχούς. Και αυτή η «ταχύτητα»-σχέση, δεν είναι σχετική. Είναι απολύτως σταθερή. Και προσδιορίζει την ιδιαίτερη γεωμετρία του.

Για την αναπαράσταση και την παρέμβαση

Ο Kant αποκαλεί τον εαυτό του *εμπειρικό ρεαλιστή* και *υπερβατικό ιδεαλιστή*. Δεν έφτασε στην τελική του θέση κατευθείαν, αλλά την προσέγγισε μέσω ενός άλλου δυϊσμού. Είναι ο χώρος απλώς μια σχετική ιδέα, όπως υποστήριξε ο Leibniz και όπως υποτίθεται ότι καθιέρωσε ο Einstein; Ή είναι απόλυτη, όπως στο νευτώνειο σχήμα; Ο Newton πρέσβευε ότι ο χώρος και ο χρόνος είναι πραγματικά. Τα αντικείμενα καταλαμβάνουν θέσεις σε έναν προκαθορισμένο χώρο και χρόνο. Ο Leibniz εξέφρασε την αντίθεση ότι ο χώρος και ο χρόνος δεν είναι πραγματικά. Είναι ιδεατά, δηλαδή κατασκευές έξω από τις συσχετιστικές (relational) ιδιότητες των αντικειμένων. Ο Kant

αμφιταλαντευόταν ανάμεσα στα δυο για το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του και τελικά δημιούργησε μια σύνθεση. Ο χώρος και ο χρόνος είναι προϋποθέσεις για να αντιληφθούμε κάτι ως αντικείμενο. Δεν αποτελεί εμπειρικό γεγονός το ότι τα αντικείμενα υπάρχουν στο χώρο και το χρόνο, παρ' ότι μπορούμε πειραματικά να προσδιορίσουμε τις χωροχρονικές σχέσεις των αντικειμένων μέσα στο πλαίσιο του χώρου και του χρόνου. Αυτός είναι ένας *εμπειρικός ρεαλισμός* που δέχεται «την αντικειμενική εγκυρότητα του χώρου σε σχέση με οτιδήποτε μπορεί να μας παρουσιαστεί εξωτερικά ως αντικείμενο». Ταυτόχρονα είναι ένας *υπερβατικός ιδεαλισμός,* ο οποίος υποστηρίζει ότι ο χώρος «δεν είναι τίποτα απολύτως ... από τη στιγμή που θα αποσύρουμε ... τον περιορισμό του στην πιθανή εμπειρία και τον θεωρήσουμε έτσι ως κάτι που αποτελεί τη βάση των πραγμάτων καθεαυτών». Για τον Kant: «Η ύλη είναι ... απλώς ένα είδος αναπαραστάσεων (εποπτεία - intuition), οι οποίες ονομάζονται εξωτερικές, όχι όμως εξωτερικές όσον αφορά στη σχέση τους με αντικείμενα καθεαυτά εξωτερικά, αλλά επειδή συσχετίζουν τις αντιλήψεις με το χώρο, στον οποίο όλα τα πράγματα είναι εξωτερικά το ένα για το άλλο, ενώ ωστόσο ο ίδιος αυτός χώρος είναι μέσα μας». Έτσι ο ίδιος ο χώρος είναι ιδεατός, «μέσα μας», και η ύλη σωστά αποκαλείται εξωτερική, επειδή υπάρχει ως μέρος ενός συστήματος αναπαράστασης μέσα σ' αυτόν τον ιδεατό χώρο. Για να φτάσω στην πραγματικότητα των εξωτερικών αντικειμένων έχω τόσο μικρή ανάγκη να καταφύγω στο συμπερασμό, όση έχω σε σχέση με την πραγματικότητα των αντικειμένων της εσωτερικής μου αίσθησης, δηλαδή σε σχέση με την πραγματικότητα των σκέψεών μου. Διότι ομοίως και στις δύο περιπτώσεις τα αντικείμενα δεν είναι τίποτα άλλο από αναπαραστάσεις, των οποίων η άμεση αντίληψη (συνείδηση) αποτελεί ταυτοχρόνως μια επαρκή απόδειξη της πραγματικότητάς τους.

Το 1755, όταν ήταν νέος, ο Kant έγραψε ένα μικρό φυλλάδιο φυσικής, που λεγόταν *Μοναδολογία (Monadology).* Αυτό είναι μια αξιοσημείωτη πρόβλεψη της δικής μας σύγχρονης θεωρίας των πεδίων και των δυνάμεων. Δύο χρόνια αργότερα ο Boscovicτην επεξεργάστηκε με πολύ μεγαλύτερη μαθηματική δεξιοτεχνία και εισήγαγε τη θεωρία των πεδίων στον κόσμο. Στην πρώιμη φυσική του Kant, ο κόσμος αποτελείται από σημειακά σωματίδια - μονάδες - , τα οποία χωρίζονται από πεπερασμένες αποστάσεις και ασκούν δυναμικά πεδία στο

περιβάλλον τους. Οι ιδιότητες της ύλης εξηγήθηκαν από την προκύπτουσα μαθηματική δομή. *Το 1755 αυτά τα θεωρητικά σημειακά σωματίδια του Kant ήταν τα δικά του νοούμενα.* Πολύ αργότερα αναθεώρησε αυτήν την ιδέα και συνειδητοποίησε ότι υπήρχε μια τυπική ασυνέπεια στις θεωρίες του. Θα μπορούσε να επιλυθεί μόνο εξαλείφοντας τα πράγματα, τα σημειακά σωματίδια και αφήνοντας μόνο τα δυναμικά πεδία. Ως αποτέλεσμα, στη βαθύτερη δομή του σύμπαντος, *δεν υπάρχουν πράγματα, δεν υπάρχουν νοούμενα.* Έπειτα ήρθε η συνήθης καντιανή σύνθεση αυτών των αντιμαχόμενων προτάσεων: δεν υπάρχουν *γνώσιμα* νοούμενα.

N. R. Hanson επισήμανε ένα παράξενο χαρακτηριστικό στις νέες κατευθύνσεις των φυσικών επιστημών. Αρχικά, μια ιδέα εισάγεται περισσότερο ως υπολογιστικό εργαλείο παρά ως μια κυριολεκτική αναπαράσταση του πώς είναι ο κόσμος. Οι κατοπινές γενιές μεταχειρίζονται τη θεωρία και τις οντότητές της με έναν αυξανόμενα ρεαλιστικό τρόπο. Είναι αρκετά συχνό στην επιστήμη ο αντιρεαλισμός για μια συγκεκριμένη θεωρία ή τις οντότητές της να παραχωρεί τη θέση του στο ρεαλισμό.

Η επιστήμη λέγεται ότι έχει δυο σκοπούς: τη θεωρία και το πείραμα. Οι θεωρίες προσπαθούν να πουν πώς είναι ο κόσμος. Το πείραμα και η συνακόλουθη τεχνολογία αλλάζουν τον κόσμο. Αναπαριστούμε και παρεμβαίνουμε. Αναπαριστούμε για να παρέμβουμε και παρεμβαίνουμε υπό το φως των αναπαραστάσεων. Το μεγαλύτερο μέρος των σημερινών συζητήσεων για τον επιστημονικό ρεαλισμό διατυπώνεται με όρους θεωρίας, αναπαράστασης και αλήθειας. Οι συζητήσεις είναι διαφωτιστικές αλλά όχι αποφασιστικές. Αυτό συμβαίνει εν μέρει επειδή έχουν μπολιαστεί κατά πολύ από μια απείθαρχη μεταφυσική. Υποψιάζομαι ότι δεν μπορεί να υπάρξει κάποιο καθοριστικό επιχείρημα υπέρ του ρεαλισμού ή εναντίον του, στο επίπεδο της αναπαράστασης. Όταν περνάμε από την αναπαράσταση στην παρέμβαση, ο αντιρεαλισμός βρίσκει μικρότερη εφαρμογή. Ο τελικός κριτής στη φιλοσοφία δεν είναι το πώς σκεφτόμαστε, αλλά το τι κάνουμε.

Τόσο οι αιτιοκράτες όσο και οι υλιστές ενδιαφέρονται περισσότερο για τις οντότητες παρά για τις θεωρίες. Ο ρεαλισμός είναι περισσότερο ένα ζήτημα παρέμβασης στον κόσμο παρά αναπαράστασής του με λόγια

και σκέψεις. Η διχοτόμηση της πράξης από την σκέψη, οδηγεί στα πεδία του ιδεαλισμού. Ωστόσο, η ιδέα της γνώσης ως αναπαράστασης του κόσμου δεν είναι από μόνη της η πηγή αυτού του κακού. Η ζημιά προέρχεται από μια τυφλή εμμονή στην αναπαράσταση, τη σκέψη και τη θεωρία, εις βάρος της παρέμβασης, της πράξης και του πειράματος.

Οι αναπαραστάσεις είναι εξωτερικές και δημόσιες, είτε πρόκειται για το πιο απλό σχέδιο στον τοίχο είτε, όταν επεκτείνεται η λέξη «αναπαράσταση», για την πιο πολυσύνθετη θεωρία (για τις ηλεκτρομαγνητικές, ισχυρές, ασθενείς ή βαρυτικές δυνάμεις). Οι περισσότερες από τις πρώτες αναπαραστάσεις ήταν οπτικές, αλλά η αναπαράσταση δεν είναι από τη φύση της οπτική. Οι αναπαραστάσεις προορίζονται να είναι λιγότερο ή περισσότερο δημόσιες ομοιότητες. Οι θεωρίες, όχι οι μεμονωμένες προτάσεις, είναι αναπαραστάσεις.

Η πραγματικότητα, ή ο κόσμος, υπήρχε πριν από οποιαδήποτε αναπαράσταση ή ανθρώπινη γλώσσα. Φυσικά. Αλλά η διαμόρφωση της έννοιάς της, ως πραγματικότητας, είναι δευτερεύουσα. Αρχικά υπάρχει αυτό το ανθρώπινο πράγμα, η κατασκευή αναπαραστάσεων. Έπειτα ήταν η κρίση των αναπαραστάσεων ως πραγματικών ή μη πραγματικών, ως αληθών ή ψευδών, πιστών ή μη πιστών. Τελικά ακολουθεί ο κόσμος, όχι πρώτος αλλά δεύτερος, τρίτος ή τέταρτος. Ο κόσμος έχει μια θαυμάσια θέση, ακόμα και αν δεν είναι η πρώτη. Ανακαλύφθηκε με τη διαμόρφωση της ιδέας του πραγματικού ως γνωρίσματος της αναπαράστασης.

Οι αναπαραστάσεις είναι πάνω απ' όλα ομοιότητες. Οι αναπαραστάσεις δεν προορίζονται εν γένει για να πουν πώς είναι κάτι. Μπορεί να είναι εικονιστικές ή προϊόντα για απόλαυση.

Η ομοιότητα στέκεται μόνη της. Δεν είναι μια σχέση. Δημιουργεί τους όρους μιας σχέσης. Υπάρχει πρώτα απ' όλα η ομοιότητα και μετά η ομοιότητα με κάτι ή με κάτι άλλο. Πρώτα υπάρχει η αναπαράσταση και μετά το «πραγματικό». Πρώτα υπάρχει μια αναπαράσταση και πολύ αργότερα υπάρχει η δημιουργία ιδεών, σε σχέση με τις οποίες μπορούμε να περιγράψουμε αυτό ή την άλλο σημείο στο οποίο έχουμε ομοιότητα.

Μπορεί να υπάρχουν αρκετοί τρόποι αναπαράστασης των ίδιων γεγονότων.

Τόσο ο ρεαλισμός όσο και ο αντιρεαλισμός τρέχουν πέρα-δώθε, προσπαθώντας να προσκολληθούν πάνω σε κάτι στη φύση της αναπαράστασης, που θα κατατροπώσει τον αντίπαλο. Δεν υπάρχει όμως τίποτα εκεί. Γι' αυτόν το λόγο στρέφομαι από την αναπαράσταση στην παρέμβαση. Η πραγματικότητα έχει να κάνει με την αιτιότητα και οι ιδέες μας για την πραγματικότητα σχηματίζονται από τις ικανότητές μας να αλλάξουμε τον κόσμο. Ίσως να υπάρχουν δυο εντελώς διαφορετικές μυθικές προελεύσεις της ιδέας της «πραγματικότητας». Η μία είναι η πραγματικότητα της αναπαράστασης, η άλλη είναι η ιδέα αυτού που μας επηρεάζει και αυτού που μπορούμε να επηρεάσουμε. Η πραγματικότητα ως παρέμβαση δεν αρχίζει καν να συνδέεται με την πραγματικότητα ως αναπαράσταση, μέχρι την έλευση της σύγχρονης επιστήμης. Η φυσική επιστήμη από τον 17ο αιώνα ήταν η περιπετειώδης σύνδεση της αναπαράστασης με την παρέμβαση. *Πότε μπορεί κάτι να χάσει την υποθετική υπόστασή του και να γίνει τετριμμένη; Όταν το χρησιμοποιήσουμε για να ερευνήσουμε κάτι άλλο.*

Πρόταση για τη διδακτική

Στη διδακτική των Φυσικών Επιστημών κεντρικό ρόλο έχουν οι πρότερες γνώσεις και αντιλήψεις των παιδιών. Αλλά θα πρέπει να παρέμβει η διαδικασία της μάθησης ώστε αυτές να αποκτήσουν το status της έγκυρης και χρήσιμης γνώσης για την πορεία τους στον χώρο της εκπαίδευσης. Οι Εικαστικές τέχνες από τη μεριά τους, ακριβώς επειδή είναι άμεσα παρεμβατικές, μπορούν να αποτελέσουν σημαντικό εργαλείο ανίχνευσης, αξιοποίησης αλλά και μεταβολής των ιδεών, αντιλήψεων και γνώσεων των μαθητών. Μπορούν να ωθήσουν και να εδραιώσουν αλλά και να πλουτίσουν τη γνώση, ακριβώς γιατί συνδυάζουν την επέμβαση, την πράξη, την χειρωνακτική σχέση με τις επιστήμες και ειδικότερα με την γεωμετρία.

Για παράδειγμα, τα σχήματα εξαρχής καθόρισαν την πορεία της γεωμετρικής σκέψης, όντας διάμεσοι ανάμεσα στις αφηρημένες έννοιες και στην αισθητηριακή αντίληψη. Σε επίπεδο διδασκαλίας αποτελούν καθοριστικό σύνδεσμο, καθώς υπάρχει άμεση και αναπόσπαστη σύνδεση αυτών με την αιτιολόγηση και την παραγωγική σκέψη μαθητών αλλά και καθηγητών.

Η δημιουργία οπτικών-χωρικών παραστάσεων θεωρείται από πολλούς ως πρωταρχική πηγή σκέψης και ότι συμβάλλει στις Επιστήμες του χώρου και στην Εικαστική σκέψη (Gardner). Γιατί η αποτύπωση των μορφών είναι αντίληψη μιας πνευματικής τάσης του ανθρώπου (Wölfflin), που αρχικά διαμορφώνεται ως μια πνευματική εικόνα ή ως μια φανταστική γεωμετρία, μια τοπολογία συνδυασμού χρωμάτων και γραμμών (Focillon). Στη συνέχεια η αντίληψη των πνευματικών μορφών εξωτερικεύεται σε ύλη από ένα σύνολο γραμμών οριοθετώντας τη μορφή με το περίγραμμα ή με τη σύνθεση σχημάτων για την κατασκευή της μορφής και μ' αυτό δηλώνει τη γραμμική αντίληψη του κόσμου (Arnheim, Gombrich). Η γραμμική εικόνα παρουσιάζει τις δομικές σταθερές του αντικειμένου, που απεικονίζεται και παρέχει στο θεατή πληροφορίες του, τις οποίες αποσπά με φυσικό τρόπο, κοιτάζοντας τον πραγματικό κόσμο (Gibson). Με την χρωματική αντίληψη εκφράζεται η επιλογή χρωμάτων ως ένα χαρακτηριστικό στοιχείο διάκρισης βασικών εξωτερικών χαρακτηριστικών των μορφών (Sargent, Arnheim). Γενικά η εξακρίβωση της ταυτότητας μιας μορφής αντικειμένου, σημαίνει να αναγνωρίζει κάποια από τα προεξέχοντα δομικά χαρακτηριστικά του (Arnheim)[5].

Τελικές σκέψεις

Οι τελευταίες θεωρίες του χωροχρόνου (λεπτή διαστρωμάτωση / oliation κλπ) στις κβαντικές θεωρίες, μεταθέτουν όλο και πιο μακριά την καθημερινή προφάνεια των αντιλήψεων.

Οι θεωρία του χάους, βάζει και πάλι σε άλλο επίπεδο τις αναπαραστάσεις της πραγματικότητας αλλά και τις μορφές που μπορούμε να σκεφτούμε και να φανταστούμε τον χώρο, πέρα από τις χρηστικές της παραμέτρους στο πεδίο των επιστημών.

---

[5]Οι Φυσικές Επιστήμες και τα Εικαστικά συνεργάζονται για την ανίχνευση και αξιοποίηση ιδεών και γνώσεων των νηπίων σχετικά με τους ζωντανούς οργανισμούς. - Μαγουλιώτης Απόστολος, Τσουκαλά Κικιλία, 8ο ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟ ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΝΕΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ, 26-28 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2013 ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΕΙΔΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ ΒΟΛΟΣ

Οι νέες τεχνολογίες, ωθούν ακόμη μακρύτερα την έννοια του χώρου αλλά και του χρόνου (cloud, ψηφιακά δίκτυα κλπ). Η ψηφιακήτεχνολογία για πρώτη φορά αλλάζει πρακτικά την υπόσταση του καθημερινού χώρουμεταφέροντας ένα μέρος του φαντασιακού σε μια τεχνο-πραγματική διάσταση, ένασυνδυασμό πραγματικού και εικονικού – δυνητικού χώρου, ένα εξελιγμένο στάδιο τουτεχνικού περιβάλλοντος

Υπάρχουν εντούτοις κάποια πράγματα που αξίζουν να μας απασχολήσουν περαιτέρω, όπως για παράδειγμα

- το γεγονός ότι *οι αναπαραστάσεις του χρόνου είναι χωρικές*

- (εκτός ίσως από τη μυθολογική σκέψη/λογοτεχνία-αφήγηση)

- Η θετικότητα της ευκλείδειας γεωμετρίας από τη μια και η θετικότητα μιας «άλλης» σκέψης (μυθολογικής/ πλαστικής/ δυναμικής) από την άλλη.

- Η ενοποίηση χρόνου-χώρου στον Einstein οδηγεί στην αλληλεξάρτηση τους και σε «νέες» αναπαραστάσεις-πίσω στη μυθολογική σκέψη ίσως?

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αναπολιτάνος Διονύσιος, *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών/* Αθήνα:Νεφέλη, 1985

Θωμαΐδη, Γ. / Καστάνη, Ν. *Ο όρος "Γεωμετρική Άλγεβρα" στο στόχαστρο μιας σύγχρουνης επιστημολογικής διαμάχης*, στο βιβλίο *Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά. Κείμενα Ιστορίας και Φιλοσοφίας*, επιμ. Δ. Αναπολιτάνου / Β. Καρασμάνη, εκδ. Τροχαλία, 1993

Καστάνης Ν.: *Η ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών, από τη σκοπιά των «Εννοιολογικών Αλλαγών»*, Δεκέμβριος 2006, http://users.auth.gr/~nioka/Files/anaptiksi_math_enoion.pdf

Μπαρτσίδης, Μιχάλης. *Διατομικότητα, Κείμενα για μια οντολογία της σχέσης*/ μτφρ. ΛουκίαΜάνο- Χρηστίδη. Αθήνα: Νήσος, 2015

Σατελέ, *Η φιλοσοφία. Τ. Γ', Από του Καντ ως του Χούσερλ*/ μτφρ. Κ. Παπαγιώργης. Αθήνα: Γνώση, «Κοπερνίκεια επανάσταση», 34-50., 1990

8ο ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟ ΣΥΝΕΔΡΙΟΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΝΕΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ, 26-28 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2013ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΕΙΔΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ ΒΟΛΟΣ

Bachelard, Gaston, *Το νέο επιστημονικό πνεύμα*/ μτφρ. Γιώργος Φαράκλας, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1998

Balibar, Francoise, *Χώρος και σχετικότητα*/ μτφρ. Μαρία Λιογιωτάτου, Αθήνα: Εστία, 1997

Bas C. Van Fraassen, *An Introduction to the Philosophy of Time and Space*/ New York, Random House 1970.

EinsteinA.*Relativity*:*TheSpecialandtheGeneralTheory*,15th έκδοση.NewYork: CrownPublishers, 1952.

Hacking, Ian, *Αναπαριστώντας και παρεμβαίνοντας*/μτφρ. Τάσος Τσιαντούλας, Αθήνα: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Ε.Μ.Π., 2002

Irvine, A.(ed.*): Philosophy of Mathematics*, Elsevier, 2009

JammerMax ,*Έννοιες του χώρου: Η ιστορία των θεωριών του χώρου στη φυσική*/μτφρ. Τζέλα Λάζαρη,Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2001

Kant, Immanuel, *Κριτική της Κριτικής Δύναμης*/ μτφρ. Κώστας Ανδρουλιδάκης. Αθήνα: Ιδεόγραμμα, 2002

Kant, Immanuel, *Κριτική του Καθαρού Λόγου*/ μτφρ. Αναστάσιος Γιανναράς. Αθήνα: Παπαζήση, 1977-79

L.Boi, D.Flament, J.-M.Salanskis(Eds.), *1830-1930:ACenturyofGeometry,Epistemology,HistoryandMathematics*/Berlin: Springer, 1992

Liebscher D.-E., *The Geometry of Time*/ WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2005

Locke, John, «Ταυτότητα και διαφορά» στο Βασίλειος Κρουστάλλης. *Το πρόβλημα του Οδυσσέα: Θεωρίες προσωπικής ταυτότητας, (17ος - 18ος αι.)*/μτφρ. Βασίλειος Κρουστάλλης- Βασιλική Κοκκινίδου. Κέρκυρα: Εκδόσεις Happy-Go-Lucky, 101-125., 2010

Massey, D., *Για το Χώρο*, μτφ. Ι. Μπιμπλή. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα, 2008

Maudlin Tim, *PHILOSOPHY OF PHYSICS: Space and Time,* Princeton University Press, 2012

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ: ΜΙΑ ΔΙΑΧΡΟΝΙΚΗ ΣΧΕΣΗ

Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης

ΠΤΔΕ – Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η γεωμετρία αποτελεί ένα ιδιαίτερο πεδίο των μαθηματικών λόγω της σχέσης μεταξύ των φυσικού και του γεωμετρικού χώρου που τον μοντελοποιεί καθώς και λόγω του ρόλου των γραφικών αναπαραστάσεων στην γεωμετρική δραστηριότητα οι οποίες αποτελούν απαραίτητα εργαλεία εργασίας της σκέψης λόγω της ευρετικής λειτουργία τους. Η γεωμετρία αφού απάντησε σε πρακτικά προβλήματα, εξορθολογοποιήθηκε και στη συνέχεια έγινε ένα θεωρητικό σύστημα. Διαμορφώθηκαν ποικίλες θεωρίες που αντιστοιχούν σε περισσότερες ασύμβατες γεωμετρίες διότι τα αξιώματα είναι διαφορετικά. Η διδασκόμενη γεωμετρία είναι η ευκλείδεια. Η διδασκαλία της δεν μπορεί να σχετισθεί άμεσα στο θεωρητικό μοντέλο και στηρίζεται στις χωρικές γνώσεις των υποκειμένων.

Η σχέση μεταξύ φυσικού και γεωμετρικού χώρου διατηρείται συγκεκριμένα από τα προβλήματα κατασκευής που κάνουν χρήση των εργαλείων σχεδιασμού (κανόνας, διαβήτης κ.λπ.) τα οποία διαμορφώνουν ιδιαίτερους περιορισμούς. Ωστόσο, οι λογικές που χρησιμοποιούνται στον φυσικό και στον γεωμετρικό χώρο είναι πολύ διαφορετικές: η πρακτική προβληματική και η γεωμετρική προβληματική οδηγούν ορισμένες φορές σε αποτελέσματα αντιφατικά. Η δραστηριότητα αναπαράστασης των επίπεδων σχημάτων και των στερεών σωμάτων ευνοεί τον διαχωρισμό μεταξύ των ιδιοτήτων των αναπαριστάμενων αντικειμένων και των ιδιοτήτων των αναπαραστάσεων διότι ορισμένες φορές είναι ασύμβατα. Οι δυσκολίες

των μαθητών στη γεωμετρία βρίσκονται συχνά στο πέρασμα της πρώτης φάσης εκμάθησης που ονομάζεται γεωμετρία παρατήρησης, όπου τα αντικείμενα είναι συγκεκριμένα και όπου οι λόγοι είναι πρακτικοί, στην δεύτερη φάση που την ονομάζουμε παραγωγική γεωμετρία, όπου τα αντικείμενα είναι θεωρητικά (ακόμη και αν αναπαριστάνονται) και οι λόγοι είναι έγκυροι από τις εκφωνήσεις της θεωρίας και συνδέονται από τους κανόνες της λογικής (ακόμη και αν η θεωρία και η λογική δεν διδάσκονται). Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε τη σχέση ανάμεσα στον φυσικό χώρο και τον γεωμετρικό χώρο διότι πολλές από τις δυσκολίες εκμάθησης φαίνεται να προέρχονται από μια σύγχυση ανάμεσα στις γνώσεις που προέρχονται από την άμεση εμπειρία με τον «πραγματικό» κόσμο και τις γεωμετρικές γνώσεις.

1. Από τον Φυσικό Χώρο στη Γεωμετρία

Πριν επιλύσει τα προβλήματα που προέρχονται από τον φυσικό χώρο, το υποκείμενο, κατά την παιδική ηλικία του, μαθαίνει να προσανατολίζεται αναπτύσσοντας τις κινητικές και αισθητηριακές ικανότητές του. Το παιδί ανακαλύπτει διαφορετικά μέρη του πραγματικού κόσμου, τοποθετείται σε σχέση με τον χώρο και τα αντικείμενά του, και τοποθετεί τα αντικείμενα το ένα σε σχέση με το άλλο. Αυτές οι χωρικές γνώσεις, είναι εξαιρετικά σημαντικές για τις γεωμετρικές γνώσεις.

1.1 Οι Σχέσεις του Υποκειμένου με τον Φυσικό Χώρο

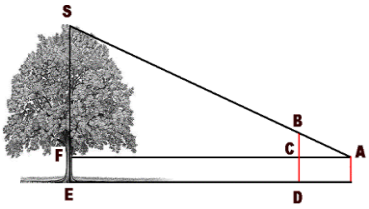
Τα μέσα που ένα υποκείμενο μπορεί να θέσει σε ενέργεια για την επίλυση ή τον έλεγχο της λύσης ενός προβλήματος σχετικό με τον φυσικό χώρο δεν είναι ανεξάρτητα του μεγέθους του υποκειμένου σε σχέση με τις διαστάσεις που κατέχουν τα αντικείμενα με τα οποία σχετίζεται το προς επίλυση πρόβλημα: προσδιορίστε το ύψος ενός τριγώνου που είναι σχεδιασμένο σε ένα φύλλο χαρτί, το ύψος ενός δέντρου ή το ύψος ενός βουνού. Για αυτό τον λόγο ο Guy Brousseau

(1983) θεωρεί το μέγεθος του χώρου ότι είναι μια διδακτική μεταβλητή και διακρίνει τρεις τιμές:

- τον μικρό-χώρο που είναι ο χώρος των μικρών αντικειμένων που μπορούμε να μετακινήσουμε, να χειριστούμε. Το υποκείμενο είναι εξωτερικό σε σχέση με αυτό τον χώρο, αντιλαμβάνεται τα αντικείμενα με τρόπο εξαντλητικό. Το φύλλο χαρτί που εργάζεται ο μαθητής είναι ένας μικρό-χώρος.

- ο μέσο-χώρος είναι ο χώρος των αντικειμένων των οποίων το μέγεθος είναι μεταξύ 0,5 και 50 φορές το μέγεθος του παιδιού. Αυτά τα αντικείμενα μπορούν με ειδωθούν συνολικά (ολιστικά), πρακτικά με ταυτόχρονο τρόπο. Το υποκείμενο είναι μέρος αυτού του χώρου, η αυλή του σχολείου κ.λπ. είναι μέσο-χώροι.

- ο μάκρο- χώρος είναι ο χώρος των αντικειμένων όπου το υποκείμενο μπορεί να έχει μερικές οπτικές και η συνολική οπτική είναι μια νοητική κατασκευή. Το υποκείμενο είναι εσωτερικό σε αυτό τον χώρο.



Το θεώρημα του Θαλή για παράδειγμα, είναι ενδιαφέρον στο μέσο-χώρο όπου οι μετρήσεις μήκους είναι δύσκολες και ίσως αδύνατες.

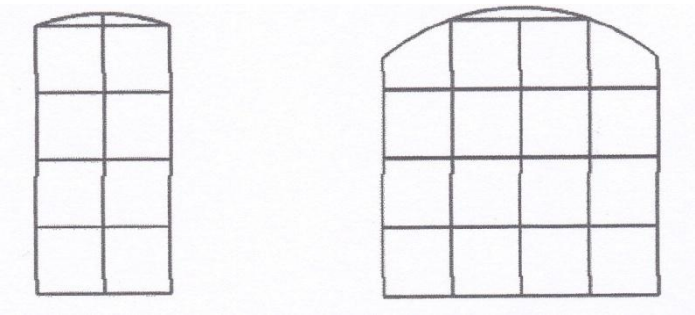
Ο Brousseau (1983) υπογραμμίζει ότι το αναλυτικό πρόγραμμα είναι περιορισμένο στο μικρό-χώρο. Η απουσία μοντελοποίησης οδηγεί σε απουσία ύπαρξης προβληματισμού αναφορικά με τις σχέσεις μεταξύ του φυσικού και του γεωμετρικού χώρου. Αυτό συμβάλλει στην εξήγηση της ρήξης ανάμεσα στην γεωμετρία της παρατήρησης και την γεωμετρία της απόδειξης.

1.2 Η εργασία στον Φυσικό Χώρο είναι μια Φυσική Γεωμετρία

Ο Alain Kuzniak (2004, 2006, 2012) ορίζει την φυσική γεωμετρία για την σύγχυση που διατηρεί μεταξύ του μοντέλου και της πραγματικότητας, αυτή η γεωμετρία έχει την πραγματικότητα και τον αισθητό κόσμο για πηγή επικύρωσης. Τα σχέδια στα οποία βασίζεται είναι τα σχήματα που αναπαριστάνουν το πραγματικό, ο ορίζοντάς της

είναι τεχνολογικός, αρκεί να φέρεις τις συγκεκριμένες χρήσιμες απαντήσεις σε συγκεκριμένα προβλήματα.

Ας εξετάσουμε μια πρώτη ερώτηση: Ορίστε το σχέδιο ενός παράθυρου στην άνω μεριά του οποίου είναι καμπύλο και είναι ένα τόξο κύκλου. Ο ιδιοκτήτης του σπιτιού συνεργάζεται με έναν κτίστη για να μεγαλώσει το παράθυρο, θέλοντας να διατηρήσει το τόξο και να αποκτήσει ένα παράθυρο όπως φαίνεται στο σχέδιο. Ο κτίστης έχει και έναν μαθητευόμενο που τον ρωτάει πως θα πρέπει να εργαστεί για να επεκτείνει το τόξο του κύκλου. Με ποιο τρόπο θα απαντούσατε στη θέση του κτίστη;



Μπορούμε, επίσης, να δούμε μια δεύτερη ερώτηση: Τα τετράγωνα του παράθυρου έχουν πλευρά 27 εκατοστά. Ο μαθητευόμενος έκοψε ένα κομμάτι γυαλιού, μέτρησε τις 4 πλευρές του τετραπλεύρου, και έχει 27 εκατοστά για κάθε πλευρά και ανακοινώνει στο αφεντικό του ότι το κομμάτι γυαλιού είναι κατάλληλο. Το αφεντικό δεν είναι ευχαριστημένο, ζητάει από τον μαθητευόμενο να μετρήσει μια διαγώνιο για να γνωρίσει αν το κομμένο κομμάτι είναι ένα τετράγωνο. Ο μαθητευόμενος μετράει μια διαγώνιο, βρίσκει 382 χιλιοστά, αλλά δεν γνωρίζει αν μπορεί να προτείνει αυτή την κοπή στο αφεντικό του. Τι θα κάνατε στην θέση του μαθητευόμενου;

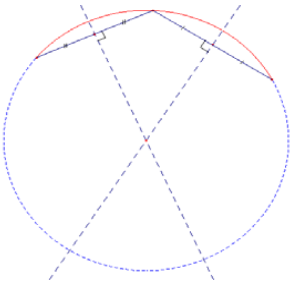
2. Η Γεωμετρική Γνώση διακρίνει τον Φυσικό Χώρο και τον Γεωμετρικό Χώρο

Πρακτικές διαδικασίες για την επέκταση ενός τόξου του κύκλου και απαντώντας στο πρώτο πρόβλημα του κτίστη είναι κατάλληλες σε αυτό το πλαίσιο:

- Αν ο χώρος εργασίας είναι το επίπεδο του παραθύρου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε χαρτί αντιγραφής και από μερική υπέρθεση, να προεκτείνουμε το τόξο του κύκλου.
- Αν ο χώρος εργασίας είναι ο τοίχος, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα χαρτόνι στο οποίο κόβουμε το αρχικό τόξο του κύκλου και από μερική υπέρθεση να προεκτείνουμε το τόξο του κύκλου.

2.1 Φυσική Γεωμετρία και Αξιωματική Γεωμετρία

Αυτές οι πρακτικές επιλύσεις δεν είναι οι γεωμετρικές διαδικασίες που αναμένονται από έναν μαθητή στον τέλος της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσής του. Η Collette Laborde (1990) υποδεικνύει ότι η διδασκαλία οφείλει να επιτρέπει στον μαθητή να διαχωρίζει τον φυσικό χώρο από τον γεωμετρικό χώρο διότι μόνο μέσω αυτής της διάκρισης ο μαθητής μπορεί να κατανοήσει τις ερωτήσεις που τίθενται στην γεωμετρία και τις απαντήσεις που μπορούν να δοθούν.

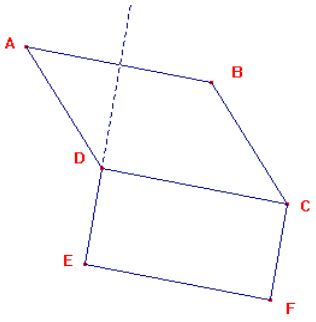


Αυτό που μετράει στην πράξη, είναι ότι η επέκταση του τόξου του κύκλου είναι αρκετά ακριβής για τις ανάγκες στις οποίες απαντάει, ενώ στην γεωμετρία είναι ο τρόπος που πρέπει να έχουμε σε μια αφηρημένη κατάσταση της πραγματικότητας που είναι σημαντική. Λίγη σημασία έχει στη γεωμετρία να γνωρίζουμε για ποιο τόξο κύκλου πρόκειται: για να απαντήσουμε στην ερώτηση, αρκεί να την μετασχηματίσουμε στην αναζήτηση του κέντρου του κύκλου στον οποίο έχει δοθεί ένα τόξο διότι γνωρίζοντας το κέντρο και ένα τυχαίο σημείο του κύκλου (κάθε σημείο του τόξου αρκεί) γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένας κύκλος που έχει αυτό το κέντρο και διέρχεται από αυτό το σημείο. Το κέντρο του κύκλου λαμβάνεται ως το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των δύο χορδών που λήφθηκαν μη παράλληλες. Η

επίλυση δεν ασχολείται με την πρακτική για να δώσει μια λύση στο πρόβλημα (το σημείο τομής είναι στον τοίχο ή στη τρύπα που έγινε για την τοποθέτηση του παράθυρου; Και σε αυτή την τελευταία περίπτωση, πώς να προεκτείνουμε τον κύκλο;).

Η γεωμετρία έτσι διαχωρίζεται από την πρακτική και αποτελεί μια αξιωματική γεωμετρία.

2.2 Αξιωματική Γεωμετρία «Φυσική» ή «Τυπική»



Σε έναν μαθητή Γυμνασίου αλλά και Λυκείου όταν προτείνουμε ένα σχήμα που αναπαριστάνει ένα παραλληλόγραμμο ABCD και ένα ορθογώνιο CDEF και στον οποίο ρωτάμε αν δύο ευθείες AB και DE είναι κάθετες δεν οφείλει να ελέγξει την ζητούμενη καθετότητα με τον γνώμονα, οφείλει να χρησιμοποιήσει την ιδιότητα του παραλληλογράμμου για να θέσει ότι AB είναι παράλληλη στην CD, αυτή των ορθογωνίων για να θέσει ότι DE είναι κάθετη στην CD και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσει την ιδιότητα σύμφωνα με την οποία «αν δύο ευθείες είναι παράλληλες, όλες οι κάθετες στην μια είναι επίσης κάθετες στην άλλη».

Ωστόσο η έννοα της καθετότητας δεν ορίστηκε ποτέ στην εκπαίδευση διαφορετικά παρά μόνο σε σχέση με τις πλευρές του γνώμονα. Εξάλλου ο μαθητής που σχεδίασε το παραλληλόγραμμο και το ορθογώνιο, οφείλει επίσης να ελέγξει στο σχέδιό του ότι οι πληροφορίες που λαμβάνονται από τον πραγματικό κόσμο συμμορφώνονται με την απάντησή του: στις προσεγγίσεις του σχεδίου, αν η γωνία συμπίπτει με εκείνη του γνώμονα, σημαίνει ότι οι γραμμές είναι κάθετες ενώ διαφορετικά δεν είναι.

Οι γνώσεις της διδαχθείσας γεωμετρίας είναι θεωρητικές, αλλά η θεωρία δεν διδάσκεται. Ο Alain Kuzniak (2004) περιγράφει με «Φυσική Αξιωματική Γεωμετρία» αυτή την γεωμετρία όπου η πηγή επικύρωσης των αποτελεσμάτων βασίζεται σε νόμους Υποθετικό-

παραγωγικούς σε ένα αξιωματικό σύστημα που δεν είναι τυπικό διότι τα αξιώματα όπως και η σύνταξη απευθύνονται στην πραγματικότητα. Περιγράφει ως «Τυπική Αξιωματική γεωμετρία» μια γεωμετρία όπου η πηγή επικύρωσης των αποτελεσμάτων βασίζεται σε νόμους Υποθετικό-παραγωγικούς σε ένα αξιωματικό σύστημα καθαρά τυπικό.

2.3 Η Φυσική Γεωμετρία και η Αξιωματική Γεωμετρία σε αντίφαση

Για να γνωρίσεις αν το τετράγωνο συμφωνεί με το μοντέλο, ο μαθητής θα χρησιμοποιήσει τον χαρακτηρισμό των ορθογώνιων τριγώνων από το θεώρημα του Πυθαγόρα συγκρίνοντας το θεωρητικό μήκος των διαγωνίων ενός τετραγώνου πλευρά 27 με το μήκος της διαγωνίου του τετραγώνου που μέτρησε

Το θεωρητικό μήκος είναι $(27^2+ 27^2)^{1/2} = (1458)^{1/2} = 38,18$. Η μέτρηση από τον μαθητή είναι 38,2 η οποία είναι πολύ κοντά στη θεωρητική τιμή που έχει το τετράγωνο (μοντέλο). Σε αυτό το σημείο αντιλαμβανόμαστε την διαφορά ανάμεσα στη φυσική γεωμετρία και την αξιωματική γεωμετρία όπου ο μαθητής Γυμνασίου στον οποίο ρωτάμε αν ένας ρόμβος πλευράς 27 εκατοστά στον οποίο μια διαγώνιος έχει τιμή 38,2 εκατοστά είναι ένα τετράγωνο θα πρέπει να απαντήσει αρνητικά διότι ο αριθμός 38,2 δεν είναι ίσος με τον αριθμό $(1458)^{1/2}$. Ο μαθητευόμενος, παρόλο που κινητοποιεί μια μέθοδο που βασίζεται σε γεωμετρικές γνώσεις εργάζεται με μετρήσεις που λαμβάνονται στον φυσικό χώρο οι οποίες είναι από την φύση τους προσεγγιστικές. Υπογραμμίζουμε την αντίθεση μεταξύ φυσικής γεωμετρίας και αξιωματικής γεωμετρίας όπου αν ο μαθητευόμενος μπόρεσε να μετρήσει τις δύο διαγώνιες του ρόμβου, θα έβρισκε 382 χιλιοστά για κάθε μία από αυτές και θα συμπέραινε ότι το τετράγωνο είναι κατάλληλο αναφορικά με την ιδιότητα «ένα παραλληλόγραμμο στο οποίο οι διαγώνιες έχουν ίσο μήκος είναι ένα ορθογώνιο». Ας υπενθυμίσουμε ότι στην διερεύνηση του κέντρου του κύκλου στον οποίο το τόξο έχει δοθεί, η γεωμετρική μέθοδος δεν είναι εύκολα χρησιμοποιήσιμη στην πράξη αν οι μεσοκάθετες και το κέντρο του κύκλου είναι μέσα στην ζώνη όπου ο τοίχος είναι τρυπημένος για να τοποθετηθεί το παράθυρο. Στην γεωμετρική δραστηριότητα, υπάρχει μια θεμελιώδης διάκριση ανάμεσα στον φυσικό χώρο και στον

γεωμετρικό χώρο, η μη διάκριση δεν διευκολύνει αυτή την δραστηριότητα και κατά συνέπεια δεν διευκολύνει την κατασκευή των γεωμετρικών γνώσεων.

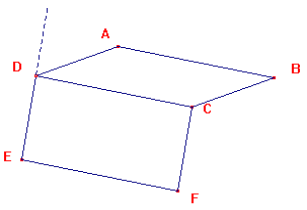
3. Γραφικές αναπαραστάσεις στην γεωμετρία

Στην φυσική γεωμετρία, οι γραφικές αναπαραστάσεις πρέπει να επιτρέπουν την εκτέλεση μετρήσεων σε αυτή την αναπαράσταση, άρα οι ακριβείς απαιτήσεις των χαράξεων είναι σημαντικές.

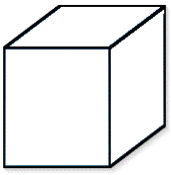
Στην αξιωματική γεωμετρία, η μαθηματική δραστηριότητα απαιτεί τις γραφικές αναπαραστάσεις που επιτρέπουν την οργάνωση των δεδομένων του προβλήματος με συνθετικό τρόπο. Με αυτή την οργάνωση και του ταυτόχρονου των πληροφοριών στις οποίες δίνουν πρόσβαση, αυτές οι γραφικές αναπαραστάσεις βοηθούν στην προσέγγιση των δυνατοτήτων για την επίλυση του προβλήματος και αποτελούν μια ευρετική λειτουργία που βοηθά στην ανακάλυψη. Εξάλλου, η γεωμετρική εργασία οδηγεί συχνά στον εμπλουτισμό της αρχικής αναπαράστασης με νέες χαράξεις.

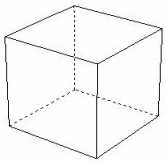
3.1 Αμφιβολία των γραφικών αναπαραστάσεων στην αξιωματική γεωμετρία

Παρά την προηγούμενη διάκριση ανάμεσα σε δύο είδη γραφικών αναπαραστάσεων, η κατάσταση των γραφικών αναπαραστάσεων στην αξιωματική γεωμετρία παραμένει ασαφής για 2 λόγους. Καταρχήν η γραφική αναπαράσταση δεν φέρει υποχρεωτικά όλα τα δεδομένα του προβλήματος και στην συνέχεια δίνει ορισμένες φορές να δούμε γεγονότα που δεν είναι δεδομένα ή ιδιότητες που δεν είναι ακριβείς. Για παράδειγμα, η αναπαράσταση του προηγούμενου προβλήματος μπορεί να οδηγήσει να γραφεί ότι η ευθεία ED τέμνει την ευθεία AB κάθετα το οποίο δεν είναι απαραίτητα αληθές αν η γωνία BCD είναι αμβλεία, η ευθεία EF και το μήκος AB δεν τέμνονται.



3.2 Το «εν όψει και εν γνώσει» μιας γραφικής αναπαράστασης





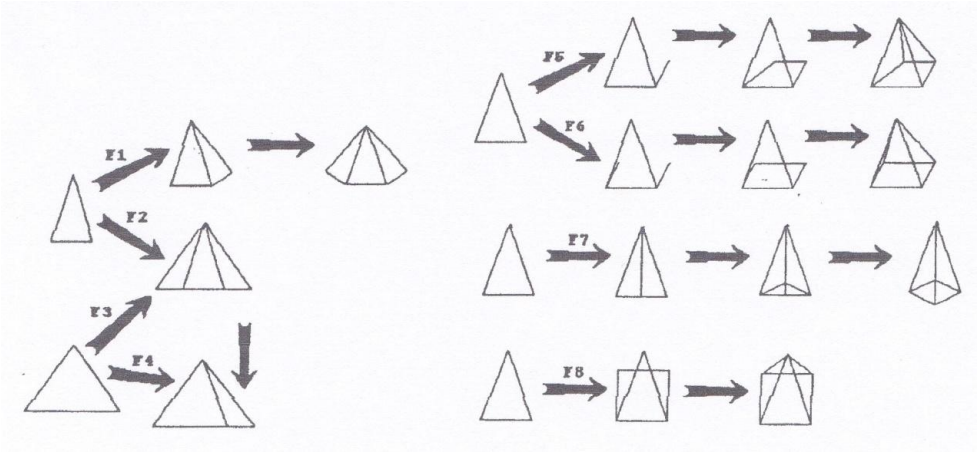
Ο Bernard Parzysz (1988) εργάστηκε στις γραφικές αναπαραστάσεις των γεωμετρικών αντικειμένων του χώρου, και συμπεραίνει σχετικά με την διαμάχη ανάμεσα στο «εν όψει και το εν γνώσει" δηλαδή ανάμεσα σε αυτό που γνωρίζει για το γεωμετρικό αντικείμενο και σε αυτό που δίνει να ειδωθεί με την αναπαράσταση. Η αναπαράσταση δίνει να ειδωθεί ένα τετράγωνο και δύο παραλληλόγραμμα ή έναν κύβο; Υποθέτοντας ότι είναι ένας κύβος, τα παραλληλόγραμμα αναπαριστάνουν τα τετράγωνα. Εξάλλου, όπως φαίνεται σχεδιάζουμε τις κρυμμένες έδρες, δηλαδή αυτό που ξέρουμε αλλά δεν βλέπουμε…

Οι Bernard Parzysz και François Colmez (1993) μελέτησαν την εξέλιξη της διαμάχης του σχεδιαστή ανάμεσα στο «εν όψει και εν γνώσει». Προτείνουν για αυτό στους μαθητές όλων των τάξεων από την Τρίτη μέχρι την 2α λυκείου να αναπαραστήσουν σε ένα φύλλο χαρτί, μια δοθείσα πυραμίδα.

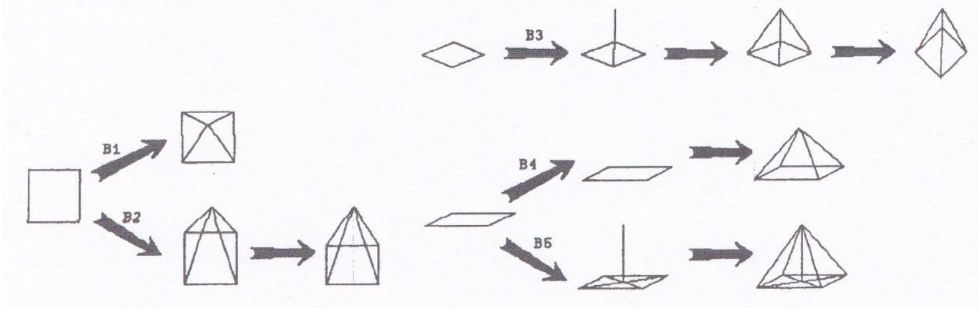
Η πυραμίδα ήταν με σκελετό διότι είχε φτιαχτεί από καλαμάκια, ήταν κανονική με τετράγωνη βάση γεγονός που σημαίνει ότι όλες οι έδρες από την κορυφή είχαν το ίδιο μήκος.

Οι μαθητές σχεδιάζουν την πυραμίδα ξεκινώντας από την όψη της συνολικά, ξεκινώντας από μια όψη ή από την βάση. Τα επόμενα στάδια του σχεδίου συνεπάγονται τις διαφορετικές επιλογές του σχεδιαστή όπως φαίνονται στα σχήματα παρακάτω.

Από την ολότητα ή από μια έδρα



Από τη βάση



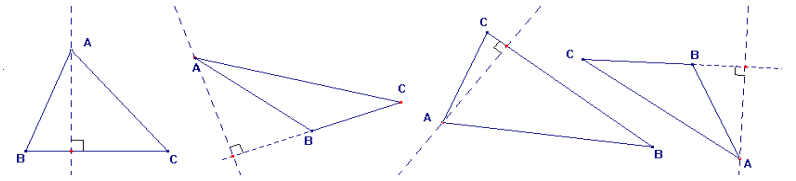
Οι παραχθείσες αναπαραστάσεις επιτρέπουν στους συγγραφείς να απελευθερώσουν τρία είδη γραφικών παραγωγών:

- Τις παραγωγές όπου το «εν γνώσει» είναι ανεπαρκές διότι το σχέδιο δεν λαμβάνει υπόψη το τρισδιάσταστο.
- Τις παραγωγές που λαμβάνουν υπόψη το «εν γνώσει» με συμβατό τρόπο με το «εν όψει» που είναι πρώτο.
- Τις παραγωγές που προκύπτουν από μια νοητική ανακατασκευή του αντικειμένου, το «εν όψει» αναπαριστάνεται με συμβατό τρόπο με το «εν γνώσει» που είναι πρώτο.

3.3 Σχήμα, σχέδιο και γραφικός χώρος

Μέσα από την μελέτη αυτών των συγκρούσεων ανάμεσα στο «εν όψει και εν γνώσει» προτείνει τη διάκριση των σχεδίων των σχημάτων ανάμεσα στις γραφικές αναπαραστάσεις στη γεωμετρία όπου το σχέδιο

είναι το υλικό ίχνος στο χαρτί ενώ το σχήμα οδηγεί στο αναπαριστάμενο θεωρητικό αντικείμενο, δηλαδή το σχέδιο αναπαριστάνει ένα σχήμα, το σχήμα συνίσταται από γεωμετρικά αντικείμενα σε σχέση. Ας δούμε αυτή τη διάκριση θεωρώντας το σχήμα που συνίσταται από ένα τρίγωνο ABC και το ύψος από την κορυφή Α, τα ακόλουθα σχέδια αναπαριστάνουν αυτό το σχήμα.



Με αυτό τον τρόπο το σχήμα ανήκει στον γεωμετρικό χώρο, μέσω του σχεδίου. Ωστόσο, μπορούμε να πούμε ότι το σχέδιο ανήκει στον φυσικό χώρο, στον αισθητό; Όλες αυτές οι δυσκολίες όπως περιγράφονται σχετικά με την αναπαράσταση σε χαρτί ενός τρισδιάστατου αντικειμένου, ακόμη και μικρού μεγέθους είναι ένα πρώτο επιχείρημα για να διακρίνουμε τον χώρο του σχεδίου και τον φυσικό χώρο, ακόμη και όταν τα αναπαριστάμενα αντικείμενα είναι μικρού μεγέθους.

Υπάρχει μια εργασία νοητικών λειτουργιών προς εκτέλεση για το πέρασμα από τον φυσικό χώρο στο σχέδιο, και υπάρχει και μια άλλη καθώς πρέπει να περάσουμε από το σχέδιο στον φυσικό χώρο (αρκεί να σκεφθούμε για να πειστούμε στην δραστηριότητα για την κατασκευή ενός αντικειμένου, ακόμη και απλού ξεκινώντας από ένα σχέδιο). Διαφορετικά ο μικρό-χώρος (που ανήκει στον φυσικό χώρο) δεν πρέπει να αφομοιωθεί σε αυτό του σχεδίου τον οποίο προτείνει να ονομαστεί χώρος των αναπαραστάσεων, δεδομένου ότι αυτός ο χώρος δεν είναι ο γεωμετρικός χώρος. Ο χώρος των αναπαραστάσεων βρίσκεται έτσι ως ένας ενδιάμεσος χώρος ανάμεσα στον φυσικό χώρο, αισθητό και τον γεωμετρικό χώρο, αφηρημένο.

Συμπερασματικά αναφορικά με την σχέση ανάμεσα στον φυσικό χώρο και τον γεωμετρικό χώρο, λαμβάνουμε την διάκριση ανάμεσα σε τρεις προβληματικές που προτείνονται από Berthelot και Salin (2000) ανάλογα με τη φύση του προβλήματος :

- Μια πρακτική προβληματική στην οποία τα αντικείμενα πάνω στα οποία εργαζόμαστε είναι τα φυσικά αντικείμενα (ιδιαίτερα τα σχέδια), στην οποία η πορεία επίλυσης είναι πρακτική και σε αυτή

η επικύρωση γίνεται μένοντας στο αισθητό χώρο. Αυτή η προβληματική περιλαμβάνεται στην φυσική γεωμετρία με την έννοια του Kuzniak.
- Μια γεωμετρική προβληματική στην οποία τα αντικείμενα είναι θεωρητικά, στην οποία η πορεία επίλυσης και η επικύρωση στηρίζονται αποκλειστικά στις γεωμετρικές γνώσεις. Αυτή η προβληματική περιλαμβάνεται στην αξιωματική γεωμετρία, υπό την έννοια του Kuzniak.
- Μια χωρικό-γεωμετρική προβληματική (ή μοντελοποίησης) στην οποία εργαζόμαστε στα φυσικά αντικείμενα, στην οποία η πορεία επίλυσης στηρίζεται στα γεωμετρικά αντικείμενα που εξιδανικεύουν τα φυσικά αντικείμενα και στις γεωμετρικές γνώσεις, αλλά στην οποία η επικύρωση γίνεται στον φυσικό χώρο, όπως στην πρακτική προβληματική, ακόμη και όταν αυτή δεν είναι σύμφωνη με την θεωρία. Αυτή η προβληματική έχει σχέση με την φυσική γεωμετρία στην οποία εγγράφονται το πρόβλημα και η λύση και με μια φυσική αξιωματική γεωμετρία στην οποία το πρόβλημα μοντελοποιείται και επιλύεται.

4. Πολλαπλότητα των σημαινόντων στην γεωμετρία και διδακτικές καταστάσεις

Οι καταστάσεις που παράγουν στους μαθητές, δραστηριότητες στον φυσικό χώρο στοχεύουν την οικειοποίηση των χωρικών γνώσεων και προτείνονται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση διότι οι χωρικές γνώσεις είναι απαραίτητες στην απόκτηση των γεωμετρικών γνώσεων. Στο Λύκειο και ήδη στο Γυμνάσιο, οι διδακτικές καταστάσεις στοχεύουν στην εκμάθηση των γνώσεων και των μεθόδων που θα επιτρέψουν στους μαθητές να επιλύσουν τα γεωμετρικά προβλήματα.

Στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση και στο Γυμνάσιο, οι δραστηριότητες των μαθητών δεν είναι πάντα εγγεγραμμένες στον φυσικό χώρο ή στον γεωμετρικό χώρο διότι ο στόχος είναι ακριβώς η μετάβαση μεταξύ του φυσικού χώρου και του γεωμετρικού χώρου. Αυτή η μετάβαση έχει προσδιοριστεί από ορισμένους ως πέρασμα «από μια γεωμετρία της παρατήρησης σε μια γεωμετρία της παραγωγής» και εκφράζεται στα προγράμματα ως «πέρασμα από την αντιληπτική αναγνώριση των σχημάτων στον χαρακτηρισμό τους από τις ιδιότητες». Συχνά γίνεται

επίκληση του χώρου των γραφικών αναπαραστάσεων, ενός ενδιάμεσου χώρου ανάμεσα στον φυσικό χώρο και τον γεωμετρικό χώρο.

Η Colette Laborde (1990) αναφερόμενη σε πολλές εργασίες υπογραμμίζει μια οργάνωση των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των γνώσεων και των μαθητευόμενων που συνιστά υποστήριξη στην πολλαπλότητα του συστήματος των χρησιμοποιούμενων σημαινόντων στην γεωμετρία (αντικείμενα, σχέδια και κείμενα). Τα διαχωρίζει από τα καθήκοντα που προτείνονται γενικά στη διδασκαλία που ανακοινώνονται από ένα κείμενο και ένα σχέδιο, αλλά όπου το σχέδιο δεν κάνει παρά να απεικονίζει την εκφώνηση.

Τα είδη που προτείνονται για την εκμάθηση των σημαινόντων στους μαθητές είναι : η αναπαραγωγή ενός αντικειμένου του φυσικού χώρου ή του γραφικού χώρου, η γραφική ή γλωσσική αναπαράσταση ενός αντικειμένου του φυσικού χώρου ή του γραφικού χώρου, η κατασκευή ενός σχήματος του γεωμετρικού χώρου ή η σύνταξη ενός προγράμματος κατασκευής αυτού του σχήματος.

4.1 Αναπαραγωγή ενός αντικειμένου του φυσικού χώρου ή του γραφικού χώρου

Ο μαθητής οφείλει να δημιουργήσει ένα ακριβές αντίγραφο ενός αντικειμένου του φυσικού χώρου (στερεό από πλαστικά, σχήμα από χαρτόνι) ή ενός σχεδίου του γραφικού χώρου που μπορεί να είναι απλό (πολύγωνο, κύκλος κ.λπ.) ή σύνθετο (δηλ έχει περισσότερα σχήματα σε μια διευθέτηση μεταξύ τους). Πολλές φορές ζητάμε από τους μαθητές να κάνουν μια μεγέθυνση ή σμίκρυνση του πρωτότυπου.

Η εργασία της αντιγραφής των αντικειμένων του φυσικού χώρου γίνεται σε διαφορετικά υλικά και έχει ανάγκη εργαλείων.

Τα υλικά μπορούν να είναι χαρτί, χαρτόνι, καλαμάκια κ.λπ. ή υλικά που έχουν προκατασκευαστεί και υπάρχουν στο εμπόριο. Τα εργαλεία είναι τα γνωστά της γεωμετρίας (κανόνας, διαβήτης, γνώμονας) όπως και ψαλίδια, κολλητική ταινία κ.λπ. Τα δισδιάστατα αντικείμενα (τα σχέδια) μπορούν να δίνονται σε ένα ενιαίο χαρτί, τετραγωνισμένο ή με σημεία και το αντίγραφο μπορεί να ζητηθεί να γίνει σε ένα αντίστοιχο ή διαφορετικό χαρτί ανάλογα με τις υποκείμενες γεωμετρικές έννοιες

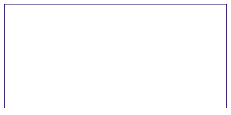
που αποτελούν τον στόχο. Για τον ίδιο λόγο, τα εργαλεία όπως το χαρτί αντιγραφής, τα πρότυπα των γωνιών κ.λπ. ή τα μέσα σχεδιασμού όπως ο βαθμονομημένος κανόνας ή όχι, ο διαβήτης, ο γνώμονας και το μοιρογνωμόνιο μπορούν να επιτραπούν ή όχι. Η επικύρωση της αναπαραγωγής γίνεται με σύγκριση με το μοντέλο, ένας βαθμός συμμόρφωσης μπορεί να διευκρινιστεί. Οι στοχευόμενοι σκοποί από τον εκπαιδευτικό που δίνει μια εργασία αναπαραγωγής είναι ότι ο μαθητής παρατηρεί το μοντέλο προς αναπαραγωγή και βγάζει από αυτή την παρατήρηση τις ιδιότητες που του είναι ικανοποιητικές για την πραγματοποίηση του αντίγραφου. Αυτές οι ιδιότητες του μοντέλου μπορούν να είναι προς ανακάλυψη ή να εφαρμοστούν εφόσον έχουν ήδη μελετηθεί. Εξάλλου, το αντίγραφο μπορεί να έχει ανάγκη την εφαρμογή γεωμετρικών γνώσεων, προς ανακάλυψη ή εφαρμογή.

4.2 Η αναπαραγωγή του σχεδίου του επιπέδου

Όταν το σχέδιο προς αναπαραγωγή είναι απλό, ο μαθητής αντιγράφει στοιχείο – στοιχείο. Αυτό υποθέτει ότι συνίσταται από τμήματα ευθειών και κύκλων (ημικυκλίων, τεταρτοκυκλίων) και ο μαθητής μπορεί να πάρει το πρότυπο των γωνιών που διαμορφώνεται από δύο διαδοχικά τμήματα. Το έργο γίνεται γρήγορα δύσκολο να πραγματοποιηθεί όταν οι γωνίες δεν είναι ορθές. Όταν το σχέδιο είναι σύνθετο, δηλαδή αποτελούμενο από περισσότερα απλά σχήματα, το έργο της αναπαραγωγής ποικίλει ανάλογα από το αν είναι αναγκαία ή όχι μια χρονολογική οργάνωση, την εισαγωγή των υπο-σχημάτων ή των υπερ-σχημάτων ή ακόμη την γνώση των γεωμετρικών ιδιοτήτων που δεν εμφανίζονται στο σχέδιο. Τα απαγορευμένα εργαλεία και τα μέσα ή εκείνα που διατίθενται στους μαθητές για την πραγματοποίηση του έργου αποτελούν μια συμπληρωματική παράμετρο παραλλαγής.

Παράδειγμα ενός απλού σχεδίου

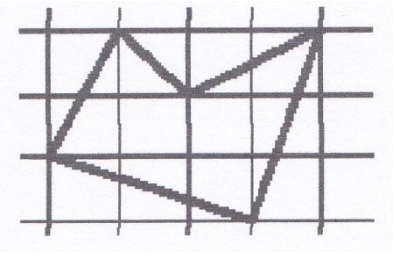
Προτείνοντας μια δραστηριότητα αναπαραγωγής απλών σχεδίων όπως το ορθογώνιο, ο καθηγητής στοχεύει την απόκτηση δεξιοτήτων κατά τον χειρισμό των γεωμετρικών εργαλείων και μέσων.



Η μέτρηση ενός τμήματος δημιουργεί την ανάγκη να τοποθετήσει τον χάρακα κατά μήκος του τμήματος, να τοποθετήσει την αρχή της βαθμονόμησης και όχι

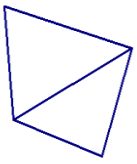
την αρχή του χάρακα σε ένα από τα άκρα του τμήματος και να διαβάσει την αξία της βαθμονόμησης που αντιστοιχεί στο άλλο άκρο του τμήματος.

Η χάραξη μιας ευθείας γραμμής με έναν χάρακα έχει ανάγκη από την συντονισμένη χρήση των δύο χεριών, ένα δεξιόχειρας πρέπει να κρατάει τον χάρακα με το αριστερό χέρι και να χρησιμοποιήσει το μολύβι του με το δεξί χέρι αφού το κυλήσει κατά μήκος του χάρακα, ο μαθητής πρέπει να στηρίξει αρκετά το μολύβι του ώστε να σημειωθεί η χάραξη και το μολύβι να μην απομακρυνθεί από τον χάρακα αλλά δεν πρέπει να πατήσει εξαιρετικά δυνατά διότι μπορεί να μετακινηθεί ο χάρακας από το άλλο χέρι. Η χρήση του διαβήτη ή του γνώμονα απαιτεί επίσης αντίστοιχες δεξιότητες.

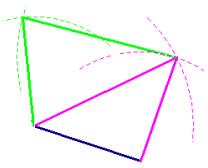


Για ένα σχέδιο σε τετραγωνισμένο χαρτί, το έργο συνίσταται γενικά στο να προσδιοριστούν οι θέσεις των σημείων στους κόμβους, δεν υπάρχουν άλλα μέσα προς χρήση πέρα από τον κανόνα και τον διαβήτη, ούτε να προσδιορίσεις τις ιδιότητες του σχεδίου προς αναπαραγωγή. Στο παράδειγμα, το σχέδιο έχει δύο κάθετες πλευρές και ένας μαθητής μπορεί πολύ απλά να αναπαράγει το σχήμα χωρίς να δει την ιδιότητα.

Παράδειγμα ενός σύνθετου σχεδίου



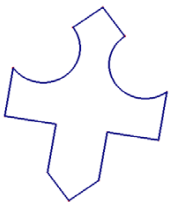
Στην περίπτωση που το δοθέν σχέδιο στο χαρτί κάνει αναφορά σε περισσότερα βασικά γεωμετρικά σχήματα (παράλληλα και κατακόρυφα τμήματα, τρίγωνα, ορθογώνια, τόξα κύκλου κ.λπ.) και όπου η αναπαραγωγή θα γίνει με κλασικά μέσα, ο μαθητής οφείλει να προσδιορίσει τα υπο-σχήματα, τις σχετικές τους θέσεις και να κάνει τις χαράξεις.

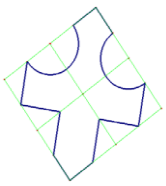


Το διπλανό σχέδιο αποτελείται από δύο τρίγωνα, το πρώτο (άνω) είναι ισοσκελές, οι δύο ίσες πλευρές είναι 3,5 εκατοστά και η βάση 2,5 εκατοστά, η γωνία στην κορυφή είναι 41° και οι γωνίες της βάσης 69,5° ; το δεύτερο τρίγωνο (κάτω) είναι

ισοσκελές και ορθογώνιο, οι κάθετες πλευρές του είναι 2,5 εκατοστά και διαμορφώνουν με την υποτείνουσα γωνίες 45° και η υποτείνουσά του είναι μια από τις δύο ίσες πλευρές του πρώτου ισοσκελούς τριγώνου.

Αν επιτρέπονται όλα τα μέσα, ο μαθητής μπορεί να ανακατασκευάσει τα τρίγωνα χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες ανάμεσα σε εκείνες που δόθηκαν και που μπορεί να λάβει στο σχέδιο. Αν επιτρέπονται μόνον ο μη βαθμονομημένος χάρακας και ο διαβήτης, ο μαθητής οφείλει να γνωρίζει να κατασκευάζει ένα τρίγωνο γνωρίζοντας τις τρεις πλευρές του, θα του αρκούσε να χαράξει μια πλευρά με τον χάρακα χρησιμοποιώντας τον διαβήτη για να μεταφέρει το μήκος και στη συνέχεια να κατασκευάσει τις άλλες δύο κορυφές με τον διαβήτη χαράσσοντας τα τόξα του αντίστοιχου κύκλου. Ο μαθητής θα μπορούσε να αναπαραγάγει το σχέδιο χωρίς να λάβει υπόψη τις ιδιότητες όπως οι ισότητες του μήκους ή η καθετότητα των δύο πλευρών.





Αν το σχέδιο είναι δύσκολο προς αναπαραγωγή για την πραγματοποίηση του αντιγράφου, είναι χρήσιμο να διερευνηθούν και να χαραχθούν οι συμπληρωματικές γραμμές που χρησιμοποιήθηκαν και σβήστηκαν για την κατασκευή του αρχικού σχεδίου. Προσθέτοντας αυτές τις γραμμές, εμφανίζεται ένα τετράγωνο που είναι εξαιρετικά χρήσιμο για την πραγματοποίηση του αντιγράφου. Αυτό το τετράγωνο είναι ένα «υπερ-σχήμα» του αρχικού σχεδίου.

5. Γραφικές ή γλωσσικές αναπαραστάσεις του αντικειμένου του φυσικού ή γραφικού χώρου

Η αναπαράσταση ενός αντικειμένου του φυσικού χώρου είναι το πέρασμα από το αντικείμενο σε ένα σημαινόμενο του αντικειμένου. Αυτό το σημαινόμενο είναι ένα γραφικό στην περίπτωση μιας γραφικής αναπαράστασης και είναι ένα κείμενο στην περίπτωση της γλωσσικής αναπαράστασης, και μιλάμε για περιγραφή του αντικειμένου.

5.1 Γραφικές αναπαραστάσεις ενός αντικειμένου του φυσικού χώρου

Γνωρίζουμε ότι το πέρασμα από το φυσικό χώρο στον γραφικό χώρο θέτει σε ανταγωνισμό την επιθυμία του σχεδιαστή να αναπαραστήσει αυτό που βλέπει και αυτή που αναπαριστά αυτό που ξέρει. Η γραφική αναπαράσταση, αναγκάζει στην εγκατάλειψη ορισμένων ιδιοτήτων του αντικειμένου, καμία αναπαράσταση σε προοπτική ενός κύβου δεν μπορεί να δείξει ότι όλες οι έδρες είναι τετράγωνα.

Οι συμβατικές μέθοδοι έχουν διαμορφωθεί για να αναπαριστάνονται τα αντικείμενα του χώρου: οι αξονομετρικές προοπτικές, η προοπτική με σημείο φυγής ή η κωνική προοπτική και το τεχνικό σχέδιο με τις ποικίλες όψεις είναι τα πλέον κοινά. Για τα πολύεδρα: οι αναπτύξεις ή τα μοντέλα χρησιμοποιούνται επίσης.

Οι αξονομετρικές προοπτικές

Οι γραμμές που δείχνουν το βάθος είναι παράλληλες στο σχέδιο αμέσως μόλις αναπαριστάνουν ευθείες που είναι παράλληλες στην πραγματικότητα. Χρησιμοποιούμε δύο είδη αξονομετρικών προοπτικών: την προοπτική καβαλιέρι (τα αντικείμενα αντικρίζονται από πρόσωπο) και την ισομετρική προοπτική (τα αντικείμενα αντικρίζονται από την ακμή).

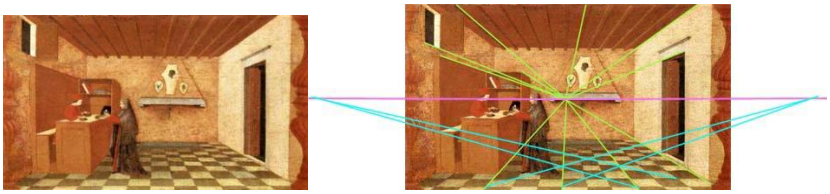
προοπτική καβαλιέρι

προοπτική ισομετρική

Η κωνική προοπτική

Η κωνική προοπτική (ή ευκλείδεια ή με σημεία φυγής) ήταν γνωστή από την Αρχαιότητα, η πρακτική της εγκαταλείφθηκε και επανακαλύφθηκε στην Αναγέννηση στην Ιταλία. Οι γραμμές του βάθους οι οποίες είναι παράλληλες στην πραγματικότητα

αναπαριστάνονται από ευθείες που τέμνονται σε σημεία που λέγονται «σημεία φυγής» και που ευθυγραμμίζονται στην γραμμή του ορίζοντα.

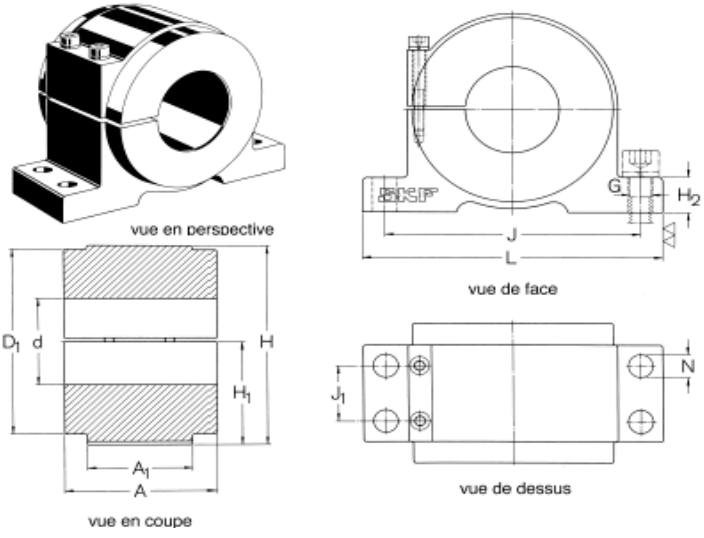


Le miracle de l'hostie, Paolo Uccello (1397-1475)

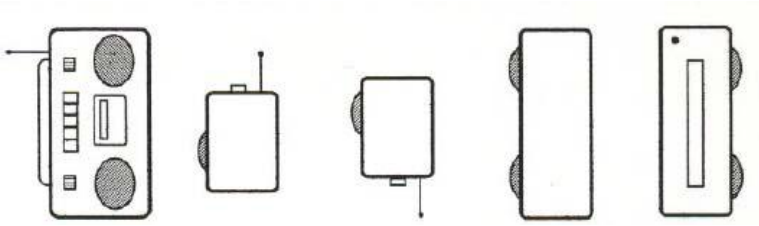
Οι συμβάσεις του σχεδίου στην προοπτική δεν διδάσκονται στην πρωτοβάθμια ούτε στην δευτεροβάθμια, αλλά ικανοποιούμαστε να πούμε ορισμένες αρχές.

Το τεχνικό σχέδιο

Το τεχνικό σχέδιο συνίσταται στην εκτέλεση των προβολών του αντικειμένου προς αναπαράσταση σε τρία επίπεδα: το μετωπιαίο επίπεδο, το οριζόντιο επίπεδο και το επίπεδο του προφίλ. Τα σχέδια ονομάζονται όψεις: η όψη από μπροστά, η όψη από πάνω και η όψη της τομής.

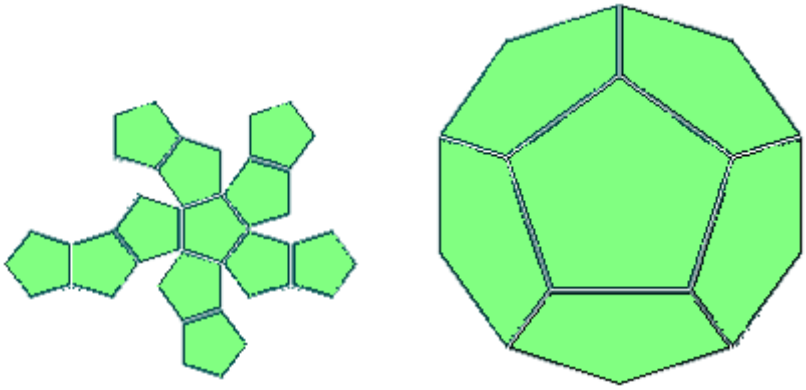


Για να οδηγήσουμε τους μαθητές να συλλογιστούν από τις όψεις, τους προτείνουμε αναπαραστάσεις όπου δίνονται, σε κάθε όψη, μόνο τα στοιχεία που φαίνονται. Για παράδειγμα μια άσκηση όπου ζητάμε από τους μαθητές να ονομάσουν τις 5 όψεις παρακάτω.



Τα αναπτύγματα (μοντέλα) ενός πολυέδρου

Ένα ανάπτυγμα ή μοντέλο ενός πολυέδρου είναι μια επίπεδη αναπαράσταση όλων των όψεων του πολυέδρου με τέτοιο τρόπο όπου κάθε όψη συνδέεται με μια άλλη έχοντας τουλάχιστον μια κοινή ακμή και η διάταξη που σχηματίζεται έτσι είναι μια ολότητα και επιτρέπει (αν θεωρήσουμε αυτή την αναπαράσταση ως ένα αντικείμενο του φυσικού χώρου και όχι ως μια αφαίρεση του γεωμετρικού χώρου) να αναδομήσει αυτό το πολύεδρο.



Αυτό που προτείνεται στους μαθητές είναι να σχεδιάσουν το ανάπτυγμα ενός πολυέδρου που έχουν στα μάτια τους ή έχουν μια αναπαράσταση σε προοπτική, να επιλέγουν ανάμεσα σε περισσότερα μοντέλα αυτό ή αυτά που αντιστοιχούν σε αυτό το πολύεδρο. Η

αναπαράσταση ενός αντικειμένου του φυσικού χώρου μπορεί να έχει ως στόχο να επιτρέπει τον εντοπισμό ενός αντικειμένου μεταξύ άλλων ή να το κατασκευάσουν. Και στις 2 περιπτώσεις η επικύρωση μπορεί να γίνει με την εμπειρία. Καταστάσεις «πομπός – δέκτης» προτείνονται συχνά στους μαθητές για να τους αφήσει το καθήκον της επικύρωσης. Μια τέτοια κατάσταση θέτει σε εφαρμογή έναν πομπό και ένα δέκτη που είναι είτε ένας μαθητής ή μια ομάδα μαθητών. Ο πομπός στέλνει ένα μήνυμα (ένα κείμενο ή ένα σχέδιο) σχετικά με ένα αντικείμενο του φυσικού χώρου ή του γεωμετρικού χώρου έτσι ώστε ο δέκτης να αναγνωρίσει ή να κατασκευάσει το αντικείμενο. Αυτή η κατάσταση επικοινωνίας στοχεύει την εισαγωγή μιας μαθηματικής γλώσσας, η επικύρωση αποτελεί ολοκληρωμένο μέρος της δραστηριότητας και δημιουργείται με σύγκριση μεταξύ του αντικειμένου στην απαρχή του μηνύματος και αυτού που παράχθηκε. Ο κύριος περιορισμός της κατάστασης «πομπός – δέκτης» είναι ότι οι μαθητές μπορεί να κατανοήσουν ενώ τα μέσα που χρησιμοποιούν για επικοινωνία δεν είναι μαθηματικά ικανοποιητικά.

5.2 Γλωσσικές αναπαραστάσεις ενός αντικειμένου ή ενός σχεδίου

Η παραγωγή ενός κειμένου που αναπαριστάνει ένα αντικείμενο του φυσικού χώρου ή ένα σχέδιο (αντικείμενο του γραφικού χώρου) είναι μια περιγραφή. Ο στόχος της περιγραφής είναι η αναγνώριση του αντικειμένου μεταξύ ενός συνόλου αντικειμένων ή η πραγματοποίηση αυτού του αντικειμένου. Οι καταστάσεις περιγραφής που προτείνονται στους μαθητές στοχεύουν την εκμάθηση της ορολογίας, των γεωμετρικών ιδιοτήτων και της κατάλληλης χρήσης τους.

Περιγραφή για αναγνώριση

Μια περιγραφή για αναγνώριση ενός αντικειμένου μεταξύ άλλων, περιέχει τις ιδιότητες του αντικειμένου που επιτρέπουν να το διακρίνουν από τα άλλα. Ο συγγραφέας της περιγραφής συλλογίζεται στις ιδιότητες που διαφοροποιούν το αντικείμενο που περιγράφει από τα άλλα αντικείμενα.

Περιγραφή για κατασκευή

Ο στόχος της περιγραφής ενός αντικειμένου είναι επίσης να το κατασκευάσεις, χωρίς να το έχεις μπροστά σου. Σε αυτή την περίπτωση η περιγραφή πρέπει να είναι πλήρης, δηλ. να φέρει πληροφορίες σχετικά με τα στοιχεία, τις διαστάσεις τους και την σχεσιακή τους οργάνωση. Μια χρονολογία της κατασκευής θα επέτρεπε στον αποδέκτη της περιγραφής να προχωρήσει στάδιο – στάδιο.

Παράδειγμα, οι μαθητές της τετάρτης, θα έπρεπε να σχεδιάσουν ένα τετράπλευρο και να συντάξουν ένα μήνυμα στον αποδέκτη για να σχεδιάσει το ίδιο τετράπλευρο.

Πρέπει να ξέρουμε, ότι κατά την a priori ανάλυση μιας κατάστασης οι μαθητές μπορούν να «κατανοήσουν» ο ένας τον άλλο πέρα από τις ασάφειες του μηνύματος

Το γεγονός ότι ο δέκτης και ο πομπός είναι ομάδες μαθητών και όχι μαθητές μόνοι τους, επιτρέπει την ποικιλομορφία των απόψεων. Η συμφωνία που πρέπει να βρεθεί οδηγεί σε διαπραγματεύσεις και σε επιλογές που είναι προς όφελος των γνώσεων και που μπορούν να ξαναδουλευτούν εύκολα στην τάξη από τον εκπαιδευτικό.

6. Αναπαραστάσεις ενός γεωμετρικού σχήματος

Τα γεωμετρικά σχήματα είναι αντικείμενα του γεωμετρικού χώρου δηλαδή αφηρημένα αντικείμενα. Δεν υπάρχει μια μοναδική γραφική αναπαράσταση ενός γεωμετρικού σχήματος διότι υπάρχουν πολλές διαφορετικές συμβάσεις της αναπαράστασης. Κάθε αναπαράσταση είναι ένα αντικείμενο του γραφικού χώρου.

Στην περίπτωση ενός σχεδίου ενός γεωμετρικού σχήματος, η υποκείμενη γνώση στην κατασκευή έχει μικρή σημασία, αλλά η αναπαράσταση των ιδιοτήτων πρέπει να είναι ορατή. Έτσι ένα ευθύγραμμο τμήμα 4 εκατοστά ως σχήμα, πρέπει να αναπαρασταθεί ως σχέδιο από μια ευθύγραμμη χάραξη όπου τα άκρα είναι διακριτά από μια απόσταση 4 εκατοστά που μπορούμε να μετρήσουμε με έναν χάρακα. Σε μια γεωμετρική κατασκευή, είναι αντίθετα η υποκείμενη

γνώση στη κατασκευή που διακρίνει μια σωστή από μια λάθος κατασκευή.

Ας πάρουμε ένα απλό παράδειγμα. Πρόκειται για τον σχεδιασμό δύο παράλληλων τμημάτων τα οποία δεν είναι πολύ απομακρυσμένα το ένα από το άλλο, ο κανόνας αρκεί διότι ο παραλληλισμός ελέγχεται οπτικά μεταξύ της πρώτης χάραξης του τμήματος και την άκρη του κανόνα που θα χρησιμοποιηθεί για την πραγματοποίηση της δεύτερης χάραξης. Αν πρόκειται για κατασκευή δύο παράλληλων τμημάτων, είναι η μέθοδος που στηρίζεται στις ιδιότητες που έχει σημασία και αν αυτή η μέθοδος απαιτεί βοηθητικές χαράξεις τότε δεν τις σβήνουμε.

Χρησιμοποιούμε κάποιες φορές, για την επίλυση ενός προβλήματος γεωμετρίας, ένα τρίτο είδος γραφικής αναπαράστασης που ονομάζουμε «σχέδιο με το χέρι» ενός σχήματος. Ένα τέτοιο σχέδιο αναπαριστάνει τις ιδιότητες του σχήματος με τις συμβάσεις χωρίς να αναζητά συμφωνία ανάμεσα στο παραγόμενο σχέδιο και τις αναπαριστάμενες ιδιότητες

6.1 Σχέδιο ενός γεωμετρικού σχήματος δοθέν από περιγραφή

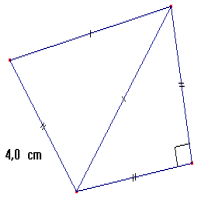
Ζητήστε το σχεδιασμό ενός γεωμετρικού σχήματος δοθέν από ένα σχέδιο σημαίνει την αναπαραγωγή του σχεδίου. Αυτό το καθήκον έχει ήδη αναλυθεί και χρειάζεται τον προσδιορισμό υπο-σχημάτων ή υπερ-σχημάτων στην περίπτωση ενός σύνθετου σχήματος, χρειάζεται τη γνώση πώς να χρησιμοποιήσεις τα εργαλεία της γεωμετρίας καθώς και κάποιες δεξιότητες στον χειρισμό αυτών των εργαλείων. Επίσης γνώση λεξιλογίου και συμβάσεων που χρησιμοποιούνται στη γεωμετρία.

Για παράδειγμα ζητήθηκε από μαθητές της 5ης έπρεπε να επιλύσουν την ακόλουθη εργασία: «Σχεδιάστε ένα τετράγωνο ABCD πλευράς 2 εκατοστά και σχεδιάστε έναν κύκλο με κέντρο Β που διέρχεται από το Α».

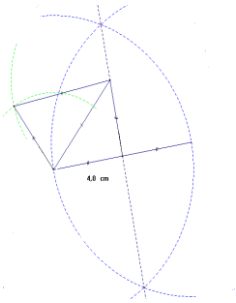
Αυτό απαιτεί την γνώση του λεξιλογίου τετράγωνο και κύκλο και την έκφραση να διέρχεται από, την γνώση σχεδιασμού ενός τετραγώνου στο οποίο γνωρίζουμε το μήκος των πλευρών, και έναν κύκλο που γνωρίζουμε το κέντρο και ένα σημείο. Χρειάζεται επίσης να γνωρίζεις

τις συμβάσεις σχετικά με τον προσδιορισμό των σημείων του τετραπλεύρου και γενικότερα ενός γεωμετρικού σχήματος.

6.2 Κατασκευή ενός γεωμετρικού σχήματος δοθέντος από ένα σχέδιο με το χέρι



Όταν το σχήμα προς κατασκευή δίνεται από ένα σχέδιο με το χέρι, ο μαθητής ξεκινάει εντοπίζοντας τα υπο-σχήματα, τις ιδιότητές τους και την οργάνωσή τους, όπως όταν αναπαραγάγει το σχέδιο. Αλλά οι πληροφορίες δεν πρέπει να λαμβάνονται στο σχέδιο με τα εργαλεία, πρέπει απλά να λάβεις υπόψη τις πληροφορίες που υπάρχουν στις κωδικοποιήσεις ή από κειμενικές ενδείξεις. Μια χρονολόγηση της κατασκευής πρέπει να αναπτυχθεί, και αυτό απαιτεί να κατασκευαστεί νοητικά πρώτα μερικώς σε συνάρτηση με τις ιδιότητες των υπο-σχημάτων. Για παράδειγμα: «Κατασκευάστε το σχήμα με κανόνα και διαβήτη». Το σχήμα περιλαμβάνει δύο ισοσκελή τρίγωνα εκ των οποίων το ένα είναι ορθογώνιο. Οι κωδικοποιήσεις δείχνουν ότι οι κάθετες πλευρές του ορθογώνιου τριγώνου είναι 4 εκατοστά όπως η βάση του δεύτερου ισοσκελούς τριγώνου, η υποτείνουσα του ορθογώνιου τριγώνου δεν δίνεται. Η κατασκευή απαιτεί να ξεκινήσουμε από το ορθογώνιο τρίγωνο. Αφού δεν επιτρέπεται ο γνώμονας σχεδιάζεται ένα τμήμα 8 εκατοστών και η ορθή γωνία κατασκευάζεται με την μεσοκάθετο αυτού του τμήματος και κρατάμε ένα τμήμα 4 εκατοστά και μια κάθετο σε αυτό το τμήμα.



Με τον κανόνα και τον διαβήτη, η άλλη πλευρά του ορθογωνίου προσδιορίζεται. Απομένει μόνο η κατασκευή της τέταρτης κορυφής με τον διαβήτη ως η τομή των κύκλων που έχουν αντίστοιχα για κέντρο τα άκρα της υποτείνουσας και για ακτίνα 4 εκατοστά και το μήκος της υποτείνουσας

6.3 Κατασκευή ενός γεωμετρικού σχήματος δοθέν από μια περιγραφή

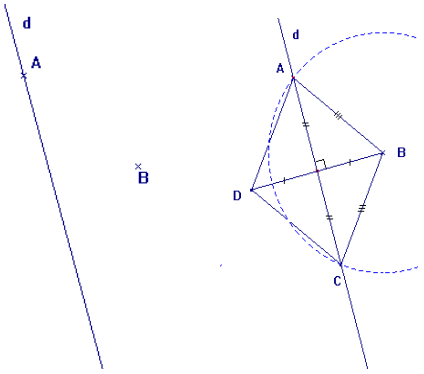
Η κατασκευή ενός δοθέντος σχήματος από μια περιγραφή υποβοηθείται από μια προεξόφληση του επιθυμητού αποτελέσματος (υπο-σχήμα και οργάνωση) που ζητείται, για κάθε ένα από τα υπο-σχήματα που προσδιορίζονται, να κινητοποιηθούν τα σχήματα μοντέλα που υπάρχουν στη μνήμη για πολύ καιρό και να τα ιδιαιτεροποιήσουμε στην προτεινόμενη μορφολογία.

Καθώς το σχήμα είναι περίπλοκο και οι αντιθέσεις είναι πολλές, η μνημονική διαχείριση των πληροφοριών είναι δύσκολη και η πραγματοποίηση ενός σχήματος με το χέρι ανακουφίζει την προσπάθεια της μνήμης.

Όπως για την κατασκευή ενός σχήματος που δίνεται από ένα σχέδιο, πρέπει στη συνέχεια να προσδιοριστούν οι ιδιότητες των υπο-σχημάτων που μπορούν να είναι χρήσιμες και να προσδιοριστεί μια χρονολόγηση της κατασκευής.

Αν δούμε ένα παράδειγμα. Κατασκευάστε έναν ρόμβο ABCD έχοντας την ευθεία d για άξονα συμμετρίας

Το σχήμα ρόμβος είναι κοντινό του σχήματος μοντέλο του ρόμβου που όλοι έχουμε στη μνήμη μας, η ευθεία d είναι λίγο επικλινής. Δύο ιδιότητες κινητοποιούνται: ένας ρόμβος είναι συμμετρικός σε σχέση με τις διαγωνίους του (ή οι διαγώνιες ενός ρόμβου είναι κάθετες και έχουν κοινό κέντρο), ένας ρόμβος έχει τις τέσσερεις πλευρές με ίδιο μήκος. Η πρώτη ιδιότητα οδηγεί στην κατασκευή του D ως συμμετρικού του σημείου B σε σχέση με την ευθεία d, και στη συνέχεια το σημείο C ως συμμετρικό του σημείου A σε σχέση με την ευθεία BC. Η δεύτερη επιτρέπει την κατασκευή του σημείου C στην ευθεία d και στη συνέχεια το σημείο D ως τομή των κύκλων που έχουν ίδια ακτίνα AB και τα αντίστοιχα κέντρα A και C. Η κατασκευή μπορεί επίσης να



εκτελεστεί κινητοποιώντας τις δύο ιδιότητες, την συμμετρία για το σημείο D και στη συνέχεια την ισότητα των μηκών των πλευρών για την κατασκευή του C.

6.4 Πρόγραμμα κατασκευής ενός δοθέντος γεωμετρικού σχήματος

Ένα πρόγραμμα κατασκευής ενός γεωμετρικού σχήματος είναι ένα κείμενο που επιτρέπει σε εκείνον που το διαβάζει να χαράξει ένα σχέδιο αυτού του σχήματος ενώ δεν το γνωρίζει από καμία γλωσσική ή γραφική αναπαράσταση. Δεν είναι μια περιγραφή αλλά ένα κείμενο προστακτικό.

Η παραγωγή ενός προγράμματος κατασκευής υποθέτει μια ανάλυση του προς κατασκευή σχήματος με τις ιδιότητές του που θα επιτρέψουν την κατασκευή: εντοπίστε τα υπο-σχήματα και την οργάνωσή τους ορίζοντας τις σχέσεις και τα σημαντικά σημεία, ιεράρχηση αυτών των σχέσεων ορίζοντας μια χρονολόγηση της κατασκευής, οργάνωση των σταδίων, εισαγωγή των πιθανών συμβολισμών για τις ανάγκες επικοινωνίας.

Καθώς το σχήμα που κάνει ένας μαθητής ή μια ομάδα μαθητών το πρόγραμμα κατασκευής δίνεται από ένα σχέδιο και ένα κείμενο που προσδιορίζει ορισμένες ιδιότητες του σχήματος, η επικύρωση του προγράμματος μπορεί να γίνει με σύγκριση του παραγόμενου σχεδίου και του αρχικού σχεδίου.

Τα προγράμματα κατασκευής παρουσιάζονται ως σειρά οδηγιών καθορισμένων χρονολογικά. Η σειρά των σταδίων είναι ξεκάθαρη (αρίθμηση,…) θέτουν την σειρά των δράσεων που θα γίνουν στα γεωμετρικά αντικείμενα και όχι πάνω στα αντικείμενα του φυσικού χώρου

Στο τέλος αυτής της παραγράφου που είναι αφιερωμένη στις ποικίλες χρησιμοποιούμενες αναπαραστάσεις της γεωμετρίας, εμφανίζονται δύο είδη αναπαράστασης μεταξύ του φυσικού χώρου και του γεωμετρικού χώρου, το ένα γλωσσικό και το άλλο γραφικό, που δεν ανάγονται ούτε το ένα ούτε το άλλο σε μόνο μια αναπαράσταση.

Έτσι, τα κείμενα που παρουσιάζουν τα αντικείμενα που χρησιμοποιούνται στη γεωμετρία, συνιστούν λίγο – πολύ τις αναφορές στις ιδιότητες που χαρακτηρίζουν τα θεωρούμενα αντικείμενα και ιδιαίτερα της γεωμετρικής κατασκευής τους. Οι περιγραφές πρέπει, για αυτό τον λόγο, να διακριθούν από τα προγράμματα κατασκευής.

Όμοια με τα κείμενα, τα αντικείμενα του γραφικού χώρου φέρουν τις γεωμετρικές ιδιότητες των αντικειμένων που αναπαριστούν. Για την αναπαράσταση των τρισδιάστατων αντικειμένων μπορούμε να εκτελέσουμε ένα σχέδιο προοπτικής, ένα τεχνικό σχέδιο, και αν ένα αντικείμενο είναι ένα πολύεδρο, ένα μοντέλο.

Για τα δισδιάστατα, διακρίναμε αρχικά τα σχέδια που φέρουν τις πληροφορίες που αφορούν την μέτρηση των μηκών και των γωνιών, δεύτερον τα σχέδια με το χέρι που συνθέτουν τις γεωμετρικές ιδιότητες του αντικειμένου χάρη σε κώδικες και τα συμπληρωματικά σχόλια και τρίτο τις γεωμετρικές κατασκευές οι οποίες όπως τα σχέδια, φέρουν τις πληροφορίες που σχετίζονται με την μέτρηση των μηκών και των γωνιών, αλλά δείχνουν επίσης, από τις ενδιάμεσες χαράξεις που επέτρεψαν την κατασκευή, τις γεωμετρικές ιδιότητες που χρησιμοποιήθηκαν για την πραγματοποίηση αυτής της κατασκευής.

7. Χρήσεις των σχημάτων στη γεωμετρία

Η πολλαπλότητα των σημαινόντων στην γεωμετρία μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη διδασκαλία για ποικίλους λόγους. Από το πέρασμα από ένα σημαινόμενο σε άλλο, να βοηθήσει την σκέψη στα γεωμετρικά αντικείμενα και στις ιδιότητές τους και να υποβοηθήσει έτσι την μάθηση. Η διδασκαλία της γεωμετρίας δεν περιορίζεται στη διδασκαλία των αντικειμένων της και της ιδιότητάς τους, στοχεύει επίσης την εκμάθηση των μεθόδων για την επίλυση προβλημάτων, δηλαδή για την ανακάλυψη των νέων αντικειμένων ή την διαμόρφωση νέων ιδιοτήτων ή για την ιδιαιτεροποίηση γενικών ιδιοτήτων σε ιδιαίτερα πλαίσια. Τα σχήματα έχουν μια ιδιαίτερη σημασία για τη γεωμετρία. Αναπαριστάνοντας γραφικά ένα σχήμα, το υποκείμενο που κάνει γεωμετρία δίνει ένα μέσο για να καταχτήσει ταυτόχρονα για κάθε γεωμετρικό αντικείμενο της κατάστασης που μελετά, τις ιδιότητές του και τις σχέσεις του με άλλα αντικείμενα που υπάρχουν στην

κατάσταση. Το σχήμα βοηθάει την απομνημόνευση του συνόλου των σχέσεων. Είναι ένα ευρετικό μέσο διότι η συνθετική αναπαράσταση που επιτρέπει στις ιδιότητες της μελετώμενης γεωμετρικής αναπαράστασης, δίνει την δυνατότητα να διαπιστωθούν νέες ιδιότητες ή ιδέες για την απόδειξή τους. Αυτή η ποικιλομορφία των χρήσεων των σχημάτων στη γεωμετρία είναι σημαντικό αντικείμενο αλλά δεν θα εμβαθύνουμε σε αυτό το σημείο. Θα περιοριστούμε μόνο να αναφέρουμε ότι οι χρήσεις ενός σχήματος στη γεωμετρία είναι διαφορετικές σε σχέση με την υποκείμενη γεωμετρική θεωρία εργασίας και σε συνάρτηση με τον στόχο αυτής της εργασίας. Στην πρωτοβάθμια και την δευτεροβάθμια εκπαίδευση το επίπεδο εννοιολογικοποίησης του γεωμετρικού χώρου δεν είναι ικανοποιητικό έτσι ώστε η θεωρία, τα προβλήματα και οι μέθοδοι γεωμετρικής επίλυσης να μπορούν να αποχωριστούν τα σχήματα. Οπότε η εργασία στα σχήματα είναι απαραίτητη και αναντικατάστατη.

Υπάρχουν πολλά παραδείγματα χρήσης σχημάτων τα οποία δηλώνουν την μεγάλη ποικιλομορφία αυτής της εργασίας. Ποικιλομορφία που οδήγησε τον Raymond Duval (2005) να συμπεράνει ότι ο τρόπος να βλέπεις ένα σχήμα, εξαρτάται από την δραστηριότητα του υποκειμένου σε σχέση με αυτό το σχήμα.

Προτείνει έτσι μια ταξινόμηση των χρήσεων του σχήματος σε συνάρτηση με την γεωμετρική δραστηριότητα και διακρίνει για αυτό 4 τρόπους να βλέπεις ένα σχήμα που τις συνδέει με 4 τύπους (είδη) δραστηριοτήτων:

- ο τρόπος του «βοτανολόγου» που επικεντρώνεται στην μορφή του σχήματος. Το υποκείμενο πρόκειται να μάθει να αναγνωρίζει το σχήμα. Στην πραγματικότητα, αυτή η δραστηριότητα δεν περιέχει τίποτε το γεωμετρικό διότι δεν κάνει αναφορά – χρήση καμίας ιδιότητας του σχήματος.
- ο τρόπος του «χωρομέτρη» που επικεντρώνεται στις διαστάσεις του σχήματος και των στοιχειωδών σχημάτων που το συνιστούν. Το υποκείμενο πρόκειται να μετρά τα μήκη με μια πιθανή αντιστοιχία με τα πραγματικά μήκη, πχ σε ένα χωράφι και τα μήκη του σχεδίου που είναι ένα επίπεδο.

- ο τρόπος του «κατασκευαστή» που επικεντρώνεται στα εργαλεία που επιτρέπουν την πραγματοποίηση του σχήματος. Το υποκείμενο πρόκειται να θέσει σε αντιστοιχία την οπτική αντίληψη των μορφών με, από την μία τις γεωμετρικές ιδιότητες στην απαρχή αυτών των μορφών και από την άλλη μεριά των εργαλείων που επιτρέπουν την αναπαράσταση αυτών των ιδιοτήτων και κατά συνέπεια την κατασκευή των μορφών.
- ο τρόπος του «εφευρέτη – μάστορα» που επικεντρώνεται στην οργάνωση των υπο-σχημάτων που συνιστούν το σχήμα. Το υποκείμενο πρόκειται να παραγάγει τις νέες ιδιότητες ή τα νέα σχήματα που βασίζονται στη σχέση αναγκαιότητας μεταξύ των ιδιοτήτων του δοθέντος σχήματος και σε εκείνες που πρέπει να παραχθούν.

8. Δυσκολίες εκμάθησης της γεωμετρίας: ορισμένα παραδείγματα από τις χωρικές γνώσεις στις γεωμετρικές γνώσεις

8.1 Δυσκολίες που σχετίζονται με τις χωρικές γνώσεις

Η εκμάθηση της γεωμετρίας από τα μικρά παιδιά βασίζεται σε μια δόμηση του χώρου που εξαρτάται από τις χωρικές γνώσεις

Αυτές οι γνώσεις διαμορφώνονται με τρόπο εξελικτικό από την εσωτερίκευση των δράσεων πάνω και μέσα σε ένα χωρικό περιβάλλον του υποκειμένου. Ορισμένοι αποδίδουν τις δυσκολίες στη γεωμετρία, ιδιαίτερα στην γεωμετρία του χώρου, στο γεγονός ότι οι μαθητές βίωσαν λίγο κάποιες εμπειρίες στην γεωμετρία του χώρου (κινητικότητα κ.λπ.) στην παιδική τους ηλικίας ή στο γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί προτείνουν πολύ πρώιμα την εργασία στις αναπαραστάσεις και όχι σε αντικείμενα ή σε οπτικοποιημένες δράσεις που δεν εκτελούνται.

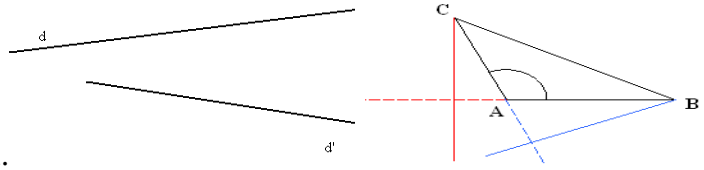
8.2 Δυσκολίες που σχετίζονται με την ιδιαιτερότητα των πρωτοτυπικών εικόνων

Οι πρωτοτυπκές εικόνες βοηθούν την γεωμετρική εργασία, αλλά η ιδιαιτερότητά τους μπορεί να αποτελέσει πηγή δυσκολίας, για παράδειγμα για την αναγνώριση ενός σχήματος

Ένα πολύ γνωστό παράδειγμα είναι αυτό των κάθετων ευθειών όπου οι κατευθύνσεις οριζόντια και κατακόρυφη είναι κάθε φορά τόσο προνομιούχες ώστε οι μαθητές να μην αναγνωρίζουν τις κάθετες καθώς αυτές είναι τοποθετημένες σε μια άλλη μορφολογία.

Στο σχήμα οι μαθητές αναγνωρίζουν ότι οι ευθείες q και s είναι κάθετες, αλλά δεν αναγνωρίζουν επίσης ότι είναι και οι ευθείες p και r.

Με όμοιο τρόπο ορισμένοι μαθητές δεν αναγνωρίζουν δύο τεμνόμενες ευθείες καθώς το σχήμα δίνεται όπως παρακάτω ή δυσκολεύονται να χαράξουν τα ύψη ενός τριγώνου στο οποίο μια γωνία είναι αμβλεία διότι δύο από τα ύψη βρίσκονται εκτός τριγώνου και δεν αντιλαμβάνονται ότι το ύψος τέμνει την πλευρά (προέκταση)



κάθετα.

8.3 Δυσκολίες που σχετίζονται με έννοιες κατασκευασμένες από την γραφική εμπειρία

Οι αντιλήψεις ενός μαθηματικού αντικειμένου είναι μοντελοποιήσεις που συλλαμβάνονται από τους ερευνητές για να λάβουν υπόψη τις παραγωγές των μαθητών όταν πρέπει να επιλύσουν προβλήματα όπου το μαθηματικό αντικείμενο μεσολαβεί. Δεν αντιστοιχούν απαραίτητα σε κάθε σημείο σε αυτό που σκέφτεται ένας μαθητής ή στην γνώση

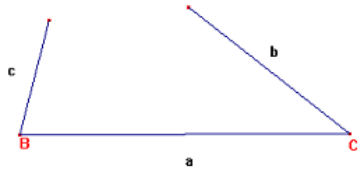
που κατασκεύασε, δεν συναντιούνται απαραίτητα με τους πιθανούς ορισμούς του μαθηματικού αντικειμένου που ερωτάται.

Έτσι οι ερευνητές εξηγούν πολλές απαντήσεις σε ερωτήσεις σχετικά με την ορθογώνια συμμετρία από το γεγονός ότι ο άξονας συμμετρίας ενός σχήματος συλλαμβάνεται από τους μαθητές ως μια ευθεία που μοιράζει το σχήμα σε δύο μέρη τα οποία μπορούν να τοποθετηθούν το ένα ακριβώς πάνω στο άλλο.

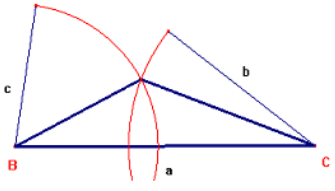
Οι αντιλήψεις των μαθητών δεν είναι απαραίτητα λανθασμένες, βασίζονται στις πρώτες συναντήσεις με τα αντικείμενα των οποίων οι ιδιότητες είναι σύνθετες και/ή πολλαπλές.

8.4 Δυσκολία για επιλογή ανάμεσα στην αντίληψη και τις γεωμετρικές ιδιότητες

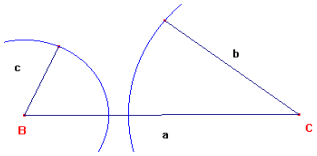
Έχει ήδη δειχθεί ότι το πέρασμα από την αντίληψη των σχημάτων στις γεωμετρικές ιδιότητές τους είναι δύσκολο. Μια άλλη δυσκολία συναντιέται σε μαθητές καθώς το σχέδιο ενός σχήματος έρχεται σε αντίθεση με τις ιδιότητές του. Αν η προβληματική της εργασίας των μαθητών είναι πρακτική, η αντίληψη του σχεδίου λαμβάνει μια αξία τέτοια ώστε ορισμένοι να μην θέτουν σε αμφισβήτηση αυτό που γίνεται αντιληπτό για να αναζητήσουν ορθολογικές εξηγήσεις των φαινομένων. Ένα πολύ γνωστό παράδειγμα είναι αυτό του κριτηρίου για την δυνατότητα κατασκευής ενός τριγώνου όταν δίνονται όλες οι πλευρές. Υπάρχουν τρεις τελικές περιπτώσεις προς διάκριση σύμφωνα με το αν η μεγαλύτερη πλευρά είναι μεγαλύτερη, μικρότερη ή ίση με το άθροισμα των άλλων δύο. Σημειώνοντας a, b, c τις τρεις πλευρές έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.



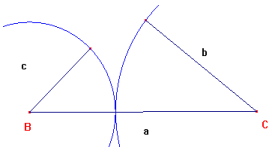
Το τρίγωνο είναι κατασκευάσιμο?



Ναι αν a<b+c

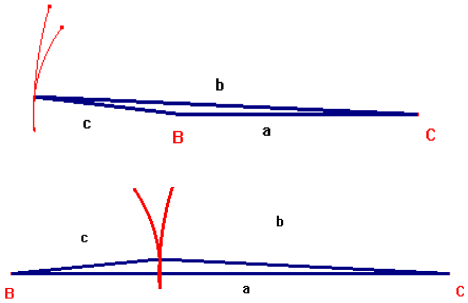


Όχι αν a>b+c



Αν a=b+c, τότε το τρίγωνο είναι ευθεία

Μια έρευνα από την Annie Berté (1995-1996) έδειξε ότι η οριακή τριγωνική ανισότητα (a = b + c) είναι δύσκολο να γίνει κατανοητή από πολλούς μαθητές με μόνον μια γραφική εργασία. Πιστεύουν ότι υπάρχει μια απειρία τριγώνων των οποίων οι πλευρές είναι 4 εκ., 5 εκ. και 9 εκ. Οι μαθητές που ξεκινούν χαράζοντας τα μήκη 4 εκ. ή 5 εκ. επιτυγχάνουν συχνά να κατασκευάσουν ένα επίπεδο τρίγωνο αλλά όχι ολοκληρωτικά επίπεδο που επικυρώνεται από την μέτρηση των πλευρών με τον βαθμονομημένο χάρακα. Αυτοί που ξεκινούν από την πλευρά 9 εκ. συμπεραίνουν την αδυναμία της κατασκευής ή την απειρία των τριγώνων.



Ορισμένοι, βασίζουν τα επιχειρήματα στο αποκτηθέν σχέδιο, σκέφτονται ότι οι δύο κύκλοι μπορούν να έχουν περισσότερα από δύο κοινά σημεία. Με αυτό τον τρόπο η Annie Berté δείχνει ότι οι καθηγητές που διδάσκουν την τριγωνική ανισότητα με πείραμα σε ένα φύλλο χαρτί, συναντούν συστηματικά μαθητές οι οποίοι αντιστέκονται λέγοντας ότι αυτό το τρίγωνο υπάρχει και φθάνουν ορισμένες φορές να πείσουν όλη την τάξη. Αυτό που ενοχλεί τον καθηγητή για να παρέμβει, είναι ότι η επικύρωση της ύπαρξης του τριγώνου καθώς η

ανισότητα πραγματοποιείται στηρίζεται στην πραγματοποιηθείσα εμπειρία στο χαρτί και ακριβώς την προσφυγή σε μια τέτοια εμπειρία που πρέπει να αντιτεθεί. Σε αυτό το σημείο υπάρχει μια παρεξήγηση ανάμεσα στον καθηγητή και ένα σημαντικό αριθμό μαθητών, καθώς ο καθηγητής διδάσκει την γεωμετρία, δηλ. ψάχνει να οδηγήσει τους μαθητές να κατασκευάσουν τις γνώσεις του γεωμετρικού χώρου και στηρίζει την διδασκαλία του σε μια αλληλεπίδραση μεταξύ του γραφικού χώρου του χαρτιού και του γεωμετρικού χώρου του μοντέλου και των θεωρητικών ιδιοτήτων, αυτός ο καθηγητής δεν λαμβάνει ποτέ τον γραφικό χώρο ως χώρο εργασίας και αυτό σε αντίθεση με πολλούς μαθητές. Ο καθηγητής που αναφέρεται στο μοντέλο, δεν μπορεί, αντίθετα από τους μαθητές του, να «δει» ένα μη επίπεδο τρίγωνο στο οποίο μια πλευρά είναι ίση με το άθροισμα των άλλων δύο, ο καθηγητής και οι μαθητές δεν βλέπουν το ίδιο πράγμα καθώς κοιτάνε το ίδιο σχέδιο. Με ποιόν τρόπο μπορούμε να θέσουμε το θέμα οι μαθητές να κατανοήσουν την ανάγκη να θέσουν νέους κανόνες εργασίας, να οικοδομήσουμε προτάσεις λογικά αρθρωτές με αναφορά στις ιδιότητες απ' ότι να επικυρώνουν τις προτάσεις αυτές με πληροφορίες από τις αναπαραστάσεις του σχήματος;

Η χωρικό-γεωμετρική προβληματική έχει με αυτό τον τρόπο ακυρωθεί από την αναγκαιότητα να εξηγηθούν τα φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα στον χώρο.

Και φυσικά σε αυτό το σημείο θα μπορούσαμε να κάνουμε πολλές αναφορές στην έννοια της απόδειξης για την οποία έχουν γραφεί πάρα πολλά και εξαιρετικά ενδιαφέροντα αλλά δυστυχώς ο χώρος είναι περιορισμένος και θα αφήσουμε αυτή την αναφορά για κάποια άλλη φορά.

9. Συμπέρασμα

Η γεωμετρία είναι ένα ιδιαίτερο πεδίο των μαθηματικών λόγω της σχέσης ανάμεσα στον φυσικό χώρο και το γεωμετρικό χώρο που τον μοντελοποιεί και λόγω του ρόλου των γραφικών αναπαραστάσεων στην γεωμετρική δραστηριότητα που είναι τα απαραίτητα εργαλεία εργασίας στην σκέψη για την ευρετική λειτουργία τους. Η γεωμετρία αφού

επέλυσε πρακτικά προβλήματα εξορθολογοποιήθηκε και στη συνέχεια έγινε ένα θεωρητικό σύστημα.

Διαμορφώθηκαν πολλές θεωρίες που αντιστοιχούν σε περισσότερες ασύμβατες γεωμετρίες διότι τα αξιώματα είναι διαφορετικά. Η διδασκόμενη γεωμετρία είναι η ευκλείδεια, η διδασκαλία της δεν μπορεί να συνδεθεί άμεσα με ένα θεωρητικό μοντέλο, στηρίζεται στις χωρικές γνώσεις των υποκειμένων.

Η σχέση ανάμεσα στον φυσικό χώρο και τον γεωμετρικό χώρο διατηρείται, από τα προβλήματα κατασκευών που θέτουν σε λειτουργία τα εργαλεία χάραξης (κανόνας, διαβήτης κ.λπ.) που συνιστούν ιδιαίτερες δυσκολίες.

Ωστόσο, οι ορθολογικότητες που τίθενται στον φυσικό χώρο και στον γεωμετρικό χώρο είναι πολύ διαφορετικές, η πρακτική προβληματική και η γεωμετρική προβληματική οδηγούν ορισμένες φορές σε αντιφατικά αποτελέσματα.

Η δραστηριότητα αναπαράστασης των επίπεδων σχημάτων και των στερεών του χώρου είναι μια δραστηριότητα που ευνοεί την διάκριση ανάμεσα στις ιδιότητες των αναπαριστάμενων αντικειμένων και τις ιδιότητες των αναπαραστάσεων διότι είναι ορισμένες φορές ασύμβατες.

Οι δυσκολίες των μαθητών συναντώνται συχνά στο πέρασμα από αυτή την πρώτη φάση εκμάθησης που ονομάζουμε γεωμετρία της παρατήρησης όπου τα αντικείμενα είναι συγκεκριμένα και όπου οι λόγοι είναι πρακτικοί, στην δεύτερη φάση που ονομάζουμε παραγωγική γεωμετρία όπου τα αντικείμενα είναι θεωρητικά (ακόμη και όταν αναπαριστάνονται) και όπου οι λόγοι επικυρώνονται από τις εκφωνήσεις της θεωρίας και συνδέονται από λογικούς κανόνες (ακόμη και αν η θεωρία και η λογική δεν διδάσκονται).

10. Βιβλιογραφία

Berté A. (1995), Réflexion sur inégalité triangulaire et distance d'un point à une droite à partir d'observations de classe, *Petit x* n°40, p. 41-63.

Berthelot R. & Salin M.-H. (1994), L'enseignement de la géométrie à l'école primaire, *Grand N* n°53, pp. 39-56.

Berthelot R. & Salin M.-H. (1999), L'enseignement de la géométrie de l'espace à l'école, *Grand N* n°65, pp. 37-61.

Berthelot R. & Salin M.-H. (2001), L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment peut-on concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? *Petit x* n°56, pp. 5-34.

Brousseau (1983), Étude de questions d'enseignement : un exemple en géométrie, *séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, Université J. Fourier de Grenoble.

Colmez F. & Parzysz B (1993) : Le vu et le su dans l'évolution des dessins de pyramides du CE2 à la 2nde, in Bessto A ;, Verillon P. & Balacheff N., *Espaces graphiques et graphismes d'espaces*, La pensée sauvage éditions, pp. 35-55.

Duval R. (1992), Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? *Petit x* n°31, pp. 37-61.

Duval R. (1994), Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repères-IREM* n°17, pp. 121-138.

Duval R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie :

développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de didactique et de sciences cognitives,* V. 10. pp. 5-53.

Houdement C. & Kuzniak A. (1999), Réflexion sur l'enseignement de la géométrie, *Grand N* n°64, pp. 65-78.

Kuzniak A. (2004), *Paradigmes et espaces de travail géométriques*, IREM Paris 7.

Kuzniak, A. (2006) Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un

cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie.

Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 6: 167-187.

Kuzniak, A. (2012, July) *Understanding the nature of the geometric work through its*

development and its transformations. Regular lecture given at the 12th International

Congress on Mathematical Education, Seoul, Korea. Available:

http://www.icme12.org/upload/submission/1922_F.pdf [24-10-2013]

Laborde C. (1990), L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques, *RDM* n°9/3, pp 337-364.

Parzysz Bernard (1988) : Bulletin de l'APMEP. Num. 364. p. 339-350. Voir et savoir – la représentation du "perçu" et du "su" dans les dessins de la géométrie de l'espace.

Salin M.-H. (2004), L'enseignement de la géométrie au cycle 3, *Bulletin de l'APMEP* n°454, pp. 729-736.

nikolantonakis@noesis.edu.gr
knikolantonakis@uowm.gr

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ, ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΟΥ ΙΣΧΥΟΝΤΟΣ ΚΑΙ ΔΥΟ ΣΥΓΧΡΟΝΩΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Χαράλαμπος Λεμονίδης

ΠΤΔΕ – Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Βασικός στόχος της εργασίας αυτής είναι να παρουσιαστούν οι αλλαγές στα περιεχόμενα και τη διδασκαλία στα προγράμματα σπουδών της γεωμετρίας στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Για να φανούν οι αλλαγές αυτές θα παρουσιάσουμε και θα συγκρίνουμε τη δομή και τη λογική του σημερινού προγράμματος σπουδών Δ.Ε.Π.Π.Σ (2003)και δύο σύγχρονων προγραμμάτων σπουδών της γεωμετρίας:α) το Νέο Πρόγραμμα Σπουδών (ΝΠΣ) (2011) στην Ελλάδα καιβ) το πρόγραμμα CommonCoreStateStandardsformathematics (CCSS) των Ηνωμένων Πολιτειών της Αμερικής.Με βάση την ανάλυση και τη σύγκριση των προγραμμάτων σπουδών φαίνεται ότι γίνεται σημαντικός εμπλουτισμός των περιεχομένων της γεωμετρίας όπως π.χ. περισσότεροι γεωμετρικοί μετασχηματισμοίγίνεται επίσης και σημαντική αλλαγή στην οργάνωση και παρουσίαση των περιεχομένων της γεωμετρίας με την εισαγωγή της νέας έννοιας“της τροχιάς μάθησης”. Τα δύο σύγχρονα προγράμματα: Το νέο ελληνικό πιλοτικό πρόγραμμα (ΝΠΣ) του 2011 και το Αμερικάνικό CCSS χρησιμοποιούν τη λογική της τροχιάς μάθησης αν και υπάρχουν διαφορές στις τροχιές που προτείνονται από αυτά τα δύο προγράμματα.

1. Εισαγωγή

Μέσα από τα περιεχόμενα των προγραμμάτων σπουδών της γεωμετρίαςστο δημοτικό σχολείο οι μαθητές συνήθως εισάγονται σε έννοιες των γεωμετρικών σχημάτων και του χώρου οι οποίες αναπτύσσονται εξελικτικά από τις μικρότερες προς τις μεγαλύτερες τάξεις. Στο ισχύον πρόγραμμα σπουδών της γεωμετρίας οι μαθητές, του νηπιαγωγείου και της Α' τάξης του δημοτικού, εισάγονται στις έννοιες των γεωμετρικών σχημάτων, του μετασχηματισμού της αξονικής συμμετρίας και των εννοιών του χώρου οι οποίες παρουσιάζονται εξελικτικά στις μεγαλύτερες τάξεις με βάση τη θεωρία των Van-Hieles η οποίαμένει υπονοούμενη και δεν γίνεταιφανερή.

1.1. Τα επίπεδα Van Hiele στο Ισχύον Πρόγραμμα Σπουδών

Σύμφωνα με την θεωρία των VanHieles, οι συλλογιστικές διεργασίες που χρησιμοποιεί το άτομο για την μελέτη των γεωμετρικών αντικειμένων μπορούν να αντιστοιχηθούν, ανάλογα με το βαθμό πολυπλοκότητας και αφαιρετικότητας που παρουσιάζουν, σε πέντε, ιεραρχικά διατεταγμένα, επίπεδα γεωμετρικής σκέψης. Η γεωμετρική σκέψη στο δημοτικό σχολείο αντιστοιχεί στα τρία πρώτα από τα πέντε αυτά επίπεδα τα οποία είναι τα ακόλουθα:

Επίπεδο 0 (Αναγνώριση):Στο επίπεδο αυτό το παιδί γνωρίζει το χώρο ως κάτι που υπάρχει γύρω του και αντιλαμβάνεται τις γεωμετρικές μορφές ως ενιαίες οντότητες. Τα παιδία, δηλαδή, αναγνωρίζουν τα γεωμετρικά σχήματα από τις μορφές τους όχι από τις ιδιότητες τους. Για παράδειγμα ένα παιδί σε αυτό το επίπεδο σκέψης δεν θα μπορούσε να αντιληφθεί ένα τετράγωνο ως ρόμβο, ή ένα ρόμβο ως πλάγιο παραλληλόγραμμο, παρόλο που μπορεί να αναγνωρίζει και να σχεδιάζει και τα τρία σχήματα.Οι μαθητές που βρίσκονται σε αυτό το επίπεδο μπορούν να μάθουν τη γεωμετρική ορολογία που είναι συνυφασμένη με γεωμετρικά σχήματα και να τα αναπαράγουν σχεδιάζοντας τα ή κατασκευάζοντας τα με πρόχειρα υλικά.

Επίπεδο 1 (Ανάλυση):Οι μαθητές που βρίσκονται στο επίπεδο της ανάλυσης μπορούν να διακρίνουν τα χαρακτηριστικά των σχημάτων και να τα ταξινομούν ανάλογα με τις ιδιότητες τους. Όταν, για παράδειγμα, δοθούν στους μαθητές ορθογώνια σχήματα, μπορούν να

παρατηρήσουν ότι αυτά έχουν όλες τις γωνιές ορθές και τις απέναντι πλευρές ίσες. Παρ' όλα αυτά οι μαθητές δεν μπορούν ακόμα να αντιληφθούν τις σχέσεις ανάμεσα στις ιδιότητες των σχημάτων και να δουν τις σχέσεις ανάμεσα στα σχήματα.

Επίπεδο 2 (Άτυπη Αφαίρεση).

Εδώ οι μαθητές μπορούν να αντιληφθούν πλήρως:

1. τις σχέσεις που υπάρχουν μέσα στο ίδιο το σχήμα. Π.χ. για να είναι οι απέναντι πλευρές ενός τετραπλεύρου παράλληλες πρέπει οι απέναντι γωνίες να είναι ίσες.

2. τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των σχημάτων. Π.χ. ένα τετράγωνο είναι και παραλληλόγραμμο και ορθογώνιο.

Σε αυτό δηλαδή το επίπεδο οι μαθητές αναπτύσσουν τη έννοια του εγκλεισμού και αναγνωρίζουν τάξεις σχημάτων. Παράλληλα, αρχίζουν να αντιλαμβάνονται τους ορισμούς, αλλά δεν κατανοούν τη σημασία της παραγωγικής σκέψης.

Κάθε επίπεδο χαρακτηρίζεται από συγκεκριμένο τρόπο σκέψης και συγκεκριμένους τύπους γεωμετρικών ιδεών που μπορούν να υποστούν νοητική επεξεργασία. Καθώς το άτομο περνά από ένα επίπεδο σκέψης σε άλλο αλλάζει το αντικείμενο των γεωμετρικών συλλογισμών καθώς και τα αποτελέσματα της σκέψης του. Το ζητούμενο για τους μαθητές του δημοτικού σχολείου είναι να περάσουν από το επίπεδο 0, της απλής αναγνώρισης, στο επίπεδο 1, της ανάλυσης, ή 2, της άτυπης αφαίρεσης. Κατά τη μετάβαση αυτή βελτιώνεται η χωρική αντίληψη, η κατανόηση και αναγνώριση των σχημάτων, η δυνατότητα περιγραφής του χώρου αξιοποιώντας γνωστά ονόματα σχημάτων και έννοιες ισότητας και ομοιότητας καθώς και η διαδικασία της μέτρησης (μήκη, εμβαδά, όγκοι, γωνίες).

Αυτό που χαρακτηρίζει τη θεωρία των vanHieles είναι το γεγονός ότι τα επίπεδα έχουν καθορισμένη διαδοχική σειρά. Αυτό προϋποθέτει ότι το παιδί για να μεταβεί σε ανώτερα επίπεδα θα πρέπει οπωσδήποτε να έχει περάσει από όλα τα προηγούμενα. Δηλαδή δεν νοούνται «άλματα» σε μη διαδοχικά επίπεδα. Συνεπώς, όταν ένα παιδί μπαίνει σε ένα επίπεδο αφήνει πίσω του για πάντα ένα άλλο. Επιπλέον, η κατάταξη σε

κάποιο επίπεδο εξαρτάται από τις γεωμετρικές εμπειρίες του ατόμου και όχι από την ηλικία του(Van Hiele, & van Hiele-Geldof, 1958).

Αυτό που αξίζει να σημειωθεί είναι ότι μελετώντας τις προτάσεις του ισχύοντος προγράμματος ανά τάξη, αντιλαμβάνεται κανείς ότι ο τρόπος που είναι δομημένο δε δίνει τη δυνατότητα στο δάσκαλο να έχει μία συνολική θέαση της εξέλιξης των περιεχομένων που διαπραγματεύεται κάθε τάξη. Δε γίνεται, δηλαδή, εμφανής η εξελικτική ανάπτυξη των περιεχομένων και η σύνδεσή τους οριζόντια μεταξύ των τάξεων.

1.2. Τροχιά μάθησης ή Τροχιά Μάθησης Διδασκαλίας

Μια από τις βασικές θεωρητικές έννοιες στη Διδακτική των μαθηματικών που χρησιμοποιούνταιγια να συνδεθεί η θεωρία με την πράξη είναι αυτή των τροχιών μάθησης (learning trajectories) ή των Τροχιών Μάθησης Διδασκαλίας (ΤΜΔ). Στις τροχιές μάθησης περιγράφεται αφενός μια υποθετική πορεία ανάπτυξης της κατανόησης και της μάθησης του παιδιού σε συγκεκριμένους μαθηματικούς στόχους αλλά και αφετέρου προτείνονται διδακτικά έργα που σχεδιάστηκαν για να προκαλέσουν αυτήν την ανάπτυξη. Οι τροχιές μάθησης είναι μια σύγχρονη έννοια που χρησιμοποιείται για το σχεδιασμό πιο συναφών και διδακτικά χρήσιμων προτύπων, προγραμμάτων σπουδών, αξιολογήσεων και προσεγγίσεων για την επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών στο διεθνή χώρο (π.χ. Clements, & Sarama, 2009; Confrey, et al. 2011; Daro, et al. 2011; Sztajn, et al. 2012).

Οι Corcoran, Mosher, and Rogat (2009, σελ. 8) τονίζουν ότι οι τάσεις που παρουσιάζονται στις τροχιές μάθησης βασίζονται σε έρευνες σχετικά με το πως η μάθηση των σπουδαστών εξελίσσεται στην πραγματικότητα σε αντίθεση με τη συνήθη προσοχή που δίνεται στη γνώση του περιεχομένου. Αυτοί δηλαδή διαχωρίζουν τη λογική του ατόμου που μαθαίνει από τη λογική του περιεχομένου.

Οι Clements and Sarama (2004) δίνουν τον παρακάτω ορισμό για τις τροχιές μάθησης:

"*Είναι οι περιγραφές της σκέψης και της μάθησης των παιδιών σε ένα συγκεκριμένο μαθηματικό τομέα, και μια σχετική εικαζόμενη διαδρομή διαμέσου ενός συνόλου διδακτικών έργων που έχουν σχεδιαστεί για να*

προκαλέσουν αυτές τις διανοητικές διαδικασίες ή ενέργειες. Αυτές υποθέτονται για να μετακινήσουν τα παιδιά διαμέσου μιας αναπτυξιακής εξέλιξης επιπέδων της σκέψης, που δημιουργήθηκε με πρόθεση την υποστήριξη των επιδόσεων των παιδιών σε συγκεκριμένους στόχους αυτού του μαθηματικού τομέα". (σελ.83)

Οι Clements & Sarama (2009) σημειώνουν ότι: "Οι τροχιές μάθησης έχουν τρία μέρη: α) ένα μαθηματικό στόχο, β) μια αναπτυξιακή διαδρομή κατά μήκος της οποίας τα παιδιά αναπτύσσονται για να φτάσουν αυτόν τον στόχο, και γ) ένα σύνολο από διδακτικές δραστηριότητες, ή έργα, που ταιριάζουν με καθένα από τα επίπεδα της σκέψης σε αυτήν την διαδρομή και βοηθούν τα παιδιά να αναπτύσσονται προς όλο και υψηλότερα επίπεδα σκέψης." (σελ. 3)

Οι Clements & Sarama (2009, σελ. 3-4) αναλύουν και προσδιορίζουν περισσότερο αυτά τα τρία μέρη όπως παρουσιάζονται παρακάτω:

Στόχοι: Οι Μεγάλες Ιδέες των Μαθηματικών

Όπως αναφέρουν και παραπάνω οι συγγραφείς αυτοί το πρώτο μέρος μιας τροχιάς μάθησης είναι ο μαθηματικός στόχος. Αυτοί οι στόχοι που αναφέρουν οι συγγραφείς λένε ότι είναι οι μεγάλες ιδέες των μαθηματικών, δηλαδή συστάδες εννοιών και δεξιοτήτων που είναι μαθηματικά κεντρικές και συνεκτικές σύμφωνες με τη σκέψη του παιδιού και γενεσιουργοί μελλοντικής μάθησης. Οι Clements & Sarama λένε ότι αυτές οι μεγάλες ιδέες προέρχονται από διάφορα προγράμματα όπως αυτά του National Council of Teachers of Mathematics και το National Math Panel (NCTM, 2006; NMP, 2008). Αναφέρουν για παράδειγμα, ως μια μεγάλη ιδέα την εξής: *Σύνθεση και ανάλυση δυσδιάστατων σχημάτων και τρισδιάστατων στερεών*.Τα επίπεδα σχήματα και τα στερεά σώματα μπορούν να συντεθούν και να αναλυθούν σε άλλα δυσδιάστατα σχήματα και τρισδιάστατα σώματα αντίστοιχα.

Ανάπτυξη των προόδων: Οι Διαδρομές της Μάθησης

Το δεύτερο μέρος στις διαδρομές μάθησης αποτελείται από επίπεδα σκέψης το ένα πιο εξελιγμένο από το άλλο. Δηλαδή, η αναπτυξιακή εξέλιξη περιγράφει μια τυπική διαδρομή που ακολουθούν τα παιδιά στην ανάπτυξη της κατανόησης και των ικανοτήτων σχετικά με αυτό το μαθηματικό περιεχόμενο.

Διδακτικά έργα: Οι Διαδρομές της Διδασκαλίας

Το τρίτο μέρος μιας διαδρομής μάθησης αποτελείται από ένα σύνολο διδακτικών έργων που αντιστοιχούν σε κάθε ένα από τα επίπεδα σκέψης της αναπτυξιακής εξέλιξης. Αυτά τα έργα έχουν σχεδιαστεί για να βοηθήσουν τα παιδιά να μάθουν τις ιδέες και τις ικανότητες που χρειάζονται για να ολοκληρώσουν αυτό το επίπεδο σκέψης. Δηλαδή, οι εκπαιδευτικοί, μπορούν να χρησιμοποιήσουν αυτά τα έργα για να προάγουν την ανάπτυξη των παιδιών από το ένα επίπεδο στο άλλο.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τα τρία προγράμματα σπουδών της γεωμετρίας που εξετάζουμε στην εργασία αυτή.

2. Παρουσίαση των περιεχομένων των τριών προγραμμάτων

2.1. Το Ισχύον Πρόγραμμα Σπουδών (ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ)

Σύμφωνα με τη φιλοσοφία του ισχύοντος Διαθεματικού Ενιαίου Πλαισίου Προγράμματος Σπουδών Δ.Ε.Π.Π.Σ (2003) για τα Μαθηματικά το συνολικό γνωστικό περιεχόμενο που πρέπει να διδαχθεί χωρίζεται σε επιμέρους κατηγορίες περιεχομένων που διατρέχουν όλες τις τάξεις. Μια από τις κατηγορίες αυτές είναι η γεωμετρία. Στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΑΠΣ) για τα Μαθηματικά περιγράφονται για κάθε τάξη και για κάθε κατηγορία περιεχομένου οι επιμέρους στόχοι, ο ενδεικτικός χρόνος καθώς και ενδεικτικές δραστηριότητες.

Πιο συγκεκριμέναστη γεωμετρίαγια κάθε τάξη προτείνεται τα εξής:

Α΄ τάξη:Διακρίνουν δυσδιάστατα σχήματα: τρίγωνο, τετράγωνο, ορθογώνιο, κύκλο και στερεά σώματα: τριγωνική πυραμίδα, κύβο,ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, κύλινδρο, σφαίρα. Χαράζουν ευθύγραμμα τμήματα με τοχάρακα, ενώνοντας τα άκρα τους (δύοσημεία). Ανακατασκευάζουν απλά πάζλ. Τοποθετούν, εντοπίζουν και μετατοπίζουν αντικείμενα σε σχέση μετους ίδιους ή σε σχέση με σταθερά σημείααναφοράς. Παρατηρούν εικόνες και σχήματασυμμετρικά ως προς άξονα.

*Β΄ τάξη:*Αναγνωρίζουν και ορίζουν σημεία, σχεδιάζουν ευθύγραμμα τμήματα και ευθείες σε λευκό και τετραγωνισμένο χαρτί. Μετρούν και συγκρίνουν ευθύγραμμα τμήματα με συμβατικέςμονάδες μετρήσεων. Αναγνωρίζουν εμπειρικά τισπαράλληλες και κάθετες ευθείες. Αναγνωρίζουν τα γεωμετρικάσχήματα: τον κύκλο, το τετράγωνο, τοορθογώνιο, το τρίγωνο. Εξετάζουν τα χαρακτηριστικά τωνγεωμετρικών σχημάτων με τη χρήσητων οργάνων. Διακρίνουν τα γεωμετρικά στερεά:την πυραμίδα, τον κύβο, το ορθογώνιοπαραλληλεπίπεδο, τη σφαίρα, τονκύλινδρο. Σχεδιάζουν σχήματα με το χάρακα σε λευκό και σε τετραγωνισμένο χαρτί και αναπαράγουν σχήματα. Παρατηρούν αν ένα σχήμα έχει άξονα συμμετρίας.

*Γ΄ τάξη:*Σχεδιάζουν γεωμετρικά σχήματα με τη βοήθεια οργάνων. Αναπαράγουν, περιγράφουν και σχεδιάζουν ορισμένα συνήθη επίπεδα γεωμετρικά σχήματα (ορθογώνιο, τετράγωνο). Περιγράφουν και αναπαριστάνουν ορισμένα συνήθη γεωμετρικά στερεά (κύβος, σφαίρα). Αναπαράγουν τα αναπτύγματα του κύβου, του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου, της τετραγωνικής πυραμίδας. Χαράζουν κάθετες με τη βοήθεια οργάνων. Αντιλαμβάνονται την έννοια της ορθής γωνίας. Κατασκευάζουν το συμμετρικό ενός επίπεδου σχήματος ως προς άξονα συμμετρίας.

*Δ΄ τάξη:*Σχεδιάζουν γεωμετρικά σχήματα και στερεά με τη βοήθεια οργάνων. Κατανοούν διαισθητικά την έννοια του εμβαδού. Υπολογίζουν και συγκρίνουν περιμέτρους επίπεδων σχημάτων. Περιγράφουν και αναπαριστάνουν συνήθη γεωμετρικά στερεά. Αναπαράγουν τα αναπτύγματα ορισμένων στερεών. Περιγράφουν και σχεδιάζουν τα συνήθη επίπεδα γεωμετρικά σχήματα. Σχεδιάζουν τεμνόμενες, παράλληλες και κάθετες ευθείες με τη βοήθεια οργάνων. Σχεδιάζουν την απόσταση σημείου από ευθεία και την απόσταση δύο παράλληλων ευθειών. Σχεδιάζουν το συμμετρικό ενός επίπεδου σχήματος ως προς άξονα συμμετρίας. Διενεργούν μεταφορά ενός σχήματος στο τετραγωνισμένο χαρτί κατά δοθέν ευθύγραμμο τμήμα.

*Ε΄ τάξη:*Χαράζουν γεωμετρικά σχήματα με τη βοήθεια οργάνων. Αναγνωρίζουν σχήματα που είναι μέρη ενός σύνθετου σχήματος. Υπολογίζουν τα εμβαδά του τετραγώνου, του ορθογώνιουπαραλληλόγραμμου και του ορθογώνιου τριγώνου.Συγκρίνουν εμβαδά. Κατανοούν ότι η έννοια του εμβαδού είναι διαφορετική από την έννοια της περιμέτρου επιλύοντας προβλήματα, στα οποία γνωρίζουν τη μία από τις δύο έννοιες και ζητείτεη άλλη. Υπολογίζουν το μήκος ενός κύκλου. Διακρίνουν τα είδη των γωνιών (ορθή, οξεία, αμβλεία). Συγκρίνουν και σχηματίζουν γωνίες. Διακρίνουν τα είδη τριγώνων και τις ιδιότητές τους. Εφαρμόζουν τις συνήθεις τεχνικές χάραξης των υψών ενός τριγώνου. Διενεργούν μεγεθύνσεις και σμικρύνσεις, σε χαρτί μιλιμετρέ απλώνευθύγραμμων σχημάτων. Κατασκευάζουν το συμμετρικό ενόςσχήματος ως προς άξονα σετετραγωνισμένο χαρτί.

*Στ΄ τάξη:*Αναγνωρίζουν σχήματα σε ένα σύνθετο περιβάλλον και χαράζουν γεωμετρικά σχήματα με τη βοήθεια οργάνων. Χρησιμοποιούν τους τύπους που επιτρέπουν τον υπολογισμό των εμβαδών του τριγώνου, του παραλληλόγραμμου και του τραπεζίου. Υπολογίζουν τα εμβαδά του τριγώνου, του παραλληλόγραμμου, του τραπεζίου και του κύκλου και επιλύουν σχετικά προβλήματα. Υπολογίζουν τους όγκους και τα εμβαδά παράπλευρης και ολικής επιφάνειας του κύβου, του ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου και του κυλίνδρου και λύνουν συνδυαστικά προβλήματα εμβαδών και όγκων. Αξιοποιούν δεδομένα από όγκους και εμβαδά για να κατασκευάζουν τα αναπτύγματα του κύβου, του κυλίνδρου και του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου. Αναπαράγουν, σχεδιάζουν και συγκρίνουν γωνίες. Διενεργούν μεταφορές, μεγεθύνσεις καισμικρύνσεις σε μιλιμετρέ χαρτί απλώνευθύγραμμων σχημάτων. Σχεδιάζουν το συμμετρικό ενόςσχήματος ως προς άξονα.

Επιπλέον στο ισχύον ΑΠΣ προτείνονται διαθεματικά σχέδια εργασίας για τη γεωμετρία όπως: η συμμετρία στη ζωή μας, κατασκευή πυραμίδας, μοτίβα στη ζωή μας κ.ά.

Ωστόσο, μελετώντας λεπτομερώς τις προτάσεις ανά τάξη, για το περιεχόμενο της γεωμετρίας, γίνεται εμφανές ότι ακολουθούν τη λογική των ιεραρχικά διατεταγμένων επιπέδων VanHieles (0-2). Η γεωμετρία προσεγγίζεται με μη τυπικό τρόπο, βασίζεται στις παραστάσεις των μαθητών οι οποίες με το πέρασμα των τάξεων, και τον εμπλουτισμό των γεωμετρικών εμπειριών τους, τείνουν να γίνονται πιο αφαιρετικές (από το σχήμα – στο σημείο – ευθεία). Προς αυτή την κατεύθυνση, παρατηρούμε ότι προτείνονται παιγνιώδεις μαθητοκεντρικές δραστηριότητες (παζλ, τάγκραμ, μωσαϊκά) που εξοικειώνουν τους μαθητές με τα σχήματα και τις ιδιότητές τους, με την κατασκευή – σχεδιασμό τους, με τους μετασχηματισμούς που μπορούν να υποστούν κ.ά. Αυτό που διαπιστώνεται, επίσης, είναι ότι τα θέματα που συναρτούν το περιεχόμενο της γεωμετρίας (π.χ. χώρος, γεωμετρικά σχήματα, μετασχηματισμοί, συμμετρία κ.ά.) παρουσιάζονται όλα μαζί χωρίς καμία κατηγοριοποίηση.

2.2. Το Νέο Πρόγραμμα Σπουδών (ΝΠΣ)του 2011

Τα Νέα Προγράμματα Σπουδών Υποχρεωτικής εκπαίδευσης εκπονήθηκαν, στο πλαίσιο υλοποίησης της Πράξης (Νέο Σχολείο, Σχολείο 21ου αιώνα) κατά το σχολικό έτος 2011-12. Εφαρμόστηκαν στην πράξη μόνο πιλοτικά και δεν συμπεριλαμβάνουν σχολικά βιβλία.

Για πρώτη φορά στα Ελληνικά προγράμματα γίνεται διάκριση μεταξύ ηλικιακών κύκλων και όχι απλά των τάξεων του σχολείου. Έτσι διαχωρίζονται τρεις ηλικιακοί κύκλοι: 1ος ηλικιακός κύκλος συμπεριλαμβάνει παιδιά από 5 έως 8 χρόνων δηλαδή τις τάξεις από Νήπια έως και Β' τάξη του Δημοτικού. 2ος ηλικιακός κύκλος (από 8 έως 12) δηλαδή από Γ' έως Στ' τάξη του Δημοτικού και 3ος ηλικιακός κύκλος (από 12 έως 15 χρόνων) που συμπεριλαμβάνει τις τρεις τάξεις του Γυμνασίου.

Το νέο Ελληνικό πρόγραμμα αρθρώνετε με βάση τέσσερις τροχιές: 1) Χώρος, 2) Γεωμετρικά σχήματα, 3) Μετασχηματισμοί και 4) Οπτικοποίηση, τις οποίες παρουσιάζουμε σύντομα παρακάτω με βάση τους ηλικιακούς κύκλους.

1. Τροχιά του Χώρου

Αφορά σε δύο θέματα: στις Θέσεις διευθύνσεις, διαδρομές σε χάρτες όπως και στη Δόμηση χώρου, επικαλύψεις και συντεταγμένες.

Θέμα 1: Θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές σε χάρτες: αναφέρεται στον εντοπισμό, περιγραφή και αναπαράσταση θέσεων, διευθύνσεων και διαδρομών, αρχικά στο χώρο και μεταγενέστερα σε χάρτες.

1ος Ηλικιακός κύκλος: Συστηματοποιούν τις χωρικές εμπειρίες με την αξιοποίηση διαφορετικών συστημάτων αναφοράς, κάνουν χρήση χωρικών εννοιών και έχουν μια πρώτη επαφή με οικείους χάρτες.

2ος Ηλικιακός κύκλος: Συστηματοποιούν την αναγνώριση, περιγραφή θέσεων, σχέσεων και διαδρομών σε χάρτες και οδηγούνται στην προσέγγιση της κλίμακας και της κατασκευής τους.

Θέμα 2: Δόμηση χώρου, επικαλύψεις και συντεταγμένες: αναφέρεται στις επικαλύψεις του επιπέδου με διάφορα σχήματα και ουσιαστικά στην εξοικείωση και μελέτη του τετραγωνισμένου περιβάλλοντος που οδηγεί στις δισδιάστατες συντεταγμένες.

1ος Ηλικιακός κύκλος: αρχικά εντοπίζουν, περιγράφουν και αναπαριστούν θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές σε τετραγωνισμένα περιβάλλοντα και, στη συνέχεια, επιδιώκουν να εντοπίσουν τρόπους παράστασης και επικοινωνίας των καταστάσεων αυτών με τη χρήση αυθαίρετων συμβόλων όπως χρώματα, γράμματα και αριθμούς.

2ος Ηλικιακός κύκλος:συστηματοποιούν τη χρήση αριθμητικών ζευγών και, στη συνέχεια, διατεταγμένων ζευγών για την παράσταση θέσεων στο πρώτο τεταρτημόριο.

2. Τροχιά Γεωμετρικά Σχήματα

Αφορά τέσσερα θέματα: *Ταξινόμηση και Ανάλυση σχημάτων σε στοιχεία και ιδιότητες, Κατασκευές σχημάτων και σχεδιασμός, Σύνδεση επιπέδων και στερεών σχημάτων, Ανάλυση ή σύνθεση επιπέδων και στερεών σχημάτων.*

Θέμα 1: Ταξινόμηση και Ανάλυση σχημάτων σε στοιχεία και ιδιότητες

1ος Ηλικιακός κύκλος:Ξεκινούν στις μικρότερες τάξεις με αναγνώριση, ονομασία και ταξινόμηση των σχημάτων (επίπεδων και στερεών) με βάση γεωμετρικά και μη χαρακτηριστικά και σε ποικιλία θέσεων, μεγεθών και προσανατολισμών, ενώ βαθμιαία αναγνωρίζουν βασικές ιδιότητες και σχέσεις.

2ος Ηλικιακός κύκλος: Διευρύνουν την αναγνώριση και στα στοιχεία των σχημάτων (σημεία, ευθείες, ημιευθείες, ευθύγραμμα τμήματα), καθώς και στις ιδιότητες (παράλληλες, κάθετες, ίσες, άνισες) και ταξινομούν τα σχήματα (τρίγωνα, τετράπλευρα, πολύγωνα και πολύεδρα) με βάση τις ιδιότητες όπως αριθμός πλευρών, σύγκριση γωνιών, μήκος πλευρών κ.λπ.

Θέμα 2: Κατασκευές σχημάτων και σχεδιασμός

1ος Ηλικιακός κύκλος: Ξεκινούν με απλές κατασκευές με χρήση χειραπτικών υλικών και απλές παραστάσεις.

2ος Ηλικιακός κύκλος: Περνούν σε απλούς σχεδιασμούς σε πραγματικό και ψηφιακό περιβάλλον, χρησιμοποιούν τα γεωμετρικά όργανα και σχεδιάζουν γεωμετρικά στοιχεία (ευθείες, ημιευθείες, κύκλους, κ.λπ.), καθώς και γεωμετρικά σχήματα.

Θέμα3: Σύνδεση επιπέδων και στερεών σχημάτων

1ος Ηλικιακός κύκλος: Ξεκινούν να αναγνωρίζουν τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα ως έδρες στερεών και κάνουν απλές κατασκευές αναπτυγμάτων.

2ος Ηλικιακός κύκλος: Επεκτείνουν την αναγνώριση επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων ως έδρες στερεών, διερευνούν τις σχέσεις μεταξύ επίπεδων και στερεών γεωμετρικών σχημάτων (π.χ. τετραγώνου-κύβου, κύκλου- σφαίρας, κ.ά.) και γενικεύουν τη σύνδεση με όψεις και τομές, ενώ παράλληλα δημιουργούν και σχεδιάζουν αναπτύγματα στερεών (αρχικά κύβου και, στη συνέχεια, και άλλων στερεών.

Θέμα 4: Ανάλυση ή σύνθεση επιπέδων και στερεών σχημάτων

1ος Ηλικιακός κύκλος: Συνθέτουν και αναλύουν επίπεδα γεωμετρικά σχήματα και στερεά σε δύο ή περισσότερα μέρη (απλά παζλ αποτελούμενα από δύο ή τρία κομμάτια τάνγκραμ ή πεντόμινο) και σε πραγματικό ή ψηφιακό περιβάλλον προσεγγίζοντας ιδιότητες και σχέσεις.

2ος Ηλικιακός κύκλος: Αναλύουν και συνθέτουν επίπεδα και στερεά γεωμετρικά σχήματα σε πιο σύνθετες καταστάσεις αναγνωρίζοντας ιδιότητες και σχέσεις και συνδέοντας τες με τη μέτρηση επιφάνειας .

3. Τροχιά Μετασχηματισμών:

Αφορά στις μετατοπίσεις, τις στροφές και τις συμμετρίες.

Θέμα 1: Μετατοπίσεις,στροφές, συμμετρίες

1ος Ηλικιακός κύκλος:Παρατηρούν μετατοπίσεις και στροφές (90, 180, 360 και 45 μοιρών) προβλέποντας το αποτέλεσμα, αναγνωρίζουν συμμετρικά σχήματα εντοπίζοντας τους άξονες συμμετρίας και κάνουν κατασκευές συμμετρικών καταστάσεων και σχημάτων σε πραγματικά και ψηφιακά περιβάλλοντα, προσεγγίζοντας τις ιδιότητες της συμμετρίας.

2ος Ηλικιακός κύκλος:Χρησιμοποιούν τους μετασχηματισμούς για σύγκριση σχημάτων και πραγματοποιούν κατασκευές με τη χρήση μετατοπίσεων και στροφών, κατασκευάζουν συμμετρικά σχήματα και σχήματα με άξονες συμμετρίας με οριζόντιους και κατακόρυφους άξονες και περιγράφουν τις ιδιότητες της αξονικής συμμετρίας.

4. Τροχιά Οπτικοποίησης

Αφορά στην *αναγνώριση και αναπαράσταση διαφορετικών οπτικών γωνιών αντικειμένων και καταστάσεων, καθώς* και *δημιουργία πραγματικών και νοερών αναπαραστάσεων για αντικείμενα και καταστάσεις.*

1ος Ηλικιακός κύκλος:Ασκούνται στην αναγνώριση κατασκευών από διαφορετικές οπτικές γωνίες, στη σύνδεση 2Δ και 3Δ καταστάσεων, καθώς και στη δημιουργία νοερών εικόνων και περιγραφών αλλά και πραγματικών παραστάσεων τρισδιάστατων καταστάσεων.

2ος Ηλικιακός κύκλος:Κάνουν κατασκευές από εικόνες, σχέδια και άλλες αναπαραστάσεις, αλλά σχεδιάζουν, επίσης, σε ισομετρικό χαρτί ή σε ψηφιακό περιβάλλον δοσμένες τρισδιάστατες κατασκευές.

Κλείνοντας πρέπει να σημειωθεί ότι σύμφωνα με τη φιλοσοφία του ΝΠΣ η διαχείριση του περιεχομένου δεν ακολουθεί γραμμική πορεία. Αντίθετα οι δραστηριότητες που προτείνονται προσαρμόζονται στο τι χρειάζεται να γνωρίζουν οι μαθητές για να αντιμετωπίσουν την εκάστοτε ενότητα.

2.3. Το πρόγραμμα CCSS της Αμερικής

Στο πρόγραμμα της Αμερικής (CCSS) διαχωρίζονται τρεις τροχιές: α) Τα γεωμετρικά σχήματα, τα συστατικά και οι ιδιότητές τους. β) Η σύνθεση και η ανάλυση των γεωμετρικών σχημάτων. γ) Οι χωρικές σχέσεις και η χωρική δόμηση.

***1. Τα γεωμετρικά σχήματα*, τα συστατικά και οι ιδιότητές τους**.

Εδώ εξετάζονται στα γεωμετρικά σχήματα τα συστατικά τους (π.χ., πλευρές, γωνίες, επιφάνειες), οι ιδιότητές τους, και η κατηγοριοποίησή τους με βάση αυτές τις ιδιότητες.

Η ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης περιγράφεται από τέσσερα στάδια:

1) *Οπτικό/συγκριτικό*. Οι μαθητές αναγνωρίζουν σχήματα, π.χ.ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο 'μοιάζει με μια πόρτα'.

2) *Περιγραφικό*.Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα στοιχεία των σχημάτων, π.χ. ένα ορθογώνιο έχει τέσσερις πλευρές, όλες του οι πλευρές είναι ευθείες και οι απέναντι πλευρές έχουν ίσο μήκος.

3) *Αναλυτικό*. Οι μαθητές χαρακτηρίζουν τα σχήματα από τις ιδιότητές τους, π.χ. ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει τις απέναντι πλευρές ίσες και τέσσερις ορθές γωνίες.

4) *Αφαιρετικό*. Οι μαθητές καταλαβαίνουνότι ένα ορθογώνιο είναι παραλληλόγραμμο επειδή έχει όλες τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων.

2.Η σύνθεση και η ανάλυση των γεωμετρικών σχημάτων.

Σε αυτήν την κατηγορία,όπως και στην προηγούμενη, η σκέψη των μαθητών ακολουθεί μία εξελικτική πορεία. Αρχικά δεν είναι σε θέση να συνθέσουν γεωμετρικά σχήματα. Με την εμπειρία αποκτούν ικανότητες συνδυασμού σχημάτων αρχικά σε εικόνες, μέσω της δοκιμής και του λάθους, ενώ σταδιακά αρχίζουν να βασίζονται στην χρήση των ιδιοτήτων των σχημάτων. Τέλος, είναι σε θέση να συνθέσουν νέα σχήματα χρησιμοποιώντας συνδυασμούς σχημάτων.

3.*Οι χωρικές σχέσεις και η χωρική δόμηση.*

Η ενασχόληση με τη σύνθεση και την ανάλυση σχημάτων, που αναλύθηκε παραπάνω, μπορεί να είναι κομβικής σημασίας για την ανάπτυξη του χωρικού συλλογισμού. Ο χωρικός συλλογισμός απαιτεί από το άτομο να μπορεί να κάνει ταυτόχρονα πολλές περίπλοκες διαδικασίες. Να αποτυπώνει το χώρο και τα αντικείμενά του σε 2 διαστάσεις, να τον χωρίζει σε νοητές μονάδες, να συντονίζει, να ενώνει και να θυμάται μία σειρά από κινήσεις διαδρομές. Αυτό προϋποθέτει μία μορφή αφαίρεσης στη σκέψη του παιδιού. Αρχικά οι διαδρομές πραγματοποιούνται με τη χρήση λέξεων όπως μπροστά, πίσω κ.ά. και στη συνέχεια η χωροταξική δόμηση γίνεται με μαθηματική διατύπωση. Οι εμπειρίες προηγούνται μιας μαθηματικής κατανόησης του χώρου και υποβοηθούν τον μαθητή στην πορεία των χωρικών του συλλογισμών.

Οι Μεγάλες Ιδέες ή σημαντικές μαθηματικές έννοιες.Κατά την ανάπτυξη μιας διδακτικής τροχιάς, είναι ζωτικής σημασίας να δοθεί έμφαση στις σημαντικές μαθηματικές έννοιες, ή «Big Ideas», όπως αλλιώς λέγονται στη διεθνή βιβλιογραφία, δηλαδή τις γνώσεις και τις δεξιότητες που συμβαδίσουν με τις έννοιες αυτές. Οι τροχιές διδασκαλίας που οργανώνονται γύρω από τις σημαντικές αυτές

μαθηματικές έννοιες παρέχουν συνεκτικές ευκαιρίες μάθησης που επιτρέπουν στους/τις μαθητές/τριες να διερευνήσουν τις έννοιες σε βάθος. Οι μεγάλες ιδέες στη γεωμετρία είναι οι ακόλουθες:

1. *Ονομασία δυσδιάστατων σχημάτων και τρισδιάστατων σωμάτων*
2. *Οπτικοποίηση δυσδιάστατων σχημάτων και τρισδιάστατων σωμάτων*
3. *Ιδιότητες δυσδιάστατων σχημάτων και τρισδιάστατων στερεών*
4. *Γεωμετρικές Σχέσεις*

   Αφορά τις σχέσεις που αναπτύσσονται ανάμεσα στα σχήματα και τα στερεά σώματα καθώς και τη σύνδεση ανάμεσα στις ιδιότητες και τις σχέσεις.

5. *Σύνθεση και ανάλυση δυσδιάστατων σχημάτων και τρισδιάστατων στερεών.*

Στην τροχιά**,** της Γεωμετρίας για το Δημοτικό Σχολείο που προτείνεται από το **CCSS** οι διδακτικοί στόχοι κατά τάξη είναι οι εξής:

*Grade**1***:

Αιτιολογούν με τα σχήματα και τις ιδιότητές τους.

- Διακρίνουν καθορισμένες ιδιότητες (π.χ. το τρίγωνο είναι κλειστό και τρίπλευρο σχήμα) από τις μη ορισμένες ιδιότητες (π.χ. χρώμα, προσανατολισμό, συνολικό μέγεθος) κατασκευάζουν και σχεδιάζουν σχήματα που έχουν καθορισμένες ιδιότητες.
- Συνθέτουν δυσδιάστατα σχήματα (ορθογώνια, τετράγωνα, τραπέζια, τρίγωνα, ημικύκλια και τέταρτα κύκλου) και τρισδιάστατα σχήματα (κύβους, ορθογώνια πρίσματα, ορθούς κυκλικούς κώνους και κυλίνδρους) προκειμένου να δημιουργήσουν ένα σύνθετο σχήμα και να συνθέσουν νέα σχήματα από το σύνθετο σχήμα.
- Διαιρούν κύκλους και ορθογώνια σε δύο και τέσσερα ισομεγέθη μέρη, περιγράφουν τα μέρη χρησιμοποιώντας λέξεις *μισά,* και *τέταρτα*, και τις εκφράσεις *μισό του* και *ένα τέταρτο του*. Περιγράφουν το όλον ως «δύο από» ή «τέσσερα από τα μέρη». Κατανοούν ότι η ανάλυση σε περισσότερα ισομεγέθη μέρη δημιουργεί μικρότερα μέρη.

*Grade**2***:

Αιτιολογούν με τα σχήματα και τις ιδιότητές τους.

- Αναγνωρίζουν και να σχεδιάζουν σχήματα με συγκεκριμένες ιδιότητες, όπως έναν δοσμένο αριθμό γωνιών ή ένα δοσμένο αριθμό ίσων επιφανειών. Αναγνωρίζουν τρίγωνα, τετράπλευρα, πεντάγωνα, εξάγωνα και κύβους.
- Διαιρούν ένα ορθογώνιο σε γραμμές και στήλες από ισομεγέθη τετράγωνα και υπολογίζουν τον συνολικό αριθμό τους.
- Διαιρούν κύκλους, ορθογώνια σε δύο, τρία ή τέσσερα ισομεγέθη μέρη, περιγράφουν τα μέρη χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις «μισά», «τρίτα», «μισό του», «ένα τρίτο του» κ.α. και περιγράφουν το όλον ως «δύο μισά», «τρία τρίτα», «τέσσερα τέταρτα». Αναγνωρίζουν ότι τα ισομεγέθη μέρη του όλου δεν χρειάζεται να έχουν το ίδιο σχήμα.

*Grade**3***:

Αιτιολογούν με τα σχήματα και τις ιδιότητές τους.

- Κατανοούν ότι τα σχήματα σε διαφορετικές κατηγορίες (π.χ. ρόμβοι, ορθογώνια, κ.α.) πιθανόν να μοιράζονται ιδιότητες (π.χ. να έχουν τέσσερις πλευρές) και ότι οι κοινές αυτές ιδιότητες μπορούν να ορίσουν μια μεγαλύτερη κατηγορία (π.χ. τα τετράπλευρα). Αναγνωρίσουν ρόμβους, ορθογώνια και τετράγωνα ως παραδείγματα τετραπλεύρων και σχεδιάζουν παραδείγματα τετραπλεύρων που δεν ανήκουν σε καμιά από αυτές τις υποκατηγορίες.
- Διαχωρίζουν σχήματα σε μέρη με ίσα εμβαδά. Εκφράζουν το εμβαδόν κάθε μέρους ως μοναδιαίο κλάσμα του όλου. Για παράδειγμα, διαχωρίζουν ένα σχήμα σε 4 μέρη με το ίδιο εμβαδόν, και περιγράφουν το εμβαδόν του κάθε μέρους, ως το 1/4 του εμβαδού του σχήματος.

*Grade **4***:

Σχεδιάζουν και αναγνωρίζουν πλευρές και γωνίες, και ταξινομούν τα σχήματα με βάση τις ιδιότητες των πλευρών και των γωνιών τους.

- Σχεδιάζουν σημεία, πλευρές, ευθύγραμμα τμήματα, ακτίνες, γωνίες (οξεία, ορθή, αμβλεία) και κάθετες και παράλληλες γραμμές και προσδιορίζουν αυτά τα στοιχεία σε δυσδιάστατα σχήματα.
- Ταξινομούν δυσδιάστατα σχήματα με βάση την παρουσία/απουσία των παράλληλων ή κάθετων γραμμών ή την παρουσία/απουσία γωνιών συγκεκριμένου μεγέθους. Αντιλαμβάνονται τα ορθογώνια τρίγωνα ως μια κατηγορία και εξασκούνται στην αναγνώρισή τους.
- Αναγνωρίζουν μία γραμμή συμμετρίας για ένα δισδιάστατο σχήμα, όπως μια γραμμή κατά μήκος όλης της εικόνας έτσι ώστε η εικόνα να μπορεί να διπλωθεί κατά μήκος της γραμμής σε ταυτιζόμενα μέρη. Προσδιορίζουν και χαράζουν τον άξονα συμμετρίας των σχημάτων.

*Grade**5***:

Γράφημα σημείων στο σύστημα συντεταγμένων για την επίλυση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου και των μαθηματικών.

- Χρησιμοποιούν ένα ζευγάρι από κάθετες αριθμημένες ευθείες, που ονομάζονται άξονες, για να ορίσουν ένα σύστημα συντεταγμένων, με την τομή των ευθειών (η αρχή των αξόνων) τοποθετημένο έτσι ώστε να συμπίπτει με το μηδέν σε κάθε ευθεία και ένα δεδομένο σημείο στο επίπεδο να βρίσκεται χρησιμοποιώντας ένα διατεταγμένο ζεύγος αριθμών, που ονομάζονται συντεταγμένες του. Κατανοούν ότι ο πρώτος αριθμός δείχνει πόσο μακριά να κινηθούν από την αρχή των αξόνων προς την κατεύθυνση ενός άξονα, και ο δεύτερος αριθμός δείχνει πόσο μακριά να κινηθούν προς την κατεύθυνση του δεύτερου άξονα, με τη σύμβαση ότι τα ονόματα των δύο αξόνων και οι συντεταγμένες αντιστοιχούν (π.χ. x-άξοναςκαι x-συντεταγμένη, ψ-άξονας και ψ-συντεταγμένη).
- Αναπαριστούν προβλήματα από τον πραγματικό κόσμο και τα μαθηματικά με γραφικά σημεία στο πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου των συντεταγμένων, και ερμηνεύουν τιμές των συντεταγμένων των σημείων στο πλαίσιο της κατάστασης.

Ταξινομούν δυσδιάστατα σχήματα σε κατηγορίες βασιζόμενοι στις ιδιότητές τους

- Κατανοούν ότι οι ιδιότητες που αφορούν σε μια κατηγορία δυσδιάστατων σχημάτων επίσης αφορούν σε όλες τις υποκατηγορίες αυτής της κατηγορίας σχημάτων. Για παράδειγμα, κατανοούν ότι όλα τα ορθογώνια έχουν τέσσερις ορθές γωνίες και τα τετράγωνα είναι ορθογώνια, έτσι όλα τα ορθογώνια έχουν τέσσερις ορθές γωνίες.
- Ταξινομούν δυσδιάστατα σχήματα σε μια ιεραρχία βασιζόμενη στις ιδιότητες των σχημάτων.

Grade ***6***:

Λύνουν προβλήματα του πραγματικού κόσμου και των μαθηματικών που αφορούν το εμβαδόν και τον όγκο.

- Βρίσκουν το εμβαδόν ορθογωνίων τριγώνων, άλλων τριγώνων, ειδικών τετραπλεύρων και πολυγώνων με σύνθεση σε ορθογώνια ή ανάλυση σε τρίγωνα και άλλα σχήματα. Εφαρμόζουν αυτές τις τεχνικές στο πλαίσιο επίλυσης προβλημάτων του πραγματικού κόσμου και των μαθηματικών.
- Βρίσκουν τον όγκο ενός ορθού ορθογωνίου πρίσματος με κλασματικά μήκη ακμών γεμίζοντάς το με μοναδιαίους κύβους των κατάλληλων μοναδιαίων κλασμάτων των μηκών της ακμής, και δείχνουν ότι ο όγκος είναι ίδιος με αυτό που θα μπορούσε να βρεθεί από τον πολλαπλασιασμό των μηκών ακμής του πρίσματος. Εφαρμόζουν τους τύπους $V = lwh$ και $V = bh$ για να βρουν τους όγκους ορθών ορθογωνίων πρισμάτων με κλασματικά μήκη ακμών μέσα στο πλαίσιο λύσης προβλημάτων του πραγματικού κόσμου και των μαθηματικών.
- Σχεδιάζουν πολύγωνα στο επίπεδο συντεταγμένων με δεδομένες τις συντεταγμένες των κορυφών, χρησιμοποιούν συντεταγμένες για να βρουν το μήκος της μιας πλευράς που ενώνει τα σημεία με την ίδια πρώτη συντεταγμένη ή την ίδια δεύτερη συντεταγμένη. Εφαρμόζουν αυτές τις τεχνικές στο πλαίσιο της επίλυσης προβλημάτων του πραγματικού κόσμου και των μαθηματικών.
- Αναπαριστούν τρισδιάστατα σχήματα χρησιμοποιώντας δίκτυα αποτελούμενα από ορθογώνια και τρίγωνα, και χρησιμοποιούν τα δίκτυα για να βρουν το εμβαδόν της επιφάνειας των σχημάτων

αυτών. Εφαρμόζουν αυτές τις τεχνικές στο πλαίσιο της επίλυσης προβλημάτων του πραγματικού κόσμου και των μαθηματικών.

3. Σύγκριση των προγραμμάτων

Μία πρώτη γενική διαπίστωση που προκύπτει από τη σύγκριση των τριών προγραμμάτων είναι ότι η φιλοσοφία του ΝΠΣ και του CCSS φαίνεται πως παρουσιάζουν αρκετές ομοιότητες. Παρατηρούμε επίσης ότι τα δύο αυτά προγράμματα διαφέρουν από το ισχύον πρόγραμμα, τόσο στη διδακτική φιλοσοφία και την οργάνωση των περιεχομένων όσο και σε αυτά τα ίδια τα περιεχόμενα.

Πιο συγκεκριμένα, μία βασική διαφοροποίηση στα δύο προγράμματα (ΝΠΣ και CCSS) σε σχέση με το ισχύον πρόγραμμα υπάρχει στη θεωρητική θεμελίωση και την οργάνωση των περιεχομένων. Το ισχύον πρόγραμμαενώ βασίζεται στη θεωρία των «επιπέδων γεωμετρικής σκέψης» τωνvanHieles, δεν γίνεται φανερή αυτή η θεμελίωσηκαι δεν εξηγούνται οι λόγοι για τους οποίους τα περιεχόμενα ακολουθούν αυτή την εξελικτική πορεία από τάξη σε τάξη. Ο εκπαιδευτικός δεν κατανοεί την αναγκαιότητα της συγκεκριμένης σειράς προτάσεων και δε γίνεται εμφανής η εξελικτική ανάπτυξη των περιεχομένων και η σύνδεσή τους από τάξη σε τάξη. Σύμφωνα με αυτήν την παρουσίαση του προγράμματος ο εκπαιδευτικός δεν μπορεί να σχηματίζει μια συνολική εικόνα για την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης του παιδιού, συνεπώς, θα αδυνατεί να προσδιορίσει κάθε φορά το επίπεδό τους, να προβλέψει και να αιτιολογήσει δυσκολίες που συναντούν.

Τα δύο νέα προγράμματα απαντούν και καλύπτουν αυτήνην αδυναμία του ισχύοντος προγράμματος, με τη εφαρμογή της θεωρίας της τροχιάς μάθησης. Όπως παρουσιάσαμε παραπάνω (βλ. 1.2), οιτροχιές μάθησης ορίζουν τους βασικούς σταθμούς μάθησης από τους οποίους θα πρέπει να περάσουν οι μαθητές χωρίς όμως να αποτελούν ένα γραμμικό, μοναδικά ορισμένο μονοπάτι. Αντίθετα, μπορεί να διαφοροποιούνται ανάλογα με το μαθητή. Ο δάσκαλοςέχοντας πρόσβαση στις τροχιές αποκτά επίγνωση του επιπέδου της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών του, των δυσκολιών που μπορεί να συναντούν, των προαπαιτούμενων γνώσεων που χρειάζονται για να εξελίξουν τους συλλογισμούς τους. Επιπλέον, τους δίνεται η δυνατότητα να αντιληφθούν συνδέσεις μεταξύ των

διαφορετικών μαθηματικών τροχιών που ενδεχομένως να οδηγούν στην επίτευξη κοινών «ευρύτερων» μαθηματικών στόχων.

Μια ακόμη διαφοράτων δύο προγραμμάτων από το ισχύον είναι το γεγονός ότι αυτάδιαχωρίζουν το περιεχόμενο της γεωμετρίας σε υπό-κατηγορίες (υπό-τροχιές). Η τροχιά της γεωμετρίαςδεν παρουσιάζεταιολόκληρη αλλά χωρίζεται σε υπό-τροχιές. Το νέο Ελληνικό πρόγραμμα αρθρώνετε με βάση τέσσερις υπό-τροχιές: 1) χώρος, 2) γεωμετρικά σχήματα, 3) μετασχηματισμοί και 4) οπτικοποίηση και το πρόγραμμα της Αμερικής (CCSS) διαχωρίζει τρεις τροχιές: α) Τα γεωμετρικά σχήματα, τα συστατικά τους, οι ιδιότητές τους και η κατηγοριοποίησή τους με βάση αυτές τις ιδιότητες, β) η σύνθεση και η ανάλυση των γεωμετρικών σχημάτων, γ) οι χωρικές σχέσεις και η χωρική δομή. Με την παρουσίαση των προσδοκώμενων στόχων μέσα από την επιμέρους κατηγοριοποίηση σε υπό-τροχιές, η εξελικτική πορεία της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών γίνεται πιο σαφής και συγκεκριμένη. Επιπλέον, υπάρχει καλύτερη οργάνωση και γνώση των συλλογιστικών διαδικασιών που σχετίζονται με τα γεωμετρικά αντικείμενα.

Όσον αφορά τηνεπιλογή των υπό-τροχιών παρατηρούμε ότι το νέο Ελληνικό πρόγραμμα αφιερώνει ειδική υπό-τροχιά στο θέμα των μετασχηματισμών και της οπτικοποίησης. Ενώ το Αμερικάνικό CCSS αυτές τις δύο τροχιές δεν τις διαχωρίζει και τις εμπεριέχει μέσα στις υπόλοιπες. Αντίθετα το Αμερικάνικο πρόγραμμα διαχωρίζει ως ιδιαίτερη τροχιά το θέμα της σύνθεσης και της ανάλυσης των γεωμετρικών σχημάτων.

Μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι ο διαχωρισμός των τροχιών στο ΝΠΣγίνεται πιο αυστηρά και διαχωρισμένα. Στο πρόγραμμαCCSSαναδεικνύονται περισσότερο τα σημεία όπου οι υπό-τροχιές συναντιούνταιμέσα από τη χρήση περιγραφών και παραδειγμάτων. Θα μπορούσε δηλαδή να υποστηριχτεί ότι το πρόγραμμα CCSSδίνει μία πιο συνεκτική και άμεση παρουσίαση της ανάπτυξης των διάφορων γεωμετρικών εννοιών. Για παράδειγμα στο CCSSτονίζεται η εξάρτηση της τροχιάς του χώρου από την τροχιά των γεωμετρικών σχημάτων και των μετασχηματισμών κάτι που δεν συμβαίνει στο ΝΠΣ.

Τα δύο σύγχρονα προγράμματα λοιπόν που εξετάζουμεαναπτύσσονταιμε βάση την έννοια της τροχιάς και παρουσιάζουν πολλά κοινά στοιχεία. Μπορούμε ωστόσο, να παρατηρήσουμε ορισμένες διαφοροποιήσεις ως προς την χρονική στιγμή της εισαγωγής κάποιων γεωμετρικών εννοιών στα προγράμματα αυτά. Για παράδειγμα, η μελέτη των σχέσεων μεταξύ επίπεδων σχημάτων και στερεών σωμάτων εμφανίζεται στο ΝΠΣ του 2011 στην Α΄ τάξη, ενώ στο πρόγραμμα του CCSS εμφανίζεται στο Νηπιαγωγείο. Πιο έντονη διαφορά παρατηρείται στην περίπτωση της κατασκευής των αναπτυγμάτων των στερεών σωμάτων. Στο ΝΠΣ τα παιδιά ήδη από την Β΄ τάξη ασχολούνται με την αναγνώριση απλών αναπτυγμάτων στερεών, ενώ στο πρόγραμμα του CCSSo σχεδιασμός και η δημιουργία αναπτυγμάτων αναφέρεται σε υψηλότερο επίπεδο.

Τα δύο σύγχρονα προγράμματα είναι εμπλουτισμένα με περιεχόμενα που δεν περιέχονται το ισχύον πρόγραμμα σπουδών. Στο ισχύον πρόγραμμα σπουδών, όσον αφορά τους μετασχηματισμούς από την Α’ τάξη παρουσιάζεται η αξονική συμμετρία και στη συνέχεια επαναλαμβάνεται μονότονα και στις μεγαλύτερες τάξεις χωρίς σχεδόν και μια εξελικτική ανάπτυξη. Στα νέα προγράμματα υπάρχουν από τις μικρές τάξεις περισσότεροι μετασχηματισμοί δηλαδή εκτός από την αξονική συμμετρία υπάρχουν οι στροφές και οι μετατοπίσεις.

Είναι καινούργια επίσης και δεν υπήρχαν, εκτός από τα αναπτύγματα των στερεών σωμάτων, τα περιεχόμενα των οπτικοποιήσεων που στόχο έχουν την μεγαλύτερη ανάπτυξη και επεξεργασία των νοερών αναπαραστάσεων των γεωμετρικών σχημάτων.

Θα πρέπει να τονίσουμε βέβαια ότι στα νέα προγράμματα προτείνεται η χρήση της τεχνολογίας για τη διδασκαλία της γεωμετρίας με πολύ ουσιαστικές δραστηριότητες. Η χρήση αυτή της τεχνολογίας στη διδασκαλία της γεωμετρίας δεν υπάρχει στα υπάρχει στο υπάρχον πρόγραμμα.

Συμπεράσματα – συζήτηση

Ένα γενικό συμπέρασμα που προκύπτει για το υπάρχον πρόγραμμα της γεωμετρίας είναι ότι οδηγεί τον εκπαιδευτικό να χειριστεί τα διάφορα περιεχόμενα της γεωμετρίας αποσπασματικά και κατακερματισμένα. Παρά το γεγονός ότι έχει δομηθεί λαμβάνοντας υπόψη την εξέλιξη της γεωμετρικής σκέψης του μαθητή, ο εκπαιδευτικός στερείται μιας ολιστικής αντίληψης της ανάπτυξης των γεωμετρικών συλλογισμών των μαθητών του. Κατά συνέπεια, ενδεχομένως, ο εκπαιδευτικός να αντιμετωπίσει δυσκολίες σε διάφορους τομείς όπως: στον εντοπισμό του επιπέδου σκέψης του κάθε μαθητή, στην αντιμετώπιση των δυσκολιών των μαθητών αλλά και των αιτιών που τις δημιουργούν και τις αναπαράγουν.

Το Αμερικάνικο πρόγραμμα CCSSενσωματώνει τα σύγχρονα αποτελέσματα από το χώρο της έρευνας στη διδασκαλία των μαθηματικών και ειδικά της γεωμετρίας με αποτέλεσμα να προτείνεται ένα ανανεωμένο και αποτελεσματικό πρόγραμμα. Το νέο Ελληνικό πρόγραμμα είναι και αυτό σύγχρονο και ανανεωμένο που δείχνει ότι οι ειδικοί του χώρου είναι ενημερωμένοι και παρακολουθούν τις διεθνείς εξελίξεις της έρευνας για τη διδασκαλία της γεωμετρίας. Το πρόβλημα με το Ελληνικό πρόγραμμα σπουδών είναι η εφαρμοσημότητά του στην πράξη. Πιθανά το πρόγραμμα αυτό να μην εφαρμοστεί ποτέ και να μείνει μια άσκηση επί χάρτου, λόγω της έλλειψης συγκεκριμένου εκπαιδευτικού υλικού και σχολικών εγχειριδίων που βασίζονται σε αυτό το πρόγραμμα αλλά και της έλλειψης επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών.

Αναφορές

Clements, D. H. & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: the learning trajectory approach.* New York & London: Routledge.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6,* 81-89.

Common Core State Standards Initiative (CCSSI).(2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.

Confrey, J., Maloney, A., & Nguyen, K. (2011).*Learning over time: Learning trajectories in mathematics education.* Charlotte, NC: Information Age Publishers.

Corcoran, T., Mosher, F. A., & Rogat, A. (2009).*Learning progressions in science: An evidence based approach to reform* (Research Report No. 63). Madison, WI: Consortium for Policy Research in Education.

Daro, P., Mosher, F., & Corcoran, T. (2011).Learning trajectories in mathematics (Research Report No. 68). Madison, WI: Consortium for Policy Research in Education.

Δ.Ε.Π.Π.Σ (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, ΦΕΚ 303Β/13-3-2003.

NCTM (2006).*Curriculum focal points for prekindergarten though grade 8 mathematics: A guest for coherence*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics

NMP. (2008). *Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel. Washington D.C.*: U.S. Department of Education, Office of Planning, Evaluation and Policy Development.

Πρόγραμμα Σπουδών (2011). Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση (Δημοτικό). ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα), Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, ΕΣΠΑ 2007-2013.

Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, H. andEdgington, C. (2012).Learning Trajectory Based Instruction: Toward a Theory of Teaching. *Educational Researcher* 2012 41: 147-156.

Van Hiele P. M., & van Hiele-Geldof D., (1958).A method of initiation into geometry.In H. Freudenthal (Ed.), *Report on methods of initiation into geometry*. Groningen: Walters.

xlemon@uowm.gr

"ΠΡΟΣΕΓΓΙΖΟΝΤΑΣ ΧΩΡΙΚΕΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΙΣ ΜΙΚΡΕΣ ΗΛΙΚΙΕΣ"

Μαριάννα Τζεκάκη

Καθηγήτρια Α.Π.Θ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αν και η σημασία ανάπτυξης χωρικού και γεωμετρικού συλλογισμού με εκκίνηση από τις μικρές ηλικίες είναι παγκόσμια αναγνωρισμένη, σε πολλές χώρες και στην Ελλάδα η μαθηματική εκπαίδευση στις ηλικίες 4-8 χρόνων εξακολουθεί να επικεντρώνεται σε απλοϊκές έννοιες χώρου (όπως το μπρος – πίσω, πάνω – κάτω, μέσα – έξω, κλπ.) και στοιχειώδη αναγνώριση απλών γεωμετρικών σχημάτων.

Ήδη αρκετά χρόνια ερευνών για την ανάπτυξη χωρικής και γεωμετρικής σκέψης δίνουν στοιχεία για την ικανότητα των παιδιών να αναπτύξουν σημαντικά σχετικά νοήματα (Newcombe, 2010; Sarama, & Clements, 2009) και να τα εφαρμόσουν σε μια μεγάλη ποικιλία καθημερινών, μαθηματικών αλλά και γενικότερα επιστημονικών προσεγγίσεων. Με βάση τα στοιχεία αυτά τα σύγχρονα προγράμματα σπουδών προτείνουν τη συστηματική προσέγγιση των χωρικών και γεωμετρικών εννοιών, με κατάλληλες δραστηριότητες και υλικό από την ηλικία των 4 χρόνων (Clements, et als., 2004).

Στην παρουσίαση αυτή θα δοθούν στοιχεία από ερευνητικά αποτελέσματα σχετικά με την κατανόηση χωρικών καταστάσεων όπως και την προσέγγιση γεωμετρικών ιδιοτήτων και σχέσεων και θα παρουσιαστούν προτάσεις για τη διδακτική προσέγγιση χωρικών και γεωμετρικών δραστηριοτήτων μαζί με τα αποτελέσματα των εφαρμογών τους στις μικρές ηλικίες (Τζεκάκη, 2010).

ΧΩΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ

Η σημασία ανάπτυξης του χωρικού και γεωμετρικού συλλογισμού είναι παγκόσμια αναγνωρισμένη, αλλά η μαθηματική εκπαίδευση, αναφορικά με το περιεχόμενο αυτό, συνηθίζει ακόμα να επικεντρώνεται σε έννοιες που αναγνωρίζονται από εκπαιδευτικούς και γονείς ως 'μαθηματικές' όπως απλοϊκές έννοιες χώρου και ονομασία ή αναγνώριση γεωμετρικών σχημάτων. Σημαντικές χωρικές έννοιες και δραστηριότητες παραστασιοποίησης χωρικών καταστάσεων, όπως και γεωμετρικές καταστάσεις με ιδιότητες και σχέσεις είχαν κι έχουν ακόμα μικρή ως μηδενική παρουσία στα προγράμματα σπουδών. Στην προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία, οι μικροί μαθητές ενθαρρύνονται απλά να εμπλακούν με καθημερινές ως και συνηθισμένες έννοιες όπως «μπρος – πίσω, πάνω – κάτω, μέσα – έξω», κλπ., και αντίστοιχα με απλές ονομασίες «τρίγωνα», «τετράγωνα», ως έννοιες εισαγωγής στις χωρικές και γεωμετρικές έννοιες.

Ήδη από αρκετά χρόνια, η παραδοσιακή ενότητα της γεωμετρίας στη μαθηματική εκπαίδευση διευρύνθηκε σε τρεις τουλάχιστον άξονες που αποκτούν μεγάλη σημασία στην νοητική ανάπτυξη των ατόμων: τον χωρικό συλλογισμό, το γεωμετρικό συλλογισμό και τον οπτικοποιημένο συλλογισμό.

Αρχικά αποσαφηνίζεται ότι η χρήση του όρου «συλλογισμός» υποδηλώνει την ανάπτυξη ενός τρόπου σκέψης και επεξεργασίας, και όχι απλά εννοιών και διαδικασιών. Συγκεκριμένα στην ενότητα του *χωρικού συλλογισμού* εντάσσεται μια επεξεργασία που εμπλέκει τοποθετήσεις και κινήσεις στο χώρο με τις αντίστοιχες αναπαραστάσεις τους, μέσα από κατάλληλες εμπειρίες που αναπτύσσουν όχι μόνο έννοιες, αλλά και μέσα και διαδικασίες (National Research Council, 2006). Η σημασία του χωρικού συλλογισμού συνδέεται και με την αναγνώριση της χωρικής ως μια ιδιαίτερης διάστασης της νοημοσύνης (Gardner, 1989) που υποστηρίζει τις χωρικές ικανότητες των ατόμων.

Αντίστοιχα η ενότητα του *γεωμετρικού συλλογισμού* σχετίζεται με την αντίληψη και οργάνωση του χώρου στη βάση ενός γεωμετρικού μοντέλου, που αφορά το πέρασμα από μια ολιστική αίσθηση μορφών και σχέσεων σε μια αναλυτικο-συνθετική αντίληψη γεωμετρικών σχημάτων και τη σύνδεση της οπτικής, λεκτικής και πιο αφηρημένης τους διάστασης. Ειδικότερα η ανάπτυξη αυτή περιλαμβάνει την

αναγνώριση, περιγραφή και ανάλυση των μορφών, των ιδιοτήτων και των σχέσεων των γεωμετρικών σχημάτων (επιπέδων και στερεών), την ανάλυση και σύνθεση ή ανασύνθεση σε άλλα σχήματα όπως και τους γεωμετρικούς τους μετασχηματισμούς (μετατοπίσεις, στροφές και συμμετρίες) (Samara, & Clements, 2009).

Τέλος η ενότητα του *οπτικοποιημένου συλλογισμού* εμπλέκεται στη δημιουργία και επεξεργασία νοερών εικόνων και αναπαραστάσεων για αντικείμενα του χώρου, ευλυγισία στην αλλαγή οπτικών γωνιών, χωρική μνήμη και γενικότερα νοερή επεξεργασία χωρικής πληροφορίας σχήματος, θέσης, διεύθυνσης αντικειμένων ή καταστάσεων (Presmeg, 2006).

Τα προγράμματα σπουδών διεθνώς αναγνωρίζουν το ρόλο των παραπάνω συλλογισμών σε μεγάλο μέρος καθημερινών αλλά και επιστημονικών προσεγγίσεων, όπως και τη σύνδεση τους με το γενικότερο μαθηματικό συλλογισμό. Έννοιες χώρου και γεωμετρικές έννοιες εμπλέκονται συχνά στην καθημερινή δράση του ατόμου, εντοπίζονται σε πολλές προσεγγίσεις στην τέχνη ή την τεχνολογία ή άλλες επιστημονικές κατανοήσεις. Αντίστοιχα πολλές διαδικασίες στα Μαθηματικά, από τη λύση προβλημάτων, τη δημιουργία μοντέλων, την κατανόηση σχημάτων, διαγραμμάτων ή άλλων παραστάσεων με χωρικά ή γεωμετρικά χαρακτηριστικά, ως τις αριθμητικές ή αλγεβρικές έννοιες στηρίζονται στην ανεπτυγμένη αντίληψη χωρικών και γεωμετρικών ιδιοτήτων και σχέσεων (Newcombe, 2010; Sarama, & Clements, 2009). Όμοια, η οπτικοποίηση αποκτά τα τελευταία χρόνια ιδιαίτερη σημασία γιατί εκτός από το γεγονός ότι μεγάλο μέρος της χωρικής, γεωμετρικής και γενικότερα μαθηματικής δραστηριότητας στηρίζεται στην ανάπτυξη και επεξεργασία νοερών αναπαραστάσεων και συμβολικών εικόνων, η καθημερινότητα επίσης εμπλέκει, και με τη διαμεσολάβηση της τεχνολογίας και των ψηφιακών μέσων, μεγάλης έκτασης ερμηνεία και να κατανόηση εικόνων, εικονομορφικών συμβόλων και διαφορετικών μορφών παραστάσεις αντικειμένων ή καταστάσεων.

Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι οι υψηλές χωρικές και γεωμετρικές ικανότητες συνδέονται επίσης με τις υψηλές επιδόσεις στα Μαθηματικά, ενώ αντίστοιχα οι σχετικές ελλείψεις αποδίδονται στη ελλιπή εκπαίδευση από τις μικρότερες ηλικίες (Levine, et als., 1999).

Συστηματικές ερευνητικές αναζητήσεις επιβεβαιώνουν ότι οι αδυναμίες στο χωρικό και γεωμετρικό συλλογισμό των ενηλίκων συνδέεται με την ελλιπή ή μη συστηματική σύνδεση των αυθόρμητων αισθητικοκινητικών εμπειριών με πιο γενικευμένα χωρικά και γεωμετρικά πλαίσια (Berthelot, & Salin, 1998).

Με βάση τα στοιχεία αυτά τα σύγχρονα προγράμματα σπουδών προτείνουν την ανάπτυξη χωρικού, γεωμετρικού και οπτικοποιημένου συλλογισμού και κάνουν ενδιαφέρουσες διδακτικές προτάσεις για την καλλιέργεια των αντίστοιχων χωρικών και γεωμετρικών όπως και δεξιοτήτων οπτικοποίησης (Clements, 2004). Ειδικότερα, για τον χωρικό συλλογισμό επιδιώκεται να ενθαρυνθούν μέσα από κατάλληλες για κάθε ηλικία δραστηριότητες, η σύνδεση των αυθόρμητων χωρικών και γεωμετρικών νοημάτων με πιο συστηματικές χρήσεις της χωρικής και γεωμετρικής πληροφορίας, με συστηματικές γνώσεις για τις χωρικές και γεωμετρικές ιδιότητες και σχέσεις των αντικειμένων, με την αντιστοίχιση χώρων και συστατικών χώρων και αντικειμένων διαφορετικών μεγεθών, την ενθάρρυνση ικανοτήτων χρήσης αλλά και δημιουργίας χωρικών και γεωμετρικών αναπαραστάσεων (όπως πχ. σχημάτων, αναπτυγμάτων και χαρτών), όπως και νοερών χωρικών και γεωμετρικών μετασχηματισμών. Οι προσεγγίσεις αυτές αντιμετωπίζουν το χώρο στις διαφορετικές του διαστάσεις (μικρο- μέσο και μάκρο-χώρος) οι οποίες διαφοροποιούν τον τρόπο αντίληψης και διαχείρισης των σχετικών εννοιών (Brousseau, 1997).

Στο πρόγραμμα σπουδών που αναπτύχθηκε το 2011 τα παραπάνω στοιχεία εντάχθηκαν στο σκέλος της θεματικής *Χώρος και Γεωμετρικές Έννοιες*, μίας από τις τρεις ενότητες του προγράμματος των Μαθηματικών από το νηπιαγωγείο ως την Γ' Γυμνασίου. Το περιεχόμενο της κινείται στους άξονες της προηγούμενης παραγράφου, που εισάγονται για πρώτη φορά σε ελληνικό πρόγραμμα σπουδών (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011), δίνοντας ενδιαφέρουσες δραστηριότητες εφαρμογής.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Χωρικός συλλογισμός

Η μαθηματική εκπαίδευση για το χώρο και τις γεωμετρικές έννοιες βασίστηκε επί πολλές δεκαετίες στο «*τοπολογικό προηγούμενο*» των θέσεων του Piaget που παρουσιάζει μια ιεραρχική ανάπτυξη των σχετικών εννοιών (τοπολογικές, προβολικές και ευκλείδειες και μετρικές), δίνοντας την αντίστοιχη διαδοχή και στη διδακτική τους προσέγγιση. Μεταγενέστερες έρευνες αμφισβήτησαν τη διαδοχή αυτή και επιβεβαίωσαν ότι τα μικρά παιδιά χρησιμοποιούν πολλές από τις παραπάνω προσεγγίσεις για την αντιμετώπιση χωρικών και γεωμετρικών καταστάσεων (Newcomb, & Huttenlocher, 2000). Αναφορικά μάλιστα με τη δυνατότητα ανάπτυξης συστηματικών εμπειριών για την αντίληψη και την επεξεργασία των καταστάσεων που σχετίζονται με το χώρο, τη γεωμετρία και την οπτικοποίηση στις μικρές ηλικίες τα ερευνητικά αποτελέσματα είναι ιδιαίτερα ενθαρρυντικά (Kersh, et als., 2008; Clements, 2004).

Ειδικά σχετικά με τις *χωρικές έννοιες*, έρευνες ήδη από τη δεκαετία του '90 (Owens, 1992), μελέτησαν την ικανότητα του παιδιού για χωρική κωδικοποίηση αναφορικά με τον εντοπισμό θέσης σε σχέση με εξωτερικά συστήματα αναφοράς, ιεραρχικό συνδυασμό των χωρικών πληροφοριών, όπως και απομνημόνευση χωρικών δεδομένων (Noelting, 1979). Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τα παιδιά 5-6 χρόνων, με την κατάλληλη εκπαίδευση, μπορούν να αναπτύξουν σημαντικές χωρικές ικανότητες (Newcombe, & Huttenlocher, 2000) για τις οποίες καταγράφεται μια πορεία ανάπτυξης σε τέσσερα στάδια: από την *γενικότερη αντίληψη* του τρισδιάστατου χώρου και τη χρήση σχημάτων ή σχεδίων για την απόδοση χωρικής πληροφορίας (στάδια 1 και 2) στην πιο *ολοκληρωμένη χρήση συμβολικών συστημάτων* και μαθηματικών *γεωμετρικών μοντέλων* (στάδια 3 και 4). Τα παραπάνω είναι δυνατό να αναπτυχθούν στο βαθμό που, από τις μικρότερες ηλικίες, προτείνονται κατάλληλες βιωματικές εμπειρίες όπου τα παιδιά δρουν και κινούνται στο χώρο, καταγράφουν ορόσημα και προσανατολισμούς και ενθαρρύνονται να «εικονοποιήσουν» αυτή τη δράση και να μετατρέψουν τους κιναισθητικούς χωρικούς χειρισμούς στα αντικείμενα ή τις αναπαραστάσεις τους σε πιο συστηματικές προσεγγίσεις (Battista, & Clements, 1996). Τα στοιχεία αυτά

επιβεβαιώσαμε στη χώρα μας με έρευνες σε καταστάσεις τοποθέτησης (Ikonomou & Tzekaki, 2009) και προσανατολισμού στο χώρο (Kliapis & Tzekaki, 2011), όπως και προσανατολισμό στη βάση πραγματικών και ψηφιακών χαρτών (Καλμπουρτζής, Τζεκάκη, Βρύσης, 2014).

Συγκεκριμένα στην έρευνα που πραγματοποιήσαμε σε καταστάσεις τοποθέτησης σε οργανωμένα περιβάλλοντα (Ikonomou & Tzekaki, 2009) διερευνήθηκε η ικανότητα των παιδιών ηλικίας 4-6 χρόνων να τοποθετούν υλικό σε τετραγωνισμένες βάσεις LEGO, σε έργα που κλιμακώνονταν σε δυσκολία σε σχέση με τον αριθμό κομματιών, την οριζόντια ή κατακόρυφη τοποθέτηση, τη συγγραμμικότητα, τις αμοιβαίες αποστάσεις, κ.ά. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τα πιο μικρά παιδιά των ηλικιών αυτών είναι σε θέση να κάνουν, αρχικά, ολιστικές προσεγγίσεις των καταστάσεων με μερική επεξεργασία των χωρικών πληροφοριών, αλλά τα μεγαλύτερα πετυχαίνουν να ελέγχουν περισσότερες πληροφορίες, ενώ τα 6χρονα σχεδόν όλα τα εμπλεκόμενα στοιχεία. Επιπλέον, με τις κατάλληλες διδακτικές παρεμβάσεις σε αντίστοιχα έργα όλα τα παιδιά βελτιώνουν σημαντικά αυτές τις χωρικές επιδόσεις.

Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώθηκε και σε μεταγενέστερη έρευνα, όπου διερευνήθηκε η ανάπτυξη χωρικών στρατηγικών με διδακτική ανάπτυξη χωρικών έργων που περιελάμβανε συστηματική δραστηριότητα με παιχνίδια και τεχνολογία (όπως φωτογράφιση στο χώρο, προβλήματα τοποθέτησης, προβολικά προβλήματα, προβλήματα περιστροφής κλπ., Kliapis & Tzekaki, 2011). Τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής έδειξαν ότι τα παιδιά αναπτύσσουν αλλά και προσαρμόζουν ενδιαφέρουσες στρατηγικές αντιμετώπισης των καταστάσεων αυτών. Ωστόσο για την ανάπτυξη αυτή τους χρειάζονται ενδιαφέρουσες εμπειρίες με προκλητικά όπως πλούσιο περιβάλλον, όπως αυτά που προτάθηκαν.

Αντίστοιχες δράσεις περιλάμβανε η έρευνα για τον προσανατολισμό με τη χρήση πραγματικών και ψηφιακών χαρτών (Καλμπουρτζής, Τζεκάκη, & Βρύσης, 2014). Η έρευνα για την ανάγνωση και δημιουργία χαρτών καταγράφει αρκετές δυσκολίες τόσο στα μικρά παιδιά όσο και στους ενήλικες, καθώς τα άτομα δεν δημιουργούν μια πραγματική νοερή αναπαράσταση του χώρου αλλά μια

ιδιοσυγκρασιακή προσέγγιση που σχετίζεται με βιώματα, τοπία, διαδρομές και άλλες χωρικές εμπειρίες (Liben & Yekel, 1996). Οι ερευνητικές διδακτικές προσπάθειες για μια βαθμιαία προσέγγιση της χρήσης χαρτών, έδειξε ότι τελικά οι μαθητές μαθαίνουν να αναγνωρίζουν και να ανακατασκευάζουν τοποθετήσεις αλλά για το αποτέλεσμα αυτό χρειάζονται συστηματικές και μακροχρόνιες προσπάθειες (Jovignot, 1995).

Στις έρευνες που πραγματοποιήσαμε τόσο σε παιδιά προσχολικής ηλικίας όσο και σε παιδιά του δημοτικού με χρήση πραγματικών και ψηφιακών χαρτών στο πλαίσιο δραστηριότητας προσανατολισμού για την εύρεση μιας θέσης, εντοπίστηκαν αρχικές δυσκολίες οι οποίες μοιάζουν να βελτιώνονται γρήγορα, τόσο στα μικρότερα όσο και στα μεγαλύτερα παιδιά, ειδικά λόγω της χρήσης περιβαλλόντων υψηλής τεχνολογίας (tablet και ψηφιακοί πίνακες) και ανάπτυξη ενδιαφέροντος για παιχνίδια εύρεσης θησαυρού.

Γεωμετρικός συλλογισμός

Τα ευρήματα σχετικά με την ανάπτυξη γεωμετρικού συλλογισμού είναι πολλά και συγκεντρώνονται πολλές δεκαετίες. Αρχικά, σχετικά με την αναγνώριση γεωμετρικών σχημάτων, οι έρευνες των Van-Hiele (1986) κατέδειξαν ότι η γεωμετρική σκέψη ακολουθεί στάδια που είναι διαφορετικά από ότι είχε υποστηρίξει η πιαζετιανή υπόθεση (όπως αναφέρθηκε προηγούμενα) και ότι το πέρασμα από το ένα στάδιο στο άλλο δεν είναι ηλικιακό αλλά συνδεδεμένο με την εμπειρία και τον τρόπο διδακτικής προσέγγισης. Η διερεύνηση των γνώσεων των παιδιών σε σχέση με τα σχήματα έδειξε μια σύνδεση με το είδος του σχήματος, την τοποθέτηση του ή την οικειότητα ως προς τα υποκείμενα. Τα μικρά παιδιά αναγνωρίζουν αρχικά μερικά σχήματα κυρίως ολιστικά και χωρίς να μπορούν να δώσουν για αυτά εξηγήσεις, αντιστοιχώντας ουσιαστικά με ένα πρότυπο (Battista, et als., 1998). Έρευνες από διάφορες χώρες (Wu&Ma, 2005; Clements, 2004; Klein, Starkey, & Wakely, 1999) δείχνουν ότι περίπου το 92-95% των παιδιών μπορούν να αναγνωρίσουν τον κύκλο, με δεύτερο το τετράγωνο, 82-91% το τρίγωνο και τέλος 58-60% το ορθογώνιο, χωρίς όμως να μπορούν εξηγήσουν ή να παρουσιάσουν ιδιότητες.

Παράγοντες όπως η οικειότητα με το σχήμα, ο προσανατολισμός ή η ιδιαίτερη μορφή του σχήματος φαίνεται να αλλάζουν τα αποτελέσματα αυτά. Γενικότερα τα στερεοτυπικά σχήματα κυριαρχούν στις αναπαραστάσεις των παιδιών, αρχίζοντας από την πρώτη ηλικία και συνεχίζοντας μεταγενέστερα. Είναι σαφές ότι τα παιδιά βλέπουν συγκεκριμένα και πρακτικά αντικείμενα με γεωμετρικές μορφές αλλά δεν τα μετασχηματίζουν άμεσα σε γεωμετρικές έννοιες ή δεν αντιλαμβάνονται σε αυτά γεωμετρικά χαρακτηριστικά τα οποία χρειάζονται να αναδειχθούν μέσα από κατάλληλες δράσεις (Τζεκάκη, 2007).

Επίσης αν και τα παιδιά αναγνωρίζουν χωρίς δυσκολία τις γενικές κατηγορίες σχημάτων, δεν διαχωρίζουν με την ίδια ευκολία τα σχήματα της ίδιας κατηγορίας, κυρίως τρίγωνα και τετράπλευρα. Μάλιστα όταν τα μεγέθη ή γωνίες τροποποιηθούν σημαντικά από τα πρωτοτυπικά σχήματα, τα αρχικά σχήματα δεν είναι ποια αναγνωρίσιμα (Levenson, Tirosh, & Tsamir, 2011).

Γενικά τα παιδιά δεν αναγνωρίζουν στα αντικείμενα γεωμετρικά χαρακτηριστικά, αν και είναι σε θέση να ανακατασκευάσουν κάποια από αυτά, το κάνουν κυρίως κιναισθητικά και δεν οδηγούνται στην αναγνώριση γεωμετρικών ιδιοτήτων, καθώς αναγνωρίζουν δράσεις αλλά όχι συγκεκριμένες ιδιότητες (Lampen, & Murray, 2001). Τα ευρήματα αυτά οδηγούν στην ανάγκη ενασχόλησης των παιδιών με κατασκευές που να τους επιτρέπουν να προσεγγίσουν διαφορετικές ιδιότητες των αντικειμένων που μέσα από τις συζητήσεις να τους επιτρέψουν να συστηματοποιήσουν αυτές τις δράσεις. Τα αντίστοιχα ισχύουν για τις αναλύσεις και συνθέσεις των σχημάτων όπως και τους μετασχηματισμούς τους.

Σε σχετική έρευνα για την ανάπτυξη γεωμετρικού συλλογισμού σε νήπια (Παπαδοπούλου, 2014) με δραστηριότητες που ενέπλεξαν τα παιδιά σε κατηγοριοποιήσεις σχημάτων της ίδιας μορφής, σε κατασκευές σχημάτων, σε συστηματικές αναλύσεις και συνθέσεις σχημάτων, με ποικιλίες σχημάτων σε διαφορετικές θέσεις, μεγέθη και προσανατολισμούς, αλλά και συστηματικές συζητήσεις πάνω σε ιδιότητες και σχεσεις, επιβεβαιώνουν την ικανότητα εξέλιξης της γεωμετρικής σκέψης με την κατάλληλη διδακτική παρέμβαση ακόμα και στις πιο μικρές ηλικίες.

Συνοψίζοντας, οι έρευνες για το έναρξη ανάπτυξης του γεωμετρικού συλλογισμού αποδεικνύουν ότι οι μαθητές είναι σε θέση να αναγνωρίσουν μορφές και σχήματα, να διακρίνουν κάποιες ιδιότητες, να αναλύσουν ή να συνθέσουν μορφές και να μετασχηματίσουν σχήματα. Ωστόσο χωρίς τα κατάλληλα έργα παραμένουν σε μια μάλλον ολιστική ή αισθιοκινητική αντίληψη για τα γεωμετρικά αντικείμενα και σχέσεις, και δεν αναπτύσσουν τις απαραίτητες γεωμετρικές κατανοήσεις, παραμένοντας γεωμετρικά ελλιπείς ακόμα και στην ενήλικη ζωή τους (Clements, 2004).

Οπτικοποιημένος συλλογισμός

Ο οπτικοποιημένος συλλογισμός (*οπτικοποίηση* ή *οπτικοποιημένη σκέψη)* συνδέεται στενά τόσο με το χωρικό όσο και με το γεωμετρικό συλλογισμό. Τα παιδιά σχηματίζουν οπτική πληροφορία από την επαφή τους με το χώρο και τα αντικείμενα μέσα σε αυτόν που απεικονίζουν, αρχικά, σε απλές και στη συνέχεια πιο σύνθετες και δυναμικές νοερές εικόνες. Η οπτικοποιημένη σκέψη (μια σκέψη δηλαδή μέσω οπτικών εικόνων) αποτελεί την νοητική επεξεργασία για την παραγωγή και το χειρισμό αυτών των εικονοποιημένων καταστάσεων που περιλαμβάνει τουλάχιστον σε δύο κατηγορίες δράσεων (Gutierez, 1996): την *κατανόηση διαφορετικών μορφών αναπαραστάσεων* και τη δημιουργία και επεξεργασία (πχ. μετασχηματισμό ή στροφή) *νοερών εικόνων* για αντικείμενα και καταστάσεις (γεωμετρικές ή άλλες χωρικές). Στην πρώτη περίπτωση επιδιώκεται το παιδί να κατανοήσει εικόνες, σχήματα, σχέδια ή σχηματισμούς που παρουσιάζουν μια κατάσταση με διάφορα μέσα (χαρτί, υλικό, τετραγωνισμένο περιβάλλον, οθόνη Η/Υ) όπως και τα φυσικά αντικείμενα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για αυτή την παρουσίαση (τρισδιάστατα μοντέλα κλπ.). Στη δεύτερη επιδιώκεται το παιδί να δημιουργήσει και να επεξεργαστεί μέσα στο μυαλό του εικόνες για αυτά που βλέπει.

Τα ερευνητικά ευρήματα για την αντίληψη των παραστάσεων ξεκινούν επίσης από τις θέσεις τους Piaget για την καθυστερημένη ανάπτυξη των προβολικών ιδιοτήτων που εμποδίζει το παιδί να αντιληφθεί τις διαφορετικές οπτικές γωνίες στα τρισδιάστατα αντικείμενα ως σύνολο από πιθανές διαφορετικές όψεις. Μεταγενέστερες και πάλι έρευνες

αναθεώρησαν τις θέσεις αυτές και κατέδειξαν την ικανότητα των παιδιών, ήδη από την προσχολική ηλικία, να αντιλαμβάνονται τις διαφορετικές οπτικές γωνίες σε οικείες καταστάσεις από σχετικές εμπειρίες εικονοποίησης (Battista, & Clements, 1996). Τα ευρήματα υπογραμμίζουν ότι η αντίληψη αυτή περνάει από συστηματικές επεξεργασίες σε βάθος χρόνου, όπου τα παιδιά αρχίζουν να αντιλαμβάνονται τα τρισδιάστατα αντικείμενα ως *σύνολο από εικόνες*, χωρίς επίγνωση των όψεων, αργότερα προσεγγίζουν την οπτική γωνία και στο τέλος μόνο καταφέρνουν να *συνδυάσουν τις διαφορετικές τους όψεις*.

Η έλλειψη αντίληψης των όψεων των αντικειμένων, που είναι αποτέλεσμα μιας ελλιπούς άσκησης και σχετικών εμπειριών, ακολουθεί το άτομο και στην ενήλικη ζωή του, όπως δείχνουν έρευνες με περιστροφές αντικειμένων ή παραστάσεις τρισδιάστατων αντικειμένων σε μεγαλύτερες ηλικίες (Gutierez, 1996; Copelman & Vinner, 1994; Morss, 1987). Επισημαίνεται ότι οι παραστάσεις των χωρικών και των γεωμετρικών εννοιών παρουσιάζουν μέρος της ιδέας που περιγράφουν, αλλά οι μαθητές όπως και οι ενήλικες περιορίζονται να αντιλαμβάνονται ότι 'βλέπουν' χωρίς να αποκτούν άμεσα μια δυναμική αντίληψη των παραστάσεων αυτών (Duval, 1995).

Γενικότερα μια πραγματική ή μια νοερή εικόνα είναι μια αφηρημένη κατασκευή, άρα έχει σημαντικό διδακτικό ενδιαφέρον να δημιουργούν τα παιδιά δυναμικές εικόνες σύγκρισης σχημάτων ή γενικότερα αναπαραστάσεων μέσα από κατάλληλες δράσεις (Samara & Clements, 2009). Οι δυναμικές νοερές αναπαραστάσεις είναι απαραίτητες για την αντίληψη των χωρικών, γεωμετρικών και γενικότερα κινητικών εμπειριών και τα παιδιά χρειάζονται επίσης δυναμικές νοερές εικόνες των σχημάτων ώστε να μπορούν να τα μετασχηματίσουν, περιστρέψουν, αντιστρέψουν ή μεγεθύνουν για τις ανάγκες μιας γεωμετρικής κατασκευής.

Τα ευρήματα αυτά χρειάζεται αρχικά να προβληματίσουν τον εκπαιδευτικό ως προς το τι 'βλέπει' το παιδί στις αναπαραστάσεις χωρικών ή γεωμετρικών καταστάσεων και τι ερμηνεύει σε μια εικονιστική πληροφορία (Parzysz, 1988). Διδακτική συνέπεια με τελικό σκοπό την απόκτηση οπτικής ευλυγισίας είναι η ανάγκη ενασχόλησης των παιδιών με συστηματικές 'εικονοποιήσεις'

καταστάσεων, δράσης αλλαγής οπτικών γωνιών και μεταφοράς από την εικόνα στην πραγματικότητα και το αντίστροφο. Διδακτικές παρεμβάσεις με δραστηριότητες που ενισχύουν τη δημιουργία εσωτερικών αναπαραστάσεων (αναγνωρίζω με την αφή, βλέπω και θυμάμαι, συνθέτων και κατασκευάζω τρισδιάστατων σχήματα, βρίσκω τους πιθανούς συνδυασμούς σχημάτων, κ.ά). βελτιώνουν την δυναμική των νοερών εικόνων των παιδιών (Τζεκάκη, 2010; Casey et als., 2009).

Τα στοιχεία αυτά επιβεβαιώθηκαν σπό έρευνα που διερευνούσε την ικανότητα των παιδιών στην αντίληψη χωρικών καταστάσεων και *ζητήματα οπτικοποίησης* και αναπαράστασης, όπως και η δυνατότητα βελτίωσης τους με τη βοήθεια μιας διδακτικής παρέμβασης (Παπαντωνίου, & Τζεκάκη, 2009). Η σύντομη διδακτική παρέμβαση επέτρεψε βελτιώσεις των παιδιών 5-6 χρόνων στην αντίληση οπτικών γωνιών, αλλά και στην αντίληψη της προοπτικής όπως και στο σχεδιασμό πραγματικών χωρικών καταστάσεων σε ποσοστό που ξεπερνούσε το 50%, ειδικά στην προοπτική και το σχεδιασμό.

Αντίστοιχα στοιχεία επιβεβαιώθηκαν σε έρευνα μελέτης της σημειωτικής δραστηριότητας αναφορικά με παράσταση χωρικών σχέσεων (Χριστοδούλου, 2007). Τα παιδιά αναπαριστούσαν γραφικά σχηματισμούς σε πλάκες LEGO και επέλεγαν την αναπαράσταση, για κάθε έργο, η οποία αποτελούσε κατά την γνώμη τους την 'αντιπροσωπευτικότερη' παρουσίαση της κατάστασης. Τα αποτελέσματα έδειξαν την ικανότητα των παιδιών να προσεγγίζουν και να αναπαριστούν λεπτομερή στοιχεία χωρικών σχηματισμών σε μια πορεία βελτίωσης.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Τα αποτέλεσμα των μελετών αυτών επιβεβαιώνουν ότι η ανάπτυξη χωρικών, γεωμετρικών και οπτικοποιημένων εννοιών δεν είναι αυτονόητη ούτε εξελίσσεται από μόνη της ή με βάση την ηλικία. Χωρίς τις κατάλληλες εμπειρίες και τις σχετικές δραστηριότητες σε κατάλληλα περιβάλλοντα το άτομο δεν επεξεργάζεται τις καθημερινές εμπειρίες τους ώστε να ολοκληρώσει τις χωρικές, γεωμετρικές και εμπειρίες οπτικοποίησης (Berthlot & Salin, 1998). Αντίθετα απαιτείται συστηματική κι οργανωμένη ενασχόληση μέσα από κατάλληλες

διδακτικές παρεμβάσεις που σχετίζονται με τον προσανατολισμό στο χώρο, τα αποτελέσματα των χωρικών μετασχηματισμών, τη χωρική οπτικοποίηση παράλληλα με την προσέγγιση διαφόρων ιδιοτήτων και σχέσεων των γεωμετρικών αντικειμένων με κατασκευές, αναλύσεις και συνθέσεις.

Υπάρχει μεγάλος αριθμός διδακτικών προτάσεων που μπορούν να εφαρμοστούν και να υποστηρίξουν την ανάπτυξη του χωρικού , γεωμετρικού και οπτικοποιημένου συλλογισμού στις ηλικίες 5- 8 χρόνων (Tzekaki, 2014; Τζεκάκη, 2010; Sarama & Clements, 2009). Καταγράφονται οι ακόλουθοι βασικοί άξονες των προτάσεων αυτών:

(1) Εφαρμογή δραστηριοτήτων που οδηγούν τα παιδιά να *προσανατολίζονται με μια ποικιλία συστημάτων αναφοράς* που κινείται βαθμιαία από τα αλλοκεντρικά στα πιο γενικευμένα, και σε οργανωμένα και μη περιβάλλοντα. Στις δραστηριότητες αυτές τα παιδιά πραγματοποιούν χωρικές διευθετήσεις, εντοπίζουν θέσεις στο χώρο, κινούνται και κινούν αντικείμενα στη βάση οδηγιών ή επιλογών για την εύρεση αντικειμένων ή θέσεων σε απλά ή σε τετραγωνισμένα περιβάλλοντα (πλακοστρωμένα δάπεδα, σκακιέρες, πλάκες lego ή μοντεσοριανές, γεωπλάνα, τετραγωνισμένα χαρτιά κλπ.). Με τις δράσεις αυτές κατανοούν, οργανώνουν και δομούν βαθμιαία τον ενιαίο χώρο, εισάγοντας και οριζόντιες ή κατακόρυφες διευθύνσεις που οδηγούν στις επικαλύψεις με συστηματικό υλικό ή στις συντεταγμένες.

(2) Εφαρμογή δραστηριοτήτων *χρήσης και βαθμιαίας κατανόησης χαρτών*. Στις δραστηριότητες αυτές τα παιδιά συγκρίνουν χάρτες (εικονικούς, πραγματικούς και ψηφιακούς) με τις καταστάσεις που παριστάνουν, προσανατολίζονται με τη βοήθεια τους και εντοπίζουν θέσεις και διαδρομές.

(3) Εφαρμογή δραστηριοτήτων όπου τα παιδιά οδηγούνται από τις πιο απλές στις πιο σύνθετες μορφές *αναγνώρισης και ονομασίας επιπέδων και στερεών σχημάτων*, σε μια ποικιλία σχημάτων, μεγεθών και προσανατολισμών, διαχωρίζουν τα μέρη των σχημάτων και *προσεγγίζουν κάποιες ιδιότητες και σχέσεις*, αρχικά πιο γενικές και στη συνέχει πιο ειδικές όπως ισότητες, γωνίες, πλευρές, κ.ά., διακρίνουν βαθμιαία *ειδικές κατηγορίες σχημάτων* στο εσωτερικό μιας μορφής (πχ. ορθογώνια και μ, τρίγωνα κλπ). *κατασκευάζουν* αρχικά αισθησιοκινητικά με περιγραφή ιδιοτήτων, στη συνέχεια με βάση

κάποιες βασικές ιδιότητες και τελικά με όλες τις ιδιότητες, *αναλύουν και συνθέτουν* για δημιουργήσουν νέα σχήματα και σχηματισμούς.

(4) Εφαρμογή δραστηριοτήτων μελέτης χωρικών και γεωμετρικών ιδιοτήτων *σε πραγματικά, εικονικά και ψηφιακά περιβάλλοντα* και πέρασμα από το πραγματικό στο αναπαραστατικό περιβάλλον. Στις δραστηριότητες αυτές τα παιδιά απεικονίζουν και συγκρίνουν το χώρο και τα αντικείμενα του ή σχήματα σε φωτογραφίες και σχέδια και αντίστροφα αναγνωρίζουν χωρικές και γεωμετρικές καταστάσεις μέσα από τις παραστάσεις τους. Παρατηρούν οπτικές γωνίες, όψεις, προβολές και προοπτικές, βελτιώνοντας την οπτική αναγνώριση και την οπτική τους ευλυγισία.

Οι περισσότερες από τις παραπάνω δραστηριότητες αυτές έχουν εφαρμοστεί με σημαντική επιτυχία σε παιδιά ηλικίας 5-8 χρόνων που βελτίωσαν την αντίληψη των χωρικών και γεωμετρικών ιδιοτήτων και σχέσεων, όπως και τις ικανότητες οπτικοποίησης χωρικών και γεωμετρικών καταστάσεων, όπως παρουσιάστηκε συνοπτικά στις προηγούμενες έρευνες.

Γενικότερα, η συστηματική και οργανωμένη ενασχόληση των παιδιών μέσα από κατάλληλες διδακτικές παρεμβάσεις και πλούσιες δραστηριότητες που ανταποκρίνονται στο επίπεδο σκέψης τους και τους κινεί το ενδιαφέρον, βελτιώνει τις χωρικές και γεωμετρικές τους ικανότητες δημιουργώντας αυτό που αποκαλείται «*χωρικό και γεωμετρικό απόθεμα*», το οποίο μπορεί βαθμιαία να οδηγήσει σε πιο επεξεργασμένες επιστημονικές ή ειδικότερα μαθηματικές μορφές. Παράλληλα ενισχύει την ικανότητα για οπτικές αναπαραστάσεις και επεξεργασίες.

Κλείνοντας αξίζει να σημειωθεί ότι στη θεματική του *χώρου και της γεωμετρίας*, τα ερευνητικά αποτελέσματα και οι προτάσεις που τα συνοδεύουν είναι πολλές και τεκμηριωμένες, ωστόσο η γενίκευση της εφαρμογής τους σε όλη την προσχολική και πρώτη σχολική μαθηματική εκπαίδευση με τα αναμενόμενα θετικά αποτελέσματα αποτελεί ένα διαρκές ζητούμενο.

ΒΙΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K.,& Borrow, C. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*: 503-532.

Battista, M. T., & Clements, D. H. (1996). Students' Understanding of Three-Dimensional Rectangular Arrays of Cubes. *Journal for Research in Mathematics Education, 27(3)*: 258-292.

Berthelot, R., & Salin, M. H. (1998). The role of pupils' spatial knowledge in the elementary teaching of geometry. In C. Mammana & V. Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMI Study,* pp. 71- 77. Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers.

Casey, M.B., Andrews, N., Schindler, H., Kersh, J.E., Samper, A. & Copley, J. (2009). The development of spatial skills through interventions involving block building activities. *Cognition and Instruction, Volume 26, issue 3:* 269-309

Clements, D. H. (2004). Geometric and Spatial Thinking in Early Childhood Education. In D. H. Clements, J. Sarama, & A.M. DiBiase (eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education,* pp. 267-297. Lawrence Erlbaum.

Clements, D. H., Sarama, J., & DiBiase, A.M. (eds.) (2004). *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Lawrence Erlbaum.

Copelman, E., & Vinner, S. (1994). Visualization and reasoning about lines in space. School and beyond. In J. P. daPonte & J. F. Matos (eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 97-104. Lisbon: University of Lisbon, Portugal.

Duval, R. (1995). *Semiosis et pensee humaine*. Peter Lang, Berne.

Gardner, H. (1989). Educational Implications of the Theory of Multiple Intelligences. *Educational Researcher***,** vol. 18 *no. 8*: 4-10.

Gutierez, A. (1996). Visualization in 3- Dimensional Geometry: In Search of a Framework. In L. Puig & A. Gutierez (eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 3-20. Valencia: University of Valencia, Spain.

Jovignot, F. (1995). Can 5-6 Year Old Children Orientate Themselves in a Cave? *Scientific Journal of Orienteering*, v11(2): 64-75.

Ikonomou, A., & Tzekaki, M. (2009). Investigating spatial development in early childhood. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M., & Sakonidis, H. (eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education*, Vol. 5, pp. 241-248. Thessaloniki, Greece: PME.

Καλμπουρτζής, Γ, Τζεκάκη, Μ., & Βρύσης, Λ. (2014). Η αναζήτηση του Δασοκούνελου: Η επίδραση ενός ηλεκτρονικού παιχνιδιού με σύγχρονα περιβάλλοντα διεπαφής στη διδακτική της χωρικής σκέψης στην προσχολική ηλικία. Στο Μ. Τζεκάκη & Μ. Κανατσούλη (Επιμ.), *Πρακτικά του Πανελλήνιου Συνέδριου με Διεθνή Συμμετοχή: Αναστοχασμοί για την Παιδική Ηλικία*, σσ. 681-692. Θεσσαλονίκη: ΤΕΠΑΕ, ΑΠΘ.

Kersh, J., Casey, B., & Young, J. M. (2008). Research on spatial skills and block building in girls and boys: The relationship to later mathematics learning. In O. N. Saracho & B. Spodek (eds.), *Mathematics, science, and technology in early childhood education*, pp. 233- 252. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Klein, A., Starkey, P., & Wakely, A. (1999). Enhancing Pre-kindergarten Children's Readiness for School Mathematics.

Paper presented at the meeting of the American Educational Research Association, Montreal, Quebec, Canada.

Kliapis, P., & Tzekaki, M. (2011). Strategies in Early Spatial Reasoning. *Paper presented at the 35th Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education*, *Vol. 1, 408*. Ankara. Turkie.

Lampen, E., & Murray, H. (2001). Children's Intuitive Knowledge of The Shape and Structure of Three Dimensional Containers. In M. van den Heuvel-Panhuizen (ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Utrecht: The Netherlands: Freudenthal Intitute, Utrecht University.

Levenson, E., Tirosh, D., & Tsamir, P. (2011). *Preschool Geometry*. Sense Publishers.

Liben, L.S., & Yekel, C. A. (1996). Preschoolers' Understanding of Plan and Oblique Maps: The Role of Geometric and Representational Correspondence, *Child Development, Volume 67, Issue 6:* 2780–2796.

Morss, J.R. (1987). The construction of perspectives: Piaget's alternative to spatial egocetrism. *International Journal of Behavioral Development*, 10 (3): 263 – 279.

National Research Council (2006).*Learning to think spatially. GIS as a support system in the K-12 Curriculum*. Washihgton, DC: National Academic Press.

Newcombe, N.S. (2010). Picture this: increasing math and science learning by improving spatial thinking. *American Educator, 34*: 29-35.

Newcombe, N. S., & Huttenlocher, J. (2000). *Making space: The development of spatial representationand reasoning*. Cambridge, MA: MIT Press.

Noelting, G. (1979). *Hierarchy and Process in the Construction of the geometrical figure in the child and adolescence. Proceedings of the 3rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Owens, K. (1992). Spatial Thinking takes shape through primary school experiences. In W. Geeslin & K. Graham (eds.), *Proceedings of the 16th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 202- 209. University of Hampshire, Durham: PME.

Παπαντωνίου, Α., & Τζεκάκη, Μ. (2009). Οπτικοποίηση σε παιδιά προσχολικής ηλικίας: μία διδακτική παρέμβαση. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, τεύχος 4:* 73-100.

Parzysz, B. (1988). "Knowing" vs "seeing". Problems of planes of space geometry figures, *Educational Studies in Mathematics 19*: 79-92.

Presmeg, N. C. (2006). Research on the Visualization in Learning and Teaching Mathematics. In A. Gutierez & P. Boero (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present, Future*, pp. 205- 236. Sense Publishers.

Sarama, J, & Clements, D. (2009). *Early childhood mathematics education research. Learning trajectories for young children*. NY: Taylor & Francis.

Tzekaki, M. (2014). Mathematics Activity in Early Childhood. Is it so simple? In Liljedahl, P., Nicol, C., Oesterle, S., & Allan, D. (eds.).*Proceedings of the 38th Conference of the International Group of PME and the 36th Conference of PME-NA. Vol. 5*, pp. 289- 296. Vancouver, Canada: PME.

Τζεκάκη, Μ. (2010). *Μαθηματική Εκπαίδευση για την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία*. Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

Τζεκάκη, Μ. (2007). *Μικρά παιδιά, μεγάλα μαθηματικά νοήματα*. Αθήνα: Gutenberg.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight: a theory of mathematics education*. Academic Press.

Wu, D. B., & Ma, H. L. (2005). A study of the geometric concepts of the elementary school students at Van Hiele Level 1. In H. Chick & J. L. Vincent (eds.), *Proceedings of 29th International Group of Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, 329-337. Melbourne: PME.

Χριστοδούλου, Ι. (2007). *Αναπαραστάσεις χωρικών, μετρικών και ποσοτικών σχέσεων από παιδιά προσχολικής ηλικίας.* (Διπλωματική Μεταπτυχιακού Κύκλου Σπουδών), ΤΕΠΑΕ, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.

tzekaki@nured.auth.gr

Η ΜΑΘΗΣΗ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΩΣ ΟΙΚΕΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΧΡΗΣΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΟΡΓΑΝΩΝ

Δημήτρης Χασάπης

Τμήμα Εκπαίδευσης & Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία
Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η γεωμετρία ως επιστημονική δραστηριότητα, αλλά και ως πεδίο γνώσης, έχει ιστορικά θεμελιωθεί στη χρήση δύο εμβληματικών οργάνων: του διαβήτη για τη σχεδίαση τόξων και κύκλων και του κανόνα για την χάραξη ευθειών. Τα 'Στοιχεία' του Ευκλείδη, κείμενο το οποίο θεμελίωσε τη γεωμετρία ως μαθηματική πρακτική, θεωρητικοποιεί τη χρήση των δύο αυτών οργάνων σχεδίασης για τον ορισμό γεωμετρικών εννοιών και για την επίλυση των γεωμετρικών προβλημάτων. Παράλληλα, πολλά ιστορικά προβλήματα της γεωμετρίας, όπως για παράδειγμα το περίφημο πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου, υπέβαλαν την έρευνα για, και την επινόηση νέων γεωμετρικών οργάνων χάραξης καμπυλών διαφόρων μορφών και τύπων. Στη βάση της ιστορικής αυτής εμπειρίας, μπορεί να προσεγγιστεί η μάθηση της στοιχειώδους γεωμετρίας και να οργανωθεί η διδασκαλία της ως οικειοποίηση από τα παιδιά της χρήσης γεωμετρικών οργάνων σχεδιασμού και μέτρησης, είτε παραδοσιακών είτε σύγχρονων, συμπεριλαμβανομένων των αντίστοιχων προγραμμάτων σχεδίασης ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Τα όργανα σχεδίασης στη γεωμετρία

Η γεωμετρία ως επιστημονική δραστηριότητα, αλλά και ως πεδίο γνώσης, έχει ιστορικά θεμελιωθεί στη χρήση δύο εμβληματικών οργάνων: του διαβήτη για τη σχεδίαση τόξων και κύκλων και του κανόνα για την χάραξη ευθειών. Τα 'Στοιχεία' του Ευκλείδη, κείμενο το οποίο θεμελίωσε τη γεωμετρία ως μαθηματική πρακτική, θεωρητικοποιεί τη χρήση των δύο αυτών οργάνων σχεδίασης για τον ορισμό γεωμετρικών εννοιών και για την επίλυση των προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών, παρά το γεγονός ότι ποτέ δεν αναφέρεται ρητά στη χρήση του κανόνα και του διαβήτη.

Στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, μετά τη διατύπωση των ορισμών παρατίθενται τα αιτήματα (postulati) (Σταμάτη, 1975, σ. 41):

«Αίτημα 1. Ζητείται να γίνει παραδεχτό ότι από οποιοδήποτε σημείο στο οποιοδήποτε σημείο άγεται ευθεία γραμμή (Ητήσθω από παντός σημείου είς παν σημειον ευθειαν γραμμήν αγαγειν).

Αίτημα 2. Και ότι πεπερασμένη ευθεία προεκτείνεται σε ευθεία κατά τρόπο συνεχή (Καί
πεπερασμένην ευθείαν κατά το συνεχές επ' ευθείας εκβαλειν).

Αίτημα 3. Και ότι με οποιοδήποτε κέντρο και οποιαδήποτε διάστημα γράφεται κύκλος (Καί παντί κέντρω καί διαστήματι κύκλον γράφεσθαι)».

Στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, *«ακόμα και εάν τα αιτήματα παραπέμπουν σε μια πρακτική χρήση των οργάνων σχεδίασης, δεν υπάρχει αμφιβολία ότι η πρόθεση είναι θεωρητική …. Ακόμα περισσότερο, το πρόβλημα δεν είναι ποτέ η εύρεση μιας προσεγγιστικής λύσης η οποία θα μπορούσε να είναι χρήσιμη σε πρακτικές εφαρμογές, αλλά ζητείται μια θεωρητική λύση με ευθείες γραμμές και κύκλους», όπως υπογραμμίζει* η Bartolini Bussi (1998, σ. 738).

Ο κανόνας και ο διαβήτης, καθώς και οι κανόνες χρήσης τους, αντιστοιχούν και θεωρητικοποιούνται στα αξιώματα και στα θεωρήματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας και για κάθε δεδομένη γεωμετρική κατασκευή υπάρχει ένα θεώρημα στο οποίο διατυπώνονται οι σχέσεις ανάμεσα στα στοιχεία των γεωμετρικών σχημάτων, τα οποία κατασκευάζονται με τη χρήση των δύο αυτών οργάνων (Mariotti et. al, 1997). Με άλλα λόγια, κάθε γεωμετρική κατασκευή η οποία

περιλαμβάνεται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη επικυρώνεται από ένα αντίστοιχο θεώρημα, παρά το γεγονός ότι αυτή η αντιστοίχηση γεωμετρικής κατασκευής και θεωρήματος είναι σύνθετη και σε πολλές περιπτώσεις είναι έμμεση, άρα δυσδιάκριτη (Heath, 1956, σ. 124-31).

Παράλληλα, τα περίφημα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα της ελληνικής αρχαιότητας, όπως για παράδειγμα ο διπλασιασμός του κύβου ή η τριχοτόμηση της γωνίας, δεν αποδεικνύουν απλώς τη θεωρητική σπουδαιότητα των γεωμετρικών κατασκευών (Henry, 1993), αλλά οδήγησαν - μέσα από την προσπάθεια επίλυσης τους - στην επινόηση νέων οργάνων χάραξης ειδικού τύπου ευθειών, όπως για παράδειγμα, του «μεσόλαβου» ενός οργάνου χάραξης δύο μέσων αναλόγων ευθειών το οποίο αποδίδεται στον Ερατοσθένη ή οργάνων για τη χάραξη καμπυλών διαφόρων τύπων και μορφών, όπως η «κογχοειδής» του Νικομήδη.

Αυτά τα όργανα χάραξης ευθειών και καμπυλών, παρότι δεν έγιναν αποδεκτά από την Ευκλείδεια γεωμετρία ως θεωρητικά εργαλεία, χρησιμοποιήθηκαν ευρύτατα ως μέσα για την επίλυση πρακτικών προβλημάτων. Παράδειγμα, η χρήση της κογχοειδούς καμπύλης επιτρέπει την εύρεση δύο μέσων αναλόγων ευθειών μεταξύ δύο ευθειών μήκους Α και λΑ και έτσι την κατασκευή ενός κύβου του οποίου η πλευρά έχει τον οποιοδήποτε δεδομένο λόγο λ με την πλευρά δοθέντα κύβου.

Ο ριζικός μετασχηματισμός της γεωμετρίας κατά τον 17ο αιώνα και το πέρασμα από τις κλασσικές στατικές γεωμετρικές κατασκευές με τον περιορισμό της χρήσης μόνο κανόνα και διαβήτη στις διερευνήσεις γεωμετρικών τόπων, οι οποίοι προκύπτουν από μηχανικές κινήσεις ανέδειξε με ιδιαίτερη έμφαση, αλλά σε διαφορετικό βέβαια πλαίσιο, το ζήτημα των γεωμετρικών οργάνων χάραξης ευθειών και καμπυλών.

Η «Γεωμετρία» του Καρτέσιου (1954), ιδρυτικό έργο της νέας γεωμετρίας, επικεντρώνεται αποκλειστικά στη μελέτη μηχανικών κινήσεων και στην αναπαράσταση τους με αλγεβρικές εξισώσεις, ενώ στη μετέπειτα εξέλιξη της η γεωμετρία επιδιώκει να περιλάβει τη μελέτη οιασδήποτε καμπύλης μπορεί να σχεδιαστεί με συστήματα αρθρωτών ράβδων, γνωστών στην εποχή τους ως «διασυνδέσεις» (linkages), ουσιαστικά δηλαδή, όλων των αλγεβρικών καμπυλών (Lenoir, 1979).

Εκείνη την εποχή κατασκευάστηκαν συστήματα αρθρωτών ράβδων, όχι μόνο για την χάραξη διαφόρων τύπων καμπυλών, αλλά και για την πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση μηκών ευθυγράμμων τμημάτων (Artobolevskii, 1964), ενώ ο Καρτέσιος επινόησε και χρησιμοποίησε σε πολλές περιπτώσεις στη «Γεωμετρία» του ένα σύστημα για την εύρεση οιασδήποτε δύναμης ενός ακεραίου αριθμού (Dennis, 1997, Dennis & Confrey, 1997).

Στους αιώνες που ακολούθησαν επινοήθηκαν και υιοθετήθηκαν για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων διάφορες συσκευές σχεδίασης, οι οποίες ταξινομούνται σε δύο κύριες κατηγορίες: συσκευές χάραξης καμπυλών και παντογράφοι.

Οι συσκευές χάραξης καμπυλών είναι συστήματα αρθρωτών, ξύλινων ή και μεταλλικών, ράβδων, τα οποία αναγκάζουν ένα σημείο ή ένα ευθύγραμμο τμήμα να κινηθεί σε δεδομένη τροχιά. Παραδείγματα αποτελούν οι συσκευές σχεδίασης ευθειών (Peaucellier), κωνικών τομών (Cavalieri και De l' Hospital), ελλείψεων (De l' Hospital και van Schooten) και διαφόρων τύπων καμπυλών, όπως η στροφοειδής, η κισσοειδής ή η κογχοειδής καμπύλη.

Οι παντογράφοι είναι, επίσης, συστήματα αρθρωτών, ξύλινων ή και μεταλλικών, ράβδων, τα οποία σχεδιάζουν γεωμετρικούς μετασχηματισμούς δεδομένων σχημάτων, όπως για παράδειγμα χάραξη συμμετρικών ως προς σημείο ή ως προς άξονα σχημάτων, περιστροφή σχημάτων, χάραξη όμοιων σχημάτων ή προβολές σχημάτων σε δεδομένα επίπεδα. Έχουν καταγραφεί ιστορικά οι παντογράφοι του Sylvester για την χάραξη ομοίων σχημάτων, ο μηχανισμός του Delaunay για αφινικούς ή ομοπαράλληλους μετασχηματισμούς σχημάτων, ο παντογράφος του Scheiner για ομοιοθεσίες σχημάτων, ο προοπτικογράφος του Lambert και άλλοι, που φιλοξενούνται σήμερα σε μουσεία επιστημών.

Η σημερινή ανάπτυξη λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας για υπολογιστές, όπως είναι το Cabri ή το Geometer's Sketchpad επανέφερε στο προσκήνιο το ζήτημα των γεωμετρικών οργάνων σχεδίασης, από εντελώς νέα, βέβαια, σύγχρονη οπτική.

Στη βάση αυτή η διδασκαλία και η μάθηση της στοιχειώδους γεωμετρίας, τουλάχιστον σε σχολικό επίπεδο, μπορεί να ιδωθεί ως οικειοποίηση της χρήσης των γεωμετρικών οργάνων σχεδίασης και μέτρησης, οργάνων παραδοσιακών, όπως ο κανόνας, ο γνώμονας ή ο διαβήτης και σύγχρονων, όπως τα προγράμματα δυναμικής γεωμετρίας σε περιβάλλοντα υπολογιστών.

Πέρα από τη συγκεκριμένη θεώρηση της γεωμετρίας, η άποψη αυτή τεκμηριώνεται στην κοινωνικο-πολιτισμική θεωρία μάθησης του Βυγκότσκι και των επιγόνων του, στην οποία αποδίδεται ιδιαίτερη βαρύτητα στη διαμεσολάβηση της ανθρώπινης νοητικής δραστηριότητας από τα πολιτισμικά ανεπτυγμένα, τεχνικά και συμβολικά, εργαλεία (Vygotsky, 1978). Τα εργαλεία αυτά, τα οποία έχουν αναπτυχθεί κατά τη διάρκεια της ιστορικής εξέλιξης του ανθρώπινου πολιτισμού, αποτελούν αναπόσπαστο στοιχείο της ανθρώπινης πρακτικής και νοητικής δραστηριότητας, την οποία διαμεσολαβούν ως «φορείς» γνώσεων και κοινωνικο-πολιτισμικών πρακτικών (Wertsch,1994).

Τα τεχνικά και συμβολικά εργαλεία όμως, όχι μόνο διαμεσολαβούν, αλλά ταυτόχρονα οργανώνουν και διαμορφώνουν την ανθρώπινη νοητική και πρακτική δραστηριότητα, υποκινώντας διαφορετικές κατά περίπτωση νοητικές διεργασίες, οι οποίες ρυθμίζουν και τελικά μετασχηματίζουν κάθε συγκεκριμένη δραστηριότητα. Εργαλεία διαμεσολάβησης, νοητικές διεργασίες και πρακτικές δραστηριότητες διαπλέκονται και αλληλοδιαμορφώνονται σε μια διαλεκτική αλληλεξάρτηση. Άρα, η χρήση διαφορετικών εργαλείων για την επίλυση ενός προβλήματος ή γενικότερα για τη ανάπτυξη μιας δραστηριότητας δομεί με διαφορετικούς τρόπους τις απαιτούμενες πρακτικές διαδικασίες και υποκινεί διαφορετικές νοητικές διεργασίες και τρόπους σκέψης, άρα υποβάλλει και διαφορετικές προσεγγίσεις στις απαιτούμενες γνώσεις και τεχνικές (Chassapis, 1998).

Οι έννοιες και οι μέθοδοι χάραξης παράλληλων ευθειών

Στο 1ο βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδη (Σταμάτη, 1957) ορίζεται ότι:

«Παράλληλες ευθείες είναι εκείνες, που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και εκτεινόμενος επ' άπειρο και από τα δύο μέρη δεν συναντάει η μία την άλλη από κανένα μέρος (*Παράλληλοι εισιν ευθειαι, αίτινες ευ τω αυτω επιπέδω ούσαι καί εκβαλλόμεναι είς άπειρον εφ' εκάτερα τά μέρη επί μηδετέρα συμπίπτουσιν αλλήλας*) (ορισμός 23), ενώ το περίφημο 5ο αίτημα ζητάει να γίνει παραδεκτό ότι:

«Και αν ευθεία που συναντάει δύο ευθείες, σχηματίζει δύο εσωτερικές και προς το ίδιο μέρος γωνίες που έχουν άθροισμα μικρότερο των δύο ορθών, τότε οι δύο ευθείες προεκτεινόμενες επ' άπειρο συναντιούνται σε κείνα τα μέρη τους, όπου βρίσκονται οι μικρότερες των δύο ορθών γωνίες (*Καί εάν είς δύο ευθείας ευθεία εμπίπτουσα τάς εντός καί επί τά αυτά μέρη γωνίας δύο ορθών ελάσσονας ποιη, εκβαλλομένας τάς δύο ευθείας επ' άπειρον συμπίπτειν,εφ' ά μέρη εισίν αί των δύο ορθαί ελάσσονες*)».

Με βάση την παραδοχή αυτή αναπτύσσεται στα «Στοιχεία» μια θεωρία των παραλλήλων ευθειών, η οποία συγκροτείται από προτάσεις για (α) την ισότητα των γωνιών οι οποίες σχηματίζονται από μια ευθεία η οποία τέμνει δύο άλλες ευθείες γραμμές (προτάσεις 27 – 29), (β) ευθείες οι οποίες είναι παράλληλες στην ίδια ευθεία γραμμή (πρόταση 30) και (γ) τη χάραξη ευθείας η οποία διέρχεται από δοθέν σημείο και είναι παράλληλη σε δοθείσα ευθεία (πρόταση 31).

Αυτό σημαίνει, ότι η Ευκλείδεια γεωμετρία περιλαμβάνει τρεις ισοδύναμους, αλλά πάντως διαφορετικούς, ορισμούς και άρα τρεις διαφορετικές εκδοχές της έννοιας των παραλλήλων ευθειών:

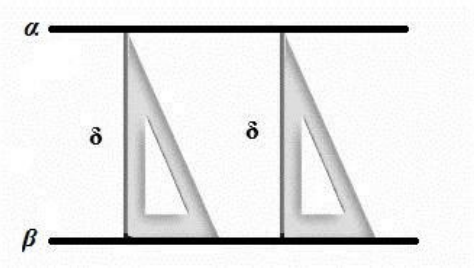
(α) παράλληλες είναι δύο ευθείες, που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, των οποίων όλα τα σημεία ισαπέχουν (σύμφωνα με την πρόταση 31),

(β) παράλληλες είναι δύο ευθείες, που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, δηλαδή δεν τέμνονται όσο και αν προεκταθούν προς οιαδήποτε κατεύθυνση (σύμφωνα με την πρόταση 23) και

(γ) παράλληλες είναι δύο ευθείες, που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και οι οποίες τεμνόμενες από μια τρίτη ευθεία σχηματίζουν τις εντός-εκτός εναλλάξ ή τις εντός-εκτός και προς το ίδιο μέρος γωνίες ίσες (σύμφωνα με το αίτημα 5 και τις προτάσεις 27-29.)

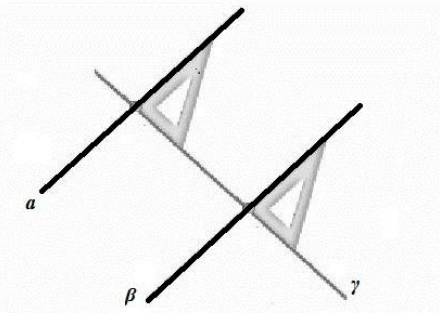
Οι τρείς αυτοί διαφορετικοί ορισμοί προσανατολίζουν και σε τρείς διαφορετικές μεθόδους χάραξης παραλλήλων ευθειών.

Ορισμός 1: Χαράζω μια ευθεία a έτσι ώστε να έχει παντού την ίδια απόσταση δ από μια ευθεία β (σχ. 1)



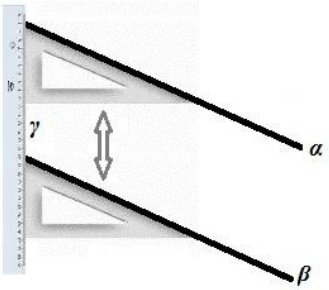
σχ. 1: Οι ευθείες a, β έχουν παντού τη ίδια απόσταση δ

Ορισμός 2: Χαράζω δύο ευθείες a και β κάθετες σε διαφορετικά σημεία της ίδιας ευθείας γ (σχ. 2).



σχ. 2: Οι ευθείες a, β είναι κάθετες στην ευθεία γ

Ορισμός 3: Χαράζω δύο ευθείες a και β έτσι ώστε να σχηματίζουν με μια τρίτη ευθεία γ τις εντός-εκτός και προς το ίδιο μέρος ή τις εντός-εκτός εναλλάξ γωνίες ίσες (σχ. 3).



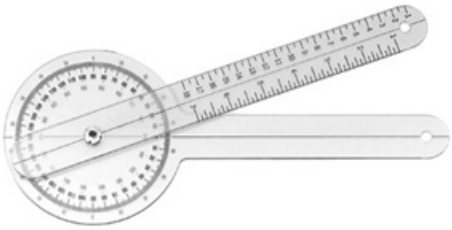
σχ. 3: Οι ευθείες *α, β* σχηματίζουν με την ευθεία *γ* τις εντός-εκτός και προς το ίδιο μέρος γωνίες ίσες

Δύο μαθησιακά επεισόδια

Στη συνέχεια παρουσιάζονται και σχολιάζονται συνοπτικά δύο μαθησιακά επεισόδια από μια σειρά διδακτικών πειραμάτων, τα οποία διερευνούν την επίδραση της χρήσης γεωμετρικών οργάνων στην οικειοποίηση επιλεγμένων εννοιών της ευκλείδειας γεωμετρίας.

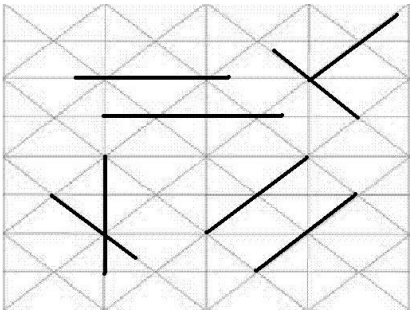
Τα συγκεκριμένα επεισόδια προέρχονται από τη χρήση ενός οργάνου χάραξης γωνιών και μέτρησης γωνιών κλίσης από ένα επτάχρονο κορίτσι, το οποίο κατά τη διεξαγωγή των διδακτικών πειραμάτων φοιτούσε στη Β' τάξη του Δημοτικού σχολείου. Στο συγκεκριμένο πείραμα, το ενδιαφέρον επικεντρώθηκε στην επίδραση του συγκεκριμένου γεωμετρικού οργάνου στην πρόσληψη των παράλληλων ευθειών, ως δύο ευθειών οι οποίες τεμνόμενες από μια τρίτη ευθεία σχηματίζουν τις δύο εσωτερικές και προς το ίδιο μέρος γωνίες ίσες, δηλαδή ως δύο ευθειών με ίσες γωνίες κλίσης. Σε αντίθεση με την έννοια των παράλληλων ευθειών ως δύο ευθειών των οποίων τα σημεία ισαπέχουν ή ως δύο ευθειών οι οποίες δεν τέμνονται όσο και αν προεκταθούν, οι οποίες διδάσκονται στο Δημοτικό σχολείο, ως πιο κατανοητές από τα παιδιά.

Το όργανο που χρησιμοποιήθηκε αποτελείται από δύο διαβαθμισμένους χάρακες σε άρθρωση με ενσωματωμένο μοιρογνωμόνιο και αποκαλείται από τους τεχνικούς «μετρητής γωνιών» ή και «γωνιόμετρο» (σχ. 4).



σχ.4: Γωνιόμετρο ή μετρητής γωνιών

Αρχικά ζητήθηκε από τα παιδιά να αναγνωρίσουν τις παράλληλες ευθείες μεταξύ διαφόρων ζευγών παράλληλων και τεμνόμενων ευθειών, χαραγμένων σε διάφορες διευθύνσεις σε ισομετρικό χαρτί, στο οποίο εύκολα διαπιστώνεται οπτικά η ισότητα των αποστάσεων και η ισότητα των γωνιών και να αιτιολογήσουν την επιλογή τους.



σχ. 5: Παράλληλες και τεμνόμενες ευθείες σε ισομετρικό χαρτί

Στη συνέχεια του πειράματος, παρουσιάστηκε στα παιδιά το γωνιόμετρο, εξηγήθηκε η δομή και η λειτουργία του και επιδείχθηκε η χρήση του στη μέτρηση γωνιών και στη χάραξη παραλλήλων ευθειών. Ακολούθησαν ασκήσεις και επιλύσεις προβλημάτων με τη χρήση του γωνιόμετρου στις οποίες συμμετείχαν όλα τα παιδιά.

Η κύρια διαπίστωση αυτού του διδακτικού πειράματος τεκμηριώνεται στη συνέχεια με την παράθεση δύο χαρακτηριστικών διαλόγων ανάμεσα σε ένα από τα παιδιά και στο δάσκαλο, που διαχειρίστηκε το πείραμα. Στους διαλόγους αυτούς παρουσιάζει ενδιαφέρον το γεγονός

ότι το παιδί απαντώντας σε ερωτήσεις για τη χάραξη δύο παράλληλων ευθειών ή για τη διαπίστωση της παραλληλίας δύο ευθειών συγχέει δεδομένα τα οποία προέρχονται από το χειρισμό του γωνιομέτρου με στοιχεία της σχολικής του γνώσης για την παραλληλία δύο ευθειών.

Επεισόδιο 1: Η απόσταση ανάμεσα σε δύο ευθείες γραμμές

Στο διάλογο που ακολουθεί σημειώνεται με Ε ο ερευνητής και με Π το παιδί που συμμετέχει στο διδακτικό πείραμα.

Ε: Ξέρεις πότε λέμε δύο ευθείες γραμμές παράλληλες, έτσι δεν είναι;

Π: Ναι, όταν δεν συναντιούνται.

Ε: Μπορείς να μου σχεδιάσεις δύο παράλληλες γραμμές;

Π: Ναι, μπορώ.

Ε: Έχεις μολύβι… χρειάζεται και κάτι άλλο; Ένα χάρακα, ένα διαβήτη, ένα υποδεκάμετρο … ;

Π: Ναι, χρειάζομαι ένα χάρακα

Παίρνει τον χάρακα και χαράζει δύο ευθείες γραμμές κατά μήκος των δύο πλευρών του.

Ε: Είναι αυτές οι γραμμές παράλληλες;

Π. Ναι, αφού δεν συναντιούνται.

Ε: Και δεν υπάρχει περίπτωση να συναντηθούν;

Π: Όχι, όσο και αν τις μεγαλώσεις και από τη μια άκρη τους και από την άλλη δεν θα συναντηθούν.

Ε: Ναι, αλλά μπορούμε να το δούμε αυτό; Μπορούμε να δούμε ότι οι δύο γραμμές όσο και αν προεκταθούν και από τη μια άκρη τους και από την άλλη δεν θα συναντηθούν;

Π: Ναι, μπορούμε.

Ε: Ωραία, αν αρχίσω να προεκτείνω αυτή εδώ τη γραμμή (δείχνει με το δάχτυλο του τη μια από τις δύο ευθείες) *που θα φτάσω;*

Π: Μακριά, πολύ μακριά …

Ε: Και αν προεκτείνω και την άλλη γραμμή που θα φτάσω;

Π: Το ίδιο, πολύ μακριά, όσο θέλεις μακριά …

Ε: Ναι, αλλά είμαστε σίγουροι ότι αυτές οι δύο γραμμές δεν θα συναντηθούν κάπου πολύ-πολύ μακριά;

Π: Ναι, είμαστε …

Ε: Πως μπορούμε να είμαστε;

Π: Γιατί δεν φτιάχνουν μια γωνία, δες δεν μπορούν να φτιάξουν μια γωνία.

Ε: Γιατί είσαι σίγουρη ότι οι δύο γραμμές δεν μπορούν να φτιάξουν μια γωνία;

Π: Γιατί δεν συναντιούνται, είναι παράλληλες.

Ε: Αυτό λες εσύ, αλλά εγώ λέω ότι αυτές οι δύο γραμμές μπορεί να συναντηθούν κάπου μακριά. Πρέπει με κάποιο τρόπο να με κάνεις να πιστέψω αυτό που λες.

Π:…. (μερικά δευτερόλεπτα σιωπής) *… Ωραία σκέφτηκα τι θα σου πω. Οι δύο γραμμές δεν θα συναντηθούν γιατί έχουν την ίδια απόσταση ανάμεσα τους. Όπως οι γραμμές του τρένου, συναντιούνται οι γραμμές του τρένου ..*

Παίρνει το χάρακα και μετράει την απόσταση ανάμεσα στις δύο γραμμές.

Π: Ορίστε δες … είναι 3 εκατοστά ….. και εδώ .. 3 εκατοστά … και εδώ ….. παντού.

Ε: Ναι το βλέπω, αλλά μετρώντας την απόσταση σε δύο-τρία σημεία είναι αρκετό για να πούμε ότι οι δύο γραμμές είναι παράλληλες;

Π: Ναι είναι … Νομίζω … ο δάσκαλος μας μετράει μόνο σε δύο σημεία, εγώ μέτρησα και ένα παραπάνω ….

Ε: Γιατί νομίζεις ότι αρκεί να μετρήσουμε την απόσταση μεταξύ των γραμμών σε δύο σημεία φτάνει για να πούμε ότι οι δύο γραμμές είναι παράλληλες και όχι σε ένα ή σε τέσσερα σημεία;

Π:……

Ε: Αν μετρήσουμε την απόσταση μεταξύ των δύο γραμμών σε ένα σημείο και βρούμε, όπως βρήκαμε εδώ 3 εκατοστά, μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι η απόσταση μεταξύ τους είναι παντού 3 εκατοστά;

Π: Ναι … μάλλον …

Ε: Σε πόσα σημεία μπορεί δύο ευθείες γραμμές να συναντιούνται;

Π: Σε ένα …. σε δύο … δεν ξέρω …

Ε: Δες αυτές τις δύο γραμμές (ο ερευνητής χαράζει δύο τεμνόμενες ευθείες σε ένα χαρτί). *Που συναυτιούνται;*

Π: Εδώ (το παιδί δείχνει με το δάχτυλο του το σημείο τομής των δύο ευθειών).

Ε: Αυτό είναι ένα σημείο. Σε ποιο άλλο σημείο μπορεί αυτές οι δύο γραμμές να συναντηθούν;

Π: ……..

Ε: Δες αν βάλω την άκρη του χάρακα πάνω στη μία γραμμή, εδώ στο σημείο που συναντάει την άλλη γραμμή και αρχίσω να του γυρίζω γύρω από αυτό το σημείο για να βρω ένα άλλο σημείο στο οποίο οι δύο γραμμές συναντιούνται, τι νομίζεις ότι θα συμβεί;

Π: Ο χάρακας θα πέσει πάνω στην άλλη γραμμή.

Ε: Άρα, εάν σημειώσω στο χαρτί ένα σημείο πόσες ευθείες γραμμές μπορούν να περάσουν από αυτό το σημείο;

Π: *Μια*

Ε: *Δες, λίγο* (ο ερευνητής περιστρέφει το χάρακα γύρω από το σημείο) *.. πόσες ευθείες γραμμές μπορώ να χαράξω που να περνούν από αυτό το σημείο*;

Π:.. Πολλές …

Ε: Ωραία πολλές … αν σημειώσω και ένα άλλο σημείο εδώ (ο ερευνητής σημειώνει ένα δεύτερο σημείο σε απόσταση από το πρώτο) *πόσες γραμμές μπορώ να χαράξω που να περνούν και από τα δύο σημεία*;

Π: Μια..

Ε: Μπορούμε να χαράξουμε και μια δεύτερη γραμμή;

Π: (Σκέφτεται μερικά δευτερόλεπτα) *Όχι, δεν μπορούμε … νομίζω όχι …*

Ε: Γι' αυτό λέμε ότι αν η απόσταση μεταξύ των γραμμών σε δύο διαφορετικά σημεία κάθε γραμμής είναι ίσα, τότε οι γραμμές είναι παράλληλες. Γι' αυτό ο δάσκαλος σας μετράει σε δύο μόνο σημεία.

Π: Κατάλαβα, γιατί οι γραμμές δεν μπορούν να αλλάξουν θέση αν είναι στερεωμένες σε δύο σημεία …

Στη συνέχεια παρουσιάστηκε στα παιδιά το γωνιόμετρο, εξηγήθηκε η δομή και η λειτουργία του και επιδείχθηκε η χρήση του στη μέτρηση γωνιών με έμφαση στη μέτρηση των γωνιών που σχηματίζουν δύο τεμνόμενες ευθείες.

Επεισόδιο 2: Οι γωνίες που σχηματίζουν δύο παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μια τρίτη

Ε: Είναι αυτές οι δύο γραμμές παράλληλες;

(ο ερευνητής δείχνει δύο παράλληλες γραμμές χαραγμένες σε μια λευκή σελίδα χαρτιού)

Π: Εάν δεν συναντιούνται, ναι είναι.

Ε: Δεν συναντιούνται εννοείς ότι δεν μπορεί να σχηματίσουν μια γωνία;

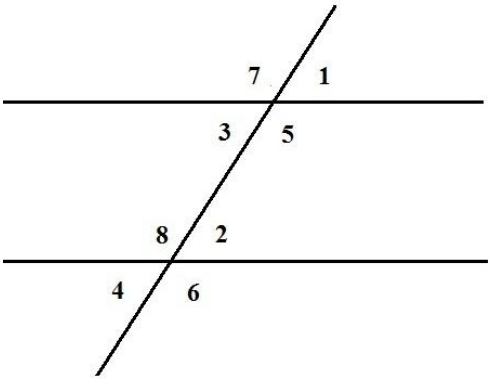
Π: Ναι, το έχουμε πει ξανά.

Ε: Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γωνιόμετρο για δούμε αν αυτές οι δύο γραμμές μπορούν να σχηματίσουν γωνία;

Π: (Σκέφτεται μερικά δευτερόλεπτα και μετά χρησιμοποιώντας τον διαβαθμισμένο χάρακα του γωνιομέτρου μετρά την απόσταση των δύο ευθειών)… *Είναι 6 εκατοστά …* (μετά από μια μικρή σιωπή, τοποθετεί τον ένα χάρακα του γωνιομέτρου κατά μήκος της μιας γραμμής και περιστρέφει αργά τον άλλο χάρακα μέχρι να τμήσει την άλλη γραμμή, σταματώντας την περιστροφή σε διάφορες θέσεις*)*

Π: αυτή η γραμμή δεν γέρνει καθόλου … εάν έγερνε λίγο τότε εδώ θα ήταν περισσότερο … και εδώ λιγότερο (δείχνει με το δάχτυλο την απόσταση ανάμεσα στις δύο γραμμές σε δύο σημεία) **….**

Ε: Αν γράψουμε μια άλλη γραμμή που θα κόβει και τις δύο γραμμές θα μπορούσαμε να μετρήσουμε τις γωνίες που σχηματίζονται, δεν θα μπορούσαμε;



σχ.6: Γωνίες που σχηματίζονται από μια ευθεία που τέμνει δύο παράλληλες ευθείες

Π: Α! ναι… θα μπορούσαμε .. με το γωνιόμετρο, όπως μάθαμε σήμερα.

(μετράει μια-μια τις γωνίες που σχηματίζονται από την ευθεία που τέμνει τις δύο γραμμές) *… αυτή η γωνία είναι ίδια με αυτή* ….(δείχνει με το δάχτυλο της τις δύο γωνίες 1 & 2 στο σχήμα 6) … *και αυτές οι δύο είναι ίδιες* … (7 & 8)

… και αυτές είναι ίδιες (δείχνει τις γωνίες 3 & 2)… *και αυτές* (δείχνει τις γωνίες 1 & 4)… *ωχ .. αυτές οι δύο δεν είναι ίδιες*.. (δείχνει τις γωνίες 5 & 2) …

(Σκέφτεται μερικά δευτερόλεπτα) … *Α..! Τώρα κατάλαβα …. Αν αυτές οι δύο γωνίες ήταν ίδιες …. και αυτές οι δύο* (δείχνει τις εσωτερικές γωνίες 5 & 2 και 3 & 8) *… όχι είναι δεν είναι … αυτές οι δύο γωνίες όμως είναι ίδιες (*δείχνει τις γωνίες 1 & 2)…. *ωραία το βρήκα … αυτές οι δύο γωνίες είναι ίδιες και αυτές οι δύο γραμμές είναι παράλληλες … έτσι που το λέω δεν είναι;*

Ε: Ναι, έτσι είναι … οι γωνίες αυτές είναι ίσες. Ίσες γωνίες λέμε, όχι ίδιες.

Π: Δύο γραμμές είναι παράλληλες, όταν αυτές οι δύο γωνίες είναι ίσες. Αυτό είναι σωστό;

Ε: Είναι … Οι μαθηματικοί λένε .. όταν μια γωνία που είναι ανάμεσα και μια γωνία που είναι έξω από τις δύο γραμμές, αλλά στο ίδιο μέρος, είναι ίσες τότε οι γραμμές είναι παράλληλες.

Π: Δύσκολο μου φαίνεται να το πω .. (Παρατηρώντας το σχήμα) *Νομίζω είναι πιο απλό να πούμε ότι αν κυλίσουμε αυτή τη μια γραμμή θα πέσει ακριβώς πάνω στην άλλη …*

Ε: Φυσικά, αφού και οι δύο γραμμές είναι ευθείες.

Π: Όχι .. όχι δεν εννοώ αυτό …. Εννοώ ότι αν κυλίσουμε τη μια γραμμή πάνω σε αυτή τη γραμμή (δείχνει την τέμνουσα τις δύο παράλληλες ευθείες) θα πέσει ακριβώς πάνω στην άλλη γραμμή … δεν θα κάνει γωνία θέλω να πω.

Ε: Έτσι φαίνεται να είναι, αλλά γιατί όμως;

Π: Νομίζω γιατί … (σκέφτεται μερικά δευτερόλεπτα) *… μου φαίνεται ότι αυτό γίνεται γιατί αυτές οι γωνίες είναι ίδιες* (δείχνει τις γωνίες 1 & 2 στο ένα μέρος και τις γωνίες 7 & 8 στο άλλο μέρος της τέμνουσας).

Ε: *Εννοείς ίσες;*

Π: *Ναι, ίσες.*

Ε: *Και αν αυτές οι γωνίες δεν ήταν ίσες;*

Π: Ε! φαίνεται … τότε αυτή η γραμμή θα έγερνε και θα συναντούσε την άλλη γραμμή (δείχνει τις δύο παράλληλες ευθείες) *…. εννοώ θα έκοβε την άλλη γραμμή … και θα έκαναν μια γωνία … κάπου εδώ … όχι εδώ ίσως μακρύτερα, έξω από το χαρτί.*

Ε: Μήπως μπορείς τώρα να μου πεις έναν κανόνα … πότε δύο γραμμές είναι παράλληλες;

Π: …ναι μάλλου μπορώ … (σκέφτεται για λίγο*)… θέλεις να σου πω όταν έχω ένα χάρακα ή όταν έχω το γωνιόμετρο;*

Ε: *και τα δύο*

Π: *Ωραία ... αν έχω ένα χάρακα τότε δύο γραμμές είναι παράλληλες όταν είναι ίδια απόσταση μεταξύ τους παντού όπου θέλω να μετρήσω … αν έχω ένα γωνιόμετρο τότε δύο γραμμές είναι παράλληλες αν φτιάχνουται ίσες γωνίες όταν μια άλλη γραμμή τις κόβει …. και … αν έχουμε ….. αν δεν έχουμε … τίποτα … ας πούμε ούτε χάρακα, ούτε γωνιόμετρο, αν δεν έχουμε τίποτα στα χέρια μας, τότε δύο γραμμές είναι παράλληλες αν δεν κόβουται, αν δεν φτιάχνουν μια γωνία μεταξύ τους …. ούτε πάνω στο χαρτί, ούτε πουθενά …*

Συμπερασματικά σχόλια

Μια πρώτη διαπίστωση που προκύπτει από την ανάλυση των μαθησιακών αυτών επεισοδίων είναι, ότι η εφαρμογή διαφορετικών μεθόδων χάραξης παραλλήλων ευθειών, τις οποίες επιβάλλει η χρήση διαφορετικών γεωμετρικών οργάνων, υποβάλλουν διαφορετικές εννοιολογικές προσλήψεις και προσανατολίζουν σε διαφορετικούς ορισμούς των παράλληλων ευθειών. Δηλαδή, η χρήση διαφορετικών γεωμετρικών οργάνων δομεί με διαφορετικό τρόπο τη σκέψη κατά την εκτέλεση αντίστοιχων γεωμετρικών εργασιών και ως συνέπεια υποβάλλει διαφορετικές νοητικές διεργασίες, οι οποίες με τη σειρά τους οδηγούν σε διαφορετικές προσλήψεις και νοητικές προσεγγίσεις των γεωμετρικών εννοιών.

Με αφορμή τη διαπίστωση αυτή, μπορεί να διατυπωθεί η πρόταση ότι η διδασκαλία της στοιχειώδους γεωμετρίας θα πρέπει να οργανωθεί με αφετηρία και στη βάση της οικειοποίησης από τα παιδιά επιλεγμένων γεωμετρικών οργάνων σχεδίασης και μέτρησης.

Με άλλα λόγια, προτείνεται να τεθούν τα όργανα σχεδίασης στο επίκεντρο της διδασκαλίας της γεωμετρίας και να χρησιμοποιηθούν για τη διαμεσολάβηση της εξοικείωσης των παιδιών με τις θεωρητικές προτάσεις και τις πρακτικές επίλυσης προβλημάτων της γεωμετρίας. Αυτή η ιδέα δεν είναι καινοφανής. Τα γεωμετρικά όργανα μέτρησης και σχεδίασης αποτελούσαν ουσιαστικό μέρος της εκπαίδευσης των ευγενών στις τεχνικές και ιδίως στις στρατιωτικές τεχνικές και στις τεχνικές της ναυσιπλοΐας από τον 17ο αιώνα και εξής (Turner, 1973), χρησιμοποιούνταν σε διάσημα ιδρύματα, όπως το ινστιτούτο μαθηματικών του Γκέτινγκεν, για την εκπαίδευση των μαθηματικών

(Muehlhausen, 1993) και εκτίθενται από τότε έως σήμερα σε μουσεία και συλλογές για την προβολή και τη διάδοση των μαθηματικών (Bartolini Bussi, 1978).

Η πρόταση αυτή, η οποία από μια άλλη οπτική προωθεί την ιδέα της χρήσης χειραπτικών υλικών (manipulatives) στη διδασκαλία της γεωμετρίας, είναι πιο συμβατή με την ιστορία και την επιστημολογία των μαθηματικών πρακτικών από κάθε άλλη σχετική πρόταση διδασκαλίας, όπως είναι η πρόταση των λεγόμενων «χειροπιαστών μαθηματικών» (hands-on mathematics), η οποία προωθεί τη χρήση εκπαιδευτικών υλικών μέσα από τεχνητές δραστηριότητες με ασαφή ή ακατανόητα μαθηματικά νοήματα και παράλληλα, είναι μια πρόταση παιδαγωγικά τεκμηριωμένη στην κοινωνικο-πολιτισμική θεωρία της μάθησης.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Artobolevskii, I. I. (1964). Mechanisms for the generation of plane curves, New York: Macmillan.

Bartolini Bussi Maria G. (1998). Drawing instruments: Theories and practices from history to didactics, *Documenta Mathematica*, Extra Volume ICM III, 735-746.

Chassapis, D. (1998/99). The mediation of tools in the development of formal mathematical concepts: The compass and the circle as an example, *Educational Studies in Mathematics*, 37 (3), 275 –293.

Dennis, D. & Confrey, J. (1997). Drawing logarithmic and exponential curves with the computer software geometer's sketchpad: A method inspired by historical sources. In J. King & D. Schatschneider (Eds.), Geometry turned on: Dynamic software in learning, teaching and research (pp. 147-156), Washington D.C.: Mathematical Association of America.

Dennis, D. (1997), René Descartes' curve-drawing devices: Experiments in the relations between mechanical motion and symbolic language, *Mathematics Magazine*, 70 (3), 163-174.

Descartes, R. (1954). The Geometry, New York: Dover.

Heath T. (ed.) (1956), The thirteen books of Euclid's Elements, vol. 1, New York: Dover.

Henry P. (1993) Mathematical machines. In Hanken, H., Karlqvist, A. & Svedin U.(eds.), The machine as metaphor and tool (pp. 101-122), New York: Springer- Verlag.

Lenoir, T. (1979), Descartes and the geometrization of thought: The methodological background of Descartes geometry, *Historia Mathematica* , 6, 355-379.

Mariotti M. A., Bartolini Bussi M. G., Boero P., Franca Ferri F., Rossella Garuti M. R. (1997)Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cognition. PME XXI Proceedings, Lahti, Finland (pp. 180-195).

Turner A. J. (1973), Mathematical instruments and the education of gentlemen, *Annals of Science*, 30 (1), 51-88.

Mühlhausen E. (1993), Riemann surface-crocheted in four colors, *The Mathematical Intelligencer*, 15 (3), 49-53.

Vygotsky, L. S. (1978), *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*, Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Wertsch, J.V. (1994), Mediated action in socio-cultural studies, *Mind, Culture and Activity,* 1, 202-208.

Σταμάτη Ευάγγελου (1975), Ευκλείδου Γεωμετρία Στοιχεία - Βιβλία 1,2,3,4, Τόμος Ι**,** Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β,.

dchasapis@ecd.uoa.gr

ΤΟ ΚΥΝΗΓΙ ΤΟΥ ΧΑΜΕΝΟΥ ΘΗΣΑΥΡΟΥ ΚΑΙ Η «ΧΑΜΕΝΗ» ΑΠΟ ΤΗ ΔΙΑΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ «ΧΩΡΙΚΗ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ».

Ελένη Γιαννακοπούλου

Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι Ευρωπαϊκοί θεσμοί σε σειρά συστάσεων τους στα κράτη μέλη της Ε.Ε. από το 2006 και εξής θεωρούν απαραίτητες για τη διαβίου μάθηση οκτώ ικανότητες, μεταξύ των οποίων δεν περιλαμβάνεται καμία εκδοχή της αποκαλούμενης στη διεθνή βιβλιογραφία «χωρικής ικανότητας». Για τη χωρική ιανότητα έχει διατυπωθεί ένα πλήθος ορισμών, κοινός παρονομαστής των οποίων είναι η ευχέρεια αναπαράστασης, μετατροπής, συμβολικής παραγωγής και ανάκλησης στη μνήμη, μη λεκτικών πληροφοριών για το χώρο και τις σχέσεις αντικειμένων και ανθρώπων στο χώρο. Πρόκειται για μια ικανότητα άμεσα συναρτημένη με την καθημερινή ζωή και βασική σε πολλά πεδία σπουδών, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί, όπως και οι άλλες βασικές ικανότητες, μια ικανότητα που υπερβαίνει τα γνωστικά αντικείμενα. Οπότε, η ανάπτυξη της επιδιώκεται πρωτίστως μέσα από τη διαθεματικότητα, με τον ίδιο τρόπο που η επιτυχία στο παιχνίδι το «κυνήγι του χαμένου θησαυρού» απαιτεί την συσχέτιση του συνόλου σχεδόν των βασικών ικανοτήτων και αποτυπώνει την αναγκαία μεταφορά της έμφασης από τη διδασκαλία στη μάθηση. Στην εισήγηση αναλύεται το ζήτημα αυτό, ως στοιχείο μιας απάντησης στο ευρύτερο ερώτημα «ποιες ικανότητες πρέπει να κατέχει ο/η απόφοιτος/η του σημερινού σχολείου», που απασχολεί όλους όσους εμπλέκονται από οποιαδήποτε θέση στις τυπικές και άτυπες διαδικασίες εκπαίδευσης παιδιών και ενηλίκων.

Μερικές εννοιολογικές διευκρινίσεις

Με τον όρο «ικανότητα» ορίζεται στη σχετική βιβλιογραφία η δυνατότητα ανταπόκρισης του ατόμου σε σύνθετες απαιτήσεις, αξιοποιώντας τις υπάρχουσες γνώσεις, χρησιμοποιώντας τις δεξιότητές του και ενεργοποιώντας σύνθετα κοινωνικά χαρακτηριστικά όπως αξίες, συναισθήματα, εσωτερικά κίνητρα, επικοινωνία. Κάθε ικανότητα επομένως, απαιτεί την εφαρμογή εξειδικευμένων γνώσεων και δεξιοτήτων καθώς και την υιοθέτηση στάσεων και κοινωνικών συμπεριφορών σε συγκεκριμένες καταστάσεις.

Οι ικανότητες έχουν ένα διαδικαστικό και όχι εννοιολογικό χαρακτήρα, διαμορφώνονται ως αποτέλεσμα προσωπικών πρακτικών εμπειριών και είναι εφαρμόσιμες στην πράξη. Παράλληλα, αποτελούν μια ενότητα γνώσεων, δεξιοτήτων, δυνατοτήτων και στάσεων, οι οποίες αναπτύσσονται δυναμικά και σε διάφορα επίπεδα σε όλη τη διάρκεια της ζωής ενός ατόμου, ενώ η ανάπτυξη τους είναι αποτέλεσμα τυπικής, άτυπης και διαρκούς εκπαίδευσης.

Σύμφωνα με κάποιους αναλυτές (για παράδειγμα Delemare Le Deist & Winterton, 2005), η ανάδειξη της έννοιας των ικανοτήτων στο επίκεντρο του σύγχρονου εκπαιδευτικού λόγου είναι «χαρακτηριστικό των μεταβαλλόμενων απαιτήσεων της σύγχρονης ζωής και του κόσμου της εργασίας σε συνδυασμό με τους αντίστοιχους εκπαιδευτικούς στόχους (Koeppen et al. 2008, σ. 62).

Σε Ευρωπαϊκό επίπεδο δύο κείμενα εισάγουν αρχικά στον εκπαιδευτικό λόγο και ορίζουν την έννοια της «ικανότητας». Η Σύσταση του Ευρωπαϊκού Κοινοβουλίου και του Συμβούλιου (2006) σχετικά με τις βασικές ικανότητες της δια βίου μάθησης στην οποία η έννοια της «ικανότητας» ορίζεται ως «ένας συνδυασμός γνώσεων, δεξιοτήτων και στάσεων κατάλληλων για το ευρύτερο συγκείμενο» και στη βάση αυτή «ικανότητες – κλειδιά είναι εκείνες οι ικανότητες οι οποίες είναι αναγκαίες σε κάθε άτομο για την προσωπική ολοκλήρωση και ανάπτυξη, την ενεργό συμμετοχή στα κοινά, την κοινωνική ένταξη και την απασχόληση».

Σε μια επόμενη χρονικά Σύσταση της Επιτροπής για το «Ευρωπαϊκό Πλαίσιο Επαγγελματικών Προσόντων για τη διαβίου μάθηση» (2008), ως «ικανότητα» ορίζεται «*η αποδεδειγμένη επάρκεια στη χρήση γνώσεων,*

δεξιοτήτων και προσωπικών, κοινωνικών ή/και μεθοδολογικών δυνατοτήτων σε περιστάσεις εργασίας ή σπουδής και στην επαγγελματική ή/και προσωπική ανάπτυξη» με αναφορά «στην υπευθυνότητα και στην αυτονομία» του ατόμου.

Ποιές, όμως, από το σύνολο των ικανοτήτων που μπορεί να αναπτύξει ή διαθέτει ένα άτομο μπορεί να θεωρηθούν βασικές προκειμένου το άτομο αυτό να ανταποκρίνεται με επιτυχία στις προκλήσεις της σύγχρονης κοινωνίας;

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό προϋποθέτει παραδοχές για τα χαρακτηριστικά της σύγχρονης κοινωνίας και τις προκλήσεις που υποβάλει στα άτομα η σύγχρονη ζωή. Με βάση λοιπόν κείμενα διεθνών οργανισμών όπως ο ΟΟΣΑ και η ΕΕ η σύγχρονη κοινωνία μας χαρακτηρίζεται από ραγδαίους ρυθμούς ανάπτυξης της τεχνολογίας, ετερογένεια των πληθυσμών και του εργατικού δυναμικού στις διάφορες χώρες, ως προς τη γλώσσα, την φυλή, την καταγωγή, τις θρησκευτικές πεποιθήσεις κ.λπ. και νέες μορφές αλληλεξάρτησης και αλληλεπίδρασης μεταξύ των χωρών που δημιουργεί η παγκοσμιοποίηση.

Σύμφωνα πάντα με τις αναλύσεις αυτές οι προκλήσεις αυτές θέτουν στο επίκεντρο των εκπαιδευτικών προβληματισμών την ιδέα της καλλιέργειας των απαραίτητων κομβικών προσόντων, που θα καλύπτουν τις ανάγκες των νέων ανθρώπων σε ικανότητες, δεξιότητες και στάσεις, ώστε να είναι σε θέση να δραστηριοποιηθούν αυτόνομα και δημιουργικά στην αγορά εργασίας, στις τρέχουσες διεργασίες παραγωγής κοινωνικών και πολιτισμικών αγαθών και στις απλές καθημερινές τους υποχρεώσεις. Στη λογική αυτή εισάγεται η έννοια των «βασικών» ικανοτήτων ή των ικανοτήτων «κλειδιά» ή όπως μεταφέρθηκε στα ελληνικά των «οριζόντιων» ικανοτήτων.

Η ανάπτυξη των βασικών ικανοτήτων ως προτεραιότητα της εκπαιδευτικής πολιτικής

Ο ΟΟΣΑ το 2005 καλεί κράτη μέλη του να υιοθετήσουν στις εκπαιδευτικές τους πολιτικές τη μέριμνα για την ανάπτυξη των ακόλουθων ικανοτήτων τις οποίες αποκαλεί ικανότητες «κλειδιά» (key competences) τις οποίες πρέπει να διαθέτει κάθε σύγχρονος πολίτης:

- *την ικανότητα αποτελεσματικής χρήσης κοινωνικο-πολιτισμικών (γλώσσας, συμβόλων, κειμένων) και ψηφιακών. Με τη διευκρίνιση ότι τα διάφορα «εργαλεία» ενέχουν πολλαπλές ερμηνείες και είναι απαραίτητα για έναν ενεργό διάλογο με το περιβάλλον.*
- *την ικανότητα αλληλεπίδρασης και συνεργασίας μέσα σε ετερογενείς ομάδες. Με την έννοια ότι είναι σημαντικό για το άτομο να μπορεί να κατανοεί τη σκέψη και τη στάση των άλλων, να επιλύει συγκρούσεις, να διαχειρίζεται διαφορές και αντιφάσεις, να υπερβαίνει πολιτισμικές διαφορές, να εξισορροπεί μεταξύ της δέσμευσης για την ομάδα και της προσωπικής του αυτονομίας.*
- *την ικανότητα αυτόνομης και υπεύθυνης λειτουργίας. Με την παραδοχή ότι τα άτομα χρειάζεται να είναι σε θέση να λειτουργούν όχι μόνον στο πλαίσιο μιας ομάδας αλλά και αυτόνομα, να μπορούν να υπερασπίζονται τις απόψεις τους, να συνειδητοποιούν τα όρια και τις ανάγκες τους, να αναζητούν πληροφορίες και να αξιολογούν τις πηγές προέλευσής τους, να αξιολογούν τη μάθησή τους, να κατανοούν και να νοηματοδοτούν την εμπειρία τους (μεταγνώση).*

Το κείμενο αυτό του ΟΟΣΑ ακολουθείται από τη Σύσταση του Ευρωπαϊκού Κοινοβουλίου και του Συμβουλίου της ΕΕ σχετικά με τις βασικές ικανότητες της δια βίου μάθησης, που προαναφέρθηκε, η οποία θέτει το πρόβλημα της ανάπτυξης βασικών ικανοτήτων σε ευρωπαϊκό επίπεδο και αναδεικνύει το ζήτημα αυτό σε κομβικό σημείο της ευρωπαϊκής εκπαιδευτικής πολιτικής.

Στη Σύσταση αυτή οι θεσμοί της Ευρωπαϊκής Ένωσης θεωρούν απαραίτητες για την προσωπική ανάπτυξη των νέων και των ενηλίκων εκείνες τις ικανότητες οι οποίες υποστηρίζουν την προσωπική ολοκλήρωση και ανάπτυξη, την κοινωνική ένταξη, την ιδιότητα του ενεργού πολίτη και την απασχόληση. Η αρχική εκπαίδευση και κατάρτιση οφείλει σύμφωνα με τις κατευθυντήριες γραμμές των οργάνων της ΕΕ να προσφέρει σε όλους τους νέους τα μέσα για να αναπτύξουν τις βασικές ικανότητες σε επίπεδο τέτοιο που να τους εφοδιάζει για την ενήλικη και την επαγγελματική ζωή, και να διαμορφώνει επίσης τη βάση για την περαιτέρω μάθηση. Αντίστοιχα η εκπαίδευση ενηλίκων και η δια βίου μάθηση οφείλουν να προσφέρουν στους ενήλικες δυνατότητες να αναπτύσσουν και να επικαιροποιούν τις βασικές ικανότητες καθ' όλη τη διάρκεια της ζωής τους.

Στη Σύσταση αυτή ορίζονται οι ακόλουθες οκτώ (8) ικανότητες ως βασικές:

1. Επικοινωνία στη μητρική γλώσσα.

2. Επικοινωνία σε ξένες γλώσσες.

3. Μαθηματική ικανότητα και βασικές ικανότητες στην επιστήμη και την τεχνολογία.

4. Ψηφιακή ικανότητα.

5. Μεταγνωστικές ικανότητες (Learning to learn).

6. Κοινωνικές ικανότητες και ικανότητες που σχετίζονται με την ιδιότητα του πολίτη.

7. Πρωτοβουλία και επιχειρηματικότητα και

8. Πολιτισμική συνείδηση και έκφραση.

Σύμφωνα με τους συντάκτες της Σύστασης *«Οι ικανότητες θεωρούνται εξίσου σημαυτικές, επειδή κάθε μία εξ αυτών μπορεί να συντελέσει σε μια επιτυχημένη ζωή εντός της κοινωνίας της γνώσης. Πολλές από τις ικανότητες αυτές αλληλεπικαλύπτονται και αλληλοσυνδέονται: πτυχές που είναι ουσιαστικές για έναν τομέα υποστηρίζουν ικανότητες σε άλλο τομέα. Η ικανότητα στις θεμελιώδεις βασικές δεξιότητες της γλώσσας, της γραφής και της ανάγνωσης, της αριθμητικής και των τεχνολογιών πληροφορίας και επικοινωνίας (ΤΠΕ) αποτελεί βασικό θεμέλιο για τη μάθηση, ενώ η μεθοδολογία της μάθησης στηρίζει όλες τις μαθησιακές δραστηριότητες. Υπάρχουν πολλά θέματα που διατρέχουν ολόκληρο το Πλαίσιο Αναφοράς: η κριτική σκέψη, η δημιουργικότητα, η ανάληψη πρωτοβουλιών, η επίλυση προβλημάτων, η αξιολόγηση του κινδύνου, η λήψη αποφάσεων και η εποικοδομητική διαχείριση των συναισθημάτων διαδραματίζουν ρόλο και στις οκτώ βασικές ικανότητες».* (Επίσημη Εφημερίδα της Ευρωπαϊκής Ένωσης 30.12.2006/962/ΕΚ), L 394/14).

Αναλυτικά, και με τις ίδιες ακριβώς διατυπώσεις της Σύστασης του Ευρωπαϊκού Κοινοβουλίου και του Συμβουλίου της ΕΕ για την ανάπτυξη των βασικών ικανοτήτων για τη διαβίου μάθηση:

1. ***Η επικοινωνία στη μητρική γλώσσα*** *είναι η ικανότητα έκφρασης και ερμηνείας εννοιών, σκέψεων, συναισθημάτων, γεγονότων και απόψεων, τόσο σε προφορική όσο και σε γραπτή μορφή (ακρόαση, ομιλία, ανάγνωση και γραφή), και η ικανότητα γλωσσικής αλληλεπίδρασης με κατάλληλο και δημιουργικό τρόπο σε ολόκληρο το φάσμα των κοινωνικών και πολιτιστικών δραστηριοτήτων: στην εκπαίδευση και την κατάρτιση, στην εργασία, στο σπίτι και στον ελεύθερο χρόνο.*

2. ***Η επικοινωνία στις ξένες γλώσσες*** *εμπεριέχει σε μεγάλο βαθμό τις βασικές δεξιότητες της επικοινωνίας στη μητρική γλώσσα: βασίζεται στην ικανότητα κατανόησης, έκφρασης και ερμηνείας εννοιών, σκέψεων, συναισθημάτων, γεγονότων και απόψεων τόσο σε προφορική όσο και σε γραπτή μορφή (ακρόαση, ομιλία, ανάγνωση και γραφή) σε ένα κατάλληλο φάσμα κοινωνικών και πολιτισμικών πεδίων (εκπαίδευση και κατάρτιση, εργασία, σπίτι, ελεύθερος χρόνος) σύμφωνα με τις επιθυμίες και τις ανάγκες καθενός. Η επικοινωνία στις ξένες γλώσσες απαιτεί επίσης δεξιότητες, όπως η διαμεσολάβηση και η διαπολιτισμική κατανόηση. Ο βαθμός επάρκειας του ατόμου ποικίλλει μεταξύ των τεσσάρων διαστάσεων (ακρόασης, ομιλίας, ανάγνωσης και γραφής) και μεταξύ των διαφόρων γλωσσών και σύμφωνα με το κοινωνικό και πολιτισμικό υπόβαθρο, το περιβάλλον, τις ανάγκες και/ή τα ενδιαφέροντα του ατόμου.*

3. ***Η μαθηματική ικανότητα*** *είναι η ικανότητα ανάπτυξης και χρησιμοποίησης μαθηματικών συλλογισμών για την επίλυση ενός φάσματος προβλημάτων σε καθημερινές καταστάσεις. Προκειμένου να επιτευχθεί η οικοδόμηση στέρεας βάσης στη λειτουργική γνώση της αριθμητικής, πρέπει να δίδεται έμφαση τόσο στη διαδικασία και τη δραστηριότητα όσο και στη γνώση. Η μαθηματική ικανότητα περιλαμβάνει, σε διάφορους βαθμούς, την ικανότητα και την προθυμία χρήσης μαθηματικών τρόπων σκέψης (λογική και χωρική σκέψη) και παρουσίασης (μαθηματικοί τύποι, μοντέλα, κατασκευές, γραφικές παραστάσεις/διαγράμματα).* ***Η ικανότητα στις επιστήμες*** *αναφέρεται στην ικανότητα και την προθυμία αξιοποίησης του συνόλου των γνώσεων και της μεθοδολογίας εξήγησης του φυσικού κόσμου, προκειμένου να προσδιορίζονται ερωτήματα και να εξάγονται συμπεράσματα στοιχειοθετημένα. Η ικανότητα στην*

τεχνολογία γίνεται αντιληπτή ως η εφαρμογή της ευ λόγω γνώσης και μεθοδολογίας προκειμένου να ικανοποιούνται οι αντιληπτές ανθρώπινες επιθυμίες ή ανάγκες. Η επιστημονική ικανότητα και η ικανότητα στην τεχνολογία περιλαμβάνουν την κατανόηση των αλλαγών που προκαλούνται από τη δραστηριότητα του ανθρώπου και την ευθύνη του ως μεμονωμένου πολίτη.

4. *Η **ψηφιακή ικανότητα** περιλαμβάνει τη χρήση της Τεχνολογίας της κοινωνίας της πληροφορίας (ΤΚΠ) για την εργασία, τη ψυχαγωγία και την επικοινωνία, με αυτοπεποίθηση και κριτικό πνεύμα. Υποστηρίζεται από τις βασικές δεξιότητες ΤΠΕ: χρήση Η/Υ για την ανάκτηση, την αξιολόγηση, την αποθήκευση, την παραγωγή, την παρουσίαση και την ανταλλαγή πληροφοριών και για την επικοινωνία και τη συμμετοχή σε δίκτυα συνεργασίας μέσω του Διαδικτύου.*

5. *Οι «**μεταγνωστικές ικανότητες**» δηλαδή η ικανότητα επιδίωξης και επιμονής στη μάθηση, η ικανότητα οργάνωσης της ατομικής μάθησης, με τη βοήθεια και της αποτελεσματικής διαχείρισης του χρόνου και της πληροφορίας, σε ατομικό και συλλογικό επίπεδο. Η ικανότητα αυτή περιλαμβάνει την επίγνωση της διαδικασίας μάθησης και των αναγκών για μάθηση ενός ατόμου, προσδιορίζοντας τις διαθέσιμες ευκαιρίες, και την ικανότητα αντιμετώπισης των εμποδίων προκειμένου να αποβαίνει η μάθηση επιτυχής. Η ευ λόγω ικανότητα σημαίνει απόκτηση, επεξεργασία και αφομοίωση των νέων γνώσεων και δεξιοτήτων καθώς και αναζήτηση και χρησιμοποίηση κατάλληλης καθοδήγησης. Η μεθοδολογία της μάθησης προϋποθέτει να βασίζεται η μάθηση σε προηγούμενες γνώσεις και εμπειρίες της ζωής προκειμένου να χρησιμοποιούνται και να εφαρμόζονται οι γνώσεις και δεξιότητες σε διάφορα πλαίσια: στο σπίτι, στην εργασία, στην εκπαίδευση και την κατάρτιση. Η παροχή κινήτρων και η εμπιστοσύνη αποτελούν σημαντικά στοιχεία της ικανότητας ενός ατόμου.*

6. *Οι **κοινωνικές ικανότητες και ικανότητες που σχετίζονται με την ιδιότητα του πολίτη και** περιλαμβάνουν τις προσωπικές, διαπροσωπικές, διαπολιτισμικές και κοινωνικές ικανότητες και τις ικανότητες του πολίτη και καλύπτουν όλο το φάσμα της συμπεριφοράς εκείνης που εξοπλίζει τα άτομα ώστε να συμμετέχουν με αποτελεσματικό και εποικοδομητικό τρόπο στην κοινωνική και επαγγελματική ζωή, (και ειδικότερα στις όλο και περισσότερο*

ποικιλόμορφες κοινωνίες), καθώς και στην επίλυση διαφορών, όπου αυτό απαιτείται. Η ικανότητα του πολίτη εξοπλίζει κατάλληλα τα άτομα ώστε να συμμετέχουν πλήρως στην καθημερινή ζωή, με βάση τη γνώση των κρίσιμων κοινωνικών και πολιτικών εννοιών και δομών και την υποχρέωση ενεργού και δημοκρατικής συμμετοχής.

7. *Το* ***αίσθημα πρωτοβουλίας και επιχειρηματικότητα*** *αναφέρονται στην ικανότητα ενός ατόμου να μετατρέπει τις ιδέες του σε δράση. Περιλαμβάνει τη δημιουργικότητα, την καινοτομία και την ανάληψη ρίσκου, καθώς και την ικανότητα σχεδιασμού προκειμένου να επιτυγχάνουται συγκεκριμένοι στόχοι. Στηρίζει τους ανθρώπους, όχι μόνο στην καθημερινή ζωή τους, τόσο στο σπίτι όσο και στην κοινωνία, αλλά και στον χώρο εργασίας, ειδικά σε ό, τι αφορά την κατανόηση του πλαισίου της εργασίας τους και στην αξιοποίηση των ευκαιριών. Αποτελεί το θεμέλιο για τις ειδικότερες δεξιότητες και γνώσεις που χρειάζονται όσα άτομα δραστηριοποιούνται ή συμβάλλουν σε κοινωνικές ή εμπορικές δραστηριότητες. Κάτι τέτοιο οφείλει να περιλαμβάνει τη συνειδητοποίηση των ηθικών αξιών και να προωθεί τη χρηστή διακυβέρνηση.*

8. ***Πολιτιστική γνώση και έκφραση*** *δηλαδή η εκτίμηση της σημασίας της δημιουργικής έκφρασης ιδεών, εμπειριών και συναισθημάτων σε ένα φάσμα μέσων μαζικής επικοινωνίας, συμπεριλαμβανομένης της μουσικής, του θεάτρου, της λογοτεχνίας και των εικαστικών τεχνών.*

Η χωρική ικανότητα ή ο κρυμμένος θησαυρός της ανθρώπινης σκέψης

Σύμφωνα με τον Mazoyer, et al. (2002), η ανθρώπινη σκέψη συγκροτείται από δύο κύρια συστήματα νοητικών (ανα) παραστάσεων: τη γλώσσα και την οπτική νοητική φαντασία. Η χωρική ικανότητα είναι μορφή σκέψης βασισμένη σε οπτικές εικόνες σε αντίθεση με τη γλωσσική κωδικοποίηση (τις λέξεις) η οποία αποτελεί ένα παράδειγμα σκέψης βασισμένης στη γλώσσα.

Αναλύοντας το ζήτημα αυτό οι Linn & Petersen (1985) ορίζουν τη χωρική ικανότητα ως μια «*δεξιότητα αναπαράστασης, μετασχηματισμού, δημιουργίας και ανάκλησης στη μνήμη συμβολικών, μη γλωσσικών όμως, πληροφοριών*» (σ. 1482).

Από μια διαφορετική οπτική οι Kastens and Ishikawa (2006) ορίζουν τη χωρική ικανότητα ως ευχέρεια και δυνατότητα χωρικής σκέψης η οποία περιλαμβάνει:

- *την αναγνώριση, παρατήρηση, καταγραφή, περιγραφή, ταξινόμηση, ανάκληση και επικοινωνία σχημάτων δύο και τριών διαστάσεων, δομών, προσανατολισμών και θέσεων αντικειμένων στο χώρο, ιδιοτήτων και διαδικασιών,*
- *του νοητικό χειρισμό αυτών των σχημάτων, δομών, προσανατολισμών και θέσεων δια της περιστροφής, μετατόπισης, παραμόρφωση ή μερικής αποσύνθεσης τους,*
- *τη διατύπωση ερμηνειών για τους λόγους για τους οποίους αυτά τα σχήματα, οι ιδιότητες ή οι διαδικασίες έχουν τα συγκεκριμένα σχήματα, δομές, προσανατολισμούς και θέσεις στο χώρο*
- *τη διατύπωση προβλέψεων για τις συνέπειες ή τις επιπτώσεις των παρατηρούμενων σχημάτων, δομών, προσανατολισμών και θέσεων στο χώρο και*
- *του αναστοχασμό για την κατανομή των παρατηρούμενων σχημάτων, δομών, προσανατολισμών και θέσεων στη μια ή στην άλλη διάσταση του χώρου.*

Με καθολική την παραδοχή βέβαια, ότι ως θεμελιώδες συστατικό της ανθρώπινης σκέψης η χωρική ικανότητα αποτελεί προϋπόθεση για την επιτυχία σε πολλά πεδία των φυσικών επιστημών, των μαθηματικών, της ιατρικής της τεχνολογίας κλπ.

Στη διεθνή βιβλιογραφία είναι εμφανής μια σχετική ομοφωνία στη διαπίστωση ότι αυτό που αποκαλείται «χωρική ικανότητα» είναι μια σύνθετη νοητική δομή που συγκροτείται από πολλές συνιστώσες, οι οποίες αφενός συσχετίζονται με κοινωνικοπολιτικά χαρακτηριστικά των ατόμων και του περιβάλλοντος τους και αφετέρου μπορούν να λειτουργούν ανεξάρτητα η μια από την άλλη σε διάφορους τύπους δραστηριοτήτων.

Για παράδειγμα ο Kimura (1999) διακρίνει στη χωρική ικανότητα έξι διακριτές διαστάσεις:

1. Την ευχέρεια εκτίμησης και απόκρισης στην κατεύθυνση κίνησης και στην ταχύτητα κινουμένων αντικειμένων ή οντοτήτων (την οποία αποκαλεί στόχευση).
2. Τη δυνατότητα νοητικής αναπαράστασης της περιστροφής ενός αντικειμένου στο χώρο (την οποία αποκαλεί προσανατολισμό).
3. Την ευχέρεια απομνημόνευσης των θέσεων αντικειμένων και οντοτήτων σε ένα χώρο (την οποία αποκαλεί μνήμη χωροθέτησης).
4. Τη δυνατότητα νοητικής αναπαράστασης ενός αντικειμένου μετά την αναδίπλωση τμημάτων ή μερών του (την οποία αποκαλεί χωρική οπτικοποίηση).
5. Τη δυνατότητα απομόνωσης ενός απλού σχήματος από ένα σύνθετο που το περιέχει ή το περιλαμβάνει (την οποία αποκαλεί από-σωμάτωση) και
6. Τη δυνατότητα εντοπισμού της οριζόντιας και κάθετης διεύθυνσης σε μια απεικόνιση η οποία περιλαμβάνει και πολλές άλλες οπτικές πληροφορίες (την οποία αποκαλεί οπτική αντίληψη).

Από μια άλλη οπτική, οι Linn & Peterson (1985) αναδεικνύουν τρείς βασικές συνιστώσες της χωρικής ικανότητας, τη χωρική αντίληψη, τη χωρική οπτικοποίηση και τη νοητική δυνατότητα περιστροφής στο χώρο.

Από μια τέτοια αφετηρία η ανάπτυξη της χωρικής ικανότητας συσχετίζεται με κλασσικά γνωστικά αντικείμενα των αναλυτικών προγραμμάτων, όπως τα μαθηματικά, η γεωγραφία ή η πληροφορική, αλλά και νεώτερες μορφές οργάνωσης της διδασκαλίας, όπως οι διαθεματικές προσεγγίσεις ή οι ερευνητικές εργασίες (project).

Σε κάθε περίπτωση, η ανάπτυξη της χωρικής ικανότητας βασίζεται και προϋποθέτει την εξοικείωση με το χώρο και τη νοητική ιδιοποίηση, όπως έχει αναλυθεί από τις θεωρίες της κοινωνικής οργάνωσης και κατασκευής του χώρου με προεξάρχουσα εκείνη του Ανρί Λεφέβρ (Lefebvre, 1993). Εντελώς συνοπτικά και απλοποιημένα, απέναντι στην εμπειριοκρατική θεώρηση του χώρου, όπως διατυπώθηκε από τον

Χιούμ και φαίνεται να επικρατεί σήμερα στον «κοινό νου», σύμφωνα με την οποία ο χώρος ορίζεται από τα αντικείμενα που ενυπάρχουν σ' αυτόν και αποκαλύπτεται στον άνθρωπο από τις αισθήσεις του και στην ιδεαλιστική προσέγγιση του Καντ στην οποία ο χώρος έχει α-χρονική ύπαρξη και ο άνθρωπος νοεί τα αντικείμενα εξαιτίας της ύπαρξης του χώρου, ο Λεφέβρ διατύπωσε μια ερμηνεία του χώρου ως αντανάκλαση των κοινωνικών διαδικασιών βασισμένη σε μια τριαδική πρόσληψη του χώρου: τον φυσικό χώρο, τον νοητικό χώρο και τον κοινωνικό χώρο (Levebvre, 2007). Αντίστοιχα, υποστηρίζει ότι η νοητική πρόσληψη του χώρου και η ανάπτυξη δραστηριοτήτων στο χώρο περιλαμβάνουν τρεις αλληλοσυσχετιζόμενες συνιστώσες: τις πρακτικές του χώρου, τις αναπαραστάσεις του χώρου και τους αναπαριστατικούς χώρους ή χώρους αναπαράστασης. Η πρώτη συνιστώσα αφορά τα άτομα ως κοινωνικά υποκείμενα και τις μεταξύ τους σχέσεις που εκφράζονται στους χώρους αναπαράστασης, η δεύτερη στην νοητική παράσταση και στη φαντασιακή οργάνωση του χώρου και η τρίτη στο βιωμένο χώρο, τον χώρο που τα άτομα ζουν και δραστηριοποιούνται.

Από εκπαιδευτική άποψη και στην οπτική, η οποία εδράζει την ανάπτυξη της χωρικής ικανότητας με αναφορά πρωτίστως στην κοινωνική οργάνωση του χώρου, φαίνεται ιδιαίτερα αξιοποιήσιμη η προσέγγιση των Gryl & Jekel (2012), οι οποίοι εντοπίζουν τρία συστατικά στοιχεία της χωρικής ικανότητας:

1. Την ευχέρεια χειρισμού πληροφοριών για το χώρο, η οποία αποτελεί αναγκαία αλλά όχι και ικανή συνθήκη ανάπτυξης της χωρικής ικανότητας και προϋποθέτει το χειρισμό συμβατικών, όπως τα διαγράμματα και οι χάρτες και τεχνολογικά προηγμένων μέσων παράστασης, αναπαράστασης και ανταλλαγής χωρικών πληροφοριών, όπως τα λογισμικά γεωμετρίας και τα γεωγραφικά πληροφορικά συστήματα.
2. Τη δυνατότητα κριτικής προσέγγισης, ερμηνείας και αναστοχασμού πληροφοριών για το χώρο και την κίνηση αντικειμένων και οντοτήτων στο χώρο, αλλά και προβληματισμού για τα μέσα αναπαράστασης και ανταλλαγής χωρικών πληροφοριών.

3. Την ευχέρεια επικοινωνίας και διαπραγμάτευσης/συζήτησης των μεθόδων και τεχνικών αναπαράστασης του χώρου καθώς και των όρων ανταλλαγής πληροφοριών για το χώρο.

Τέλος, είναι σημαντική για τον προβληματισμό και τα ερωτήματα που τίθενται στο παρούσα εισήγηση η επισήμανση των Cooper and Mumaw (1985) ότι, σύμφωνα με τις διαπιστώσεις των συναφών ερευνών η χωρική ικανότητα ως παράγοντας της ανθρώπινης νόησης αναπτύσσεται και αξιοποιείται ανεξάρτητα από άλλους παράγοντες και παράλληλα συσχετίζεται σημαντικά με θετικές επιδόσεις σε πολλές ακαδημαϊκές και τεχνικές δραστηριότητες.

Αντί επιλόγου ερωτήματα

Από τη μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας συνάγεται ότι δεν υπάρχει μια κοινά αποδεκτή προσέγγιση στην έννοια «ικανότητα» η οποία αποκτά εντελώς διαφορετικά νοήματα σε διαφορετικά κοινωνικο-πολιτισμικά συγκείμενα μέσα στα οποία αναπτύσσονται και διαφορετικοί «λόγοι» για την εκπαίδευση, τους στόχους και τα αποτελέσματα της (Delemare Le Deist & Winterton, 2005), ιδίως δε για την εκπαίδευση των ενηλίκων και τη διαβίου μάθηση. Σε ένα τέτοιο πλαίσιο εννοιολογικής και θεωρητικής «ρευστότητας» στην προσέγγιση των βασικών ικανοτήτων για τη διαβίου μάθηση μπορεί να ερμηνευτεί η παραγνώριση μιας βασικής ικανότητας, όπως είναι η χωρική ικανότητα.

Είναι δεδομένο, ότι η χωρική ικανότητα συναρτάται με συγκεκριμένα εκπαιδευτικά περιεχόμενα, όπως αποτυπώνονται στα αναλυτικά προγράμματα και κυρίως με γνωστικά αντικείμενα τα οποία αποτελούν δομικά στοιχεία των αναλυτικών προγραμμάτων, όπως για παράδειγμα τα μαθηματικά, ή η πληροφορική. Παράλληλα, όμως, η χωρική ικανότητα μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί, όπως και οι άλλες βασικές ικανότητες, μια ικανότητα που υπερβαίνει τα γνωστικά αντικείμενα, οπότε, η ανάπτυξη της εντάσσεται και μέσα σε διαθεματικές προσεγγίσεις ή ερευνητικές εργασίες (project), με τον ίδιο τρόπο που η επιτυχία στο παιχνίδι το «κυνήγι του χαμένου θησαυρού» απαιτεί την αξιοποίηση του συνόλου σχεδόν των βασικών

ικανοτήτων, ενώ αποτυπώνει την αναγκαία μεταφορά της έμφασης από τη διδασκαλία στη μάθηση.

Αν σε όλα τα παραπάνω προστεθεί το γεγονός, ότι η χωρική ικανότητα αποτελεί βασικό υπόβαθρο ανάπτυξης δραστηριοτήτων της καθημερινής ζωής των ανθρώπων η μη συμπερίληψη της από τους Ευρωπαϊκούς θεσμούς στις βασικές ικανότητες για τη διαβίου μάθηση αποτελεί ερώτημα, το οποίο δεν επιδέχεται μια εύκολη ή άμεση απάντηση. Μπορεί, όμως, να αποτελέσει αφετηρία ενός γόνιμου προβληματισμού και από εκπαιδευτική-διδακτική και από πολιτική-εκπαιδευτική οπτική.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Cooper, L. A., & Mumaw, R.J. (1985). Spatial aptitude. Στο R.F.Dillman (Ed.), *Individual differences in cognition* (σ. 67-94). New York: Academic Press,.

Delemare Le Deist, F. & Winterton, J. (2005). What is Competence. *Human Resource Development International*, 8 (1), 27-46.

European Commission (2008). *The European Qualifications Framework for Lifelong Learning (EQF)*, Luxembourg: Office for Official Publications of the European Communities.

Gryl, I. & Jekel, T. (2012). Re-centering GI in secondary education: Towards a spatial citizenship approach. *Cartographica* 47 (1), 18-28.

Kanwischer D., Schulze U. and Gryl I. (2012). Spatial Citizenship – Dimensions of a Curriculum. Στο Jekel, T., Car, A., Strobl, J. & Griesebner, G. (Eds.), GI_Forum 2012: Geovizualisation, Society and Learning (σ. 172-181). Berlin/Offenbach: Herbert Wichmann.

Kimura, D. (1999). *Sex and cognition*. Cambridge, MA: MIT Press.

Lefebvre, H. (1991). The Production of Space. Blackwell Oxford.

Lefebvre, H. (2007). Δικαίωμα στην πόλη: Χώρος και πολιτική, Αθήνα: Εκδόσεις Κουκίδα.

Linn, M.C. & Peterson, A.C. (1985). Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: a meta-analysis. *Child Development*, *56*, 1479-1498.

Mazoyer, B., Mellet, E., & Tzourio, N. (2002). Visual and language area interactions during mental imagery. Στο A.Galaburda, et al., *The languages of the brain* (σ.179-201), Cambridge, MA: Harvard Univ. Press.

Niss, M. A. (2003). Quantitative literacy and mathematical competencies. Στο Madison, B. and Steen, L. (Eds.). *Quantitative literacy: Why numeracy matters for schools and colleges* (σ. 215-220). Princeton: National Council on Education and the Disciplines.

OECD (2001). *Defining and Selecting Key Competences.* Paris: OECD.

OECD (2005). *Executive summary of the DeSeCo study. www.oecd.org/dataoecd/47/*61/35070367.pdf (ανακτήθηκε 27/3/2015)

Σύσταση του Ευρωπαϊκού Κοινοβουλίου και του Συμβουλίου της ΕΕ της 18ης Δεκεμβρίου 2006, σχετικά με τις βασικές ικανότητες της δια βίου μάθησης. *Επίσημη Εφημερίδα* L 394 τ30.12.2006.

Σύσταση του Ευρωπαϊκού Κοινοβουλίου και του Συμβουλίου, της 23ης Απριλίου 2008, σχετικά με τη θέσπιση του ευρωπαϊκού πλαισίου επαγγελματικών προσόντων για τη διά βίου μάθηση. *Επίσημη Εφημερίδα* C 111, 6.5.2008

egian@tutors.eap.gr

ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙ

Χώρος και γεωμετρία στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση: Διδακτικές Παρεμβάσεις & Ερευνητικά Εγχειρήματα

ΧΩΡΟΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ: ΜΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗ ΗΛΙΚΙΑ

Σωτηρία Γεωργοτά, Σοφία Σουλιώτη, Θεοδώρα Κονδύλη

Νηπιαγωγός *Νηπιαγωγός* *Νηπιαγωγός*

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται οι στόχοι του ισχύοντος αναλυτικού προγράμματος του Νηπιαγωγείου για τα μαθηματικά και συγκεκριμένα για τη γεωμετρία, γίνεται μία σύντομη αναφορά σε θεωρίες και πλαίσια αρχών που βοηθούν στην κατανόηση της γεωμετρικής σκέψης και στη συνέχεια μια αναφορά στους στόχους του νέου αναλυτικού προγράμματος για τη γεωμετρία. Σύμφωνα με τα νέα αναλυτικά προγράμματα η κατανόηση των ιδιοτήτων των επίπεδων σχημάτων, θα πρέπει να δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να εντοπίζουν, να συγκρίνουν, να ομαδοποιούν και να ταξινομούν τα σχήματα, όχι μόνο από τη γενική τους όψη, αλλά και από τα ιδιαίτερα γεωμετρικά τους χαρακτηριστικά. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να παρουσιάσει ένα σύνολο δραστηριοτήτων μέσα από τις οποίες οι μαθητές να μην αντιμετωπίζουν με ολιστικό και αισθησιο-κινητικό τρόπο τις έννοιες των σχημάτων, αλλά να διευρύνουν τις καθημερινές τους γνώσεις, να εμπλακούν ενεργά στη μαθησιακή διαδικασία, να κάνουν υποθέσεις και να καταλήγουν σε συμπεράσματα, να πειραματιστούν και να οδηγηθούν σε ένα πιο αφηρημένο επίπεδο προσέγγισης ιδιοτήτων και σχέσεων.

Το πρόγραμμα σχεδιασμού και ανάπτυξης δραστηριοτήτων μαθηματικών για το Νηπιαγωγείο στην ελληνική πραγματικότητα περιγράφεται στο Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών για το Νηπιαγωγείο το οποίο θεσμοθετήθηκε το 2003. Το πρόγραμμα που εφαρμόζεται μέχρι και σήμερα, αποτελεί μια σημαντική προσπάθεια μετάβασης της ελληνικής εκπαίδευσης στη φιλοσοφία των σύγχρονων προγραμμάτων σπουδών που αναγνωρίζουν και προωθούν την ιδέα της ολιστικής αντίληψης του κόσμου από τα παιδιά, τον κοινωνικό χαρακτήρα της γνώσης, τη σημασία της βιωματικής μάθησης, το ρόλο της διαμορφωτικής αξιολόγησης και τη δημιουργική αξιοποίηση της τεχνολογίας στη ζωή και την εκπαίδευση των ατόμων.[1] Σκοπός του προγράμματος για τα μαθηματικά είναι:

να υποβοηθήσει τα παιδιά μέσα από βιωματικές καταστάσεις να επεκτείνουν τις πρώτες μαθηματικές γνώσεις τους και να εφαρμόζουν οικείες μαθηματικές δομές σε νέες καταστάσεις,

- να επεξεργάζονται και να αξιοποιούν νέα δεδομένα,
- να συγκρίνουν και να μετασχηματίζουν απλές σχέσεις και διαδικασίες με τη δοκιμή και τον έλεγχο,
- να ενδιαφέρονται να επινοούν και να επιλύουν προβλήματα και να αξιοποιούν τη σύγχρονη τεχνολογία.

Κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων, ομαδικά και ατομικά, τα παιδιά αναπτύσσουν ειδικές ικανότητες όπως να συγκρίνουν και να συσχετίζουν αντικείμενα, να αντιλαμβάνονται κάποιες ιδιότητες, σχέσεις και συνδυασμούς και τέλος να μετρούν και να αναγνωρίζουν απλά σχήματα στο περιβάλλον. Σε ότι έχει σχέση με τη γεωμετρία και τα σχήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε στην παρούσα εργασία, στόχος των μαθηματικών είναι να αναγνωρίζουν και να ονομάζουν απλά στερεά και ευθύγραμμα σχήματα.[2]

Τα νέα προγράμματα σπουδών για τα Μαθηματικά διαφοροποιούνται σε σχέση με τα παλαιότερα τόσο ως προς το περιεχόμενο της

---

[1] Πρόγραμμα σπουδών Νηπιαγωγείου, *Επιστημονικό πεδίο: Προσχολική-πρώτη σχολική ηλικία, (1ο μέρος),* σελ.5.

διδασκαλίας όσο και ως προς τη διδακτική μεθοδολογία. Νέα προγράμματα σπουδών που σχεδιάστηκαν και εφαρμόστηκαν σε πολλές χώρες, όπως το National Curriculum (NCC 1991) της Μ. Βρετανίας, τα Principles and Standards, των ΗΠΑ (NCTM, 2000 National Council of Teachers of Mathematics) κ.α., στηρίζονται σε δύο βασικές αρχές:

1. Την οργάνωση των μαθηματικών εννοιών σε άξονες που επιτρέπουν την παρακολούθηση ανάπτυξης κάθε έννοιας και
2. την εισαγωγή όλων σχεδόν των υπό ανάπτυξη εννοιών σε κάθε μια από τις διαφορετικές ομάδες ηλικιών (4-8, 8-12, 12-16 χρονών), γεγονός που επιτρέπει την βαθμιαία εξέλιξη της κάθε μαθηματικής έννοιας.[3]

Το 2011 συγκροτήθηκε το νέο πρόγραμμα σπουδών για το νηπιαγωγείο το οποίο εφαρμόστηκε πειραματικά τη χρονιά 2011/2012 σε ορισμένο αριθμό νηπιαγωγείων, χωρίς όμως τις επόμενες χρονιές να γενικευτεί η εφαρμογή του.

Οι πέντε άξονες με τις τροχιές που αναπτύσσονται στο πρόγραμμα των μαθηματικών και αφορούν την προσχολική ηλικία είναι:

1. Αριθμοί και πράξεις: φυσικοί αριθμοί ως το 10 και πράξεις,

2. Χώρος και Γεωμετρία: Προσανατολισμός στο χώρο, γεωμετρικά σχήματα, μετασχηματισμοί και οπτικοποίηση,

3. Εισαγωγή στην Αλγεβρική σκέψη: Κανονικότητες και Ισότητες,

4.Μετρήσεις: Εισαγωγή στη μέτρηση μήκους, επιφάνειας, όγκου και χωρητικότητας,

---

[2] Φεκ 304/13-03-2003, τ.Β΄*Διαθεματικό ενιαίο πρόγραμμα σπουδών ια το νηπιαγωγείο.*

[3] Τζεκάκη Μ., *Μαθηματική εκπαίδευση στην προσχολική και πρώτη σχολική εκπαίδευση*, Κεντρική ομιλία στα πρακτικά του Συνεδρίου «Γλώσσα και Μαθηματικά στην Προσχολική ηλικία», 37-49. Ρέθυμνο:Παιδαγωγικό τμήμα Προσχολικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Κρήτης στο http://nrd02w3.nured.auth.gr/nuredvortal/files/42/4201/maths/mathimatikes%20drastiriotites_2002.pdf.

5. Στοχαστικά Μαθηματικά: Οργάνωση δεδομένων και εισαγωγή στην πιθανότητα.[4]

2000 NCTM standards for Geometry

Τα «2000 NCTM standards for Geometry» είναι ένα πλαίσιο αρχών και στόχων για τη διδασκαλία της γεωμετρίας, που εκπονήθηκε το 2000 από το Εθνικό Συμβούλιο Δασκάλων των Μαθηματικών των ΗΠΑ(National Council of Teachers- NCTM). Σύμφωνα με τα «2000 NCTM standards for Geometry» τα εκπαιδευτικά προγράμματα από την προσχολική ως την ηλικία των 12 θα πρέπει να δίνουν τη δυνατότητα σε όλους τους μαθητές να:

1. αναλύουν τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες δισδιάστατων και τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων και να αναπτύσσουν μαθηματικά επιχειρήματα για τις γεωμετρικές σχέσεις,
2. καθορίζουν τοποθεσίες και να περιγράφουν χωρικές σχέσεις χρησιμοποιώντας την αναλυτική γεωμετρία και άλλα αντιπροσωπευτικά συστήματα,
3. εφαρμόζουν μετασχηματισμούς και να χρησιμοποιούν συμμετρίες για να αναλύσουν μαθηματικές καταστάσεις,
4. χρησιμοποιούν την οπτικοποίηση, τη χωρική λογική και τα γεωμετρικά μοντέλα για αν επιλύουν προβλήματα.[5]

Η θεωρία Van Hiele

Για την κατανόηση της ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης σημαντική είναι η συνεισφορά των ερευνητών Piere van Hiele και Dina van Hiele Geldof. Οι ερευνητές αυτοί, προτείνουν για την αντίληψη των γεωμετρικών εννοιών ένα μοντέλο από πέντε επίπεδα της γεωμετρικής σκέψης:

---

[4] Πρόγραμμα σπουδών Νηπιαγωγείου, *Επιστημονικό πεδίο: Προσχολική-πρώτη σχολική ηλικία, (2ο μέρος), σελ. 159.* Διαθέσιμο on line http://digitalschool.minedu.gr

[5] www.standards.nctm.org

Επίπεδο 0: Οπτικοποίηση(Visualization). Οι μαθητές αναγνωρίζουν και εντοπίζουν δισδιάστατα σχήματα και τρισδιάστατες φιγούρες σαν ολότητα. Δεν περιγράφουν χαρακτηριστικά και ιδιότητες.

Επίπεδο 1: Ανάλυση(Analysis). Οι μαθητές αναγνωρίζουν τα χαρακτηριστικά των σχημάτων. Κατανοούν ότι όλα τα σχήματα που ανήκουν στην ίδια ομάδα έχουν κοινές ιδιότητες(π.χ. όλα τα τετράγωνα έχουν τέσσερις πλευρές και τις απέναντι πλευρές τους παράλληλες).

Επίπεδο 2: Άτυπη παραγωγή(Informal deduction). Οι μαθητές χρησιμοποιούν άτυπες λογικές εξηγήσεις για να συμπεράνουν τα χαρακτηριστικά των σχημάτων. Για παράδειγμα, ένα σχήμα με τέσσερις πλευρές ίσες και τουλάχιστον μία ορθή γωνία, είναι τετράγωνο.

Επίπεδο 3: τυπική Παραγωγή(Formal deduction). Οι μαθητές χρησιμοποιούν παραγωγικούς συλλογισμούς για να εξάγουν συμπεράσματα.

Επίπεδο 4: Αυστηρότητα(Rigor). Οι μαθητές συγκρίνουν διαφορετικές γεωμετρικές θεωρίες και υποθέσεις.[6]

Οι Clements και Battista(1992) αναφέρουν ότι υπάρχει ένα ακόμη επίπεδο γεωμετρικής σκέψης το οποίο αναπτύσσεται πριν το επίπεδο της Οπτικοποίησης των van Hiele. Σ'αυτό το επίπεδο τα παιδιά αντιλαμβάνονται τα γεωμετρικά σχήματα, αλλά ίσως εξαιτίας της έλλειψης αντιληπτικής ικανότητας, μπορούν να παρατηρήσουν μόνο ένα υποσύνολο των οπτικών χαρακτηριστικών μιας μορφής. Δεν είναι ικανά να διακρίνουν πολλά κοινά σχήματα. Μπορούν να διακρίνουν ανάμεσα σε καμπυλόγραμμες και ευθύγραμμες φιγούρες όχι όμως σε φιγούρες που είναι στην ίδια ομάδα.[7]

---

[6] *A Guide to Effective Instruction in Mathematics, kindergarten to Grade 3,* p. 12, Ontario Διαθέσιμο on line http://www.eworkshop.on.ca/edu/resources/guides/Guide_Math_K_3_GSS.pdf

[7] Clements, D.& Battista, M(1992). "Geometry and Spatial reasoning". In D.A. Grouws,ed. *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* New York, Macmillan Publishing Company.

Τα στάδια Van Hiele δεν συνδέονται με την ηλικία, αλλά με την ενασχόληση ή εμπειρία του ατόμου με τα γεωμετρικά αντικείμενα, για το λόγο αυτόν το στάδιο στο οποίο βρίσκεται ένα άτομο αναφορικά με κάποια γεωμετρική έννοια δεν ακολουθεί τα χρόνια του. Επίσης, σύμφωνα με τη θεώρηση αυτή, για να προχωρήσει ο μαθητής σε ένα στάδιο, θα χρειαστεί να έχει περάσει από το προηγούμενο. [8]

Σκοπός και στόχοι

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η παρουσίαση μιας μαθηματικής δραστηριότητας από τον άξονα χώρος και γεωμετρία, για την απόκτηση και ανάπτυξη δεξιοτήτων μέσα από τη διαδικασία επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος. Οι δραστηριότητες που αναπτύσσονται δημιουργήθηκαν μέσα από τη μελέτη του νέου αναλυτικού προγράμματος του νηπιαγωγείου το οποίο συγκροτήθηκε το 2011, όμως δεν έχει ακόμη θεσμοθετηθεί η εφαρμογή του. Η ομάδα των συγγραφέων που παρουσιάζει την εργασία προτείνει ένα νέο τρόπο προσέγγισης των γεωμετρικών σχημάτων, πέραν από αυτόν που προτείνει το ισχύον αναλυτικό πρόγραμμα συνεπικουρούμενο από τον οδηγό Νηπιαγωγού, αλλά βασισμένο στα νέα δεδομένα των νέων αναλυτικών προγραμμάτων. Οι στόχοι που επιδιώκεται να επιτευχθούν είναι:

1) Τα παιδιά να αναγνωρίζουν και να ταξινομούν τα βασικά επίπεδα σχήματα με βάση γενικά χαρακτηριστικά και σε ποικιλία θέσεων, μεγεθών και προσανατολισμών,

2) Τα παιδιά να περιγράφουν επίπεδα γεωμετρικά σχήματα χρησιμοποιώντας στοιχεία και ιδιότητες,

3) Τα παιδιά να κατασκευάζουν επίπεδα γεωμετρικά σχήματα με διάφορα μέσα.[9]

[8] Τζεκάκη Μ.,(2007). *Μικρά παιδιά μεγάλα μαθηματικά νοήματα,* Προσχολική και πρώτη Σχολική ηλικία, Αθήνα, εκδόσεις Gutenberg.

[9] Πρόγραμμα σπουδών Νηπιαγωγείου, *Επιστημονικό πεδίο: Προσχολική-πρώτη σχολική ηλικία, (2ο μέρος), σελ. 159.* Διαθέσιμο on line http://digitalschool.minedu.gov.gr

Μεθοδολογία διδακτικής πρότασης

Σημαντικά ερευνητικά δεδομένα για τη μαθηματική εκπαίδευση δείχνουν ότι με τη χρήση μικρών ομάδων, σημειώνονται θετικά αποτελέσματα στη μάθηση των μαθητών. Όταν ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί μικρές ομάδες στη διδασκαλία των μαθηματικών πρέπει:

1. να επιλέγει εργασίες οι οποίες ασχολούνται με σημαντικά μαθηματικά περιεχόμενα και έννοιες,
2. να επιλέγει δραστηριότητες οι οποίες είναι κατάλληλες για εργασία σε ομάδες,
3. να δίνει σαφείς οδηγίες στις ομάδες και να έχει σαφείς προσδοκίες από την καθεμία,
4. να δίνει έμφαση και στους συνεργατικούς στόχους και στην ατομική ευθύνη,
5. να επιλέγει εργασίες που να είναι ενδιαφέρουσες για τους μαθητές,
6. να εξασφαλίζει πως η ομαδική εργασία θα καταλήξει σε αποτέλεσμα όπου σημαντικές έννοιες και μέθοδοι αναδύονται από το δάσκαλο από τους μαθητές ή από όλους,
7. να έχει την ευελιξία να ζητήσει από τους μαθητές να εργαστούν στην αρχή ατομικά και στη συνέχεια σε ομάδες, όπου θα μοιραστούν τις ιδέες τους με τους άλλους και θα αναπτύξουν περαιτέρω την εργασία τους.

Αρκετές έρευνες έδειξαν επίσης ότι η διδασκαλία σε μικρές ομάδες είναι μια διδακτική πρακτική για ορισμένα διδακτικά αντικείμενα και ότι μπορεί να αποδώσει σε συνδυασμό και με άλλους τρόπους οργάνωσης της διδασκαλίας.[10]

Μια ακόμη σημαντική διδακτική πρακτική είναι η συζήτηση με όλη την τάξη μετά από την εργασία στις ομάδες. Με αυτό τον τρόπο ο

[10] Grows,D.& Cebulla,K.,(2006). *Βελτιώνοντας την επίδοση των παιδιών στα μαθηματικά.* Μετάφραση: Όλγα Κασσιώτη και Πέτρος Κλιάπης, Unesco, Educational practices series. Σελ. 18. Διαθέσιμο on line http://www.ibe.unesco.org/publications/EducationalPracticesSeriesPdf/prac04greek.pdf

εκπαιδευτικός μπορεί να εντοπίσει το βάθος κατανόησης από τους μαθητές και να επισημάνει παρανοήσεις.[11]

Οι δραστηριότητες υλοποιήθηκαν από τις εκπαιδευτικούς στο 4ο ολοήμερο νηπιαγωγείο Κέρκυρας όπου φοιτούν 21 νήπια και 6 προνήπια.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

Δραστηριότητα 1η (ανακαλύπτω το σχήμα των αντικειμένων)

Στόχος: να εντοπιστούν οι προηγούμενες γνώσεις των παιδιών σχετικά με το σχήμα των αντικειμένων.

Υλικά: ποικιλία επίπεδων αντικειμένων όπως πιάτα, χάρτινες θήκες από cd, cd, φύλλο χαρτί Α4, νομίσματα, καρτέλες γραφής, σημαίες, πινακίδες, τρίγωνα μουσικής, τριγωνικές σημαίες από πάρτι κ.α.

Περιγραφή: τα παιδιά εργάζονται σε ομάδες. Κάθε ομάδα καλείται να αναγνωρίσει και να ταξινομήσει διάφορα αντικείμενα ανάλογα με το σχήμα που έχουν. Τα παιδιά δεν παρουσιάζουν καμία δυσκολία, αναγνωρίζουν με ευκολία και ταξινομούν τα αντικείμενα σε διαφορετικές ομάδες, ανάλογα με το σχήμα τους.

Δραστηριότητα 2η (αναγνωρίζω τα σχήματα)

Στόχος: να ομαδοποιούν επίπεδα αντικείμενα ως προς το σχήμα, να εντοπιστούν οι προηγούμενες γνώσεις των παιδιών σχετικά με τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα.

Υλικά: μεγάλη ποικιλία χάρτινων επίπεδων σχημάτων σε διάφορα μεγέθη, χρώματα και προσανατολισμούς(τρίγωνα, τετράγωνα, ορθογώνια, κύκλους).

Περιγραφή: Τα παιδιά είναι χωρισμένα σε ομάδες. Κάθε ομάδα καλείται να αναγνωρίσει και να ταξινομήσει ένα συγκεκριμένο σχήμα από μία ποικιλία σχημάτων(πχ τετράγωνο).

[11] Ο,π. σελ. 19

Από τις ταξινομήσεις και τις ενδεικτικές απαντήσεις των παιδιών στις συζητήσεις που ακολουθούν μετά το τέλος της δράσης, παρατηρούμε ότι μερικά νήπια αναγνωρίζουν ολιστικά τα σχήματα και γενικότερα έχουν μια στερεοτυπική αντίληψη των σχημάτων, δεν αναγνωρίζουν π.χ. τα αμβλυγώνια και ορθογώνια τρίγωνα σαν τρίγωνα.

Ενδεικτικές απαντήσεις των παιδιών:

- Αυτό δεν είναι τρίγωνο γιατί δεν μοιάζει με σκεπή
- Δεν είναι σαν το χριστουγεννιάτικο δέντρο που έφτιαξα με τρίγωνο

Ενίσχυση της δραστηριότητας: παίζουμε ντόμινο με σχήματα για να ενισχύσουμε τις γνώσεις των παιδιών που παρουσιάζουν δυσκολίες.

Επεκτάσεις: τα παιδιά δουλεύουν ατομικά στον υπολογιστή. Σε λογισμικό κλειστού τύπου (σχεδιασμένο από τις εκπαιδευτικούς της τάξης σε Power Point) καλούνται να αναγνωρίσουν και να επιλέξουν το σωστό σχήμα ανάμεσα από διάφορα σχήματα σε ποικιλία μεγεθών και προσανατολισμών.

Σε λογισμικό Scratch με θέματα «Διαδραστικός πίνακας Κλεέ»,και «Διαδραστικός πίνακας Μοντριάν, τα παιδιά πατούν τα ανάλογα σχήματα για τα οποία τους δίνεται η εντολή.

Δραστηριότητα 3η (το περιβόλι των σχημάτων)

Στόχος: να αναγνωρίζουν και να ταξινομούν τα βασικά επίπεδα σχήματα με βάση γενικά χαρακτηριστικά και σε ποικιλία μεγεθών και προσανατολισμών.

Υλικά: χάρτινα δέντρα, μεγάλη ποικιλία χάρτινων επίπεδων σχημάτων σε διάφορα μεγέθη, χρώματα και προσανατολισμούς.

Περιγραφή: τα παιδιά σε ομάδες καλούνται να γεμίσουν τα δέντρα με τα ανάλογα σχήματα ώστε να δημιουργηθεί το δέντρο των τριγώνων, το δέντρο των τετραγώνων κ.λ.π.

Ενδεικτικές απαντήσεις των παιδιών δείχνουν ότι αναγνωρίζουν τις γενικές κατηγορίες των σχημάτων και βελτιώνουν την αναγνώριση των σχημάτων ξεπερνώντας τα ολιστικά πρωτοτυπικά σχήματα.

Ενδεικτικές απόψεις των παιδιών για το δέντρο των τριγώνων:

- Είναι τρίγωνο γιατί έχει τρεις γραμμές
- Είναι τρίγωνο γιατί έχει γύρω γύρω τρεις γραμμές
- Είναι διαφορετικό από τη σκεπή αλλά έχει τρεις γραμμές
- Έχει τρεις γωνίες
- Είναι διαφορετικό από το τετράγωνο γιατί αυτό έχει τρεις γραμμές γύρω γύρω

Δραστηριότητα 4η (βρίσκω τον κρυμμένο κανόνα)

Στόχος: να μπορούν να κατηγοριοποιήσουν σχήματα χρησιμοποιώντας κριτήρια.

Υλικά: δύο χάρτινα δέντρα, χάρτινα τρίγωνα και τετράπλευρα σχήματα διαφορετικών μεγεθών και προσανατολισμών.

Περιγραφή: Στο πρώτο δέντρο τοποθετούμε τα τρίγωνα και στο άλλο δέντρο τα τετράπλευρα σχήματα. Τα παιδιά χωρισμένα σε ομάδες καλούνται να δώσουν όνομα σε κάθε δέντρο σε σχέση με τα σχήματα που είναι τοποθετημένα στα δέντρα και να αιτιολογήσουν την απόφαση τους, ανακαλύπτοντας τον κανόνα με τον οποίο έγινε ο διαχωρισμός.

Από τις ενδεικτικές συζητήσεις των παιδιών στις ομάδες παρατηρούμε ότι αναγνωρίζουν και διακρίνουν κατηγορίες σχημάτων. Αποφασίζουν και ονομάζουν το πρώτο δέντρο «το δέντρο των τριγώνων» και το δεύτερο «το δέντρο με τα σχήματα που έχουν τέσσερις γραμμές».

Ενδεικτικοί διάλογοι παιδιών σχετικά με το δέντρο των τετράπλευρων:

Π.: να το πούμε το δέντρο των τετραγώνων (δείχνει ένα τετράγωνο)

Μ.: αυτό όμως είναι ορθογώνιο (δείχνει ορθογώνιο)

Σ.: να, και αυτό είναι ένα ορθογώνιο που έπεσε

Ν.: να το πούμε το δέντρο με τα τετράγωνα και τα ορθογώνια

Μ.: όχι γιατί έχει και ρόμβο (δείχνει ρόμβο)

Νηπ.: πώς νομίζετε τότε ότι μποούμε να ονομάσουμε αυτό το δέντρο; Μπορείτε να βρείτε αν όλα αυτά τα σχήματα που βρήκατε στο δέντρο έχουν κάτι κοινό;

Η.: ναι έχουν τέσσερις γραμμές

Μ.: ναι και το ορθογώνιο και το τετράγωνο και ο ρόμβος

Η.: να το πούμε το δέντρο με τα σχήματα που έχουν τέσσερις γραμμές

Δραστηριότητα 5η (μάντεψε ποιο σχήμα έχω)

Στόχος: να προσεγγίζουν άτυπα ιδιότητες των σχημάτων

Υλικά: χάρτινα στεφάνια- καπέλα για το κεφάλι των παιδιών με ένα επίπεδο σχήμα κολλημένο στο κέντρο του στεφανιού.

Περιγραφή: τα παιδιά σχηματίζουν μια γραμμή, το ένα πίσω από το άλλο. Η νηπιαγωγός τοποθετεί στο κεφάλι των παιδιών το στεφάνι με το σχήμα χωρίς τα παιδιά να βλέπουν ποιο σχήμα έχουν στο στεφάνι τους. Το πρώτο παιδί, που δεν έχει στεφάνι στο κεφάλι, περιγράφει λεκτικά στο δεύτερο παιδί το σχήμα που έχει στο στεφάνι του, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του σχήματος, χωρίς να επιτρέπεται να ονομάσει το σχήμα. Το παιδί ελέγχει την απάντηση του βλέποντας το σχήμα που φορά στο στεφάνι του. Συνεχίζεται το παιχνίδι μέχρι να τελειώσουν όλα τα παιδιά. Τα παιδιά με αυτή τη δραστηριότητα αναζητούν και εντοπίζουν ιδιότητες των επίπεδων σχημάτων για να μπορούν να περιγράψουν ένα σχήμα.

Ενδεικτικές λεκτικές περιγραφές των παιδιών:

- Έχεις ένα σχήμα που γίνεται με καμπύλη γραμμή
- Το σχήμα σου έχει τέσσερις γραμμές, αλλά οι δύο είναι μεγάλες
- Έχεις ένα σχήμα με τέσσερις γραμμές, είναι όλες ίδιες

Δραστηριότητα 6η (Δίνω το σωστό μήνυμα)

Στόχος: να περιγράφουν βασικά επίπεδα σχήματα χρησιμοποιώντας στοιχεία και ιδιότητες.

Υλικά: επίπεδα χάρτινα σχήματα διαφορετικών μεγεθών, προσανατολισμών.

Περιγραφή: τα παιδιά παίζουν σε ζευγάρια και κάθονται πλάτη με πλάτη. Στο ένα δίνεται ένας σχηματισμός από σχήματα και στο άλλο τα ίδια σχήματα που έχει ο σχηματισμός. Το παιδί με το σχηματισμό δίνει οδηγίες στο άλλο παιδί για να φτιάξει τον σχηματισμό. Ο έλεγχος γίνεται με σύγκριση του δεδομένου σχηματισμού με τον σχηματισμό που κατασκεύασε το άλλο παιδί. Κατά τον έλεγχο εντοπίζουν τα λάθη τους, συζητούν για τις διατυπώσεις τους και τις επιλογές που έκανε ο καθένας. Η δραστηριότητα αυτή δίνει την ευκαιρία στα παιδιά να χρησιμοποιήσουν κατάλληλο λεξιλόγιο για να περιγράψουν λεκτικά το χώρο και τα σχήματα, με αναφορά στα στοιχεία τους (πλευρές, κορυφές) και στις ιδιότητες (πλευρές ίσες, οι 2 πλευρές μεγαλύτερες από την τρίτη κ.λπ.)

Δραστηριότητα 7η (κατασκευές επίπεδων σχημάτων)

Στόχος: να αναλύσουν τα σχήματα σε κατασκευάσιμα στοιχεία χρησιμοποιώντας διάφορα υλικά και να προσεγγίζουν ιδιότητες.

Υλικά: ξυλάκια, καλαμάκια, σπίρτα, πλαστελίνη, σύρματα πίπας, κορδέλες, κουμπιά, όσπρια, τουβλάκια.

Περιγραφή: τα παιδιά δουλεύουν ατομικά. Έχουν μπροστά τους διάφορα υλικά και ενθαρρύνονται από τη νηπιαγωγό να επιλέξουν τα κατάλληλα υλικά και να κατασκευάσουν διάφορα σχήματα, τα οποία θα αναρτηθούν στη γκαλερί των σχημάτων. Στο τέλος παρουσιάζουν τις δημιουργίες τους στην ολομέλεια της τάξης περιγράφοντας και εξηγώντας πως σχεδίασαν το σχήμα, τι υλικό χρησιμοποίησαν κ.τ.λ. Τα παιδιά κατασκευάζουν σχήματα, προσεγγίζοντας άτυπα και κυρίως κιναισθητικά τις ιδιότητες και τις σχέσεις τους.

Επέκταση: τα παιδιά ζωγραφίζουν στο ανοιχτό τύπου λογισμικό tux paint, σχήματα δημιουργώντας τους δικούς τους πίνακες ζωγραφικής. Επίσης χρησιμοποιούν το εκπαιδευτικό λογισμικό «καλλιτέχνες σε δράση» αξιοποιώντας τις ενότητες «ζωγραφίζουμε με σχήματα» και «σχεδίασε με κορδέλες».

Δραστηριότητα 8η (επικαλύψεις)

Στόχος: να αναλύουν, να συνθέτουν και να σχηματίζουν νέα σχήματα.

Υλικά: τόσα περιγράμματα σχεδίων φτιαγμένα από σχήματα, όσες και οι ομάδες των παιδιών, ποικιλία σχημάτων φτιαγμένα από χαρτόνι σε διάφορους χρωματισμούς, μεγέθη και μορφές.

Περιγραφή: τα παιδιά παίζουν σε ομάδες. Κάθε ομάδα έχει ένα περίγραμμα σχεδίου από σχήματα π.χ.(ένα ρομπότ ή ένα αυτοκίνητο). Τα παιδιά επιλέγουν τα κατάλληλα σχήματα για να επικαλύψουν ακριβώς τα δεδομένα σχήματα του προτεινόμενου σχεδίου. Κάθε φορά που επικαλύπτουν, κάνουν έλεγχο. Στη συνέχεια τους δίνεται η δυνατότητα να παίξουν ατομικά το παιχνίδι tangram.

Επέκταση: παίζουν με το εκπαιδευτικό λογισμικό «καλλιτέχνες σε δράση» με την ενότητα «φτιάξε με τα σχήματα εικόνες» όπου βάζουν τα σχήματα στη σωστή θέση για να φτιάξουν την εικόνα.

Συμπεράσματα

Η παρούσα εργασία αποτελεί μια πρόταση για τη διδασκαλία της έννοιας των επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων σε μαθητές προσχολικής ηλικίας. Στοχεύει να ξεπεράσει την παλιά αντίληψη για την ολιστική προσέγγιση της γνώσης και την αντίληψη ότι για τα παιδιά της προσχολικής ηλικίας είναι αρκετό να αναγνωρίζουν τα σχήματα, και ακολουθεί τη θεωρία των σύγχρονων αναλυτικών προγραμμάτων που προχωρούν σε πιο σύνθετες και γενικές μορφές, σε ανάδειξη ιδιοτήτων και σε πολυμορφία δραστηριοτήτων και παιχνιδιών για την επίτευξη των επιδιωκόμενων στόχων. Η διαδικασία μάθησης διαμορφώνεται στο πλαίσιο συνεργασίας σε μικρές ομάδες, σε ζευγάρια, στην ολομέλεια της τάξης αλλά και ατομικά. Η ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων των παιδιών προσεγγίζεται στο πλαίσιο των περιγραφών, διερευνήσεων, διαλογικών συζητήσεων, διατύπωσης συμπερασμάτων, ενασχόλησης με ποικιλία σχημάτων, υλικών, κατασκευών, επικαλύψεων.

Παράλληλα με την επίτευξη των στόχων από τη μαθησιακή περιοχή των μαθηματικών αναπτύσσεται και η γλωσσική, δημιουργική, τεχνολογική ανάπτυξη συμβαδίζοντας με τη διαθεματική προσέγγιση της γνώσης.

Με την εφαρμογή αυτής της διδακτικής πρότασης τα παιδιά καταφέρνουν να αναγνωρίζουν και να ονομάζουν διάφορα επίπεδα σχήματα, να διαχωρίζουν τα διαφορετικά σχήματα, να εντοπίζουν τις ιδιότητες των σχημάτων, να διαχωρίζουν διαφορετικές ιδιότητες στην ίδια κατηγορία, να κατασκευάζουν και να μετασχηματίζουν σχήματα.

Για την ισχυροποίηση των γνώσεων που αποκτούν τα παιδιά σε σχέση με τα σχήματα, δίνεται η ευκαιρία της ανατροφοδότησης και της ενθάρρυνσης μέσα από δραστηριότητες που εμπλέκουν ποικίλα θέματα και υλοποιούνται όλη τη χρονιά στο πρόγραμμα του νηπιαγωγείου.

Βιβλιογραφία

Πρόγραμμα σπουδών Νηπιαγωγείου, *Επιστημονικό πεδίο: Προσχολική-πρώτη σχολική ηλικία, (1ο μέρος).* Διαθέσιμο on line http://digitalschool.minedu.gov.gr

Πρόγραμμα σπουδών Νηπιαγωγείου, *Επιστημονικό πεδίο: Προσχολική-πρώτη σχολική ηλικία, (2ο μέρος),* Διαθέσιμο on line http://digitalschool.minedu.gov.gr

Τζεκάκη, Μ. (2010). Μαθηματική εκπαίδευση για την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία, Ζυγός, Θεσσαλονίκη.

Τζεκάκη Μ.,(2007). *Μικρά παιδιά μεγάλα μαθηματικά νοήματα,* Προσχολική και πρώτη Σχολική ηλικία, Αθήνα, εκδόσεις Gutenberg.

Τζεκάκη Μ., *Μαθηματική εκπαίδευση στην προσχολική και πρώτη σχολική εκπαίδευση*, Κεντρική ομιλία στα πρακτικά του Συνεδρίου «Γλώσσα και Μαθηματικά στην Προσχολική ηλικία», 37-49. Ρέθυμνο:Παιδαγωγικό τμήμα Προσχολικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Κρήτης διαθέσιμο on line http://nrd02w3.nured.auth.gr/nuredvortal/files/42/4201/maths/mathimatikes%20drastiriotites_2002.pdf.

Φεκ 304/13-03-2003, τ.Β' *Διαθεματικό ενιαίο πρόγραμμα σπουδών για το νηπιαγωγείο.*

A Guide to Effective Instruction in Mathematics, kindergarten to Grade 3, p. 12, Ontario Διαθέσιμο on line http://www.eworkshop.on.ca/edu/resources/guides/Guide_Math_K_3_GSS.pdf

Clements, D.& Battista, M(1992). "Geometry and Spatial reasoning". In D.A. Grouws,ed. *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* New York, Macmillan Publishing Company.

Grows,D.& Cebulla,K.,(2006). *Βελτιώνοντας την επίδοση των παιδιών στα μαθηματικά.* Μετάφραση: Όλγα Κασσιώτη και Πέτρος Κλιάπης, Unesco, Educational practices series. Σελ. 18. Διαθέσιμο on line http://www.ibe.unesco.org/publications/EducationalPracticesSeriesPdf/prac04greek.pdf

Ηλεκτρονικές πηγές

www.standards.nctm.org

sgeorgota@gmail.com

sgaster07@gmail.com

dorakondili@gmail.com

ΜΙΑ ΠΡΩΤΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΧΡΥΣΗΣ ΤΟΜΗΣ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ /ΤΡΙΕΣ ΤΗΣ ΣΤ΄ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΕΧΝΗ ΤΟΥ ΨΗΦΙΔΩΤΟΥ ΚΑΙ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

Ολυμπία Γκριμπίζη, Αναστάσιος Παπάς, Μαργαρίτα Ρόμπου & Ελένη Σπανοπούλου

Εκπαιδευτικοί Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης

Χωρίς τη μαθηματική τάξη
δεν στέκει τίποτε
Ούτε ουρανός έναστρος
ούτε ρόδο

Νικηφόρος Βρεττάκος

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία στοχεύουμε στην προσέγγιση με βιωματικό τρόπο της έννοιας της χρυσής τομής ή χρυσής αναλογίας σε μαθητές/τριες της ΣΤ΄ Τάξης του Δημοτικού Σχολείου. Στόχος μας είναι η σύνδεση των μαθηματικών εννοιών με τον περιβάλλοντα χώρο των παιδιών. Οι μαθητές/τριες μέσα από την εμπειρία τους με συγκεκριμένα υλικά και δραστηριότητες μπορούν να γίνουν ικανοί να κατανοήσουν και να χειριστούν αργότερα αφηρημένες έννοιες. Επιλέγουμε την έννοια της χρυσής τομής η οποία, αν και είναι μια έννοια δύσκολη στην μαθηματικής της αποτύπωση, ωστόσο είναι ελκυστική και εύκολα αντιληπτή από τους μαθητές, καθώς εμφανίζεται στη φύση, στην τέχνη και στην ίδια την ύπαρξή τους. Συσχετίζεται με τις αναλογίες και τις γεωμετρικές έννοιες που διδάσκονται τα παιδιά σ΄αυτή την ηλικία και εμπεριέχονται στα αναλυτικά προγράμματα. Εκτιμούμε ότι είναι μια πρόκληση να κατανοήσουν μ΄αυτόν τον τρόπο τις σχέσεις που υπάρχουν στον

πραγματικό κόσμο και στον συμβολικό κόσμο των μαθηματικών. Η εργασία είναι δομημένη σε τρία μέρη, τα οποία αλληλοσυνδέονται και αλληλοτροφοδοτούνται. Περιλαμβάνουν τη διδασκαλία της μαθηματικής έννοιας της χρυσής τομής, την αξιοποίηση της τέχνης του ψηφιδωτού και τη χρήση των ΤΠΕ. Παιδαγωγικά στηρίζεται στις θεωρίες της βιωματικής μάθησης, της ανακαλυπτικής μεθόδου και των κοινωνιοπολιτισμικών θεωριών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η εργασία αυτή προτείνει μια εναλλακτική προσέγγιση στη διδασκαλία της μαθηματικής έννοιας της «χρυσής τομής» σε μαθητές/τριες του Δημοτικού Σχολείου. Εντάσσεται στο γενικότερο πλαίσιο διδασκαλίας των Μαθηματικών *μέσα απο την φύση και τη ζωή* (Λεμονίδης, 2003) και θεμελιώνεται θεωρητικά στις θεωρίες της βιωματικής μάθησης, της ανακαλυπτικής μεθόδου και των κοινωνιοπολιτισμικών θεωριών. Η μεθοδολογία αξιοποιεί τις γεωμετρικές γνώσεις που φέρουν οι μαθητές από το ευρύτερο και το σχολικό περιβάλλον, την τέχνη του ψηφιδωτού που συνδυάζει τη δημιουργική έκφραση και αναδεικνύει την ομορφιά των μαθηματικών και το ρόλο των Νέων Τεχνολογιών ως πολιτισμικών εργαλείων διαμεσολαβούμενων στο μετασχηματισμό των μαθηματικών εννοιών. Εστιάζεται σε μαθηματικές έννοιες που εμπεριέχονται στα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών του Δημοτικού Σχολείου και συγκεκριμένα στα βιβλία της ΣΤ΄ Τάξης του Δημοτικού, με στόχο οι μαθητές μέσα από την εμπειρία τους με συγκεκριμένα υλικά και δραστηριότητες να είναι σε θέση να κατανοήσουν σε ένα πρώτο επίπεδο την μαθηματική έννοια της χρυσής τομής. Δόθηκε έμφαση στη κοινωνική κατασκευή της γνώσης αναγνωρίζοντας το ρόλο της βιωμένης εμπειρίας στον σχηματισμό των εννοιών. Στη βάση των θεωρητικών προσεγγίσεων που στηριχτήκαμε θέσαμε τους γενικότερους στόχους και σχεδιάσαμε τις δραστηριότητες:

- Να έρθουν σε μια πρώτη επαφή με την έννοια της χρυσής τομής.
- Να συνδέσουν τον περιβάλλοντα χώρο με τα μαθηματικά.
- Να αξιοποιήσουν τις γεωμετρικές γνώσεις που έχουν κατακτήσει στο σχολικό περιβάλλον για την κατανόηση της νέας μαθηματικής έννοιας.

- Να προσεγγίσουν με τη χρήση διαφορετικών εργαλείων την νέα μαθηματική έννοια.
- Να δουν τα μαθηματικά σε συνάρτηση με την τέχνη και την αισθητική.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ_ΠΛΑΙΣΙΟ

Θεωρίες μάθησης

Οι αντιλήψεις της επιστημονικής κοινότητας σε ότι αφορά την ταυτότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης άλλαξαν σημαντικά τις τελευταίες δεκαετίες. Υπάρχουν πολλές πρόσφατες μελέτες που έχουν δώσει έμφαση στην επιρροή του πλαισίου στην απόδοση των παιδιών. Ο ρόλος του πλαισίου και η αναζήτηση της γνώσης μέσα σε μορφές δραστηριότητας αποκτά ιδιαίτερη σημασία για την κατασκευή της γνώσης και ιδιαίτερα της μαθηματικής γνώσης, η οποία θεωρείται ότι αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα αφηρημένης γνωσιακής διεργασίας που αναπτύσσεται στο μυαλό του παιδιού με το κοινωνικό περιβάλλον να παίζει διευκολυντικό και υποστηρικτικό ρόλο στις εσωτερικές διεργασίες του ατόμου (Donaldson 2001, Walkerdine & Sinha, 1978). Στις μέρες μας, βασικό εργαλείο της μαθηματικής εκπαίδευσης θεωρείται η μαθηματική δραστηριότητα. Ο σχεδιασμός της δραστηριότητας και η πραγμάτωσή της στην τάξη θα πρέπει να ικανοποιεί το βασικό στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης που είναι η ανάπτυξη πρακτικών και συλλογισμών που οδηγούν στο σχηματισμό των μαθηματικών εννοιών (Κολέζα, 2009).

Ο Vygotsky υποστηρίζει πως οι γνωστικές δραστηριότητες των παιδιών επισυμβαίνουν πρώτα σε κοινωνικό επίπεδο πριν ακόμη εσωτερικευτούν. Κατά την είσοδο του στο σχολείο, το παιδί έρχεται σε επαφή με ένα είδος γνώσης, στη συγκεκριμένη περίπτωση της μαθηματικής γνώσης, με τελείως διαφορετικά χαρακτηριστικά και ως προς τη σχέση της με τα στοιχεία της πραγματικότητας και ως προς τις διαδικασίες συγκρότησης και διαμόρφωσης στις οποίες υπόκειται (Βυγκότσκι, 1993). Η *μετάβαση* από μια βασισμένη στις άμεσες νοητικές διαδικασίες σκέψη, σε μια σκέψη που βασίζεται σε νοητικές πράξεις που διαμεσολαβούνται από συμβολικά συστήματα παρουσιάζει δυσκολίες για το παιδί με δεδομένο τον αφηρημένο

χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης. Η ανθρώπινη γνώση πηγάζει από την ανάγκη και την ικανότητα του ανθρώπου να διαμεσολαβεί τη δράση του μέσα από πολιτισμικά μέσα, τα οποία μεταδίδονται στην πορεία της ιστορίας από γενιά σε γενιά (Vygotsky, 2000). Σύμφωνα με το Vygotsky τα μέσα διαμεσολάβησης είναι πολιτισμικά εργαλεία και συνδέουν τις συγκεκριμένες δράσεις των ατόμων με τα πολιτισμικά, θεσμικά και ιστορικά πλαίσια. Ο ίδιος πιστεύει πως η διαμεσολάβηση των εργαλείων δεν διευκολύνει απλά μια δράση, αλλά αντίθετα την μεταμορφώνει ή την επαναπροσδιορίζει. Στα μέσα διαμεσολάβησης περιλαμβάνονται όλα τα είδη των συμβατικών σημείων : η γλώσσα , διάφορα συστήματα για την αρίθμηση , τεχνικές μνήμης , αλγεβρικά συμβολικά συστήματα , έργα τέχνης , γραφή, σχήματα, διαγράμματα, χάρτες και μηχανικά σχήματα (Chassapis, 2004). Ανάλογα με το εργαλείο με το οποίο θα εργαστεί ο μαθητής διαφοροποιείται ο τρόπος σκέψης του και οι στρατηγικές λύσης σε ένα πρόβλημα. Το είδος του μέσου διαμεσολάβησης που θα χρησιμοποιηθεί στη μαθησιακή διαδικασία θα επηρεάσει και την γνώση που θα οικοδομήσει ο μαθητής. Επομένως η επιλογή του εργαλείου είναι πολύ σημαντική. Σε ένα περιβάλλον όπου το διδακτικό εργαλείο (μέσο διαμεσολάβησης) είναι ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας (geogebra) τα παιδιά θα λειτουργήσουν διαφορετικά παρά σε ένα περιβάλλον με τα εργαλεία που παρέχει η στατική γεωμετρία.

Η συνεισφορά της διδασκαλίας στην ανάπτυξη των ανώτερων ψυχολογικών λειτουργιών θεωρείται σημαντική. «Η διδασκαλία μπορεί να επέμβει στην εξέλιξη τους και να ασκήσει την καθοριστική της επίδραση ακριβώς γιατί αυτές οι λειτουργίες με την έναρξη της σχολικής ηλικίας δεν είναι ακόμη ώριμες και έτσι μπορεί η διδασκαλία να οργανώσει την παραπέρα διαδικασία της εξέλιξής τους και έτσι να καθορίσει το πεπρωμένο τους» (Βυγκότσκι, 1993). Ο σημαντικός ρόλος της διδασκαλίας έγκειται σ' αυτό ακριβώς το σημείο. Η διδασκαλία πρέπει να προσανατολιστεί στις υπό ωρίμανση λειτουργίες και να δημιουργήσει μέσα από τη διδασκαλία το στάδιο της επόμενης ανάπτυξης του παιδιού. «Η παιδαγωγική πρέπει να προσανατολιστεί στην παιδική εξέλιξη του αύριο, και όχι σ' αυτήν του χθες. Μόνο τότε θα είναι σε θέση να κινήσει μέσα στην διδασκαλία τις εξελικτικές εκείνες διαδικασίες που βρίσκονται τώρα στη ζώνη της επόμενης εξέλιξης» (Βυγκότσκι, 1993).

Μετά την αναπτυξιακή θεωρία του Piaget, πολλοί ψυχολόγοι και παιδαγωγοί προσπάθησαν να μελετήσουν παραπέρα το φαινόμενο της μάθησης. Ένας από αυτούς ήταν και ο Jerome Bruner, (1960) ο οποίος έδωσε έμφαση στη σημασία της ανακάλυψης και της διαίσθησης. Ο Bruner πίστευε πως ο βασικός ρόλος του δασκάλου είναι να βοηθάει τους μαθητές του να ανακαλύπτουν μόνοι τους τη γνώση. Η σημασία της ανακάλυψης δεν εντοπίζεται τόσο στο αποτέλεσμά της, όσο στην ίδια τη διαδικασία εξερεύνησης. Ο Bruner, όπως και ο Piaget, επέμενε πολύ στο ρόλο της ενεργητικότητας του ατόμου. Η άποψη, τώρα, του Bruner σχετικά με τη μάθηση και τη διδασκαλία ήταν πολύ προοδευτική για την εποχή εκείνη (δεκαετία 1950-1960) και αποτέλεσε βασικό κίνητρο για τη μεταρρύθμιση της μαθηματικής εκπαίδευσης, που έγινε λίγο αργότερα. Ο Bruner πίστευε πως οποιοδήποτε θέμα μπορεί να γίνει κατανοητό από τους μαθητές, εάν ο εκπαιδευτικός λάβει υπόψη του το στάδιο νοητικής ανάπτυξης του παιδιού και προσαρμόσει κατάλληλα το θέμα στο επίπεδο του μαθητή. Η δυσκολία βρίσκεται στο να βρεθεί η σωστή προσέγγιση και ο ανάλογος τρόπος για την παρουσίασή του. Άμεση συνέπεια των παραπάνω απόψεων του Bruner ήταν η εφαρμογή του σπειροειδούς προγράμματος ανάπτυξης του μαθηματικού περιεχομένου. Το πρόγραμμα αυτό, που εφαρμόζεται ακόμη και σήμερα, έχει ως κεντρική ιδέα τη διδασκαλία των βασικών εννοιών, προσαρμοσμένων, όμως, στο ανάλογο στάδιο νοητικής ανάπτυξης, από πολύ νωρίς και την επανάληψή τους στις μεγαλύτερες τάξεις με συνεχή εμπλουτισμό, κάθε φορά, με νέα στοιχεία.

Η θεωρία της βιωματικής μάθησης δίνει έμφαση στο σημαντικό ρόλο που παίζει η εμπειρία στη διαδικασία της μάθησης, καθώς και στους δεσμούς μεταξύ της σχολικής τάξης, της καθημερινής ζωής των μαθητών και της κοινωνικής πραγματικότητας. Οι τρεις μεγάλες παραδόσεις της βιωματικής μάθησης, όπως καταγράφονται από τον Kolb (1984) προέρχονται από τον Dewey, Lewin και Piaget. Ο Dewey επεσήμανε τη σχέση ανάμεσα στην εκπαίδευση και την εμπειρία, ο Lewin ασχολήθηκε με τη δυναμική των ομάδων και έδειξε ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη σύνδεση της θεωρίας και πράξης. Η εργασία του για στη δυναμική των ομάδων και η μεθοδολογία της έρευνας-δράσης ανέδειξαν την αξία της υποκειμενικής προσωπικής εμπειρίας στη μάθηση. Η συνεισφορά, τέλος, του Piaget στη βιωματική μάθηση

έγκειται κυρίως στην περιγραφή της μάθησης ως μιας διαδικασίας αλληλεπίδρασης μεταξύ του προσώπου και του περιβάλλοντος.

Βασικές Γεωμετρικές έννοιες

Η γεωμετρία είναι η επιστήμη των μαθηματικών που κατεξοχήν αναφέρεται στον πραγματικό κόσμο. Χρησιμοποιείται σε πολλές καταστάσεις της καθημερινής ζωής και αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο αντίληψης και κατανόησης του περιβάλλοντος χώρου. Εκπαιδευτικά θεωρείται προνομιακή περιοχή, καθώς είναι γνωστικό αντικείμενο με εύκολη πρόσβαση σε κατασκευαστικά προβλήματα, παρέχει πρακτικά χρήσιμες γνώσεις, και συνεισφέρει σε διαφορετικές γνωστικές περιοχές της μαθηματικής παιδείας (Τζανάκης, Κ, & Κούρκουλος, Μ., 2000). Ο Τουμάσης (1994) επικαλείται πέντε βασικούς λόγους για την παιδαγωγική αξία της διδασκαλίας της γεωμετρίας: την ανάπτυξη της ικανότητας αντίληψης του χώρου, την ικανότητα νοερής αντίληψης του χώρου, την σύνδεση των μαθηματικών με τον πραγματικό κοσμο, την κατανόηση αφηρημένων μαθηματικών ιδεών μέσω των γεωμετρικών μοντέλων ερμηνείας, αποτελεί δηλαδή, ένα εξαιρετικό παράδειγμα μαθηματικού συστήματος απτού και κατανοητού για τους μαθητές. Ο Usiskin (1987) υποστηρίζει πως το μάθημα της Γεωμετρίας έχει τέσσερις διαστάσεις: τη διάσταση μέτρησης- απεικόνισης, τη διάσταση του πραγματικού κόσμου, τη διάσταση της αναπαράστασης, τη διάσταση της μαθηματικής υποστήριξης. Ωστόσο, οι εκπαιδευτικοί συχνά αντιμετωπίζουν δυσκολίες κατά τη διδασκαλία των γεωμετρικών εννοιών και αναζητούν διδακτικές προσεγγίσεις και μεθοδολογικά εργαλεία που μπορούν να βοηθήσουν στην κατανόηση τους. Η παραδοσιακή διδασκαλία της γεωμετρίας δημιουργεί σε αρκετές περιπτώσεις δυσκολίες στη μελέτη και κατανόηση διαφορετικών περιπτώσεων που εφαρμόζεται η γεωμετρική έννοια (Χρίστου & Πίττα-Πανταζή 2004). Ο σχεδιαμός των δραστηριοτήτων με όσο το δυνατόν περισσότερα μέσα βοηθά στη σταδιακή εξέλιξη των συλλογισμών και των πρακτικών των μαθητών σε όλο και πιο ολοκληρωμένους μαθηματικούς συλλογισμούς και πρακτικές προκειμένου οι μαθητές να είναι ικανοί να περιγράφουν, να ερμηνεύουν και να επικοινωνούν με μαθηματικούς όρους τον πραγματικό κόσμο και τον κόσμο των μαθηματικών (Κολέζα, 2009).

Τέχνη και Μαθηματικά

Τα μαθηματικά και η τέχνη είναι ξεχωριστά το κάθε ένα, σαν προϊόντα του ανθρώπινου πολιτισμού, τεράστια κεφάλαια της πνευματικής και κοινωνικής κληρονομιάς του. Τα τελευταία χρόνια, η ερευνητική εκπαιδευτική κοινότητα επιχειρεί την άμβλυνση της σχέσης μεταξύ των μαθηματικών και της τέχνης με τη χρησιμοποίηση εναλλακτικών μεθόδων διδασκαλίας. Πιο συγκεκριμένα, διερευνάται η αξιοποίηση των τεχνών για τη βελτίωση της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών τόσο μέσα από την ενασχόληση των μαθητών με τις τέχνες σε σχολικά προγράμματα πλούσια σε καλλιτεχνικές δραστηριότητες, όσο κυρίως μέσα από τη διδασκαλία των μαθηματικών μέσω της τέχνης (Κοταρίνου & Σταθοπούλου, 2011). Τα μαθηματικά και η τέχνη γενικότερα μολονότι, φαινομενικά τουλάχιστον, αποτελούν δυο ξεχωριστά – διακριτά πεδία της ανθρώπινης δραστηριότητας, εντούτοις είναι δυνατόν να συνδυαστούν και να δώσουν δημιουργίες οι οποίες αποτελούν αξιοθαύμαστο μείγμα εντυπωσιακής πολυπλοκότητας και εκπληκτικής ομορφιάς. Ιστορικά, τα μαθηματικά, μολονότι θεωρούνται κυρίως λογική – αναλυτική επιστήμη, έχουν παίξει σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη της τέχνης, η οποία απευθύνεται κυρίως στο συναίσθημα. Ένας από τους ευρύτερους σκοπούς της διδασκαλίας της γεωμετρίας στην εκπαίδευση είναι να προσφέρει μια ευκαιρία στους μαθητές να βιώσουν τη δημιουργική αλληλεπίδραση μεταξύ μαθηματικών και τέχνης.

ΤΠΕ και Μαθηματικά

Ο Seymour Papert, μαθητής του Piaget, αξιοποιώντας τις θεωρίες του δασκάλου του περί γνώσης και μάθησης, προχώρησε ένα βήμα παραπάνω αναπτύσσοντας τη θεωρία του κονστρουξιονισμού (constructionism), που όπως και ο κονστρουκτιβισμός, θεωρεί τη μάθηση ως οικοδόμηση γνωστικών δομών με θετικά αποτελέσματα όταν αυτή πραγματοποιείται σε ένα πλαίσιο όπου ο μαθητής ασχολείται συνειδητά με την κατασκευή μιας κοινής οντότητας. Κατ᾽αυτό τον τρόπο, ο κονστρουξιονισμός συνδέεται με τον κονστρουκτιβισμό μιας και οι δύο αυτές θεωρίες μάθησης θεωρούν τους μαθητές ως ενεργούς κατασκευαστές της γνώσης. Ωστόσο, αυτό που κάνει τον κονστρουξιονισμό να διαφέρει, είναι η άποψη, ότι η

γνώση οικοδομείται πιο στέρεα, όταν οι μαθητές κατασκευάζουν πράγματα που έχουν νόημα για τους ίδιους. Για το λόγο αυτό η θεωρία του Papert συχνά συνοψίζεται με τις φράσεις «μάθηση μέσω δημιουργίας» (learning by making) και «μάθηση μέσω σχεδιασμού» (learning by designing) (Jenkins, 2012). Ο Papert εστιάζει:

1. Στο ρόλο που καλείται να διαδραματίσει κάθε είδους εξωτερική στήριξη (βοήθεια) στην προσωπική ανάπτυξη του ατόμου.
2. Στους τύπους εξωτερικής στήριξης ή τα μέσα (σε ψηφιακά μέσα και τεχνολογίες της πληροφορίας).
3. Στο είδος της πρωτοβουλίας που παίρνει ο εκπαιδευόμενος σχεδιάζοντας τα προσωπικά «αντικείμενα με τα οποία θα σκεφτεί».

Το Geogebra επιλέχτηκε, καθώς είναι ελεύθερο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας που χρησιμοποιείται στην εκπαίδευση, είτε ως αυτόνομο λογισμικό είτε μέσω των εφαρμογών που έχουν ενσωματωθεί στα εμπλουτισμένα ψηφιακά βιβλία της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης . Πρόκειται για ένα νέου είδους μαθηματικό εργαλείο που παρέχει βασικά γεωμετρικά αντικείμενα, γεωμετρικά σχήματα αλλά και πολύπλοκες γεωμετρικές κατασκευές. Ο δυναμικός χαρακτήρας του ενθαρρύνει τους μαθητές να σκέφτονται μαζί με το λογισμικό επεμβαίνοντας κάθε φορά κι ανασυνθέτοντας τις κατασκευές τους σαν να επρόκειτο για την ανασύνθεση των συλλογιστικών τους διεργασιών . Οι μαθητές χρησιμοποιώντας το είναι σε θέση να κατασκευάζουν και να διαχειρίζονται γεωμετρικά σχήματα και να προχωρούν σταδιακά και σε πιο πολύπλοκες κατασκευές , έχοντας τη δυνατότητα να δρουν πάνω στο μαθηματικό αντικείμενο να το μετασχηματίζουν, να του αλλάζουν θέση, να το αυξομειώνουν, να αναιρούν ή να επαναλαμβάνουν κατασκευές και επομένως να κάνουν εικασίες την ορθότητα των οποίων μπορούν να επιβεβαιώνουν αλλά και να απορρίπτουν, απλά αλληλεπιδρώντας με το λογισμικό, χωρίς να είναι αναγκαία η επιβεβαίωση ή απόρριψη από τον εκπαιδευτικό (Ainley et al , 2005). Με τον τρόπο αυτό ο μαθητής κατασκευάζει τη γνώση όχι παθητικά αλλά ενεργητικά.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Αντικείμενο της έρευνας: «Η Χρυσή τομή»

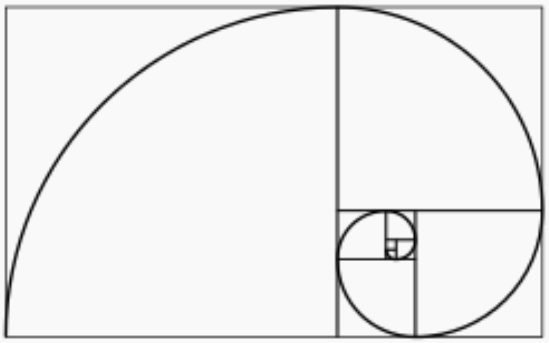
Η έννοια της χρυσής τομής απασχόλησε και απασχολεί σε παγκόσμιο επίπεδο πολλούς ερευνητές και αυτό γιατί θεωρείται ότι εμφανίζεται στις τέχνες, στη φύση αλλά και σε πολλές άλλες περιπτώσεις. Η χρυσή τομή και τα σχήματα που σχετίζονται μ' αυτήν συνεχίζουν να κινούν το ενδιαφέρον των μαθηματικών αλλά και των απλών ανθρώπων. Η χρυσή τομή αναφέρεται επίσης και ως **χρυσός λόγος** ή **χρυσός κανόνας**. Άλλα ονόματα είναι **χρυσή μετριότητα** και **Θεϊκή αναλογία** ενώ στον Ευκλείδη ο όρος ήταν **«άκρος και μέσος λόγος»**.

Οι Αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί πρώτοι μελέτησαν αυτό που τώρα ονομάζουμε χρυσή τομή γιατί εμφανιζόταν συχνά στη γεωμετρία. Η διαίρεση ενός τμήματος σε «άκρο και μέσο λόγο» (εξ ού και η χρυσή **τομή**) είναι σημαντική στη γεωμετρία των πενταγράμμων και πενταγώνων. Η αντίληψη αυτή αποδίδεται συνήθως στον Πυθαγόρα και τους ακολούθους του. Ο χρυσός λόγος ήταν γνωστός στους Πυθαγόρειους και φαίνεται στο μυστικό τους σύμβολο, την πεντάλφα. Τα Στοιχεία του Ευκλείδη παρέχουν τον πρώτο γραπτό ορισμό αυτού που σήμερα ονομάζουμε χρυσή τομή: «Μια ευθεία γραμμή λέγεται ότι έχει κοπεί σε άκρο και μέσο λόγο, όταν όλη η ευθεία είναι για το μεγαλύτερο κομμάτι ότι είναι το μεγαλύτερο κομμάτι για το μικρότερο». Η χρυσή τομή ορίζεται ως το πηλίκο των θετικών αριθμών όταν ισχύει η σχέση α/β = α+β/α. Η αριθμητική της τιμή είναι περίπου 1,618....Ο Μαθηματικός Mark Barr πρότεινε να χρησιμοποιείται το ελληνικό γράμμα **Φ** ή **φ** για τον συμβολισμό της χρυσής τομής (φ, από το αρχικό γράμμα του γλύπτη Φειδία ο οποίος λέγεται ότι ήταν από τους πρώτους που τον χρησιμοποίησε στα έργα του). Τα μαθηματικά της χρυσής αναλογίας είναι στενά συνδεδεμένα μεταξύ τους με την ακολουθία Fibonacci. Οι «Αριθμοί Φιμπονάτσι» είναι οι αριθμοί της παρακάτω ακέραιης ακολουθίας:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...

Εξ ορισμού, οι πρώτοι δύο αριθμοί Φιμπονάτσι είναι το 0 και το 1, και κάθε επόμενος αριθμός είναι το άθροισμα των δύο προηγούμενων. Ονομάστηκε έτσι από τον Λεονάρντο της Πίζας, γνωστό και ως Φιμπονάτσι. Το βιβλίο του Φιμπονάτσι, το 1202, με τίτλο Liber Abaci,

εισήγαγε την ακολουθία στα Μαθηματικά της Δυτικής Ευρώπης. Χρησιμοποιώντας μεγέθη της ακολουθίας Fibonacci σχηματίζεται η λογαριθμική σπείρα ή χρυσή σπείρα, η οποία αποτελεί ένα γεωμετρικό σχήμα από το οποίο ξεκινούν όλες οι εφαρμογές της χρυσής τομής. Βασίζεται στην ιδιότητα των χρυσών ορθογωνίων, είναι δηλαδή το σχήμα που σχηματίζεται στην ακολουθία των χρυσών ορθογωνίων, αν εγγράψουμε σε κάθε τετράγωνο ένα τεταρτοκύκλιο. Έτσι σχηματίζεται μια ακολουθία από ολοένα και μικρότερα χρυσά ορθογώνια, που βρίσκονται το ένα μέσα στο άλλο. Οι Μαθηματικοί από την εποχή του Ευκλείδη μέχρι σήμερα έχουν μελετήσει τις ιδιότητες της χρυσής τομής, συμπεριλαμβανομένης της εμφάνισης της στις διαστάσεις ενός κανονικού πενταγώνου και ενός χρυσού ορθογωνίου παραλληλογράμμου, το οποίο μπορεί να χωριστεί σε ένα τετράγωνο και ένα παρόμοιο παραλληλόγραμμο με τον ίδιο λόγο πλευρών όπως το αρχικό. (*Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου, Βιβλίο Εκπαιδευτικού,* 2003, P. J. Davis - R. Hersh,1981, Sir T.L. Heath,2001*).*



Πολλοί καλλιτέχνες και αρχιτέκτονες εφαρμόζουν στα έργα τους την χρυσή αναλογία—ιδίως στη μορφή του χρυσού ορθογωνίου παραλληλογράμμου, στο οποίο ο λόγος της μεγαλύτερης πλευράς προς την μικρότερη είναι η χρυσή τομή—πιστεύοντας ότι αυτή η αναλογία είναι αισθητικά ευχάριστη. Το χτίσιμο του Παρθενώνα βασίστηκε πανω στο χρυσό λόγο, ενώ η πυραμίδα του Χέοπα στην Αίγυπτο είναι επίσης ένα αρμονικά δομημένο οικοδόμημα. Ο Λεονάρντο ντα Βίντσι, ο Μιχαήλ Άγγελος, ο Ραφαήλ δημιούργησαν αρκετά έργα με την αρμονία και την τελειότητα της χρυσής τομής. Η λογαριθμική σπείρα παρατηρείται στους κυκλώνες, στο γαλαξία στα

όστρακα και στο ανθρώπινο σώμα. Το ανθρώπινο σώμα έχει δομηθεί και αναπτύσσεται σε αναλογίες φ. Ο Adolf Zeising, του οποίου τα κύρια ενδιαφέροντα ήταν τα μαθηματικά και η φιλοσοφία, παρατήρησε τη χρυσή αναλογία να είναι εκφρασμένη στη διάταξη των κλαδιών,ανάμεσα στους μίσχους των φυτών και τις φλέβες στα φύλλα. Επέκτεινε τις έρευνές του στη φύση και είδε τη χρυσή αναλογία να λειτουργεί σαν καθολικός νόμος. (Βικιπαίδεια)

Α. Διδακτικοί Στόχοι

- Αξιοποίηση των γνώσεων για τα γεωμετρικά σχήματα, τα χαρακτηριστικά τους, την κατασκευή και ανάπτυξή τους, τις μεταξύ τους σχέσεις
- Την ανακάλυψη και χρήση της ακολουθίας Fibonacci για την κατασκευή των χρυσών ορθογωνίων
- Την κατασκευή της λογαριθμικής σπείρας με το σχηματισμό τόξων
- Την χρήση των αναλογιών και τη μαθηματική αποτύπωσή τους.

Β. Ως προς τη χρήση των πολιτισμικών εργαλείων

Η συμβολή των πολιτισμικών εργαλείων στην διδασκαλία είναι σημαντική καθώς αυτά διαμεσολαβούν στην κατασκευή της γνώσης την οποία όχι απλά διευκολύνουν αλλά την μεταμορφώνουν και την επαναπροσδιορίζουν (βλ. παραπάνω Vygotsky). Λειτουργούν σε τρία επίπεδα:

- Στη διαμεσολάβηση των πολιτισμικών εργαλείων στην κοινωνική κατασκευή της γνώσης (στη συγκεκριμένη δράση τη συμβολή των ΤΠΕ και της τέχνης του ψηφιδωτού)
- Τη διαδικασία μετασχηματισμού των εννοιών
- Τη σχέση ανάπτυξης και μάθησης και το ρόλο της διδασκαλίας σ' αυτή τη διαδικασία.

Σε σχέση με την τέχνη

- Στην διανοητική και συναισθηματική εμπλοκή των παιδιών με στόχο την ενεργό συμμετοχή τους στη διαδικασία της μάθησης

- Στη δημιουργική αλληλεπίδραση μεταξύ μαθηματικών και τέχνης **και** στην ενεργοποίηση της φαντασίας και της δημιουργικότητας των μαθητών
- Ως μέσον γνωστικής πρόκλησης για την κατανόηση των εννοιών και την αναγνώριση των δυσκολιών των παιδιών.
- Για τη συσχέτιση της τέχνης με τον περιβάλλοντα χώρο

Σε σχέση με τις Νέες Τεχνολογίες

Οι μαθητές καλούνται να αξιοποιήσουν κατάλληλα εκπαιδευτικά λογισμικά και προγράμματα (Geogebra) που διαμεσολαβούν στη συγκρότηση της μαθηματικής γνώσης.

- Στο επίπεδο του περιεχομένου: το ψηφιακό υλικό αυξάνει την δυνατότητα ανεύρεσης και συνδυασμού της πληροφορίας
- Στο επίπεδο επεξεργασίας: στις ΤΠΕ υπάρχουν πολλές δυνατότητες οργάνωσης και επεξεργασίας των δεδομένων μέσω των λογισμικών προγραμμάτων

Γ. Ως προς τη μαθησιακή διαδικασία

- Να συμμετέχουν ενεργά στη μαθησιακή διαδικασία.
- Να αναπτύσσουν την κριτική τους σκέψη.
- Να μάθουν να εργάζονται ομαδικά, να αναπτύσσουν τη συνεργατικότητα, το διάλογο, τη σύνθεση των απόψεων.
- Να ανταποκρίνονται στους ρόλους της ομάδας και να αισθάνονται υπεύθυνοι για την ατομική και συλλογική έκφραση.

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Διδασκαλία της έννοιας της χρυσής τομής.

Η έννοια της χρυσής τομής δεν υπάρχει ως διδακτική ενότητα στο Δημοτικό Σχολείο, όμως οι έννοιες των λόγων, των αναλογιών και των γεωμετρικών σχημάτων στις οποίες στηρίζεται η διδασκαλία της, εμπεριέχονται στο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών. Θεωρήσαμε ότι αποτελεί μια διδακτική πρόκληση να δοκιμάσουμε να

διδάξουμε μαθηματικές έννοιες που διδάσκονται σε μεγαλύτερες ηλικίες σε μαθητές του δημοτικού (Bruner, 1960), με δραστηριότητες προσαρμοσμένες στις γνώσεις που κατέχουν οι μαθητές και την αντιληπτική τους ικανότητα με τη χρήση πολιτισμικών εργαλείων, όπως η τέχνη του ψηφιδωτού και η χρήση των νέων τεχνολογιών (Vygotsky, Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης).

Για τις ανάγκες τις παρούσας έρευνας και προκειμένου να γίνει αντιληπτή η έννοια της χρυσής τομής αξιοποιήσαμε την σχέση της έννοιας με την τέχνη και την χρήση των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας. Το διδακτικό υλικό που χρησιμοποιήθηκε αποτελείται από δύο Φύλλα Εργασίας που σχεδιάστηκαν στα πλαίσια της παρούσας εισήγησης και εφαρμόστηκαν σε δύο τμήματα ΣΤ΄ τάξης σε Δημοτικά Σχολεία της Ανατολικής Θεσσαλονίκης. Το πρώτο Φύλλο Εργασίας χρησιμοποιήθηκε για την ανακάλυψη και την παρουσίαση της έννοιας ενώ το δεύτερο Φύλλο Εργασίας αξιοποιήθηκε στη διδασκαλία με τη χρήση των νέων τεχνολογιών για την εμπέδωση της έννοιας. Οι μαθητές/τριες δούλεψαν σε ομάδες, οι οποίες προυπήρχαν στις τάξεις τους.

Πρώτο διδακτικό δίωρο

Το πρώτο διδακτικό δίωρο έγινε ιχνηλάτηση της έννοιας της χρυσής τομής μέσω του καταιγισμού των ιδεών (brainstorming) και της καταγραφής της προυπάρχουσας γνώσης των παιδιών για το υπό διαπραγμάτευση θέμα. Έγινε η παρουσίαση της έννοιας με την ανακαλυπτική/διερευνητική μέθοδο και τη βοήθεια μιας παρουσίασης (power point) που δημιουργήθηκε για τους σκοπούς της διδασκαλίας.

Ζητήσαμε από τους μαθητές να καταγράψουν και να μας πουν τι τους έρχεται στο μυαλό ακούγοντας την έννοια «χρυσή τομή». Μερικές απο τις ιδέες των μαθητών όπως «κάτι πολύτιμο», «χρυσό», «που κόβεται με ακρίβεια», αποτέλεσαν το έναυσμα για την παρουσίαση και την διερεύνηση της έννοιας. Η ιστορική αναδρομή της έννοιας κίνησε το ενδιαφέρον των παιδιών και έδωσε πολλά στοιχεία για να αναζητήσουν «χρυσές αναλογίες» στο σώμα τους, στη φύση και να συνδέσουν την έννοια της χρυσής αναλογίας με γνωστά έργα τέχνης και ιστορικά

μνημεία. Με όσο το δυνατόν πιο απλό τρόπο παρουσιάστηκε η ευκλείδιος σχέση του «άκρου και μέσου λόγου» α/β = α+β/α και η αριθμητική τιμή της χρυσής τομής με το συμβολισμό του ελληνικού γράμματος **φ=**1,618…. Στη συνέχεια δόθηκε στους μαθητές το φύλλο εργασίας, όπου έπρεπε να ανακαλύψουν και να συμπληρώσουν τους αριθμούς της ακολουθίας Fibonacci. Μετά την ανακάλυψη της ακολουθίας στη διδασκαλία σημαντικό ρόλο έπαιξε η συνεισφορά της τέχνης μέσω του δομημένου υλικού των ψηφίδων.

Διδασκαλία με την τέχνη του ψηφιδωτού

Στην τέχνη στηρίχτηκαν εκπαιδευτικά προγράμματα, καθώς η τέχνη βοηθάει στη σωματική, γνωστική, κοινωνικοσυναισθηματική και δημιουργική ανάπτυξη. Με τη βοήθεια των ψηφίδων ζητήθηκε από τα παιδιά να φτιάξουν την ακολουθία και παίζοντας να κατασκευάσουν χρυσά ορθογώνια. Για την κατασκευή των χρυσών ορθογωνίων και της χρυσής σπείρας, η τέχνη και συγκεκριμένα η τέχνη του ψηφιδωτού αποτέλεσε ένα φιλικό εργαλείο για ενασχόληση και απόλαυση. Οι ψηφίδες διάφορων χρωμάτων (σε διάσταση 1Χ1) αποτέλεσαν το χειροπιαστό υλικό που βοήθησε σε δυναμικές κατασκευές χρυσών ορθογωνίων. Ο εκπαιδευτικός «ξεκλείδωσε» τη γνώση, με κατάλληλο λόγο και εκφράσεις όπως: «παρατηρήστε», «βρείτε», «τοποθετήστε», «δικαιολογήστε» και «εξηγήστε». Οι μαθητές έφτιαξαν με χρωματιστές ψηφίδες την ακολουθία Fibonacci, κατασκεύασαν χρυσά ορθογώνια, εντόπισαν λόγους και αναλογίες με αναφορά στα χρώματα των ψηφίδων και δημιούργησαν με χρωματιστό σύρμα ένα εικαστικό σελιδοδείκτη στη βάση της χρυσής σπείρας. Οι κατασκευές είχαν από μόνες τους δυναμική εικαστική. Όταν το χρώμα – αναλογία, προστέθηκε στα γεωμετρικά σχέδια, η γεωμετρία μεταμορφώθηκε σε αισθητική γεωμετρία. Οι χρωματιστές ψηφίδες έκαναν τα πράγματα πιο έντεχνα και εκλεπτυσμένα.

Δεύτερο διδακτικό δίωρο

Διδασκαλία μέ τη χρήση των νέων τεχνολογιών

Στο επόμενο δίωρο έγινε μια προσπάθεια εμπέδωσης της γνώσης με τη βοήθεια των Τ.Π.Ε. και συγκεκριμένα με τη χρήση του λογισμικού Geogebra. Η δραστηριότητα έλαβε χώρα στο εργαστήριο υπολογιστών και οι εκπαιδευτικοί είχαν φροντίσει από πριν να είναι εγκατεστημένο στους υπολογιστές των μαθητών το απαιτούμενο λογισμικό.

Οι μαθητές διατήρησαν τις ίδιες ομάδες, με τις οποίες ήδη είχαν συνεργαστεί και κατά το πρώτο δίωρο. Οι ρόλοι του χειριστή και του συντονιστή ζητήθηκαν από τους εκπαιδευτικούς και δόθηκε η ευχέρεια στους μαθητές να επιλέξουν τα άτομα που θα υπηρετήσουν αυτό το ρόλο, ύστερα από μικρή συζήτηση εντός της ομάδας. Κατόπιν τούτου, οι εκπαιδευτικοί παρουσίασαν στο βιντεοπροβολέα το περιβάλλον διεπαφής του λογισμικού και τις βασικές, πλην όμως απαραίτητες, λειτουργίες. Έπρεπε κατανοηθεί εύκολα ο τρόπος λειτουργίας του από τους μαθητές ώστε να μπορέσουν να ακολουθήσουν τις οδηγίες του Φύλλου Εργασίας, χωρίς να χρειαστούν περαιτέρω επεξηγήσεις.

Στη συνέχεια τους δόθηκε το Φύλλο Εργασίας 2. Κάθε ομάδα που θεωρούσε ότι ολοκλήρωνε την πρώτη δραστηριότητα, καλούνταν να την επαναλάβει στον υπολογιστή, ενώπιον των εκπαιδευτικών. Η παρουσίαση -και στην πραγματικότητα επανεκτέλεση- γινόταν από μαθητή διαφορετικό του συντονιστή ή του χειριστή και, καθότι υπήρχε χρόνος μέχρι να ολοκληρώσουν όλες οι ομάδες το έργο τους, επαναλαμβανόταν από όσο το δυνατό περισσότερα μέλη της ομάδας. Μετά την ολοκλήρωση της δραστηριότητας όλων των ομάδων παρουσιάστηκε στην ολομέλεια (από άτομο της ομάδας που ολοκλήρωσε τελευταία) η διαδικασία κατασκευής των χρυσών ορθογωνίων.

Η ίδια περίπου διαδικασία τηρήθηκε και κατά τη δεύτερη δραστηριότητα, η οποία απαιτούσε την κατασκευή χρυσής σπείρας. Μολονότι ήταν δύσκολο το εγχείρημα, μιας και οι οδηγίες περιελάμβαναν «αυστηρώς μαθηματικό» λόγο, οι μαθητές έδειξαν, μετά από αρκετούς πειραματισμούς, να πετυχαίνουν αποτελεσματικά το στόχο. Σε χρόνο λιγότερο απ' αυτόν που αναμενόταν από τους

εκπαιδευτικούς, οι ομάδες ολοκλήρωσαν και ένας μαθητής από την ομάδα που τελείωσε πρώτη παρουσίασε την κατασκευή της χρυσής σπείρας στην ολομέλεια. Κατόπιν τούτου έγινε μια ολιγόλεπτη συζήτηση αναστοχασμού και ολοκληρώθηκε έτσι το δεύτερο διδακτικό δίωρο.

Τρίτο διδακτικό δίωρο

Πολλοί καλλιτέχνες όπως ο Μοντριάν, ο Καντίσκι κ.ά. χρησιμοποίησαν τα γεωμετρικά σχέδια στην τέχνη τους. Σε μια προσπάθεια σύνδεσης της τέχνης με την γεωμετρία, συνθέσαμε ένα μεγάλο ψηφιδωτό ως παρέμβαση στο χώρο, με τα χρυσά ορθογώνια χρωματιστά πλακάκια που κατασκεύασαν τα παιδιά στην ενασχόληση τους με τις ψηφίδες. Με το ερώτημα πού θα μπορούσαμε να τα χρησιμοποιήσουμε πρότειναν: «το δάπεδο, «την διακόσμηση της τάξης», «ένα έργο τέχνης με ψηφιδωτά χρυσά ορθογώνια», «την αλλαγή της αισθητικής της μεταλλικής ντουλάπας της τάξης», «τη διακόσμηση ενός τραπεζιού». Στο τέλος της διαδρομής και για αναστοχασμό της γεωμετρικής έννοιας της χρυσής αναλογίας, τα παιδιά χρησιμοποιώντας τις κατασκευές τους έφτιαξαν το σύμβολο της πόλης μας, το «χρωματιστό Λευκό Πύργο», με πλευρές τους λόγους της χρυσής αναλογίας.

Η δραστηριότητα ολοκληρώθηκε με την προβολή ενός βίντεο για τις εφαρμογές της χρυσής αναλογίας στη φύση, στον άνθρωπο και στα επιτεύγματά του, στην τέχνη και γενικότερα στη ζωή.

Συζήτηση των αποτελεσμάτων

Ευρήματα

- Τα παιδιά με ευκολία ανακάλυψαν και στη συνέχεια κατασκεύασαν την ακολουθία Fibonacci. Το αποτύπωσαν είτε με λόγο «γιατί πρόσθεσα τα δυο τελευταία νούμερα» «σκέφτηκα πώς για να βρούμε τον επόμενο πρέπει να προσθέσουμε τους προηγούμενους» είτε με μαθηματικές πράξεις «γιατί 1+1=2+1=3+2=5+3=8» «1+1=2, 2+1=3, 3+2=5, 5+3=8» (Bruner,1960).

- Ο σχηματισμός των λόγων και του πηλίκου των λόγων ήταν μια εύκολη μαθηματική πράξη που βοήθησε στον προσδιορισμό της χρυσής αναλογίας που την πλησιάζεις όλο και περισσότερο, αλλά δεν την φτάνεις, διότι το $\boldsymbol{\varphi}$ είναι άρρητος αριθμός. «όσο περισσότερο προσεγγίζουμε το πηλίκο φτάνουμε στην τελειότητα το φ», «όσο προχωρούμε δημιουργείται η χρυσή τομή» «όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός φτάνει πιο κοντά το φ» «όσο περισσότερο διαιρούμε τόσο περισσότερο φτάνουμε στον τέλειο αριθμό».
- Δυσκολεύτηκαν στην κατασκευή ορθογωνίων με βάση την ακολουθία και ιδιαίτερα στην κατασκευή της λογαριθμικής σπείρας με την κλασική μαθηματική διδασκαλία. Η δυσκολία εντοπίστηκε στην κατεύθυνση που έπρεπε να αναπτυχθεί το κάθε ορθογώνιο για να μπορεί στη συνέχεια να σχεδιαστεί η λογαριθμική σπείρα. Για το λόγο αυτό στη δεύτερη διδασκαλία επιλέξαμε να προηγηθεί η κατασκευή των ορθογωνίων με ψηφίδες και να ακολουθήσει το φύλλο εργασίας (Κολέζα, 2009).
- Η κατασκευή της ακολουθίας με τις ψηφίδες και στη συνέχεια η κατασκευή χρυσών ορθογωνίων υποστήριξε και διευκόλυνε την κλασική μαθηματική διδασκαλία. Το δομημένο υλικό των ψηφίδων έδωσε τη δυνατότητα της αναπαράστασης της γεωμετρικής έννοιας της χρυσής τομής μέσα στο χώρο. Λειτούργησε ως διαμεσολαβητικό πολιτισμικό εργαλείο για το μετασχηματισμό της έννοιας από τον κόσμο των μαθηματικών στον κόσμο της τέχνης. Βοήθησε τους μαθητές με τις χρωματιστές ψηφίδες να εντοπίσουν ευκολότερα τις σχέσεις των λόγων πάνω στα χρυσά ορθογώνια. Έδωσε στους μαθητές τη χαρά της δημιουργίας και βοήθησε στην σύνδεση των μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο (Κοταρίνου & Σταθοπούλου, 2011).
- Η συνεισφορά της τέχνης ήταν σημαντική. Τα παιδιά με μεγαλύτερη ευκολία κατασκεύασαν τα χρυσά ορθογώνια με τις χρωματιστές ψηφίδες. Προχωρούσαν σε αναδιάταξη του υλικού μέχρι να βρουν την κατάλληλη κατασκευή για να δημιουργηθεί η λογαριθμική σπείρα. Πέρασαν ευκολότερα μέσω της οπτικοποίησης και αναπαράστασης της έννοιας στην κατασκευή με το μολύβι και τον χάρακα στο φύλλο εργασίας. Η συνεργασία και το ομαδικό πνεύμα λειτουργούσε αβίαστα και έτσι η σκέψη του ενός παιδιού

πρόσθετε πάνω στη σκέψη του άλλου για να συνδυάσουν το μαθηματικό με το εικαστικό αποτέλεσμα (Usiskin 1987).

- Η διδασκαλία της έννοιας με το λογισμικό geogebra έδωσε τη δυνατότητα στους μαθητές να συνθέτουν και να ανασυνθέτουν τις κατασκευές τους έως ότου φθάσουν στο τελικό αποτέλεσμα που ήταν η κατασκευή των χρυσών ορθογωνίων και της λογαριθμικής σπείρας. Το λογισμικό προκαλούσε το ενδιαφέρον των μαθητών και συνεισέφερε στην ανάπτυξη διαφορετικών συλλογιστικών διεργασιών από αυτά που ανέπτυξαν στα προηγούμενα στάδια (Jenkins, 2012).
- Ανέσυραν γνώσεις και έννοιες που είχαν ήδη διδαχθεί και τις συνέδεσαν με την καινούργια έννοια. Αυτό έδωσε τη δυνατότητα να κατανοήσουν τις σχέσεις των μαθηματικών εννοιών στην οικοδόμηση της γνώσης.
- Ο σχηματισμός των ορθογωνίων γινόταν με τον ορισμό δύο σημείων. Οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να δοκιμάζουν, να αναιρούν, να επαναλαμβάνουν τις ενέργειες έως ότου επιτύχουν την κατεύθυνση της ανάπτυξης των ορθογωνίων. Ο σχεδιασμός των τεταρτιμορίων (με τον ορισμό των σημείων του κέντρου και της ακτίνας) μέσω του λογισμικού συνέβαλε στην ενεργητική μάθηση και λειτούργησε υποστηρικτικά στη χρήση του παραδοσιακού εργαλείου, του διαβήτη (Ainley et al, 2005).
- Σε όλα τα στάδια η καθοδήγηση του εκπαιδευτικού ήταν σημαντική (Βυγκότσκι, 1993).

Επίλογος

Οι μαθηματικές έννοιες είναι δυνατόν να κατακτηθούν από τους μαθητές όταν διδάσκονται μέσα από δραστηριότητες προσαρμοσμένες στις γνώσεις που κατέχουν και στην αντιληπτική τους ικανότητα.

Οι μαθητές στην παρούσα εργασία, ήρθαν σε επαφή και διδάχτηκαν μέσα από δραστηριότητες τη μαθηματική έννοια της χρυσής τομής η οποία δεν εμπεριέχεται ως έννοια στο αναλυτικό πρόγραμμα (Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης), αξιοποιώντας γνώσεις που συνδέονταν με την έννοια. Κατανόησαν την αναγκαιότητα σύνδεσης των εννοιών για την πρόσκτηση μιας καινούριας μαθηματικής έννοιας. Με τη χρήση των

πολιτισμικών εργαλείων προχώρησαν στο μετασχηματισμό της καθημερινής έννοιας της χρυσής αναλογίας σε μαθηματική έννοια και την αποτύπωσαν με μαθηματικούς όρους. Χρησιμοποίησαν τις γνώσεις τους για τα γεωμετρικά σχήματα, τα χαρακτηριστικά τους, τις σχέσεις μεταξύ τους στην ανάπτυξη και κατασκευή χρυσών ορθογωνίων. Εμβάθυναν σε μαθηματικές έννοιες (κύκλος) στη διαδικασία του σχεδιασμού της λογαριθμικής σπείρας. Συνέδεσαν τις μαθηματικές γνώσεις με τον περιβάλλοντα χώρο, τη φύση, την τέχνη, την ύπαρξή τους.

Ο σχεδιασμός και η ανάπτυξη των δραστηριοτήτων με διαφορετικά μέσα συνέβαλε σημαντικά στην ενεργή συμμετοχή των μαθητών στη συγκρότηση της γνώσης.

Η διαμεσολάβηση και χρήση του κάθε πολιτισμικού εργαλείου κινητοποίησε τους μαθητές και προκάλεσε την ανάπτυξη διαφορετικών συλλογιστικών διεργασιών και πρακτικών στη μαθησιακή διαδικασία (Βυγκότσκι 1993, Κολέζα 2009).

Η τέχνη του ψηφιδωτού έδωσε τη δυνατότητα προσέγγισης της καινούριας μαθηματικής έννοιας με ευχάριστο και δημιουργικό τρόπο αναπτύσσοντας ταυτόχρονα δεξιότητες λεπτής κινητικότητας με τη χρήση των ψηφίδων. Καλλιέργησε την αισθητική τους και συνέδεσε βιωματικά τα μαθηματικά με την τέχνη. Οι μαθητές κατανόησαν το σημαντικό ρόλο των μαθηματικών στην εξέλιξη της τέχνης.

Η χρήση του λογισμικού geogebra τους έδωσε τη δυνατότητα να δράσουν πάνω στο μαθηματικό αντικείμενο, να δοκιμάσουν, να κατασκευάσουν και να εμβαθύνουν σε γεωμετρικές γνώσεις που είχαν διδαχθεί.

Οι μαθητές εργάστηκαν ομαδικά, ανέπτυξαν τη συνεργατικότητα, το διάλογο, τη σύνθεση των απόψεων, την κριτική τους σκέψη και εκφράστηκαν δημιουργικά με την κατασκευή έργων τέχνης.

Η προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών με βιωματικό τρόπο που στηρίζεται στην εμπειρία και στις αποκτημένες γνώσεις των μαθητών στη σχολική τάξη, δημιουργεί ένα σημαντικό πλαίσιο αναφοράς το οποίο εμπλουτίζεται διαρκώς και συμβάλλει στην ανάπτυξη της μαθηματικής τους σκέψης και στη σύνδεση του μαθηματικού κόσμου με τον πραγματικό.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ainley, J., Bills, L., & Wilson, K. (2005). «Designing spreadsheetïbased tasks for purposeful algebra». *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10(3), 191:215.

Bruner, J (1960) *The Process of Education*, Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Chassapis, D. (2004). «The mediation of cultural tools in the learning and teaching of mathematics: A selective outline of research issues», Brian Hudson & Klaus Enser (eds.), *Researching the Teaching and Learning of Mathematics Proceedings of MATHED Intensive Programme 2003 Linz 2005*, IVE- Institut fur Vergleichende Erziehungswissenschaft Publication Series, p.p. 31-45.

Davis, P. J. - R. Hersh (1981), *Η μαθηματική εμπειρία,* Τροχαλία, Αθήνα.

Donaldson, M., (2001). *Η Σκέψη των Παιδιών*, Gutenberg, Αθήνα.

Heath, Sir T.L. (2001), *A History of Greek M athematics*, Oxford at the Clarendon Press, 1921. Ελληνική μετάφραση : *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών*, Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., Αθήνα.

Jenkins, C. (2012). «Microworlds: building powerful ideas in the secondary school» *ICICTE 2012* Proceedings, p.p. 61-69.

Kolb, D. (1984). *Experiential Learning,* New Jersey: Pentice Hall.

Usiskin, Z. (1987). Resolving the continuing dilemmas in school geometry. In M. M. Lindquist, A. P. Shulte (eds.), *Learning and Teaching Geometry, K-12,* (pp. 17-32), 1987 Yearbook, Reston: N.C.T.M.

Vygotsky, L. S., (2000). *Νους στην κοινωνία: Η ανάπτυξη των Ανώτερων Ψυχολογικών Διαδικασιών,* στο Σ. Βοσνιάδου (επιμ.), Α. Μπίμπου και Σ. Βοσνιάδου (μτφ), Gutenberg, Αθήνα.

Walkerdine, V., and Sinha, C. (1978). "The internal triangle: language, reasoning and the social context", στο I. Markova (ed.), *The social context of language*, New York and Chichester: Wiley.

Αργυράκης Δ, Βουργάνας Π, Μεντής Κ, Τσικοπούλου Σ., Χρυσοβέργης Μ. (2003), *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, Βιβλίο Εκπαιδευτικού,* ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Βυγκότσκι, Λ., (1993). *Σκέψη και γλώσσα*, μτφρ. Αντζ Ρόδη, Γνώση, Αθήνα.

Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των Μαθηματικών,* Τόπος, Αθήνα.

Κοταρίνου, Π. & Σταθοπούλου, Χ. (2011) ΄Ένα πανόραμα από τις έρευνες για την αξιοποίηση των τεχνών στη διδασκαλία των μαθηματικών, *9ο διήμερο διαλόγου για τη διδασκαλία των Μαθηματικών*, 15-16 Νοεμβρίου, Αθήνα.

Λεμονίδης, Χ. (2003). *Μια Νέα Πρόταση Διδασκαλίας των Μαθηματικών για τις Πρώτες Τάξεις του Δημοτικού Σχολείου*, Πατάκης, Αθήνα.

Τζανάκης, Κ., & Κούρκουλος, Μ. (2000). «*Η παροχή μαθηματικής Παιδείας και τα χαρακτηριστικά του μαθηματικού σκέπτεσθαι: Η περίπτωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας*». Σύγχρονη Εκπαίδευση, τ.111, 66-73.

Τουμάσης, Μ. (1994). Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών, Gutenberg, Αθήνα.

Χρίστου Κ. & Πίττα – Πανταζή Δ., (2004). Η έννοια και διδασκαλία της δυναμικής γεωμετρίας. Στο Γαγάτσης Αθ., (Ed). *Σύγχρονες τάσεις της διδακτικής των μαθηματικών.* (σελ. 179 – 188). Λευκωσία, Κύπρος.

Βικιπαίδεια , «Χρυσή τομή», http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%A7%CF%81%CF%85%CF%83%CE%AE_%CF%84%CE%BF%CE%BC%CE%AE (προσπελάστηκε στις 11-2-2015).

Γκριμπίζη Ολυμπία: olympizi@gmail.com

Παπάς Αναστάσιος; papastasos@gmail.com

Ρόμπου Μαργαρίτα: mrompou@gmail.com

Σπανοπούλου Ελένη :elspano61@gmail.com

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Περιλαμβάνονται τα Φύλλα Εργασίας που χρησιμοποιήθηκαν.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1

1. **Με αφορμή τα όσα παρακολουθήσατε, μπορείτε να μαντέψετε ποιος αριθμός συμπληρώνει την ακολουθία; Στη συνέχεια περιγράψτε πώς σκεφτήκατε.**

0, 1, 1, 2, 3, 5, ____

Αιτιολόγηση: _____

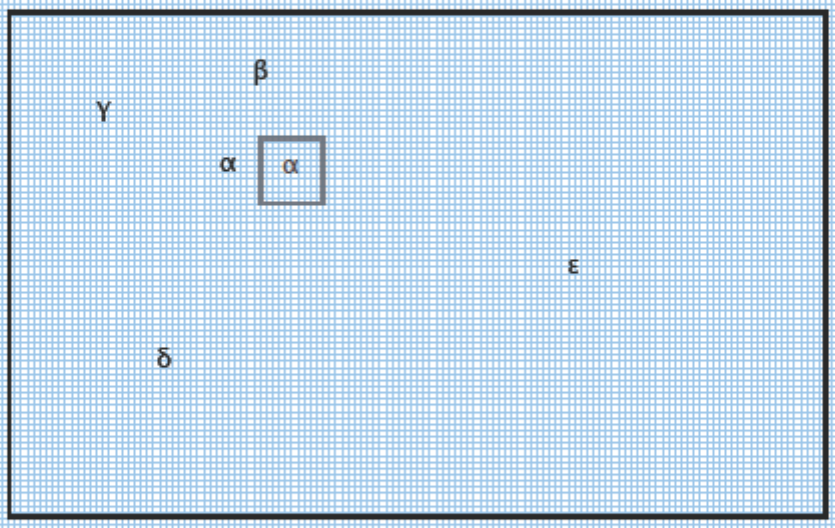
_____

_____

2. Να κατασκευάσετε την ακολουθία Fibonacci, υπολογίζοντας κάθε φορά τον όρο που προκύπτει από το άθροισμα των δύο προηγούμενων όρων.

1, 1, 2, ____, ____, ____, ____, ____, ____, ____, ____, ____, ____, ____, ____

3. Με βάση την κλίμακα Fibonacci να κατασκευάσετε χρυσά ορθογώνια.



Για να το καταφέρετε, ακολουθήστε τα παρακάτω βήματα:

- **Δημιουργήστε στη <u>θέση α</u> ένα τετράγωνο ίσης πλευράς με το σχηματισμένο τετράγωνο.**
- **Θυμηθείτε σε κάθε βήμα να συμπληρώνετε στο κάτω μέρος της σελίδας το μέτρο της πλευράς του κάθε τετραγώνου.**
- **Υπολογίστε τις διαστάσεις του ορθογώνιου [α Χ (α+α)] που σχηματίστηκε και στη <u>θέση β</u> δημιουργήστε ένα τετράγωνο που να έχει πλευρά ίση με τη μεγαλύτερη πλευρά του ορθογωνίου αυτού.**
- **Υπολογίστε τις διαστάσεις του νέου ορθογώνιου που σχηματίστηκε και στη <u>θέση γ</u> δημιουργήστε ένα τετράγωνο που να έχει πλευρά ίση με τη μεγαλύτερη πλευρά του νέου ορθογωνίου. Συνεχίστε έτσι μέχρι να σχηματίσετε και το σχήμα στη θέση ε. Τι παρατηρείτε;**

1 ____ ____ ____ ____ ____ ____

3. Χρησιμοποιώντας την ακολουθία Fibonacci να σχηματίσετε λόγους του μικρότερου προς το μεγαλύτερο αριθμό και να βρείτε το «φ» (πηλίκο).

$\frac{3}{2} = 1,5$, ___ , ___ , ___ , ___ , ___ , ___

Τι παρατηρείτε; Ποια είναι η σχέση του πηλίκου των λόγων που βρήκατε με τον αριθμό φ;

(Ο αριθμός φ είναι ο αριθμός 1.618033988749895…)

_____

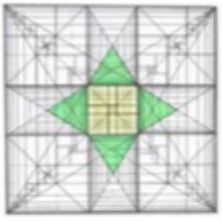
_____

_____

_____

5. Ενώνοντας τις κορυφές των ορθογωνίων που σχηματίσατε στην τρίτη δραστηριότητα θα κατασκευάσετε τη χρυσή σπείρα.

Για να γίνει αυτό, θα πρέπει να να ενώσετε τις δύο απέναντι γωνίες κάθε τετραγώνου με ένα κυκλικό τόξο.

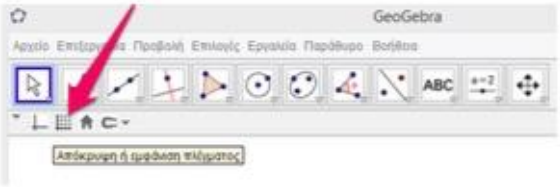


ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2

Να ανοίξετε το λογισμικό Geogebra

Από το μενού **"Options/Language/E-I"** να επιλέξετε ως γλώσσα τα ελληνικά

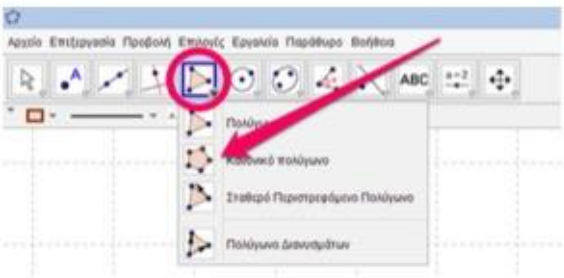
Να επιλέξτε την «**Εμφάνιση πλέγματος**» κάνοντας κλικ στο σχετικό εικονίδιο (αν δεν εμφανίζεται κάντε κλικ στο τρίγωνο που βρίσκεται ακριβώς κάτω από την εργαλειοθήκη)



ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΧΡΥΣΩΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ

Για να κατασκευάστε χρυσά ορθογώνια, αρκεί να κατασκευάζετε διαδοχικά τετράγωνα! Παράξενο σας ακούγεται, αλλά ας δούμε πώς μπορεί να γίνει.

Για να κατασκευάσετε τετράγωνα θα πρέπει πρώτα πρώτα να επιλέξτε το εικονίδιο κατασκευής **κανονικών πολυγώνων**,.



Για την κατασκευή τετραγώνου στο Geogebra, είναι αρκετό να ορίσετε δύο σημεία και να επιλέξετε 4 κορυφές στο σχετικό αναδυόμενο παράθυρο.

Αφού δημιουργήσατε το πρώτο τετράγωνο, τώρα θα κατασκευάσετε άλλο ένα από πάνω του.

Προσέξτε σ' αυτό το σημείο τα εξής:

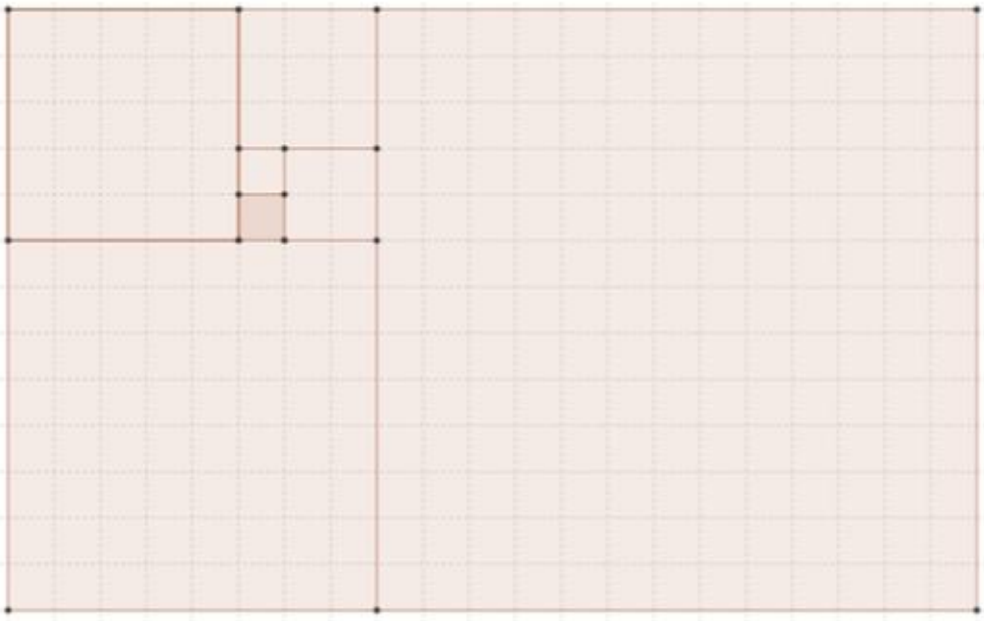
Για να δημιουργήσετε το νέο σχήμα εκεί ακριβώς που το θέλετε να έχετε κατά νου ότι **παίζει ρόλο η σειρά με την οποία επιλέγετε τα σημεία.**

Έτσι:

Πάνω - κάτω	Το νέο σχήμα αναπτύσσεται προς τα **δεξιά**.
Κάτω - πάνω	Το νέο σχήμα αναπτύσσεται προς τα **αριστερά**
Δεξιά - Αριστερά	Το νέο σχήμα αναπτύσσεται προς τα **κάτω**
Αριστερά - Δεξιά	Το νέο σχήμα αναπτύσσεται προς τα **πάνω**

Ενώ κατασκευάσατε δυο τετράγωνα, στην πραγματικότητα κατασκευάσατε ένα ορθογώνιο με διαστάσεις 1 X 2

Επιλέγοντας κάθε φορά τη μεγαλύτερη πλευρά του ορθογωνίου που σχηματίστηκε (πχ. αυτή τη φορά 2 εκ) , να κατασκευάζετε τετράγωνα, ώστε να καταλήξετε στο παρακάτω σχήμα:

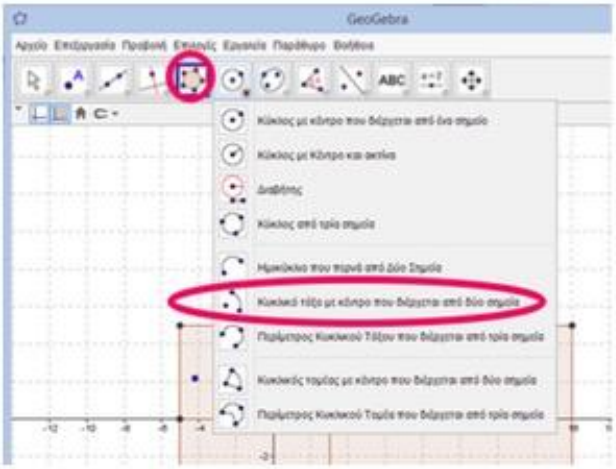


ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΧΡΥΣΗΣ ΣΠΕΙΡΑΣ

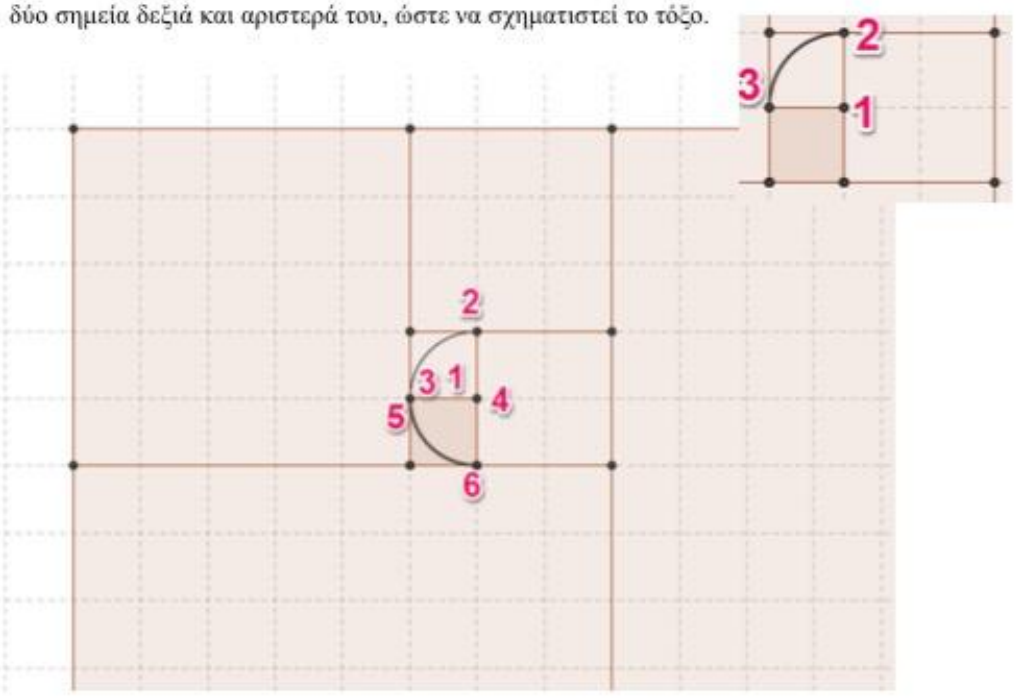
Τώρα θα κατασκευάσετε τη χρυσή σπείρα.

Η χρυσή σπείρα αποτελείται από τα διαδοχικά τόξα που ενώνουν τις κορυφές των τετραγώνων που ήδη κατασκευάσατε.

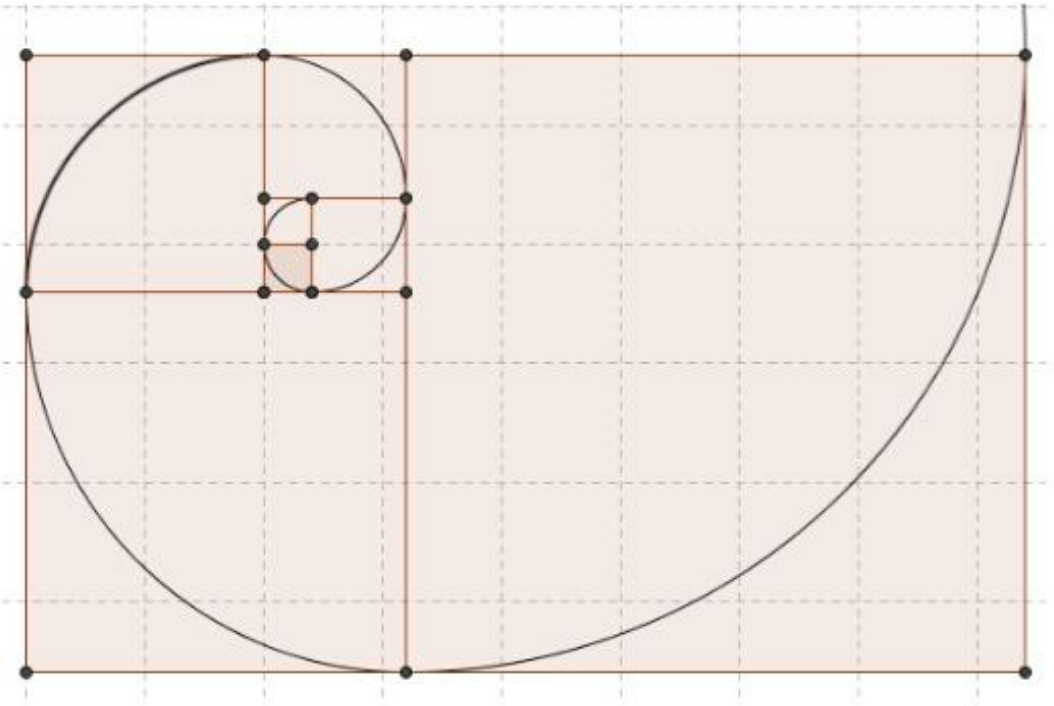
Πριν αρχίσετε την κατασκευή, θα πρέπει να επιλέξετε το εργαλείο «Κυκλικό τόξο με κέντρο που διέρχεται από δύο σημεία»



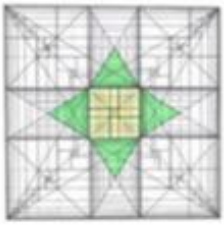
Αρχίζοντας από το κεντρικό τετράγωνο, θα κατασκευάσετε το πρώτο τόξο. Να επιλέξτε πρώτα το σημείο που αποτελεί το κέντρο του κύκλου και στη συνέχεια τα δύο σημεία δεξιά και αριστερά του, ώστε να σχηματιστεί το τόξο.



Επειδή η διαδικασία χρειάζεται πολλή φαντασία και υπομονή, δουλέψτε μεθοδικά και συνεργατικά, για να πετύχετε το αποτέλεσμα που θέλετε.



Καλή επιτυχία!



ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΗΣ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ ΚΑΙ Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΟΥ

Αθανασία Ιγγλέζου

Μαθηματικός

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην Ελλάδα το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας διδάσκεται στις δύο πρώτες τάξεις του Λυκείου από το σύνολο των μαθητών, όμως τα τελευταία χρόνια παρατηρείται μια υποτίμηση του μαθήματος τόσο από τους μαθητές όσο και από τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς. Τα τελευταία 50 χρόνια έχουν πραγματοποιηθεί αρκετές μεταρρυθμίσεις σχετικά με τη διδασκαλία της σχολικής Γεωμετρίας και όπως ήταν φυσικό έχουν επηρεάσει και την ελληνική πραγματικότητα. Στόχος αυτών των μεταρρυθμίσεων είναι η καλύτερη κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών από τους μαθητές που όπως μας πληροφορούν οι έρευνες αντιμετωπίζουν δυσκολία με τον παραγωγικό συλλογισμό. Για την επίτευξή του πραγματοποιήθηκαν αρκετές αλλαγές στα αναλυτικά προγράμματα και τα σχολικά εγχειρίδια, με αποτέλεσμα να υποβαθμιστεί η αξιωματική θεμελίωση του μαθήματος και να δοθεί έμφαση στην αποδεικτική διαδικασία. Όμως πρόσφατες έρευνες μας δείχνουν ότι οι δυσκολίες των μαθητών παραμένουν και τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης (Van Hiele) συνεχίζουν να είναι χαμηλά σε σχέση με το επίπεδο που θα έπρεπε να βρίσκονται στην ηλικία των 15-16 ετών. Επιπλέον η εισαγωγή των Τεχνολογιών Πληροφορίας και Επικοινωνίας (ΤΠΕ) στην εκπαίδευση επιφέρει νέα δεδομένα στη διδασκαλία του μαθήματος με έμφαση στις διαδικασίες της εξερεύνησης, της ανακάλυψης και του ελέγχου.

Στην Ελλάδα λέγοντας σχολική Γεωμετρία, εννοούμε κυρίως τη Θεωρητική Ευκλείδεια Γεωμετρία που διδάσκεται τα τελευταία 30 χρόνια στις δύο πρώτες τάξεις του Λυκείου. Υπάρχουν βέβαια και κεφάλαια στα βιβλία των Γυμνασίων με γεωμετρικό περιεχόμενο καθώς και Αναλυτική και Διανυσματική Γεωμετρία στα βιβλία της Β' Λυκείου. Όμως η Θεωρητική Γεωμετρία που διδάσκεται στις δυο πρώτες τάξεις του Λυκείου είναι υποχρεωτικό μάθημα για το σύνολο των μαθητών και αποτελεί ένα ανεξάρτητο μάθημα Γεωμετρίας. Η κλασική Ευκλείδεια Γεωμετρία υπήρξε για πολλά χρόνια ένα βασικό σχολικό μάθημα, καθώς συμβάλει στην ανάπτυξη της κριτικής σκέψης μέσω του συνδυασμού της εποπτείας των σχημάτων με την ανάγκη ανάπτυξης συλλογισμών. Για την ελληνική μαθηματική εκπαίδευση αποτέλεσε σημαντική συνιστώσα εξυπηρετώντας μια εκπαιδευτική πολιτική, καθώς το μάθημα αποτελεί μια σύνδεση με τον αρχαίο ελληνικό πολιτισμό. Οι σκοποί διδασκαλίας σε συνδυασμό με τη διατήρηση της παράδοσης είχε ως αποτέλεσμα το μάθημα να έχει σταθερή μορφή μέχρι τα τέλη της δεκαετίας του 1960.

Πρόσφατες έρευνες και αναλύσεις, που έχουν δημοσιευτεί στην Ελλάδα προβάλλουν έναν έντονο προβληματισμό σχετικά με τη σχολική Γεωμετρία όπου διακρίνεται μια διάχυτη υποβάθμιση του μαθήματος. Σύμφωνα με διάφορες απόψεις ανθρώπων του χώρου της εκπαίδευσης το μάθημα της Γεωμετρίας φαίνεται να υποτιμείται πρώτα από τους μαθητές και ως συνέπεια έχει επηρεάσει και τους εκπαιδευτικούς. Η κατάσταση αυτή διαμορφώνεται εξαιτίας τριών παραγόντων, οι οποίοι χαρακτηρίζουν τη σχολική γεωμετρία:

(Α) Οι διάφορες αντιλήψεις για τη μορφωτική αξία και τον παιδαγωγικό ρόλο της Θεωρητικής Ευκλείδειας Γεωμετρίας, όπως αυτές φανερώνονται άμεσα ή έμμεσα στα αναλυτικά προγράμματα και βιβλία.

(Β) Οι αντιδράσεις στις απόπειρες εκσυγχρονισμού του μαθήματος με κύριο επιχείρημα τη διατήρηση του Ελληνικού χαρακτήρα της γεωμετρίας.

(Γ) Η καταλυτική επίδραση των εισαγωγικών εξετάσεων στα ΑΕΙ για την ανάπτυξη και την παρακμή του μαθήματος.

Το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας υπέστη πολλές αλλαγές με τις διάφορες μεταρρυθμίσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης στο διεθνή χώρο, οι οποίες όπως ήταν φυσικό επηρέασαν και την Ελλάδα. Συγκεκριμένα, η μεγάλη μεταρρύθμιση της διδασκαλίας των μαθηματικών («Νέα Μαθηματικά»)[1] ξεκίνησε στα τέλη της δεκαετίας του 1950 στις δυτικές χώρες με το σύνθημα «να φύγει ο Ευκλείδης», είχε ως αποτέλεσμα να αναμορφωθεί η σχολική γεωμετρία με την κατάργηση μεγάλου μέρους της παραδοσιακής ύλης (γεωμετρικοί τόποι, κατασκευές, στερεομετρία κτλ) και την εισαγωγή εννοιών από τα σύγχρονα Μαθηματικά. Την ίδια περίοδο στην Ελλάδα διδάσκεται η γεωμετρία τύπου Legendre που δίνει έμφαση στην αυστηρή αποδεικτική διαδικασία με την αξιοποίηση της αριθμητικής και της άλγεβρας (Δούβου, 1998, σελ. 16-17).

Η ριζική αλλαγή του περιεχομένου της σχολικής γεωμετρίας στην χώρα μας παρατηρείται κατά τη διάρκεια της δικτατορίας, με τη σύνταξη νέων αναλυτικών προγραμμάτων το Σεπτέμβριο του 1968 και την έκδοση νέων βιβλίων. Στη θέση της Θεωρητικής Γεωμετρίας τύπου Legendre, που τόνιζε την εμπειρική προέλευση των αξιωμάτων και των βασικών γεωμετρικών εννοιών, εισάγεται η αυστηρή αξιωματική θεμελίωση και ο φορμαλισμός της γεωμετρίας του Hilbert. Η νέα δομή του μαθήματος αποσυνδέει τις γεωμετρικές έννοιες από την εμπειρία και τις αισθήσεις, με ιδιαίτερη προσοχή στην αυστηρή αξιωματική θεμελίωση και με μια υπερβολική διόγκωση του περιεχομένου, μεταθέτει την έναρξη της διδασκαλίας της θεωρητικής γεωμετρίας από τη Γ' Γυμνασίου. Βέβαια το νέο βιβλίο της Γ' Γυμνασίου αποσύρθηκε

[1] Οι αλλαγές ως προς το περιεχόμενο των μεταρρυθμίσεων της δεκαετίας του 1960 καθορίστηκαν στο συνέδριο του Royanmont και αποτέλεσαν τη βάση για όλη τη μεταρρύθμιση. Το περιεχόμενο της γεωμετρίας προκάλεσε τις περισσότερες διαμάχες και αντιπαραθέσεις, σχετικά με τον τρόπο που διδάσκονταν η Ευκλείδεια Γεωμετρία, χωρίς να υπάρχει αυστηρότητα έκφρασης και με το να υπάρχουν ψευτοαποδείξεις. Συμφωνήθηκε η τροποποίηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας τελικά. Οι βασικές έννοιες θα διδάσκονταν διαισθητικά στις μικρές ηλικίες (11-14 χρονών) και στη συνέχεια θα παρουσιαζόταν το αξιωματικό σύστημα. Έτσι η Θεωρητική Γεωμετρία θα αναπτυσσόταν με τη χρήση των διανυσμάτων ή των πραγματικών αριθμών και στη συνέχεια αναμειγνύεται με την άλγεβρα μέσω της μελέτη των πινάκων, οριζουσών, γραφικών παραστάσεων, μιγαδικών αριθμών και πολικών συντεταγμένων.

εσπευσμένα ένα εξάμηνο μετά λόγω της αδυναμίας των ίδιων των εκπαιδευτικών να το κατανοήσουν (Θωμαΐδης, 1991, σελ. 33). Το γεγονός αυτό δέχτηκε αρκετές κριτικές, καθώς αρκετοί ήταν οι μαθηματικοί εκείνοι που πίστευαν ότι η αξιωματική θεμελίωση του Hilbert αντικαθιστούσε την Ελληνική Γεωμετρία, αφού με αυτόν τον τρόπο σε καμία περίπτωση δεν αναπτύσσεται η κριτική σκέψη ενός 15χρονου μαθητή. Μια προσπάθεια αντιμετώπισης αυτής της κατάστασης έγινε την επόμενη χρονιά με ένα νέο αναλυτικό πρόγραμμα, όπου περιορίστηκε σε κάποιο βαθμό η αυστηρότητα της θεμελίωσης στη σχολική Γεωμετρία.

Αυτός ο απόηχος των Θεμελίων του Hilbert στην ελληνική σχολική Γεωμετρία διατηρήθηκε για δύο περίπου δεκαετίες. Δεν έγινε όμως αποδεκτός από τους εκπαιδευτικούς της εποχής, οι οποίοι συνάντησαν μεγάλες δυσκολίες στην προσπάθειά τους να προσαρμοστούν στις νέες αντιλήψεις για τη σχολική Γεωμετρία. Γύρω στο 1985 τα Μοντέρνα Μαθηματικά («Νέα Μαθηματικά») απομακρύνθηκαν από τη σχολική παιδεία, ενώ στις πανεπιστημιακές σπουδές από τα τέλη της δεκαετίας του 1960 μέχρι και σήμερα κυριαρχούν οι ιδέες των Μοντέρνων Μαθηματικών. Με αποτέλεσμα να υπάρχει ασυμβατότητα μεταξύ των σχολικών και μεταγνωστικών Μαθηματικών, δηλαδή της γνώσης του μαθηματικού αντικειμένου μετά την πανεπιστημιακή εκπαίδευση συγκρίνοντας τες με τις σχολικές τους γνώσεις. Το γεγονός αυτό έχει επιπτώσεις στη διδακτική αποτελεσματικότητά τους.

Τα περισσότερα σχολικά βιβλία Γεωμετρίας που εκδόθηκαν από το 1975 μέχρι το 1990 ακολούθησαν την αξιωματική θεμελίωση του Hilbert, αλλά απλοποιώντας την αυστηρή, φορμαλιστική θεμελίωση των βιβλίων του Ι. Ιωαννίδη το 1968. Στο αναλυτικό πρόγραμμα του 1984 οι στόχοι του μαθήματος για την Α’ και Β’ Λυκείου διαμορφώνονται σύμφωνα με τις παιδαγωγικές απαιτήσεις της εποχής, φαίνεται δηλαδή ότι για πρώτη φορά λαμβάνεται υπόψη η Διδακτική των Μαθηματικών. Επομένως με τη μείωση του αριθμού των αξιωμάτων και την εμπειρική προέλευση των αρχικών γεωμετρικών εννοιών διαμορφώθηκε ένα σύστημα θεμελίωσης για σχολική χρήση συνδυάζοντας στοιχεία από τον Ευκλείδη, τον Legendre και τον Hilbert. Το 1990 υιοθετήθηκε το σύστημα Pogorelov που εισήγαγε ένα είδος «αριθμητικοποίησης» και θέτει ως βασική προϋπόθεση για την

αξιωματική θεμελίωσή του το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Όλες οι απόπειρες για την κατάλληλη θεμελίωση της σχολικής Γεωμετρίας είχαν ως συνέπεια αλλεπάλληλες αλλαγές των διδακτικών βιβλίων, ώστε να λυθούν τα προβλήματα διδασκαλίας και να υλοποιηθούν οι στόχοι των αναλυτικών προγραμμάτων.

Ακόμα και σήμερα η θεμελίωση της Γεωμετρίας στηρίζεται στο αξιωματικό σύστημα του Hilbert. Τα τελευταία χρόνια στη χώρα μας διδάσκεται στις τάξεις του Λυκείου η Θεωρητική Γεωμετρία που στηρίζεται στην αποδεικτική διαδικασία και βασικός στόχος της είναι η ανάπτυξη ικανότητας για τη σύλληψη των εννοιών και των σχέσεών τους που είναι απαραίτητες για την κατανόηση και την επίλυση πραγματικών προβλημάτων. Έτσι δίνεται ιδιαίτερη προσοχή στην αξιωματική θεμελίωση με την παραγωγική διαδικασία και οι γνώσεις που έχει κατακτήσει ο μαθητής στο Γυμνάσιο παραγκωνίζονται τελείως. Όλη αυτή η θεμελίωση έχει ως συνέπεια ο μαθητής να μη κατανοεί το αφηρημένο σύστημα μιας και δεν μπορεί να επαληθεύσει τα συμπεράσματά του εποπτικά.

Η διδασκαλία της Θεωρητικής Γεωμετρίας εκτός από το ζήτημα της αξιωματικής θεμελίωσης παρουσίαζε και μια σειρά από χρόνια προβλήματα όπως η αδυναμία ολοκλήρωσης της ύλης και η κατάργηση στην πράξη της διδασκαλίας γεωμετρικών κατασκευών που αντανακλούσαν τις ελλείψεις των βασικών γεωμετρικών γνώσεων των τελειόφοιτων του Λυκείου. Όλα αυτά είχαν σαν αποτέλεσμα το 1995 το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο να προχωρήσει στη σύνταξη νέου αναλυτικού προγράμματος και την προκήρυξη συγγραφής νέων διδακτικών βιβλίων. Η ριζική καινοτομία που εμφανίζεται αφορά την εγκατάλειψη της αξιωματικής θεμελίωσης της σχολικής Γεωμετρίας γεγονός που αποτελεί πραγματική ρήξη με την καθιερωμένη παράδοση και δίνει προτεραιότητα στις διδακτικές ανάγκες στα καθιερωμένα επιστημολογικά κριτήρια μιας μαθηματικής θεωρίας, δηλαδή υιοθετεί ορισμένα βασικά αποτελέσματα της σύγχρονης Διδακτικής των Μαθηματικών. Η καινοτομία αυτή συνάντησε αρκετές αντιδράσεις από φορείς, όπως η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία (Ε.Μ.Ε. 1996, Θωμαΐδης, 1996).

Το βασικό επιστημολογικό γνώρισμα της παραδοσιακής Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι η εμπειρική προέλευση των αρχικών εννοιών και αξιωμάτων σε αντίθεση με την τρέχουσα αντίληψη της αξιωματικής θεμελίωσης των Μαθηματικών. Ανάλογα με τη βαρύτητα που θα δοθεί στο θέμα της θεμελίωσης θα είναι και οι άμεσες συνέπειες στη διδασκαλία της Γεωμετρίας. Η εγκατάλειψη της αξιωματικής θεμελίωσης και η έμφαση στην «αποδεικτική διαδικασία» απαιτούν μια επανεξέταση του προσανατολισμού της διδασκαλίας και έναν επαναπροσδιορισμό της έννοιας της «απόδειξης» στα σχολικά πλαίσια.

Τα θεμελιώδη χαρακτηριστικά της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι η αποδεικτική διαδικασία και η έμφαση στις γεωμετρικές κατασκευές. Στα πλαίσια της Διδακτικής των Μαθηματικών τα χαρακτηριστικά αυτά αποτέλεσαν και αποτελούν αντικείμενο μελέτης και έρευνας. Εμπειρικές έρευνες που πραγματοποιήθηκαν σε διάφορες χώρες έδειξαν ότι η παραδοσιακή διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αδυνατεί να οδηγήσει τους μαθητές στα ανώτερα επίπεδα της γεωμετρικής σκέψης. Αντίστοιχα έρευνες που έχουν γίνει σε σχέση με την αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας, τόσο της παραδοσιακής όσο και των πιο σύγχρονων, έχουν δείξει ότι οι μαθητές δυσκολεύονται στο να κατανοήσουν τους ρόλους των αξιωμάτων και των θεωρημάτων (Δούβου, 1998, Hershkowitz et al, 1990). Μια από τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι περισσότεροι μαθητές είναι ότι δεν μπορούν να αντιληφθούν για ποιο λόγο μαθαίνουν την αποδεικτική διαδικασία, αλλά την θεωρούν δυσνόητη διαδικασία, η οποία επιβάλλεται μέσα από τη Γεωμετρία (Healy & Hoyles, 1998). Η παραπάνω διαπίστωση προέρχεται από την αδυναμία τους στην παραγωγή μαθηματικού συλλογισμού. Βέβαια μια πλήρης κατανόηση του τρόπου μάθησης της αποδεικτικής διαδικασίας είναι αδύνατη, χωρίς τις απαραίτητες δεξιότητες μαθηματικού συλλογισμού.

Μια, επιπλέον, δυσκολία από τη μεριά της διδακτικής που παρατηρείται κατά την εξέλιξη της διδασκαλίας της Γεωμετρίας από το Γυμνάσιο στο Λύκειο έχει να κάνει με τον τρόπο που διδάσκονται οι αποδείξεις. Στο Γυμνάσιο οι μαθητές διδάσκονται τη διαισθητική αιτιολόγηση και κάποιες απλές αποδείξεις, και το βάρος της τυπικής απόδειξης πέφτει στη Γεωμετρία του Λυκείου. Όλο αυτό έχει ως συνέπεια την υποβάθμιση της αποδεικτικής διαδικασίας λόγω της

πίεσης του μεγάλου όγκου της διδακτέας ύλης και των εισαγωγικών εξετάσεων στη τριτοβάθμια εκπαίδευση, καθώς η Γεωμετρία δεν αποτελεί εξεταζόμενο μάθημα και έτσι δεν δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα. Οπότε αν και στόχος του αναλυτικού προγράμματος είναι να δοθεί έμφαση στην αποδεικτική διαδικασία τελικά διαπιστώνουμε πως αυτό είναι δύσκολο να πραγματοποιηθεί. Η υποβάθμιση αυτή γίνεται αντιληπτή με την εξαίρεση πολλών αποδείξεων των θεωρημάτων από την διδακτέα ύλη, την επικράτηση της «ασκησιολογίας», αλλά και την επίδραση των φροντιστηρίων που προτρέπουν τους μαθητές να ασχοληθούν με μαθήματα που θα τους φανούν χρήσιμα στις εισαγωγικές εξετάσεις (Δημητριάδου, 2007).

Ένα μοντέλο στο οποίο στηρίχθηκαν αρκετές έρευνες για τα «ανώτερα επίπεδα γεωμετρική σκέψης» είναι η θεωρία των επιπέδων Van Hiele, στα οποία περιλαμβάνεται η αναγνώριση (εποπτικό), η ανάλυση (περιγραφικό), η διάταξη (αφηρημένο), ο παραγωγικός συλλογισμός και η αυστηρότητα (μεταμαθηματικό). Στη χώρα μας η διδασκαλία της Γεωμετρίας παραμένει παραδοσιακή χωρίς να λαμβάνει υπόψη τα επίπεδα Van Hiele. Οι δυσκολίες ως προς την κατανόησή της από τους μαθητές παραμένουν όχι μόνο στη χώρα μας αλλά και διεθνώς. Αρχικά το πρόβλημα εμφανίζεται στην τάξη της Γ' Γυμνασίου όπου οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τις αποδεικτικές διαδικασίες και γίνεται ακόμα πιο έντονο στην Α' Λυκείου όπου η Γεωμετρία γίνεται ανεξάρτητο μάθημα και θεμελιώνεται αξιωματικά. Οι περισσότεροι μαθητές φαίνεται να προτιμούν να ασχοληθούν με μια δύσκολη άσκηση στην Άλγεβρα παρά με μια άσκηση Γεωμετρίας ακόμα και εύκολη. Έτσι οι μαθητές δημιουργούν μια αρνητική στάση απέναντι στο μάθημα και οι επιδόσεις τους είναι χαμηλές. Για αυτό το λόγο τα τελευταία χρόνια παρατηρείται μια ιδιαίτερη κινητικότητα σε έρευνες γύρω από αυτό το θέμα, δηλαδή κατά πόσο αναπτύσσονται τα επίπεδα Van Hiele και πως βοηθάνε τη μετάβαση στο επόμενο επίπεδο την παραδοσιακή διδασκαλία (Πρίντεζης, 2006).

Στην Ελλάδα ο Ζάχος (2000) προσπάθησε να διερευνήσει την κατανομή των μαθητών στα τέσσερα επίπεδα καθώς και τις δυνατότητες των μαθητών στο μάθημα της γεωμετρίας. Το δείγμα του ήταν μαθητές της Β' Λυκείου οι οποίοι κλήθηκαν να απαντήσουν σε ένα ερωτηματολόγιο βασισμένο σε αυτό του καθηγητή Usiskin. Τα

αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι το 75% των μαθητών ήταν κάτω από το επίπεδο 4, στο οποίο σύμφωνα με τη θεωρία του Van Hiele είναι απαραίτητο να κατέχει ένας μαθητής ώστε να παρακολουθεί το μάθημα της Θεωρητικής Γεωμετρίας. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, πως είναι αναμενόμενο οι μαθητές να αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη διδασκαλία των γεωμετρικών αποδείξεων της γεωμετρίας του Λυκείου σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας.

Η μελέτη των γραπτών επίσημων εξετάσεων αποτελεί μια συνήθη πρακτική στην έρευνα της Διδακτικής. Σε έρευνα που πραγματοποιήθηκε από τον Θωμαΐδη (1998) σε εξετάσεις του 1997 σε 130 μαθητές της Α' Λυκείου. Τα γραπτά αυτά δίνουν μια καλή εικόνα για το επίπεδο της θεωρητικής μαθηματικής σκέψης των μαθητών στο πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Για τη μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών (ποσοστό 70%) οι παραδοσιακές αρετές του μαθήματος, όπως είναι η σαφήνεια στην έκθεση, η ολοκληρωμένη απόδειξη κάθε υπόθεσης, η απόλυτη συνάφεια σχημάτων και συλλογισμών αποτέλεσαν απρόσιτους στόχους. Για να γίνουν πιο κατανοητά τα συμπεράσματα της έρευνας θα εντάξουμε τα προηγούμενα μέσα στο πλαίσιο των επιπέδων Van Hiele, που αποτελεί το πιο διαδεδομένο θεωρητικό μοντέλο για τη μάθηση της Γεωμετρίας. Η πλειοψηφία των μαθητών ύστερα από ένα χρόνο διδασκαλίας της Θεωρητικής Γεωμετρίας δεν υπερβαίνει το 2ο και 3ο επίπεδο Van Hiele, ενώ σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα και το διδακτικό βιβλίο θα έπρεπε να βρίσκονται στο 4ο επίπεδο. Το συμπέρασμα αυτό δείχνει τη διαφορά που υπάρχει μεταξύ Πρακτικής Γεωμετρίας και Θεωρητικής καθώς και ότι επιβάλλεται ο σχεδιασμός της διδασκαλίας του μαθήματος για όλη τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Ακόμα η συγκεκριμένη έρευνα έδειξε τη τεράστια δυσκολία που παρουσιάζει η κατάκτηση από τους μαθητές της έννοιας της μαθηματικής απόδειξης, ιδιαίτερα της συνθετικής μορφής που χαρακτηρίζει τις αποδείξεις των περισσότερων γεωμετρικών προτάσεων. Οι μαθητές δυσκολεύονται να συνδέσουν τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες και συχνά αποδεικνύουν το αντίστροφο της πρότασης που τους ζητείται. Το 45% των μαθητών σε επίσημες προγραμματισμένες εξετάσεις αδυνατεί να αναπαράγει με σωστό τρόπο τις αποδείξεις γεωμετρικών προτάσεων που αποτελούν τα 2/3 της διδακτέας ύλης του βιβλίου.

Οι Selden και Selden (2003) έδειξαν ότι οι μαθητές όταν κατασκευάζουν μια απόδειξη ενός γεωμετρικού θεωρήματος αντιλαμβάνονται με λανθασμένο τρόπο τη συντακτική και σημασιολογική γνώση της. Θεωρούν ότι η κατασκευή ξεκινά από το συμπέρασμα και λειτουργούν αντίστροφα χωρίς να καταλαβαίνουν τα χαρακτηριστικά μιας γεωμετρικής έννοιας χρησιμοποιώντας δύσκολους συμβολισμούς, γλωσσικούς και συμβολικούς, έτσι ώστε να καταλήξουν στο ζητούμενο.

Έρευνα για τα επίπεδα των μαθητών στα ελληνικά σχολεία πραγματοποίησε επίσης ο Τζίφας (2005), που βασίστηκε και αυτός στη θεωρία των επιπέδων Van Hiele και προσπάθησε να εντοπίσει τις δυσκολίες των μαθητών γύρω από τις αποδείξεις της γεωμετρίας καθώς και αν σημειώνεται πρόοδος στο επίπεδο από τη μια τάξη στην άλλη. Το δείγμα αποτελείται από μαθητές Γ' Γυμνασίου, Α' και Β' Λυκείου. Και τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής δεν είναι ενθαρρυντικά σχετικά με το επίπεδο που βρίσκονται οι μαθητές των ελληνικών σχολείων. Διαπιστώθηκε πως οι μαθητές της Γ' Γυμνασίου βρίσκονται στα επίπεδα 1 και 2 κατά 61,8%. Στην Α' Λυκείου το ποσοστό είναι 47,8%, ενώ οι μαθητές της Β' Λυκείου βρίσκονται στο 41,1%. Τέλος το 48,6% του συνόλου βρίσκονται στα επίπεδα 0 και 1. Αυτό δείχνει ότι ένα μεγάλο ποσοστό αδυνατεί να κατανοήσει την Ευκλείδεια Γεωμετρία όπως διδάσκεται στο Λύκειο και έτσι εξηγείται το γεγονός ότι αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη μάθηση των γεωμετρικών αποδείξεων. Σχετικά με την εξέλιξη των επιπέδων κατά τη μετάβαση σε μεγαλύτερες τάξεις η έρευνα έδειξε ότι υπάρχει μετάβαση των επιπέδων Van Hiele προς τα πάνω, η διδασκαλία δηλαδή βελτιώνει το επίπεδο των μαθητών αν και δεν ανταποκρίνεται στο επίπεδό που θεωρητικά έπρεπε να βρίσκονται.

Οι παραπάνω έρευνες μας πληροφορούν την ύπαρξη συσχετισμού μεταξύ των επιπέδων Van Hiele και των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σχετικά με την αποδεικτική διαδικασία. Χωρίς τις απαραίτητες δεξιότητες συλλογισμού, καθώς οι μαθητές δεν βρίσκονται στο «κατάλληλο» επίπεδο, είναι δύσκολο να κατανοήσουν την έννοια της απόδειξης και τη διαδικασία της στα πλαίσια του μαθήματος της γεωμετρίας. Βέβαια υπάρχουν και παράγοντες που επηρεάζουν τις πεποιθήσεις των μαθητών για την απόδειξη στη

γεωμετρία. Μερίδιο ευθύνης για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σχετικά με την αποδεικτική διαδικασία έχουν και οι εκπαιδευτικοί και κυρίως η διδασκαλία που εφαρμόζουν στα πλαίσια της σχολικής τάξης. Η πρακτική της διδασκαλίας τους σχετίζεται με τον τρόπο που αντιλαμβάνονται τις οδηγίες των εκπαιδευτικών προγραμμάτων και πως τις εφαρμόζουν στη σχολική τάξη. Επομένως οι πεποιθήσεις των μαθητών διαμορφώνονται και σύμφωνα με τις πεποιθήσεις των ίδιων των εκπαιδευτικών.

Όλες οι παραπάνω έρευνες που παρουσιάσαμε μας δίνουν μια εικόνα για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές. Μας πληροφορούν πως οι μαθητές αντιμετωπίζουν με φόβο τις αποδείξεις και δυσκολεύονται να κατανοήσουν το συμβολισμό, τη γλώσσα και τον παραγωγικό συλλογισμό πάνω στον οποίο στηρίζονται οι αποδείξεις. Η κατάσταση που επικρατεί σχετικά με τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας δυσαρεστεί και τους εκπαιδευτικούς καθώς θεωρούν ότι ο μεγάλος όγκος της ύλης και τα σχολικά βιβλία δεν βοηθούν στην αντιμετώπιση των δυσκολιών των μαθητών. Επιπλέον οι έρευνες σχετικά με τα επίπεδα Van Hiele δείχνουν ότι οι μαθητές ενώ θα έπρεπε να βρίσκονται στο επίπεδο 4 κατά τη διδασκαλία της Θεωρητικής Γεωμετρίας, οι μαθητές τελικά βρίσκονται στα επίπεδα 2 ή 3. Επομένως ενώ το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών έχει ως στόχο την κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας και της αξιωματικής θεμελίωσης από τους μαθητές στο Λύκειο, παρατηρούμε ότι αδυνατούν να αντεπεξέρθουν σε ικανοποιητικό βαθμό. Οπότε οι έρευνες μας πληροφορούν ότι ο στόχος της αξιωματικής θεμελίωσης ενδεχομένως δεν επιτυγχάνεται από το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών και δείχνουν μια γενικότερη εικόνα των δυσκολιών των μαθητών γύρω από τις αποδείξεις.

Οι συνεχείς εξελίξεις στο χώρο των ΤΠΕ έχουν επηρεάσει την εκπαίδευση. Η χρήση των ΤΠΕ τα τελευταία χρόνια έχει ενισχύσει τη σχέση μεταξύ πειραματισμού και απόδειξης. Οι υπολογιστές έχουν αυξήσει σημαντικά τις δυνατότητες της οπτικής απεικόνισης και για το λόγο αυτό η ερευνητική κοινότητα έχει στραφεί στη συμβολή του δυναμικού περιβάλλοντος στις τυπικές αποδείξεις. Το δυναμικό περιβάλλον μπορεί να αναπτύξει τη γεωμετρική κατανόηση και τη διερεύνηση των σχημάτων με αποτέλεσμα η διαμόρφωση εικασιών να

γίνεται πιο προσιτή στους μαθητές και να αποκτά νόημα. Όλη αυτή η διαδικασία της εξερεύνησης, της ανακάλυψης και του ελέγχου, μπορεί να οδηγήσει στην προσπάθεια να αποδείξουν οι μαθητές αφαιρετικά, καθώς δύσκολα αισθάνονται την ανάγκη θεωρητικής απόδειξης. Πρέπει να τονιστεί ότι ο πειραματισμός δεν οδηγεί στην ανακάλυψη μαθηματικών συμπερασμάτων, αλλά χρειάζεται ο παραγωγικός συλλογισμός ο οποίος μας οδηγεί σε νέα συμπεράσματα και νέες ανακαλύψεις. Στο πλαίσιο αυτό η απόδειξη συστηματοποιείται και συνδέει ορισμούς, αξιώματα και θεωρήματα με μια παραγωγική αλυσίδα εμφανίζοντας την ισχύ μιας μαθηματικής σχέσης (Καρδαμίτσης, 2010). Οι δυνατότητες που παρέχουν τα Δυναμικά Λογισμικά μπορούν να βοηθήσουν στη μεσολάβηση της μετάβασης από το διαισθητικό στο θεωρητικό επίπεδο. Υπάρχει όμως και ο κίνδυνος τα Περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας να προσφέρουν οπτικές και ευρετικές δυνατότητες με αποτέλεσμα στους μαθητές να φαίνονται τόσο εύκολες οι μαθηματικές ιδιότητες και ενδεχομένως να μειώσουν την ανάγκη τους για επαλήθευση των εικασιών τους μέσω των αποδείξεων.

Η αυστηρότητα της αξιωματικής θεμελίωσης της Γεωμετρίας, στη χώρα μας, φάνηκε να είναι σχετική και χρονικά μεταβαλλόμενη. Για αρκετές δεκαετίες εμφανίστηκαν αναλυτικά προγράμματα που είτε προωθούσαν την αυστηρότητα της αξιωματικής θεμελίωσης είτε την απλούστευαν. Οι συνεχόμενες μεταβολές αυτές γίνονταν για ιστορικούς και επιστημολογικούς λόγους καθώς και διδακτικούς. Από μαθηματικής σκοπιάς η αξιωματική θεμελίωση μαζί με την αυστηρή αποδεικτική διαδικασία είναι η ορθή διαδικασία. Όμως από τη σκοπιά της διδακτικής και με δεδομένο ότι αναφερόμαστε σε μαθητές ηλικίας 15-16 χρόνων, οι απαιτήσεις του μαθήματος είναι αρκετά υψηλές και η δυσκολία κατανόησής τους ιδιαίτερα μεγάλη.

Μπορούμε να καταλήξουμε επομένως στο συμπέρασμα πως είναι πολύ δύσκολη η αναζήτηση ενός ιδανικού αξιωματικού συστήματος για τη σχολική τάξη. Δηλαδή, ενδεχομένως είναι ανέφικτο να βρούμε ένα κατάλληλο σύστημα που να συνδυάζει τη μαθηματική ακρίβεια από τη μια μεριά και την ευκολία κατανόησης από την άλλη. Τουλάχιστον κανένα από τα προηγούμενα συστήματα δεν κατάφερε να το πετύχει αυτό και το ίδιο ισχύει και για το ισχύον σύστημα.

Ίσως η επιρροή των ΤΠΕ στην εκπαίδευση να δημιουργεί κατάλληλες συνθήκες ώστε να αναθεωρήσουμε τις αντιλήψεις μας περί αξιωματικής θεμελίωσης της σχολικής Γεωμετρίας. Με τη χρήση των λογισμικών κατά τη διδασκαλία είναι δύσκολο το μάθημα να εξελίσσεται σύμφωνα με την αυστηρή αξιωματική θεμελίωση, καθώς οι ΤΠΕ προσφέρουν κατάλληλες συνθήκες για ανάπτυξη εικασιών μέσω της οπτικοποίησης. Αυτή η διαδικασία δεν μπορεί να συμβαδίσει με έναν τρόπο διδασκαλίας που θα στηρίζεται «καθαρά» στην αξιωματική θεμελίωση. Δηλαδή δημιουργείται η ανάγκη να επανεξεταστεί η αυστηρότητα της αξιωματικής θεμελίωσης στη σχολική τάξη καθώς και πως μπορεί να γίνει η ομαλή ενσωμάτωση των ΤΠΕ. Βέβαια η χρήση των λογισμικών χρήζει μεγάλης προσοχής για να μην παραγκωνιστεί η τυπική αποδεικτική διαδικασία. Επομένως χρειάζεται ένας ομαλός συνδυασμός της αξιωματικής θεμελίωσης και των ΤΠΕ ώστε να μπορούν να συνυπάρχουν χωρίς να δημιουργούν σύγχυση στους μαθητές.

Βιβλιογραφία

Δημητριάδου Ε. (2007). Απόψεις Μαθηματικών Λυκείου για τη σημασία και το ρόλο της απόδειξης στη διδασκαλία των Μαθηματικών. *2ο Εκπαιδευτικό Συνέδριο Γλώσσα, Σκέψη και Πράξη στην Εκπαίδευση*, Ιωάννινα

http://ipeir.pde.sch.gr/educonf/2/09ThetikesEpistimes/dimitriadou/dimitriadou.pdf (ημερομηνία ανάκτησης 10/3/2013).

Δούβου Α. (1998). Το αξιωματικό σύστημα στη Γεωμετρία. *Διάσταση*, τεύχη 3-4, σελ. 3-23.

Ε.Μ.Ε. (1996). Παρατηρήσεις της επιτροπής της Ε.Μ.Ε. για την αξιολόγηση του αναλυτικού προγράμματος της Γεωμετρίας. *Ενημέρωση,* τεύχος 63, σελ. 10-11

Ζάχος, Ι. (2000). Αξιολόγηση του επιπέδου Γεωμετρικής σκέψης van Hiele των μαθητών της Β τάξης του Λυκείου. *Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών IV*, σελ.161-179, Gutenberg, Αθήνα.

Θωμαΐδης Γ. (1991). Οι συντεταγμένες της σχολικής Γεωμετρίας στην Ελλάδα (1960-1990). *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, τεύχος 61, σελ. 27–38.

Θωμαΐδης Γ. (1996). Η διδασκαλία της Θεωρητικής Γεωμετρίας στην Ελλάδα και το νέο αναλυτικό πρόγραμμα από τη σκοπιά της Διδακτικής των Μαθηματικών. *Ερευνητική Διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών*, τεύχος 1, σελ.72-92.

Θωμαΐδης Γ. (1998). Μερικές όψεις της αποτυχίας στην κατανόηση βασικών εννοιών της Ευκλείδειας Θεωρητικής Γεωμετρίας. Στο Μ. Κούρκουλος *et al* [Επιμ.]. *Πρακτικά 1ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών*, σελ. 119-127. Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Κρήτης (Ρέθυμνο).

Καρατρασόγλου Α. (2011). *Το πέρασμα από την Επιχειρηματολογία στην Απόδειξη στην Γεωμετρία: Ο Ρόλος της Οπτικοποίησης.* (Διπλωματική Εργασία για τη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών), Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών, Αθήνα

Καρδαμίτης Σ. (2010). *Η απόδειξη στα Μαθηματικά και σχετικές αντιλήψεις των Μαθηματικών Λυκείου,* (Διπλωματική Εργασία για τη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήματος Μαθηματικών, Αθήνα.

Πρίντεζης Ι. (2006). *Η κατηγορική άποψη των επιπέδων Van Hiele και άλλες οικουμενικές μέθοδοι προσέγγισης των Μαθηματικών*. (Διπλωματική Εργασία για τη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών), Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών, Αθήνα.

Τζίφας Ν. (2005). *Η αξιολόγηση της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης: Επίπεδα Van Hiele και διδακτικές προσεγγίσεις με χρήση λογισμικού*. (Διπλωματική Εργασία για τη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών), Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών, Αθήνα.

Healy, L. & Hoyles, C. (1998) *Justifying and Proving in School Mathematics* (End of Award Report to ESRC). London: Institute of Education, University of London.

Hershkowitz, R. et al. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In: P. Nesher & G. Kilpatrick [eds.] *Mathematics and Cognition: A Research*

Selden, J. & Selden, A. (1995) Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics 29* (2): 123–151.

Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 70-95. Cambrige: Cambridge University Press.

Van Hiele, P. M. (1986). Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education. New York: Academic Press

sissy.inglezou@gmail.com

ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΩΣ ΟΧΗΜΑ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΣΤΟΧΩΝ ΤΟΥ ΔΕΠΠΣ

Αναστασία Καρακώστα

Καθηγήτρια Μαθηματικών/ 1ο Γενικό Λύκειο Βέροιας

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην Ελληνική Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει παραγκωνιστεί, με τη βαρύτητα να δίνεται στην Αναλυτική Γεωμετρία, η οποία είναι μάθημα προσανατολισμού. Λόγω ιστορικής συνέχειας κατέχει σημαντική θέση στο Αναλυτικό Πρόγραμμα, χωρίς όμως να αξιοποιούνται οι δυνατότητες του μαθήματος στην ανάπτυξη μιας σύγχρονης μαθηματικής κουλτούρας. Ο τομέας αυτός των Μαθηματικών βοηθά τους μαθητές όχι μόνο «*να κάνουν*» Μαθηματικά (επίλυση προβλημάτων) αλλά και «*να είναι*» στα Μαθηματικά (L.Radford)[1]. Σε αυτό συντελούν κατά κύριο λόγο οι τρεις βασικές γνωστικές διαδικασίες του μαθήματος της Γεωμετρίας: η Οπτική Αναπαράσταση, η Αιτιολόγηση και οι Κατασκευές. Ο διδάσκων, με την κατάλληλη επιλογή προβλημάτων, έχει τη δυνατότητα να υποβοηθήσει αυτές τις γνωστικές διαδικασίες, έχοντας γνώση της κρυμμένης γνωστικής πολυπλοκότητας και σύνδεσής τους.

Κατ' ανάγκην προκύπτει το ζήτημα των διδακτικών στόχων του μαθήματος και του τρόπου που μπορούν να εξυπηρετηθούν αυτοί οι στόχοι. Σημαντικό ρόλο παίζει η κατάλληλη εστίαση σε επιμέρους θέματα και η αλλαγή της συνήθους οπτικής της διδασκαλίας.

[1] Η πολιτιστική θεωρία της διδασκαλίας και εκμάθησης που υποστηρίζεται από τον L.Radford, υποστηρίζει τη σύνδεση της γνώσης με την ύπαρξη.

1. Το μάθημα της Γεωμετρίας και η υλοποίηση γενικών διδακτικών στόχων: συνέχιση της πολιτισμικής μας κληρονομιάς και σημερινή αναγκαιότητα

Στην αρχαία Ελλάδα οι φιλοσοφικές αναζητήσεις των Ελεατών και οι διαλεκτικές μέθοδοι που χρησιμοποιούσαν, όπως η υπόθεση, η θέση και το αξίωμα, συνέβαλαν στη διαμόρφωση του συγκεκριμένου τρόπου ανάπτυξης των Μαθηματικών. Ο Δημόσιος λόγος και η Δημοκρατία απαιτούσαν επιχειρηματολογία και όχι υποτακτική αποδοχή αυθεντιών και πατροπαράδοτων κανόνων. Χαρακτηριστικό της ελληνικής κουλτούρας ήταν η αμφισβήτηση και η εστίαση στο «*γιατί*» ώστε να διακριθεί η ¨*πραγματική*¨ γνώση από την ¨*άποψη*¨. Αυτή η διάκριση καθώς και το ζήτημα της ¨*ύπαρξης*¨ και της ¨*μη-ύπαρξης*¨ διαμόρφωσαν και την ίδια την Αρχαία Ελληνική γλώσσα, στην οποία οι λογικοί σύνδεσμοι και οι εκφράσεις *«για κάθε...»* ή *«υπάρχει τουλάχιστον ένα...»* ήταν εργαλεία «*πειθούς*». Ο Θαλής έθεσε ως βάση αποδοχής των συλλογισμών την *Αποδεικτική Διαδικασία μέσω του Επαγωγικού συλλογισμού και σ*τα χρόνια του Πλάτωνα, η δραστηριότητα της εκμάθησης των μαθηματικών, των οποίων ο κύριος τομέας ήταν η Γεωμετρία, χρησίμευε ως ένα προπαιδευτικό εργαλείο στη μεθοδολογική έρευνα και πράξη για το συλλογισμό στο Λόγο.

Ο πυρήνας λοιπόν της ελληνικής σκέψης ήταν η διάκριση της *‘¨πραγματικής*¨ γνώσης από την ¨*άποψη*¨ *και α*υτή η διάκριση συνεπάγεται την πρωτοκαθεδρία του Νου, με τις αισθήσεις να παίζουν δευτερεύοντα ρόλο. Κατ’ επέκταση προκύπτει η αναγκαιότητα μιας βαθύτερης διερεύνησης των πραγμάτων, για δύο λόγους: το συμπέρασμα καινούριας πληροφορίας από τις υπάρχουσες, αλλά και έλεγχο μιας κατάστασης ως προς την αλήθεια της. Ήδη από τα ποιήματα του Ομήρου, η σύνδεση αυτού που φαίνεται να συμβαίνει με το ξεγέλασμα επαναλαμβάνεται πολλές φορές (Δούρειος Ίππος, μεταμορφώσεις Θεών, κ.α.). Αξίζει να αναφερθεί και η Αλληγορία του σπηλαίου, με την οποία ο Πλάτων υποστηρίζει ότι τα δεσμά των αισθήσεων αλλά και τα δεσμά των εξουσιαστών, που χειραγωγούν τις αισθήσεις, μας εμποδίζουν να δούμε την πραγματικότητα. Ο μόνος τρόπος για εύρεση της αλήθειας είναι οι αποδείξεις, οι οποίες στηρίζονται στην καθαρή σκέψη του ορθού λόγου, η οποία καλλιεργείται με την κατάλληλη παιδεία.

Στο κοινωνικό λοιπόν αυτό πλαίσιο οφείλεται η μεγάλη ανάπτυξη των μαθηματικών, και η θεωρητική τους προσέγγιση, διαφορετική από αυτήν των Βαβυλωνίων και Αιγυπτίων, την οποία διέκρινε έντονος «πραγματισμός». Ο Ευκλείδης, ο οποίος φοίτησε στην Ακαδημία του Πλάτωνα, κατά τη συγγραφή των Στοιχείων συγκέντρωσε και ιεράρχησε όλα τα θέματα τα οποία είχαν αποδειχθεί από τους προηγούμενούς του, συμπληρώνοντας και τελειοποιώντας πολλά από αυτά.

Αν μεταφερθούμε τώρα στη σημερινή εποχή, παρατηρούμε ότι περισσότερο από ποτέ χρειαζόμαστε ένα μάθημα που να αποτελεί ένα θεμελιακό παιδευτικό κλάδο, πλατιάς εμβέλειας. Το ισχύον ΔΕΠΠΣ[2], επικεντρώνεται στην καλλιέργεια και ανάπτυξη του μαθητή ως μια συνολική οντότητα, με κύριο χαρακτηριστικό την οργανωμένη και κριτική σκέψη. Το μάθημα της Γεωμετρίας είναι ιδανικό πεδίο άσκησης για την ανάπτυξη αυτών των γενικών διδακτικών στόχων, οι οποίοι σε τελική ανάλυση παραμένουν αναλλοίωτοι.

2. Καθορισμός ύλης με βάση τους γενικούς διδακτικούς στόχους

Η προσωπική εμπειρία στην τάξη και πολλές δημοσιευμένες έρευνες αναδεικνύουν το γεγονός της αποτυχίας της διδασκαλίας του μαθήματος. (Αργύρη, 2010. Τζίφας, 2005. Θωμαΐδης, 2000). Δημιουργείται λοιπόν το ζήτημα του πως μπορούν να εξυπηρετηθούν οι παραπάνω στόχοι. Με την αυστηρή προσήλωση στην αξιωματική θεμελίωση και το καθαρό περιεχόμενο του μαθήματος ή με μία «οικονομικά» επιλεγμένη ύλη, προφυλαγμένη από τις πολυπλοκότητες, υπηρετώντας όμως τους παραπάνω στόχους;

[2] ….., *εφόσον τα Μαθηματικά:*
Ασκούν του μαθητή στην μεθοδική σκέψη, στην ανάλυση, στην αφαίρεση, στη γενίκευση, στην εφαρμογή, στην κριτική και στις λογικές διεργασίες και του διδάσκουν να διατυπώνει τα διανοήματά του με τάξη, σαφήνεια, λιτότητα και ακρίβεια. Αναπτύσσουν την παρατηρητικότητα, την προσοχή, τη δύναμη αυτοσυγκέντρωσης, την επιμονή, την πρωτοβουλία, τη δημιουργική φαντασία, την ελεύθερη σκέψη, καλλιεργούν την αίσθηση της αρμονίας, της τάξης και του ωραίου και διεγείρουν το κριτικό πνεύμα.(ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΟ ΕΝΙΑΙΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, σελ. 305)

Σίγουρα είναι πολύ δύσκολο να γίνει κατανοητό από το μαθητή ένα πλήρες σύστημα αξιωμάτων ώστε να γίνει πλήρης ανάπτυξη του μαθήματος, αποδεικτικά και πέραν της εποπτείας. Από την άλλη όμως πρέπει να τονιστεί η σημασία μιας αξιωματικής θεμελίωσης, η οποία δεν στηρίζεται μόνο στην εποπτεία. Το κυριότερο εμπόδιο στις θεωρητικές αποδείξεις είναι η απορία του μαθητή στο γιατί πρέπει κάτι να αποδειχθεί, αφού αυτό είναι φανερό: «*Κυρία, αυτό δε φαινόταν από το σχήμα;*»[3] Εδώ μπορεί ο διδάσκων να θέσει διάφορα προβλήματα στα οποία αυτό που φαίνεται είναι διαφορετικό από αυτό που ισχύει ώστε να πεισθεί ο μαθητής για την πραγματική υπεροχή των αποδείξεων, οι οποίες χρησιμεύουν όχι μόνο στην τακτοποίηση της διαίσθησης και της εμπειρίας αλλά και στον έλεγχό τους. Η έμφαση επομένως μπορεί να δοθεί σε «εμπλουτισμένα» θέματα στα οποία θα υπάρχουν και οι αντίστοιχες θεωρητικές αποδείξεις. Οι ασκήσεις να μην είναι πολύπλοκες αλλά προσεκτικά επιλεγμένες για να εξυπηρετούν τους γενικούς διδακτικούς στόχους. Ως παράδειγμα αναφέρω το θέμα της ομοιότητας. Δεν εξυπηρετούν κανένα διδακτικό στόχο οι πολύπλοκες ασκήσεις οι οποίες εμπλέκουν λόγους οι οποίοι πρέπει να αθροιστούν, να πολλαπλασιαστούν, διαιρεθούν κ.ο.κ. για να αποδειχθεί το ζητούμενο. Η ουσία του θέματος είναι η μοντελοποίηση (μεγέθυνση –σμίκρυνση), οι κλίμακες, αποστάσεις απρόσιτων σημείων, σύνδεση με τριγωνομετρία, χάρτες, επέκταση σε σύγχρονα θέματα (Φράκταλς), σύνδεση με Φιλοσοφία και Τέχνη. Τελικά δηλαδή να μεθοδευτεί κατάλληλα η παρουσίαση της ύλης, ανά επιλεγμένο θέμα.

Ένα άλλο μεγάλο ζήτημα είναι ότι στην πράξη δεν διδάσκονται οι γεωμετρικές κατασκευές και οι γεωμετρικοί τόποι, τα οποία αποτελούν θεματικό πυρήνα της Γεωμετρίας. Οι γεωμετρικές κατασκευές, εκτός από την αισθητική απόλαυση, την ευχαρίστηση της δημιουργίας ενός «αντικειμένου» και τη σύνδεσή τους με την Τέχνη, παρέχουν και μεθοδολογικά εργαλεία για πλατιά επιστημονική σκέψη: Ανάλυση,

[3] Το πρόβλημα αυτό έχει εντοπιστεί διεθνώς ως ένα μεγάλο εμπόδιο. Ενώ η εικονική αναπαράσταση στηρίζει και ενισχύει τη γεωμετρική διαίσθηση, μπορεί να αποτελέσει και τροχοπέδη στην ανάπτυξη του γεωμετρικού συλλογισμού, τον οποίο ο μαθητής θεωρεί άχρηστο αφού οι σχέσεις είναι εμφανείς από το σχήμα. Mesquita (1998)

Σύνθεση, Απόδειξη, Διερεύνηση. Μία άσκηση κατασκευής τριγώνου με κανόνα και διαβήτη, όταν δίνονται τρία ευθύγραμμα τμήματα, παρέχει περισσότερα από μια άλλη πολύπλοκη. Εξάλλου και τα λογισμικά της Δυναμικής Γεωμετρίας προαπαιτούν τέτοιες κατασκευαστικές γνώσεις.

Όσον αφορά τους γεωμετρικούς τόπους, με αυτούς ασχολείται κυρίως η Αναλυτική Γεωμετρία. Και εδώ μπαίνει τώρα το θέμα της καθαρότητας του περιεχομένου της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Ήδη, η καθαρότητα του μαθήματος της Αναλυτικής Γεωμετρίας έχει καταργηθεί. Στην επίλυση πολλών προβλημάτων εμπλέκονται και γεωμετρικές γνώσεις καθώς η αντιμετώπιση μόνο με μεθόδους Αναλυτικής Γεωμετρίας αυξάνει τη δυσκολία. Γιατί λοιπόν να μην το δούμε και αντίστροφα; Ανάλογα το πρόβλημα, να επιλέγεται ο πιο κατάλληλος τρόπος αντιμετώπισής του: της Ευκλείδειας ή της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Υπάρχουν ενδιαφέροντα θέματα γι' αυτό όπως αυτή του ευθυγράμμου τμήματος το οποίο ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου, η απόδειξη ότι η διάμεσος τραπεζίου είναι παράλληλη και ίση με το ημιάθροισμα των βάσεων, η αντίστοιχη πρόταση για το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων του, κ.λ.π. Το κέρδος από μία τέτοια αντιμετώπιση θα είναι διπλό. Αφ' ενός μεν ο μαθητής θα βρεθεί σε μια θέση απόφασης για τη στρατηγική που θα ακολουθήσει να λύσει μια άσκηση, αλλά και επίσης θα αντιληφθεί ότι τα μαθηματικά είναι πολιτισμικά δημιουργήματα, μοντέλα αντιμετώπισης προβλημάτων, που η ίδια η φύση των προβλημάτων τα έχει δημιουργήσει και αναπτύξει. Για την υλοποίηση των παραπάνω στόχων προτείνεται τα μαθήματα της Ευκλείδειας και της Αναλυτικής Γεωμετρίας να γίνονται από τον ίδιο διδάσκοντα και να μεθοδευτεί η παρουσίαση της ύλης με προσεκτική επιλογή των ασκήσεων.

3. Βασικές γνωστικές διαδικασίες του μαθήματος της Γεωμετρίας οι οποίες καθιστούν το μάθημα ιδανικό για την πραγματοποίηση των γενικών στόχων του ΔΕΠΠΣ

Η Οπτική Αναπαράσταση, η Αιτιολόγηση και οι Κατασκευές, αποτελούν τρεις βασικές γνωστικές διαδικασίες, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους και ανατροφοδοτούν η μία την άλλη κατά ένα πολύπλοκο τρόπο. Ο διδάσκων πρέπει να είναι ενήμερος για τη βαρύτητα αυτών των διαδικασιών στη γνωστική ανάπτυξη του μαθητή και τα εμπόδια που αυτός συναντά.

3.1 Οπτική Αναπαράσταση.

Μέσω των αναπαραστάσεων δίνεται η δυνατότητα διαχείρισης της πληροφορίας, εύρεσης λύσεων σε σύνθετες καταστάσεις αλλά επίσης αναδεικνύεται γενικότερα η διαμεσολαβούσα φύση της σκέψης στην ερμηνεία των πραγμάτων. Ειδικά στη Γεωμετρία η μετάβαση από ένα Σχέδιο – Εικόνα (σημαίνον) στο Γεωμετρικό Σχήμα που αναπαριστά (κλάσεις ισοδυναμίας – σημαινόμενο) είναι μια σύνθετη διαδικασία ιδιαίτερης δυσκολίας. Χαρακτηριστικό του τελευταίου είναι η διπλή του φύση: η της συγκεκριμένης εικόνας που αναπαρίσταται στο χαρτί ή στην οθόνη ενός Η/Υ και της εννοιολογικής (Fischbein & Mariotti 1997).

Σε ένα γεωμετρικό σχήμα, η διαδικασία μετάβασης από το «τι βλέπω» στο «πως το βλέπω» αλλά και «πως μπορώ να το δω» είναι πολύπλοκη. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι το γεωμετρικό σχήμα είναι ο «προφορικός λόγος» της Γεωμετρίας, με την έννοια της γρήγορης επικοινωνίας. Εξ άλλου, η Γεωμετρία αποτελεί μια «κοινωνική γλώσσα» (Bakhtin, 1986). Και όπως συμβαίνει με κάθε γλώσσα, κοινωνεί στους μαθητές την πολιτιστική της αξία με συνέπεια να επηρεάζονται οι ενέργειες και η σκέψη τους.

3.1.1 Τι βλέπω: Το πρώτο στάδιο προσέγγισης ενός σχήματος είναι η αντιληπτική κατανόησή του, η ταυτοποίησή του, δηλαδή ότι πρόκειται για ένα γεωμετρικό σχήμα (Duval, 1995). Ακολουθεί η διαδικασία μετάβασης από το ένα και συγκεκριμένο αντικείμενο που απεικονίζεται, στην ολική μορφή του σχήματος δηλαδή στην κλάση όλων των αντικειμένων που το σχήμα εν δυνάμει αναπαριστά. Αυτή τη μετάβαση τη βοηθάει η κατασκευή του σχήματος με γεωμετρικά

όργανα (κανόνα, διαβήτη ή κάποιο λογισμικό σε Η/Υ) ακριβώς γιατί έτσι γίνεται εμπέδωση των χαρακτηριστικών εκείνων που ταυτοποιούν τη «*φόρμα*» με το «*περιεχόμενο*» (Byers και Erlwanger, 1984).

Ένα πολύ μεγάλο γνωστικό εμπόδιο είναι η αγκύλωση της φόρμας με την τυπική αναπαράσταση του σχήματος. Αυτή η τυπική αναπαράσταση, βεβαίως, δρα βοηθητικά στην οπτική μνήμη για γρήγορη ανάκληση του γεωμετρικού αντικειμένου και των ιδιοτήτων του, όμως είναι και πηγή λαθών. Οι κύριοι λόγοι είναι ότι είτε δεν βοηθούν το μαθητή να αναγνωρίσει καταστάσεις οι οποίες δε μοιάζουν με τις τυπικές αναπαραστάσεις (Λεμονίδης, 1993), ή οδηγούν το μαθητή σε λανθασμένη προσέγγιση επίλυσης. Το τελευταίο οφείλεται στο ότι οι μαθητές αποδίδουν ιδιότητες οι οποίες είναι συμπτωματικές και αφορούν το συγκεκριμένο στιγμιότυπο σχήματος που βρίσκεται μπροστά τους. Χαρακτηριστικές περιπτώσεις τυπικών αναπαραστάσεων είναι τα ύψη ενός αμβλυγωνίου τριγώνου, οι προβολές, σχήμα φόρμας πεταλούδας στο Θεώρημα του Θαλή (Λεμονίδης, 1992), το σχήμα του ρόμβου όπου οι διαγώνιες είναι οριζόντια και κάθετη, τα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα. Για να είναι πετυχημένο το σύμβολο της φόρμας θα πρέπει να περικλείει όλες τις σχηματικές αναπαραστάσεις, και σε αυτό βοηθούν ιδιαίτερα τα λογισμικά της γεωμετρίας.

Ο διδάσκων πρέπει συνεχώς να το έχει στο νου του και να χρησιμοποιεί όλους τους δυνατούς σχηματισμούς γιατί η ταύτιση ενός σχήματος με την αντίστοιχη γεωμετρική έννοια είναι γι' αυτόν πολλές φορές αυτονόητη. Έτσι παραβλέπει το γεγονός ότι ο σαφής και ρητός διαχωρισμός ανάμεσα στις αναπαραστάσεις και το ίδιο το αντικείμενο είναι σημαντικότατο κομμάτι της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών και γι' αυτό θα πρέπει να αποτελεί και σημαντικό κομμάτι της διδασκαλίας τους (Duval, 1993 σελ.37-38).

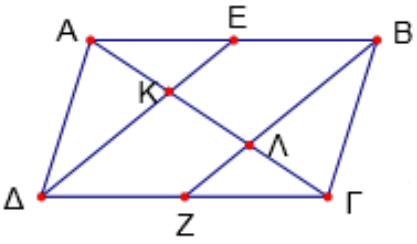
3.1.2 Πως το βλέπω: Το δεύτερο στάδιο αφορά τη λειτουργική κατανόηση του σχήματος, έχει δηλαδή εννοιολογικό βάθος. Σχετίζεται με την ικανότητα αναδιοργάνωσης του σχήματος και εύρεσης των δομικών χαρακτηριστικών για ανακάλυψη σχέσεων που δεν ήταν εμφανείς με την αντιληπτική κατανόηση. Απαιτείται υψηλό επίπεδο αφαιρετικής ικανότητας και ευελιξία αναπαραστάσεων. Εδώ η περιορισμένη τυπική αναπαράσταση αποτελεί ισχυρό γνωστικό εμπόδιο. Γι' αυτό το λόγο η Sfard (1991), προτείνει μια σύνθεση αλλά

και σύμπραξη του σχηματικού με τον λειτουργικό τρόπο σκέψης. Η κατάκτηση της φόρμας διασφαλίζει την πλήρη δομική προσέγγιση της έννοιας, από την κατασκευή της έως το σύνολο των ιδιοτήτων της, ενώ η λειτουργική συνεπάγεται την ερμηνεία της μαθηματικής έννοιας ως διαδικασίας και προφανώς την χρήση της, ως: *«...μια δυναμική μάλλου, παρά ως μια ενεργή ουτότητα η οποία αρχίζει να υπάρχει όταν οι συνθήκες το επιβάλλουν σε μια ακολουθία δράσεων»* (Sfard, 1991 σελ. 4).

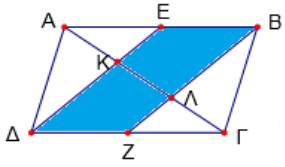
Οι απλοί γεωμετρικοί τόποι της μεσοκαθέτου, της διχοτόμου, του κύκλου, των παραλλήλων είναι ιδανικά θέματα άσκησης για τους μαθητές αφού σε αυτούς συνυπάρχουν και οι δύο συνιστώσες, η δομική και η λειτουργική. Παραδείγματος χάριν, στην περίπτωση της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος, δομική συνιστώσα είναι η καθετότητά της στο ευθύγραμμο τμήμα, στο μέσον του καθώς και η απαγκύστρωση από την τυπική αναπαράσταση της οριζόντιας θέσης του ευθυγράμμου τμήματος. Η λειτουργική παρέχει τη χαρακτηριστική ιδιότητα της μεσοκαθέτου και στην περίπτωση του τριγώνου τη γνώση ότι το σημείο τομής των τριών μεσοκαθέτων είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου. Η ανατροφοδοτική συνύπαρξη των δύο αυτών συνιστωσών ενισχύεται με τη δράση της γεωμετρικής κατασκευής της μεσοκαθέτου ενός δοθέντος ευθυγράμμου τμήματος, με κανόνα και διαβήτη.

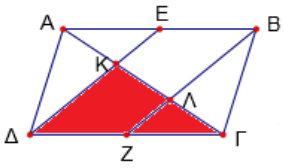
Υπάρχουν πολλές ασκήσεις οι οποίες δεν είναι πολύπλοκες, αλλά είναι εξαιρετικά πεδία εξάσκησης. Παραθέτουμε τέσσερα χαρακτηριστικά παραδείγματα:

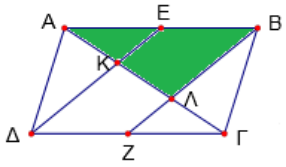
1. Αν Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ΔΕ και ΒΖ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΑΓ[4].



Ο μαθητής σε αυτά πρέπει να διακρίνει τα υποσχήματα τα οποία οδηγούν στη λύση. Συνήθως αυτά δίνονται απ' ευθείας από τον διδάσκοντα ή από το μαθητή που θα σηκωθεί στον πίνακα και έχει καταλάβει τη λύση που του έδωσε κάποιος άλλος.







Αυτό που προτείνουμε είναι να δείξουμε στο μαθητή τον τρόπο εύρεσης αυτών των υποσχημάτων, χρησιμοποιώντας την κλασική μέθοδο της Ανάλυσης (αντίστροφης διαδικασίας)[5]: «*Αφού θα δείξουμε ότι Λ μέσο της ΚΓ και ήδη Ζ είναι μέσο της ΔΓ, κατ' ανάγκην πρέπει ΖΛ*

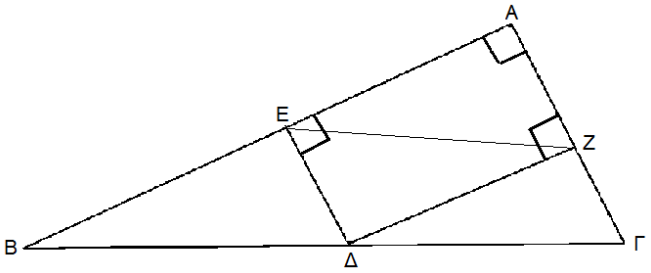
---

[4] Άσκηση 4 από τις Αποδεικτικές Ασκήσεις του κεφαλαίου 5, σελ. 111 του σχολικού βιβλίου Γεωμετρίας. ΟΕΔΒ Έκδοση Γ' 2003. Η άσκηση αυτή αποτελεί παράδειγμα και σε άρθρο του Duval *(1998), Geometry from a Cognitive Point of View. In C. Mammana and V. Villani (Eds),* Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI study. *Dordrecht: Kluwer Academic Press, σελ. 41*

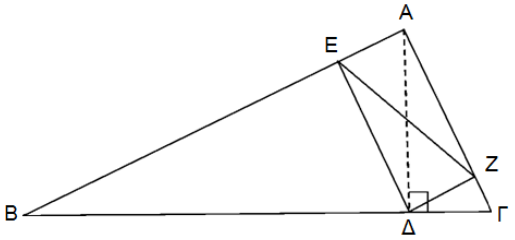
[5] Παρά τις κατευθύνσεις του ισχύοντος Αναλυτικού προγράμματος της Γεωμετρίας, οι οποίες τονίζουν ιδιαίτερα την αξία της εύρεσης της πορείας μιας απόδειξης μέσω της Ανάλυσης – Σύνθεσης, η συνήθης τακτική είναι αυτή της απ' ευθείας άμεσης απόδειξης με τη δημιουργία υποερωτημάτων που καθοδηγούν την εξελικτική πορεία της επίλυσης.

να είναι παράλληλη με την ΔΚ, δηλαδή ΔΕ με ΒΖ. Έχουμε και ότι ΕΒ παράλληλη με τη ΔΖ, άρα οδηγούμαστε στο να αποδείξουμε αρχικά ότι το ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο». Αυτή η απλή μέθοδος σκέψης αναδεικνύει στο μαθητή το γεγονός της ύπαρξης στρατηγικών επίλυσης και αυξάνει την αυτοεκτίμησή του. Φυσικά προαπαιτούμενο είναι ήδη ο μαθητής στο Γυμνάσιο να έχει κατακτήσει τα βασικά, δηλαδή τη διάκριση των δεδομένων από τα ζητούμενα.

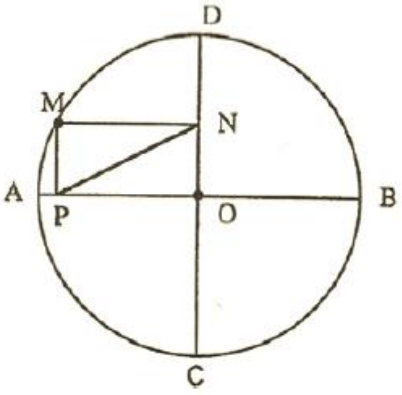
2. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α ορθή). Από τυχαίο σημείο Δ της υποτείνουσας φέρνω παράλληλες προς τις κάθετες πλευρές ΑΒ και ΑΓ που τέμνουν τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Ποια θέση πρέπει να πάρει το σημείο Δ της ΒΓ ώστε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΕΖ να είναι το μικρότερο δυνατό;



Αυτή η άσκηση αναδεικνύει την ομορφιά της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Εκεί όπου μπορεί να χρησιμοποιηθεί δίνει εξαιρετικά κομψές λύσεις. Τη λύση δίνει η δομική συνιστώσα (ΑΕΔΖ ορθογώνιο) και η λειτουργική συνιστώσα (ισότητα διαγωνίων).

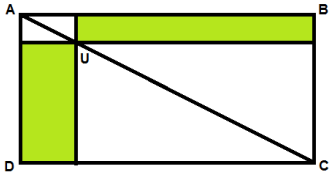


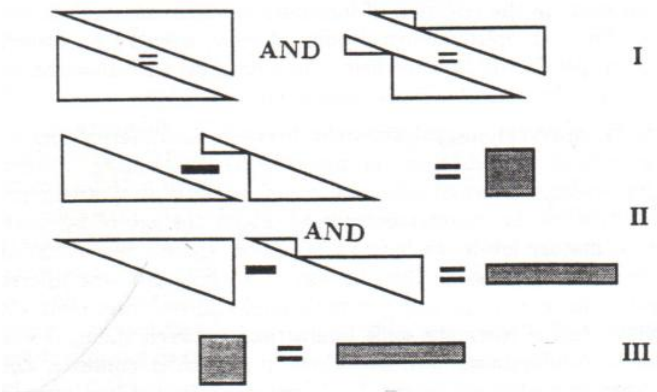
3. Ένα παρόμοιο θέμα είναι και η ακόλουθη άσκηση: Στον κύκλο του σχήματος οι διάμετροι ΑΒ και DC τέμνονται κάθετα. Από τυχαίο σημείο Μ του κύκλου φέρνουμε τις κάθετες ΜΡ και ΜΝ προς τις διαμέτρους ΑΒ και DC. Να δείξετε ότι παρ' όλο που η θέση του Μ στον κύκλο μεταβάλλεται, το ΡΝ παραμένει σταθερό (Fischbein, 1993).



Στην παρακάτω άσκηση (Duval, 1998), εκτός από λειτουργική κατανόηση και διαχωρισμό υποσχημάτων, εμπλέκεται και διαδικασία «γεωμετρικών πράξεων» :

4. Αν U τυχαίο σημείο της διαγωνίου του παραλληλογράμμου ABCD, να δείξετε ότι τα χρωματισμένα ορθογώνια είναι ισοδύναμα





3.1.3 Πως μπορώ να το δω: Το προηγούμενο στάδιο της λειτουργικής κατανόησης, εφοδιάζει σταδιακά το μαθητή και με κάτι παραπάνω: α) τη δυνατότητα επίκλησης βοηθητικής αναπαράστασης για την εύρεση λύσης β) την ικανότητα αναδιοργάνωσης του σχήματος και εύρεσης άλλων δομικών χαρακτηριστικών, τα οποία απλοποιούν το πρόβλημα.

Όσον αφορά την πρώτη περίπτωση, χαρακτηριστική άσκηση είναι η εύρεση του πλήθους των χειραψιών που ανταλλάσουν μεταξύ τους ν άτομα, καθώς επίσης και η άσκηση 7 της σελίδας 101 του σχολικού βιβλίου Γ' Γυμνασίου: «*Στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου μιας χώρας κάθε ομάδα έδωσε με όλες τις υπόλοιπες ομάδες δύο αγώνες (εντός και εκτός έδρας). Αν έγιναν συνολικά 240 αγώνες, πόσες ήταν οι ομάδες που συμμετείχαν στο πρωτάθλημα;*» Η αναπαράσταση των ατόμων ή ομάδων με κορυφές πολυγώνου και η ενέργεια (χειραψία, αγώνας) με πλευρά, οργανώνει τη σκέψη και βοηθά στην επίλυση του προβλήματος.

Στη δεύτερη περίπτωση θα αναφέρουμε δύο βασικά παραδείγματα από τη βιβλιογραφία: Το πρώτο παράδειγμα είναι η αλλαγή διάστασης, μια βασική γνωστική διαδικασία η οποία αλλάζει τον τρόπο με τον οποίο βλέπουμε το σχήμα. Μάλιστα ο Duval υποστηρίζει τη θέση ότι αυτή η αλλαγή διάστασης μπορεί να παίξει ευρετικό ρόλο[6]: αυτό γίνεται όταν τα μαθηματικά αντικείμενα ή οι ιδιότητες οι οποίες σχετίζονται με την απόδειξη μπορούν να θεωρηθούν ότι ανήκουν σε σχηματισμό υψηλότερης διάστασης από τη διάσταση των σχημάτων που αντιπροσωπεύουν αυτά τα αντικείμενα στο αρχικό σχήμα. Ως παράδειγμα αναφέρεται η κατασκευή τετραγώνου εγγεγραμμένου σε δοθέν τρίγωνο (Λεμονίδης, 1990)[7]

Το δεύτερο παράδειγμα είναι το γνωστό πρόβλημα των σπίρτων (Hershkowitz & Arcavi –problem of matches):

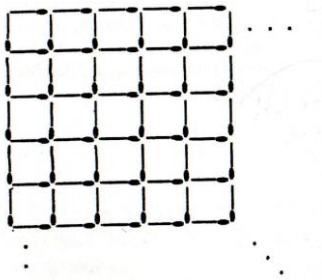
Το παρακάτω σχήμα είναι μια τετραγωνική διάταξη σπίρτων, η οποία αποτελείται από μικρότερα τετράγωνα, με μήκος πλευρά ένα σπίρτο.

---

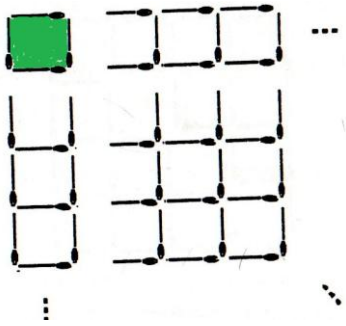
[6] Duval (1998), Geometry from a Cognitive Point of View. In C. Mammana and V. Villani (Eds), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI study. Dordrecht: Kluwer Academic Press, p 44

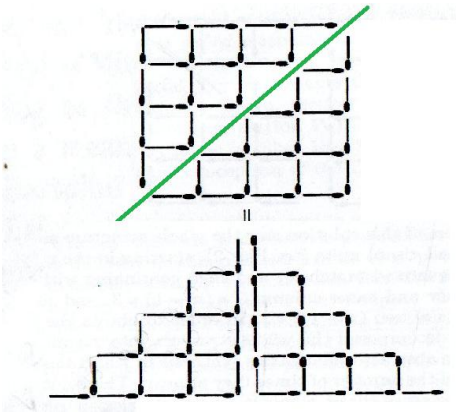
[7] Lemonidis, E. C.(1990) Conception, realization et resultants d' une experience d'enseignement de l'homothetie, Strasbourg, These U.L.P.

Προσπάθησε να μαντέψεις τον αριθμό των σπίρτων που χρειάζονται για ένα τετράγωνο πλευράς 5 σπίρτων. 7 σπίρτων. Εξήγησε τις απαντήσεις σου. Πόσα σπίρτα χρειάζονται για ένα τετράγωνο πλευράς n σπίρτων;



Δίνονται δύο χαρακτηριστικές λύσεις: Η πρώτη βασικά στηρίζεται στον τρόπο κατασκευής του μεγάλου τετραγώνου: αρχίζουμε κατασκευάζοντας ένα αρχικό πλήρες τετραγωνάκι και κατόπιν χτίζουμε μεγαλώνοντας το με 3 σπίρτα κάθε τόσο στην ίδια γραμμή και στήλη. Η δεύτερη λύση βασίζεται σε αναδόμηση του σχήματος (με κοπή και επικόλληση) και στηρίζεται στη λειτουργική συνιστώσα της γνώσης ότι η διαγώνιος του τετραγώνου το χωρίζει σε δύο ίσα ισοσκελή τρίγωνα. Έτσι η αναδόμηση του σχήματος δημιουργεί άλλη δομική συνιστώσα.





3.2 Αιτιολόγηση

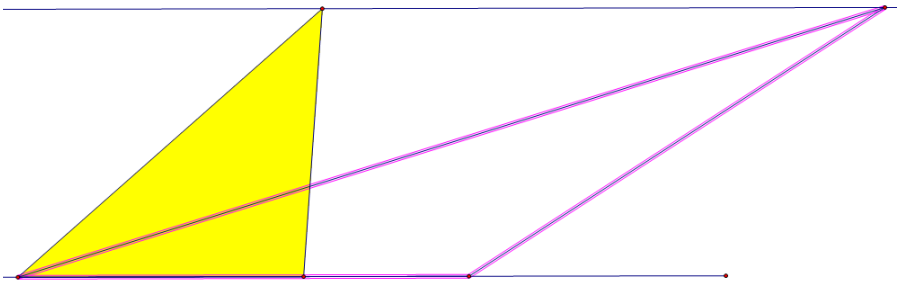
Η μαθηματική απόδειξη ως μία ανθρώπινη δραστηριότητα απαιτεί όχι μόνο κατανόηση του ορισμού των εννοιών και των λογικών διαδικασιών, αλλά επίσης διαίσθηση για το πώς και γιατί δουλεύει. (Tall, 2000). Η αιτιολόγηση είναι ο πυρήνας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και οι μέθοδοι που αναπτύσσονται (επαγωγική, παραγωγική, άτοπος απαγωγή) ενισχύουν γενικά την επιχειρηματολογία και διευρύνουν τα όρια της σκέψης και πέραν των Μαθηματικών, καθιστώντας το μάθημα πλατιάς εμβέλειας. Τονίζεται η ιδιαίτερη φύση του μαθήματος ως το καταλληλότερο πεδίο εκμάθησης και εξάσκησης σε λογικούς συλλογισμούς.

Την αξία των αποδείξεων αναδεικνύουν οι εξής λόγοι:

- εξαγωγή νέας πληροφορίας από δοθείσες, εξήγηση διαφόρων «γεγονότων» και γενικότερα καλλιέργεια της ικανότητας επιχειρηματολόγησης
- υπέρβαση των δυσκολιών που πιθανώς να προέκυπταν από επιμέρους μετρήσεις
- έλεγχος εγκυρότητας. Ειδικά αυτό το σκέλος, το οποίο όπως ήδη τονίστηκε αποτελεί και ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του ελληνικού πολιτισμού, έχει ιδιαίτερη βαρύτητα γιατί βοηθά το διδάσκοντα να υπερπηδήσει εμπόδια στάσης των μαθητών απέναντι στην αναγκαιότητα των φορμαλιστικών αποδείξεων. Αξίζει να αφιερωθεί

χρόνος στο κεφάλαιο των εμβαδών της Β΄ Λυκείου και να δοθεί στους μαθητές το ερώτημα που τέθηκε από τον Πρόκλο, τον αρχαίο σχολιαστή του Ευκλείδη[8] και το οποίο έρχεται σε πλήρη σύγκρουση με τη διαίσθηση: «*Ποιο από τα δύο παρακάτω τρίγωνα, έχει μεγαλύτερο εμβαδό; το τρίγωνο με πλευρές (5, 5, 8) ή το τρίγωνο με πλευρές (4.95, 4.95, 7);*»

Οι μαθητές μπορούν να το δουν σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας και κατόπιν να υπολογίσουν τα εμβαδά και να διαπιστώσουν ότι αυτό που έχει όλες τις πλευρές του μικρότερες έχει τελικά το μεγαλύτερο εμβαδόν.



Επίσης αξίζει να σχολιαστούν και οι παρόμοιες προτάσεις 35η και 37η του πρώτου βιβλίου των Στοιχείων του Ευκλείδη. Σύμφωνα με αυτές, όλα τα παραλληλόγραμμα (αντίστοιχα, τρίγωνα), που βρίσκονται ανάμεσα σε δύο δοθείσες παράλληλες ευθείες και με δοθείσα τη βάση τους στη μία από τις δύο παράλληλες, έχουν ίσο εμβαδόν.

Τους μαθητές εκπλήσσει το γεγονός ότι ενώ τα τρίγωνα έχουν την ίδια βάση και συγχρόνως αυθαίρετα μεγάλη περίμετρο, η οποία τείνει στο άπειρο, το εμβαδόν τους παραμένει σταθερό. Ο Πρόκλος σχολιάζει το γεγονός ότι αυτή η κατάσταση είχε φανεί παράδοξη στους αρχαίους που δεν είχαν γεωμετρική παιδεία. Επίσης ότι αυτό το

[8] «Σχολιασμός των Στοιχείων» (Commentary on the Elements, εκδ. Friedlein), στο Εις Πρώτον Ευκλείδου Στοιχείων 403,14-404,14

εκμεταλλεύονταν πολλοί για να αποκτήσουν κτήματα μικρότερης περιμέτρου και μεγαλύτερου εμβαδού[9],[10]: «*..Και οι συμμετέχουντες στη διαίρεση ενός κτήματος παραπλάνησαν μερικές φορές τους υπόλοιπους … Έχοντας αποκτήσει κτήμα μεγαλύτερης περιμέτρου, το αντάλλαξαν αργότερα με κτήμα μικρότερης περιμέτρου και έτσι, λαμβάνοντας περισσότερα στην ανταλλαγή, κέρδισαν τη φήμη για ανώτερη ευτιμότητα.*»

3.3 Κατασκευές

Οι γεωμετρικές κατασκευές παρέχουν σπουδαία μεθοδολογικά εργαλεία για πλατιά επιστημονική σκέψη: Ανάλυση, Σύνθεση, Απόδειξη, Διερεύνηση και συνδέονται άμεσα με γεωμετρικούς τόπους. Τα βήματα μιας κατασκευής απαιτούν επεξεργασία ιδιοτήτων και χαρακτηριστικών και έτσι οδηγούν σε μια πλήρη ενσωμάτωση του νοητικού αντικειμένου (δομική και λειτουργική κατανόηση)[11]. Επιπλέον απαιτούν δράση και παράγουν αποτέλεσμα.

Ειδικά το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας ευνοεί τη δυνατότητα δημιουργίας διαδικαστικού αντικειμένου (procept)[12] Π.χ. ένα τετράγωνο μπορεί να δημιουργηθεί από συμμετρία ως προς την υποτείνουσα ενός ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου, ο ρόμβος από το συμμετρικό ενός ισοσκελούς τριγώνου ως προς τη βάση του κ.α.

Η σχεδίαση ενός γεωμετρικού σχήματος σε περιβάλλον Η/Υ απαιτεί τη χρήση του ορισμού ή των ιδιοτήτων του ώστε συρόμενο να διατηρεί την οντότητά του. Επομένως η γνώση της λογικής των γεωμετρικών κατασκευών, στις περισσότερες των περιπτώσεων, είναι προαπαιτούμενη. Η προσωπική εμπειρία έχει δείξει ότι βοηθά σε

---

[9] *Εις Πρώτον Ευκλείδου Στοιχείων* 403,5-14

[10] Νεγρεπόντης Σ, Φαρμάκη Β «Η «παράλογη» αποτελεσματικότητα των Μαθηματικών στις άλλες επιστήμες», http://thalesandfriends.org

[11] *θεωρία* APOS (Action-Process-Object), Dubinski 1991

[12] Σημαίνει τη διαδικασία (process) που παράγει ένα αντικείμενο (object) και ένα σύμβολο (symbol) που αντιπροσωπεύει είτε τη διαδικασία είτε το αντικείμενο. Ο όρος αυτός εισήχθηκε πρώτη φορά το 1994 σε άρθρο των

πρώτη φάση να διδάσκεται η γεωμετρική κατασκευή με κανόνα και διαβήτη (απλές κατασκευές, βασικοί γεωμετρικοί τόποι) και κατόπιν να ακολουθεί περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας. Σε κάθε περίπτωση η χρήση της τελευταίας απαιτεί προσεκτικό σχεδιασμό επειδή ο διδάσκων έχει προϋπάρχουσα τη μαθηματική παιδεία που του επιτρέπει να παρατηρεί, επαληθεύοντας αυτό που ήδη ξέρει. Επίσης πρέπει να υπάρξει ιδιαίτερη προσοχή ώστε η εμπειρική παρατήρηση να μην πάρει τη θέση της τυπικής απόδειξης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bakhtin, M. (1986) *Speech Genres and Other Late Essays,* Austin, University of Texas Press.

Dubinsky, E. (1991) Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (ed.) *Advanced mathematical thinking,* Dordrecht, The Netherlands, Kluwer, 95-123

*Duval, R. (1995) «*Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processings», *In R. Suttherland & J. Mason (eds), Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education,* Berlin, Springer, 142-157.

Duval, R. (1998) « Geometry from a Cognitive Point of View*». In C. Mammana and V. Villani (Eds),* Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI study. Dordrecht, Kluwer Academic Press

Fischbein, E. (1993) «The theory of figural concepts», *Educational Studies in Mathematics,* 24 (2), 139- 62

Mesquita, A. L. (1998). «On Conceptual Obstacles Linked with External Representation in Geometry», The Journal of Mathematical Behavior, 17 (2), 183-196

Eddie Gray and David O. Tall στο Journal for Research in Mathematics Education.

Radford, L. (1997) «On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics», *For the learning of mathematics*, 17, *26-33.*

Sfard, A. (1991) «On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin», *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.

Tall, D. (2000) «What is the object of the encapsulation process?» *Journal of Mathematical Behavior*, 18(2), 1-19.

Θωμαΐδης Γ., Πούλος Α. (2006) *Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας*, Θεσσαλονίκη, Εκδόσεις Ζήτη

Λεμονίδης Χ. (1993) «Επίδραση των τυπικών αναπαραστάσεων στη συμπεριφορά του μαθητή. Παραδείγματα από τη Γεωμετρία». *Εισήγηση στο 4ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ψυχολογικής Έρευνας. ΕΛΨΕ* Θεσσαλονίκη, 27-30 Μαΐου 1993. Περίληψη στα πρακτικά σελ. 198.

Στράντζαλος, Χ (1989) *Η Εξέλιξη των Ευκλείδειων και των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών* (μέρος πρώτο) Αθήνα, Εκδόσεις Καρδαμίτσα, Δεύτερη Έκδοση

ΥΠ.Ε.Π.Θ. (1999) Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Γυμνασίου και Ενιαίου Λυκείου. *ΦΕΚ* Τεύχος Δεύτερο. Αρ. Φύλλου 1342

tasakarakosta@gmail.com

ΨΗΦΙΔΩΣΗ ΚΑΙ ΕΜΒΑΔΟΝ

Αρίσταρχος Κατσάρκας

Δάσκαλος, Πτυχιούχος Μαθηματικός, MSc Διδακτικής Μαθηματικών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η μέτρηση του εμβαδού, καθώς και κάθε άλλου συνεχούς μεγέθους, γίνεται με τον ορισμό μονάδων μέτρησης και περιλαμβάνει την εφαρμογή αρκετών διανοητικών δεξιοτήτων και την κατανόηση απαιτητικών εννοιών, όπως η έννοια της *ποσότητας*, της *διατήρησης*, της *μέτρησης κατά προσέγγιση*, *της μονάδας μέτρησης* ειδικά όταν έχουμε *σχήματα ακανόνιστα*, ή οι μονάδες είναι *ακατάλληλες*. Η κάλυψη επιφανειών με τη χρήση *ανεπίσημων και αυθαίρετων μονάδων* είναι μια καλή εισαγωγή στις μετρήσεις με πρόοδο στην ίδια *μη τυπική μονάδα* και τέλος σε τυπικές μονάδες. Η *ψηφίδωση* (tesselation) μιας επίπεδης επιφάνειας είναι ο τεμαχισμός ενός επιπέδου χρησιμοποιώντας ένα ή περισσότερα γεωμετρικά σχήματα που ονομάζονται ψηφίδες που δεν αλληλοεπικαλύπτονται, ούτε αφήνουν κενά. Εκ του ορισμού της, λοιπόν, η ψηφίδωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε όλα τα στάδια της διδασκαλίας του εμβαδού. Η παρουσία της τόσο σε διάφορες μορφές τέχνης, όσο και στη φύση, μπορεί να αποτελέσει κατάλληλο θέμα για μια *διαθεματική διδασκαλία* της έννοιας του εμβαδού.

Η εργασία αυτή δεν έχει σαν στόχο την εκτεταμένη ανάλυση της αλλά θα παρουσιάσει μόνο όσα είναι απαραίτητα και χρησιμοποιήθηκαν στο σχεδιασμό μιας διδασκαλίας για το εμβαδόν.

Δακριτά και συνεχή ποσά

Από την αρχή της ανθρώπινης ύπαρξης τέθηκε το πρόβλημα της μέτρησης ποσοτήτων ώστε να γίνει αντιληπτό το μέγεθός τους. Το πρόβλημα αυτό απασχολήθηκε κυρίως με δύο είδη ποσοτήτων, τις διακριτές και τις συνεχείς. Όσον αφορά τις διακριτές ποσότητες, δηλαδή ποσότητες που αποτελούνται από ξεχωριστά, ομοειδή αντικείμενα, η λύση ήταν η καταμέτρησή τους.

Για τις συνεχείς ποσότητες όμως, όπως είναι το μήκος, το εμβαδόν, ο όγκος, ο χρόνος, αργότερα το χρήμα και πολλές άλλες, αυτή η λύση δεν είναι εφαρμόσιμη. Έπρεπε να βρεθεί μια μονάδα μέτρησης, δηλαδή ένα ομοειδές προς την ποσότητα μέγεθος που να θεωρηθεί μονάδα, κα με αυτήν να διαιρεθεί η προς μέτρηση ποσότητα για να οριστεί το μέγεθός της. Η διαδικασία ορισμού τέτοιων μονάδων μέτρησης δεν ήταν ποτέ εύκολη, και η εφαρμογή τους πάντα προκαλούσε περαιτέρω προβλήματα και ασάφειες που απαιτούσαν καινούριους ορισμούς και κανόνες. Αυτή, άλλωστε, ήταν και η αιτία που οδήγησε στην κατάρριψη πολλών μαθηματικών θεωριών και στην εφεύρεση νέων συνόλων αριθμών.

Απαραίτητες δεξιότητες και έννοιες

Η μέτρηση του εμβαδού, που ουσιαστικά θα μας απασχολήσει στην παρούσα εργασία, όπως και κάθε άλλου συνεχούς μεγέθους, περιλαμβάνει την εφαρμογή αρκετών διανοητικών δεξιοτήτων και την κατανόηση ορισμένων απαιτητικών εννοιών. Η μέτρηση είναι μια προέκταση του αριθμού και μας παρέχει ευκαιρίες για να αναπτύξουμε δεξιότητες μέσα σ' αυτή την περιοχή. Παρόλα αυτά, υπάρχει μια ξεκάθαρη διάκριση ανάμεσα στους αριθμούς και τις μετρήσεις. Οι αριθμοί είναι μια έννοια που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε χωρίς να τη συσχετίσουμε με κάποιο αντικείμενο, ενώ, όπως εξηγούν οι Williams και Shuard (1970:52) «οι μετρήσεις πάντα αναφέρονται σε πραγματικές καταστάσεις, είτε πρόκειται για το μήκος ενός μονοπατιού, είτε για την πίεση ενός λάστιχου».

Η έννοια της «*ποσότητας*», που μας δίνει το σκοπό της μέτρησης, δηλαδή του «πόσο μεγάλο» ή «πόσο μικρό» είναι κάτι, είναι απαραίτητη. Η έννοια αυτή είναι θεμελιώδης οντολογικά και επιστημονικά, και έχει απασχολήσει τα μαθηματικά και τη φιλοσοφία από αρχαιοτάτων χρόνων με τις απόψεις του Αριστοτέλη και του Ευκλείδη, κατά τη διάρκεια των αιώνων έχει εμπλέξει μεγάλες μορφές της επιστήμης όπως ο Isaac Newton, και έχει φτάσει μέχρι τις μέρες μας μέσω των προσπαθειών να υπάρξουν νέοι ορισμοί που να φωτίζουν το θέμα από άλλες οπτικές. Μέσα της ενυπάρχουν πολλές άλλες μαθηματικές έννοιες, όπως για παράδειγμα η αναλογία.

Απαραίτητες είναι και οι έννοιες της *«σύγκρισης»* και της «*μεταβατικότητας*». Η ικανότητα να συγκρίνουμε έχει θεμελιώδη θέση στα μαθηματικά, σύμφωνα με τη επικρατούσα θεώρηση του εποικοδομισμού, και είναι απαραίτητη στις μετρήσεις αφού η ουσία κάθε μέτρησης είναι η *σύγκριση* ενός μεγέθους με ένα άλλο που αποτελεί τη μονάδα μέτρησης. Η μεταβατικότητα είναι μια σημαντική μαθηματική ιδιότητα που εφαρμόζεται στη μέτρηση επειδή μας επιτρέπει να διατάξουμε ένα σύνολο με περισσότερα από δύο στοιχεία. Αν γνωρίζουμε ότι «το a είναι μακρύτερο από το b» και «το b είναι μακρύτερο από το c» τότε συνάγεται ότι «το a είναι μακρύτερο από το c». Έχουμε λοιπόν τη δυνατότητα να συγκρίνουμε το a και το c μέσα από τη σχέση τους με το b. Έχουμε επιτρέψει στο b να δράσει σαν ένα διαμεσολαβητικό μέτρο. «Κανείς δεν μπορεί να έχει την παραμικρή ιδέα πώς λειτουργεί ένας χάρακας αν δεν μπορεί να κάνει και να καταλαβαίνει τέτοιες αναφορές» (Nunes & Bryant, 1996:76). Ακόμη και η σύγκριση δύο επιφανειών μπορεί να γίνει μόνο μέσω της σύγκρισής τους με μια τρίτη επιφάνεια, αυτήν της μονάδας μέτρησης, και άρα χρειάζεται τις παραπάνω έννοιες.

Ο Piaget αναγνώρισε την έννοια της «*διατήρησης*» ως ένα βασικό δείκτη της πνευματικής ανάπτυξης ενός παιδιού και ως ένα ζωτικής σημασίας συστατικό για την κατανόηση της μέτρησης. Η γνώση ότι ο όγκος του νερού σε ένα ψηλό ποτήρι δεν αλλάζει όταν μεταφερθεί σε ένα χαμηλό ποτήρι, ή ότι τα δύο κομμάτια ενός σχισμένου φύλλου χαρτιού έχουν την ίδια επιφάνεια που είχαν και προηγουμένως, είναι η γνώση ότι οι μετασχηματισμοί δεν έχουν επίδραση στην ισοδυναμία (Haylock & Cockburn, 1997).

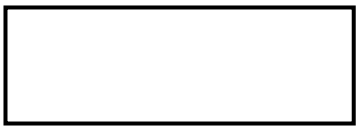
Η σύλληψη της έννοιας της *μέτρησης κατά προσέγγιση* είναι, επίσης, ζωτικής σημασίας γιατί, ενώ τα μεγέθη μπορεί να έχουν ένα ακριβές μέτρο, η μέτρηση μπορεί μόνο να είναι κατά προσέγγιση. Σύμφωνα με τον Haylock, η προσέγγιση είναι η κύρια αρχή όλων των μετρήσεων και η έννοια αυτή γίνεται ακόμη πιο δύσκολη μέσα στο πολύ ακριβές πλαίσιο της μαθηματικής επιστήμης (Haylock and Cockburn, ο.π.).

Η σύλληψη της *έννοιας της μονάδας* έχει αποδειχθεί ιδιαίτερα επίπονη, τόσο για παιδιά, όσο και για ενήλικες και είναι απαραίτητη στις μετρήσεις μεγεθών. Κατά τη μέτρηση διαφόρων μεγεθών οι μονάδες μέτρησης διαφοροποιούνται, τόσο σε επίπεδο υποδιαιρέσεων ή πολλαπλάσιων μιας μονάδας (π.χ. μέτρο, εκατοστό, χιλιόμετρο), όσο και σε επίπεδο διαφορετικών μονάδων (π.χ. μίλι, γιάρδα, ίντσα). Αυτό περιπλέκει τα πράγματα σε μια ήδη εξ ορισμού δύσκολη έννοια. Μια μονάδα 'είναι εξ ορισμού αυτό από το οποίο κάθε πράγμα που υπάρχει καλείται ένα' όπως αναφέρεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη, και μπορεί το ίδιο να συντίθεται από μονάδες. Η σύνθεση μονάδων είναι μια πράξη αφαίρεσης (Behr κ.ά., 1997).

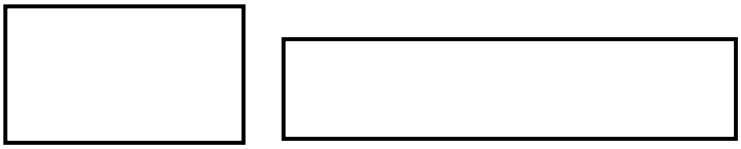
Στα προηγούμενα πρέπει, τέλος, να προσθέσουμε ότι η έννοια της «τιμής της μονάδας» μας μεταφέρει στην έννοια της *«κλίμακας»*. Εκτός από την ανάγκη να γνωρίζουμε ότι κάτι είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από κάτι άλλο, θα πρέπει να μπορούμε να αντιληφθούμε και κατά πόσο μεγαλύτερο ή μικρότερο είναι σε μια κλίμακα σχετική με αυτό που μετράμε.

Ειδικότερα για το εμβαδόν πρέπει να επισημάνουμε τα παρακάτω:

Εμβαδόν είναι η ποσότητα της επιφάνειας που περικλείεται από ένα σαφώς ορισμένο κλειστό όριο. Παρόλο που εισάγεται αρκετά αργότερα στην εκπαίδευση, η κάλυψη μιας επίπεδης επιφάνειας με επαναλήψεις ενός συγκεκριμένου σχήματος επιτρέπει στα παιδιά μικρότερης ηλικίας να πειραματιστούν με την έννοα αυτή πριν από την τυπική της επεξεργασία.



Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς σε αυτό το παράδειγμα ποιο αντικείμενο έχει μεγαλύτερο εμβαδόν – έχουμε τη δυνατότητα να συγκρίνουμε οπτικά επειδή αναγνωρίζουμε ότι η μικρότερες πλευρές και στα δύο ορθογώνια είναι ίσες. Παρόλα αυτά, στο επόμενο παράδειγμα, οι μικρότερες πλευρές των δύο ορθογωνίων είναι άνισες και η απάντηση είναι πιο δύσκολο να εξευρεθεί.



Οι απαιτήσεις είναι ακόμη μεγαλύτερες όταν έχουμε να αντιμετωπίσουμε *σχήματα ακανόνιστα*, όπου η οπτική σύγκριση είναι σχεδόν αδύνατη. Η διαφορά μεταξύ δισδιάστατων και μονοδιάστατων μεγεθών όταν αντιμετωπίζουμε προβλήματα εξεύρεσης εμβαδού προκαλεί *παρανοήσεις* όταν τα παιδιά καλούνται να παρατηρήσουν την περίμετρο, καθώς και τα δύο εμπεριέχουν την παρατήρηση του ορίου του σχήματος. Ο Haylock επισημαίνει ότι η σχέση μεταξύ περιμέτρου και εμβαδού μας παρέχει ένα *αντιπαράδειγμα* της αρχής της διατήρησης. Η αναδιάταξη ενός φανταστικού περιμετρικού φράκτη γύρω από ένα πεδίο για να αλλάξει το σχήμα του, χωρίς να αλλάζει τη συνολική περίμετρο δεν διατηρεί το εμβαδόν (Haylock, 2001). Από την άλλη πλευρά, ο υπολογισμός του εμβαδού πολύπλοκων σχημάτων απαιτεί την αναδόμηση του σχήματος με συγκεκριμένο τρόπο, γεγονός που προϋποθέτει μια ακόμη σειρά επίπονων διανοητικών διεργασιών. Θα πρέπει, σε τέτοιες περιπτώσεις, να διαμερίσουμε το σχήμα σε γνωστά επιμέρους κομμάτια και να τα ανασυνθέσουμε με τέτοιο τρόπο ώστε να προκύπτει ένα, επίσης, γνωστό σχήμα. Ή να ανακαλύψουμε τι λείπει από το σχήμα μας που θα το καθιστούσε γνωστό σε εμάς και να προβούμε στις κατάλληλες ενέργειες.

Οι απαιτήσεις είναι, επίσης, μεγάλες όταν η μονάδες μέτρησης που χρησιμοποιούμε είναι *ακατάλληλες* για τη μέτρηση του εμβαδού κάποιων περιοχών. Οι μονάδες μέτρησης, αρχικά, θα πρέπει να είναι ομοειδείς με αυτό που πρέπει να μετρήσουμε. Στην περίπτωσή μας θα

πρέπει να είναι δισδιάστατες επιφάνειες. Λόγω του τρόπου σχηματισμού των τυπικών μονάδων μέτρησης εμβαδού, η ονομασίες τους προκαλούν σε πάρα πολλές περιπτώσεις παρανοήσεις καθώς περιλαμβάνουν την ονομασία μονοδιάστατων μονάδων μέτρησης: τετραγωνικό μέτρο, τετραγωνικό εκατοστό κτλ. Θα πρέπει μάλιστα να προσθέσουμε εδώ ότι το τετραγωνικό εκατοστό δεν είναι το ένα εκατοστό του τετραγωνικού μέτρου, αλλά το ένα δεκάκις χιλιοστό.

Ένα δεύτερο σημείο που προκαλεί δυσκολίες είναι το μέγεθος των μονάδων μέτρησης. Άλλες φορές μπορεί να είναι πολύ μεγάλες και άλλες φορές ιδιαίτερα μικρές για τη μέτρηση κάποιων επιφανειών. Ενώ στη μέτρηση του μήκους είναι πολύ συνηθισμένο να μετράμε με μέτρα, το τετραγωνικό μέτρο είναι πολύ μεγάλο για να χρησιμοποιηθεί για τις συνηθισμένες δραστηριότητες των μαθητών, αλλά και των ενηλίκων. Το δε τετραγωνικό χιλιόμετρο είναι ασύμφορο για πρακτικές μετρήσεις, ενώ το χιλιόμετρο είναι πολύ συνηθισμένο, και εξ αυτού έχει εισαχθεί η πρακτική μονάδα του στρέμματος. Μια μονάδα όμως αρκετά προβληματική αφού, αν παρουσιαστεί ως τετράγωνο, η πλευρά του δεν μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια.

Τελευταίο πρόβλημα των μονάδων μέτρησης είναι το σχήμα τους. Οι τυπικές μονάδες μετρήσεις έχουν σχήμα τετραγώνου και μπορούν εξυπηρετήσουν απλές καταστάσεις υπολογισμού εμβαδού, αλλά η εφαρμογή τους γίνεται αμέσως προβληματική όταν τα σχήματα είναι ακανόνιστα ή καμπύλα. Είναι εύκολα κατανοητό όταν έχουμε να υπολογίσουμε, για παράδειγμα, το εμβαδόν ενός κύκλου. Ο μετασχηματισμός της μονάδας μέτρησης ώστε να καλύπτει και κάποιες από αυτές τις περιπτώσεις απαιτεί κανόνες που χρησιμοποιούν ανώτερα μαθηματικά και που παρουσιάζονται προς το τέλος της υποχρεωτικής εκπαίδευσης ή σε όσους ασχολούνται με το συγκεκριμένο θέμα στα μαθηματικά.

Ψηφίδωση

Η *ψηφίδωση* ή *επικεράμωση* (tesselation) μιας επίπεδης επιφάνειας είναι ο τεμαχισμός ενός επιπέδου χρησιμοποιώντας ένα ή περισσότερα γεωμετρικά σχήματα που ονομάζονται ψηφίδες που δεν αλληλοεπικαλύπτονται, ούτε αφήνουν κενά.

Ιστορική αναδρομή

Η ψηφίδωση χρησιμοποιήθηκε από πολύ παλιά για τη διακόσμηση κτισμάτων. Οι Σουμέριοι, σε κατασκευές που χρονολογούνται γύρω στο 3500 π.Χ. δημιούργησαν σχέδια με ψηφίδες για να στολίσουν τα σπίτια τους και τους ναούς τους.

Η τέχνη της ψηφίδωσης εξελίχθηκε μέσα στους αιώνες από την απλή επικάλυψη με πλίνθους στη διακόσμηση με διάφορα είδη ψηφίδων. Ένα θαυμάσιο δείγμα τέτοιας τέχνης είναι το παλάτι στην Αλάμπρα της Ισπανίας. Η ψηφίδωση που χρησιμοποιήθηκε εκεί αποτελείται από αφηρημένα γεωμετρικά σχήματα που δημιουργούν αξεπέραστα καλλιτεχνήματα. Οι τεχνίτες είχαν εμπνευστεί από τους Moor, τους Άραβες που είχαν κυριεύσει την Ιβηρική χερσόνησο τον 14ο αιώνα. Οι ψηφίδες είναι κατασκευασμένες από χρωματιστά κομμάτια που δημιουργούν μοτίβα, πολλά από τα οποία είναι συμμετρικά.

Τα σχέδια αυτά ενέπνευσαν αργότερα τον M.C. Escher που επισκέφθηκε την Αλάμπρα δύο φορές (το 1922 και το 1933) αντιγράφοντας και μελετώντας τις ψηφιδώσεις. Αν και η ενασχόλησή του ξεκίνησε με ένα έργο που βρίσκεται λίγο έξω από τα όρια αυτού που δεχόμαστε ως ψηφίδωση, τα «Οχτώ πρόσωπα» (1922), αργότερα προχωράει σε μια ιδιαίτερη τεχνική ψηφίδωσης που χρησιμοποιεί ψηφίδες με μορφές ζώων, φυτών και ανθρώπων. Δημιουργεί πάνω από 450 έργα βασιζόμενος πλέον σε μαθηματικές μελέτες πάνω στην ψηφίδωση. Το τελευταίο του έργο μάλιστα, τα «Πνεύματα» (1971), είναι μια απάντηση σε ένα πρόβλημα ψηφίδωσης που του είχε απευθύνει ο Penrose.

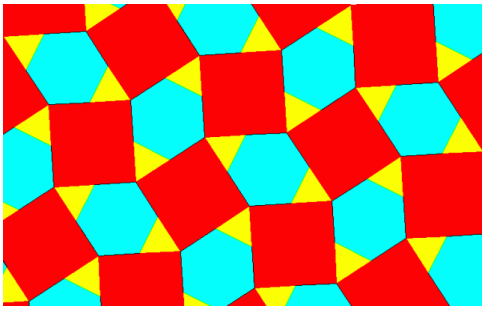
Το 1619 ο Johannes Kepler στο έργο του Harmonices Mundi κάνει μια από τις πρώτες καταγραμμένες μελέτες πάνω στις κανονικές και ημικανονικές ψηφιδώσεις. Για περίπου τέσσερις αιώνες δεν υπήρξε ανάλογο ενδιαφέρον, αλλά τα τελευταία 120 χρόνια ασχολήθηκαν πολλοί με την τέχνη της ψηφίδωσης, όπως ο κρυσταλλογράφος και μαθηματικός Fedorov, που πυροδότησε με την απόδειξή του ότι κάθε περιοδική ψηφίδωση του επιπέδου αντικατοπτρίζει μία από τις δεκαεφτά διαφορετικές ομάδες ισομετρίας, τη συστηματική μαθηματική μελέτη του φαινομένου και τελικά, την ανάδειξη της ψηφίδωσης σε ένα διακριτό μαθηματικό πεδίο.

Παράλληλα με όλα τα παραπάνω, η ψηφίδωση βρίσκει αρκετές πιο «ταπεινές» εφαρμογές. Για παράδειγμα, η συνεχής χρήση της στην ύφανση ταπήτων αποτελεί χαρακτηριστικό της *λαϊκής παράδοσης* πολλών λαών. Η ψηφίδωση εμφανίζεται και στη *φύση*, τόσο στο ζωικό (κηρήθρα) όσο και στο φυτικό βασίλειο. Από την άλλη, βρίσκει τα

τελευταία χρόνια σημαντικές εφαρμογές και στη σχεδίαση με *ηλεκτρονικούς υπολογιστές*.

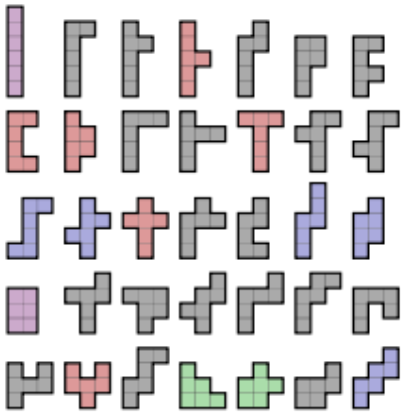
Ψηφίδωση και μαθηματικά

Η διδιάστατη ψηφίδωση αποτελεί ένα κλάδο των μαθηματικών που εξετάζει τους κανόνες που διέπουν την κάλυψη ενός επιπέδου με σχήματα χωρίς να αφήνουν κενά ή να υπερκαλύπτονται. Οι κανόνες αυτοί διαφέρουν ανάλογα με το είδος της ψηφίδωσης. Ένας από τους πιο σημαντικούς είναι ότι οι κορυφές των σχημάτων πρέπει να ταυτίζονται και να μην εφάπτονται με κάποια σημεία της πλευράς ενός άλλου σχήματος εκτός από τα άκρα. Αυτός ο κανόνας δεν ισχύει σε ψηφιδώσεις όπως οι συσσωματωμένες πλινθοδομές.

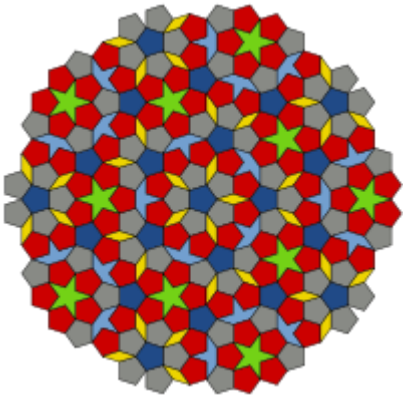


Ανάλογα με τις ψηφίδες και τον τρόπο διάταξής τους υπάρχουν διάφορα είδη ψηφίδωσης. Μια *περιοδική ψηφίδωση* έχει ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο. Μερικοί ειδικοί τύποι της περιλαμβάνουν *κανονικές ψηφιδώσεις* με ψηφίδες από κανονικά πολύγωνα που έχουν όλες το ίδιο σχήμα, ή *ημικανονικές ψηφιδώσεις*, με κανονικές ψηφίδες που αποτελούνται από περισσότερα του ενός σχήματα με κάθε γωνία ομοιότροπα τοποθετημένη. Λόγω του ορισμού της, μια κανονική ψηφίδωση μπορεί να αποτελείται μόνο από ψηφίδες που έχουν σχήμα ισόπλευρο τρίγωνο, τετράγωνο ή κανονικό εξάγωνο. Στη *μονοεδρική ψηφίδωση* όλες οι ψηφίδες είναι ταυτόσημες, δηλαδή είναι ισομετρικοί μετασχηματισμοί του ενός και μοναδικού πρωτότυπου σχήματος. Οι *ισοεδρικές ψηφιδώσεις* είναι ένας ιδιαίτερος τύπος μονοεδρικών ψηφιδώσεων, όπου όλες οι ψηφίδες ανήκουν στην ίδια κλάση μετασχηματισμού, δηλαδή είναι συμμετρικά σχήματα του ίδιου πρωτότυπου. Αν το πρωτότυπο επιδέχεται ψηφίδωση που δεν είναι ισοεδρική, τότε το πρωτότυπο ονομάζεται ανισοεδρικό και σχηματίζει *ανισοεδρικές ψηφιδώσεις*. Υπάρχουν οχτώ διαφορετικοί τύποι ημικανονικών ψηφιδώσεων που χρησιμοποιούν περισσότερα από ένα κανονικά πολύγωνα με τον όρο ότι σε κάθε κορυφή πρέπει να υπάρχει η ίδια διάταξη πολυγώνων.

Κάτω από διαφορετικούς κανόνες μπορούν να διαμορφωθούν *μη κανονικές ψηφιδώσεις* με διάφορα σχήματα, από κανονικά πεντάγωνα, πολυόμινα, μη κανονικά πολύγωνα, ή σχήματα όπως αυτά του Escher. Τα *πολυόμινα*, γνωστά ήδη από την αρχαιότητα, είναι σχήματα που συντίθενται από τετράγωνες ψηφίδες με μια ψηφίδωση που ονομάζεται «από άκρο σε άκρο», δηλαδή η κάθε ψηφίδα έχει μια πλευρά κοινή με μια άλλη ψηφίδα. Ανάλογα με τον αριθμό των τετράγωνων ψηφίδων που συμμετέχουν στην κατασκευή ενός πολυόμινου έχουμε το μονόμινο, ντόμινο, τα τριόμινα κ.ο.κ.



Τα 35 διαφορετικά πεντόμινα.



Μια ψηφίδωση που δεν έχει ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο ονομάζεται *μη περιοδική*. Μια *απεριοδική ψηφίδωση* χρησιμοποιεί ένα μικρό σύνολο ψηφίδων που δεν μπορούν να σχηματίσουν ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο. Οι ψηφιδώσεις του Penrose που χρησιμοποιούν δύο διαφορετικά τετράπλευρα είναι τα πιο γνωστά παραδείγματα μη περιοδικής ψηφίδωσης. Ανήκουν σε μια γενική κατηγορία απεριοδικής ψηφίδωσης, αν και έχουν εκπληκτικές αυτοεπαναλαμβανόμενες ιδιότητες χρησιμοποιώντας την

επαναληπτική διαδικασία της ψηφίδωσης υποκατάστασης (substitution tiling).

Οι ψηφιδώσεις με συμμετρία μεταγραφής σε δύο ανεξάρτητες κατευθύνσεις μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε ομάδες συμμετρίας του επιπέδου (wallpaper groups), από τις οποίες υπάρχουν 17 διαφορετικές. Τα ονόματά τους περιέχουν μέχρι τέσσερα σύμβολα που δίνουν πληροφορίες για τις ψηφίδες και τις συμμετρίες που εφαρμόζονται. Από τις τρεις κανονικές ψηφιδώσεις, δύο ανήκουν στις p6m ομάδες ταπετσαρίας και μία στις p4m. Ψηφιδώσεις στις δύο διαστάσεις με συμμετρία μεταγραφής σε μία μόνο κατεύθυνση μπορούν να κατηγοριοποιηθούν από τις εφτά ομάδες διαζωμάτων (frieze groups) που περιγράφουν τα πιθανά μοτίβα.

Κάθε τρίγωνο ή τετράπλευρο (ακόμη και μη κυρτό) μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν μια πρότυπη ψηφίδα για να σχηματίσει μονοεδρικές ψηφιδώσεις, συχνά με περισσότερους από έναν τρόπους. Αντίγραφα από ένα τυχαίο τετράπλευρο μπορούν να σχηματίσουν μια ψηφίδωση με διπλά κέντρα περιστροφής στα μέσα όλων των πλευρών, και συμμετρία μεταγραφής που τα βασικά διανύσματα είναι οι διαγώνιες των τετράεδρων ή, ισοδύναμα, μία από αυτές και το άθροισμα ή τη διαφορά των δύο. Για ένα ασύμμετρο τετράπλευρο, αυτή η ψηφίδωση ανήκει στις ομάδες ταπετσαρίας p2. Σαν θεμελιώδες πεδίο ορισμού έχουμε το τετράπλευρο. Ισοδύναμα, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα παραλληλόγραμμο υποτεινόμενο από ένα ελάχιστο σύνολο μετασχηματιστικών διανυσμάτων, ξεκινώντας από ένα κέντρο περιστροφής. Μπορούμε να το διαιρέσουμε με μία διαγώνιο και να πάρουμε το μισό (ένα τρίγωνο) ως θεμελιώδες πεδίο ορισμού. Ένα τέτοιο τρίγωνο έχει το ίδιο εμβαδόν με το τετράπλευρο και μπορεί να κατασκευαστεί από αυτό κόβοντας και επικολλώντας.

Δημιουργία ψηφίδων

Σε ένα πρώτο επίπεδο είναι σχετικά εύκολο να δημιουργηθούν «παράξενα» σχήματα που να αποτελούν ψηφίδες που σχηματίζουν ψηφιδώσεις. Έτσι, αν πάρουμε σαν βάση μας ένα παραλληλόγραμμο και από δύο διαδοχικές πλευρές κόψουμε ένα κομμάτι και το επικολλήσουμε στις αντίστοιχες απέναντι πλευρές, έχουμε δημιουργήσει ψηφίδες που έχουν εμβαδόν ίσο με εκείνο του παραλληλογράμμου. Με την ίδια περίπου λογική μπορούμε να δημιουργήσουμε ψηφίδες και από διαφορετικές βάσεις (τρίγωνα και εξάγωνα).

Διδακτική θεώρηση

Είναι ευρέως αποδεκτό ότι η κάλυψη επιφανειών με τη χρήση *ανεπίσημων και αυθαίρετων μονάδων* είναι ένα καλό σημείο για να αρχίσουν τα παιδιά να μαθαίνουν για το εμβαδόν, ειδικά αν αυτές οι μονάδες δημιουργούν οπτικές παραστάσεις. Η κάλυψη των θρανίων με φύλλα ή κοχύλια, ή οι δημιουργίες με διακοσμητική τέχνη, όλα βοηθούν στη δημιουργία οπτικών παραστάσεων για τα παιδιά. Κατόπιν τα παιδιά θα πρέπει να προχωρήσουν στη χρήση μονάδων με παρόμοιο μέγεθος όπως χαρτιά της τράπουλας ή ίσα τρίγωνα, ώστε να μπορούν να συγκρίνουν διάφορα σχήματα χρησιμοποιώντας την ίδια *μη τυπική μονάδα* (Dudgeon, 2005). Κοιτάζοντας στα αποτελέσματα των παραπάνω μετρήσεων τα παιδιά οδηγούνται σε μια συζήτηση για τις διαφορετικές τιμές που έχουν βρεθεί. Αυτό οδηγεί στην κατανόηση ουσιωδών αρχών της μέτρησης του εμβαδού, όπως το ότι δεν επιτρέπεται η ύπαρξη κενών κατά την κάλυψη μιας επιφάνειας με τις μονάδες μέτρησης ή, από την άλλη, δεν επιτρέπεται η αλληλοεπικάλυψη. Ή ότι η κάλυψη της επιφάνειας πρέπει να φτάνει μέχρι τα όριά της και, άρα, κάποιες μονάδες μέτρησης είναι καταλληλότερες από κάποιες άλλες.

Ο Liebeck (1984) εξηγεί όσο πιο πολύ πειραματίζονται τα παιδιά κατασκευάζοντας ψηφιδώσεις χρησιμοποιώντας ένα σύνολο ταυτόσημων τετραγώνων ή τριγώνων, τόσο περισσότερο αντιλαμβάνονται τη διατήρηση του εμβαδού. Ακόμη μεγαλύτερη κατανόηση παρέχεται με τη διδασκαλία του πώς ένα σχήμα μπορεί να

τεμαχιστεί και να αναδιαταχθεί διατηρώντας το εμβαδόν του. Ασκήσεις που χρησιμοποιούν τετραγωνισμένο χαρτί (μιλιμετρέ) είναι χρήσιμες για να αρχίσουν τα παιδιά να εξερευνούν την περίμετρο και το εμβαδόν κάποιων επιφανειών. Το τελικό πέρασμα σε τυπικές μονάδες μέτρησης έρχεται σαν φυσιολογική κατάληξη μιας τέτοιας διαδικασίας και αποτελεί εφαρμογή απλών δημοκρατικών διαδικασιών, όπως μας διδάσκει η ιστορία της εφεύρεσης του γαλλικού μέτρου.

Εκ του ορισμού της, λοιπόν, η ψηφίδωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε όλα τα στάδια της διδασκαλίας του εμβαδού, από τις αυθαίρετες, στις μη τυπικές, αλλά ακόμη και σε τυπικές μονάδες μέτρησης εμβαδού, με ταυτόχρονη ανάδειξη και καλλιέργεια των εννοιών και δεξιοτήτων που απαιτούνται στη μέτρηση μεγεθών. Η παρουσία της τόσο σε διάφορες μορφές τέχνης, όσο και στη φύση, μπορεί να αποτελέσει κατάλληλο θέμα για μια *διαθεματική διδασκαλία* της έννοιας του εμβαδού.

Το παράδειγμα του γαλλικού μέτρου

Για να γίνουν πιο κατανοητά τα προβλήματα που αναφέρθηκαν παραπάνω θα παρουσιάσουμε εδώ μια μικρή περίληψη για την ιστορία του γαλλικού μέτρου. Η περίληψη αυτή θα χρησιμεύσει αργότερα στη διδακτική πρόταση.

Όπως αναφέρεται στο βιβλίο «Το Μέτρο του Κόσμου» του Denis Guedj, στη Γαλλία πριν από την Επανάσταση υπήρχαν πολυάριθμα μέτρα για τη μέτρηση του μήκους, ανάλογα με τον εκάστοτε φεουδάρχη που όριζε το ύψος του ως μονάδα μήκους. Εκτός από αυτά υπήρχε και το μέτρο του βασιλιά. Με τη βασική αρχή της ισότητας που έφερε η Γαλλική Επανάσταση, το μέτρο δεν θα μπορούσε να είναι αντιπροσωπευτικό ενός μόνο ανθρώπου, αφού όλοι είναι ίσοι, αλλά θα έπρεπε να είναι κάτι παγκόσμιο και εύκολο να εκτιμηθεί από οποιονδήποτε και οποτεδήποτε.

Στις 9 Μαρτίου 1790, στην Εθνοσυνέλευση υποβάλλεται μια πρόταση σχετικά με τα μέτρα και τα σταθμά: «Κύριοι, η αναρίθμητη ποικιλία των μέτρων μας και οι παράξενες ονομασίες τους φέρνουν αναγκαστικά σύγχυση στις ιδέες μας και παρενόχληση στο εμπόριο. Η εξάλειψή της είναι χρέος της Εθνοσυνέλευσης. Το μήκος του

εκκρεμούς φάνηκε, γενικά, πως άξιζε την προτίμησή μας. Είναι πολύ φυσικότερο, όμως, να υπολογίζεται η απόσταση ενός τόπου από έναν άλλο με βάση το τέταρτο ενός από τους κύκλους της Γης (ενός μεσημβρινού), παρά να υπολογίζεται με βάση το μήκος ενός εκκρεμούς. Άρα, είναι δυνατό να έχουμε μια μονάδα μήκους που δεν θα εξαρτάται από καμιάν άλλη ποσότητα.»

Αυτή η μονάδα είναι η ίδια η Γη.

Επειδή αποκλειόταν να μετρηθεί το ένα τέταρτο ενός μεσημβρινού στο σύνολό του, έπρεπε να επιλεγεί ένα τόξο, ένα μετρήσιμο τόξο. Αυτό το τόξο βρίσκεται στο μεσημβρινό – βεντέτα, στο μεσημβρινό του Αστεροσκοπείου, στο μεσημβρινό του Παρισιού, στη «Μεσημβρία». Αυτόν θα επέλεγαν. Η Μεσημβρία θα φτάσει μέχρι τη θάλασσα: προς τα βόρεια, ως τη Δουνκέρκη, προς τα νότια ως τη Βαρκελώνη.

Η ιστορία του γαλλικού μέτρου, αποτελεί ένα ιστορικό παράδειγμα που, από μη τυπικές μονάδες περνάμε στην καθιέρωση μιας τυπικής μονάδας μέσα από δημοκρατικές διαδικασίες και μπορεί να αποτελέσει το έναυσμα για μια διαθεματική διδασκαλία με επίκεντρο τις μονάδες μέτρησης του εμβαδού.

Μια διδακτική πρόταση

Τέτοια διδασκαλία δοκιμάστηκε σε παιδιά έκτης δημοτικού, και τα αποτελέσματά της ήταν ενθαρρυντικά. Με κεντρικό θέμα κάποιους πίνακες του Escher και παραδοσιακές στολές, οι μαθητές/τριες οδηγήθηκαν σε μετρήσεις εμβαδού με μη τυπικές μονάδες μέτρησης που σχεδίασαν μόνοι/ες τους με βάση τους κανόνες της ψηφίδωσης και μελέτησαν μέσα από ιστορικές πηγές και τις αρχές της πολιτικής αγωγής τα αίτια και την ανάγκη εξεύρεσης μιας κοινής μονάδας μέτρησης. Με τη βοήθεια της θεατρικής αγωγής οδηγήθηκαν σε αναπαράσταση των ιστορικών διαδικασιών και στη συμφωνία μιας τοπικής τυπικής μονάδας μέτρησης και αργότερα στις γενικά παραδεκτές τυπικές μονάδες. Η διδασκαλία αυτή άφησε ανοιχτά τα ερωτήματα για μια πιο γενικευμένη χρήση της ψηφίδωσης στη μέτρηση διαφόρων μεγεθών.

Βιβλιογραφία

Behr, M. Khoury, H. Harel, G. Post, T. Lesh, R. (1997) "Conceptual Unit Analysis of Preservice Elementary School Teachers' Strategies on a Rational-Number-as-Operator Task", *Journal of Mathematics Education*, 28(1), 48-69.

Dudgeon, J. (2005) *Children Errors in Mathematics*, Hansen, A. (ed.), Exeter, Learning Matters Ltd.

Guedj, D. (2002). *Το μέτρο του κόσμου*, (μετ. Κουλεντιανού Μ.). Αθήνα, Τραυλός

Haylock, D. (2001) *Mathematics Explained for Primary Teachers*, 2nd edition, London, Paul Chapman Publishing.

Haylock, D. and Cockburn, A. (1997) *Understanding Mathematics in the Lower Primary Years*, London, Paul Chapman Publishing.

Liebeck, P. (1984) *How Children Learn Mathematics*, London, Penguin Books.

Nunes, T. and Bryant, P. (1996) *Children Doing Mathematics*, Oxford, Blackwell Publishers.

Williams, E.M. and Shuard, H. (1970) *Primary Mathematics Today*, London, Longman.

aristous@gmail.com

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΕΜΒΑΔΩΝ ΚΑΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΠΕ

Κων/νος Κόμπος

Μαθηματικός-Δάσκαλος/ 1ο 12/θ ΠΠΔΣΘ-ΑΠΘ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η ανάπτυξη της τεχνολογίας και η μεταφορά της στην εκπαίδευση δημιουργεί νέες συνθήκες για όλη τη σχολική κοινότητα. Στην εποχή της πληροφορίας, η ανάγκη για επικοινωνία και η διαδικασία επεξεργασίας της πληροφορίας γίνονται ολοένα και εντονότερες και συνδέονται άμεσα με τη σύγχρονη ζωή και την τεχνολογική ανάπτυξη. Η διδασκαλία των μαθηματικών τροποποιεί τις διδακτικές προσεγγίσεις του συμπεριφορισμού και ακολουθεί εποικοδομητικές προτάσεις που χρησιμοποιούν τις νέες τεχνολογίες. Η διδασκαλία με τη χρήση προγραμμάτων ηλεκτρονικών υπολογιστών της έννοιας του εμβαδού σχημάτων και μονάδων μέτρησης αυτών αποτελεί μια διδακτική πρόταση, που στοχεύει να εισάγει τη χρήση των νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία της γεωμετρίας. Η χρήση απλών προγραμμάτων, όπως ο κειμενογράφος, που υπάρχει σε κάθε υπολογιστή καθιστά τη συγκεκριμένη πρόταση διδασκαλίας εφαρμόσιμη σε κάθε σχολική μονάδα που διαθέτει ένα ηλεκτρονικό υπολογιστή στην αίθουσα διδασκαλίας. Δημιουργώντας τετραγωνικά δέκατα και εκατοστά και στη συνέχεια γεωμετρικά σχήματα οι μαθητές υπολογίζουν το εμβαδόν τους. Τα παιδιά γνωρίζουν και αντιλαμβάνονται το μέγεθος των μονάδων που χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό του χώρου και κατανοούν ότι ο διπλασιασμός των πλευρών ενός τετραγώνου σημαίνει τετραπλασιασμό του εμβαδού του.

Εισαγωγή

Η ανάπτυξη της τεχνολογίας και η μεταφορά της στην εκπαίδευση δημιουργεί νέες συνθήκες για όλη τη σχολική κοινότητα. Στην εποχή της πληροφορίας, η ανάγκη για επικοινωνία και η διαδικασία επεξεργασίας της πληροφορίας γίνονται ολοένα και εντονότερες και συνδέονται άμεσα με τη σύγχρονη ζωή και την τεχνολογική ανάπτυξη. Η αξιοποίηση του Η/Υ ως μέσο διδασκαλίας στην Α/θμια Εκπ/ση πραγματοποιείται στις ΗΠΑ από τα μέσα της δεκαετίας του '60 και στην Ελλάδα από τα μέσα της δεκαετίας του '90.

Τα παιδιά σήμερα πριν ακόμα έρθουν στο σχολείο γνωρίζουν να χρησιμοποιούν Η/Υ ή εφαρμογές στα Smartphones και είναι εξοικειωμένα με τις νέες τεχνολογίες, που είναι χαρακτηριστικό στοιχείο του παγκόσμιου πολιτισμού.

Η διδασκαλία των μαθηματικών σε περιβάλλοντα που βασίζονται στις νέες τεχνολογίες στηρίζεται στη θεώρηση του Papert, για εναλλακτική διδασκαλία σε σχέση με το συμπεριφορισμό, όπου η τεχνολογία αντιμετωπίζεται και αξιοποιείται ως πολιτισμικό αγαθό. Οι προτάσεις του για χρήση του προγραμματισμού ως μέσου για διερεύνηση και έκφραση ιδεών από μικρές ομάδες εργασίας είναι το καθοριστικό στοιχείο στην υιοθέτηση νέων εποικοδομητικών μεθόδων διδασκαλίας, με την δημιουργία 'μικρόκοσμων' το δυναμικό χειρισμό άλλων ψηφιακών εργαλείων, τη χρήση φορητών Η/Υ και εκπαιδευτικών ρομπότ.

ΤΠΕ και Γεωμετρία

Στα πλαίσια της διδασκαλίας των μαθηματικών σε περιβάλλοντα με νέες τεχνολογίες στηρίζεται και η πρόταση για διδασκαλία γεωμετρικών εννοιών όπως: το τετραγωνικό μέτρο και οι υποδιαιρέσεις του αλλά και του εμβαδού στην Ε τάξη.

Από έρευνες που έχουν γίνει στην Ελλάδα (Χασάπης 2012) οι μαθητές δεν κατανοούν την έννοια του εμβαδού και του τετραγωνικού μέτρου, αφού όταν διπλασιάζουν την πλευρά ενός τετραγώνου διπλασιάζουν και το εμβαδόν του.

Η κατάκτηση της έννοιας του τετραγωνικού μέτρου και των υποδιαιρέσεων του θα συμβάλλει και στην ορθότερη κατανόηση του υπολογισμού εμβαδών γεωμετρικών σχημάτων. Σύμφωνα με την Κολέζα Ε. (2010) για να διδαχτεί μια έννοια στην αρχή χρειάζεται ο μαθητής να έχει την ευκαιρία να εφαρμόσει και να ανακαλύψει την έννοια αυτή. Στο σχεδιασμό ενός μαθήματος δεν έχει σημασία το περιεχόμενο διδασκαλίας, αλλά η διαδικασία μέσω της οποίας θα επινοηθεί το περιεχόμενο αυτό.

Έτοιμα, άκαμπτα, μαθηματικά σενάρια δεν αποτελούν σωστή διδακτική προσέγγιση, αφού δε λαμβάνεται υπόψη ο ρυθμός μάθησης των μαθητών κάθε τάξης, η σκέψη τους, το γνωστικό τους επίπεδο, η υλικοτεχνική υποδομή κάθε τάξης και το κοινωνικό-πολιτισμικό πλαίσιο των παιδιών. Χρήσιμο και ορθότερο για τη μαθηματική εκπαίδευση των μαθητών είναι η ύπαρξη εναλλακτικών δραστηριοτήτων που θα λειτουργούν ως πηγή έμπνευσης διδασκαλίας.

Ικανοποιώντας τις παραπάνω θέσεις παρουσιάζεται η πρόταση διδασκαλίας του τετραγωνικού μέτρου και της διδασκαλίας της έννοιας του εμβαδού που εφαρμόστηκε στο Ε3 τμήμα του 1ου Πρότυπου Πειραματικού Δημοτικού Σχολείου Θεσσαλονίκης, το Μάρτιο του 2015.

Εφαρμογή

Σύμφωνα με τι σχολικό εγχειρίδιο της Ε τάξης (βιβλίο δασκάλου, σ. 120 και 137) οι διδακτικοί στόχοι για τους μαθητές είναι:

- Να μπορούν να συνδέσουν τη διαδικασία μέτρησης του εμβαδού μιας επιφάνειας με τις μονάδες μέτρησης επιφάνειας.
- Να κατασκευάσουν το τετραγωνικό εκατοστό, , το τετραγωνικό δεκατόμετρο και το τετραγωνικό μέτρο.
- Να κατανοήσουν και να αισθητοποιήσουν τις διαστάσεις τους.
- Να διαφοροποιήσουν το μέτρο από το τετραγωνικό μέτρο
- Να επιλύουν προβλήματα καθημερινής ζωής που σχετίζονται με την κάλυψη επιφάνειας.
- Να υπολογίζουν εμβαδόν, τετραγώνου, ορθογωνίου παραλληλογράμμου και ορθογωνίου τριγώνου.

- Να υπολογίζουν το εμβαδόν και την περίμετρο τετραγώνου με διπλάσιο μήκος πλευρών χρησιμοποιώντας τους υπολογισμούς στο αρχικό τετράγωνο.

Για την επίτευξη των παραπάνω στόχων σε μία αίθουσα που έχει διαδραστικό πίνακα αλλά και ηλεκτρονικό υπολογιστή μπορούν τα παιδιά να σχεδιάσουν ένα τετράγωνο με πλευρά ένα εκατοστό χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα του απλού κειμενογράφου Word.

Ένα παιδί στο διαδραστικό πίνακα από την επιλογή Εισαγωγή και Σχήματα επιλέγει στα Βασικά Σχήματα ένα ορθογώνιο παραλ/μο

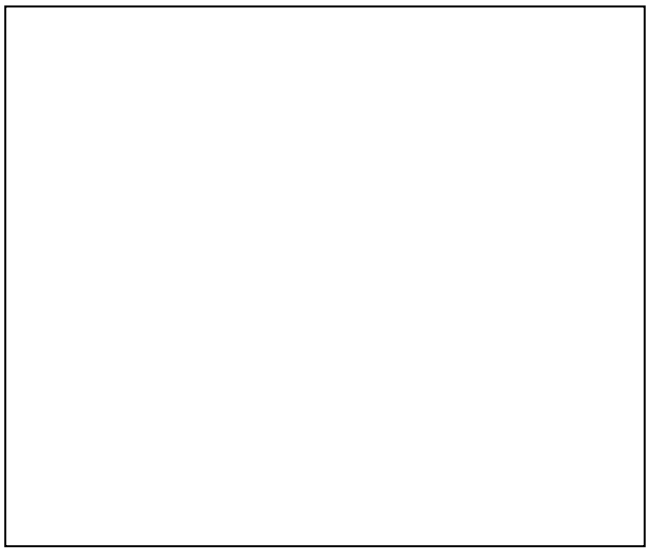
στη συνέχεια από την επιλογή Μέγεθος μετασχηματίζει το ορθογώνιο σε τετράγωνο με πλευρές 1 εκ.

Με αυτόν τον τρόπο δημιουργείται το 1 τ. εκ. Με την αντιγραφή και επικόλληση στη σειρά οριζοντίως και καθέτως τέτοιων τετραγωνικών εκατοστών δημιουργείται το τετραγωνικό δεκατόμετρο και στη συνέχεια το τετραγωνικό μέτρο με τον ίδιο τρόπο, με επανάληψη του τετραγωνικού δεκατόμετρου. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί και το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος 10 δεκ. ή 100 εκ. εφόσον αυτό είναι εφικτό στο διαδραστικό πίνακα με τη χρήση όχι του κειμενογράφου αλλά ενός χάρακα με μήκος 1 μ. αφού ο κειμενογράφος δεν έχει αυτές τις δυνατότητες.

Επειδή το 1 τ.μ. υπάρχει και στα εποπτικά υλικά που κατά καιρούς διένειμε ο Ο.Σ.Κ[1]. στα σχολεία μπορεί να παρουσιαστεί στην αίθουσα διδασκαλίας. Τα παιδιά κατανοούν τις διαφορές ανάμεσα στις μονάδες μέτρησης μονόμετρων μεγεθών και σχημάτων με δύο διαστάσεις.

1 τ. δεκ.

[1] Ο.Σ.Κ. = Οργανισμός Σχολικός Κτιρίων



Με την παραπάνω τεχνική τα παιδιά κατανοούν και αισθητοποιούν το μέγεθος του τετραγωνικού εκατοστού αλλά και τετραγωνικού δεκατόμετρου. Αλλάζοντας τη σελίδα του κειμενογράφου από κάθετη διάταξη σε οριζόντια καταφέρνουν να σχηματίσουν μόνο ένα ορθογώνιο με εμβαδόν 2 τ. δεκ.

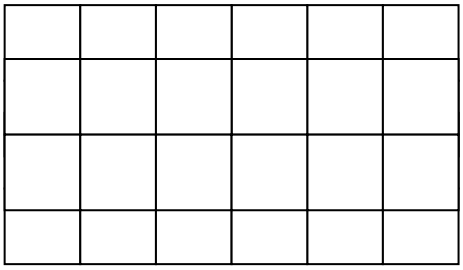
Διαπιστώνουν το μέγεθος της έννοιας του 1 τ.μ., αφού η οθόνη του Η/Υ τους δεν μπορεί να δημιουργήσει εμβαδά μεγαλύτερα από 2 μόλις τ. δεκ. Βλέποντας και το 1 τ.μ. κατανοούν το μέγεθος αυτής της μονάδας. Μπορούν να τυπώσουν έγχρωμα τετραγωνικά δεκατόμετρα να τα κόψουν και να τα τοποθετήσουν πάνω στο τετραγωνικό μέτρο για να διαπιστώσουν το μέγεθος της μονάδας αυτής. Το ίδιο μπορεί να γίνει με τα τ. εκ. και τα τ. δεκ.

Στη συνέχεια δημιουργούν πάλι από την επιλογή Εισαγωγή και Βασικά Σχήματα γραμμές με μήκος 1 εκ., 1 δ. και 1 μ. σε οριζόντια διάταξη σελίδας και κατανοούν συγκρίνοντας με τα τετραγωνικά εκατοστά, τετραγωνικά δεκατόμετρα και τετραγωνικό μέτρο τις διαφορές τους.

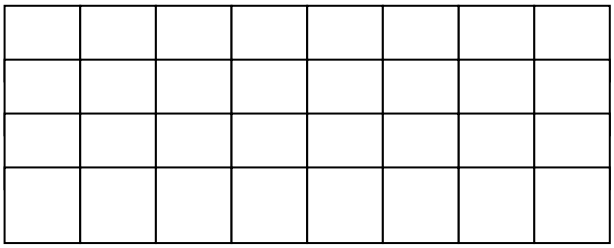
1 εκ.

1 δεκ.

Σε ένα φύλλο εργασίας που προβάλλεται στο διαδραστικό πίνακα τα παιδιά μπορούν να υπολογίσουν τα τετραγωνικά εκατοστά από εμβαδά σχημάτων που παρουσιάζονται και να συγκρίνουν τις μετρήσεις τους με το 1 εκ. και το 1 δεκ. του μέτρου.



1 εκ.

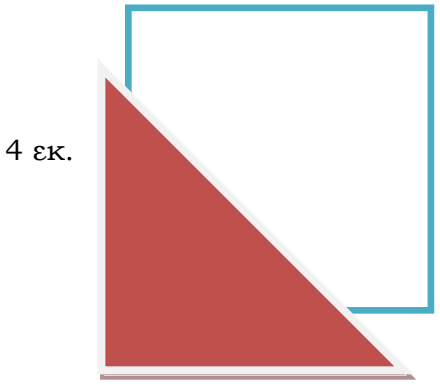


1 δεκ.

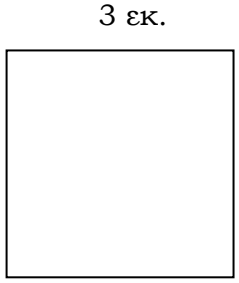
Μπορούν να υπολογίζουν πόσα τ. εκ. είναι το εμβαδόν των παραπάνω σχημάτων όχι μετρώντας τα τ.εκ. που έχει το καθένα, αλλά υπολογίζοντας πόσα τ. εκ. είναι πολλαπλασιάζοντας τις διαστάσεις τους, **μήκοςΧπλάτος**.

Στη συνέχεια δημιουργούν στο διαδραστικό πίνακα ένα τετράγωνο πλευράς 4 εκ. και ένα ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές 4 εκ και τοποθετούν το ένα πάνω στο άλλο. Τα παιδιά ανακαλύπτουν ότι το

εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου είναι το μισό του τετραγώνου άρα το ορθογώνιο τρίγωνο έχει Ε= (ΜΧΠ)/2, όπου Μ= βάση του και Π= ύψος του.

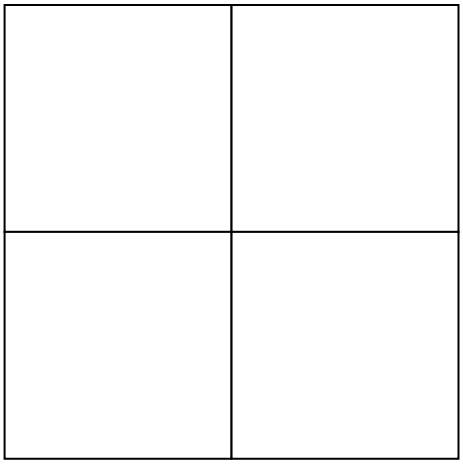


Σε άλλο φύλλο εργασίας τα παιδιά σχηματίζουν ένα τετράγωνο πλευράς 3 εκ. και στη συνέχεια υπολογίζουν το εμβαδόν και την περίμετρο του.



Κατόπιν δημιουργούν ένα τετράγωνο με πλευρά 6 εκ. χρησιμοποιώντας το προηγούμενο άλλες τρεις φορές και προσπαθούν να υπολογίσουν πάλι την περίμετρο και το εμβαδόν του.

6 εκ.



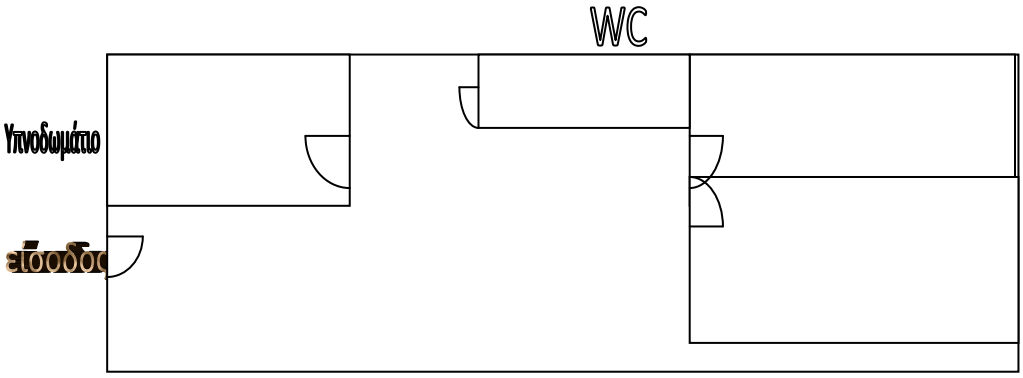
Ανακαλύπτουν ότι όταν διπλασιάζονται οι διαστάσεις του τετραγώνου διπλασιάζεται η περίμετρος του ενώ τετραπλασιάζεται το εμβαδόν του.

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για τετράγωνα πλευράς 2 εκ και 4 εκ διαπιστώνουν ότι ισχύει ο ίδιος κανόνας, όπως και για τετράγωνα πλευράς 5 εκ.

Μπορούν λοιπόν να δημιουργήσουν τη μαθηματική σχέση που υπολογίζει την περίμετρο και το εμβαδόν ενός τετραγώνου, όταν διπλασιάζονται οι πλευρές του.

Στη συνέχεια τα παιδιά προσπαθούν να υπολογίσουν πόσα πλακάκια διαφόρων σχημάτων θα χρειαστούν αν θελήσουν να αλλάξουν το δάπεδο της αίθουσας διδασκαλίας τους που έχει διαστάσεις 8 μ. μήκος και 5 μ. πλάτος. Τα πλακάκια έχουν διαστάσεις σε εκατοστά 25Χ25 ή 20Χ40 ή 40Χ40 ή 25Χ30. Ακόμη μπορούν να υπολογίσουν και το κοστολόγιο αγοράς τους όταν 1 τ.μ. από το κάθε είδος κοστίζει 7,5 €/τ.μ. ή 9 €/τ.μ. ή 8,5 €/τ.μ. ή 6,5 €/τ.μ.

Ακόμη βλέποντας ή δημιουργώντας στο διαδραστικό πίνακα την κάτοψη ενός διαμερίσματος μπορούν να υπολογίσουν πόσα πλακάκια θα χρειαστούν αλλά και το κοστολόγιο αγοράς αυτών.



Με αυτήν την στρατηγική τα μαθηματικά συνδέονται με καταστάσεις της καθημερινής ζωής, όπως η πλακόστρωση συγκεκριμένων χώρων.

Γιατί η συγκεκριμένη πρόταση διδασκαλίας

Η διδακτική πρόταση των συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών είναι προϊόν τριών μορφών προσέγγισης:

- της φαινομενολογικής
- της μαθηματικής και
- της διδακτικής

Οι έννοιες του εμβαδού και των μονάδων μέτρησης αυτού χρησιμοποιούνται στην καθημερινή ζωή σε μεγάλο βαθμό και διαφοροποιούνται από τους αλγορίθμους εύρεσης εμβαδού. Το εμβαδόν συνδέεται με την έννοια της μέτρησης επιφάνειας και είναι άμεσα συνδεδεμένο με τις μονάδες μέτρησης. Η κάλυψη επιφανειών με άλλες επιφάνειες είναι προβλήματα που συναντώνται πολύ συχνά και επιδέχονται της οργάνωσης μέσα από την έννοια του εμβαδού και των μονάδων μέτρησης του.

Στη μαθηματική προσέγγιση αναδεικνύεται η μαθηματική δομή στην οποία εντάσσεται η έννοια και επιτυγχάνονται συνδέσεις ανάμεσα σε έννοιες που συνδέονται, όπως το εμβαδόν και οι μονάδες μέτρησης του.

Στη διδακτική προσέγγιση ακολουθείται ο εποικοδομητισμός και η ανακαλυπτική μάθηση του Bruner, αφού δεν υπάρχει η απόλυτη γνώση και η μεταφορά αυτής από το δάσκαλο στα παιδιά αλλά όλα συζητούνται, διαπραγματεύονται και ερμηνεύονται.

Οι μαθητές μυηούνται σε τρόπους συλλογισμού μαθηματικών εννοιών και η διδασκαλία στοχεύει στη διαδικασία μάθησης. Τελικά επιτυγχάνεται η οριζόντια μαθηματικοποίηση του Treffers (1991), όπου οι μαθητές μπορούν και υπολογίζουν εμβαδά χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Ε[1]=Μ[2]ΧΠ[3]

Οι μαθητές - υποκείμενα μαθαίνουν πώς να μαθαίνουν μέσω της καθοδηγούμενης ανακάλυψης και δημιουργούν καταστάσεις που συμβάλλουν στην επίτευξη των γνωστικών στόχων. Ακόμη αποκτούν ικανότητες για μαθηματικούς συλλογισμούς και χρησιμοποιούν μαθηματικά μοντέλα όπως το τ.μ. για να επιλύουν προβλήματα καθημερινής ζωής. Το αντικείμενο λειτουργιών του τ.μ. και των υποδιαιρέσεων του γίνεται περιεχόμενο για τον υπολογισμό εμβαδών, έτσι το μαθηματικό μοντέλο οργανώνει την κατάσταση και τα δυο μαζί εξελίσσονται συγχρόνως και αλληλοδιαμορφώνονται στα ρεαλιστικά μαθηματικά, σύμφωνα με τον Freudenthal (1983).

Κριτική

Η συγκεκριμένη διδακτική πρόταση δεν είναι πανάκεια για τη διδασκαλία των συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών, γιατί ο δάσκαλος χρειάζεται συνεχώς να προσαρμόζει τη διδασκαλία του στις υλικοτεχνικές υποδομές που διαθέτει το σχολείο, αλλά και οι μαθητές να ενθαρρύνονται να εφαρμόσουν και να επανεφεύρουν μαθηματικές δομές ή διαδικασίες. Η διδακτική πρόταση που παρουσιάζεται δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές, μέσω της μαθηματικοποίησης, να κατασκευάσουν τις επιθυμητές έννοιες, αφού περιέχουν προγραμματισμό, εκτέλεση λύσης σε στάδια, διατύπωση εξηγήσεων και διατύπωση προβλέψεων.

[1] Ε = Εμβαδόν

[2] Μ = Μήκος

[3] Π = Πλάτος

Βιβλιογραφία

Aarnes, J. & Knudtzon, S. (2003). Conjecture and Discovery in Geometry. A dialogue between exploring with dynamic geometric software (DGS) and mathematical reasoning. *PICME 2003*, Växjö, May 9th- 11th

Accascina, G. & Margiotta, G. & Rogora, E. (2005). Making bad conjectures and incomplete proofs with good drawings within a dynamic geometry environment. *ICTMT7*- Bristol, 26-29, July 2005.

Βοσνιάδου, Σ. (2006). *Παιδιά Σχολεία και Υπολογιστές*. Αθήνα, Gutenberg.

Freudenthal, H. (1983*). Didactic phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Reidel.

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*, Αθήνα, Ελληνικά Γράμματα.

Κολέζα, Ε. (2010). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών*. Αθήνα, Τόπος.

Κυνηγός, Χ. (2007) *Το μάθημα της διερεύνησης. Παιδαγωγική αξιοποίηση της Σύγχρονης Τεχνολογίας για τη διδακτική των Μαθηματικών: Από την έρευνα στη σχολική τάξη*. Αθήνα, Ελληνικά Γράμματα.

Papert, S. (1993). *MINDSTORMS: Children, Computers and Powerful Ideas*. New York, Perseus Book Group

Πρακτικά του Ελληνικού Ινστιτούτου Εφαρμοσμένης Παιδαγωγικής και Εκπαίδευσης (ΕΛΛ.Ι.Ε.Π.ΕΚ.), 5ο Πανελλήνιο Συνέδριο με θέμα «*Μαθαίνω πώς να μαθαίνω*», 7-9 Μαΐου 2010.

Treffers, A. (1991). *Realistic mathematics education in The Netherlands 1980-1990*. In L. Streefland (ed.), Realistic *Mathematics Education in Primary School*. Utrecht: CD-b Press / Freudenthal Institute, Utrecht University.

Τρέσσου - Μυλωνά, Ε. (1993). *Χώρος-Γεωμετρία*. Θεσσαλονίκη, Α.Π.Θ.

Χασάπης, Δ. (2012). *Διδακτική βασικών Μαθηματικών Εννοιών*. Αθήνα, Μεταίχμιο.

ΜΕΘΟΡΙΑΚΟΣ ΧΩΡΟΣ (LIMINAL SPACE) ΜΕΣΩ ΔΤΕ[1] ΚΑΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

Παναγιώτα Κοταρίνου & Χαρούλα Σταθοπούλου

Καθηγήτρια στο Καλλιτεχνικό Σχολείο Γέρακα,
Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εισήγηση αντλεί από την εμπλοκή μιας ομάδας μαθητών Β΄ Λυκείου σε ένα διαθεματικό project που αφορούσε στην αξιωματική θεμελίωση της Ευκλείδειας και των μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών (Υπερβολικής και Ελλειπτικής γεωμετρίας) και το οποίο υλοποιήθηκε μέσω τεχνικών «Δραματικής Τέχνης στην Εκπαίδευση» (ΔΤΕ). Το project και πιο συγκεκριμένα η χρήση τεχνικών ΔΤΕ στη διδασκαλία των μαθηματικών εξετάζονται υπό το πρίσμα της έννοιας της μεθοριακότητας (liminality)—έννοιας με ρίζες στο χώρο της κοινωνικής ανθρωπολογίας και των θεατρικών σπουδών. Θεωρούμε ότι μέσω των τεχνικών ΔΤΕ, οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν για τη διδασκαλία της γεωμετρίας, δημιουργήθηκε ένας μεθοριακός χώρος (liminal space) ένας χώρος πέρασμα με τα όρια εσκεμμένα θολά, χώρος στον οποίο οι μαθητές μας σε ένα συνεργατικό πλαίσιο πραγματεύτηκαν μαθηματικές έννοιες —γεωμετρικές έννοιες— έγραψαν κείμενα για τα δρώμενα και τα παρουσίασαν υποδυόμενοι ρόλους, βιώνοντας τα μαθηματικά με όρους αισθητικής, χιούμορ και συναισθημάτων.

[1] Η Δραματική Τέχνη στην Εκπαίδευση (ΔΤΕ) αποτελεί μια αυστηρά δομημένη παιδαγωγική διαδικασία η οποία χρησιμοποιεί ασκήσεις και τεχνικές της δραματικής τέχνης (Άλκηστις 2000).

1. Εισαγωγή

Η συνειδητοποίηση ότι τα μαθηματικά εμφανίζονται ως ένα δύσκολο σχολικό αντικείμενο υπαγορεύει, μεταξύ άλλων την αναθεώρηση της διδασκαλίας ώστε να ενισχύσει το ενδιαφέρον των μαθητών και την ενεργό συμμετοχή τους στην τάξη. Όπως παρατηρεί ο Mayer (2005) ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα στη μάθηση στο σχολικό πλαίσιο είναι το να κινητοποιήσει τους μαθητές ώστε να αφοσιωθούν πλήρως στη μαθησιακή διαδικασία, χωρίς αυτό να γυρίσει μπούμερανγκ μακροπρόθεσμα προκαλώντας δυσαρέσκεια από τη σχολική εμπειρία (Kohn, 1993; Appelbaum & Clark, 2001).

Η ενσωμάτωση στην ίδια σκηνή όπου συμβαίνει η διδασκαλία των μαθηματικών όλων των διαθέσιμων πόρων και τεχνικών, θεωρούμε ότι μπορεί να εμπλουτίσει τη διδασκαλία των μαθηματικών και ταυτόχρονα να αμφισβητήσει την αντίληψη των μαθητών για τη φύση των μαθηματικών. Σε ένα τέτοιο πλαίσιο οι μαθητές αντιμετωπίζουν την πρόκληση να δουν τα μαθηματικά ως ένα συνεχές φάσμα που διαπερνά διάφορες πτυχές της ζωής τόσο στο παρόν όσο και στο μέλλον, αγγίζοντας τόσο ατομικές όσο και κοινωνικές ανάγκες. Μιλώντας ειδικά για τη Γεωμετρία, και ιδίως για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας, για την οποία έχει υιοθετηθεί μια παραγωγική δομή, σπανίως εμφανίζεται επιτυχής, καθώς δε δίνει στους μαθητές την ευκαιρία να επανεφεύρουν τα δικά τους μαθηματικά, αλλά συνήθως απλώς τους 'τίθενται' (Freudenthal, 1971, σελ. 417-418).

Τα τελευταία χρόνια, οι εναλλακτικές προσεγγίσεις στη διδασκαλία της γεωμετρίας έχουν διερευνηθεί. Η χρήση των νέων τεχνολογιών (Laborde et al, 2006; Jones, 2011), η μελέτη των εφαρμογών της Γεωμετρίας σε διάφορους κλάδους (Fletcher, 1971), η χρήση εφαρμογών της Ιστορίας της Γεωμετρίας με κατάλληλο υλικό από τις ιστορικές πηγές, καθώς και η χρήση των τεχνών έχουν δημιουργήσει νέες εκπαιδευτικές καταστάσεις που εμπλέκουν τους μαθητές ενεργά στη διαδικασία της διδασκαλίας / μάθησης.

Όπως υποστηρίζει η Gerofsky (2010), η ενεργός συμμετοχή των μαθητών πέρα από τα μαθησιακά αποτελέσματα έχει και άλλες προεκτάσεις καθώς θα μπορούσε να προετοιμάσει τους νέους να ζήσουν σε ένα πιο συμμετοχικό πολιτικό σύστημα όπου οι φωνές και οι ιδέες τους λαμβάνονται σοβαρά υπόψη.

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται ένα πρότζεκτ εστιασμένο στην αξιωματική θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και των μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών (Υπερβολικής και Ελλειπτικής γεωμετρίας) το οποίο σχεδιάστηκε από τις συγγραφείς του έργου και υλοποιήθηκε από την πρώτη συγγραφέα σε μια σχολική τάξη Β΄ Λυκείου. Το διαθεματικό αυτό project υλοποιήθηκε με τη χρήση τεχνικών «Δραματικής Τέχνης στην Εκπαίδευση», τεχνικές οι οποίες υποστηρίζουμε ότι δημιούργησαν έναν ενδιάμεσο/μεθοριακό χώρο όπου νέες πρακτικές, νέοι λόγοι (discourse) και νέα εργαλεία αναδείχθηκαν. Σ' αυτό το πλαίσιο αμφισβητήθηκαν διχοτομίες όπως: επίσημη-ανεπίσημη μαθηματική γνώση, σώμα- μυαλό, παίζω μαθαίνω κλπ και οι μαθητές προσέγγισαν με άλλο τρόπο μαθηματικές έννοιες αλλά και επαναδιαπραγματεύτηκαν την αντίληψή τους για τη φύση των μαθηματικών και δη της ευκλείδειας γεωμετρίας. Η αμφισβήτηση της μοναδικότητας του Ευκλείδειου χώρου για την ερμηνεία του κόσμου ήταν μια επιπλέον πρόκληση που οι μαθητές κλήθηκαν να διαχειριστούν σ' αυτό το νέο πλαίσιο.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε εν συντομία τη σημασία της ανακάλυψης των μη Ευκλείδειων γεωμετριών στη διδασκαλία των μαθηματικών, τα χαρακτηριστικά της «Δραματικής Τέχνης στην Εκπαίδευση», τη σύνδεση Μεθοριακότητας (Liminality) και «Δραματικής τέχνης στην εκπαίδευση» και θα συνεχίσουμε με το σχεδιασμό και την υλοποίηση της έρευνας, ολοκληρώνοντας με τη συζήτηση των αποτελεσμάτων.

2. Μη Ευκλείδειες γεωμετρίες

Η ανακάλυψη των μη- Ευκλείδειων Γεωμετριών αποτελεί ένα σημείο καμπής στην ιστορία και εξέλιξη των Μαθηματικών, μέσα από το διαχωρισμό της πραγματικότητας από το μαθηματικό χώρο και μέσα από τη συνειδητοποίηση ότι οι μαθηματικές δομές, στο ρόλο τους ως μοντέλα, αποτελούν διαμεσολαβητικά εργαλεία στην εξερεύνηση του χώρου (Hegedus & Moreno- Armella, 2011: σ.375). Αυτή η συνειδητοποίηση μέσω της ανακάλυψης των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών, απετέλεσε μια ρήξη στην ίδια τη Γεωμετρία και των Μαθηματικών γενικότερα.

Η αντίληψη ανάμεσα στους μαθητές ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία αποτελεί το μοντέλο ερμηνείας και αναπαράστασης του πραγματικού μας χώρου έχει διαπιστωθεί ότι είναι κυρίαρχη. Πράγματι η διδασκαλία στο σχολείο επιβάλλει ως απόλυτη και αναμφισβήτητη αλήθεια, την αντίληψη ότι το μοντέλο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι η πραγματική Γεωμετρία του φυσικού χώρου γεγονός το οποίο διαψεύσθηκε με την ανακάλυψη των μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών.

Έτσι η διδασκαλία της ενότητας των μη-Ευκλειδείων Γεωμετριών συντελεί στο να αναγνωρίσουν οι μαθητές ότι υπάρχουν αρκετές άλλες Γεωμετρίες και χώροι εκτός της Ευκλείδειας, να καταλάβουν ότι τα Μαθηματικά δεν είναι απόλυτες αλήθειες και να εκτιμήσουν τόσο την αξία της λογικής και της αξιωματικής μεθόδου (Kazim, 1988, ο.α στο Θωμαΐδης κ.α., 1989). Επίσης η διερεύνηση των ιδιοτήτων των μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών και η διαπίστωση ότι διαφορετικά αξιώματα οδηγούν σε διαφορετικά —και συχνά αντίθετα— με γνωστά θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας συντελούν στην καλλίτερη κατανόηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως αξιωματικού συστήματος (NCTM, 1989, ο.α στο Gray και Sarhangi). Στην καλλίτερη κατανόησή της επιπλέον συντελεί και η μελέτη αντίστοιχων γεωμετρικών εννοιών στα διάφορα συστήματα, καθώς και ο εντοπισμός των ομοιοτήτων και διαφορών τους (Lénárt, 2007, 2004a, 2004b). Επιπλέον η εισαγωγή των μη-Ευκλειδείων Γεωμετριών, στο σχολείο βοηθάει να μεθοδεύσουμε μια μη-δογματική εισαγωγή και ανάπτυξη της έννοιας του χώρου στο σχολείο (Καστάνης, 1988, ο.α στο Θωμαΐδης κ.α., 1989) και να προβληματιστούν οι μαθητές αν το μοντέλο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι αυτό που ερμηνεύει τις ιδιότητες του χώρου που μας περιβάλλει. Η δυνατότητα της ύπαρξης άλλων Γεωμετριών και κυρίως το γεγονός ότι αυτές δίνουν πιο αποτελεσματικές ερμηνείες του φυσικού χώρου αποτέλεσε μια επιστημονική επανάσταση που ανέτρεψε βαθειά ριζωμένες αντιλήψεις (Θωμαΐδης, 1992). Η επαφή των μαθητών με τις μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες, η ανακάλυψη των οποίων αποτελεί σημείο καμπής (ρήξης) στην ιστορία και εξέλιξη των Μαθηματικών, δίνει τη δυνατότητα να αντιληφθούν τα Μαθηματικά ως μια δημιουργία υπό συνεχή διαπραγμάτευση, τροποποιώντας με τον τρόπο αυτό τις επιστημολογικές αντιλήψεις τους για τα μαθηματικά.

3. Δραματική Τέχνη στην Εκπαίδευση

Η 'Δραματική Τεχνη στην Εκπαίδευση' σύμφωνα με τους O' Neil & Lambert (1990, σελ.11) αποτελεί μία μαθησιακή μέθοδο κατά την οποία οι μαθητές μέσα από την ταύτιση με φανταστικούς ρόλους και καταστάσεις, μαθαίνουν και εξερευνούν θέματα, γεγονότα και σχέσεις. Είναι μια μορφή παραστατικής/επιτελεστικής τέχνης με παιδαγωγικό χαρακτήρα που βασικό στόχο έχει την κατανόηση του εαυτού μας και του κόσμου (O' Neil & Lambert, 1990 σελ.13), αλλά επίσης αποτελεί και ένα δυναμικό και δημιουργικό μεθοδολογικό εργαλείο για να διδαχθούν διάφορα αντικείμενα του αναλυτικού προγράμματος μέσα από συλλογικές δράσεις και βιωματικές εμπειρίες, βάζοντας τα παιδιά στη θέση του ηθοποιού (βίωμα), θεατή (κρίση), συγγραφέα (νόημα) και σκηνοθέτη (μορφή). Η ΔΤΕ συνδυάζει: α) Μορφή και Περιεχόμενο, β) Δράση και Αναστοχασμό, γ) Λογική και Φαντασία, δ) Σκέψη και Συναίσθημα, ε) Σώμα και Πνεύμα. Στο Δράμα οι συμμετέχοντες δημιουργούν μια ιστορία, ένα φανταστικό κόσμο, υποδύονται ρόλους, διερευνούν ένα θέμα ή αντιμετωπίζουν προβλήματα και αποφασίζουν, δρουν και αναστοχάζονται πάνω στις πράξεις τους (Αυδή και Χατζηγεωργίου, 2007). Η ΔΤΕ, σύμφωνα με την Wagner (1999), δίνει τη δυνατότητα στους συμμετέχοντες, είτε κατά τη διάρκειά του, είτε κατά τη συζήτηση που έπεται, να εξετάσουν την πραγματικότητα μέσα από τη φαντασία, να κοιτάξουν κάτω από την επιφάνεια των πράξεων και να βρουν το βαθύτερο νόημα των πράξεων αυτών. Τα βασικά στοιχεία και οι τεχνικές της ΔΤΕ προέρχονται από τον κόσμο του παραδοσιακού θεάτρου, αλλά υπάρχουν και ορισμένες ιδιαιτερότητες που το διαφοροποιούν από αυτό:

α) Η ΔΤΕ δεν απαιτεί συγκεκριμένα θεατρικά κείμενα και την εκμάθησή τους από τα παιδιά. Αντίθετα η 'Δραματική Τέχνη στην Εκπαίδευση' εμπλέκει συχνά ολόκληρη την τάξη σε αυτοσχεδιασμούς, σε ένα φανταστικό πλαίσιο (Heathcote & Bolton, 1995). Πολλές φορές ένα θεατρικό κείμενο μπορεί να αποτελέσει την αφορμή για να αρχίσει το Εκπαιδευτικό Δράμα ή άλλες φορές, τα μέλη της ομάδας γράφουν τα δικά τους κείμενα στο πλαίσιο της δημιουργικής γραφής.

β) Η ΔΤΕ είναι μια δραστηριότητα με επίκεντρο τη διαδικασία και όχι το αποτέλεσμα-παράσταση. Η επιτυχία μιας δραστηριότητας αξιολογείται από τις ιδέες, τις εκφράσεις, τις δεξιότητες, τις ικανότητες, τη φαντασία και τη δημιουργικότητα που προκαλεί και όχι από τις θεατρικές δεξιότητες των μαθητών ή από την αισθητική του αποτελέσματος, όπως σε μια επαγγελματική θεατρική παραγωγή. Μερικές φορές το αποτέλεσμα μιας τέτοιας παιδαγωγικής προσέγγισης μπορεί να καταλήξει σε παράσταση με εξωτερικό κοινό, χωρίς όμως αυτό να αποτελεί και τον κύριο σκοπό της παρέμβασης. Στη ΔΤΕ ο ηθοποιός δεν διαχωρίζεται από τον ακροατή. Ο μαθητής είναι και συμμετέχων και παρατηρητής, παίζοντας ένα ρόλο, και αλληλεπιδρώντας με τους άλλους στο πλαίσιο του ρόλου (Andersen, 2004).

γ) Σύμφωνα με την Heathcote, το καθοριστικό στοιχείο του Εκπαιδευτικού Δράματος που το διαφοροποιεί από το 'θέατρο στην εκπαίδευση' αποτελεί η διαδικασία του αναστοχασμού (reflection). Η ΔΤΕ δεν περιορίζεται στη βιωματική εμπειρία, αλλά προχωρά στη συνειδητοποίηση της εμπειρίας αυτής και με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται η μάθηση. Οι μαθητές σκέφτονται για τις ιδέες μέσω του παιχνιδιού ρόλων και μπορούν καλύτερα να κατανοήσουν τη διαδικασία της σκέψης τους, τη στιγμή που θα βγουν από το ρόλο (Andersen, 2002). Στο Εκπαιδευτικό Δράμα, χρησιμοποιούνται μια σειρά από συμβάσεις που παγώνουν ή καθυστερούν τη δράση με σκοπό να την αναλύσουν, να την ερμηνεύσουν και να την κατανοήσουν. Ο χρόνος παρατήρησης και συζήτησης που έπεται της κάθε δραστηριότητας βοηθά τα παιδιά να αποστασιοποιηθούν, να επεξεργαστούν και να κατανοήσουν αυτά που προηγήθηκαν, να κρίνουν τις καταστάσεις, να αξιολογήσουν τις συμπεριφορές και τις στάσεις των άλλων, αλλά και να αυτοαξιολογηθούν.

Στη ΔΤΕ ο δάσκαλος και οι μαθητές συμμετέχουν σε-ρόλο για να δημιουργήσουν ιστορίες και σκηνές μέσα από τις οποίες οι μαθητές μπορούν να βιώσουν το πρόγραμμα σπουδών σε ένα συναισθηματικά πλούσιο πλαίσιο και όχι να αναπτύξουν θεατρικές δεξιότητες στην υποκριτική, τη συγγραφή, τη σκηνοθεσία, το φωτισμό. Ο στόχος είναι οι μαθητές να δώσουν προσοχή αλλά και φροντίδα σε έναν «ως εάν» ('as if') κόσμο, έναν κόσμο που τον αισθάνονται πραγματικό, ακόμα κι

αν ξέρουν ότι δεν είναι. Όταν οι μαθητές βιώνουν έναν ρόλο σε αυτόν τον φανταστικό κόσμο, χτίζουν πίστη και συναίσθημα για τους χαρακτήρες, τις καταστάσεις και τις συγκρούσεις αυτού του φανταστικού κόσμου. Μέσα από αυτήν την πεποίθηση και μέσα από τη συμμετοχή αυτή και εμπλοκή τους στο δράμα οι μαθητές αποκτούν ενδιαφέρον για τη γνώση του προγράμματος σπουδών.

4. Μεθοριακότητα (Liminality) και 'Δραματική τέχνη στην εκπαίδευση' (Drama in Education)

Η έννοια του μεθοριακού χώρου (liminal[1] space) στις επιτελεστικές σπουδές (performance studies), προέρχεται από το χώρο της ανθρωπολογίας και συγκεκριμένα από τον Victor Turner (1982), ο οποίος δανείστηκε τον όρο από τον επίσης ανθρωπολόγο Arnold Van Gennep για τον οποίο η έννοια της μεθοριακότητας (liminality) αποτελούσε μια έννοια κλειδί για τις 'διαβατήριες τελετές' (rites of passage) στις διάφορες κουλτούρες. Η κατάσταση μεθοριακότητας (liminality), μια κατάσταση μετάβασης-οριακότητας, εμφανίζεται κατά τη διάρκεια αυτών των 'διαβατήριων τελετών'-τελετουργιών μετάβασης από μια κοινωνική θέση ή κατάσταση σε άλλη- όπου τα άτομα βρίσκονται σε ένα μεταβατικό διάστημα-χώρο ανάμεσα σε μια προηγούμενη κατάσταση και μια νέα. Βρίσκονται δηλ. σε μια μετέωρη, οριακή κατάσταση σε ένα κατώφλι κάπου «μεταξύ και ανάμεσα» ("betwixt and between ") σύμφωνα με την φράση του Turner στην διάρκεια της οποίας ανατρέπονται όλες οι αντιλήψεις της κοινωνικής δομής.

Ο Turner (1982) διαχωρίζει τα μεθοριακά (liminal) φαινόμενα από τα οιωνεί μεθοριακά (liminoid) με τα πρώτα να αναφέρονται στις τελετουργίες, ενώ παραδείγματα δεύτερων φαινομένων αποτελούν το θέατρο, το μεταμοντέρνο πειραματικό θέατρο, οι ταινίες και γενικότερα ο χώρος του κινηματογράφου, η τηλεόραση, οι συναυλίες, η όπερα, η ροκ μουσική, το μπαλέτο, τα σπορ, τα παιχνίδια διασκέδασης. Και τα δύο όμως είδη μεθοριακών φαινομένων παρέχουν ένα μεταβατικό πλαίσιο στο εσωτερικό του οποίου οι καθημερινές κοινωνικές και

[1] Η λέξη προέρχεται από τη λατινική λέξη limens που σημαίνει κατώφλι.

πολιτισμικές εμπειρίες μεταμορφώνονται. Ο Turner βλέπει το θέατρο ως ένα ζωντανό, συνεχώς επαναλαμβανόμενο τελετουργικό.

Ο Richard Schechner (2002, 58 – 61, ο. α. η Gerofsky, 2006) από τους κύριους θεωρητικούς της επιτέλεσης (performance), με υπόβαθρο στην ανθρωπολογία και στο θέατρο, αναπτύσσει την ιδέα του μεθοριακού πολιτισμικού χώρου, ως μια ιδιότητα του πραγματικού φυσικού χώρου στον οποίο επιτελείται η παράσταση. Όπως το κατώφλι (limen) στο κάτω μέρος της πόρτας το οποίο δεν αποτελεί ξεχωριστό χώρο αλλά ενώνει δύο άλλους χώρους, έτσι στις τελετουργικές ή τις αισθητικές επιτελέσεις (performance), ο κενός χώρος γίνεται πραγματικά και εννοιολογικά μιά δίοδος, ένα κατώφλι, στο οποίο επιτελείται ένα δρώμενο 'μεταξύ και ανάμεσα'. Ο χώρος διευρύνεται και γίνεται ένας ζωντανός χώρος, που δεν ακολουθεί αναγκαστικά τους κανόνες και τις συμβάσεις της καθημερινής ζωή. Η σκηνή του θεάτρου είναι ένας μεθοριακός χώρος ανοιχτός σε όλες τις πιθανότητες –ο χώρος θα μπορούσε να γίνει ο οποιοσδήποτε. Οι επιτελεστές (performers) μπορούν να διερευνήσουν χαρακτήρες έξω από τον καθημερινό τους εαυτό και μπορούν να υποδυθούν πειστικά ρόλους επειδή ο χώρος της σκηνής έχει διευρυνθεί σε ένα 'κατώφλι' (limen) μεταξύ αλήθειας και ψέματος (Gerofsky, 2012: 244). Στο χώρο αυτό οι μεταμορφώσεις των ατόμων που συμμετέχουν μέσω των ρόλων τους είναι παροδικές, σε αντίθεση με τις τελετουργίες μύησης όπου τα άτομα μετασχηματίζονται σε κάτι άλλο μόνιμα (Schechner, 1985). Οι μεθοριακοί αυτοί χώροι επιτρέπουν τη διερεύνηση των αντιφάσεων, των μετασχηματισμών και των μεταβάσεων που βιώνει κανείς στο σύνορο δύο κόσμων τους οποίους το άτομο θεωρεί αντίθετους.

Σύμφωνα με την Gerofsky (2006), μια σχολική τάξη μπορεί να γίνει ένας μεθοριακός χώρος – ένας χώρος πέρασμα, ένας διευρυμένος οριακός χώρος με χώρο για παιχνίδι. Αν είμαστε πρόθυμοι να εργαστούμε σε χώρο πολιτισμικά μεθοριακό, μια τάξη μπορεί να είναι τόσο ευμετάβλητη όπως ο χώρος του θεάτρου. Η τάξη έχει τη δυνατότητα να λειτουργεί ως ένας μεθοριακός χώρος της παιδικής και εφηβικής ηλικίας, μεταξύ της κοινότητας της τάξης και του έξω κόσμου και σε ένα τέτοιο πλαίσιο αλλάζει η δυναμική της και γίνεται ανοιχτή στην αναδιαμόρφωσή και αναπροσανατολισμό της σε μια συνομιλία του παλιού με το νέο. Σε ένα χώρο επιτελεστικό, αυτοί οι

μεθοριακοί χώροι είναι ανοιχτοί για μια συναισθηματική, σωματική και νοητική εμπλοκή των μαθητών, η οποία μπορεί να οδηγήσει σε μια βαθύτερη κατανόηση και εκτίμηση των μαθηματικών (Gerofsky, 2015).

Η Gerofsky (2006) θεωρεί ότι η 'ψηφιακή μαθηματική παράσταση' ("digital mathematical performance") δημιουργεί έναν μεθοριακό χώρο (liminal space) έναν χώρο πέρασμα ανάμεσα σε κόσμους με σκόπιμα ασαφή όρια, όπως ανάμεσα σε διαφορετικά αντικείμενα όπως τα μαθηματικά και η μουσική, η τέχνη ή το Δράμα, ανάμεσα στο δάσκαλο ως αυτόν που γνωρίζει ("teacher as knower") και το μαθητή ως δέκτη, ανάμεσα στους επιτελεστές (performers) και το κοινό, ανάμεσα στο πραγματικό και το φανταστικό, στο πνεύμα και το σώμα. Η ίδια ισχυρίζεται (2012) ότι οι επιτελεστικοί τρόποι έκφρασης μαθηματικών εννοιών ή προβλημάτων σε ιστοσελίδες στο διαδίκτυο μπορούν να δημιουργήσουν νέους μεθοριακούς χώρους που επιτρέπουν τη συμμετοχή ατόμων που διαφορετικά δεν θα είχαν πρόσβαση στη μαθηματική αναζήτηση.

Εμείς με την παρούσα εισήγηση ισχυριζόμαστε ότι τρόποι έκφρασης των μαθητών μέσα από τεχνικές Δράματος, μιας επιτελεστικής τέχνης με παιδαγωγικό χαρακτήρα, μπορούν να δημιουργήσουν στην τάξη των μαθηματικών έναν μεθοριακό χώρο (liminal space), όπως τον περιγράφει η Gerofsky (2006). Μέσα σ' αυτό το χώρο, όπου συνυπάρχουν το ρήμα 'μαθαίνω' —συνδεδεμένο με σχολική πρακτική—και το ρήμα 'παίζω' –συνδεδεμένο με εκτός σχολικής τάξης πλαίσια—μέσα από ένα δημιουργικό διάλογο, δημιουργούνται συνθήκες και προϋποθέσεις για μεγαλύτερη και ουσιαστικότερη συμμετοχή των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία με νέους όρους, όπως φαίνεται και από τα συμπεράσματα του project που ακολουθεί.

5. Το πλαίσιο και η μέθοδος της έρευνας

Το πλαίσιο της έρευνας: Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε τμήμα 26 μαθητών/τριών Β΄ Λυκείου (16 κορίτσια, 10 αγόρια). Από τους συμμετέχοντες μαθητές/τριες οι 17 ακολουθούσαν το πρόγραμμα σπουδών της θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης και οι 9 τον κύκλο της θεωρητικής. Η διδακτική παρέμβαση έγινε στο

Πειραματικό Λύκειο Ιλίου και είχε διάρκεια τεσσάρων μηνών (σχολ. έτος 2010-2011).

Η Μέθοδος της έρευνας: Για τη συλλογή των δεδομένων αξιοποιήσαμε τεχνικές εθνογραφικής έρευνας (παρατήρηση, συνεντεύξεις), ορισμένες συζητήσεις στην τάξη μαγνητοφωνήθηκαν και αναλύθηκαν και όλα τα δρώμενα των μαθητών βιντεοσκοπήθηκαν και αναλύθηκαν.

Για την παρέμβασή μας στηριχτήκαμε στη λογική του διδακτικού πειράματος (Χρονάκη, 2008). Το διδακτικό πείραμα έφερε τον τίτλο "Είναι ο κόσμος μας Ευκλείδειος;" και αφορούσε στη διδασκαλία με χρήση τεχνικών ΔΤΕ της αξιωματικής θεμελίωσης της Ευκλείδειας, της Υπερβολικής και Ελλειπτικής Γεωμετρίας καθώς και της ιστορίας του 5ου αιτήματος του Ευκλείδη. Πραγματοποιήθηκε σε 25 διδακτικές ώρες, στη διάρκεια 7 εβδομάδων και διέτρεξε τα μαθήματα της Γεωμετρίας, Ιστορίας, Νεοελληνικής Γλώσσας Λογοτεχνίας και Αρχαίων Ελληνικών.

Το διδακτικό πείραμα "Είναι ο κόσμος μας Ευκλείδειος;"

Η επιλογή του θέματος του διδακτικού πειράματος αποτέλεσε για μας ένα σημείο έντονου προβληματισμού και αναζήτησης. Γνωρίζοντας ότι η ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική διαδικασία μπορεί να υποστηρίξει, εμπλουτίσει και βελτιώσει τη διδασκαλία των Μαθηματικών, να ενισχύσει την αντίληψη ότι τα Μαθηματικά αποτελούν μια κοινωνική και πολιτισμική κατασκευή αλλά και να προσφέρει δυνατότητα να εφαρμόσουμε τις τεχνικές ΔΤΕ, επιζητούσαμε ενότητες από την ιστορία των Μαθηματικών οι οποίες να πληρούν τα παρακάτω κριτήρια.

Α. Να δίνουν τη δυνατότητα να διευκρινιστούν και κατανοηθούν από τους μαθητές επιστημολογικά χαρακτηριστικά των σχολικών Μαθηματικών.

Β. Να βοηθήσουν τους μαθητές να αντιληφθούν τα Μαθηματικά ως μια δημιουργία υπό συνεχή διαπραγμάτευση, τροποποιώντας με τον τρόπο αυτό τις επιστημολογικές αντιλήψεις τους για τα μαθηματικά.

Η αξιωματική θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, και οι μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες[2] μέσα από την ιστορία του 5ου αιτήματος του Ευκλείδη αποτέλεσαν το θέμα της διδακτικής μας παρέμβασης το οποίο θεωρήσαμε ότι πληρούσε όλες τις προαναφερθείσες απαιτήσεις, όπως στοιχειοθετείται στη συνέχεια.

Α) Επιστημολογικά χαρακτηριστικά των σχολικών Μαθηματικών

Σημαντικά στοιχεία των μαθηματικών όπως ορισμοί, ιδιότητες αλλά και διαδικασίες παρουσιάζονται με ένα αδιαφοροποίητο και ουσιαστικά ομογενοποιημένο τρόπο, ο οποίος δεν επιτρέπει στους μαθητές να διακρίνουν το νόημα, τη φύση και τη λειτουργία τους στα Μαθηματικά και αυτή η εικόνα εμφανίζεται με τον ίδιο τρόπο σε δασκάλους και καθηγητές των Μαθηματικών (Καλδρυμίδου, Τζεκάκη, και Σακονίδης, 2005). Τα αποτελέσματα έρευνας έχουν δείξει ότι τόσο στο Δημοτικό όσο και στο Γυμνάσιο στον Ελλαδικό χώρο, οι τρόποι με τους οποίους παρουσιάζονται τα επιστημολογικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών, καθώς και αυτοί με τους οποίους δάσκαλοι και μαθητές τα διαχειρίζονται στην τάξη δεν επιτρέπουν τη διαφοροποίησή τους αναφορικά με το νόημα που έχουν στα Μαθηματικά (Ikonomou, Kaldrimidou, Sakonidis & Tzekaki, 1999). Οσον αφορά στη Γεωμετρία οι ορισμοί και τα θεωρήματα συχνά υποβιβάζονται σε διαδικασίες οπτικής αναγνώρισης και σχεδιασμού (Kaldrimidou, Sakonidis & Tzekaki, 2000).

Αλλά και στο Λύκειο, όπως δείχνει η έρευνα του Πατρώνη (Patronis, 1994) παρατηρείται μια σύγχυση στους μαθητές, ανάμεσα στα αξιώματα και τους ορισμούς. Για τους μαθητές ένα αξίωμα είναι κάτι 'λογικό' και 'απλό στη διατύπωσή του', 'αυτονόητο', 'προφανώς αληθές', αλλά πολύ δύσκολο να αποδειχθεί. Οι ίδιες ιδιότητες αποδίδονται από τους μαθητές σε ορισμένους ορισμούς. Για πολλούς δε μαθητές, σύμφωνα με την ίδια έρευνα, τα μόνα αξιώματα και ορισμοί της γεωμετρίας που μοιράζονται τις προαναφερθείσες

[2] Το NCTM στο National Council of Teachers of Mathematics Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics αναφέρει [NCTM-89: pp 157] ότι οι μαθητές οι οποίοι θα συνεχίσουν τις σπουδές τους στο Κολλέγιο θα πρέπει να κατανοήσουν την έννοια της αξιωματικής θεμελίωσης μέσα από τη διερεύνηση και σύγκριση της Ευκλείδειας με μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες.

ιδιότητες, είναι τα αξιώματα και οι ορισμοί της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Επιλέξαμε λοιπόν ως θέμα του διδακτικού μας πειράματος την αξιωματική θεμελίωση της Ευκλείδειας και των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών (Υπερβολικής και Ελλειπτικής Γεωμετρίας), ώστε να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια της αξιωματικοποίησης μιας επιστημονικής θεωρίας γενικότερα και ειδικότερα μέσω της αξιωματικής θεμελίωσης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας να δοθεί η δυνατότητα να διευκρινιστούν από τους μαθητές έννοιες όπως ο ορισμός, αρχικές έννοιες, αξίωμα, απόδειξη.

Β) Το διδακτικό μας πείραμα σχεδιάστηκε για να εισάγει τους μαθητές σε μιά επιστημονική ρήξη στην ιστορία των μαθηματικών. Η γνωριμία των μαθητών στο διδακτικό μας πείραμα με την ίδια την επιστημολογική ρήξη στα Μαθηματικά, καθώς και με την πορεία προς αυτήν, θεωρήσαμε ότι είχε τη δυνατότητα να προκαλέσει τις αντιλήψεις τους για τη Γεωμετρία και γενικότερα για τα Μαθηματικά ως επιστήμης της απόλυτης αλήθειας.

Η παρουσίαση των μαθηματικών ως μιας παραγωγικής μεθόδου, προωθεί την εικόνα των μαθηματικών ως ένα ολοένα αυξανόμενο σύνολο από αιώνιες αμετάβλητες αλήθειες, ενώ ολόκληρος ο αγώνας και οι περιπέτειες για την ανακάλυψή τους είναι κρυμμένος (Lakatos, 1991). Όπως σημειώνει χαρακτηριστικά ο ίδιος (1991, σελ.212) *'η όλη διαδικασία των διαδοχικών δοκιμαστικών αναδιατυπώσεων του θεωρήματος κατά την εξέλιξη της αποδεικτικής διαδικασίας καταδικάζεται σε λήθη, ενώ το τελικό εξαγόμενο καθαγιάζεται και εξαίρεται το αλάθητό του'.* Για το λόγο αυτό αποφασίσαμε το διδακτικό μας πείραμα να αποκαλύψει την πορεία από την αξιωματική θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έως την ανακάλυψη των μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών, περιλαμβάνοντας δραστηριότητες που αφορούσαν τον αγώνα των μαθηματικών του ευρύτερου Ισλαμικού κόσμου και αργότερα των μαθηματικών της Αναγέννησης να αποδείξουν ανεπιτυχώς το 5ο αίτημα, ο οποίος αγώνας παραμένει στη λήθη στα σχολικά Μαθηματικά.

Διδακτικοί στόχοι του διδακτικού πειράματος

Με τη μελέτη της αξιωματικής θεμελίωσης της Ευκλείδειας, της Υπερβολικής και Σφαιρικής Γεωμετρίας θέσαμε τους παρακάτω στόχους.

1) **Μαθησιακούς**: α) Να γνωρίσουν οι μαθητές πώς θεμελιώνονται αξιωματικά τα τρία μοντέλα Γεωμετριών. Το Ευκλείδιο μοντέλο --όταν από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μία μόνο ευθεία παράλληλη προς αυτήν-, το υπερβολικό μοντέλο --όταν από σημείο εκτός ευθείας διέρχονται δύο τουλάχιστον ευθείες παράλληλες προς αυτήν- και το ελλειπτικό μοντέλο --όταν δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες-. Πιο συγκεκριμένα είχαμε στόχο να κατανοήσουν και συγκρίνουν τα αξιώματα και τις βασικές έννοιες των παραπάνω Γεωμετριών.

β) Να κατανοήσουν ότι τα παραπάνω γεωμετρικά μοντέλα έχουν διαφορετικές ιδιότητες ανάλογα με το αξίωμα των παραλλήλων. Να αντιληφθούν δηλ. μέσα από τη διερεύνηση ιδιοτήτων των άλλων Γεωμετριών, πώς βασικά αξιώματα και ορισμοί μπορούν να οδηγήσουν σε διαφορετικά και συχνά αντιφατικά αποτελέσματα σε σχέση με την Ευκλείδεια Γεωμετρία.

γ) Μέσω της σύγκρισης των ομοιοτήτων και διαφορών των τριών Γεωμετριών επιδιώξαμε να δώσουμε την ευκαιρία στους μαθητές να επαναδιαπραγματευτούν βασικές έννοιες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και να κερδίσουν επίσης μια βαθύτερη και συνολικότερη κατανόηση της Γεωμετρίας.

2. **Επιστημολογικούς:** Στόχος μας ήταν η προβολή μιας '*ανθρωπιστικής εικόνας*' για τα Μαθηματικά μέσα από το διδακτικό πείραμα, με σκοπό την αμφισβήτηση από τους μαθητές των στερεοτυπικών εικόνων που συνδέονται με τα Μαθηματικά και τη διδασκαλία τους.

Πιο αναλυτικά, στους στόχους μας περιλαμβάνονταν: α)Να αντιληφθούν οι μαθητές ότι τα Μαθηματικά είναι μια πολιτισμική κατασκευή, δηλ. είναι ενταγμένα σε ένα πολιτισμικό πλαίσιο και είναι συνδεδεμένα με τη ζωή. β) Να αντιληφθούν ότι τα Μαθηματικά είναι ιστορικά εξελισσόμενο ανθρώπινο δημιούργημα γ) Να αμφισβητηθεί η βεβαιότητα της 'απόλυτης αλήθειας' στα Μαθηματικά, μέσω της γνωριμίας των μαθητών με τις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες.

Για τη Γεωμετρία ειδικότερα επιζητούσαμε, οι μαθητές να αντιληφθούν την απελευθέρωση της Γεωμετρίας ως επιστήμης που προσπαθεί να περιγράψει τις χωρικές ιδιότητες του κόσμου στον οποίο ζούμε και ότι οι μαθηματικοί μπορούν να κατασκευάσουν διάφορες Γεωμετρίες, θέτοντας αξιώματα, με μόνη προϋπόθεση τη συνέπεια μεταξύ τους και όχι τη φυσική τους αλήθεια.

Για την επίτευξη των παραπάνω στόχων αξιοποιήσαμε διάφορες τεχνικές του εκπαιδευτικού Δράματος, με τελικό προϊόν του διδακτικού πειράματος μια ταινία (δραματοποιημένο ντοκιμαντέρ) για την Ευκλείδεια και τις μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες.

Παρουσίαση του διδακτικού πειράματος

α. Δομή του διδακτικού πειράματος

***Άξονες του διδακτικού πειράματος*:**Τρεις ήταν οι άξονες του διδακτικού μας πειράματος. Οι Μαθηματικές έννοιες, το ιστορικό και πολιτισμικό πλαίσιο στο οποίο αυτές γεννήθηκαν και αναπτύχθηκαν και τα πρόσωπα που συμμετείχαν στη γέννεσή τους.

***Ενότητες του διδακτικού πειράματος*:**Το όλο διδακτικό πείραμα χωρίστηκε σε επτά ενότητες, ανάλογα με το θέμα των Μαθηματικών που αναπτύχθηκε σε κάθε μία. Την τελευταία ενότητα αποτέλεσε η δημιουργία της ταινίας. Για κάθε ενότητα, προσδιορίσαμε τους ειδικούς στόχους συνδέοντάς τους με τους σκοπούς που είχαμε θέσει για το διδακτικό πείραμα

***Δομή ενοτήτων*:** Οι δραστηριότητες στις πρώτες πέντε ενότητες ακολουθούσαν συνήθως την παρακάτω δομή:

- Αρχική διάλεξη από την ερευνήτρια με ταυτόχρονη ψηφιακή προβολή, για εισαγωγή στο θέμα.

- Εργασία των μαθητών σε ομάδες για την κατανόηση του αντίστοιχου θέματος. Η εργασία, με τη βοήθεια φύλλου εργασίας, περιλάμβανε τη μελέτη κατάλληλης βιβλιογραφίας, καθώς και δραστηριότητες με χειραπτικό υλικό ή τη χρήση σύγχρονης τεχνολογίας.

- Ανακεφαλαιωτική δραστηριότητα από την ερευνήτρια.

- Προετοιμασία των δρώμενων με τεχνικές ΔΤΕ, από τις ομάδες.
- Παρουσίαση των δρώμενων.
- Αναστοχασμός.

Η δομή των δραστηριοτήτων σε κάθε διδακτική ενότητα ήταν σε γενικές γραμμές η ακόλουθη. Η ερευνήτρια έκανε μια εισαγωγική διάλεξη στο θέμα, με τη βοήθεια μιας ψηφιακής παρουσίασης και ταυτόχρονα ή μετά τη διάλεξη επακολουθούσε σχετική συζήτηση. Σε επόμενες διδακτικές ώρες οι μαθητές σε ομάδες, μελετούσαν σχετική με το θέμα βιβλιογραφία, που τους μοίραζε η ερευνήτρια, με στόχο την κατανόηση του διδασκόμενου θέματος. Ορισμένες φορές για πληρέστερη κατανόηση του θέματος γινόταν αξιοποίηση των Νέων Τεχνολογιών καθώς και χειραπτικού υλικού και αν κρινόταν απαραίτητο γινόταν μια μικρή ανακεφαλαιωτική συζήτηση ή δραστηριότητα με τους μαθητές. Τέλος οι ομάδες προετοίμαζαν και πραγματοποιούσαν παρουσιάσεις σχετικές με το θέμα, αξιοποιώντας τεχνικές ΔΤΕ. Στο τέλος των παρουσιάσεων, δινόταν χρόνος για να αναστοχαστούν οι μαθητές σχετικά με το θέμα, την παρουσίαση και την προετοιμασία του δρώμενου.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε επιγραμματικά τις ενότητες του project.

1η: *Τα στοιχεία του Ευκλείδη και η αξιωματική θεμελίωση της* Γεωμετρίας (6 διδακτικές ώρες, στα μαθήματα των Αρχαίων Ελληνικών και των μαθηματικών). Σχέση της αξιωματικής θεμελίωσης του Ευκλείδη με τη Λογική του Αριστοτέλη και μελέτη από το πρωτότυπο, των ορισμών, των κοινών εννοιών και των αξιωμάτων του Ευκλείδη καθώς και σχολίων που αφορούν σε αυτά. Ανακεφαλαιωτική παρουσίαση της αξιωματικής θεμελίωσης του Ευκλείδη, με την τεχνική 'Δάσκαλος σε ρόλο'. Δραστηριότητες των μαθητών, σχετικές με την αξιωματική θεμελίωση του Ευκλείδη, με τεχνικές Δράματος όπως : Παιχνίδι ρόλων, Τηλεοπτική εκπομπή, Ρεπορτάζ, Συνέντευξη, Alter ego.

2η: *Ο Ευκλείδης και το ιστορικό, πολιτισμικό και πολιτικό πλαίσιο της εποχής του* (4 διδακτικές ώρες στα μαθήματα Ιστορίας και Λογοτεχνίας). Γνωριμία με την Αλεξάνδρεια την Ελληνιστική περίοδο και τους λόγους άνθησης των Μαθηματικών την ιστορική αυτή περίοδο στο συγκεκριμένο χώρο. Δραματοποιημένη αφήγηση από τους

μαθητές του κεφαλαίου 'Η έπαρση του Ευκλείδη' από το βιβλίο " Η ράβδος του Ευκλείδη" του Jean-Pierre Luminet[3].

3η: *'Η ιστορία στη σκιά'. Η αμφισβήτηση του 5ου αιτήματος ως του 18ο αι.*(4 διδακτικές ώρες στα μαθήματα Ιστορίας και Γεωμετρίας). Γνωριμία των μαθητών με την ιστορία αμφισβήτησης του 5ου αιτήματος του Ευκλείδη από τους διαδόχους του και παρουσίαση από τους μαθητές με τεχνικές "θεάτρου σκιών" των αποτυχημένων προσπαθειών απόδειξής του από τους Άραβες μαθηματικούς καθώς και από τους Σακκιέρι και Λάμπερτ. Ισοδύναμες με το 5ο αίτημα αίτημα προτάσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

4η: *Οι θεμελιωτές των μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών, János Bolyai, Lobatscevski και Riemann.* (3 διδακτικές ώρες στο μάθημα της Νεοελληνικής Γλώσσας). Μετά από μελέτη των βιογραφιών τους, παρουσίαση του Lobatsefski με την τεχνική 'Περίγραμμα ρόλου στον τοίχο' και του Riemann με την τεχνική "ένα πορτραίτο ζωντανεύει". Γνωριμία με τον János Bolyai μέσα από δραματοποιημένη ανάγνωση της αλληλογραφίας του πατέρα του με τον ίδιο και με τον Gauss και μέσα από τις τεχνικές της ΔΤΕ "Διάδρομος της συνείδησης" και "Αντικρουόμενες συμβουλές".

5η*: 'Αυτός ο κόσμος ο μικρός ο μέγας'. Η Υπερβολική Γεωμετρία και το μοντέλο Poincaré για την Υπερβολική Γεωμετρία* (1 ώρα στο μάθημα της Λογοτεχνίας, 1 στο μάθημα της Γεωμετρίας, 4 στο μάθημα της Νεοελληνικής γλώσσας). Αξιωματική θεμελίωση, βασικές έννοιες και προτάσεις της Υπερβολικής Γεωμετρίας μέσω του μοντέλου Poincaré. Αξιοποίηση νέων τεχνολογιών (διαδραστικό Java λογισμικό 'Non Euclid' των Castellanos, κ.α.) και μελέτη αποσπασμάτων από το βιβλίο Flatterland του Ian Stewart[4]. Δημιουργία και παρουσίαση από τους μαθητές "Ραδιοφωνικών εκπομπών" για τη 'Δισκοχώρα' (μια χώρα με σχήμα δίσκου Poincaré).

6η: *Η Σφαιρική Γεωμετρία* (1 ώρα στο μάθημα της Γεωμετρίας). Βασικές έννοιες στη σφαίρα και αξιωματική θεμελίωση της Ελλειπτικής Γεωμετρίας.

---

[3] J.-P. Luminet (2003) *Η Ράβδος του Ευκλείδη,* Αθήνα: Εκδοτικός οργανισμός Λιβάνη.

[4] I. Stewart, *Flaterland, Η περιπέτεια των πολλών διαστάσεων,* Αθήνα, 2002.

7η: *Ταινία: "Η ζωή μας με τον Ευκλείδη"*. Δημιουργία ενός δραματοποιημένου ντοκυμαντέρ, με μαθητές σε ρόλο αφηγητών να συνδέουν τα βιντεοσκοπημένα δρώμενα που πραγματοποιήθηκαν στο διδακτικό πείραμα. Οι αφηγητές αφού μελέτησαν αντίστοιχη με το θέμα τους βιβλιογραφία, η οποία έχει επιλεγεί και τους έχει δοθεί από την ερευνήτρια, διαμόρφωσαν τα κείμενά τους. Η βιντεοσκόπηση πραγματοποιήθηκε από μαθητή ο οποίος ανέλαβε το ρόλο του cameraman.

Στο τέλος του διδακτικού πειράματος σε μία διδακτική ώρα πραγματοποιήθηκε δραστηριότητα με παιχνίδι ρόλων για την αξιολόγηση της διατηρησιμότητας της γνώσης στη Σφαιρική Γεωμετρία και έγινε ο τελικός αναστοχασμός των μαθητών σχετικά με όλο το διδακτικό πείραμα.

6. Αποτελέσματα

Α) Το Δράμα κίνητρο για μάθηση

Ερευνητικός στόχος μας στο διδακτικό πείραμα ήταν η δημιουργία ενός μεθοριακού χώρου (liminal space) στη διδασκαλία της γεωμετρίας, μέσα από την αξιοποίηση τεχνικών ΔΤΕ και η διερεύνηση της επίδρασής του στη μάθηση και διδασκαλία των Μαθηματικών. Ο μεθοριακός αυτός χώρος ήταν ένας χώρος πέρασμα ανάμεσα σε κόσμους με σκόπιμα ασαφή όρια, όπως ανάμεσα σε διαφορετικά αντικείμενα όπως τα μαθηματικά και το Δράμα, ανάμεσα στη διδασκαλία και το παίξιμο, ανάμεσα στο δάσκαλο-που- γνωρίζει και το μαθητή- δέκτη και το μαθητή στο κέντρο της διαδικασίας, ανάμεσα στο πραγματικό και το φανταστικό, στο πνεύμα και το σώμα. Ολόκληρο το διδακτικό πείραμα περιελάμβανε μια σειρά από δραστηριότητες που θα έδιναν στους μαθητές το κατάλληλο γνωστικό υπόβαθρο για τις παρουσιάσεις τους. Στόχος μας ήταν οι μαθητές μέσα από τις διαλέξεις μας, την εργασία σε ομάδες με τα κατάλληλα φύλλα εργασίας, τη μελέτη της αντίστοιχης με το θέμα βιβλιογραφίας, μελέτη αποσπασμάτων από βιβλία 'μαθηματικής Λογοτεχνίας' και τη χρήση των νέων τεχνολογιών να κατανοήσουν τις έννοιες και να τις παρουσιάσουν με διάφορες τεχνικές της Δραματικής Τέχνης στην Εκπαίδευση.

Από όλες αυτές τις δραστηριότητες του διδακτικού πειράματος θελήσαμε να εντοπίσουμε αυτές που κέντρισαν περισσότερο το ενδιαφέρον των μαθητών και αποτέλεσαν το κίνητρο για να εργαστούν. Απευθύναμε για τον λόγο αυτό το παρακάτω ερώτημα: *Ποιο ήταν το πιο αξιόλογο για σας, κομμάτι απ' το πρότζεκτ και το πιο ενδιαφέρου;*

Και οι 15 μαθητές που ρωτήθηκαν απάντησαν ομόφωνα ότι τα σκετσάκια, όπως τα αποκάλεσαν, ήταν γι' αυτούς η πιο σημαντική δραστηριότητα, αυτό που τους άρεσε περισσότερο και αποτέλεσε το κίνητρο για να συμμετέχουν ενεργητικά στο διδακτικό πείραμα.

- (Χρήστος) Εγώ πιστεύω ότι οι παρουσιάσεις ήταν το πιο ενδιαφέρου κομμάτι.

-(Τατιάνα) Μου άρεσε περισσότερο το θέατρο με τα σκετσάκια και ολα αυτά. Είχε ενδιαφέρου που μαθαίναμε τις ιστορίες κάποιων ανθρώπων. Ναι , εντάξει γενικά μ' αρέσει να ψάχνω για διάφορους ανθρώπους και να ψάχνω για τη ζωή τους και αυτό ήταν ωραίο, αλλά σίγουρα τα σκετσάκια ήταν καλύτερα

-(Τζίνα)Αυτό ήταν πολύ πιο ωραίο , γιατί άμα το γράφεις δε θα διαφέρει και πολύ γιατί ποιος θα το δεί, ενώ άμα το κάνεις σε σκετς ή οτιδήποτε είναι πιο ενδιαφέρου, πιο ωραίο ...

-(Αντώνης) Αυτό θα έλεγα τώρα, η παρουσίαση, για μένα, ήταν το κλικ του ενδιαφέροντος, πιστεύω ότι μου έλειπε όσον αφορά τη Γεωμετρία.

Αλλά και στην τελική συζήτηση για τον αναστοχασμό όλου του project, όταν ζητήσαμε από τους μαθητές να καταθέσουν τις σκέψεις τους, επτά μαθητές τόνισαν ότι τα δρώμενα με τεχνικές ΔΤΕ ήταν αυτό που τους ενθουσίασε περισσότερο, χωρίς να αιτιολογούν πάντα τη γνώμη τους.

-(Μίνα) εμένα απ' όλο αυτό ήταν τα σκετσάκια που κάναμε(που μου άρεσαν)...

Ορισμένοι δε από αυτούς δήλωσαν ότι τους άρεσαν οι τεχνικές ΔΤΕ ενώ δεν ενδιαφέρονταν για το μάθημα των Μαθηματικών,

-(Τατιάνα) Και εγώ συμφωνώ ότι ωραία ήταν μόνο τα σκετσάκια, και μένα μ'άρεσαν περισσότερο μόνο τα σκετσάκια και πιστεύω ότι κάποια

μέρα θα ήταν πιο ενδιαφέρου αν δεν ασχολιόμασταν με τη Γεωμετρία, αλλά με ένα άλλο μάθημα.

ενώ σε άλλους τα έκανε πιο ενδιαφέροντα.

-(Έφη) Συμφωνώ με αυτά που ακούστηκαν και για μένα τα Μαθηματικά δεν είναι και ότι καλύτερο, είμαι θεωρητική κατεύθυνση, αλλά πιστεύω ότι με αυτόν τον τρόπο έγιναν περισσότερο ενδιαφέροντα, ενδιαφέρον το μάθημα , <u>εμένα μου άρεσε πιο πολύ η δραματοποίηση.</u>

Στο ερώτημα της ερευνήτριας στις συνεντεύξεις: *Θα μπορούσατε στο project να είχατε σταματήσει στην προετοιμασία των δρώμενων χωρίς να τα παρουσιάσετε. Να συμμετέχετε δηλ. σε όλες τις άλλες δραστηριότητες να γράψετε το κείμενο και να μην το παρουσιάζετε, θα ήταν για σας το ίδιο;*

οι απαντήσεις των μαθητών τονίζουν ότι αυτό που διαφοροποίησε το 'project' ήταν οι δραστηριότητες με τεχνικές ΔΤΕ.

-(Σοφία) Αν είχαμε μείνει μέχρι την εργασία θα είχαμε σκυλοβαρεθεί ακόμα περισσότερο.

-(Βιργιάννα) Δεν πιστεύω ότι θα ήταν το ίδιο.

- (Νικολέτα) Θα μέναμε εκεί. <u>Δε νομίζω να ενδιαφερόταν κανείς.</u>

-(Ν) Όχι, πιστεύω <u>θα είχαμε ξενερώσει</u>, σε εισαγωγικά, ακόμα περισσότερο.

-(Βίκυ) Ε βέβαια, <u>είναι άλλο πράγμα αυτό, καμία σχέση απ' το να γράφεις ένα απλό κείμενο, πολύ διαφορετικό απ' το να το παρουσιάσεις, να το κάνεις δικό σου και να το πεις στους άλλους και να το καταλάβουν</u> κι' όλας οι άλλοι. <u>Ήταν πολύ πιο ωραίο.</u>

Βασικό κίνητρο αναδείχθηκε η ψυχαγωγία που προσέφερε ο μεθοριακός αυτός χώρος, ο οποίος ήταν ένας συνδυασμός μαθήματος και ψυχαγωγίας, στον οποίο οι μαθητές μάθαιναν και διασκέδαζαν μέσα από παιχνίδια, αστεία. Αυτό το περιβάλλον με παιχνίδι και γέλιο, υποστήριζε σύμφωνα με τους ίδιους τη μαθησιακή διαδικασία.

-(Βιργιάννα) Ήταν ένας συνδυασμός μαθήματος και ψυχαγωγίας, … στο Project, εκτός από το ότι συνεργαζόμαστε, μπορείς να μάθεις πράγματα χωρίς να το καταλαβαίνεις. Δηλ. έπαιρνες γνώσεις με τρόπο, <u>σαν</u>

ψυχαγωγία ήτανε. Δηλ. Είτανε ο τρόπος ιδανικός ώστε και να περάσεις καλά και να πάρεις γνώσεις.

Ο Πέτρος αναγνωρίζει τη διδασκαλία στο πλαίσιο αυτό ως παιχνίδι και διασκέδαση.

-(Πέτρος) Ναι όλο αυτό το δραματουργικό, το θεατρικό, είναι κατ' αρχήν τρόπος σαν παιχνίδι το οποίο ίσως και να λείπει, αυτό, η διασκεδαστική μορφή.

Η ευεξία που έννοιωθαν οι μαθητές στο διδακτικό πείραμα, τους βοηθούσε να εμπλακούν στη μαθησιακή διαδικασία, σε αντίθεση με το περιβάλλον του τυπικού μαθήματος που συνήθως τους προκαλούσε ανία και βαρεμάρα.

- (Τζίνα) Ήταν πάρα πολύ ωραία, ήταν κάτι ξεχωριστό και συμφωνώ με αυτά που είπαν προηγουμένως ότι στην ώρα των Μαθηματικών που κάναμε αυτά τα σκετσάκια, ήταν πάρα πολύ ωραία, γιατί περνούσε πιο καλά η ώρα και μαθαίνεις κάποια πράγματα, περισσότερα πράγματα, γιατί άμα είναι βαρετό το μάθημα και ο ένας καθηγητής, δε μαθαίνεις τόσα πράγματα ή κάνεις άλλα πράγματα ενώ άμα είναι έτσι τα πράγματα παίρνεις περισσότερα.

Στην ευεξία των μαθητών συντελούσε το ότι το πλαίσιο διδασκαλίας με τεχνικές ΔΤΕ έδινε ευκαιρία στους μαθητές για χιούμορ, αστεία και γέλιο. Αυτό το υποστηρίζουν θεωρητικά, όπως ο Στέφανος,

- (Στέφανος) το θέατρο δίνει περισότερες ευκαιρίες και για χιούμορ, και για αλλαγή ύφους και για λογοπαίγνια και διάφορα τέτοια τα οποία κερδίζουν περισσότερο το ενδιαφέρου και μεταδίδουν τη γνώση.

ή το εκφράζουν ρητά στις αφηγήσεις τους, από την εμπειρία τους στο διδακτικό πείραμα.

-(Βίκυ) Αλλά έτσι όπως τα κάναμε εμείς εδώ πέρα με θέατρο και με τη συνεργασία, που συνεργαζόμασταν πολλά παιδιά μαζί και μας έβγαλε γέλιο και πλάκα, και πέρναγε η ώρα πάρα πολύ γρήγορα, δηλ. εγώ κοίταζα το ρολόι και έλεγα καλά πέρασε η ώρα δηλ. ήθελα κι' άλλο.

Η Τατιάνα αποτιμά ως αξία τη χαρά και το γέλιο που επικρατούσε, και τονίζει ότι αυτά δεν αποτελούσαν κριτήριο για να μην κάνουν μάθημα

οι μαθητές, αλλά αντίθετα αποτελούσαν κίνητρο για να συμμετέχουν στις δραστηριότητες του διδακτικού πειράματος.

-(Τατιάνα.) Σίγουρα θα επικρατούσε ένας πανικός, αλλά υπήρχε και χαρά και γέλιο και είμασταν περισσότερο δραστήριοι.

-(ερευν.) Είσαστε εκεί δηλαδή;

-(Τατιάνα.) Ναι, σίγουρα και μπορεί μέσα από την πλάκα και του χαβαλέ, αλλά τουλάχιστον είμαστε εκεί πέρα και ξέραμε τι κάναμε.

- (Τατιάνα.) Μετά όμως έγινε και στη διαδικασία και του γέλιου, μετά μας άρεσε, μετά δεν ήταν στη διαδικασία του να χάσουμε μάθημα. Ήταν ωραίο.

- (Βίκυ) …. Μ' άρεσαν όλα αυτά που κάναμε …και που γελάγαμε.

-(Νικολέτα) Αρχικά ήταν πιο ενδιαφέρον από ένα κοινό μάθημα, γελάγαμε.

Β) Επίδραση της διδασκαλίας με τεχνικές ΔΤΕ στη μάθηση, κατανόηση και διατηρησιμότητα της γνώσης των μαθηματικών εννοιών

Η ανάλυση των φύλλων εργασίας ως προς την ορθότητα των απαντήσεων και η ανάλυση των διαλόγων των δρώμενων των ομάδων ως προς την ορθή χρήση της μαθηματικής ορολογίας και την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών μας έδειξε ότι κάθε ομάδα κατανόησε σε βάθος τις έννοιες που επεξεργάστηκε και παρουσίασε μέσα από τα δρώμενα

Από τις συνεντεύξεις των μαθητών, δύο σχεδόν μήνες μετά τις παρουσιάσεις, μελετήθηκε η διατηρησιμότητα από τους μαθητές, της γνώσης που διδάχθηκε. Από τις απαντήσεις των μαθητών συμπεραίνουμε ότι οι τεχνικές ΔΤΕ στη διδασκαλία βοήθησε τους μαθητές να διατηρήσουν τη γνώση στη μνήμη τους.

(Μια λεπτομερέστερη και τεκμηριωμένη παρουσίαση για την επίδραση της διδασκαλίας με τεχνικές ΔΤΕ στη μάθηση, κατανόηση και διατηρησιμότητα της γνώσης των μαθηματικών εννοιών περιέχεται στο Κοταρίνου, Σταθοπούλου, 2014).

Γ) Επίδραση της διδασκαλίας με τεχνικές ΔΤΕ στην εικόνα των μαθητών για τη Γεωμετρία

Το διδακτικό πείραμα είχε ως αποτέλεσμα οι μαθητές να αμφισβητήσουν τις στερεοτυπικές εικόνες τους που συνδέονται με τη Γεωμετρία και να επαναπροσδιορίσουν τη μαθηματική γνώση ως πολιτισμική και κοινωνική κατασκευή. Βοήθησε δε να αναδειχθούν και άλλες όψεις των μαθηματικών, όπως τα μαθηματικά ως ένα ιστορικά εξελισσόμενο ανθρώπινο δημιούργημα και ως μια δημιουργία υπό συνεχή διαπραγμάτευση.
Ο συνδυασμός Ιστορίας και μαθηματικών επέδρασε στην εικόνα που είχαν για τα μαθηματικά και ανέδειξε το κεντρικό ρόλο του ιστορικού και κοινωνικού πλαισίου στη φύση των μαθηματικών ενώ μέσω των βιογραφιών των μαθηματικών, στο μάθημα της γλώσσας, οι μαθητές αντιλήφθηκαν τα μαθηματικά ως ένα ιστορικά εξελισσόμενο ανθρώπινο δημιούργημα

-(Γιάννης) Καταλάβαμε τι κρύβεται από πίσω και αρχίσαμε 'με κάποιου τρόπο' να τα θαυμάζουμε. Είδαμε ότι κάποιο άνθρωποι σπουδαίοι κρύβονται από πίσω.

Η γνωριμία τους στο διδακτικό μας πείραμα με την ίδια την επιστημολογική ρήξη στα Μαθηματικά, καθώς και με την πορεία προς αυτήν, προκάλεσε τις αντιλήψεις τους για τη Γεωμετρία και γενικότερα για τα Μαθηματικά ως επιστήμης της απόλυτης αλήθειας. Η συμμετοχή τους στη διαδικασία αυτή έκανε τους μαθητές να αντιληφθούν τα Μαθηματικά ως μια δημιουργία υπό συνεχή διαπραγμάτευση και προκάλεσε την κυρίαρχη πεποίθηση ότι η Ευκλείδεια γεωμετρία είναι το μόνο μοντέλο που ερμηνεύει και αντιπροσωπεύει τον πραγματικό κόσμο μας, αμφισβητώντας έτσι και άλλες βεβαιότητες.

-(Στέφανος) Σίγουρα φάνηκε πάρα πολύ η ευπλαστότητα των Μαθηματικών…και φαίνεται καθαρά ότι τα μαθηματικά είναι ένα πολυσύνθετο δημιούργημα που δεν περιορίζεται στο να ακολουθεί ένα μόνο δρόμο γύρω από την κατανόηση της πραγματικότητας…

(Μια λεπτομερέστερη και τεκμηριωμένη παρουσίαση για την επίδραση της διδασκαλίας με τεχνικές ΔΤΕ στην εικόνα των μαθητών για τη Γεωμετρία βλέπε Κοταρίνου, Σταθοπούλου 2015).

Δ) Συναισθήματα τις ώρες του διδακτικού πειράματος

Οι μαθητές την ώρα του τελικού αναστοχασμού όλου του πειράματος τόνισαν το αίσθημα ευεξίας (Well-being) που έννοιωθαν κατά τη διάρκεια του project. Το 'Περάσαμε καλά' ήταν κάτι που το επαναλάμβαναν συνεχώς.

-(Ζωή) Σίγουρα ήταν κάτι διαφορετικό. Συνδυάσαμε τα Μαθηματικά με άλλα μαθήματα γλωσσικά , όπως η έκθεση, συνεργαστήκαμε, περάσαμε ωραία.

-(Έφη)… και περάσαμε πάρα πολύ ωραία

-(Νίκος)…Ξεφύγαμε

Στο ερώτημα της ερευνήτριας στις συνεντεύξεις, *τι κερδίσατε με την παρουσίαση* (τις τεχνικές δηλ. ΔΤΕ), οι μαθητές αναφέρουν τη διασκέδαση, τον ενθουσιασμό και την ανυπομονησία για την ίδια την παρουσίαση.

-(Αντώνης) υπήρχε διασκέδαση ναι δε μπορώ να πω ότι δεν υπήρχε, γελάσαμε αρκετά, ευθουσιασμός είναι υπερβολική λέξη;

Το 'Περνάγαμε καλά' και 'περνούσε ευχάριστα η ώρα' επαναλαμβάνεται από πολλούς μαθητές και στις συνεντεύξεις.

-(Χρήστος) Στο πρότζεκτ ... Είμαστε σε ομάδες , περνάγαμε καλά, συμμετείχαμε όλοι.

-(Γιάννης) Ήταν άλλη εμπειρία. Ήταν κάτι καινούργιο. Περάσαμε ωραία. Είναι αυτό που είπαμε ακριβώς ότι θα θέλεμε να γίνει αλλιώς.
- (Θοδωρής) Γενικά το πρότζεκτ είχε πολύ μεγάλο ενδιαφέρου και μας βοήθησε αυ όχι στο να κατανοήσουμε πολλά πράγματα, στο να συνεργαστούμε μεταξύ μας και να περάσουμε καλά μέσα στη δυσκολία της ημέρας.

Στο ερώτημά μας *'Αν ερχόταν κάποιος την ώρα που εμείς κάναμε τις δραστηριότητες τι θα έβλεπε ένας επισκέπτης;',* οι μαθητές μας μεταδίδουν μια εικόνα χαράς, κεφιού, γέλιου, ενεργητικότητας.

-(Γιολένα) Πιστεύω ότι θα έβλεπε πιο πολύ ότι είχαμε κατανοήσει, αυτά που μας μάθατε εσείς, και ότι θα έβλεπε πιο πολύ χαρά, ομαδικότητα, όχι τόσο πολύ βαρεμάρα.

-(Βίκυ) κέφι, γέλια

Ρωτήσαμε τους μαθητές για τα συναισθήματά τους την ώρα της προετοιμασίας για την παρουσίαση του δρώμενου.

Οι μαθητές στην αρχή του project έννοιωσαν άγχος, διότι ήταν η πρώτη φορά που δοκίμαζαν να παρουσιάσουν ένα δικό τους σκετς.

-(Αντώνης) Καμιά φορά αυ όχι άγχος, περισσότερο, πώς να το εκφράσω, την ώρα της προετοιμασίας,.., ειδικά τις πρώτες στιγμές της προετοιμασίας, μιλάω όταν ξεκινήσαμε το πρότζεκτ, δεν είχαμε επαφή με την έννοια του πρότζεκτ, να κάνουμε καθόλου, ήταν οι πρώτες μέρες

Το άγχος όμως αυτό ήταν δημιουργικό άγχος, πώς θα γίνει καλύτερη η παρουσίαση,

-(Στέφανος) Σίγουρα άγχος, περισσότερο γιατί δεν ξέραμε τι ήταν αυτό που κάναμε τελικά. Από τη δεύτερη και την τρίτη παρουσίαση είμαστε …Μετά είμαστε πιο χαλαρά στο συγκεκριμένο θέμα. Έτσι στην αρχή το άγχος και αυτή η αγωνία πώς θα μας βγεί καλύτερο, πώς θα βάλουμε μέσα το θέμα μας, που ήταν τα αιτήματα ή η ζωή κάποιου σπουδαίου μαθηματικού.

ή πώς θα γίνει πιο κατανοητή στο κοινό.

-(Σοφία) Πολύ άγχος για το πώς θα βγει, δηλ. κάναμε πρόβες, ξανά και ξανά και όταν μου έλεγαν τα κορίτσια μην είσαι τόσο υπερβολική γιατί εμείς δε μπορούμε να σε ακολουθήσουμε. Χαλάρωσε λιγάκι. Λέω ρε παιδιά πώς θα το κάνουμε έτσι για να το καταλάβει και ο άλλος;

Καμιά φορά οι μαθητές ένοιωσαν πίεση χρόνου,

-(Πέτρος) λίγο πίεση χρόνου ίσως καμιά φορά

ενώ προβληματισμός επικρατούσε στη δημιουργία των κειμένων, ο οποίος μετατρεπόταν σε ενθουσιασμό όταν βρισκόταν λύση.

- (Χρήστος) Στην ομάδα που είμαστε συγκεκριμένα σκεφτόμαστε ότι θα ήταν λίγο δύσκολο να παρουσιάσουμε τις εργασίες μας, διότι πολλές φορές προσπαθούσαμε να μην κάνουμε με έναν απλό τρόπο, όπως έκαναν οι υπόλοιπες ομάδες, δηλ. αυτό που έγραφε το φυλλάδιο να το μεταφέρουνε, να πουν δυο λόγια παραπάνω, προσπαθούσαμε να κάνουμε κάτι διαφορετικό.

-(Βιργιάννα) Εκεί ήταν λίγο περίεργα γιατί δεν ξέραμε στην αρχή τι να κάνουμε, αλλά μετά το βρίσκαμε και ήταν πάρα πολύ ωραίο αυτό δηλ. υπήρχε ενθουσιασμός πολύς.

Τον ενθουσιασμό και το ενδιαφέρον των μαθητών κατά τη διάρκεια του διδακτικού πειράματος παρατήρησαν και οι άλλοι εκπαιδευτικοί και η ίδια η ερευνήτρια.

-(Μαρία Μ.φιλόλογος) Έτσι τα είδα και κείνα ενθουσιασμένα Μ. Γιατί δημιουργούσαν. Έτσι τα είδα και κείνα ενθουσιασμένα.

-(Κώστας Κ. φιλόλογος) Ήταν πολύ ενδιαφέρου, ήταν κάτι πρωτόγνωρο για μένα, με μάγευε και το γεγονός ότι έβλεπα και τα παιδιά να ενδιαφέρονται τόσο πολύ.

Η ερευνήτρια και από την παρατήρηση και από τη βιντεοσκόπιση των μαθητών κατά την εργασία τους στις ομάδες και κατά την προετοιμασία των παρουσιάσεών τους είδε ότι οι μαθητές έδειχναν γεμάτοι ζωντάνια, μιλούσαν μεταξύ τους, εξηγούσαν ο ένας στον άλλον, πειράζονταν, γελούσαν, διασκέδαζαν και εν γένει ανέπτυξαν σημαντική επικοινωνία.

7. Συμπεράσματα

Θεωρούμε ότι με το θέμα που πραγματευτήκαμε στο διδακτικό πείραμα, οι μαθητές γνώρισαν πώς θεμελιώνονται αξιωματικά τα τρία μοντέλα Γεωμετριών, η δε σύγκριση της Ευκλείδειας με την Υπερβολική και Ελλειπτική Γεωμετρία τους βοήθησε να αντιληφθούν πώς βασικά αξιώματα και ορισμοί μπορούν να οδηγήσουν σε διαφορετικά και συχνά αντιφατικά αποτελέσματα σε σχέση με την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Η επαφή των μαθητών με τις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες τους έδωσε την ευκαιρία να επαναδιαπραγματευτούν βασικές έννοιες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας —ως μιας Γεωμετρίας και όχι ως 'της' Γεωμετρίας— και να κερδίσουν μια βαθύτερη και συνολικότερη κατανόηση της Γεωμετρίας. Η επαναπραγμαδιάτευση βασικών εννοιών της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως αποτέλεσμα της μελέτης της Υπερβολικής και Ελλειπτικής Γεωμετρίας συμφωνεί με τα αποτελέσματα της έρευνας του Felsager (2004) σχετικά με τη διδασκαλία της Γεωμετρίας Minkowski σε μαθητές Λυκείου. Η επαφή

των μαθητών με τις μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες τους έδωσε επίσης τη δυνατότητα να αντιληφθούν την απελευθέρωση της Γεωμετρίας ως επιστήμης που προσπαθεί να περιγράψει τις χωρικές ιδιότητες του κόσμου στον οποίο ζούμε και συνέβαλε στη δημιουργία μιας εικόνας της Γεωμετρίας ως ενός ενδιαφέροντος αντικειμένου του αναλυτικού προγράμματος. Αντίστοιχα αποτελέσματα έχουμε από έρευνες των Krauss και Okolika (1977) και Sriraman (2003, 2004) οι οποίοι ισχυρίζονται αντίστοιχα ότι μέσα από την παρουσίαση της προσπάθειας των μαθηματικών να αποδείξουν το 5ο αίτημα, οι μαθητές συνειδητοποίησαν ότι η Γεωμετρία δε σταμάτησε την εποχή του Ευκλείδη αλλά είχε και εξακολουθεί να έχει μια πλούσια ιστορία και ανάπτυξη και προβληματίστηκαν γύρω από θέματα φιλοσοφίας των Μαθηματικών που αφορούν τη φύση και την αλήθεια των Μαθηματικών (Sriraman, 2003, 2004).

Θεωρούμε ότι σημαντικός παράγοντας σε όσα επετεύχθηκαν ήταν η αξιοποίηση στη σχολική αίθουσα των μαθηματικών τεχνικών ΔΤΕ, καθώς το Δράμα προσφέρει μια πλούσια εμπειρία που εμπλέκει το σώμα, τα συναισθήματα, τις αισθήσεις σε μια δυναμική μάθηση δημιουργώντας έναν ενδιάμεσο χώρο που είναι και δεν είναι η σχολική τάξη. Σ αυτό το μεθοριακό χώρο (liminal space) που δημιούργησε η χρήση των τεχνικών του Δράματος στην Εκπαίδευση με τα θολά σύνορα—σχολική τάξη/ μη τάξη—οι μαθητές μας σε ένα συνεργατικό πλαίσιο πραγματεύτηκαν μαθηματικές έννοιες —γεωμετρικές έννοιες—έγραψαν κείμενα για τα δρώμενα και τα παρουσίασαν υποδυόμενοι ρόλους, βιώνοντας τα μαθηματικά με όρους αισθητικής, χιούμορ και συναισθημάτων. Τα σκοπίμως ασαφή όρια γεφύρωσαν διαφορετικούς κόσμους και πρακτικές ενοποιώντας συνήθεις διχοτομίες: τον κόσμο του δράματος και τον κόσμο των μαθηματικών, το φανταστικό και το πραγματικό, το πνεύμα και το σώμα, το δάσκαλο που διδάσκει και το μαθητή που μαθαίνει. Ο χώρος αυτός, καθώς ήταν ανοιχτός για μια συναισθηματική, σωματική και νοητική εμπλοκή των μαθητών, ενέπνευσε μεγαλύτερη συμμετοχή των μαθητών στη μαθηματική σκέψη και έκφραση και οδήγησε σε μια βαθύτερη κατανόηση και εκτίμηση των μαθηματικών, ενώ ταυτόχρονα εμπλούτισε την εμπειρία και της εκπαιδευτικού. Και όπως παρατηρεί και η Gerofsky (2015): *'Παίζοντας στους χώρους του παραδόξου και της αντίφασης, η ασάφεια και η μετάβαση—στο μεθοριακό χώρο—είναι*

ζωτικής σημασίας για του μαθητές που είναι αρχάριοι σε ένα πεδίο όπως τα μαθηματικά, αλλά είναι και εξίσου σημαντικό για του ειδικούς που στοχεύουν να ανακαλύψουν νέες προσεγγίσεις, επιδιώκοντας να ανακτήσουν 'τη σκέψη του αρχάριου', για να μετακινηθούν πέρα από την εξοικείωση που προέκυψε από την εμπειρία.'

Βιβλιογραφία

Άλκηστις, Κ. (2000). *Η δραματική τέχνη στην εκπαίδευση.* Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Αυδή, Α., Χατζηγεωργίου, Μ. (2007). *Η τέχνη του δράματοςστην εκπαίδευση.* Αθήνα: Μεταίχμιο.

Andersen, C. (2004). Learning in "as if" worlds: Cognition in drama in education.*Theory Into Practice*, *43*(4), 281-286.

Andersen, C. (2002). Thinking as and thinking about: Cognitive and metacognitive processes in drama. In Bjørn Rasmussen & Anna-Lena Østern (Eds.), *Playing betwixt and between: The IDEA Dialogues 2001*. Oslo, Landslaget: Drama I Skolen.

Appelbaum, P. Clark, S. (2001). Science! Fun? A critical analysis of design/content/evaluation. *Journal of Curriculum Studies*, *33*(5), 583-600.

Castellanos, J.; Austin, J.; Darnell, E. and Estrada, M., NonEuclid, Interactive Java Software

http://cs.unm.edu/~joel/NonEuclid/NonEuclid.html

Felsager, Bjørn (2004). Introducing Minkowski-geometry using Dynamic Geometry Programs. ICME-10, Topic Study Group 10. Copenhagen (July 2004).

Fletcher, T. J. (1971) The teaching of Geometry. Present problems and future aims. *Educational Studies in Mathematics,* 3, 395-412

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea, *Educational Studies in Mathematics, 3,* 413-435.

Gerofsky, S. (2015) Digital mathematical performances: Creating a liminal space for participation. In U. Gellert, J., Gimenez Rodriguez, C., Hahn, , S. Kafoussi (Ed.), *Educational Paths to mathematics. A C.I.E.A.E.M. Sourcebook.* Springer.

Gerofsky, S. (2012) Digital mathematical performances: creating a liminal space for participation. In Benedetto Di Paola (Ed.) & Javier Díez-Palomar (Guest Ed.) *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics).* University of Palermo, Italy.

Gerofsky, S. (2010). Performance Mathematics and Democracy. *Educational Insights, 13*(1).

Gerofsky, S. (2006). Performance space and time. Symposium discussion paper for Digital Mathematical Performances: A Fields Institute Symposium, University of Western Ontario, London, ON, Canada, June 9–11, 2006 . Accessible online at

http://www.edu.uwo.ca/mathstory/pdf/GerofsyPaper.pdf.

Gray, A. and Sarhangi, R. (n.d.) *A Proposal for the Introduction of Non-Euclidean Geometry into the Secondary School Geometry Curriculum.* Retrieved February 25, 2014, from

http://pages.towson.edu/gsarhang/Modules%20for%20Non-Euclidean%20Geometries.html

Heathcote, D. & Bolton, G. (1995). *Drama for learning: Dorothy Heathcote's Mantle oft he Expert Approach to Education.* Portsmouth: Heinemann

Hegedus S, J. & Moreno- Armella, L. (2011). The emergence of mathematical structures. *Educational studies in Mathematics*, 77, 369-388.

Θωμαϊδης, Γ. (1992). Η Σχολική Γεωμετρία, η έννοια του χώρου και οι μή Ευκλείδειες Γεωμετρίες. *Ευκλείδης Γ΄*, τεύχος 32, 23-42.

Θωμαϊδης, Γ., Καστάνης, Ν., Τοκμακίδης, Τ. (1989). Οι σχέσεις Ιστορίας και Διδακτικής των Μαθηματικών. *Ευκλείδης Γ΄, 6*(23).

Ikonomou, A., Kaldrimidou, M., Sakonidis, H., & Tzekaki, M. (1999). Interaction in the mathematics classroom: some epistemological aspects. In I. Schank Ed.) *Proceedings of European Research in Mathematics Education (CERME I),* (v.1. pp.168-181). Osnabrueck, Germany.

Jones, K. (2011). The value of learning geometry with ICT: lessons from innovative educational research. In Adrian Oldknow and Carol Knights (Eds.) *Mathematics Education with Digital Technology,* (pp.39-45). London, GB: Continuum, (Education and Digital Technology).

Καλδρυμίδου, Μ., Τζεκάκη, Μ., και Σακονίδης, Χ. (2005). Η διαχείριση των μαθηματικών νοημάτων στη σχολική τάξη. Στο Μ. Κούρκουλος, Κ. Τζανάκης, Γ. Τρούλης (Επιμ.) Πρακτικά 4ης Διεθνούς Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών. Παιδαγωγικό Τμήμα Δ. Ε. Πανεπιστημίου Κρήτης. Ρέθυμνο (22-23 Απριλίου)

Kaldrimidou, M., Sakonidis, H., & Tzekaki, M. (2000) Epistemological features in the mathematics classroom: Algebra and Geometry. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.). *Proceedings of the 24th Conference of International Group fort he Psychology of Mathematics Education (PMe24).* Hiroshima University. Japan (3: 111-118)

Καστάνης Ν. (1988) Η έννοια του χώρου πριν και μετά τις μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες, εισήγηση στο συμπόσιο με θέμα " Οι μή –Ευκλείδειες Γεωμετρίες και η αποδοχή τους στα σχολικά συστήματα" που διοργανώθηκε από τη Διεθνή Ομάδα για τη μελέτη των σχέσεων ανάμεσα στην Ιστορία και Παιδαγωγική των Μαθηματικών (Η.Ρ.Μ.) στο 6ο Παγκόσμιο Συνέδριο για τη μαθηματική Εκπαίδευση (ICME 6)

Kazim, Massouma (1988) Οι μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες και η υιοθέτησή τους από το σχολικό σύστημα, εισήγηση στο συμπόσιο με θέμα "Οι μή–Ευκλείδειες Γεωμετρίες και η αποδοχή τους στα σχολικά συστήματα" που διοργανώθηκε από τη Διεθνή Ομάδα για τη μελέτη των σχέσεων ανάμεσα στην Ιστορία και Παιδαγωγική των Μαθηματικών (Η.Ρ.Μ.) στο

6ο Παγκόσμιο Συνέδριο για τη μαθηματική Εκπαίδευση (ICME 6)

Krauss, Peter A.; Okolica, Steven L. (1977). Neutral and Non-Euclidean Geometry-A High School Course, Mathematics Teacher, 70, 4, 310-314.

Kohn, A. (1993). *Punished by rewards: The trouble with gold stars, incentive plans, A's, praise, and other bribes.* New York: Houghton Mifflin.

Κοταρίνου, Π., Σταθοπούλου, Χ. (2015). "Είναι ο Κόσμος μας Ευκλείδειος;" Ένα Διδακτικό Πείραμα με Μαθητές Β΄Λυκείου. Στα πρακτικά Διημερίδας με θέμα: Οι Θετικές Επιστήμες ως Πολιτισμικό Αγαθό Προσεγγίσεις των θετικών επιστημών εκτός Αναλυτικού Προγράμματος, διοργάνωση 2ο ΠΡΟΤΥΠΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ (28 και 29 Μαρτίου 2015).

Κοταρίνου, Π., Σταθοπούλου, Χ., (2014) Η ιστορία του 5ου αιτήματος του Ευκλείδη και οι μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες : Ένα διδακτικό πείραμα σε μαθητές Β΄Λυκείου. Μαθηματικά στα Π.Π. Γυμνάσια-Λύκεια. Αθήνα: 11 Απριλίου 2014. http://mathlab.mysch.gr/synedrio2014/praktika/pdf/C3_Kotarinou_Stathopoulou.pdf

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. and Strässer, R. (2006). Teaching and Learning Geometry with Technology. In A. Guitiérrez and P. Boero (Eds.) *Handbook of research on the psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 275-304).

Lakatos, I. (1996). *Αποδείξεις και Ανασκευές. Η Λογική της Μαθηματικής Ανακάλυψης*Αθήνα: Τροχαλία.

Lénárt, I. (2007). Comparative Geometry in General Education. *Proceedings of CIEAEM 59,* Dobogokö, Hungary (July 23-29).

Lénárt, I. (2004a). Sing Mathematics together: Thoughts on the future of a school subject. *For the Learning of Mathematics,* 24(2), 22-26.

Lénárt, I. (2004b). What is wrong with the teaching of Algebra? *For the Learning of Mathematics*, 24(3), 30-32.

Mayer, B. (2005). Game-based learning. Presentation, Retrieved 15-10-2014 from http://css.uni-graz.at/courses/TeLearn/SS05/Presentations/Game-Based_Learning.pdf

O' Neil, C. & Lambert, A. (1990). *Drama Strucrures. Apractical Handbook for Teachers.* Stanley Thornes (Publishers) Ltd.

Schechner, R. (2002) Performance studies: An introduction. London: Routledge.

Schechner, P.1985) *Between Theater and Anthropology.* Philadelphia: University of Pennsylvania Press.

Sriraman, B. (2004). Mathematics and Literature (the sequel) Imagination as a pathway to advanced mathematical ideas and philosophy. *Australian Mathematics Teacher,* 60(1), 26-31.

Sriraman, B. (2003). Mathematics and Literature. Synonyms, Antonyms or the Perfect Amalgam? *Australian Mathematics Teacher, 59*(4), 26-31.

Turner, V. (1982) *From Ritual to Theater: The Seriousness of Human Play.* New York: Performance Art Journal Publications.

Turner, V. (1987) *The Anthropology of Performance.* New York: Performance Art Journal Publications.

Wagner, B. (1999). *Dorothy Heathcote. Drama as a Learning Medium.* Portsmouth Heinemann.

Χρονάκη, Ά. (2008a). Το 'διδακτικό πείραμα': Μελετώντας τη διαδικασία μάθησης και διδασκαλίας. Στο Βασίλειος Σβολόπουλος (Επ.), *Σύνδεση Εκπαιδευτικής Έρευνας και Πράξης. Η Ακαδημαϊκή Πλευρά* (σελ. 371-401). Αθήνα: Ατραπός.

pkotarinou@uth.gr *hastath@uth.gr*

Η ΣΧΕΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕ ΤΟΝ ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΠΑΡΑΔΟΣΙΑΚΟ ΧΟΡΟ ΚΑΙ Η ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΟΥ , ΣΕ ΠΑΙΔΙΑ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΡΩΤΗΣ ΣΧΟΛΙΚΗΣ ΗΛΙΚΙΑΣ

Βασιλική Ι. Κοτρώτσου, Ελένη Ι. Μήτσου

Νηπιαγωγοί-ΑπόφοιτοιΤ.Ε.Α.Π.Η, Ε.Κ.Π.Α

«...Το παράδοξο με το χορό , είναι ότι αναγκάζεσαι να χρησιμοποιήσεις λέξεις, για κάτι, που δεν γίνεται από λέξεις»
J. Blacking

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία προσεγγίζεται η σχέση των μαθηματικών με τον ελληνικό παραδοσιακό χορό και η εισαγωγή μαθηματικών εννοιών μέσα από τη διδασκαλία του, σε παιδιά προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας. Στην πρώτη ενότητα επιχειρείται μια ανάλυση της έννοιας του χορού. Μέσα από μια ιστορική αναδρομή που ξεκινά από τη μυθολογία και καταλήγει στη Νεότερη Ελλάδα, προβάλλεται μια διαφορετική προσέγγιση της έννοιας «χορός», στα πλαίσια της εκάστοτε ιστορικής και κοινωνικής συγκυρίας. Στο μεγαλύτερο μέρος αυτης της ενότητας, αναλύεται η έννοια της παράδοσης και του παραδοσιακού χορού. Εξετάζοντας τα μορφολογικά στοιχεία του χορού, εντοπίζεται το «τρίπτυχο»: κίνηση, μουσική, ποίηση (τραγούδι), που αποτελεί το βασικό χαρακτηριστικό της δομής του παραδοσιακού χορού. Στην συνέχεια, επιχειρείται μια ταξινόμηση των παραδοσιακών χορών, σύμφωνα με τις μέχρι σήμερα προτεινόμενες μεθόδους ταξινόμησης σε : α) χορούς πανελλήνιους- εθνικούς και τοπικούς, β) χορούς τελετουργικούς (χοροί γάμου) και μη-τελετουργικούς (χοροί

αποκριάς), γ) χορούς γυναικείους, ανδρικούς και μικτούς, δ) χορούς με κριτήριο το γεωμετρικό χορευτικό σχήμα. Στο τέλος του κεφαλαίου, αναφέρονται τα οφέλη του παραδοσιακού χορού τόσο στην παιδική ηλικία, όσο και στην εκπαιδευτική διαδικασία. Στη δεύτερη ενότητα προβάλλεται τόσο η σχέση του παραδοσιακού χορού με τις αριθμητικές έννοιες, προσεγγίζοντας τις έννοιες της απαρίθμησης, των αριθμητικών ακολουθιών, της αντιστοίχισης, όσο και η σχέση του με τις γεωμετρικές έννοιες, όπως για παράδειγμα, με την έννοια της παραλληλίας, της συμμετρίας, των γεωμετρικών σχημάτων κ.λπ.. Τέλος, στην τρίτη ενότητατ, σύμφωνα με τη διαθεματική προσέγγιση της γνώσης, παρατίθενται παραδείγματα παραδοσιακού χορού, ως προτάσεις για την επεξεργασία μαθηματικών εννοιών μέσα από τη διδασκαλία του.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ανάπτυξη στρατηγικών για τη συμμετοχή σε μαθηματικές δραστηριότητες, είναι πάντα μια πρόκληση. Οι δάσκαλοι αναζητούν συνεχώς καινούρια μέσα και δραστηριότητες για να διεγείρουν τους μαθητές και να υποστηρίξουν τη μάθησή τους. Τα μαθηματικά, μέσα από το χορό και την κίνηση,προσφέρουν μια ενεργή στρατηγική εκμάθησης που απαιτούν λίγους πόρους (μέσα) και λίγο φαντασία για να επιτευχθεί ποικιλία στόχων (Karen Wood (2008), Mathematics through movement, An investigation of the links between kinaesthetic and conceptual learning).

Αυτό το εκπαιδευτικό μέσο μπορεί να παρακινήσει συζήτηση, να εμβαθύνει την κατανόηση και να εμπλέξει τους μαθητές σε εργασίες μαθηματικών. Ξένοι ερευνητές έχουν μελετήσει τη σχέση του χορού με τα μαθηματικά. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η άτυπη μελέτη που έκανε ο Karen Wood, παρατηρώντας τα παιδιά μιας μικρής αγροτικής πόλης στο βόρειο τμήμα της Δ.Αυστραλίας και κατέληξε πως τα παιδιά έχουν καλύτερη απόδοση στα μαθηματικά, όταν εμπλέκονται κιναισθητικά.

ΧΟΡΟΣ (ανάλυση έννοιας)

Από την πλευρά της Φιλοσοφίας, έχει διαπιστωθεί ότι ο χορός αναπτύσσει και εξελίσσει τον άνθρωπο, τον φέρνει κοντά στον εαυτό του, στη γνώση, στην αυτογνωσία. Ο χορός κλείνει σαν μονάδα μέσα του την επιστήμη και την τέχνη. Είναι το τέλειο άθλημα με οποιαδήποτε έννοια κι αν δοθεί η λέξη.

Οι ελληνικές πηγές της λέξης χορός είναι αμφίβολες. Σύμφωνα με κάποιες απόψεις (W. Smith), η έννοια του χορού συνδέεται με τον κύκλο ή το στεφάνι που δηλώνει την κυκλική κίνηση των χορευτών και έχει συγγένεια με τη λέξη ***χόρτος*** (τόπος περιφραγμένος), ***χορωνός*** (στεφάνι) και ***κορωνός***(καμπύλος, κυρτός),ενώ σύμφωνα με κάποιες άλλες η λέξη χορός σήμαινε επίπεδο πάτωμα κατάλληλο για χορό(συσχέτιση με τις λέξεις χώρα και χώρος).

Ο χορός αποτελεί ένα σύνολο ελεγχόμενων ρυθμικών κινήσεων ενός ή περισσότερων προσώπων με τη συνοδεία μουσικής (Μ. Ζωγράφου,2003), μία τέχνη, μια χωροχρονική συνεχή ακολουθία δραστηριοτήτων που εξελίσσονται σε συνάρτηση με το χώρο και το χρόνο (Β.Τυροβολά,2003). Είναι μια μορφή καλλιτεχνικής και αθλητικής έκφρασης όπου ο άνθρωπος δίνει σώμα και πνεύμα αφού αποτελεί ένα τρόπο έκφρασης της ψυχικής κατάστασης του ατόμου.Τέλος, ο χορός είναι μία από τις αρχαιότερες τέχνες του ανθρώπου και θεωρείται η παγκόσμια γλώσσα επικοινωνίας και η βασικότερη πηγή λαϊκού πολιτισμού.

Ο ΧΟΡΟΣ ΣΤΟ ΠΕΡΑΣΜΑ ΤΩΝ ΑΙΩΝΩΝ

Σύμφωνα με την *Ελληνική Μυθολογία* η γένεση του χορού αποδίδεται ως θεϊκή έμπνευση της θεάς Ρέας, της γυναίκας του Κρόνου, η οποία δίδαξε την τέχνη του χορού αφενός στους Κουρήτες, γιούς της Γης που κατοικούσαν στην Κρήτη και αφετέρου στους Κύβαντες που κατοικούσαν στη Φρυγία της Μ. Ασίας (προκειμένου να επισκιάσουν το κλάμα του μωρού-Δία για να μην το ανακαλύψει και σκοτώσει ο πατέρας του, Κρόνος) (http://gym-sourp.mag.sch.gr “Ο χορός: Έκφραση ψυχής και σώματος”).

Η εφεύρεση του χορού αποδίδεται επίσης στη συσχέτιση των ονομάτων της Μούσας Πολύμνιας και της Μούσας Τερψιχόρης. Σύμφωνα με τα ονόματα αυτά η Πολύμνια ήταν η Μούσα της μουσικής και η Τερψιχόρη σημαίνει «τέρψη- χαρά για το χορό».

Σημαντική είναι επίσης και η άποψη του Πλάτωνα, κατά την οποία ο χορός είναι αποτέλεσμα της έμφυτης ανάγκης όλων των οργανισμών να εκφράσουν κάθε είδους συναισθήματα συγκίνησης, χαράς, με κινήσεις του σώματος. Σε αυτή την παραδοχή βασίζεται και η άποψη ότι ο χορός αποτελεί θεϊκή έμπνευση κυρίως του Απόλλωνα και του Διόνυσου ο οποίος μέσω της διεγερτικής ενέργειας και της μέθης που προσφέρει το κρασί διεγείρει ταυτόχρονα την επιθυμία και την όρεξη για χορό (χορός – χαρά)

Ο χορός στη *Νεότερη Ελλάδα*αποτελεί ένα τρόπο κοινωνικής ανέλιξης, ενθάρρυνσης και συνοχής κυρίως την εποχή της Τουρκοκρατίας. Από τη βιομηχανική επανάσταση κι έπειτα, έρχονται στο προσκήνιο και ενσωματώνονται στο χορευτικό ρεπερτόριο της σύγχρονης Ελλάδας, χοροί από την Ευρώπη, τη Λατινική Αμερική, σύχροινοι χοροί και λαϊκοί χοροί. Επιπλέον, γίνεται προσπάθεια διατήρησης και μεταβίβασης του γνήσιου λαϊκού-παραδοσιακού πολιτισμού στη νέα γενιά μέσα από πολιτιστικούς συλλόγους, το εκπαιδευτικό σύστημα,τους λαϊκούς οργανοπαίχτες αλλά και τους κατοίκους της ελληνικής υπαίθρου.

ΠΑΡΑΔΟΣΗ

Η έννοια της παράδοσης, ως και της πολιτισμικής κληρονομιάς, συνδέεται άμεσα με το παρελθόν, με τα πολιτισμικά εκείνα στοιχεία, τα οποία υπάρχουν σε όλες τις κοινωνίες και μεταδίδονται από γενιά σε γενιά.

Η λαϊκή παράδοση αποτελεί πολιτιστική κληρονομιά για τον ελληνικό λαό και έχει σημασία:

- *Ιστορική* γιατί μέσα από αυτή γίνονται γνωστά ιστορικά περιστατικά και πρόσωπα.
- *Κοινωνική* γιατί συνδέει τους ανθρώπους και τις κοινωνικές ομάδες.

- *Ψυχολογική* γιατί παρέχει την ικανοποίηση της ανάγκης των ανθρώπων να αναγνωρίσουν τις ρίζες τους.
- *Εκπαιδευτική* γιατί καθοδηγεί και επηρεάζει την ιδιοσυγκρασία του λαού.
- *Καλλιτεχνική* γιατί καλλιεργεί το καλλιτεχνικό αισθητήριο των ανθρώπων και εμπνέει συγγραφείς, ποιητές, ζωγράφους, μουσικούς και άλλους καλλιτέχνες.

ΠΑΡΑΔΟΣΙΑΚΟΣ ΧΟΡΟΣ

Με τον όρο «παραδοσιακός χορός» εννοούμε το χορό που μεταφέρεται από γενιά σε γενιά, διαμορφώθηκε με τέτοιο τρόπο που να συμφωνεί με τις ιδεολογίες κάθε κοινωνίας και υιοθετήθηκε από συμβιωτικές κοινωνικές ομάδες (Η. Δήμας ,2004).

Ο ελληνικός παραδοσιακός χορός συναρθρώνεται από τρία πολιτισμικά στοιχεία, κίνηση-μουσική και ποίηση (Μ. Ζωγράφου, 2003), που αποτελούν ένα μεγάλο κομμάτι του λαϊκού πολιτισμού. Πρόκειται για μια γνώριμη, αυτοτελή και οργανωμένη κινητική αλληλουχία, που συνοδεύεται από μια συγκεκριμένη μουσική (ρυθμό-μελωδία) και τραγούδι (Μ.Ζωγράφου, 2003), εκφράζει την ιδιοσυγκρασία, τα συναισθήματα, το πνεύμα και το χαρακτήρα του ελληνικού λαού που είναι δημιουργός του, καταγράφοντας τα ήθη, τον τρόπο ζωής, τις συνήθειες και τις αξίες του.

Φολκλορισμός:

Η παλαιότερη μορφή χορού με το μεγαλύτερο αριθμό συμμετεχόντων είναι ο παραδοσιακός χορός. Στην παραδοσιακή κοινωνία, ο χορός και το τραγούδι ήταν συμμετοχή κι όχι θέαμα. Στην σύγχρονη όμως εποχή, εξαιτίας της αστικοποίησης του αγροτικού πληθυσμού, τα έθιμα και η μουσικοχορευτική παράδοση παρουσιάζουν μεγάλη εξάπλωση. Η αναβίωση των εθίμων αυτών δεν έχει τόσο συμβολική σημασία όσο αποτελεί ανάγκη για διατήρηση συναισθηματικών δεσμών. Η αναβίωση και αναπαράσταση των εθίμων αποσκοπεί όχι μόνο στη διατήρηση αλλά και στη συνέχιση των πολιτιστικών στοιχείων του παρελθόντος, καθώς εξυπηρετούν εμπορικές και οικονομικές σκοπιμότητες, αφού οι ξένοι επισκέπτες θέλουν να γνωρίσουν τόσο τα αξιοθέατα όσο και τους ξένους ανθρώπους με τις συνήθειες και τον

πολιτισμό τους. Έτσι αβιώνουν έθιμα που θα συμβάλουν στην αύξηση του τουρισμού (Η. Δήμας,2010, μέσω Μερακλή 1972). Πολλοί μελετητές αποδίδουν τόν όρο «φολκλορισμό» για να περιγράψουν τις αναβιώσεις και αναπαραστάσεις παραδοσιακών μορφών (Η. Δήμας, 2010). Η συνέχιση της παράδοσης γίνεται με μια πιο εμπορική και ωραιοποιημένη λειτουργία, που έχει ως σκοπό την πιο καλαίσθητη εμφάνιση στα μάτια του θεατή (π.χ., προσθήκες φιγούρας, ομαδικής στροφής κ.α. σε παραδοσιακούς χορούς).

ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΠΑΡΑΔΟΣΙΑΚΩΝ ΧΟΡΩΝ

1.Διάκριση των χορευτικών δημιουργιών με βάση το τοπικό ή περιφερειακό γεωγραφικό πλαίσιο σε :

α. Πανελλήνιους και Εθνικούς (συστός, καλαματιάνος, τσάμικος ή κλέφτικος) και

β. Τοπικούς.

Οι τοπικοί διακρίνονται σε χορούς από :

- Ήπειρο (συγκαθιστός Μετσόβου, φυσσούνι Πρέβεζας)
- Θεσσαλία (μπεράτης, καραγκούνα)
- Στερεά Ελλάδα (ο χορός της τράτας, καρσιλαμάς Μεγάρων)
- Πελοπόννησο (τσακώνικος, τσάμικος)
- Θράκη (τροϊρο, ζερβός, στ'τρεις)
- Μακεδονία (νικολός, λυτός ή πουστσένο, νιζάμικο)
- Επτάνησα (ρούγα-Κέρκυρα, συρτός Ζακύνθου, βλάχα-Κεφαλλονιά)
- Νησιώτικο Αιγαίο (νικηντρέ- Κυκλάδες)
- Κρήτη (μαλεβιζιώτης, πεντοζάλης, σούστα)
- Κύπρος (μάντρα, κόνιαλης)
- Μικρά Ασία (καρσιλαμάς, χασάπικος)
- Καππαδοκία (χορός κουταλιών, τσόκμες)
- Πόντος (κότσαρι, σέρρα,σερανίτσα)

2. Μία κατάταξη μπορεί να προκύψει από την ταξινόμηση των χορευτικών μορφών που επιλέγει ο ίδιος ο λαός σύμφωνα με διάφορες εκδηλώσεις, όπως για παράδειγμα, οι χοροί του γάμου ή οι χοροί της

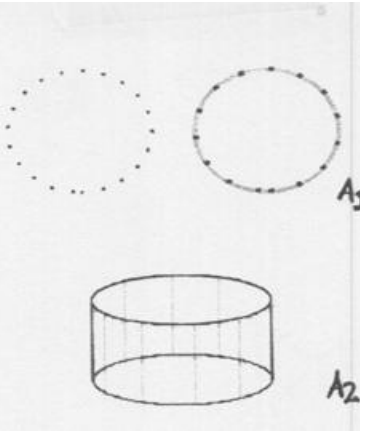
Αποκριάς (Μ.Ζωγράφου, 2003).Τις περιστάσεις αυτές μπορούμε να τις χωρίσουμε σε:*τελετουργίες* (π.χ. χοροί του γάμου) καιτις *μη-τελετουργικές* περιστάσεις (π.χ. χοροί της Αποκριάς).

3. Όπως αναφέρει η Μ.Ζωγράφου, στην Ελλάδα είναι αρκετά διαδεδομένη η διάκριση ως προς τα φύλα, κατατάσοντας τους χορούς σε:*ανδρικούς* (λουλουβίκος-Μέγαρα),*γυναικείους* (λαμπρή καμάρα-Μέγαρα) ή*μικτούς*. Σήμερα όμως οι περισσότερες χορευτικές δημιουργίες παρουσιάζονται μικτές καθώς χορεύονται από άνδρες και γυναίκες .

4. Η Μ. Ζωγράφου αναφέρει άλλη μία διάκριση των χορών, με κριτήριο το γεωμετρικό χορευτικό σχήμα έτσι όπως επιχείρησε η Ρ.Λουτζάκη, σύμφωμα με το πρότυπο της Olivia Mladenovic. Ετσι διακρίνει τρεις τάξεις χορευτικών σχημάτων, α) κύκλος, που περιλαμβάνει τον κλειστό και ανοικτό κύκλο - ημικύκλιο, β) το ζευγαρωτό χορευτικό σχήμα και γ) το ατομικό. Η ίδια συμπληρώνει αυτή την κατηγοριοποίηση και προσθέτει χορευτικά σχήματα δημιουργώντας μία νέα ταξινόμηση.

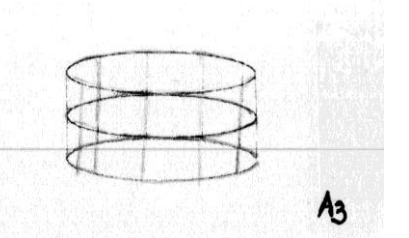
Α) Κλειστό κυκλικό σχήμα:

1. μονός κύκλος: με λαβές
ή χωρίς λαβές.



2. δίπατο: δύο κυκλικοί σχηματισμοί
με τον έναν πάνω στον άλλο

3. τρίπατο: τρεις κλειστοί κυκλικοί
σχηματισμοί με ισάριθμους χορευτές ή
με μείωση του αριθμού των χορευτών
κατα διαζώματα



Β) Ανοικτό κυκλικό σχήμα-Ημικύκλιο:

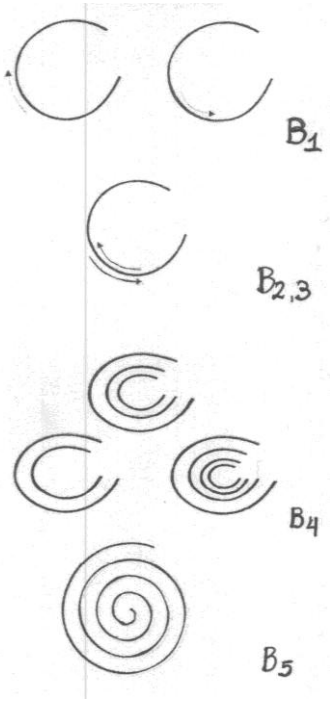
1. ημικύκλιο προς τα δεξιά και γύρισμα σε αντίστροφη προς τα αριστερά πορεία και επαναφορά στο ημικύκλιο

2. ημικύκλιο προς τα αριστερά

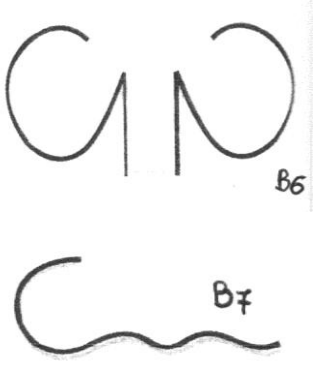
3. ημικύκλιο προς τα δεξιά και γύρισμα προς τα αριστερά

4. δύο ημικύκλια, τρία, τέσσερα ή διπλοκάγκελο, τριπλοκάγκελο, τετραπλοκάγκελο και κ.ο.κ. (ομόκεντροι κύκλοι)

5. ημικύκλιο και εξέλιξη σε κύκλισμα και ανακύκλισμα (σπειροειδές σχήμα ή σαλίγκαρος)



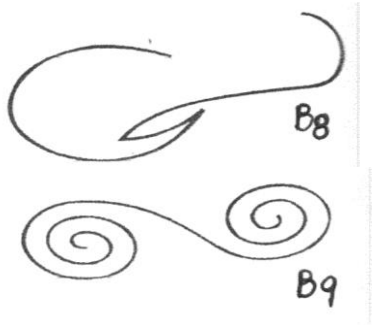
6. ημικύκλιο και εξέλιξη σε δύο παραλληλες γραμμές με επαναφορά στην προς τα δεξιά (αριστερόστροφη) κυκλική πορεία



7. ημικύκλιο και εξέλιξη σε καγκέλισμο

8. ημικύκλιο με μικρό δίπλιασμα
και επαναφορά στο αρχικό σχήμα

9. ημικύκλιο με δύο σπείρες



Μερικά από τα παραπάνω σχήματα δεν παρατηρούναι σήμερα.Το σταυρωτό σχήμα (σαρακατσιάνικη παράδοση) και το σχήμα της ευθείας γραμμής (χασάπικος) είναι δύο ακόμη γεωμετρικά σχήματα που συμπληρώνουν τους κυκλικούς και κατα ζεύγη σχηματισμούς.

* *Η ταξινόμηση των παραδοσιακών χορών ,με κριτήριο το χορευτικό σχήμα, και οι εικόνες ακολουθούν το πρότυπο της Μ.Ζωγράφου, από το βιβλίο «Ο χορός στην ελληνική παράδοση».*

ΜΟΡΦΟΛΟΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΑΙ ΔΟΜΗ ΠΑΡΑΔΟΣΙΑΚΟΥ ΧΟΡΟΥ

Τα συστατικά που διακρίνονται σε ένα χορό μπορούν να ομαδοποιηθούν σε κατηγορίες που αφορούν:

1. *Την κίνηση*: κάθε είδος χορού, χρησιμοποιεί συνδυαστικά ενέργειες του ανθρώπινου σώματος με δραστηριότητες όπως το βάδισμα, το πήδημα, η μετακίνηση, η στάση κ.λπ.
2. *Τους χορευτές:* το κομμάτι αυτό αφορά στους συμμετέχοντες, στο φύλο, στη διάταξη και τη σύνδεση των χορευτών, αλλά και στο χορευτικό σχήμα.
3. *Την οπτική παρακολούθηση*: η σημασία και η σύνδεσή του με τους σκοπούς του χορού εξαρτάται από τον χώρο στον οποίο τελείται ο χορός
4. *Τα ακουστικά στοιχεία:* ο χορός συνοδεύεται από ήχο που δημιουργήθηκε σε σχέση με αυτό ή ειδικά γι'αυτό ή προγενέστερα απ'αυτό. Οι περισσότεροι τύποι λαϊκού-παραδοσιακού χορού έχουν βασιστεί για τη δομή τους πάνω στη μουσική και στους ρυθμούς τους (Β.Τυροβολά,1998, σημ.51,σ.27).

ΡΥΘΜΟΣ

Ως ρυθμός ορίζεται η τακτή εναλλαγή διαδοχικών κινήσεων στο χώρο και στο χρόνο.Το μουσικό μέτρο αποτελεί το σύστημα της χρονικής οργάνωσης του μουσικού ρυθμού. Οι ρυθμικοί χρόνοι σε συνδυασμό με νότες διαφορετικής διάρκειας συγκροτούν ρυθμικές ποικιλίες. Το ρυθμικό στοιχείο στον λαϊκό-παραδοσιακό πολιτισμό τονίζεται από το χορευτή με χτυπήματα χεριών ή ποδιών, με κουδουνίσματα, αλλά και με τη χρήση ιδιόφωνων μουσικών οργάνων (κουτάλια, καστανιέτες, ζίλια).

ΚΙΝΗΣΗ

Η κίνηση αποτελεί το βασικότερο συστατικό του χορού. Η έννοια της κίνησης δεσπόζει στο αδιαίρετο σύνολο της τρισδιάστατης μορφής (μουσική-κίνηση-ποίηση → ελληνικός παραδοσιακός χορός) και προσδίδει υπόσταση και συναισθηματική απόχρωση στη μουσική και την ποίηση. Η μουσική και η ποίηση δημιουργούν μία ποικιλία «κινησιακών τρόπων».

Οι κινητικές επιλογές σχετίζονται με :τις κινήσεις των κάτω άκρων (σκιρτήματα, πηδήματα), των άνω άκρων, του κορμού, της κεφαλής και του προσώπου, όπως και με τη χρήση του χώρου (μετακινήσεις, εμπρός, πίσω, δεξιά , αριστερά) και του χρόνου (διάρκεια και ένταση κίνησης).Σε σύγχρονες μελέτες παρατηρείται πως οι κινήσεις των κάτω άκρων είναι πιο σημαντικές ενώ αποκλείονται κινήσεις της λεκάνης. Οι διάφορες λαβές (εκτός από τη λαβή από τις παλάμες) δεν επιτρέπουν στα άνω άκρα να κινούνται ελεύθερα, ενώ παράλληλα δεσμεύουν και την ένταση των κινήσεων των κάτω άκρων (αγκαζέ, σταυρωτή λαβή κ.ο.κ) (Μ.Ζωγράφου, β'έκδοση,2003).

ΜΟΥΣΙΚΗ

Ο βασικός παράγοντας οργάνωσης των κινήσεων αποτελεί η μουσική και συγκεκριμένα το ρυθμικό σχήμα ως μέσο οργάνωσης του ήχου (αξία, τονισμός, μεταξύ τους σχέσεις, αριθμός μονάδων). Η μουσική συνυπάρχει με το χορό. Γνώρισμα ενός καλού δεξιοτέχνη χορευτή αποτελεί η δυνατότητα προσαρμογής των κινήσεων του σώματος στα ρυθμικά χτυπήματα.

Η ελληνική παραδοσιακή μουσική έχει ρίζες στο μουσικό σύστημα της Αρχαίας Ελλάδας, και σχετίζεται άμεσα με τη βυζαντινή μουσική και τη μουσική γειτονικών λαών της Ανατολής.Ενδεικτικά αναφέρονται κάποια από τα όργανα(παραδοσιακά) που χρησιμοποιούνται για την ελληνική παραδοσιακή μουσική:

Κρουστά: νταούλι , τούμπι, τουμπελέκι

Αερόφωνα: κλαρίνο, φλογέρα, σουράυλι, μαντούρα, τσαμπούνα, γκάιντα, ζουρνάς

Χορδόφωνα: Ταμπουράς, λαγούτο, ούτι, βιολί, κεμεντές(λύρα ελλήνων του Πόντου), κρητική λύρα

ΤΡΑΓΟΥΔΙ

Η ποίηση – τραγούδι αποτελεί το τρίτο βασικό γνώρισμα του χορού.

Τα τραγούδια είναι συνήθως μονοφωνικά και όταν συνοδεύουν ένα χορό ακολουθούν συγκεκριμένη αλληλουχία.Τα περισσότερα (δημοτικά) τραγούδια προέρχονται από ένα μικρό αριθμό τραγουδιών και συνδέονται με πολλές παραλλαγές (Μ. Ζωγράφου, 2003). Το δημοτικό τραγούδι εκφράζει:συναισθήματα,ψυχικά φορτία, ιδανικά, πόνους και χαρές του λαού.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΧΟΡΕΥΤΩΝ

Οι συνδέσεις μεταξύ των χορευτών γίνεται συνήθως από τα χέρια και ποικίλει ανάλογα με το είδος του χορού.Οι πιο συνηθισμένοι τρόποι κρατήματος είναι οι εξής:με τα άνω άκρα τοποθετημένα στην «πλάγια – κάτω θέση» -δεξιά και αριστερά του σώματος, με λυγισμένα τα χέρια από τους αγκώνες. (Και στις δύο θέσεις , οι χορευτές μπορούν να συνδέονται από τα χέρια, τους καρπούς ή τα δάκτυλα.), το «σταυρωτό» κράτημα από τα χέρια ή από τα ζωνάρια, το «θηλυκωτό/αγκαζέ» και το στήριγμα από τους ώμους. Υπάρχουν και χοροί χωρίς κράτημα, όπου οι χορευτές κινούν τα χέρια τους με διάφορους κατα περιστάσεις τρόπους (Ρ. Λουτζάκη, 2001).

ΠΑΡΑΔΟΣΙΑΚΟΣ ΧΟΡΟΣ ΚΑΙ ΠΑΙΔΙΚΗ ΗΛΙΚΙΑ

Μέσα από το χορό το παιδί μπορεί να ανακαλύψει το ρυθμό, τις αυτοσχέδιες και δημιουργικές του ικανότητες, καθώς ο χορός αποτελεί μια επέκταση της ρυθμικής κίνησης σε δημιουργική, εκφραστική, ερμηνευτική και διασκεδαστική δραστηριότητα.

Μέσα από τον παραδοσιακό χορό τα παιδιά,διδάσκονται το ιστορικό παρελθόν και την κουλτούρα τους,καλλιεργούνται ψυχικά, κοινωνικά και σωματικά, αποκτούν γνώση και μόρφωση, κοινωνικοποιούνται, αποκτούν αυτοεκτίμηση και αυτοπεποίθηση, αυτοπειθαρχία και αυτοέλεγχο (μουσική-ρυθμός).

ΠΑΡΑΔΟΣΙΑΚΟΣ ΧΟΡΟΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Η διδασκαλία του παραδοσιακού χορού αποτελεί μια εξειδικευμένη διαδικασία που εντάσσεται στα γενικότερα πλαίσια της διδακτικής επιστήμης διατηρώντας την μετάδοση συγκεκριμένων γνώσεων (Β. Σερμπέζης).Αποτελεί μια σύνθετη ενέργεια αφού εκτός από την κινητική διάσταση απαιτεί και τη μελέτη χορευτικού πλαισίου

Η αποτελεσματική διδασκαλία του παραδοσιακού χορού εξαρτάται από: την αλληλεπίδραση μαθητή –εκπαιδευτικού,την επικοινωνία,τη δέσμευση για εποικοδομητική και ευχάριστη μάθηση και την επιλογή κατάλληλων διδακτικών μεθόδων.

ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Η διδασκαλία του χορού προτείνεται να γίνεται με διεπιστημονική και διαθεματική προσέγγιση με τα μαθηματικά, ώστε να μεταφέρει και να μεταδίδει τόσο στοιχεία πολιτισμικής παράδοσης όσο και μαθηματικές γνώσεις.

Τα μαθηματικά σχετίζονται με τη μουσική και το χορό με μια σχέση αιώνων, ξεκινώντας από την εποχή του Πυθαγόρα, ο οποίος κατασκεύασε τη διατονική κλίμακα που χρησιμοποιούμε και από δικό μας μουσικό σύστημα.

Τα μαθηματικά περιέχονται στο χορό, τόσο στο μέτρο όσο και στις κινήσεις.Καθώς χορεύουμε το σώμα μας, σχηματίζει γωνίες και γεωμετρικά σχήματα. Επίσης, το μουσικό μέτρο αποδίδεται με μορφή κλάσματος αλλά και τα βήματα έχουν και αυτά μια συγκεκριμένη σειρά σαν τις μαθηματικές ακολουθίες. Μπορούμε λοιπόν να ισχυριστούμε ότι ο χορός είναι απλά μαθηματικά.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΠΑΡΑΔΟΣΙΑΚΟΥ ΧΟΡΟΥ ΜΕ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Γεωμετρικές έννοιες:

Ο χορός απαιτεί να σχήματιζεις με το σώμα σου σχήματα και γωνίες. Οι κινήσεις στο χορό είνα συνδυασμοί, κύκλων, σημείων, γωνιών και γραμμών. Κάποιες από τις γεωμευρικές έννοιες που περιλαμβάνονται στο χορό είναι:

Α. Σχήματα: Το σώμα του χορευτή κατά τη διάρκεια του χορού αλλάζει διάφορες θέσεις. Εμφανίζεται δυνητικά υπό τη μορφή τριών ειδών γεωμετρικών σχημάτων: α) της ευθείας γραμμής (τεντωμένο σώμα), β) του κύκλου ή γ) της γωνίας (Τυροβολά Β., 2012). Το κεφάλι μπορεί να είναι εμπρός, δεξιά ή αριστερά (Χωρικές Έννοιες) και τα γόνατα μπορεί να σχηματίζουν εναλλακτικά τριών ειδών γωνίες, ορθή, οξεία ή αμβλεία.Τα χορευτικά σχήματα που διαγράφονται από τους χορευτές κατά τη διάρκεια του χορού, είναι συνήθως κυκλικά, με εξελίξεις του ανοικτού και κλειστού κυκλικού συστήματος, όπως για παράδειγμα, κύκλος, έλλειψη, δύο κυκλικοί σχηματισμοί με τον έναν πάνω στον άλλον (θυμίζει κύλινδρο το τελικό σχήμα), ημικύκλιο,

ομόκεντροι κύκλοι, αλλά και πιο σύνθετα κυκλικά σχήματα (π.χ Σαλίγκαρος).

Β. Παράλληλες γραμμές:Ως παράλληλες ευθείες ορίζονται δύο ευθείες Ε1 και Ε2 που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κοινό σημείο (Μυλωνάκης Κ., (επιμέλεια) στο 'Γεωμετρία Α' και Β' Λυκείου'). Οι χορευτές συχνά (ανάλογα με τη χορογραφία και το είδος του χορού), πρέπει να στέκονται παράλληλα με τους άλλους χορευτές ώστε να διατηρούν τους σχηματισμούς. Επίσης, πρέπει να κρατούν την ίδια απόσταση ανάμεσα σε αυτούς και στους υπόλοιπους χορευτές, όπως και αν κινούνται, διατηρώντας με αυτόν τον τρόπο την έννοια της παραλληλίας (www.erofili.eu). Η παραλληλία αποτελεί μια από τις καθολικές αρχές (άλλες αρχές είναι η αντίθεση, η ισορροπία, η διαδοχή, η κατεύθυνση, η ταχύτητα, η ένταση και η χαλάρωση) στις οποίες βασίζεται η τεχνική του χορού.

Γ. Συμμετρία (σχετίζεται με την οργάνωση των μορφών του χώρου): Στο χορό συναντάμε δύο είδη συμμετρίας : α. *Συμμετρία ως προς άξονα* (καθρεπτική μορφή), π.χ, Όταν ένα ζευγάρι χορευτών, χορεύουν πιασμένοι από το χέρι, τότε ο άξονας συμμετρίας διέρχεται από το σημείο τομής τους (χέρι), ενπώ όταν χορεύουν ένα ζευγαρωτό χορό, αντικριστά, διέρχεται μεταξύ τους. β. *Κεντρική συμμετρία (περιστροφή)*: Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η επιτελούμενη στροφή του χορευτή γύρω από τον εαυτό του, ή γύρω από τον συγχορευτή του

Δ. Χωρικές σχέσεις:Ο χορός αποτελείται από βήματα. Τόσο κατά τη διδασκαλία του χορού όσο και κατά τη διάρκεια της χορευτικής πράξης χρησιμοποιούνται έννοιες του χώρου. Λέμε για παράδειγμα, το αριστερό πόδι περνάει σταυρωτά μπροστά από το δεξί ή το δεξί περνάει πίσω από το αριστερό κ.α. Χρησιμοποιούμε δηλαδή έννοιες με τοπολογικό περιεχόμενο, όπως: μέσα – έξω, πάνω – κάτω, κοντά, δίπλα, αριστερά – δεξιά κ.α.

Αριθμητικές έννοιες:

Αριθμητική Ακολουθία - Απαρίθμηση**:** μέσα από τον παραδοσιακό χορό τα παιδιά ενθαρρύνονται να επαναλαμβάνουν τη συμβατική ακολουθία των φυσικών αριθμών για να μετρήσουν και να αντιληφθούν τη διαδοχικότητα των βημάτων που πραγματοποιούνται στο χορό. Μέσα από τον παραδοσιακό χορό τα παιδιά, σε ένα πρώτο

στάδιο, αντιλαμβάνονται πως για να χορέψουμε χρησιμοποιούμε βήματα τα οποία περνούν διαδοχικά το ένα στο άλλο χωρίς να παραλείπεται κανέναν όπως ακριβώς συμβαίνει και με την συμβατική ακολουθία των φυσικών αριθμών στην οποία κάθε αριθμός κατέχει συγκεκριμένη θέση στην αριθμογραμμή, είναι διαδοχικός και δεν παραλείπεται. Με τον τρόπο αυτόν δηλαδή τα παιδιά μαθαίνουν να αναγνωρίζουν την ίδια την διαδοχικότητα των αριθμών κυρίως από το 1 μέχρι το 10. Σε επόμενο στάδιο, και αφού τα παιδιά έχουν εξοικειωθεί με τα ονόματα και τη σειρά της αριθμητικής ακολουθίας αλλά και τη διαδοχική σειρά των βημάτων στο χορό, έρχεται στο προσκήνιο η ένα-προς-ένα αντιστοίχιση των βημάτων με αριθμητικές λέξεις, διαδικασία που μπορούμε να ονομάσουμε απαρίθμηση στον παραδοσιακό χορό.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΠΑΡΑΔΟΣΙΑΚΟΥ ΧΟΡΟΥ ΩΣ ΜΕΣΟ ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ

Στάδιο προετοιμασίας για την διαθεματική διδασκαλία παραδοσιακών χορών

Προτείνονται κάποια βήματα ως εισαγωγικό μέρος πριν από τη διδασκαλία των χορών:

1. Ο εκπαιδευτικός μέσα από την μουσικοκινητική αγωγή επιδιώκει οι μαθητές να μπορέσουν να αποκτήσουν συναίσθηση των εναλλακτικών χρήσεων του χώρου με βάση τις εναλλαγές ως προς τις κατευθύνσεις (κινήσεις προς τα εμπρός, προς το κέντρο του κύκλου, δεξιά-αριστερά κ.λπ) και την αίσθηση των διαφορετικών επιλογών χρήσης των μερών του σώματος (εναλλακτικές λαβές, θέση σώματος κ.λπ).

2. Ο εκπαιδευτικός καλεί τα παιδιά σε κύκλο. Προβάλλει βιντεοσκοπημένες παραστάσεις με τους χορούς που πρόκειται να δείξει/διδάξει στα παιδιά και εικόνες από κάθε χορό, συζητώντας μαζί τους τις χορευτικές τους εμπειρίες αλλά και τα σχήματα

που παίρνει ο χορός.Μέσα από τη συζήτηση ,επιλέγουν το χορό με τον οποίο θα ασχοληθούν.

3. Συζήτηση για την προέλευση του χορού, και για τα έθιμα με τα οποία σχετίζεται.
4. Ο εκπαιδευτικός συνοδεύει την ακρόαση του τραγουδιού με παλαμάκια και ζητά από τα παιδιά να τον μιμηθούν(ώστε να κατανοήσουν το ρυθμό).
5. Τα παιδιά περπατούν συντονίζοντας τα παλαμάκια με το ρυθμό , τη μουσική και την μετακίνηση.Ο εκπαιδευτικός σταματά τη μουσική και τα παιδιά τρέχουν ελεύθερα στο χώρο.Όταν η μουσική ξαναρχίζει, τα παιδιά φτιάχνουν το σχήμα που τους είχε υποδείξει πριν ο εκπαιδευτικός (κύκλος, ευθεία γραμμή).
6. Ο εκπαιδευτικός δείχνει στα παιδιά το χορευτικό μοτίβο(των χορών που προτείνονται στην ενότητα 3.4) και ζητά να τον μιμηθούν. Ταυτόχρονα τραγουδά το τραγούδι(αν υπάρχει) ή χτυπά ρυθμικά παλαμάκια. Ζητά από τα παιδιά να πιαστούν χέρι-χέρι και να προσπαθήσουν να διατηρήσουν το σχήμα.
7. Επαναλαμβάνουν το χορό, εισάγοντας την αντίστοιχη για τον κάθε χορό λαβή.

Πρακτικό στάδιο – Προτάσεις/ Παραδείγματα παραδοσιακών χορών προς διδασκαλία (ενδεικτικά δύο παραδείγματα)

1. ΡΟΥΣΑΛΙΑ ΜΕΓΑΡΩΝ

https://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&x-yt-ts=1422579428&v=QN6gyylVfvY&x-yt-cl=85114404

ΣΤΟΧΟΣ: Εξοικείωση με τις έννοιες της απαρίθμησης και της συμμετρίας (μέσα από την επανάληψη)

ΛΑΟΓΡΑΦΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ:

Θα λέγαμε πως είναι τα κάλαντα του Πάσχα. Τραγουδιούνται και χορεύονται τη δεύτερη μέρα του Πάσχα στις γειτονιές των Μεγάρων, από έφηβους ή άνδρες. Παλαιότερα το έθιμο γινόταν με σκοπό τη συγκέντρωση χρημάτων για των αγώνα της Ελληνικής επανάστασης.Σήμερα το έθιμο αναβιώνει έχοντας όμως κερδοσκοπικό χαρακτήρα.Ο πρωτοχορευτής, που συνηθιζόταν να είναι ο κοντύτερος συγγενής ή γνωστός του κάθε σπιτιού, κρατούσε ένα λουλουδένιο σταυρό (ένδειξη αναλοίωτης πίστης)και κάτω από αυτόν κρέμεται ένα μαντίλι (καλαμάτα) που συμβολίζει το λάβαρο της επανάστασης. Ο τελευταίος του χορού (λέγεται «σαχανατάρης», δηλαδή ταμίας), που είναι συνήθως και ο μικρότερος στην ηλικία, κρατά ένα καλάθι στολισμένο με λουλούδια όπου τοποθετεί ο κόσμος ,που τους βλέπει να χορεύουν, χρήματα, πασχαλινά αυγά και κουλούρια. Το τραγούδι συνοδεύεται από νταούλι και πίπιζα ή κλαρίνο. (Μέγαρα, Μια πόλη μια ιστορία, Μέγαρα 1994, Επιμέλεια Ι.Ν.Γκίνη)

Οι στίχοι που τραγουδιούνται είναι οι εξής:

«Καλώς σ' έβραμε αφέντη, άρχοντά μου και λεβέντη
Να στα πούμε τα Ρουσάλια, πέστε τα ρε παλικάρια
Να στα πούμε σένα πρώτα, που σε βρήκαμε στην πόρτα
Και ξυστέρου της κυράς μας και της ρουσοπέρδικάς μας
Κάτω σ' ένα περιβόλι, δάφνη και μηλιά μαλώνει
Δάφνης πήρα εγώ κλωνάρι, να με πάρει το ποτάμι
Να με πάει δύση-δύση, κάτω στη γιαλέρνια βρύση
Όπου πλένουν οβριοπούλες, καματίζουν τουρκοπούλες
Βάλε το δεξί σου χέρι, μες στην αργυρή σου τσέπη
Βγάλε το εικοσιπεντάρι, δος το του σαχανατάρη
Να σας πούμε Χριστός Ανέστη, που ετάφη και ανέστη.

ΜΟΡΦΟΛΟΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Το χορευτικό σχήμα είναι κυκλικό και με κατεύθυνση προς τα δεξιά.Η λαβή των χορευτών είναι από τους ώμους.Το τραγούδι τραγουδιέται σε ρυθμό 2/4 και χορεύεται με απλά πλάγια βήματα συρτού χορού τύπου «Στα τρία». Έχει 6 βήματα-κινήσεις και είναι οι εξής:

Τα πρώτα 3 βήματα γίνονται προς τα δεξιά, πρώτα βγάζουμε το δεξίι πόδι προς τη φορά του κύκλου, κατόπιν έρχεται το αριστερό και πάλι το δεξί

Στο 4 έρχεται το αριστερό πόδι ψηλά σε διάσταση, δίπλα στο δεξί

Στο 5 το αριστερό πόδι πατάει αριστερά σε διάσταση δίπλα στο δεξί

Στο 6 το δεξί πόδι έρχεται ψηλά πάνω από το αριστερά.

2. ΚΑΜΑΡΕΣ ΤΗΛΟΥ

http://youtu.be/5oodgUzArww

ΣΤΟΧΟΣ: Εξοικείωση των παιδιών με την έννοια της συμμετρίας και της παραλληλίας.

ΛΑΟΓΡΑΦΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Οι Καμάρες είναι γαμήλιος χορός από την Τήλο, ο οποίος χορεύεται από άνδρες και γυναίκες την επόμενη μέρα του γάμου, στο αλώνι της νύφης, ως τελευταίος χορός του γλεντιού. Αναλυτικότερα, σχετίζεται με το χορό «καντρίλιες», δυτικής προελεύσεως, και αποτελεί μέρος του χορευτικου δρωμένου του «ψεύτικου γάμου», όπου επισκέπτονται το νιόπαντρο ζευγάρι οι φιλοι τους. Ξεκινά το χορό το νιόπαντρο ζευγάρι και ακολουθούν οι φίλοι και συγγενείς. (http://kemellision.blogspot.gr/2013/10/blog-post_23.html «Καλλιτεχνικό εργαστήρι μελισσίων»).

Το τραγούδι το οποίο συνοδεύει το χορό αναφέρει ευχές για το ανδρόγυνο.

«Πέρνα καμάρα σαν περνάς,

πέρνα και ξαναπέρνα.

Έλα η ώρα η καλή κι

ώρα η καλή να λάχει,

τ' ανδρόγυνο που γίνηκε

να ζήσει να γεράσει.

Έλα η ώρα η καλή

και η ευλογημένη,

τ' ανδρόγυνο που γίνηκε να ναι στερεωμένοι»

ΜΟΡΦΟΛΟΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Οι χορευτές τοποθετούνται σε ζευγάρια το ένα πίσω από το άλλο (δημιουργώντας παράλληλες γραμμές). Η λαβή των χεριών είναι από τις παλάμες. Οι χορευτές εκτελούν με το ρυθμό προχωρητικά βήματα δημιουργώντας με τα χέρια τους καμάρες, κάτω από τις οποίες περνούν όλοι με τη σειρά.

Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

GallahiueD., (2002), *Αναπτυξιακή Φυσική Αγωγή για τα σημερινά παιδιά*, Α' Έκδοση, UniversityPress, Θεσσαλονίκη, 2002

Βρεττός Λ. Σ., *Λεξικό Τελετών, Εορτών και Αγώνων των Αρχαίων Ελλήνων.*

Γκίνη Ι. Ν., (1994) (επιμέλεια) *Μέγαρα, Μια πόλη μια ιστορία*. Μέγαρα 1994.

Γκλιάου Ν., (2002) *Το νέο Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών για το νηπιαγωγείο.*

Δαφέρμου Χ., Κουλούρη Π., & Μπασαγιάννη Ε., (2009) *Οδηγός Νηπιαγωγού- Εκπαιδευτικοί Σχεδιασμοί. Δημιουργικά Περιβάλλοντα Μάθησης.*

Δήμας Η. Σ., Τυροβολά Β. Κ. & Κουτσούμπα Μ. Ι., (2010) *Ελληνικός Παραδοσιακός Χορός, θεωρήσεις για το λόγο, τη γραφή και τη διδασκαλία του*, Αθήνα 2010.

Δήμας Η., (2004) *Λαϊκή Μουσικοχορευτική Παράδοση,χορευτικές συνήθειες των φοιτητών-τριών της Ελλάδας* , β΄ έκδοση.

Ζαχάρος Κ., (2006) *Οι μαθηματικές έννοιες στην προσχολική Εκπαίδευση και η διδασκαλία τους*, Εκδόσεις Μεταίχμιο

Ζωγράφου Μ., (2003) *Ο χορός στην ελληνική παράδοση*, β΄ έκδοση.

Ιορδανίδου Μ., (2012) Μεταπτυχιακή διατριβή. *Η επίδραση ενός παρεμβατικού προγράμματος ελληνικών παραδοσιακών χορών, σε ψυχοκοινωνικές μεταβλητές που αφορούν παιδιά σχολικής ηλικίας 7 ετών*, Θεσσαλονίκη 2012.

Κακανά Δ., (1994) *Θεωρία και Μεθοδολογία Δραστηριοτήτων στην Προσχολική Αγωγή*, Θεσσαλονίκη: Εκδοτικός Οίκος Αδελφών Κυριακίδη Α.Ε.

Κολέζα Ε., (2000) *Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών*, Αθήνα: LeaderBooks.

Κουτσουβάνου Ε. & Αρβανίτη-Παπαδοπούλου Τ., (2008), *Βοήθημα για τους νηπιαγωγούς. Πρόγραμμα προσχολικής εκπαίδευσης*, Αθήνα: Οδυσσέας

Λουτζάκη Ρ. & Αντζάκα – Βέη Ε., (1999), *Ο χορός στην Ελλάδα, εκπαιδευτική εγκυκλοπαίδεια*. Αθήνα: Εκδοτική Αθηνών.

Μυλωνάκης Κ., (επιμέλεια) Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Λυκείου.

Ματσαγγούρας Η., (2002) *Η διαθεματικότητα στη σχολική γνώση*, Αθήνα: Γρηγόρη.

Σερμπέζης Β., στο *Ελληνικός Παραδοσιακός Χορός: από το χοροστάσι του χωριού στις αίθουσες διδασκαλίας* της Κ. Πανοπούλου.

Τσουβαλά Μ., (2008) *Η Τέχνη του Χορού στην Εκπαίδευση: Το Ενδιάμεσο Μουτέλο Διδασκαλίας και η Συμβολή του στην Εκπαιδευτική Πράξη*, Ηλεκτρονικό Περιοδικό Επιστήμη του Χορού, β΄ Τόμος

Τυροβολά Β. Κ., (1998) *Ελληνικοί παραδοσιακοί Χορευτικοί ρυθμοί*, Αθήνα: Gutenberg.

Τυροβολά Β. Κ., (2012) *Πυθαγόρεια Φιλοσοφική Παράδοση, Μυστικισμός και χορός*, Αθήνα 2012.

Φατσέα Α., (2008, 2009) *Ελληνικοί παραδοσιακοί χοροί*, Ρόδος.

Χασάπης Δ., (2000) *Διδακτική βασικών μαθηματικών εννοιών. Αριθμοί και αριθμητικές πράξεις*, Αθήνα: Μεταίχμιο.

Χασάπης Δ., Σημειώσεις διαλέξεων του μαθήματος Χωρικές και Γεωμετρικές έννοιες

3ο Συνέδριο ΛαΪκού Πολιτισμού, χορός και πολιτισμικές ταυτότητες στα Βαλκάνια, Πρακτικά, Σέρρες 2006.

ΞενόγλωσσηΒιβλιογραφία

Freudenthal H., (1973) *Mathematics as an Educational Task*, Reidel Publishing Company.

Watson A.,*Dance and Mathematics: power of novelty in the teaching of mathematics*, University of Oxford.

Wood K., (2008) Mathematics through movement. An investigation of the links between kinaesthetic and conceptual learning.

Διαδικτυακές Πηγές

http://morfotikosmess.gr/?page_id=272 , *Ο Παραδοσιακός χορός και η σημασία του.*
http://lyk-andrav.ilei.sch.gr , *Μαθηματικά και Χορός, μια σχέση αιώνων*, ΓΕΛ Ανδραβίδας 2013-2014. Ερευνητική εργασία.
http://gym-sourp.mag.sch.gr , *Ο Χορός: Έκφραση ψυχής και σώματος.*
www.dance-pandect.gr , *Ο Χορός στην Αρχαία Ελλάδα.*
http://autochthonesellhnes.blogspot.gr , Αθανασιάδης Δ. *Πυρρίχιος Χορός*
http://zaliosparadosi.blogspot.gr , Τσιαμήτρος Γ., (2012) *Ελληνικός Χορός και Νέοι.*
http://diolkos.blogspot.gr , *Παραδοσιακός Πολιτισμός: Η πολύτιμη αλυσίδα με τους χαμένους κρίκους.*

http://www.lykelam.gr/nea/erevnes/296-to-paidi-kai-o-paradosiakos-xoros ,*Το παιδί και ο παραδοσιακός χορός.*

http://www.vita.gr/fitness/article/1408/xoros-dynamwnei-to-swma-isorropei-thn-psyxh/*Οφέλη διδασκαλίας χορού.*

http://paroutsas.jmc.gr/dances*Οι ελληνικοί παραδοσιακοί χοροί κατά περιοχές.*

http://www.p-theodoropoulos.grΘεοδωρόπουλος Λ.,*Η διαθεματική προσέγγιση της γνώσης: Από τη Φιλοσοφία στην Εφαρμογή.*

http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%93%CF%81%CE%B1%CE%BC%CE%BC%CE%AE*Πληροφορίες για την Έννοια της Ευθείας*

http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%A3%CE%B7%CE%BC%CE%B5%CE%AF%CE%BF*Πληροφορίες για την Έννοια του Σημείου*

www.erofili.eu

http://www.e-istoria.com/111.html

http://www.vlahoi.net/politismos/o-xorodidaskalos-kai-i-simvoli-tou.html

Πανοπούλου Κ., Τ.Ε.Φ.Α.Α Σερρών. *Ο χοροδιδάσκαλος και η συμβολή του στη διαδικασία εκμάθησης των Ελληνικών Παραδοσιακών Χορών 5ο Σεμινάριο Λαογραφίας και Βλάχικων Παραδοσιακών Χορών*, Περιβόλι Γρεβενών, 24-25 Μαΐου 2003

http://www.pro-dance.gr/dances/popular-greek-dances/history-of-greek-folk-dances/history-of-servikos-dance*Η ιστορία του Χασαποσέρβικου.*

http://kemellision.blogspot.gr/2013/10/blog-post_23.html*Καλλιτεχνικό εργαστήρι Μελισσίων.*

Vasokotrotsou@yahoo.gr

Elenanemmitsou@hotmail.com

ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΣΤΗΝ Α' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Παρασκευή Λαμπάκη

Εκπαιδευτικός ΠΕ70 / Διεύθυνση Π.Ε. Ανατ. Θεσσαλονίκης

Καλλιόπη Ντάσιου

Εκπαιδευτικός ΠΕ70 / Διεύθυνση Π.Ε. Ανατ. Θεσσαλονίκης

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Με την παρούσα ανακοίνωση παρουσιάζουμε τα πέντε επίπεδα της γεωμετρικής σκέψης και τη σταδιακή μετάβαση των μαθητών από το ένα στο άλλο που ουσιαστικά είναι η εξέλιξη του γεωμετρικού τους συλλογισμού, όπως αυτά αναπτύχτηκαν από τους Ολλανδούς Dina και Pierre van Hiele το 1957. Στο επίπεδο που βρισκόμαστε, παρουσιάζεται η Γεωμετρία με εμπειρικό τρόπο και μέσα από προτεινόμενες δραστηριότητες οι μαθητές καθοδηγούνται στο να αναγνωρίσουν, να ονομάσουν και να μεταχειρίζονται εμπειρικά σχήματα, με τη διαίσθηση, αλλά και νοητικά μέσα σε ένα ομαδοσυνεργατικό κλίμα. Μέσα από τα παιχνίδια και διαθεματικές δραστηριότητες, τα παιδιά ανακαλύπτουν νέες γνώσεις, εμπεδώνουν και εφαρμόζουν τις ήδη αποκτημένες. Αναπτύσσουν τη δημιουργική σκέψη καθ' όλη τη διάρκεια της διδασκαλίας και έρχονται σε επαφή με στοιχεία τέχνης, αφομοιώνοντας ταυτόχρονα καλύτερα γεωμετρικές έννοιες.

Μέρος 1ο: «Η Γεωμετρία τότε και τώρα»

Η Γεωμετρία είναι ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με τη σύνθεση του χώρου που μας περιβάλλει. Αποτέλεσε από αρχαιοτάτων χρόνων αντικείμενο μελέτης από μαθηματικούς, μιας και βρίσκει άμεση πρακτική εφαρμογή στην καθημερινή ζωή. Ακόμη, ήταν για χιλιάδες χρόνια μέρος της καλλιέργειας και της εκπαίδευσης των μορφωμένων κυρίως ατόμων. Σήμερα, η επιστήμη αποδέχεται την Ευκλείδεια Γεωμετρία αναγνωρίζοντάς την ως τη πιο βασική και εφαρμόσιμη μορφή της.

Η Γεωμετρία αποτελεί σήμερα μέρος των αναλυτικών προγραμμάτων της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, επιδιώκοντας μέσα από τη διδασκαλία να οδηγήσει τα παιδιά στην κατάκτηση μιας σειράς στόχων.

1. Να μπορούν τα παιδιά να αντιλαμβάνονται συνειδητά τον περιβάλλοντα χώρο.
2. Να αναπτύξουν ικανότητες σχετικά με τον οικείο χώρο.
3. Να γνωρίσουν και να αφομοιώσουν βασικές γεωμετρικές έννοιες.
4. Να αναγνωρίζουν, να ονομάζουν, να χαράζουν, να φαντάζονται, να αναπλάθουν στο μυαλό τους και γενικά να μεταχειρίζονται τα σχέδια εμπειρικά με τη διαίσθηση, αλλά και νοητικά.
5. Να γνωρίσουν και να αξιοποιήσουν ορισμένες σειρές ενεργειών – τακτικές που θα τους βοηθήσουν στην επίλυση προβλημάτων.
6. Να εξασκηθούν επαρκώς, ώστε να αναπτύξουν την ικανότητα να επιλύουν προβλήματα Γεωμετρίας.
7.

Μέρος 2ο: «Επίπεδα γεωμετρική σκέψης»

Οι Ολλανδοί Dina van Hiele-Geldof και ο Pierre van Hiele ανέπτυξαν το 1957 σε διδακτορικές διατριβές τη θεωρία των επιπέδων της γεωμετρικής σκέψης. Η θεωρία αυτή περιγράφει ουσιαστικά πώς μαθαίνουν οι μαθητές Γεωμετρία, ιεραρχώντας τον τρόπο κατανόησής της σε πέντε επίπεδα. Η εξάσκηση οδηγεί το μαθητή στην καλύτερη αφομοίωση των γεωμετρικών εννοιών και την απόκτηση εμπειριών και συνεπώς, στο πέρασμά του σε ένα υψηλότερο επίπεδο

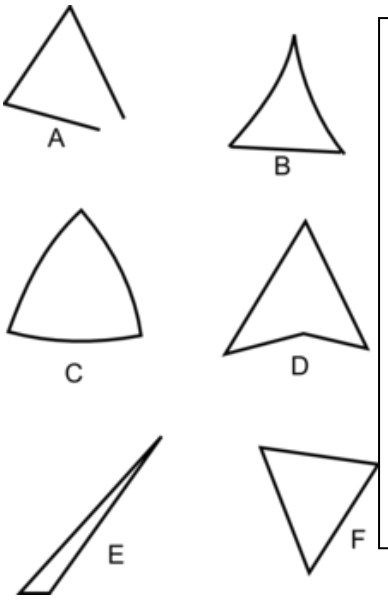
πολυπλοκότητας. Καθώς ο μαθητής μεταβαίνει από το ένα επίπεδο στο άλλο, αυτό που ουσιαστικά αλλάζει και εξελίσσεται είναι το επίπεδο του γεωμετρικού του συλλογισμού. Το κάθε επίπεδο δηλαδή αντιπροσωπεύει όχι τις γνώσεις ή την ηλικία, αλλά τον τρόπο σκέψης και επεξεργασίας των πληροφοριών. Αυτό βέβαια έρχεται σε αντίθεση με τη θεωρία της γνωστικής ανάπτυξης του Piaget, σύμφωνα με την οποία τα στάδια ανάπτυξης είναι συναρτήσεις της βιολογικής ανάπτυξης και της ηλικίας του ατόμου. Με πλούσιες εμπειρίες και εξάσκηση το παιδί μπορεί να φτάσει στο τέλος του δημοτικού σχολείου ως και το Επίπεδο 2. Τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης είναι τα εξής:

Επίπεδο 0: Οπτικοποίηση - Εποπτική αντίληψη

Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίσουν και να ονομάσουν τα βασικά γεωμετρικά σχήματα (τρίγωνο, τετράγωνο και κύκλος) και να τα ταξινομήσουν με βάση τη μορφή τους. Μπορούν δηλαδή να ξεχωρίσουν ομάδες σχημάτων που φαίνονται να μοιάζουν μεταξύ τους και να διακρίνουν τις ιδιότητές τους. Έτσι για παράδειγμα ένα σχήμα είναι ορθογώνιο γιατί μοιάζει με τον πίνακα ή με το θρανίο, ενώ ένα τετράγωνο δε μπορεί να είναι και ορθογώνιο, μιας και φαντάζουν τελείως διαφορετικά σαν σχήματα στο μυαλό του παιδιού σε αυτό το επίπεδο.

Επίπεδο 1: Ανάλυση

Σε αυτό το επίπεδο τα σχήματα γίνονται φορείς των ιδιοτήτων τους και ομαδοποιούνται σε τάξεις σχημάτων. Δεν αντιμετωπίζονται δηλαδή μεμονωμένα από τα παιδιά. Οι μαθητές μπορούν για κάθε ομάδα σχημάτων να αναλογιστούν τα σημαντικά της χαρακτηριστικά. Στη συνέχεια, καταλαβαίνουν ότι τα σχήματα ανήκουν σε αυτή την ομάδα επειδή ακριβώς έχουν τις συγκεκριμένες ιδιότητες. Έτσι για παράδειγμα ένα σχήμα είναι ορθογώνιο επειδή έχει τέσσερις πλευρές και τέσσερις ορθές γωνίες, οι απέναντι πλευρές του είναι μεταξύ τους ίσες και παράλληλες κτλ.



Ένα παράδειγμα που δείχνει πώς διαφοροποιούνται τα παιδιά ανάμεσα στο Επίπεδο 0 και Επίπεδο 1 είναι το εξης: Μαθητές του επιπέδου 0 συχνά έλεγαν ότι όλα αυτά τα σχήματα είναι τρίγωνα, εκτός από Ε, ή μπορεί να υποστήριζαν ότι το τρίγωνο F είναι "ανάποδα". Αντίθετα, οι μαθητές στο Επίπεδο 1 θα αναγνώριζαν ότι μόνο τα Ε και F είναι στην πραγματικότητα τρίγωνα.

(Πηγή:http://en.wikipedia.org/wiki/File:Van_Hiele_triangle_examples.png, τελευταία προσπέλαση: 01/02/2014)

Επίπεδο 2: Αφαίρεση

Στο 2ο επίπεδο, το αντικείμενο σκέψης των μαθητών είναι οι γεωμετρικές ιδιότητες των σχημάτων και το πώς σχετίζονται αυτές μεταξύ τους. Εδώ το παιδί αντιλαμβάνεται ότι ένα σύνολο ιδιοτήτων συνεπάγεται μια άλλη ιδιότητα. Επίσης, αναπτύσσει απλά επιχειρήματα και συλλογισμούς που τον οδηγούν σε συμπεράσματα. Για παράδειγμα, ένας μαθητής αυτού του επιπέδου μπορεί να συμπεράνει ότι αν ένα σχήμα είναι τετράγωνο θα είναι και ορθογώνιο, αλλά και ότι δεν είναι όλα τα ορθογώνια τετράγωνα. Ακόμη, μπορεί να καταλάβει ότι ένα σχήμα με τέσσερις ίσες πλευρές και μία τουλάχιστον ορθή γωνία είναι τετράγωνο.

Επίπεδο 3: Έπαγωγή

Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές περνάνε πέρα από τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες των σχημάτων και μαθαίνουν να σκέφτονται επαγωγικά. Μπορούν να βασίζονται σε θεωρήματα, αξιώματα και

ορισμούς ώστε να δημιουργούν αποδείξεις ή να εργάζονται με αφηρημένες προτάσεις και να βγάζουν συμπεράσματα βασιζόμενοι στη λογική και όχι στη διαίσθηση. Ένας μαθητής στο επίπεδο αυτό, κατανοεί για παράδειγμα ότι σε ένα παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοι διχοτομούνται όμως δεν αρκεί μόνο η άτυπη εξήγηση. Χρειάζεται να εργαστεί ώστε να το αποδείξει μαθηματικά με μια σειρά συλλογισμών.

Επίπεδο 4: Αυστηρότητα

Αυτό είναι το τελευταίο και το υψηλότερο επίπεδο σκέψης στην ιεραρχία των Van Hiele. Εδώ οι μαθητές μπορούν να μελετήσουν και να κατανοήσουν μη Ευκλείδεια Γεωμετρία. Μπορούν να δουλέψουν και σε άλλα αξιωματικά γεωμετρικά συστήματα και να προχωρήσουν ακόμα και σε συγκρίσεις και αντιπαραβολές μεταξύ τους.

Μέρος 3ο: «Εφαρμογές στη διδασκαλία»

Στην Πρωτοβάθμια εκπαίδευση, οι μαθητές θα πρέπει μέσα από τη διδασκαλία της Γεωμετρίας να προάγουν την ικανότητα της γεωμετρικής τους σκέψης από το Επίπεδο 0, στο Επίπεδο 1 ή 2. Μέσα από διάφορες γεωμετρικές δραστηριότητες και με την κατάλληλη παρότρυνση και καθοδήγηση από τον/την εκπαιδευτικό θα πρέπει τα παιδιά να ενθαρρύνονται ώστε να μπορέσουν να «περάσουν» στο επόμενο επίπεδο. Στη συνέχεια ακολουθεί ένα σχέδιο για τη διδασκαλία των γεωμετρικών σχημάτων στην Α' Δημοτικού. Το συγκεκριμένο κεφάλαιο εντάσσεται στην ενότητα των ΑΠΣ «Γεωμετρικά Σχήματα» και εξυπηρετεί τους παρακάτω στόχους:

- ✓ Να αναγνωρίζουν και να ονομάζουν οι μαθητές σωστά τα επίπεδα σχήματα (τρίγωνο, τετράγωνο, ορθογώνιο και κύκλος).
- ✓ Να αναγνωρίζουν και να ονομάζουν οι μαθητές σωστά τα στερεά σώματα (κύβος, σφαίρα, στερεό ορθογώνιο, κύλινδρος και τριγωνική πυραμίδα).
- ✓ Να συσχετίζουν τα δισδιάστατα σχήματα με τα αντίστοιχα γεωμετρικά στερεά.
- ✓ Να αναγνωρίζουν τη φόρμα των στερεών σωμάτων με αντικείμενα της καθημερινότητας.

- ✓ Να χαράζουν σε τετραγωνισμένο χαρτί τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα.
- ✓ Να τα ταξινομούν σύμφωνα με το είδος τους.
- ✓ Να αντιλαμβάνονται τα σχήματα με τις διάφορες αισθήσεις τους.
- ✓ Να αναπτυχθεί ένα ομαδοσυνεργατικό κλίμα στον τρόπο διδασκαλίας με σκοπό την ενεργό συμμετοχή, τον αναστοχασμό και την παρουσίαση πολλαπλών λύσεων.
- ✓ Να διασκεδάσουν οι μαθητές δραματοποιώντας ήρωες παραμυθιού, τραγουδώντας και γράφοντας ποιήματα με σκοπό να καλλιεργηθεί θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά αλλά και να εμπεδωθούν αβίαστα οι έννοιες που διδάχτηκαν.
- ✓ Να γίνει εξοικείωση με τους Η/Υ «ζωγραφίζοντας» τα στερεά και τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα.

Μέρος 4ο: «Ενδεικτικές διδακτικές οδηγίες και δραστηριότητες»

Προτεινόμενη εκπαιδευτική μέθοδος: Διερευνητική και ανακαλυπτική μάθηση

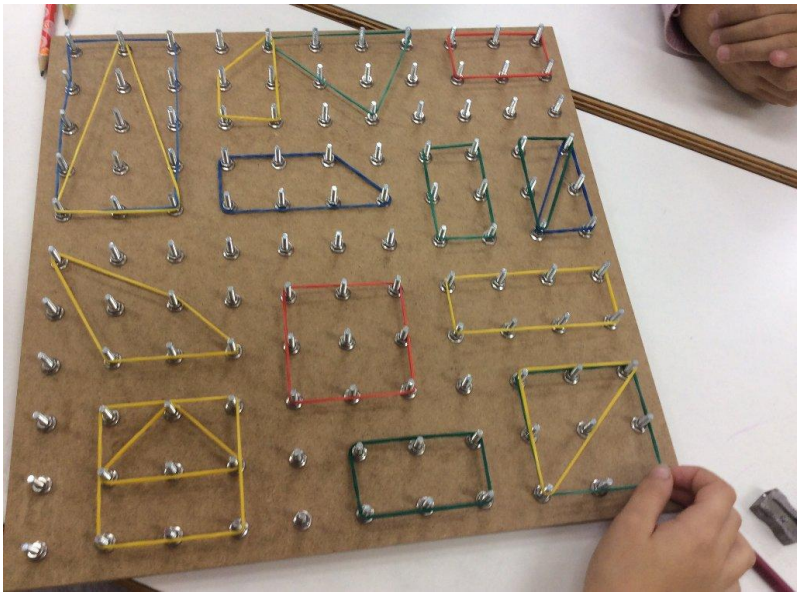
Εκτιμώμενη διάρκεια: 5-6 διδακτικές ώρες

Προαπαιτούμενη γνώση: Κατά τη διδασκαλία του συγκεκριμένου αντικειμένου αναμένεται οι μαθητές να έχουν διδαχτεί την αντίστοιχη ενότητα στο νηπιαγωγείο και ως εκ τούτου, να είναι ικανοί να αναγνωρίζουν τα γεωμετρικά σχήματα.

Δυσκολίες: Αναμένεται οι μαθητές να συναντήσουν δυσκολία στην αναγνώριση και ονομασία κάποιων στερεών γεωμετρικών σχημάτων, όπως για παράδειγμα μπορεί να μη γνωρίζουν τη λέξη κύβος ή για τα σχήματα που έχουν κάποια τετραγωνική μορφή, χρησιμοποιούν γενικά τον όρο τετράγωνο.

Διδακτικές ενέργειες:

1. Πραγματοποιούμε επίσκεψη σε κοντινό περιβάλλον του σχολείου, για να έρθουν οι μαθητές σε επαφή με διάφορα σχήματα που υπάρχουν στο χώρο, π.χ. σήματα τροχαίας, κάθισμα τραμπάλας, γύρω-γύρω όλοι κ.α.
2. Παρατήρηση αστείων προσώπων και αντιστοίχισή τους με γεωμετρικά σχήματα από τα οποία είναι φτιαγμένα και ταυτόχρονη συζήτηση για τα σχήματα και τις ιδιότητές τους(το κυκλικό μοιάζει με κεφάλι ανθρώπου, το τετράγωνο με κεφάλι ρομπότ).
3. Στο χώρο της τάξης αναγνωρίζουν και παίζουν με διάφορα αντικείμενα που έχουν γεωμετρικό σχήμα. Για παράδειγμα: τα κουτιά αποθήκευσης των καλλιτεχνικών τους και η κασετίνα τους έχουν σχήμα ορθογωνίου, το ρολόι του τοίχου έχει σχήμα κύκλου κτλ. Σε αυτό το σημείο να σημειωθεί ότι ένα πολύ καλό εργαλείο αποτελεί ο γεωπίνακας. Ένας πίνακας με πολλές σειρές από καρφάκια ή πινέζες. Τα παιδιά παίρνουν χρωματιστά λαστιχάκια και τα τοποθετούν όπως θέλουν στα καρφάκια αυτά ώστε να σχηματίσουν διάφορα σχήματα. Στη συνέχεια, καλούνται να αποτυπώσουν τα σχήματα του γεωπίνακα πάνω σε τετραγωνισμένο χαρτί.



(*πηγή: http://4.bp.blogspot.com/-EXkXJdn-fac/VGusqTzwdiI/AAAAAAAAIJM/39rez8GgJro/s1600/%C2%A1a%C2%BD%C2%AA%C3%9C%C2%BF%C3%BF%C2%A1s%C3%BF%2B5.jpg , τελευταία προσπέλαση 05/02/2015)*

4. Παιχνίδι – «Το χωριουδάκι των σχημάτων»: Εξηγούμε στους μαθητές, ότι θα φτιάξουμε ένα χωριό αποκλειστικά με σχήματα. Μοιράζουμε κόλλες χρωματιστές στις οποίες έχουμε σχεδιάσει εκ των προτέρων διάφορα σχήματα και καλούμε τα παιδιά να τα κόψουν. Με τα σχήματα αυτά φτιάχνουμε σπιτάκια, δέντρα, λουλούδια , ανθρωπάκια και συμπληρώνουμε το κολάζ δημιουργώντας ένα χωριό. Στη συνέχεια οι μαθητές χωρίζονται σε ομάδες και ένας από κάθε ομάδα κρατάει στα χέρια του ένα ξύλινο στερεό γεωμετρικό σχήμα, από αυτά που έχουμε στην τάξη και λέει: -Περπατάω στο χωριουδάκι κρατώντας έναν… (π.χ. κύβο). Αν το παιδί γνωρίζει τον όρο θα τον ονομάσει. Διαφορετικά ο δάσκαλος εισάγει την έννοια του κύβου για το στερεό σχήμα. Μετά ζητάμε από το παιδί να αντιστοιχίσει στο στερεό που κρατάει στα χέρια του με ένα από τα γεωμετρικά σχήματα του κολάζ. Το ίδιο κάνουμε με όλα τα γεωμετρικά στερεά και με αυτόν τον τρόπο τα παιδία αντιστοιχίζουν, παίζοντας ,τα στερεά με τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα, ενώ περνούν αβίαστα οι έννοιες: κύβος, στερεό ορθογώνιο, σφαίρα, κύλινδρος και τριγωνική πυραμίδα.

5. Τα παιδιά ταξινομούν γεωμετρικά σχήματα ως προς το σχήμα και το μέγεθος. Παίζουν το παιχνίδι «Τα σχήματα μπερδεύτηκαν!». Σε αυτό χωρίζονται σε δύο ομάδες και στην καθεμία δίνεται ένας μικρός σάκος. Ο κάθε σάκος περιέχει ανακατεμένα γεωμετρικά στερεά και επίπεδα σχήματα σε διάφορα μεγέθη και η κάθε ομάδα καλείται να τα ξεχωρίσει αρχικά σε στερεά σώματα και επίπεδα σχήματα. Μετά, θα πρέπει να τα χωρίσει σε ομάδες με βάση το είδος τους (π.χ. όλες οι πυραμίδες μαζί, όλα τα τρίγωνα μαζί κτλ.). Νικήτρια είναι η ομάδα που θα τελειώσει πρώτη και σωστά.

6. Δείχνουμε στους μαθητές τα στερεά σχήματα ή και άλλα αντικείμενα που έχουν στερεό σχήμα και τους τα δίνουμε να τα επεξεργαστούν και να τα ονομάσουν. Τα αγγίζουν, πιάνουν τις γωνίες τους, τις καμπυλότητές τους, βλέπουν ποια στέκονται, ποια κυλούν κτλ.

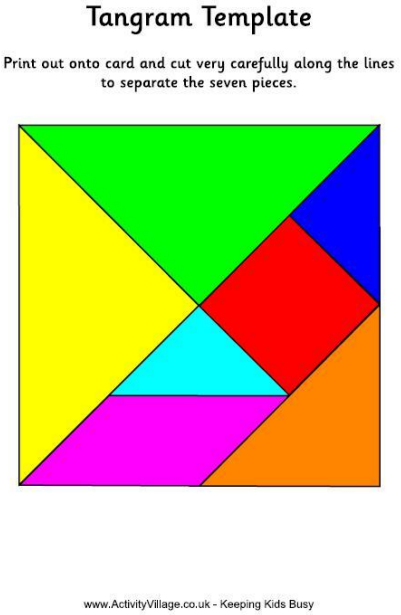
7. Οι μαθητές παίζουν το παιχνίδι «Οι φωλιές των σχημάτων». Ο εκπαιδευτικός δίνει από ένα σχήμα από χαρτόνι σε κάθε παιδί και στη συνέχεια στο χώρο της αυλής ζωγραφίζει με κιμωλία τα αντίστοιχα σχήματα-φωλιές. Με το που θα δοθεί το σύνθημα τα παιδιά πρέπει να τρέξουν και να μπουν στη σωστή «φωλιά» ανάλογα με στο σχήμα που έχουν στη μπλούζα τους. Νικήτρια είναι η φωλιά που θα μαζέψει πρώτη όλα της τα σχήματα σωστά. Το ίδιο παιχνίδι μπορούμε να επαναλάβουμε και με τα αντίστοιχα γεωμετρικά στερεά.

8. Στην ώρα της φιλαναγνωσίας διαβάζουμε το παραμύθι «Ο Τριγωνούλης και η Στρογγυλένια» και στη συνέχεια το δραματοποιούμε με τα παιδιά μέσα στην τάξη, δημιουργώντας έτσι μια ευχάριστη και διασκεδαστική ατμόσφαιρα. Επίσης, στην ώρα της Γλώσσας τα παιδιά μαζί με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού μπορούν να γράψουν δίνοντας διάφορες δικές τους ιδέες ένα ποίημα με θέμα τα σχήματα. Στη συνέχεια, στην ώρα της μουσικής οι μαθητές με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού μπορούν να μελοποιήσουν ή να δώσουν ρυθμό στο ποίημα που έφτιαξαν.

9. Οι μαθητές πηγαίνουν στο εργαστήριο πληροφορικής του σχολείου και δουλεύουν ανά δύο στους υπολογιστές. Στο πρόγραμμα της ζωγραφικής μπορούν να ζωγραφίσουν σχήματα στερεά και επίπεδα και να τα χρωματίσουν όπως θέλουν.

10. Χρωματισμός όμοιων γεωμετρικών σχημάτων σε ένα παζλ που κατασκευάζουν οι μαθητές μέσα στην τάξη.

11. Δημιουργία διάφορων κατασκευών με σχήματα στην ώρα των καλλιτεχνικών, π.χ. με τη χρήση tangram και άλλων απλών υλικών (χαρτόνια, τέμπερες, χαρτοταινία κ.α.). Πιο αναλυτικά, φαίνονται στις παρακάτω εικόνες ορμισμένες κατασκευές που είναι εύκολες να γίνουν μέσα στην τάξη και αρκετά διασκεδαστικές για τα παιδιά. Φυσικά, οι κατασκευές αυτές είναι πάρα πολλές και μια πολύ καλή πηγή έμπνευσης είναι το διαδίκτυο.



(Πηγή: http://en.paperblog.com/tangram-puzzles-to-print-seven-pieces-of-cleverness-wwwactivityvillagecouk-49514/ , τελευταία προσπέλαση: 06/02/2015)

Παράρτημα Α

Παρακάτω παραθέτουμε ενδεικτικά το παραμύθι «Ο Τριγωνούλης και η Στρογγυλένια» και το ποίημα «Η παρέα των σχημάτων» που θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν στην ώρα της Γλώσσας και της Φιλαναγνωσίας.

Ο Τριγωνούλης και η Στρογγυλένια

Ήταν Σάββατο πρωί και ο Τριγωνούλης ξεκίνησε να πάει στο σπίτι της φίλης του της Στρογγυλένιας που ήταν άρρωστη και δεν είχε έρθει στο σχολείο. Ήθελε να της ευχηθεί περαστικά και να της δώσει τα μαθήματα.

Άνοιξε σιγά-σιγά την τριγωνική εξώπορτα του σπιτιού του για να μην ξυπνήσει τους γονείς του. Όμως η μητέρα του είχε ξυπνήσει και είχε βγει στο παράθυρο φωνάζοντας στο γιο της:

- Πού πας Τριγωνούλη μου πρωί-πρωί; Σήμερα είναι Σάββατο, δεν έχεις σχολείο, το ξέχασες;
- Όχι μαμά, δεν το ξέχασα, μα θέλω να πάω στη φίλη μου τη Στρογγυλένια που ήταν άρρωστη και θέλω να της δώσω τα μαθήματα. Μου το ζήτησε και η δασκάλα!
- Καλά, όμως πρόσεχε μη χάσεις πάλι το δρόμο σου. Ξέρεις πώς θα πας στης Στρογγυλένιας;
- Ναι ναι, μην ανησυχείς! Μόλις βγω από το δικό μας δρόμο με τα τρίγωνα βοτσαλάκια, θα πάω δεξιά, στο δρόμο με τα στρόγγυλα βοτσαλάκια και μόλις φτάσω στο πρώτο σπίτι με τα στρόγγυλα παράθυρα, εκεί θα είναι η φίλη μου.

Έτσι ο Τριγωνούλης χαιρέτισε όλο χαρά τη μητέρα του και πήρε την κατηφόρα χοροπηδώντας πάνω στα τρίγωνα βοτσαλάκια. Πριν προλάβει όμως να στρίψει δεξιά για το δρόμο της Στρογγυλένια, να σου μπροστά του ένας κλόουν με φανταχτερά ρούχα και μαλλιά.

- Καλημέρα Τριγωνούλη, του είπε χαμογελώντας.
- Καλημέρα, είπε ο Τριγωνούλης. Πώς ξέρεις το όνομά μου; Ποιος σου το είπε;
- Μα δε χρειάζεται να μου το πει κανείς! Όλα πάνω σου είναι τριγωνικά. Το καπέλο σου, τα χέρια σου, η μύτη σου, ακόμα και τα μαλλιά σου είναι κουρεμένα τριγωνικά. Σε πληροφορώ πως δε δυσκολεύτηκα καθόλου να προσαρμοστώ στο χωριό σας. Όλα είναι τόσο αρμονικά και ταιριασμένα που χαίρεσαι να περπατάς. Κάθε γειτονιά έχει το δικό της σχήμα στα σπίτια, τους δρόμους και τους ανθρώπους. Τώρα θα πάω στη γειτονιά των τετραγώνων, στην τετραγωνογειτονιά. Θέλεις να έρθεις μαζί μου; Έχω ραντεβού με τους Τετραγωνούληδες. Θα τους παίξω κουκλοθέατρο και έχω ανάγκη από έναν καλό βοηθό.
- Με μεγάλη μου χαρά θα ερχόμουν κύριε κλόουν. Μ' αρέσει πολύ το κουκλοθέατρο και θέλω να γνωρίσω από κοντά τους Τετραγωνούληδες. Έχω ακούσει πως είναι όλοι τους καλόκαρδοι, χαρούμενοι και απ' όποια μεριά και αν τους κοιτάξεις είναι ίδιοι. Όμως, πρέπει πρώτα να επισκεφτώ τη φίλη μου τη Στρογγυλένια.

Θέλω να της δώσω τα μαθήματά της και να της ευχηθώ περαστικά, γιατί ήταν άρρωστη.

- Κανένα πρόβλημα Τριγωνούλη, θα πάμε μαζί στη φίλη σου! Μ' αρέσει η γειτονιά της γιατί εκεί είναι στρόγγυλα σαν τον ήλιο. Θέλω εξάλλου να αγοράσω και μερικά μπαλάκια που μου χρειάζονται για την παράσταση. Έχω ακούσει πως εκεί φτιάχνουν τις καλύτερες μπάλες!

Χωρίς να χάσουν καιρό τότε, πήραν μαζί το δρόμο γ ια το σπίτι της Στρογγυλένιας. Σαν έφτασαν εκεί, χτύπησαν δυνατά ένα στρόγγυλο κουδούνι που ήταν κρεμασμένο στην πόρτα και αμέσως τους άνοιξε μια στρουμπουλή κυρία που τους υποδέχτηκε με χαρά. Ήταν η μητέρα της Στρογγυλένιας.

- Έλα Τριγωνούλη, η κόρη μου σε περιμένει. Έκανες καλά που έφερες και το φίλο σου μαζί. Η Στρογγυλένια μου θα χαρεί πολύ όταν σας δει. Περάστε στο σαλόνι.

Τη στιγμή εκείνη, βγήκε από το δωμάτιό της και η Στρογγυλένια. Όμορφη και γελαστή με τα ολοστρόγγυλα ροζ μαγουλάκια της έτρεξε, άνοιξε τα χέρια της και αγκάλιασε το φίλο της. Έπειτα, γύρισε στον κλόουν και του είπε:

- Κύριε κλόουν, δε σε έχω δει στα μέρη μας άλλη φορά. Αφού όμως είσαι παρέα με τον Τριγωνούλη, είσαι και δικός μου φίλος. Καλώς ήρθες!

Έτσι, μιλώντας, γελώντας και πίνοντας χυμό που έφτιαξε η μαμά της Στρογγυλένιας από τα μυρωδάτα ολοστρόγγυλα πορτοκάλια του κήπου τους, πέρασε η ώρα και αποφάσισαν να πάνε και οι τρεις μαζί στη γειτονιά των Τετραγωνούληδων και να βοηθήσουν τον κλόουν στην παράσταση που θα έδινε. Αφού αγόρασαν και τις μπάλες που ήθελαν, περπάτησαν λίγη ώρα και έφτασαν μπροστά σε ένα τετράγωνο σιντριβάνι που πετούσε ψηλά τα νερά του.

- Φτάσαμε στη γειτονιά των Τετραγωνούληδων φίλοι μου, είπε ο κλόουν. Περιμένετε εδώ, πάω να τους ειδοποιήσω ότι φτάσαμε.

Ο Τριγωνούλης και η Στρογγυλένια μαγεύτηκαν από τα νερά του σιντριβανιού που πεταγόταν ψηλά με τόση δύναμη. Άρχισαν τότε να τρέχουν γύρω-γύρω από το σιντριβάνι και μια στιγμή η

Στρογγυλένια ανέβηκε πάνω στο τετράγωνο τοιχάκι του. Ζαλίστηκε όμως και χωρίς να το καταλάβει παραπάτησε και έπεσε μέσα στο νερό.

- Βοήθεια! Βοήθεια Τριγωνούλη πνίγομαι!

Άρχισε να φωνάζει και να χτυπά τα χέρια και τα πόδια της για να κρατηθεί στην επιφάνεια του νερού. Όμως το νερό που έπεφτε με τόση δύναμη από πάνω της την έσπρωχνε συνέχεια προς τον πάτο του σιντριβανιού. Τότε ο Τριγωνούλης όταν είδε ότι η φίλη του κινδύνευε να πνιγεί και κανένας δεν ήταν εκεί για να τους βοηθήσει, πήρε αγκαλιά μια από τις χρωματιστές μπάλες που μόλις είχε αγοράσει και έπεσε και αυτός με ορμή στο νερό.

- Κουράγιο στρογγυλένια! Θα σε σώσω μη φοβάσαι της έλεγε, όμως μέσα του και ο ίδιος φοβόταν και ήξερε πως ήταν πολύ δύσκολο να βγουν από το μεγάλο σιντριβάνι μόνοι τους αφού τα τετράγωνα τοιχώματα ήταν πολύ ψηλά γι αυτούς.

Κρατώντας αγκαλιά τη μπάλα και κολυμπώντας έφτασε κοντά στη φίλη του που κόντευε σχεδόν να φτάσει στον πάτο. Την άρπαξε με δύναμη από τα κοτσιδάκια της την ανέβασε στην επιφάνεια και την έβγαλε να κρατηθεί και αυτή από τη μπάλα. Έτσι, κουνώντας τα πόδια τους και τα δύο παιδιά κατάφεραν να μην παρασύρονται από το νερό και παίρνοντας θάρρος ο ένας από τον άλλο έλεγαν:

- Κουράγιο! Θα έρθουν και θα μας σώσουν! Δε θα πνιγούμε, θα τα καταφέρουμε!

Τότε το πράσινο βατραχάκι που καθόταν πάνω στο τοιχάκι του σιντριβανιού και παρακολουθούσε την αγωνία και την προσπάθεια των παιδιών άρχισε να φωνάζει δυνατά παρακινώντας και τα υπόλοιπα βατραχάκια που ήταν εκεί κοντά. Κουάξ! Κουάξ! Κουάξ!

Μόλις άκουσαν οι Τετραγωνούληδες ξαφνικά τις φωνές των βατράχων, έτρεξαν να δουν τι συμβαίνει και βρέθηκαν μπροστά στα δυο παιδιά που είχαν πια κουραστεί και κόντευαν να βουλιάξουν στον πάτο. Αμέσως, δύο από τους πιο γεροδεμένους όρμησαν στο σιντριβάνι και έβγαλαν τους δύο φίλους μουσκεμένους και μισολιπόθυμους. Τους τύλιξαν με ζεστές κουβέρτες και τους μετέφεραν στο πιο κοντινό τετραγωνόσπιτο. Εκεί, αφού τους

περιποιήθηκαν ως το μεσημέρι, το απόγευμα ήταν και οι δύο έτοιμοι να βοηθήσουν το φίλο τους. Η παράσταση είχε μεγάλη επιτυχία και όλοι οι θεατές καταχειροκρότησαν τον κλόουν και τους βοηθούς του που ήταν υπέροχοι!

Η παρέα των σχημάτων

Τρι-τρι-τρι το τριγωνάκι
πάει και βρίσκει το πουλάκι.

Τσίου τσίου το πουλάκι
τρι-τρι-τρι το τριγωνάκι
κατεβαίνουν το δρομάκι.

Έχουν δρόμο όμως πολύ
για να φτάσουν στην αυλή,
που ‘χει δέντρα διαλεχτά
κι όλο φρούτα ζουμερά.

Να στην άκρη κι ένας κύκλος
που τον είχε πάρει ο ύπνος.
Τους περίμενε από ώρα,
όμως να, θα πάρει φόρα!

Γεια χαρά σου φιλαράκι,
λέει το μικρό πουλάκι.
Γεια σας φίλοι μου καλοί,

μα ας μη χάνουμε στιγμή!

Τρι-τρι-τρι το τριγωνάκι
τσίου τσίου το πουλάκι
κύκλο κύκλο το κυκλάκι
κατεβαίνουν το δρομάκι.

Μα από τη μεγάλη φόρα,
πήρανε την κατηφόρα!
Και αντί για την αυλή,
σταματούν στην κουπαστή.

Στη μικρή την κουπαστή
του παραθυριού της Λίτσας,
της μικρής Τετραγωνίτσας.

Για σταθείτε βρε παιδιά,
λέει η Λίτσα γελαστά.
Με φοβίσατε λιγάκι
με την τόση σας τη βιάση!

Πάμε τώρα, χωρίς φόρα,
γιατί περιμένει η Δώρα,
που τα ‘χει οργανώσει όλα:
το χορό και τα τραγούδια
στην αυλή με τα λουλούδια!

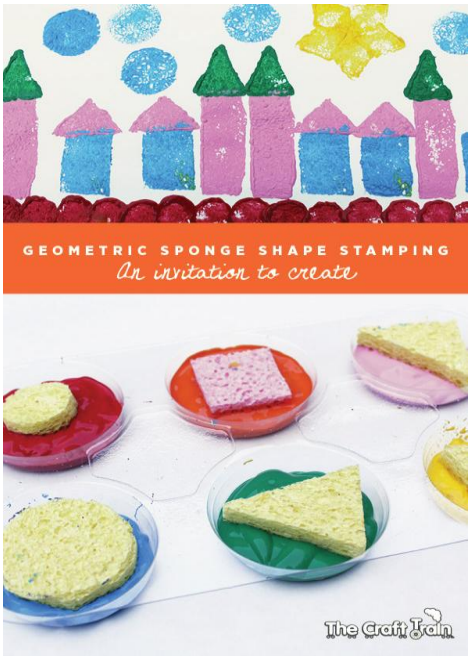
Παράρτημα Β

Στο σημείο αυτό παρουσιάζουμε ορισμένες ενδεικτικές δραστηριότητες που θα μπορούσε να παρουσιάσει ο εκπαιδευτικός στην ώρα των καλλιτεχνικών δημιουργώντας διάφορες κατασκευές με σχήματα.

i. Τα παιδιά κόβουν προσεκτικά και με τη βοήθεια του δασκάλου τα σχήματα του tangram και στη συνέχεια καλούνται να φτιάξουν ένα δικό τους ζωάκι ή να άλλο σχήμα. Εναλλακτικά, μπορούν να αντιγράψουν ένα έτοιμο σχήμα που θα διαθέτει ο δάσκαλος. Έτσι για παράδειγμα μπορεί να έχει το εξής αποτέλεσμα:

(Πηγή: https://gr.pinterest.com/pin/506655645305899 36/ , τελευταία προσπέλαση: 08/02/2015)

ii. Μια άλλη πρόταση είναι η κατασκευή ζωγραφιάς με σφουγγάρια κομμένα σε γεωμετρικά σχήματα και τέμπερες. Το αποτέλεσμα θα μπορούσε να είναι αυτό:



(Πηγή: http://www.thecrafttrain.com/1/post/2014/06/geometric-shape-stamping-an-invitation-to-create.html , τελευταία προσπέλαση: 07/02/2015)

iii. Κατασκευή μιας εικόνας-κολάζ από μικρά και ίδια μεταξύ τους τρίγωνα (χρωματιστά ή από άλλα υλικά όπως εφημερίδες, περιοδικά κ.α.) ή άλλα σχήματα. Η εικόνα αυτή θα μπορούσε να γίνει και διακοσμητική κορνίζα για το δωμάτιο. Μερικά παραδείγματα αυτής της τεχνική είναι τα εξής:

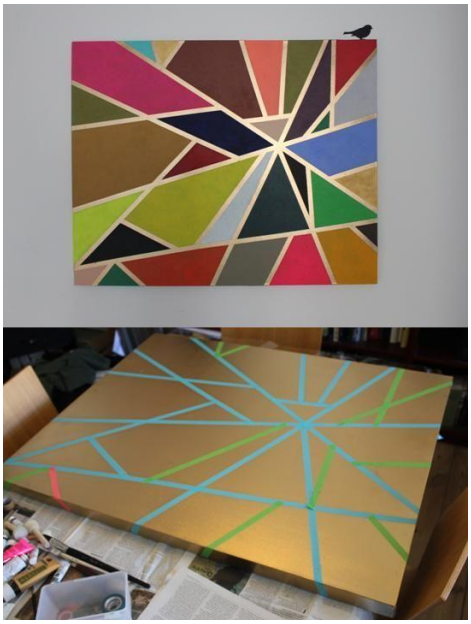
(Πηγή: http://howaboutorange.blogspot.gr/2011/07/how-to-make-easy-paint-chip-wall-art.html , τελευταία προσπέλαση: 30/01/2014)

(Πηγή: http://www.brit.co/picks/geometric-photo-art-that-looks-good-at-every-angle/?utm_campaign=pinbutton_hover , τελευταία προσπέλαση: 29/01/2015)

iv. Κατασκευή κολάζ ή ζωγραφιάς από γεωμετρικά σχήματα του ίδιου είδους και με διάφορα χρώματα. Μερικά παραδείγματα είναι τα παρακάτω:

(Πηγή: http://parentables.howstuffworks.com/slideshows/nesting/11-colorful-and-clever-ideas-using-paint-chips/page/9/ , τελευταία προσπέλαση: 30/01/2015)

v. Τέλος, μια άλλη ιδέα είναι η κατασκευή ζωγραφιάς με διάφορα τυχαία γεωμετρικά σχήματα και με τη χρήση τέμπερας και χαρτοταινίας. Τα παιδιά εργάζονται μόνα τους ή σε ζευγάρια και κολλάνε κομμάτια χαρτοταινίας σε ένα σκληρό χαρτόνι ή ακόμα καλύτερα σε καμβά και στη συνέχεια ζωγραφίζουν με χρώματα της αρεσκείας τους τα σχήματα που δημιουργούνται. Αφού οι μπογιά στεγνώσει τα παιδιά αφαιρούν προσεκτικά τη χαρτοταινία και το αποτέλεσμα που μένει είναι το εξής:



(Πηγή: http://mariateorien.blogspot.dk/2012/06/tape-painting.html , τελευταία προσπέλαση: 28/01/2014)

Βιβλιογραφία

Βιβλίο του Δασκάλου Α' και Β' Δημοτικού

Μαθηματικά Α' τάξης, Βιβλίο Μαθητή

Μαθηματικά Α' τάξης, Τετράδιο Εργασιών

Ανθουλιάς, Τ. (1989) *Η διδασκαλία της γεωμετρίας στο δημοτικό σχολείο με τη γλώσσα Logo,* Gutenberg - Γιώργος & Κώστας Δαρδανός

Burger, J. Shaughnessy, M. *(1986)* Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry, *Journal for Research in Mathematics Education, National Council of Teachers of Mathematics*

Mayberry, J. (1983) *The Van Hiele Levels of Geometric Thought in Undergraduate Preservice Teachers,* Journal for Research in Mathematics Education, National Council of Teachers of Mathematics

Teppo, A. (1991) *Van Hiele Levels of Geometric Thought Revisited,* The Mathematics Teacher, National Council of Teachers of Mathematics

Van de Walle, J. (2005) *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο. Μια εξελικτική διαδικασία,* Αθήνα, Τυπωθήτω-Γιώργος Δαρδανός

Gujarati, J. Ed.D. (2014) *Examining the van Hiele Theory: Strategies to Develop Geometric Thought,* (Διαθέσιμο στο: http://www.ldworldwide.org/educators/strategies-for-successful-learning/1110-examining-the-van-hiele-theory-strategies-to-develop-geometric-thought-?format=pdf, τελευταία προσπέλαση: 02/02/2015)

http://www.math.uoc.gr/~chrisk/GeomEd/geometry-2.pdf (τελευταία προσπέλαση 08/02/2015)

http://www.math.uoc.gr/~chrisk/GeomEd/geometry-3.pdf (τελευταία προσπέλαση 08/02/2015)

http://4.bp.blogspot.com/-EXkXJdn-fac/VGusqTzwdiI/AAAAAAAAIJM/39rez8GgJro/s1600/%C2%A1a%C2%BD%C2%AA%C3%9C%C2%BF%C3%BF%C2%A1s%C3%BF%2B5.jpg (τελευταία προσπέλαση 05/02/2015)

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Van_Hiele_triangle_examples.png, (τελευταία προσπέλαση: 01/02/2014)

http://en.paperblog.com/tangram-puzzles-to-print-seven-pieces-of-cleverness-wwwactivityvillagecouk-49514/ (τελευταία προσπέλαση: 06/02/2015)

https://gr.pinterest.com/pin/50665564530589936/ (τελευταία προσπέλαση: 08/02/2015)

http://www.thecrafttrain.com/1/post/2014/06/geometric-shape-stamping-an-invitation-to-create.html (τελευταία προσπέλαση: 07/02/2015)

http://howaboutorange.blogspot.gr/2011/07/how-to-make-easy-paint-chip-wall-art.html (τελευταία προσπέλαση: 30/01/2014)

http://www.brit.co/picks/geometric-photo-art-that-looks-good-at-every-angle/?utm_campaign=pinbutton_hover (τελευταία προσπέλαση: 29/01/2015)

http://parentables.howstuffworks.com/slideshows/nesting/11-colorful-and-clever-ideas-using-paint-chips/page/9/ (τελευταία προσπέλαση: 30/01/2015)

http://mariateorien.blogspot.dk/2012/06/tape-painting.html (τελευταία προσπέλαση: 28/01/2014)

paraskevilamp@gmail.com

kelly_ntasiou@hotmail.com

Η ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΛΑΤΩΝΙΚΟΥ ΜΥΘΟΥ ΤΟΥ ΣΠΗΛΑΙΟΥ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ.

Άρης Μαυρομμάτης[1], Αντώνης Νανάς[2], Κούλα Πανάγου[3], Ελένη Καμάρα[4]

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εισήγηση αποτελεί μια πρόταση ανάπτυξης δραστηριότητας για το πώς μπορεί να δημιουργηθεί ένα περιβάλλον, μέσα στο οποίο τα μικρά παιδιά της Νηπιακής ηλικίας, θα κάνουν τα πρώτα τους βήματα για την αναζήτηση και ανακάλυψη σχέσεων μεταξύ των γεωμετρικών στερεών και των προβολών (σκιών) τους στο επίπεδο. Ακόμα να ταξινομήσουν τις προβολές αυτές, σε προβολές (σκιές) που ορίζουν γνωστά γεωμετρικά σχήματα (αναγνώριση γεωμετρικού σχήματος) και σε προβολές που τα σχήματά τους είναι άγνωστα. Κατόπιν να προβούν στην αναζήτηση των βασικών γεωμετρικών στοιχείων των σχημάτων που αναγνώρισαν και τέλος μέσω αυτών να οδηγηθούν στην διατύπωση ενός ορισμού τους (κατανόηση γεωμετρικού σχήματος). Επιπλέον να προβληματιστούν πάνω στο ερώτημα αν από τη σκιά ενός στερεού αντικειμένου μπορούμε με βεβαιότητα να αναγνωρίσουμε το ίδιο το αντικείμενο όταν αυτό δεν είναι άμεσα ορατό.Τέλος μέσα από τη δραστηριότητα αυτή στοχεύουμε εκτός των άλλων, στον βαθμό που αυτό είναι εφικτό,

[1] Άρης Μαυρομμάτης, Μαθηματικός, επιστημονικός σύμβουλος του Μουσείου Ηρακλειδών, Διδάσκων στο Δια Βίου Πρόγραμμα του Τμήματος Εικαστικών και Εφαρμοσμένων Τεχνών του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας, amavromatis@rhodes.aegean.gr

[2]Αντώνης Νανάς, Νηπιαγωγός Νηπιαγωγείο «Καραμέλα», caramela.ath@gmail.com

[3]Κούλα Πανάγου, Νηπιαγωγός Νηπιαγωγείο «Καραμέλα», caramela.ath@gmail.com

[4]Ελένη Καμάρα, Νηπιαγωγός Νηπιαγωγείο «Καραμέλα», caramela.ath@gmail.com

διατηρώντας την ουσία του περιεχομένου του κειμένου, να αναδείξουμε ένα σπουδαίο έργο της αρχαίας ελληνικής γραμματείας τον διάλογο της Πλατωνικής «Πολιτείας».

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σύμφωνα με τον A. DeMorgan, κινητήρια δύναμη της μαθηματικής ανακάλυψης δεν είναι η λογική, αλλά η φαντασία (MorrisKline,1981), και η παιδική φαντασία είναι το περιβάλλον μέσα στο οποίο το ίδιο το παιδί, αναπτύσσει τη δημιουργικότητά του, συνθέτει τους κώδικές του, συγκροτεί τις ενσυνείδητες λογικές δομές του, ανακαλύπτει τον χώρο του, τόσο με την έννοια την ψυχοφυσιολογική, όσο και με την έννοια τη γεωμετρική. Ένα σπουδαίο «εργαλείο» ανάπτυξης της παιδικής φαντασίας είναι οι Μύθοι και τα Παραμύθια.

Η παιδικότητα είναι συνυφασμένη με το μαγικό, το άρρητο και το υπερφυσικό. Είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τον μύθο, τον ανθρωπομορφισμό και τον ανιμισμό, με άλλα λόγια με την παρηγορητική αφήγηση - το παραμύθι. Η ίδια η λογική αναπτύσσεται ως αντιπαραβολή προς το φανταστικό και χωρίς αυτό μένει κενό γράμμα και οικοδόμημα δίχως στέρεες ρίζες.

(http://epapanis.blogspot.gr/2011/07/blog-post.html)

Το παραμύθι είναι ένα ισχυρό διδακτικό μέσο μορφωτικών, πνευματικών και ηθικών αξιών, γιατί το παραμύθι ενδυναμώνει την παιδική φαντασία και της επιτρέπει να ζει διαχρονικά και να διαδίδεται μέσα στους αιώνες από γενιά σε γενιά και από τόπο σε τόπο (Bettelheim, B. 1995).

Ο Μύθος του Σπηλαίου από τον διάλογο της Πλατωνικής Πολιτείας, φέρνει τα μικρά παιδιά αντιμέτωπα με το φως του ήλιου και το φανταστικό περιβάλλον της υπόγειας σπηλιάς, όπως επίσης με τα αντικείμενα και τις σκοτεινές σκιές τους στον τοίχο της σπηλιάς, ως μια αντιπαράθεση της αλήθειας και του ψέματος.Μέσα απ' αυτή την αντιπαράθεση αναδεικνύονται προβληματισμοί κοινωνικοί και γεωμετρικοί, ενώ συγχρόνως τα παιδιά γνωρίζουν ένα μεγάλο φιλοσοφικό έργο.

Όταν ο μύθος συνδυαστεί με το παιχνίδι, τότε η φαντασία συνδυάζεται με τη έρευνα και τα δυο μαζί συμβάλλουν αποτελεσματικότερα στην παιδική μάθηση και ανάπτυξη.

Διεθνείς έρευνες υποστηρίζουν τη συνεισφορά των παιχνιδιών στη μάθηση των μαθηματικών, ως προς το κίνητρο που προσφέρουν και ως προς τη μαθησιακή πρόοδο που λαμβάνει χώρα (Tapson, 1997- Szendrei, 1996- Αυγητίδου, 2001- Wood&Bennett, 2001- Ρεκαλίδου, 2004).

Το παιχνίδι θεωρείται ως η βάση των προγραμμάτων στα πρώτα χρόνια της εκπαίδευσης του παιδιού. Ερευνητικές επισκοπήσεις υποδηλώνουν ότι το παιχνίδι πράγματι συμβάλλει από κάθε άποψη στην παιδική μάθηση και ανάπτυξη, αλλά αυτό εξαρτάται από το εκπαιδευτικό πλαίσιο μέσα στο οποίο λαμβάνει χώρα (Wood&Bennett, 2001).

Στις ψυχολογικές θεωρίες: Το παιδί αντιμετωπίζεται ως μικρός επιστήμονας που μέσω του παιχνιδιού, πειραματίζεται τον κόσμο και κατασκευάζει με αυτό τον τρόπο τη νοημοσύνη του(Piaget).

Έρευνες που έχουν γίνει κατά καιρούς (Ernest, 1986- Marland, 1986- Williams, 1986- Barta&Schaelling, 1998- Ceglowski, 1997- Ascher, 2001- Smith, 2001) δείχνουν ότι το παιχνίδι είναι ένας από τους αποτελεσματικούς τρόπους για τη διδασκαλία των μαθηματικών και για την ανάπτυξη της επιθυμίας των μαθητών για μάθηση καθώς και για την επίτευξη των μαθηματικών στόχων που έχουν τεθεί με βάση τις δυνατότητες της προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας.

Ένα μεγάλο πλήθος προβληματισμών αναπτύσσεται σ' ένα παιδί όταν αυτό παρατηρεί το εαυτό του και το πλησιέστερο σ' αυτό χωρικό περιβάλλον. Η σκιά (προβολή) που δημιουργεί το σώμα μας είτε αυτή είναι συνδεδεμένη με το σώμα μας (προσαρτημένη) είτε εμφανίζεται σε μια επιφάνεια απέναντι από εμάς οπότε είναι ασύνδετη με το σώμα μας (επιρριπτόμενη), δημιουργεί ένα έντονο φαινόμενο παρατήρησης και προβληματισμού.

Προβληματισμοί τέτοιου είδους είναι οι ακόλουθοι: Πώς δημιουργείται η σκιά ενός αντικειμένου;Το ίδιο αντικείμενο μπορεί να δημιουργήσει διαφορετικές μορφές σκιών; Αν ναι, τότε πού οφείλεται η διαφορετικότητα;Μπορούμε από τη σκιά ενός αντικειμένου να

γνωρίσουμε το ίδιο το αντικείμενο;Θα μπορούσε να επικοινωνήσει ο τρισδιάστατος κόσμος των στερεών αντικειμένων με τον δισδιάστατο κόσμο των σκιών τους, χωρίς να υπάρχει απώλεια πληροφοριών; Οι απαντήσεις στα ερωτήματα αυτά θα αναζητηθούν προφανώς στο πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Είναι σε θέση τα παιδιά της νηπιακής ηλικίας να διεισδύσουν σε τέτοια ερωτήματα;

Σύμφωνα με τους (Piaget και Inhelder,1956) η ανάπτυξη των προβολικών ιδιοτήτων στα παιδιά αρχίζει από την ηλικία των 4 ετών με τρόπο ασυνεπήμε την οικοδόμηση της προβολικής ευθείας, ενώ έχει διαπιστωθεί ερευνητικά (Πούλος, 1994) ότι με την κατάλληλη διδακτική παρέμβαση μπορεί να τεθούν οι βάσεις για την εμφάνιση και την ενίσχυση των πρώτων προβολικών εννοιών και αντιλήψεων σε παιδιά προσχολικής εκπαίδευσης.

Τέλος η σχέση ενός στερεού αντικειμένου και της προβολής (σκιάς) του, δημιουργεί πρόκληση σ' ένα παιδί. Σύμφωνα με τον (Freudenthal,1983)τα παιδιά χρειάζεται να ξεκινούν από τη διαχείριση και μελέτη αντικειμένων, η οποία αρχικά έχει χαρακτήρα πρακτικών χειρισμών. Στη συνέχεια η μελέτη αυτή πρέπει να οδηγεί τα παιδιά στον μετασχηματισμό αυτών των αισθητών αντικειμένων σε νοερά αντικείμενα, όπως για παράδειγμα τα γεωμετρικά σχήματα και στη διατύπωση ενός ακριβούς γεωμετρικού ορισμού τους.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

Ο ανθρώπινος νους για πολλές χιλιετηρίδες προχωρούσε με μόνο οδηγό το *αισθητό* και ικανοποιούσε την περιέργειά του μόνο με ό,τι προέκυπτε από την *επαλήθευση.* Αυτή η μορφή της διανοητικής δραστηριότητας όπως επίσης και η γνώση που αποκτήθηκε με το πέρασμα του χρόνου, δυνάμωσε το πνεύμα του και τον έκανε ικανό να αντιλαμβάνεται σε μεγαλύτερη έκταση τα πράγματα που βρίσκονταν γύρω του. Ωστόσο όμως τον διατηρούσε δέσμιο της εμπειρίας του αισθητού και ωσεκ τούτου, τον καταδίκαζε να κινείται πάντοτε στους στενούς ορίζοντες και την περιπτωσιολογία της εμπειρικής γνώσης.

Τον 6ο αιώνα π. Χ. ο Θαλής ο Μιλήσιος εισάγει την «Υπόθεση» και τον «Απαγωγικό συλλογισμό» προκειμένου να αποδείξει την αλήθεια ενός ισχυρισμού και μεταφέρει την αναζήτηση της αλήθειας, από την

περιοχή του αισθητού, στην περιοχή του νοητού ανοίγοντας έτσι το δρόμο προς την έγκυρη γνώση. Εφεξής, η εκ του αισθητού εποπτεία θα αντικατασταθεί από την Γεωμετρική εποπτεία, η οποία προκύπτει από την απόκτηση της γνώσης των Στοιχείων του γεωμετρικού χώρου και των μεταξύ τους σχέσεων μέσω της αφηρημένης σκέψης.

Η γεωμετρία αφορά τις σχέσεις των στοιχείων του γεωμετρικού χώρου. Είναι φυσικό επόμενο λοιπόν, ότι οι έννοιες των στοιχείων αυτών θα πρέπει να έχουν ορισθεί επακριβώς. Για τον ορισμό όμως μιας έννοιας χρησιμοποιούμε κατ' ανάγκη άλλες έννοιες, οι οποίες με τη σειρά τους χρησιμοποιούν άλλες έννοιες προκειμένου να ορισθούν κ.ο.κ. Ως εκ τούτου επιβάλλεται να εκλεγούν ορισμένα, κατά το δυνατόν ελάχιστα σε πλήθος κατάλληλα στοιχεία, οι έννοιες των οποίων να εκληφθούν ως πρώτες έννοιες και με βάση αυτές να ορισθούν οι έννοιες των υπολοίπων στοιχείων του γεωμετρικού χώρου.

Είναι προφανές ότι, ως θεμελιώδη στοιχεία πρέπει να εκλεγούν τα πλέον απλά, υπό την έννοια δε αυτή, ως θεμελιώδη στοιχεία εκλέγονται το *σημείο,* η *ευθεία* και το *επίπεδο.*

Η *Ευκλείδεια Γεωμετρία* είναι ένα τέτοιο ιδιάζον νοητικό κατασκεύασμα. Μέσα σ' αυτήν επινοούνται υπερβατικά σύμβολα όπως το *σημείο*, η *ευθεία* και το *επίπεδο*, τα οποία αν και είναι ανύπαρκτα για την αίσθηση του χώρου, εντούτοις γίνονται φορείς βασικών χαρακτήρων του, όπου στη συνέχεια με τη βοήθεια τους διατυπώνονται ιδιότητες του αισθητού χώρου, οι οποίες δεν είναι δυνατόν να προκύψουν ως αποτελέσματα των συμπερασμάτων της λογικής. Μέσω των σχημάτων που αποτελούν τα στοιχεία του γεωμετρικού χώρου αλλά και των γεωμετρικών σχέσεων και ιδιοτήτων που διατυπώνονται σαν αξιώματα εκφράζονται σταθεροί χαρακτήρες της συνείδησης που έχουμε για τον αισθητό χώρο.Η μελέτη των ιδιοτήτων ενός επίπεδου γεωμετρικού σχήματος **A** απαιτεί την ανάγκη *υλοποίησής* του, προκειμένου μέσω της *υλοποιημένης έκφρασης* των αφηρημένων εννοιών να διευκολυνθεί η επ' αυτών νοητική διεργασία.

Η ανάγκη αυτή μας οδηγεί στο να δεχθούμε την ύπαρξη μιας αντιστοιχίας **f**η οποία μας οδηγεί από το επίπεδο σχήμα **A** του *γεωμετρικού χώρου*, στην επιδιωκόμενη *υλοποιημένη έκφραση***α** αυτού, κατά την οποία οι γραφικές και μετρικές ιδιότητες του σχήματος **A**

διατηρούνται και στην υλοποιημένη έκφραση του **α,** την οποία θα ονομάζουμε επίσης σχήμα.

Η υλοποίηση του επίπεδου σχήματος **Α** γίνεται συνήθως επάνω στην επιφάνεια του χαρτιού, την οποία δεχόμαστε ως υλοποιημένη έκφραση του γεωμετρικού ευκλείδειου επιπέδου.

Το σχήμα **α** στο οποίο καταφεύγουμε προς διευκόλυνση της σκέψη μας, αλλά και προς εκτέλεση των απαιτούμενων γεωμετρικών πράξεων και συλλογισμών ονομάζουμε *παράσταση* του σχήματος **Α.**

Στην περίπτωση που θέλουμε να παραστήσουμε ένα τρισδιάστατο γεωμετρικό σχήμα σε μια επίπεδη δισδιάστατη επιφάνεια, θα πρέπει να προβούμε στους ακόλουθους συλλογισμούς. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια αντιστοιχία **f**σύμφωνα με την οποία μπορούμε να μεταβούμε από το τρισδιάστατο γεωμετρικό σχήμα **Β** σε μια υλοποιημένη έκφρασή του **β** η οποία να διατηρεί τις γραφικές και μετρικές ιδιότητες του σχήματος **Β.** Το πρόβλημα όμως που αντιμετωπίζουμε είναι ότι δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε την παράσταση **β,** αφού αυτή βρίσκεται ακόμα στον τρισδιάστατο χώρο. Για το λόγο αυτό καταφεύγουμε σ' ένα νέο μετασχηματισμό **φ** με τη βοήθεια του οποίου μεταβαίνουμε από το σχήμα **Β** του τρισδιάστατου γεωμετρικού χώρου, στο επίπεδο σχήμα **Α** του δισδιάστατου γεωμετρικού χώρου και στη συνέχεια κατασκευάζουμε την παράσταση αυτού του επίπεδου σχήματος με τη βοήθεια της αντιστοιχίας **f.** Το γινόμενο **f.φ** ορίζεται ως *μέθοδος παράστασης*.

Η παράσταση **α** ορίζεται ως *προβολή* του τρισδιάστατου σχήματος **Β** και η επιφάνεια επάνω στην οποία πραγματοποιείται ορίζεται ως *επιφάνεια προβολής*.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα, περιλαμβάνει ως δομικά στοιχεία: α) τον Μύθο του Σπηλαίου από τον διάλογο του Πλάτωνα «Πολιτεία» και β) ένα παιχνίδι αποτελούμενο από ξύλινα γεωμετρικά στερεά, όπως κύβο, τετραγωνική πυραμίδα, κανονικό τετράεδρο, ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, κώνο, κύλινδρο, σφαίρα, ένα επιδιασκόπιο και μια επίπεδη οθόνη προβολής.

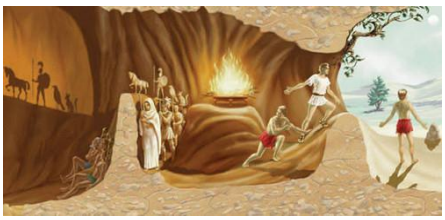
Ανάπτυξη της δραστηριότητας

1ο Προβάλουμε μια εικόνα όπως η ακόλουθη και ζητάμε από τα παιδιά να την περιγράψουν.

Επιδιωκόμενο είναι να παρατηρήσουν τα παιδιά την εικόνα και να αποδομήσουν αυτή στα βασικά της μέρη, όπως: αντικείμενα, σκιές των αντικειμένων, φωτιά (φως). Επίσης να περιγράψουν τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνονται, πως δημιουργούνται οι σκιές στην επιφάνεια του τοίχου της σπηλιάς.

2ο Διαβάζουμε το συγκεκριμένο μύθο από το διάλογο της Πλατωνικής Πολιτείας και ζητάμε να αναζητήσουν, να αναδείξουν και να σχολιάσουν στοιχεία της εικόνας σε σχέση με στοιχεία που βρίσκονται μέσα στο μύθο που διαβάστηκε, επιχειρώντας κατ' αυτό τον τρόπο να συνδέσουμε την οπτική αντίληψη με την φαντασία και την διατύπωση λόγου.

3ο Ζητάμε από τα παιδιά να σκηνοθετήσουν τον μύθο αναπαριστώντας αυτόν, με ρόλους που θα υποδυθούν τα ίδια. Μέσα από αυτή τη βιωματική δραστηριότητα τα παιδιά ανακαλύπτουν τη σχέση τους με τη σκιά τους είτε ως επιρριπτόμενη στον τοίχο του δωματίου, είτε ως προσαρτημένη στο επίπεδο του εδάφους και μέσα από διάφορες κινήσεις και στάσεις του σώματός τους, παρατηρούν την αλλαγή της μορφής της. Οι σχέσεις μεταξύ των σωμάτων των παιδιών δημιουργούν σχέσεις μεταξύ των αντίστοιχων σκιών τους. Έτσι οι σκιές δημιουργούν τον δικό τους επίπεδο χώρο. Ένα χώρο στον οποίο τα παιδιά μπορούν να αναπτύξουν την φαντασία τους συνθέτοντας δικές τους ιστορίες.



4οΣτη συνέχεια επιλέγουμε ως αντικείμενα, ξύλινα στερεά όπως, κύβο, τετραγωνική πυραμίδα, κανονικό τετράεδρο, ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, κώνο και κύλινδρο. Επιλέγουμε ακόμα, ως φωτεινή πηγή ένα επιδιασκόπιο και ως επίπεδο προβολής, μια επίπεδη οθόνη προβολής ή τον τοίχο του δωματίου τον οποίο έχουμε επιστρώσει με λευκά φύλλα χαρτιού μεγάλης επιφάνειας. Πάνω στην φωτεινή επιφάνεια του επιδιασκοπίου τοποθετούμε ένα

από τα προαναφερθέντα στερεά σε διαφορετικές θέσεις, έτσι ώστε το ίδιο το στερεό να δίνει (προβάλλει) διαφορετικές προβολές- σκιές πάνω στην επιφάνεια του τοίχου. Τα παιδιά ανακαλύπτουν ότι η σκιά του ίδιου στερεού μπορεί να είναι διαφορετική, ανάλογα από τη θέση που το προβάλλουμε. Περιγράφουν με μαρκαδόρο τις διαφορετικές σκιές του ίδιου στερεού που σχηματίζονται πάνω στα φύλλα χαρτιού που είναι στον τοίχο. Στη συνέχεια, σβήνουμε το επιδιασκόπιο και ανακαλύπτουν ότι η σκιά άφησε τααποτυπώματα της. Αυτό το αποτυπώματα θα τα ονομάσουμε *σχήματα*. Ανάμεσα στα διαφορετικά αποτυπώματα της σκιάς του ίδιου αντικειμένου, υπάρχουν κάποια που όπως τα αποκαλούν τα παιδιά είναι «καλύτερα σχήματα». Αυτά είναι κανονικά γεωμετρικά σχήματα όπως τετράγωνο, τρίγωνο, κύκλος κ. ά., που σχετικά εύκολα τα παιδιά αυτής της ηλικίας αναγνωρίζουν. Ωστόσο η αναγνώριση είναι πολύ διαφορετική από την κατανόηση του ορισμού ενός σχήματος(Μαυρομμάτης, Α, Σταθοπούλου, Σ, Παπανικολάου, Α. 2014) Ποια όμως αναγκαιότητα θα μπορούσε να οδηγήσει τα παιδιά στην αναζήτηση ενός γεωμετρικού ορισμού κάποιου σχήματος;Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα μπορεί να είναι οι διαφορετικές θέσεις ενός κύβου οι οποίες δίνουν την προβολή του ως τετράγωνο και ως ρόμβο αντίστοιχα.

5ο Τέλος συζητάμε με τα παιδιά: α) ποια σχέση μπορεί να έχει το παιχνίδι επιδιασκόπιο-γεωμετρικά στερεά με το μύθο του σπηλαίου; β) μπορεί μέσα από το παραπάνω παιχνίδι, να υπάρχει κάποιο από τα γεωμετρικά στερεά που χρησιμοποιήσαμε, το οποίο να δίνει πάντοτε την ίδια σκιά ανεξάρτητα από τη θέση που το τοποθετούμε; γ) μπορούμε πάντοτε με βεβαιότητα να αναγνωρίσουμε ένα στερεό από την σκιά - προβολή του; Πως θα αιτιολογούσαμε την απάντησή μας;

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Kline, M. (1981).Τα Μαθηματικά στο Δυτικό Πολιτισμό, Τόμος Α', εκδόσεις ΚΩΔΙΚΑΣ, Αθήνα 1981, σελ.219.

Bettelheim, B.(1995). Η γοητεία των παραμυθιών. Μια ψυχαναλυτική προσέγγιση, Γλάρος, Αθήνα, σελ. 161-163 και 168.

Tapson, F. (1997). Mathematical Games *Mathematics in school* Vol. 26 No 4

Szendrei, J. (1996). *Concrete Materials in the Classroom* in Bishop, A.J. et al. (eds) International Handbook of Mathematics Education Kluwer Academic Publishers

Αυγητίδου, Σ. (επιμ.) (2001). *Το παιχνίδι. Σύγχρονες ερευνητικές και διδακτικές προσεγγίσεις*. ΤΥΠΩΘΗΤΩ Γιώργος Δάρδανος

Wood, E. &Bennett, N. (2001). Οι θεωρίες των εκπαιδευτικών για το παιχνίδι. Κονστρουκτιβισμός ή κοινωνικός κονστρουκτιβισμός; Στο Αυγητίδου, Σ. (επιμ.). *Το παιχνίδι. Σύγχρονες ερευνητικές και διδακτικές προσεγγίσεις*. ΤΥΠΩΘΗΤΩ Γιώργος Δάρδανος

Ρεκαλίδου, Γ. (2004). Παιχνίδι και Μέθοδος Project στην Προσχολική Εκπαίδευση. Η συνδρομή του παιχνιδιού στην υλοποίηση των στόχων του Α.Π. μέσα από τη Μέθοδο Project*Ανοιχτό Σχολείο* Τ. 90

Wood, E. &Bennett, N. (2001). Οι θεωρίες των εκπαιδευτικών για το παιχνίδι. Κονστρουκτιβισμός ή κοινωνικός κονστρουκτιβισμός; Στο Αυγητίδου, Σ. (επιμ.). *Το παιχνίδι. Σύγχρονες ερευνητικές και διδακτικές προσεγγίσεις*. ΤΥΠΩΘΗΤΩ Γιώργος Δάρδανος

Ernest, P. (1986). Games a rationale for their use in the teaching of mathematics in school *Mathematics in School* Vol. 15, No 1

Marland, H. (1986). Cheating *Mathematics in School* Vol 15, No 1.

Smith, P. (2001). Το παιχνίδι και οι χρήσεις του παιχνιδιού. Στο Αυγητίδου, Σ. (επιμ.). *Το παιχνίδι. Σύγχρονες ερευνητικές και διδακτικές προσεγγίσεις*. ΤΥΠΩΘΗΤΩ Γιώργος Δάρδανος

Piaget , J, & Inhelder, B. (1956). The child's conception of space, Routledge and Kegan Paul, London.

Πούλος, Α.(1994). «Παιδαγωγική παρέμβαση για τη διαμόρφωση εννοιών του Γεωμετρικού χώρου σε παιδιά προσχολικής ηλικίας» ανέκδοτη διδακτορική διατριβή που εκπονήθηκε στο Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Dordrecht: Kluwer.

Μαυρομμάτης, Α, Σταθοπούλου, Σ, Παπανικολάου, Α. (2014). Τέχνη και Μαθηματικά, Γεωμετρικά Σχήματα, εκδόσεις Λιβάνης Αθήνα.

Ο ρόλος των παραμυθιών στη σύγχρονη εποχή http://epapanis.blogspot.gr/2011/07/blog-post.html

Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΜΕΣΩ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΤΟΥ SKETCHPAD.

Μόσχος Αλέξανδρος

Μαθηματικός - Υποδιευθυντής γυμνασίου – Λ.Τ Σημάντρων Χαλκιδικής

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εργασία στοχεύει αρχικά να προτείνει την ανάδειξη των γεωμετρικών ιδιοτήτων μέσω επίλυσης προβλημάτων. Σε δεύτερο επίπεδο παρουσιάζει τα προβλήματα αυτά στο περιβάλλον του γεωμετρικού λογισμικού Sketchpad. Επιτυγχάνεται έτσι ο συγκερασμός της μάθησης μέσω επίλυσης προβλήματος (Problem Solving) και της δυναμικής διερεύνησης στο λογισμικό. Η επικόλληση εικόνων της πραγματικότητας στην οθόνη του Sketchpadκαι και η κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων από την εργαλειοθήκη του προγράμματος πετυχαίνουν αφ' ενός την σύνδεση της γεωμετρίας με την πραγματικότητα και αφ' ετέρου την δυναμική διερεύνηση γεωμετρικών ιδιοτήτων σε προσομοιωμένο περιβάλλον.

Α. Διδασκαλία μέσω επίλυσης προβλήματος (Problem Solving)

Η διδασκαλία των μαθηματικών μέσω επίλυσης προβλημάτων (Problem Solving) θεωρείται μια ασφαλής μέθοδος κατανόησης των μαθηματικών εννοιών. «Η προσέγγιση στη μάθηση μέσω της επίλυσης προβλημάτων , όχι μόνο αναπτύσσει την εμπιστοσύνη των μαθητών στη δυνατότητά τους να σκεφτούν από μαθηματική άποψη αλλά αποτελεί όχημα προκειμένου να διαμορφώσουν άποψη για τα μαθηματικά και να αξιολογήσουν τις απόψεις των άλλων» (Cobb et al , 1991 : 187).Οι Stacey και Groves (1985) θεωρούν ότι μια διδασκαλία εστιασμένη στην επίλυση προβλήματος δημιουργεί μια ενθαρρυντική ατμόσφαιρα στην τάξη ώστε τα παιδιά να αντιμετωπίζουν κάτι άγνωστο χωρίς να αισθάνονται ότι απειλούνται. Επιπλέον θεωρούν ότι επιτρέπει στα παιδιά να δοκιμάζουν και να εφαρμόζουν τις στρατηγικές τους. Κατά την Ε. Κολέζα η διδασκαλία μέσω επίλυσης προβλήματος (teaching via problem solving) είναι ο πιο σημαντικός ρόλος των προβλημάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών. Αναφέρεται στη χρήση προβλημάτων για την εισαγωγή μιας νέας μαθηματικής έννοιας ή διαδικασίας. Η δημιουργία μαθησιακών περιβαλλόντων , σύμφωνα με τη θεωρία των Ρεαλιστικών μαθηματικών και τη θεωρία των διδακτικών καταστάσεων , στηρίζεται σ' αυτό ακριβώς το ρόλο των προβλημάτων (Ε. Κολέζα , Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών ,2009 : σελ 313).

Β. Το Sketchpad βοηθά στην επίλυση προβλημάτων στη γεωμετρία.

Η προσωπική μου παρέμβαση – πρόταση στο σημείο αυτό είναι πως μπορούμε να αξιοποιήσουμε την δυναμική – διερευνητική συνιστώσα του γεωμετρικού προγράμματος Sketchpad με μια πολυμεσική εφαρμογή επίλυσης προβλήματος. Πως θα επιτρέψουμε την γεωμετρική διερεύνηση σε ένα προσομοιωμένο περιβάλλον εικονικής πραγματικότητας και αναπαράστασης. Να αναδείξουμε τη γεωμετρία μέσα από την πραγματικότητα ή την πραγματικότητα της γεωμετρίας. Να συνυπάρξει η γεωμετρική διερεύνηση με την επίλυση πραγματικού προβλήματος.

Αρχίζουμε λοιπόν με την εκφώνηση ενός ρεαλιστικού προβλήματος , η επίλυση του οποίου μας οδηγεί στην κατασκευή κάποιου γεωμετρικού σχήματος ή στην ανακάλυψη μιας ιδιότητας. Το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται ως κείμενο στην άδεια οθόνη του λογισμικού και έχει την ιδιότητα να αποκρύπτεται και να επανεμφανίζεται. Κατόπιν στην άδεια οθόνη του Sketchpad επικολλάται μια εικόνα από την πραγματικότητα που σχετίζεται με το πρόβλημα. Η εικόνα αυτή μπορεί να βρεθεί από το διαδίκτυο. Πάνω στα πραγματικά στοιχεία της εικόνας (βουνά , ποτάμια , πόλεις , σπίτια κ.α.) τοποθετούνται σημεία , ευθύγραμμα τμήματα , γωνίες ή κύκλοι από τις δυνατότητες του προγράμματος. Η διερεύνηση που παρέχει το Sketchpad μετατοπίζεται σε πραγματικές διαστάσεις. Τα παρακάτω παραδείγματα θα καταστήσουν όσα προτείνω πιο εύληπτα.

Παράδειγμα 1 : Το πρόβλημα του πολυκαταστήματος στον κύκλο.

Μια πολυεθνική εταιρεία πρόκειται να κατασκευάσει ένα πολυκατάστημα γύρω από την Θεσσαλονίκη. Θέλει όμως η απόσταση από την πόλη να είναι 2Km . Σε ποιες πιθανές θέσεις μπορεί να γίνει η κατασκευή του πολυκαταστήματος;

Αρχικά επικολλούμε ένα χάρτη στην άδεια οθόνη του Sketchpad που να προσομοιώνει την πραγματική κατάσταση που περιγράφει το πρόβλημα. Κατόπιν γράφουμε σε κείμενο του προγράμματος την εκφώνηση του προβλήματος. Συνδέουμε το κείμενο με τη λειτουργία «Εμφάνιση – Απόκρυψη» από το μενού της Επεξεργασίας – Κουμπιά ενεργειών – Απόκρυψη/εμφάνιση. Οι μαθητές βλέπουν την εικόνα με την εκφώνηση του προβλήματος στο περιβάλλον του Sketchpad. Το πρόβλημα θα αποκρυφτεί μετά την κατανόηση του για να επανεμφανιστεί αν το επιθυμούμε.

Στην επόμενη φάση μετά από διερεύνηση οι μαθητές οδηγούνται στο συμπέρασμα ότι οι πιθανές θέσεις κατασκευής του πολυκαταστήματος είναι τα σημεία του κύκλου (Θεσσ/νίκη , 2km). Εμφανίζουμε τον συγκεκριμένο κύκλο από το κουμπί : « Εμφάνιση κύκλου».Στη συνέχεια φανερώνονται και οι ακτίνες από το : «Εμφάνιση ακτίνων» Με τη δυνατότητα μετρήσεων που παρέχει το πρόγραμμα επιβεβαιώνουμε

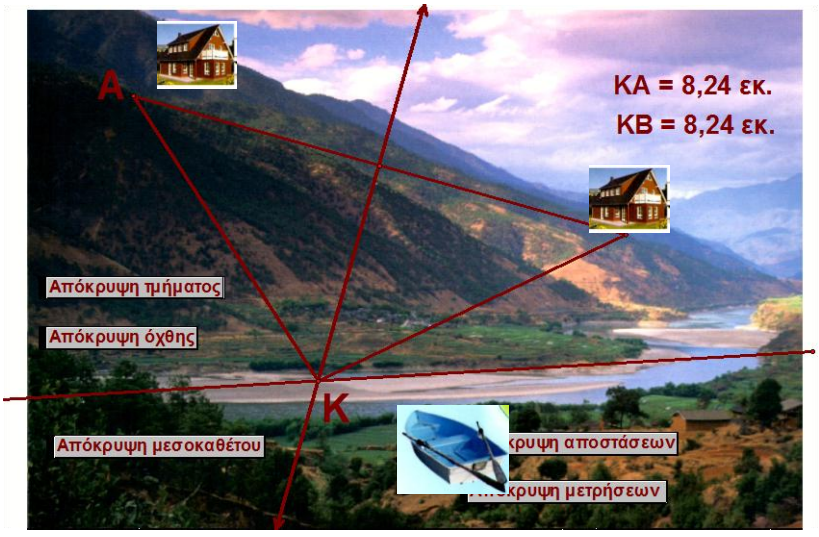
το αποτέλεσμα. Ο κύκλος καθώς και οι μετρήσεις εμφανίζονται σταδιακά στην οθόνη. Στο τέλος επικολλείται η εικόνα ενός πολυκαταστήματος και παρέχεται στους μαθητές η δυνατότητα επιλογής της θέσης που θα καταλάβει σύμφωνα με τις απαιτήσεις του προβλήματος.

<u>Παράδειγμα 2 : Το πρόβλημα της κατασκήνωσης στην μεσοκάθετο.</u>

Δύο κατασκηνώσεις βρίσκονται στις θέσεις Α και Β. Σε κάποια θέση στην όχθη ενός γειτονικού ποταμού πρόκειται να κατασκευάσουν από κοινού μια εγκατάσταση καγιάκ έτσι ώστε να τις εξυπηρετεί και τις δύο. Για να γίνει αυτό πρέπει η εγκατάσταση να απέχει εξίσου από τις κατασκηνώσεις. Ποια είναι η πιθανή θέση κατασκευής του έργου;

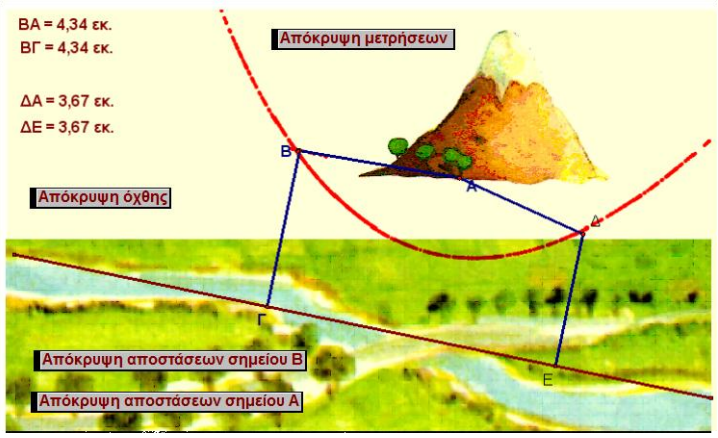
Στην οθόνη του Sketchpad επικολλήσαμε μια εικόνα φυσικού περιβάλλοντος που προσομοιώνει τις πραγματικές συνθήκες του προβλήματος. Συγχρόνως πάνω σ ' αυτήν επικολλήθηκαν δύο σπιτάκια που οπτικοποιούν τις θέσεις των κατασκηνώσεων. Δίπλα στις εικόνες αυτές τοποθετήσαμε δύο σημεία Α , Β από την εργαλειοθήκη του προγράμματος. Επιπλέον σε κείμενο καταγράψαμε την εκφώνηση.

Η μελέτη του προβλήματος γίνεται σταδιακά από τους μαθητές μέσω των κουμπιών ενεργειών Εμφάνισης- απόκρυψης. Αρχικά γίνεται η εμφάνιση της εκφώνησης του προβλήματος και μετά από την διεξοδική κατανόησή του η απόκρυψη του. Με τη «εμφάνιση τμήματος» εμφανίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Με την «εμφάνιση όχθης» την νοητή γραμμή της όχθης του ποταμού. Με συνεχείς δοκιμές αναζητούμε τη θέση Κ πάνω στην όχθη ώστε ΚΑ = ΚΒ. Στη συνέχεια με το κουμπί «Εμφάνιση μεσοκαθέτου» σχηματίζεται η μεσοκάθετος του ΑΒ και η τομή Κ της μεσοκαθέτου με την ευθεία της όχθης. Τέλος με την εμφάνιση των μετρήσεων παρατηρούμε ότι ΚΑ = ΚΒ. Η θέση Γ είναι η δεκτή θέση κατασκευής των εγκαταστάσεων καγιάκ. Στο παρακάτω σχήμα έχουν ενεργοποιηθεί όλες οι εμφανίσεις τμημάτων ή μετρήσεων γι ˈαυτό φαίνονται οι αντίστοιχες αποκρύψεις. Μπορούμε στο τέλος να επικολλήσουμε μια εικόνα που παρουσιάζει ένα καγιάκ στην θέση Κ για να οπτικοποιήσουμε τη λύση του προβλήματος.



<u>Πρόβλημα 3 : Πρόβλημα της κατασκήνωσης στην παραβολή.</u> Μια εταιρεία θέλει να κατασκευάσει κατασκήνωση σε μια τέτοια θέση ώστε να απέχει το ίδιο από τους πρόποδες του βουνού και από την όχθη του ποταμού. Κι αυτό για να μπορεί να διοργανώνει πεζοπορίες προς το βουνό ή προς το ποτάμι που να έχουν την ίδια καθορισμένη απόσταση.

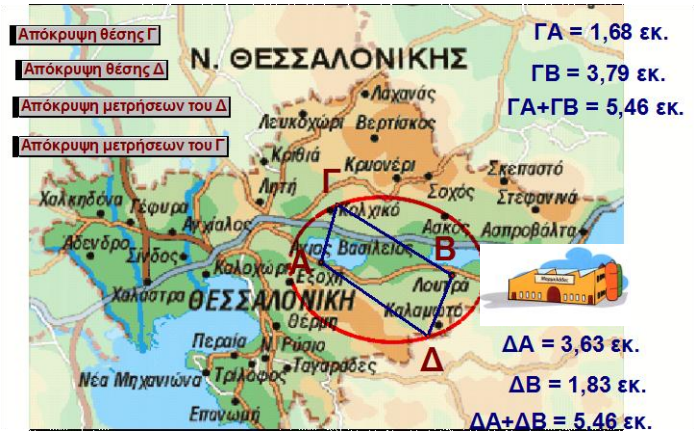
Επικολλούμε τις παρακάτω δύο εικόνες (ενός βουνού κι ενός ποταμού) στην οθόνη του Sketchpad σε κίτρινο φόντο. Αποτυπώνουμε ένα σημείο Α στη θέση του βουνού που πρέπει να καταλήγει η πεζοπορία των κατασκηνωτών. Σχηματίζουμε μια ευθεία που παριστάνει την όχθη του ποταμού. Ζητάμε το σύνολο σημείων που ισαπέχουν από το σημείο Α και από την ευθεία της όχθης. Ο ζητούμενος γ.τ είναι τα σημεία της παραβολής που σχεδιάστηκε με την τεχνική « σχεδίασης ίχνους».Επιβεβαιώνουμε με επιλογή διαφορετικών σημείων της παραβολής ότι έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από το σημείο Α και την ευθεία ε. Η εμφάνιση των γεωμετρικών σχεδίων και των μετρήσεων επιβεβαίωσης γίνεται σταδιακά μέσω των κουμπιών ενεργειών Εμφάνισης – Απόκρυψης



Πρόβλημα 4 : Το πρόβλημα του πολυκαταστήματος στην έλλειψη.

Δύο γειτονικές πόλεις Α, Β απέχουν μεταξύ τους 25Km. Μια πολυεθνική εταιρεία σκέφτεται να ανοίξει πολυκατάστημα στη γύρω περιοχή σε μια θέση Γ. Θέλει όμως η απόσταση ΑΓΒ να είναι μόλις 27Km , ώστε αν κάποιος ξεκινήσει από την πόλη Α προς τη Β μέσω του ενδιάμεσου προορισμού του πολυκαταστήματος να μην διανύσει πολλά περισσότερα χιλιόμετρα απ' ότι στην απ' ευθείας διαδρομή ΑΒ. Σε ποιες πιθανές θέσεις μπορεί να γίνει η κατασκευή;

Στην οθόνη του Sketchpad επικολλήσαμε αρχικά έναν χάρτη μιας περιοχής. Στη θέση δύο κωμοπόλεων τοποθετήσαμε δύο σημεία Α, Β από την εργαλειοθήκη του προγράμματος. Αναζητούνται οι θέσεις των σημείων Γ , ώστε το ΑΓ + ΓΒ να είναι σταθερό ίσο με 27 χιλιόμετρα. Άρα ο ζητούμενος γ.τ αποτελείται από την έλλειψη με εστίες τις δύο πόλεις Α, Β. Με την διαδικασία «σχεδίασης ίχνους» κατασκευάστηκε η έλλειψη με εστίες τα Α , Β. Οι υπολογισμοί των αθροισμάτων : ΓΑ +ΓΒ , ΔΑ+ΔΒ δικαιολογούν ότι κάθε σημείο της έλλειψης πληρεί τις απαιτήσεις του προβλήματος. Ο έλεγχος από τους μαθητές άλλων σημείων πάνω στην κωνική αυτή τομή επιβεβαιώνουν διερευνητικά το αποτέλεσμα. Οι μαθητές αρχικά βλέπουν μόνο τον χάρτη και την εκφώνηση του προβλήματος. Μετά την απόκρυψη της εκφώνησης εμφανίζονται και σχεδιάζονται σταδιακά τα γεωμετρικά σχήματα. Στο τέλος η εμφάνιση των μετρήσεων επικυρώνουν την ζητούμενη θέση των σημείων – θέσεων κατασκευής του πολυκαταστήματος. Ταυτόχρονα κατανοείται η ιδιότητα των σημείων της έλλειψης μέσα από ρεαλιστικό πρόβλημα.



<u>Πρόβλημα 5 : Το πρόβλημα του πολυκαταστήματος στην υπερβολή.</u>

Δύο γειτονικές πόλεις Α, Β απέχουν μεταξύ τους 25Km. Μια πολυεθνική εταιρεία σκέφτεται να ανοίξει πολυκατάστημα στη γύρω περιοχή σε μια θέση Γ. Θέλει όμως το πολυκατάστημα να είναι κοντύτερα προς την πόλη Α , αλλά να απέχει από αυτήν μόλις 4Km λιγότερο από ότι από την Β. Κι αυτό αν κάποιος έρθει από την Β στο πολυκατάστημα να μην χρειαστεί παρά μόνο 4Km περισσότερο από αυτόν που έρχεται από την Α. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις κατασκευής;

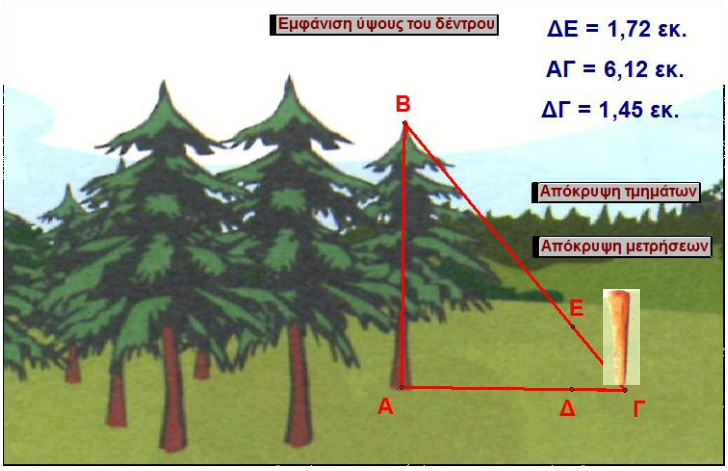
Εδώ ζητάμε τον γ.τ των σημείων που ικανοποιούν τον περιορισμό ΓΒ – ΓΑ = 4 (Από την υπόθεση ΓΒ>ΓΑ). Άρα τις προϋποθέσεις του προβλήματος πληρούν τα σημεία του ενός κλάδου της υπερβολής με εστίες τα Α, Β. Συγκεκριμένα ο κλάδος της υπερβολής που περιέχει σημεία «κοντύτερα» προς την πόλη Α. Μπορούμε να συζητήσουμε στην τάξη παραλλαγή του προβλήματος που να εξυπηρετεί καλύτερα την πόλη Β και να οδηγηθούμε ως λύση στον άλλο κλάδο. Η διαφοροποίηση αυτή δικαιολογεί την χρήση της απόλυτης τιμής στον ορισμό της υπερβολής.

Πρόβλημα 6 : Το πρόβλημα του δέντρου στα όμοια τρίγωνα.

Πρόκειται για το ιστορικό πρόβλημα υπολογισμού του ύψους ενός δέντρου με τη βοήθεια μιας ράβδου.

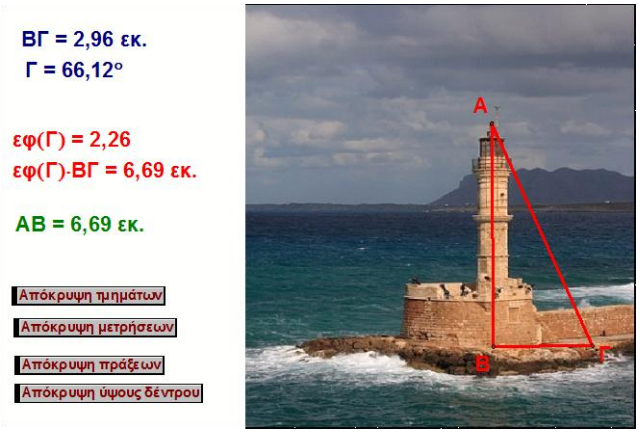
Επικολλήσαμε ένα τοπίο με δέντρα και μία ράβδο στο Sketchpad. Γράψαμε την εκφώνηση του προβλήματος σε κείμενο του προγράμματος.

Αποτυπώσαμε τα σημεία Α ,Β πάνω στο δέντρο , τα Δ , Ε στο ραβδί και το σημείο Γ ώστε τα Β , Ε , Γ να είναι συνευθειακά. Σχηματίσαμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ , ΑΓ , ΒΓ , ΔΕ. Το τελευταίο το αποκρύψαμε και στη θέση του επικολλήσαμε την εικόνα της ράβδου. Η κατασκευή έγινε έτσι ώστε ΑΒ$\perp$ΑΓ. Μετρήσαμε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΔΕ , ΑΓ , ΔΓ και ΑΒ. Η εμφάνιση του γεωμετρικού σχήματος και των μετρήσεων γίνεται σταδιακά. Αποφεύγουμε όμως να εμφανίσουμε το ζητούμενο ύψος του δέντρου ΑΒ. Λύνουμε σε φύλλο εργασίας το πρόβλημα και με τη θεωρία των ομοίων τριγώνων βρίσκουμε το ΑΒ. Πατώντας στην συνέχεια το κουμπί : « Εμφάνιση ύψους δέντρου» επιβεβαιώνουμε το αποτέλεσμα των πράξεων μας. Το πρόγραμμα μας παρέχει τη δυνατότητα να μετακινήσουμε το μήκος του ΔΕ καθώς και αλλάξουμε τη θέση του σημείου Γ. Στις νέες συνθήκες έχουμε και νέες μετρήσεις και επαναλαμβάνουμε τους υπολογισμούς μας και τις αντίστοιχες επιβεβαιώσεις.



Πρόβλημα 7 : Το πρόβλημα του κτιρίου στην τριγωνομετρία.

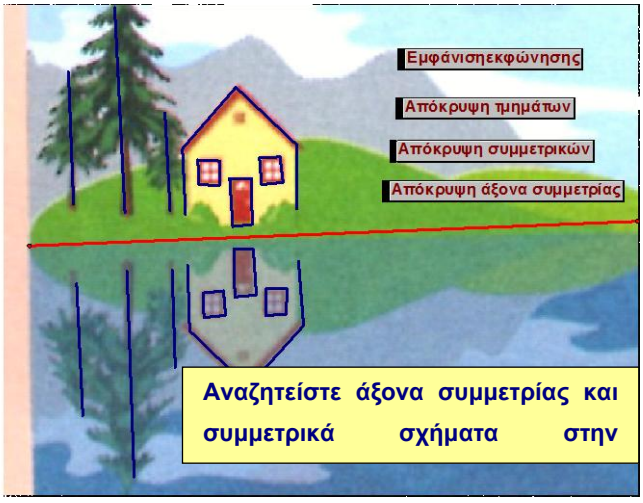
Πρόκειται για τον υπολογισμό του ύψους ενός κτιρίου με τη βοήθεια της εφαπτομένης μιας γωνίας. Παρατηρούμε ότι ΑΒ = εφ(Γ) · ΒΓ. Παρατηρούμε ότι το ύψος ΑΒ δίνει την ίδια τιμή ανεξάρτητα από τη επιλογή της θέσης Γ. Το ενδιαφέρον είναι ότι έχουμε τη δυνατότητα να αποκρύπτουμε είτε το ύψος του δέντρου είτε τις πράξεις ώστε πρώτα οι μαθητές να βρουν το αποτέλεσμα μόνοι τους και μετά να το επιβεβαιώνουμε εμφανίζοντας αυτά τα στοιχεία.



Πρόβλημα 8 : Το πρόβλημα του άξονα συμμετρίας.

Παρουσιάζουμε μια εικόνα φυσικού τοπίου με συμμετρία. Συγκεκριμένα εδώ έχουμε ένα σπίτι και δέντρα που καθρεφτίζονται στα νερά μιας λίμνης και απεικονίζονται τα συμμετρικά τους σχήματα.

Μπορούμε με βάση την εικόνα να μιλήσουμε για άξονα συμμετρίας και συμμετρικά σχήματα. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η πρόταση να σχηματίσουμε το περίγραμμα του σπιτιού και των δέντρων με την χρήση ευθυγράμμων τμημάτων από το λογισμικό. Στην συνέχεια ενεργοποιώντας την : «Επιλογή άξονα συμμετρίας» και «Ανάκλαση» , βρίσκουμε τα συμμετρικά τους. Φαίνεται στην εικόνα ότι το συμμετρικό περίγραμμα ταιριάζει με το είδωλο του σπιτιού και των δέντρων μέσα στο νερό. Η εμφάνιση της εκφώνησης , του άξονα συμμετρίας , των τμημάτων του περιγράμματος και των συμμετρικών τμημάτων γίνεται σταδιακά στην διδακτική παρουσίαση μέσω των κουμπιών ενεργειών.



<u>Πρόβλημα 9 : Το πρόβλημα του πάρκου στην ελάχιστη τιμή της παραβολής.</u>

Ένας πολιτικός μηχανικός θέλει να σχεδιάσει ένα πάρκο ΕΖΗΘ σχήματος τετραγώνου. Το πάρκο θα χτιστεί σε ένα επίσης τετραγωνικό οικόπεδο ΑΒΓΔ πλευράς ΑΒ = 10m. Έστω ΑΕ=ΒΖ=ΓΗ=ΔΘ = x

α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του πάρκου ΕΖΗΘ ως συνάρτηση του x.

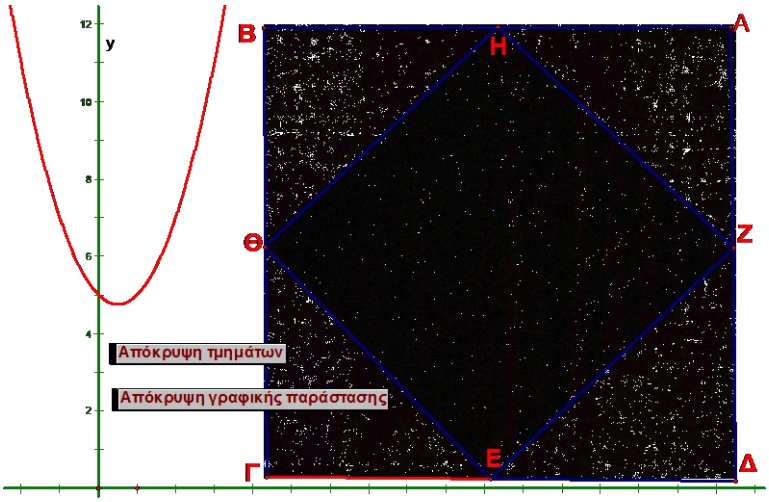
β) Να βρείτε για ποια τιμή του x το παραπάνω εμβαδό γίνεται ελάχιστο , καθώς και την ελάχιστη τιμή του.

Η συνάρτηση που παριστάνει το ζητούμενο εμβαδόν είναι η $E(x)=\sqrt{2x^2-20x+100}$.Για να γίνει τώρα ελάχιστο αρκεί να αναζητήσουμε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης : $f(x)=x^2-10x+50$. Από τη γραφική της παράσταση παρατηρούμε ότι αυτό γίνεται για x=5

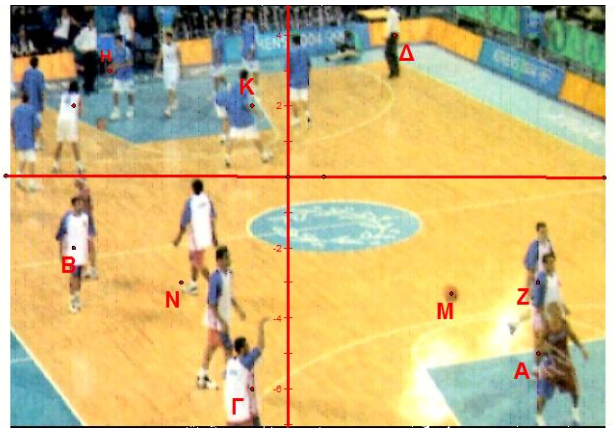
Στο Sketchpad επικολλήσαμε μία εικόνα που ταιριάζει με τις συνθήκες του προβλήματος. Σχεδιάσαμε ευθύγραμμα τμήματα από την εργαλειοθήκη του προγράμματος στο περίγραμμα του οικοπέδου ΑΒΓΔ καθώς και στο περίγραμμα του πάρκου ΕΖΗΘ. Από το μενού : « Γράφημα» - «Ορισμός συστήματος συντεταγμένων» σχεδιάστηκε η παραβολή. Μεταφέραμε την γραφική παράσταση αριστερά της οθόνης ώστε να μην επικαλύπτει το υπόλοιπο σχέδιο. Από την γραφική αυτή παράσταση μπορεί να μελετηθεί η ελάχιστη τιμή της. Η εμφάνιση του περιγράμματος και της γραφικής απεικόνισης γίνονται και πάλι σταδιακά στην τάξη.

Εδώ γεννιέται μια νέα χρήση του προγράμματος Sketchpad. Αφορά την γραφική απεικόνιση πραγματικών αλληλεξαρτήσεων μεγεθών. Επίσης η αναζήτηση μεγίστων ή ελαχίστων των παρακάνω

συναρτήσεων. Στην μια μεριά της οθόνης του προγράμματος επικολλούνται εικόνες του πραγματικού κόσμου που προσομοιώνουν το πρόβλημα. Οι εικόνες αυτές εμπλουτίζονται με γεωμετρικά σχήματα σημείων ή τμημάτων – περιγραμμάτων ακόμη και «εσωτερικών» σχημάτων που επιτρέπουν τον υπολογισμό εμβαδών. Στην άλλη πλευρά της οθόνης εμφανίζεται η γραφική παράσταση για την μελέτη της αλληλεξάρτησης και την εύρεση ακροτάτων τιμών. Πρόκειται δηλαδή για μελέτη συναρτήσεων μέσα από προβλήματα καθημερινής πρακτικής που προσομοιώνονται στο περιβάλλον του Sketchpad και μελετάται η γραφική τους παράσταση.



Πρόβλημα 10 : Το πρόβλημα του γηπέδου στις συντεταγμένες σημείου.



Α. Στο γήπεδο που βλέπετε να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες :

1. Των παικτών Α .....

Β ..... , Η .....

Ζ ..... , Ν .....

Κ .....

2 της μπάλας Μ .....

3. του διαιτητή Δ .....

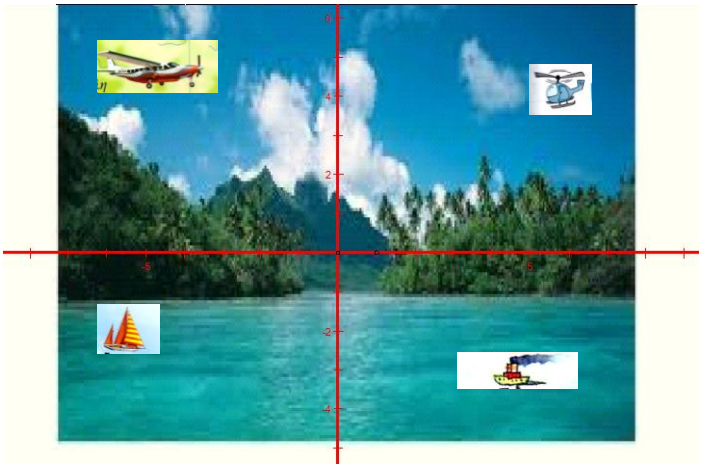
Β. Τοποθετήστε σημεία στη θέση και άλλων παικτών του αγώνα μπάσκετ και βρείτε τις συντεταγμένες.

.....

Στην οθόνη του γεωμετρικού προγράμματος επικολλήσαμε μια φωτογραφία από ένα στιγμιότυπο αγώνα μπάσκετ στον αγωνιστικό χώρο (γήπεδο) Από το μενού Γράφημα – Ορισμός συστήματος συντεταγμένων εμφανίστηκε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Στην

φωτογραφία που εμφανίζεται παραπάνω δεν ξεχωρίζουν οι γραμμές του πλέγματος. Στο sketchpad όμως αυτές είναι ορατές και διευκολύνουν τους μαθητές. Παίζουν το ρόλο τετραγωνισμένου χαρτιού. Από κει και πέρα πρόκειται για ένα παιχνίδι εύρεσης συντεταγμένων σημείων του επιπέδου που προσομοιώνονται ως τις θέσεις παικτών , του διαιτητή και της μπάλας.

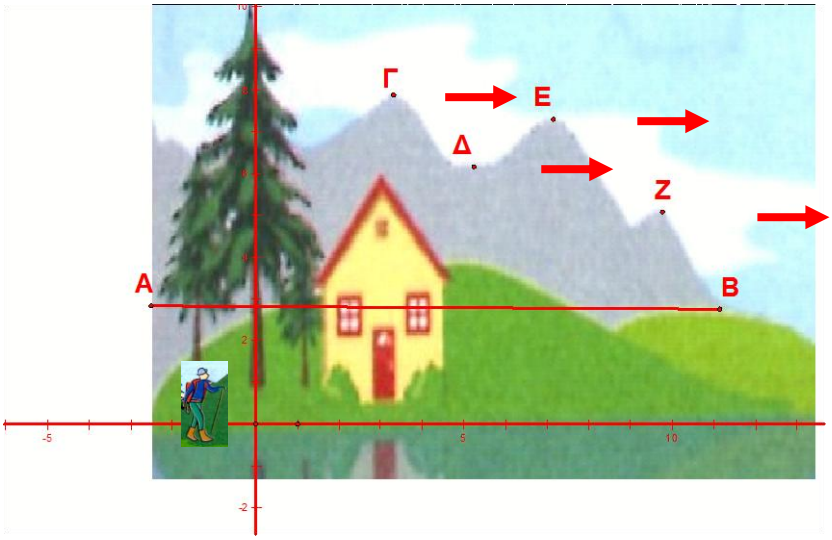
Παραλλαγή αποτελεί το σενάριο συνδυασμού συστήματος αξόνων σε γεωγραφικό χάρτη για τον προσδιορισμό των θέσεων διάφορων πόλεων με συντεταγμένες όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Ακόμη ο προσδιορισμός της θέσης πλοιαρίων και αεροπλάνων σε ένα θαλάσσιο τοπίο.



<u>Πρόβλημα 11 : Το πρόβλημα του ορειβάτη στο θεώρημα του Rolle.</u>

Οι πρόποδες Α , Β δύο συνεχόμενων βουνών βρίσκονται σε ευθεία ΑΒ παράλληλη προς την επιφάνεια της θάλασσας. Ένας ορειβάτης ξεκινά από το σημείο Α και ανεβαίνει και τα δύο γειτονικά βουνά μέχρι να φτάσει στο σημείο Β. Κινείται τις περισσότερες φορές ανηφορικά ή κατηφορικά. Σε ποια σημεία κινείται παράλληλα προς την επιφάνεια της θάλασσας;

Με το παρακάτω προσομοιωμένο περιβάλλον του Sketchpad επιβεβαιώνουμε το θεώρημα Rolle στην ανάλυση. Το περίγραμμα των δύο βουνών ή αν θέλετε η πορεία του ορειβάτη μοιάζει με τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς και παραγωγίσιμης συνάρτησης. Η απαίτηση ΑΒ// ε ισοδυναμεί με τον περιορισμό $f(\alpha)=f(\beta)$ αν φανταστούμε ως σύστημα συντεταγμένων αυτό με άξονα xx΄ την ευθεία ε της επιφάνειας της θάλασσας. Ο ορειβάτης θα κινηθεί οριζόντια ή παράλληλα προς την ε στις κορυφές Γ , Δ , Ε , Ζ. Σημεία στα οποία η παράγωγος μηδενίζεται ως σημεία τοπικών ακροτάτων και στα οποία υπάρχει οριζόντια εφαπτομένη της καμπύλης.



Πρόβλημα 12 : το πρόβλημα του δοχείου λαδιού στην γραφική παράσταση της y = αx.

Ένα δοχείο αποθήκευσης λαδιού αποτελείται από δύο κυλίνδρους τον ένα μέσα στον άλλο. (Βλέπε διπλανό σχήμα). Κατά το γέμισμα του δοχείου το βρυσάκι παροχής γεμίζει το δοχείο με ρυθμό 0,5l /sec. Αν ρ=10cmκαι υ=40cm.

Α. Να αποδείξετε ότι η στάθμη h του λαδιού δίνεται από σχέση : h = $\frac{5}{3}$ t.

Β. Να παραστήσετε γραφικά την παραπάνω συνάρτηση.

Γ. Ποιο θα είναι το ύψος της στάθμης μετά από 10sec.

Δ. Σε πόσο χρόνο γεμίζει το δοχείο.

Πρόκειται για πρόβλημα γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h = \frac{5}{3}t$. Επικολλήσαμε μια εικόνα δύο κυλίνδρων που προσομοιώνουν το πρόβλημα. Εμφανίζουμε αρχικά την εκφώνηση για να την αποκρύψουμε στην συνέχεια. Για να αποδώσουμε πιο ρεαλιστικά το πρόβλημα εμφανίζουμε την στάθμη του λαδιού και τη νέα στάθμη. Χρωματίζεται με κίτρινο χρώμα το λάδι που μπήκε στο δοχείο και αναγράφεται η ένδειξη h για το ύψος του λαδιού.Ο χρωματισμός αυτός έγινε με τη χρήση της κατασκευής «Εσωτερικού τετραπλεύρου». Από το κουμπί : « Εμφάνισης γραφικής παράστασης» γράφουμε την ευθεία στο ήδη υπάρχον σύστημα συντεταγμένων. Από τη γραφική αυτή παράσταση μελετάμε τα Γ , δ ερωτήματα και διαπιστώνουμε την χρησιμότητά της στον γρήγορο υπολογισμό του h όταν γνωρίζουμε το t αντίστροφα του t όταν γνωρίζουμε το h. Στις παρακάτω εικόνες παρουσιάζονται διαδοχικά στιγμιότυπα της παρουσίασης του προβλήματος στην τάξη.Αρχικά το σχήμα , το σύστημα αξόνων και η εκφώνηση. Μετά χωρίς εκφώνηση με τη στάθμη του λαδιού. Κατόπιν η στάθμη ανέβηκε. Τέλος εμφανίζουμε την γραφική παράσταση και μελετούμε τα ερωτήματα του προβλήματος. Ειδικά στα δύο τελευταία ερωτήματα η γραφική παράσταση π[ου εικονίζεται είναι χρήσιμο εργαλείο απάντησης.

Απόκρυψη εκφώνησης

Εμφάνιση στάθμης λαδιού

Εμφάνιση νέας στάθμης

Εμφάνιση γραφικής παράστασης

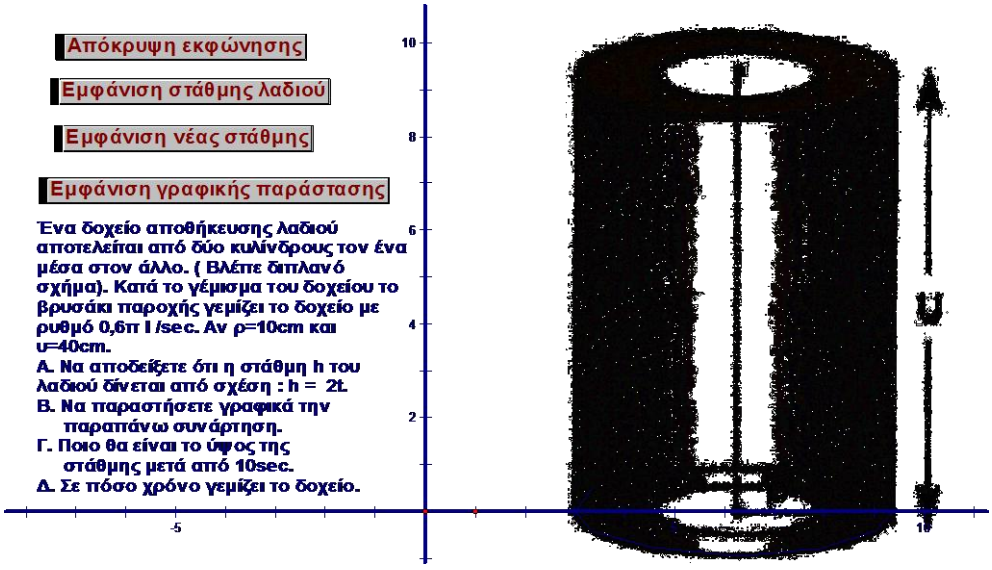
Ένα δοχείο αποθήκευσης λαδιού αποτελείται από δύο κυλίνδρους τον ένα μέσα στον άλλο. (Βλέπε διπλανό σχήμα). Κατά το γέμισμα του δοχείου το βρυσάκι παροχής γεμίζει το δοχείο με ρυθμό 0,6π l /sec. Αν ρ=10cm και υ=40cm.

Α. Να αποδείξετε ότι η στάθμη h του λαδιού δίνεται από σχέση : h = 2t.

Β. Να παραστήσετε γραφικά την παραπάνω συνάρτηση.

Γ. Ποιο θα είναι το ύψος της στάθμης μετά από 10sec.

Δ. Σε πόσο χρόνο γεμίζει το δοχείο.

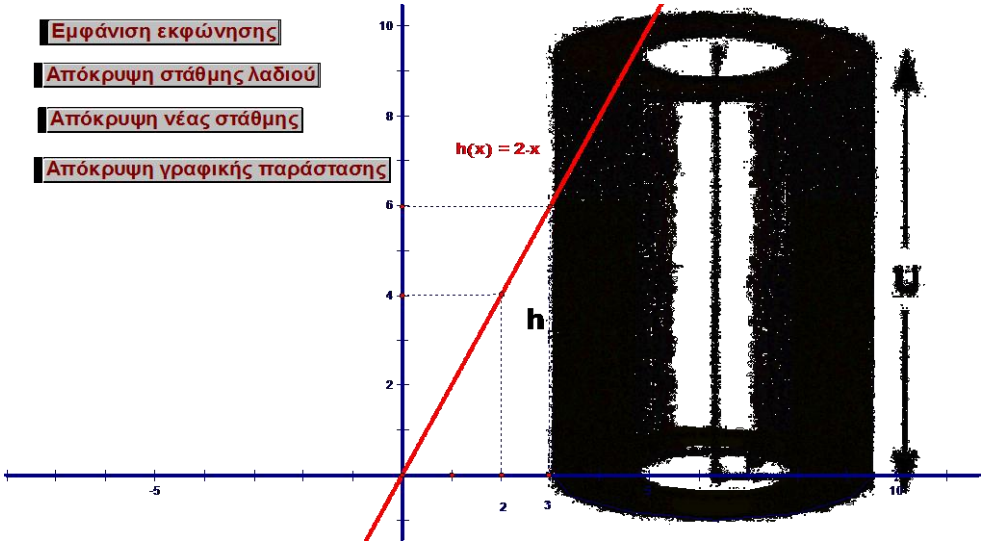


Εμφάνιση εκφώνησης

Απόκρυψη στάθμης λαδιού

Απόκρυψη νέας στάθμης

Απόκρυψη γραφικής παράστασης

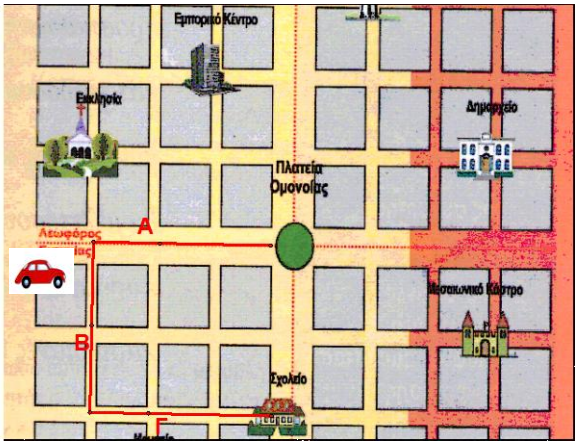


<u>Πρόβλημα 13 : Το πρόβλημα των αυτοκινήτων στην σύγκριση κλασμάτων.</u>

Τρία αυτοκίνητα γονέων μεταφέρουν τα παιδιά τους από την πλατεία Ομονοίας στο σχολείο (Βλέπε την εικόνα.). Η διαδρομή εμφανίζεται με κόκκινη τεθλασμένη γραμμή. Σε κάποια χρονική στιγμή βρίσκονται στις θέσεις Α , Β , Γ . Ποιο κλάσμα εκφράζει το μέρος της διαδρομής που έχει διανύσει το κάθε αυτοκίνητο; Ποιο κλάσμα είναι μεγαλύτερο; Τι αντιπροσωπεύει το μεγαλύτερο κλάσμα ως προς τη διαδρομή κίνησης;

Επικολλούμε το παρακάτω σχέδιο πόλης, Με ευθύγραμμα τμήματα κάθετα μεταξύ τους σχεδιάζουμε την διαδρομή κίνησης των αυτοκινήτων. Αποτυπώνουμε τα σημεία Α , Β , Γ τα σημεία που βρίσκονται αντίστοιχα στην δεδομένη χρονική στιγμή. Σε κάθε μία θέση από αυτές επικολλούμε από ένα αυτοκίνητο. Τα κλάσματα που αντιστοιχούν σε κάθε όχημα είναι :

Α: $\frac{2}{8}$, Β : $\frac{4}{8}$, Γ : $\frac{6}{8}$. Στο μεγαλύτερο κλάσμα αντιστοιχεί μεγαλύτερο μήκος διαδρομής και θέση πιο κοντά στον προορισμό που είναι το σχολείο.



Γ. Προβληματισμοί –συμπεράσματα

Από την χρήση των συγκεκριμένων προβλημάτων με την συγκεκριμένη μορφή στην διδακτική πράξη βγήκαν ορισμένα χρήσιμα οφέλη :

1. Αυξήθηκε το ενδιαφέρον των μαθητών και ελαχιστοποιήθηκε ο μαθητικός θόρυβος.
2. Αυξήθηκε η συμμετοχή περισσότερων μαθητών.
3. Συζητήθηκαν απόψεις και στρατηγικές διαφόρων μαθητών.
4. Διαπιστώθηκε η εφαρμογή , χρήση και χρησιμότητα της γεωμετρίας στην καθημερινή ζωή και σε καθημερινά προβλήματα.
5. Συνδέθηκε η γεωμετρία με την πραγματικότητα.
6. Διαπιστώθηκε ότι η γεωμετρία μας αφορά όλους.
7. Συνδέθηκε η επίλυση προβλήματος με την δυναμική διερεύνηση του γεωμετρικού προγράμματος Sketchpad.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Κολέζα Ε. (2009) Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών , Αθήνα ,εκδόσεις Τόπος.
2. Βόσκογλου Μ. (1993) Το μαθηματικό πρόβλημα ως παράγοντας για την απόκτηση και τη μεταφορά της γνώσης . Πάτρα , Πρακτικά 9ου πανελλήνιου συνεδρίου μαθηματικής παιδείας.
3. Κεϊσόγλου Σ. (2001) , Σύγχρονα λογισμικά ως εργαλεία αναστοχαστικών κατασκευών , Θεσσαλονίκη , Πρακτικά 5ου πανελλήνιου συνεδρίου διδακτικής των μαθηματικών.
4. Κεϊσόγλου Σ.(2005) Θέματα διδακτικής των μαθηματικών του Σ. Κεϊσόγλου , Αθήνα εκδόσεις Μπονιά.

alexandmos@gmail.com

Η ΔΙΑΠΡΑΓΜΑΤΕΥΣΗ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ ΩΣ ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΟΥ ΕΡΓΑΛΕΊΟΥ

Στέλιος Παπακωνσταντίνου **Παύλος Τουκίλογλου**

Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο Βιβλίο του Μαθητή της ΣΤ' τάξης δίνονται οδηγίες κατασκευής πολυγώνων σε προκατασκευασμένο κύκλο. Σκοπός της παρούσας έρευνας αποτελεί η αντιστροφή αυτής της πορείας που επιβάλλεται στα πλαίσια του συμπεριφοριστικού παραδείγματος. Δεδομένου ότι ο κύκλος βρίσκεται στο επίκεντρο του ενδιαφέροντός μας, επιχειρούμε την κατασκευή του ως παράγωγο ολοένα και πυκνότερων πολυγώνων με ρομποτικούς χειρισμούς. Το ίδιο το μέσο διακρίνεται για την ψηφιακή (προγραμματική) και ταυτόχρονα γνήσια υλική του φύση. Ο δυϊσμός αυτός είναι ερευνητικά κρίσιμος δεδομένου ότι θα βοηθήσει στη μελέτη ενός εν κινήσει παραγόμενου κύκλου (ενεργητική διάσταση) εντός του τρισδιάστατου χώρου και όχι στην οθόνη ενός Η/Υ. Ταυτόχρονα, και συμβατά με την κατά Vygotsky Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης θα ωθήσει τους συμμετέχοντες μαθητές σε μια διερευνητική μάθηση με απαραίτητο το χαρακτηριστικό της προνοητικότητας που η ρομποτική επιβάλλει από τη φύση της.
Η παρούσα έρευνα διακρίνει το στατικό μαθησιακό περιβάλλον (ως προς τη δομή του σχολικού εγχειριδίου και της διδακτικής που αυτό επιβάλλει) από μια τάξη που εργάζεται σε ένα ενεργητικό μαθησιακό περιβάλλον που επιχειρεί μια γόνιμη ρωγμή εντός του ίδιου εκπαιδευτικού συστήματος (ενεργητικό λόγω της δυνατότητας διαπραγμάτευσης των γεωμετρικών εννοιών). Ωστόσο, διατηρείται ως κοινός παρονομαστής η παρουσία του πολιτισμικού εργαλείου (διαβήτης ή/και ρομποτική κατασκευή), με τη δεύτερη να παράγει υλικό ίχνος κατόπιν προγραμματισμού σε σειρά βημάτων.

Φιλοσοφία

Στον πολιτισμό που ανέπτυξε κάθε κοινωνία, εντός του ιστορικού χρόνου, διακρίνει κανείς ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον προς μια οργάνωση της ζωής τόσο στο επίπεδο της καθημερινότητας όσο και στο επίπεδο μακρόπνοων σχεδίων. Αφετηρία κάθε τέτοιας ανεξάρτητης ή αλληλένδετης γεωγραφικά πορείας αποτέλεσαν τα συλλογικά κίνητρα, τα οποία απαντούσαν στην ανάγκη για πρόβλεψη, μέτρηση και κατασκευή.

Τα κίνητρα αυτά δεν πρέπει να θεωρηθούν ταπεινά, καθώς οδήγησαν πράγματι σε μια ανάπτυξη της κοινωνικής σκέψης που εκφράστηκε ως επιστήμη, ως τέχνη και ως τεχνολογία. Στην κατεύθυνση αυτή, τα Μαθηματικά δεν ανακαλύφθηκαν (ως λογική που προϋπήρχε των κοινωνιών και της ιστορίας) αλλά εφευρέθηκαν (ως ανάγκη πολιτισμικής έκφρασης).

Σε ερευνητικό επίπεδο, τα Μαθηματικά μελετώνται ως επιστήμη και διδακτική, με την απολυταρχία και τη διαψευσιμότητα να αποτελούν αντικρουόμενους πόλους ερμηνείας της ιστορίας και της εξέλιξής τους. Πρόκειται για φιλοσοφίες που τοποθετούνται ανάλογα με τη θεώρησή τους για τον ανύπαρκτο ή καίριο ρόλο των κοινωνιών, των πολιτισμών που ανάπτυξαν και των αναγκών στις οποίες απάντησαν κατά την ιστορική τους πορεία.

Έτσι, η Απολυτότητα συντάσσεται με μια προαιώνια ισορροπία την οποία οι γεωμέτρες οφείλουν να ανακαλύψουν προς όφελος των ατόμων. Αντίθετα, η Διαψευσιμότητα αντιμετωπίζει την επιστήμη ως ιστορικό παράγωγο που έχει λάβει μια μορφή που δεν μπορεί να θεωρηθεί τυχαία, αφού το συνοδεύουν τα συνειδητά επιλεγμένα πρότυπα της κοινωνικής, της πολιτικής και της οικονομικής οργάνωσης.

Μάθηση

Η στάση μας απέναντι στις παραπάνω τοποθετήσεις δεν μπορεί να θεωρηθεί ουδέτερη, δεδομένου ότι ο ερευνητής συντάσσεται με διακριτές επιστημολογικές πεποιθήσεις. Είναι κι αυτός ένα μέρος της κοινωνιο-πολιτισμικής ιστορίας. Η αντικειμενικότητά του περιορίζεται

στα ερευνητικά εργαλεία, εργαλεία παρατήρησης, καταγραφής, μελέτης, συμπερασμού και ελέγχου.

Ανάλογη είναι και η τοποθέτησή μας σχετικά με τη διδακτική των Μαθηματικών γενικότερα και της Γεωμετρίας ειδικότερα. Οι κοινωνιο-πολιτισμικές προσεγγίσεις υποστηρίζουν ότι η χρήση των εργαλείων οδηγεί στην εννοιολογική ανάπτυξη, ενώ για τους κονστρουκτιβιστές η κατασκευή εννοιών προηγείται του συμβολισμού.

Έτσι, προκύπτει το ερευνητικό ερώτημα της αλληλεπίδρασης των υλικών συμβολισμών και των νοητικών λειτουργιών και ειδικότερα της μετάβασης από τη δράση επί υλικοτήτων στην αφαιρετική παραγωγή γενικών εννοιολογικών δομών.

Η γραμμική θεωρία των Σταδίων της ανθρώπινης ανάπτυξης (Piqget) και η Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης (Vygotsky), αν και διατυπωμένες από παλιά, φαίνεται πως ακόμα ορίζουν το πλαίσιο μελέτης του φαινομένου της μάθησης.

Για τον Piaget, ο ενεργός ρόλος ανήκει στο παιδί με την έννοια της ανάπτυξης κινήτρων ενώ το περιβάλλον οφείλει να το βοηθά ώστε αυτό να είναι κριτικό και ικανό στη δημιουργία υποθέσεων και ελέγχου αυτών. Για το Vygotsky, το παιδί αποκτά μια σειρά βοηθητικών μέσων (τα πολιτισμικά εργαλεία ως μέσα εργασίας και κυριαρχίας στη φύση και τη μητρική γλώσσα ως μέσο κοινωνικής συνεύρεσης και νοητικής ανάπτυξης) ώστε να επιδράσει στον κόσμο αλλά και στον εαυτό του.

Έρευνα

Πρόκειται για διαφορετικές πορείες προς τη συνειδητή στάση απέναντι στις έννοιες. Οι γεωμετρικές έννοιες είτε προσεγγίζονται εντός του κατάλληλου σταδίου της παιδικής ανάπτυξης είτε προπορεύονται κάθε εξελικτικής φάσης. Για τον Piaget, η συνειδητοποίηση προηγείται της μάθησης. Για το Vygotsky έπεται αυτής. Έτσι, ο προσχολικός και πρώτος σχολικός έλεγχος των γεωμετρικών σχημάτων παρέχει τη βάση για την επικείμενη ανάπτυξη μιας ποικιλίας πολυσύνθετων εσωτερικών διεργασιών στη σκέψη των παιδιών, που θα τα επιτρέψουν να δομήσουν έννοιες όπως η έκταση, η επάρκειά του, ή και η αξία του, η πυκνότητα κ.ά.. Αντίστοιχα, θεωρούμε ότι οι μαθητές της ΣΤ' τάξης

μπορούν να δομήσουν την έννοια του κύκλου είτε ως σύνολο σημείων που ισαπέχουν από σταθερό σημείο είτε ως ένα σχήμα σταθερής καμπυλότητας, με την έννοια του επιπέδου αδιαπραγμάτευτη και στις δύο περιπτώσεις.

Αυθόρμητες έννοιες	**Ακαδημαϊκές έννοιες**
Ο κύκλος ως φεγγάρι, στεφάνι κ.ά.	Ο κύκλος ως σύνολο σημείων που ισαπέχουν από ένα σταθερό κέντρο.
	Ο κύκλος ως επίπεδο σχήμα σταθερής καμπυλότητας.

Η ακαδημαϊκή έννοιά του προσεγγίζεται στα πλαίσια του πρώτου ορισμού. Αντίθετα, τα μικρά παιδιά έρχονται στο πρωτοβάθμιο σχολείο με πλήθος εικόνων της καθημερινότητας που κινούνται γύρω από το δεύτερο ορισμό του κύκλου (φεγγάρι, προβολή μπάλας, καπάκια κ.ά.). Το κέντρο στις προσχολικές, μη-ακαδημαϊκές, έννοιες απλά δεν είναι απαραίτητο.

Στο Βιβλίο του Μαθητή της ΣΤ' τάξης δίνονται οδηγίες κατασκευής πολυγώνων σε προκατασκευασμένο κύκλο. Σκοπός της παρούσας έρευνας αποτελεί η αντιστροφή αυτής της πορείας που επιβάλλεται στα πλαίσια του συμπεριφοριστικού παραδείγματος. Δεδομένου ότι ο κύκλος βρίσκεται στο επίκεντρο του ενδιαφέροντός μας, επιχειρούμε την κατασκευή του ως παράγωγο ολοένα και πυκνότερων πολυγώνων με ρομποτικούς χειρισμούς. Το ίδιο το μέσο διακρίνεται για την ψηφιακή (προγραμματική) και ταυτόχρονα γνήσια υλική του φύση. Ο δυϊσμός αυτός είναι ερευνητικά κρίσιμος δεδομένου ότι θα βοηθήσει στη μελέτη ενός εν κινήσει παραγόμενου κύκλου (ενεργητική διάσταση) εντός του τρισδιάστατου χώρου και όχι στην οθόνη ενός Η/Υ. Ταυτόχρονα, και συμβατά με την κατά Vygotsky Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης θα ωθήσει τους συμμετέχοντες μαθητές σε μια διερευνητική μάθηση με απαραίτητο το χαρακτηριστικό της προνοητικότητας που η ρομποτική επιβάλλει από τη φύση της.

Σχεδιασμός ρομποτικής εφαρμογής

Η ρομποτική γραφίδα έχει βασιστεί στην πλατφόρμα LEGO WeDo η οποία αναπτύχθηκε από τα πανεπιστήμια M.I.T και Carnegie Mellon. Το WeDo είναι ένα ολοκληρωμένο σύστημα κατασκευής αυτοματισμών που βασίζεται στον προγραμματισμό μικροεπεξεργαστών μέσω σύνδεσης USB με τον ηλεκτρονικό υπολογιστή. Συμπεριλαμβάνονται κινητήρες, αισθητήρες απόστασης και κλίσης καθώς και πλήθος περιφερειακών συσκευών. Τα δομικά στοιχεία του αυτοματισμού είναι πάντα blocks από Lego τα οποία καθιστούν την κατασκευή ελαφριά, σταθερή και εύκολα αναδιατασσόμενη.

Η ρομποτική γραφίδα αποτελείται από τα παρακάτω εξαρτήματα :

1. Ένας μικροεπεξεργαστής (Hub)
2. Δύο βηματικοί κινητήρες (Servo Motor)
3. Μια φωτοδίοδος (Led)
4. Ένας στυλογράφος

Για τον προγραμματισμό του μικροεπεξεργαστή χρησιμοποιήθηκε το Scratch 1.4 το οποίο έχει αναπτυχθεί επίσης από το M.I.T και διανέμεται δωρεάν, με άδεια χρήσης ελεύθερου λογισμικού / λογισμικού ανοιχτού κώδικα. Το Scratch κάνει χρήση εντολών - πλακιδίων για την συγγραφή του κώδικα, καθιστώντας το έτσι ιδανικό για εκμάθηση προγραμματισμού σε μικρές ηλικίες. Οι μαθητές ήταν ήδη εξοικειωμένοι με το περιβάλλον της εφαρμογής καθώς και τον προγραμματισμό από τη σχολική τους ύλη. Το λογισμικό περιλαμβάνει μια ειδική ομάδα εντολών - πλακιδίων για τον προγραμματισμό του Lego WeDo η οποία ακολουθεί την ίδια φιλοσοφία και λογική με τις υπόλοιπες εντολές του Scratch.

Η κίνηση της κατασκευής επιτυγχάνεται με τους δυο βηματικούς κινητήρες, οι οποίοι μπορούν να εκτελέσουν πλήρη περιστροφή. Το πρόγραμμα οδηγεί τους κινητήρες σε συγκεκριμένες θέσεις, επιτρέποντας τη ρομποτική γραφίδα να κινηθεί προς τα εμπρός ή να περιστραφεί. Το βήμα κίνησης είναι μεταβλητό μέσω της αλλαγής παραμέτρων στο πρόγραμμα, δίνοντας έτσι τη δυνατότητα πειραματισμού και δημιουργίας πληθώρας γεωμετρικών σχημάτων. Επιπλέον, η εύκολη αντικατάσταση του στυλογράφου επιτρέπει την αλλαγή χρωματισμού του ίχνους ώστε να γίνουν πιο διακριτές οι

διαφορές ανάμεσα σε γεωμετρικά σχήματα στην ίδια επιφάνεια κίνησης.

Η παρούσα έρευνα διακρίνει το στατικό, μαθησιακό περιβάλλον μιας ελληνικής πρωτοβάθμιας τάξης (στατικό ως προς τη δομή του σχολικού εγχειριδίου και της διδακτικής που αυτό επιβάλλει) και μιας τάξης που εργάζεται σε ένα ενεργητικό μαθησιακό περιβάλλον που επιχειρεί μια γόνιμη ρωγμή εντός του ίδιου εκπαιδευτικού συστήματος (ενεργητικό λόγω της δυνατότητας διαπραγμάτευσης των γεωμετρικών εννοιών).

Ωστόσο, διατηρείται ως κοινός παρονομαστής η παρουσία του πολιτισμικού εργαλείου (διαβήτης ή/και ρομποτική κατασκευή), με τη δεύτερη να παράγει υλικό ίχνος κατόπιν προγραμματισμού σε σειρά βημάτων. Και τα βήματα αυτά περιγράφουν μια συνειδητή, μεταγνωστική διαδικασία.

Εφαρμογή

Στην έρευνά μας συμμετείχαν 20 μαθητές και μαθήτριες της ΣΤ' τάξης ενός 12/θέσιου Δημοτικού Σχολείου της Ανατολικής Θεσσαλονίκης. Κάθε μαθητής συμπλήρωσε δύο φορές ένα δομημένο διαδικτυακό ερωτηματολόγιο που περιείχε ερωτήματα ανοικτού και κλειστού τύπου. Ενδιάμεσα οργανώθηκαν δραστηριότητες εντός του εργαστηρίου πληροφορικής με τη χρήση Η/Υ και ρομποτικής διάταξης, όπως περιγράφηκε νωρίτερα.

Αρχική συμπλήρωση ερωτηματολογίου (09/02/2015)

1ο ερώτημα : Σχεδίασε ένα γεωμετρικό κύκλο.

Ζητήθηκε ο σχεδιασμός σε Η/Υ ενός γεωμετρικού κύκλου και η πλειονότητα των μαθητών (12/20) παρήγαγε κύκλους απουσία κέντρου αλλά και γενικότερα κάθε γεωμετρικής αυστηρότητας, ενώ οι υπόλοιποι (8/20) δεν απάντησαν.

Σχόλια : Δεδομένης της γενικότερης συμμετοχής, διακρίνεται μια ανασφάλεια εκ μέρους των μαθητών ή και μια έλλειψη γνώσεων.

2ο ερώτημα : Με ποιο όργανο μπορείς να τον σχεδιάσεις ;

Ο διαβήτης υπήρξε η κυρίαρχη απάντηση (17/20), οι 2 επέλεξαν μη γεωμετρικά όργανα (‘με το χέρι’, ‘με το μολύβι’) και ο 1 δεν απάντησε.

Σχόλια : Η παρουσία του οργάνου, που το ακαδημαϊκό σχολικό περιβάλλον αναδεικνύει, φαίνεται πολύ ισχυρή. Ωστόσο, η προβολή του διαβήτη θα πρέπει να ελεγχθεί αν συνακόλουθα έχει προάγει και την κατανόηση της γεωμετρικής έννοιας του κύκλου.

3ο ερώτημα : Με ποιο άλλο αντικείμενο μπορείς να σχεδιάσεις κύκλος ;

Οι μαθητές επιλέγουν αντικείμενα της καθημερινότητας (7/20), οι 7 έδωσαν αμφίσημες απαντήσεις (‘με το χέρι’, ‘με το μολύβι’), οι 2 δεν απάντησαν, ενώ οι 4 πρότειναν και πάλι γεωμετρικά όργανα (διαβήτη ή μοιρογνωμόνιο).

Σχόλια : Η περιορισμένη παραπομπή σε καθημερινά αντικείμενα και η παρουσία γεωμετρικών οργάνων ενισχύουν την κυριαρχία των ακαδημαϊκών έναντι των καθημερινών εννοιών, συνυπολογίζοντας και τη χρήση του χεριού και του μολυβιού σε κάθε περίπτωση κατασκευής.

4ο ερώτημα : Υπάρχει κάποια διαφορά ανάμεσα στους δύο κύκλους ;

Οι 15/20 μαθητές απάντησαν θετικά, με τους υπόλοιπους να απαντούν αρνητικά.

5ο ερώτημα : Εξήγησε την επιλογή σου.

Οι 13/20 μαθητές προτιμούν το διαβήτη έναντι άλλων καθημερινών αντικειμένων για λόγους ακρίβειας αλλά και αισθητικής. Αντίθετα οι 4 θεωρούν εξίσου αποτελεσματική κάθε κατασκευή. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν 2 απαντήσεις (‘Ναι, γιατί είναι διαφορετικά σχεδιασμένα’, ‘Ναι, γιατί είναι διαφορετικά υλικά’), ενώ ο 1 δεν απάντησε.

Σχόλια : Οι μαθητές μας συνδέουν απευθείας τη γεωμετρική με την αισθητική τελειότητα του παραγόμενου σχεδίου. Ωστόσο, η κυριαρχία

του γεωμετρικού οργάνου ποτέ δεν οδηγεί στην κρισιμότητα της επιλογής ενός κέντρου ή της δυνατότητας αυξομείωσης του μεγέθους έναντι του αντίστοιχου περιορισμού που επιβάλει το αντικείμενο της καθημερινότητας. Κάτι τέτοιο αφήνεται να εννοηθεί από τους δύο μαθητές που επισημαίνουν ότι κάθε διαφορετικό υλικό παράγει διακριτό αποτέλεσμα.

6ο ερώτημα : Τι είδους γραμμή είναι ένας κύκλος ;

Ο κύκλος αναγνωρίζεται ως καμπύλη γραμμή (19/20) και μόνο ένας επιλέγει την τεθλασμένη.

Σχόλια : Ο μαθητής αυτός, γενικά, δεν απάντησε στις ερωτήσεις του αρχικού ερωτηματολογίου αλλά θεώρησε ότι η παραγωγή κύκλου με διαβήτη ή άλλο αντικείμενο δεν παράγει διακριτά αποτελέσματα.

7ο ερώτημα : Ανέφερε τρία αντικείμενα της καθημερινής σου ζωής που να έχουν κυκλικό σχήμα.

Σχεδόν όλοι οι μαθητές (19/20) ανέφεραν περισσότερα από δύο αντικείμενα. Η πλειονότητα των καθημερινών αντικειμένων (16/18 διαφορετικά αντικείμενα) αντιστοιχούσαν στην έννοια του κύκλου ‘ως επίπεδο σχήμα σταθερής καμπυλότητας’ (πιάτο, ήλιος, ποτήρι, λεκάνη κ.ά.) και μόνο δύο στην έννοια του κύκλου ως ‘σύνολο σημείων που ισαπέχουν από ένα σταθερό κέντρο’ (ρόδα, ανεμιστήρας).

Σχόλια : Θεωρούμε ότι τα επιλεγόμενα αντικείμενα δεν αποτελούν μια απευθείας συνειδητή επιλογή του β’ ορισμού του κύκλου, αλλά προκύπτουν από την ισχυρή τους ιστορική και κοινωνική παρουσία.

8ο ερώτημα : Ποια χαρακτηριστικά του κύκλου περιλαμβάνει ο τροχός μιας ξύλινης άμαξας ;

Αθροιστικά, οι μισοί μαθητές επέλεξαν ‘δε γνωρίζω’ (8/20) ή ‘δεν απαντώ’ (2/20). Μια σαφή ή λιγότερο σαφή απάντηση (‘ακτίνες’, ‘καμπύλη’, ‘κύκλος’, και ‘σχήμα’) έδωσαν οι 8/20, ενώ υπήρξαν και 6 καταγραφές σε ποιοτικά – και ως τέτοια μη γεωμετρικά - χαρακτηριστικά της εικονιζόμενης ρόδας (‘ξύλινη’, ‘καφέ’).

Σχόλια : Η απουσία απάντησης αλλά και οι αναφορές στο χρώμα και το είδος του υλικού δείχνουν μια έλλειψη ομαλής μετάβασης από τη φάση κυριαρχίας των καθημερινών εννοιών στη φάση κυριαρχίας των ακαδημαϊκών εννοιών.

Δράσεις ρομποτικής (11/02/2015)

Το δεύτερο στάδιο της έρευνας περιλάμβανε τη χρήση της ρομποτικής γραφίδας από τους μαθητές. Πραγματοποιήθηκε σε μια ειδικά διαμορφωμένη επιφάνεια η οποία παρείχε τον απαραίτητο χώρο σχεδίασης από την κατασκευή, ενώ για την σύνδεση με τον υπολογιστή χρησιμοποιήθηκε καλώδιο προέκτασης USB τοποθετημένο σε κατάλληλη θέση ώστε να μην παρεμποδίζεται η κίνηση της γραφίδας. Δόθηκαν επίσης σελίδες λευκού χαρτιού επιφανείας Α3 πάνω στο οποίο σχεδίασε το ρομπότ καθώς και στυλογράφοι.

Το πρόγραμμα σε Scratch, βάσει του οποίου πραγματοποιούνταν η κίνηση της γραφίδας, ήταν διαθέσιμο στους μαθητές, οι οποίοι άλλαζαν τις παραμέτρους στην προσπάθειά τους να αναπρογραμματίσουν τη γραφίδα ώστε να σχεδιάσει έναν κύκλο. Είχαν την δυνατότητα να μεταβάλλουν το μήκος του βήματος κίνησης προς τα εμπρός, τη γωνία περιστροφής καθώς και το συνολικό αριθμό βημάτων μετακίνησης. Δεδομένου ότι οι μαθητές γνώριζαν ήδη να προγραμματίζουν σε Scratch δε δόθηκαν αναλυτικές οδηγίες ή κατευθύνσεις και αφέθηκαν ελεύθεροι να πειραματιστούν μέσα από διαδικασίες δοκιμών και ελέγχων ώστε να επιτύχουν το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Οι αρχικές τιμές των μεταβλητών είχαν ως αποτέλεσμα τη σχεδίαση πολυγώνου, κάτι που γρήγορα έγινε αντιληπτό και σταδιακά με μείωση του βήματος κίνησης και γωνίας περιστροφής οι μαθητές οδηγήθηκαν εμπειρικά στην διαδικασία σχεδίασης ενός κύκλου αποτελούμενου από μικρά ευθύγραμμα τμήματα.

Τελική συμπλήρωση ερωτηματολογίου (13/02/2015)

2ο ερώτημα : Με ποιο όργανο μπορείς να τον σχεδιάσεις ;

Ο διαβήτης υπήρξε και πάλι η κυρίαρχη απάντηση (18/20), ωστόσο αντικαταστάθηκαν οι λιγότερο σαφείς απαντήσεις από συγκεκριμένες υλικότητες ('ρομπότ', 'πιάτο').

Σχόλια : Οι συμμετέχοντες μαθητές αδυνατούν να εντάξουν τη ρομποτική παραγωγή κύκλου στις απαντήσεις τους μετά τη σύντομη εμπλοκή τους με αυτή. Επιπρόσθετα, βιώνουν τη μονομερή ενδοσχολική και εξωσχολική κυριαρχία (κοινωνικό) του επιστημονικά ορθού (στην περίπτωσή μας του διαβήτη) αγνοώντας άλλα αντικείμενα της βιωμένης πραγματικότητας.

3ο ερώτημα : Με ποιο άλλο αντικείμενο μπορείς να σχεδιάσεις κύκλος ;

Οι μαθητές αυξάνουν τις αναφορές τους σε αντικείμενα της καθημερινότητας (10/20), μειώνουν στις 3 τις αμφίσημες απαντήσεις ('με το μολύβι'), οι 2 δεν απάντησαν, οι 3 πρότειναν γεωμετρικά όργανα (διαβήτη) ενώ οι 2 επέλεξαν τον Η/Υ και το ρομπότ.

Σχόλια : Παρατηρείται μια στατιστικά σημαντική μετατόπιση στις απαντήσεις μόνο σε σχέση με την επιλογή καθημερινών αντικειμένων.

4ο ερώτημα : Υπάρχει κάποια διαφορά ανάμεσα στους δύο κύκλους ;

Οι 12/20 μαθητές απάντησαν θετικά, με τους υπόλοιπους να απαντούν αρνητικά.

Σχόλια : Η συμμετοχή των μαθητών σε δραστηριότητες ρομποτικής φαίνεται να ευνόησε την επιλογή καθημερινών αντικειμένων και συνακόλουθα το β' ορισμό του κύκλου. Ωστόσο, είναι απαραίτητη η διερεύνηση αυτής της παρατήρησης με νέες έρευνες.

5ο ερώτημα : Εξήγησε την επιλογή σου.

Οι 10/20 μαθητές προτιμούν το διαβήτη για λόγους ακρίβειας (πλέον οι αισθητικές αιτιάσεις απουσιάζουν). Αντίθετα οι 7 θεωρούν εξίσου

αποτελεσματική κάθε κατασκευή. Ενδιαφέρον παρουσιάζει 1 απάντηση που για πρώτη φορά προσεγγίζει το ρομποτικά παραγόμενο κύκλο ως τεθλασμένη και όχι ως καμπύλη (Το ρομπότ το κάνει σαν πολύγωνο ενώ ο διαβήτης … κανονικό κύκλο), ενώ οι 2 δεν απάντησαν.

Σχόλια : Παρατηρώντας τη μείωση της κυριαρχίας του γεωμετρικού οργάνου για την κατασκευή κύκλων και σε συνδυασμό με τις απαντήσεις του 4ου ερωτήματος, φαίνεται ότι οι ρομποτικές δραστηριότητες για την πρόβλεψη κατασκευής κύκλου, περιόρισαν τη χρήση του διαβήτη και συνακόλουθα της ύπαρξης ενός υλικού κέντρου.

6ο ερώτημα : Τι είδους γραμμή είναι ένας κύκλος ;

Ο κύκλος αναγνωρίζεται ως καμπύλη γραμμή (17/20), ενώ 3 πλέον μαθητές επιλέγουν την τεθλασμένη γραμμή.

Σχόλια : Η αύξηση αυτή δεν είναι στατιστικά σημαντική έχει όμως μια ποιοτική αξία λόγω των επιλεγόμενων ρομποτικών δραστηριοτήτων. Οι δραστηριότητες αυτές, όπως σχεδιάστηκαν, οδηγούσαν στον κύκλο μέσω κανονικών πολυγώνων με ολοένα και περισσότερες πλευρές.

7ο ερώτημα : Ανέφερε τρία αντικείμενα της καθημερινής σου ζωής που να έχουν κυκλικό σχήμα.

Σχεδόν όλοι οι μαθητές (19/20) ανέφεραν και πάλι περισσότερα από δύο αντικείμενα. Η πλειονότητα των καθημερινών αντικειμένων (14/18 διαφορετικά αντικείμενα) αντιστοιχούσαν στην έννοια του κύκλου ‘ως επίπεδο σχήμα σταθερής καμπυλότητας’ (πιάτο, κρέπα, φακός, κουδούνι κ.ά.) και πλέον τέσσερα στην έννοια του κύκλου ως ‘σύνολο σημείων που ισαπέχουν από ένα σταθερό κέντρο’ (ρόδα, ανεμιστήρας, μάτι, ψηφιακός δίσκος).

Σχόλια : Όπως και κατά την ανάλυση του α’ ερωτηματολογίου, τα επιλεγόμενα αντικείμενα δεν μπορούν να θεωρηθούν ως μια απευθείας συνειδητή επιλογή του α’ πλέον ορισμού του κύκλου, αλλά έχουν μια ισχυρή ιστορική και κοινωνική παρουσία.

8ο ερώτημα : Ποια χαρακτηριστικά του κύκλου περιλαμβάνει ο τροχός μιας ξύλινης άμαξας ;

Επαναλαμβάνεται η αδυναμία ή η άρνηση απάντησης από τους μισούς μαθητές (11/20). Μια σαφή ή λιγότερο σαφή απάντηση ('καμπύλη', 'κύκλος', και 'σχήμα') έδωσαν οι 6/20 όμως με την έννοια της 'ακτίνας' πλέον να απουσιάζει, ενώ υπήρξαν και 3 καταγραφές σε ποιοτικά, μη γεωμετρικά χαρακτηριστικά ('ξύλινη', 'καφέ').

Σχόλια : Η συμπλήρωση της απάντησης μετά την εμπλοκή σε σύντομες ρομποτικές δραστηριότητες βοήθησε στη μείωση των μαθητικών αναφορών στο χρώμα και το είδος του υλικού (από 6 σε μόλις 3).

Συμπεράσματα

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια της παραγωγής εναλλακτικών διδακτικών παρεμβάσεων χρήσιμων για την ίδια τη σχολική μονάδα (βάση ερευνητικών δεδομένων). Οι εμπλεκόμενοι μαθητές διακρίνονται για την εξοικείωσή τους με τις ρομποτικές κατασκευές και τη συνακόλουθη συμμετοχή τους σε διαγωνισμούς.

Οι διδακτικές παρεμβάσεις εξελίχθηκαν εντός μιας εβδομάδας. Το αυστηρό χρονικό πλαίσιο δεν επέτρεψε μια εκτεταμένη ρομποτική εφαρμογή στο εργαστήριο Η/Υ. Έτσι, τα συμπεράσματα θα πρέπει να ελεγχθούν εκ νέου από άλλες έρευνες. Ωστόσο, μπορούμε να θέσουμε σε διάλογο τα εξής :

- Κάθε σύντομη παρέμβαση αδυνατεί να μεταβάλλει πεποιθήσεις των μαθητών για τη χρήση ιστορικά και κοινωνικά αποδεκτών γεωμετρικών οργάνων (διαβήτης, μοιρογνωμόνιο).
- Οι ρομποτικές παρεμβάσεις ευνόησαν τη χρήση καθημερινών αντικειμένων για την κατασκευή κύκλων έναντι της χρήσης γεωμετρικών οργάνων.
- Οι ρομποτικές παρεμβάσεις φαίνεται να ευνόησαν το β' ορισμό του κύκλου περί σταθερής καμπυλότητας έναντι του α' ορισμού περί ίσης απόστασης σημείων από σταθερό κέντρο.

- Η εμπλοκή της ρομποτικής οδηγεί τους μαθητές σε διαλόγους διαπραγμάτευσης των απαραίτητων εντολών (κοινωνικό) και σε τροποποίηση κάθε αναποτελεσματικής επιλογής (μεταγνωστικό).
- Η ρομποτική εφαρμογή μπορεί να ευνοήσει τη δόμηση της έννοιας του κύκλου ως κλειστή τεθλασμένη γραμμή με άπειρο πλήθος πλευρών.
- Η ψηφιακή και ταυτόχρονα υλική δομή των ρομποτικών κατασκευών μπορεί να οδηγήσει το μαθητή στη σταδιακή διάκριση της σημασίας (κύκλος) από το αντικείμενο (ρόδα) και να άρει κάθε σύνδεση μεταξύ γεωμετρικών και μη γεωμετρικών χαρακτηριστικών (π.χ. σχέση κύκλου και χρώματος ή υλικού).
- Πλήθος καθημερινών κυκλικών αντικειμένων στερείται διακριτού κέντρου, συμπαρασύροντας και την έννοια της ακτίνας.
- Ταυτόχρονα, η χρήση του διαβήτη από τους μαθητές – αν και ορίζει με σαφήνεια ένα κέντρο, δεν οδηγεί απαραίτητα στην κατανόηση συναφών με τον κύκλο εννοιών (π.χ. ακτίνα, διάμετρος).

Σε κάθε περίπτωση, προκρίνουμε την ένταξη της έρευνας στην καθημερινότητα του ελληνικού σχολείου και την καταγραφή, κοινοποίηση και επανέλεγχο κάθε ασφαλούς συμπεράσματος ή νέου ερωτήματος. Η κατεύθυνση αυτή αφορά εκπαιδευτικούς και μαθητές για διαφορετικούς λόγους (διδακτικούς και γνωστικούς).

Βιβλιογραφία

Chassapis, D., *The Social ideologies of School Mathematics Applications: A Case Study of the Elementary School Textbooks*, στο *For the Learning of Mathematics,* vol. 17, 3, November 1997, pp. 24-27, 1997.

Cobb, P., *Cultural Tools and Mathematical Learning: A Case Study,* Journal for Research in Mathematics Education, 1995, Vol. 26, No. 4, p. 364. [παραθέτει τον Rogoff, B., *Apprenticeship in thinking: Cognitive development in Social Context*, Oxford : Oxford University Press, 1990, p. 35].

Γιαννακοπούλου, Ε., *Οι Α-Γωνίες του Κύκλου Μέσα από την Τέχνη – Η Επιμόρφωση στα Μαθηματικά από την Οπτική Της Εκπαίδευσης Ενηλίκων*, στο Χασάπης, Δ. (Επιμ.), *Τα Μαθηματικά στην Προσχολική και στην Πρώτη Σχολική Εκπαίδευση*, Πρακτικά 12ου Διημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α., Τ.Ε.Α.Π.Η., σσ. 77-99, 2014.

Paour, J. L., *Ο πιαζετικός οικοδομισμός και η έννοια της διαμεσολαβημένης μαθησιακής εμπειρίας*, σ. 83. Παπαμιχαήλ Γ. (Επιμ.), Κοινωνιο-γνωστική Προσέγγιση και Διδακτικές Διαδικασίες της Μάθησης των Φυσικών και Λογικο-μαθηματικών Εννοιών στο Σχολείο, Gutenberg, 1994.

Saljo, R., *Learning as the use of tools – A socio-cultural perspective on the human – technology link*, στο Karen Littleton & Paul Light (Eds.), *Learning with Computers: Analysing Productive Interaction*, London, Routledge, pp. 144-161, 1991.

Vygotsky, L., *Σκέψη και Γλώσσα*, Αθήνα, Γνώση, 1η έκδοση, 1988.

ΥΠ.Ε.Π.Θ. - Π.Ι., *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών και Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών*, Φ.Ε.Κ., τεύχος Β', αρ. φύλλου 303/13.3.03.

http://www.wrohellas.gr, WROHellas - Lego WeDo

https://scratch.mit.edu, Scratch home page – Scratch

spapakon@sch.gr pavlos@sch.gr

ΣΧΗΜΑΤΑ: ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΣΤΟΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΟΡΙΣΜΟ

Πολυξένη Γ. Τριανταφυλλίδου

Δασκάλα στο Αρσάκειο Δημοτικό Σχολείο Θεσσαλονίκης
Κάτοχος μεταπτυχιακού διπλώματος από το Π.Τ.Δ.Ε. Φλώρινας με τίτλο: «Θετικές Επιστήμες και Νέες Τεχνολογίες»

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εκπαιδευτική πρόταση οι Καλές Τέχνες και συγκεκριμένα, η ζωγραφική, αποτελεί αφορμή και εφαλτήριο για να συντελεστεί η ανάπτυξη της γεωμετρικής συλλογιστικής σκέψης σε μαθητές Δ΄ και Ε΄ Δημοτικού. Οι μαθητές και οι μαθήτριες συμμετέχοντας ενεργά στη διαδικασία της μάθησης, μελετούν αλλά και παράγουν οι ίδιοι έργα τέχνης καλλιτεχνών ευρέως γνωστών. Στη συνέχεια αναγνωρίζουν γεωμετρικά σχήματα μέσα σε αυτά τα έργα τέχνης. Έπειτα, τα επεξεργάζονται μέσα από χειραπτικά και ψηφιακά εργαλεία. Από την κατά προσέγγιση αναπαράσταση που επιτρέπει η Τέχνη οι μαθητές και οι μαθήτριες μεταβαίνουν στην ακρίβεια που απαιτούν τα Μαθηματικά και καταλήγουν στους ακριβείς γεωμετρικούς ορισμούς των σχημάτων. Μετά τη διατύπωση του γεωμετρικού ορισμού, που είναι και ο βασικός στόχος του διδακτικού σεναρίου, οι μαθητές και οι μαθήτριες αυτοαξιολογούνται μέσα από ειδικά διαμορφωμένες δραστηριότητες. Η διαδικασία στηρίζεται σε μεγάλο βαθμό στην αισθητηριακή ενεργοποίηση. Η μετάβαση από το αισθητό στο νοητό συντελείται μέσα από μια διαδικασία με επαγωγικό χαρακτήρα στην οποία οι μαθητές και οι μαθήτριες διαδραματίζουν ενεργό ρόλο.

Εισαγωγή

Σε πρώτο επίπεδο τα Μαθηματικά και η Τέχνη φαίνεται να μη συνδέονται με κάποιον τρόπο καθώς και τα δύο στηρίζονται σε διαφορετικά μοντέλα σκέψης (Stix, 1994). Η Τέχνη είναι η δημιουργική έκφραση που μέσα στο έργο αποτυπώνει την ψυχική κατάσταση, τα συναισθήματα, τις ιδέες, την αίσθηση ή τον οραματισμό του καλλιτέχνη. Τα Μαθηματικά μιλούν τη γλώσσα της λογικής και ποσοτικοποιούν τα ποιοτικά δεδομένα της φύσης.

Ωστόσο, η Τέχνη και τα Μαθηματικά αναδεικνύουν τη συμπληρωματικότητα και δυαδικότητα της ανθρώπινης φύσης που υπαγορεύεται από την ανάγκη για έκφραση και την ανάγκη για πρόβλεψη και κατανόηση, συνθέτοντας από κοινού δύο κύριες πνευματικές δραστηριότητες του ανθρώπινου πολιτισμού (Μαυρομμάτης, Σταθοπούλου & Παπανικολάου 2014). Ο συνδυασμός των δύο αυτών πνευματικών διεργασιών μπορεί να βοηθήσει στη επίτευξη εκπαιδευτικών στόχων που αφορούν τα Μαθηματικά και ειδικότερα τη Γεωμετρία.

Τα πλεονεκτήματα της Γεωμετρίας

Η σημαντικότητα της Γεωμετρίας είναι αδιαμφισβήτητη καθώς εμπεριέχει τρεις διαφορετικές γνωστικές διαδικασίες:

1. διαδικασίες *οπτικοποίησης* για την αναπαράσταση αντικειμένων του χώρου, την επεξήγηση μιας πρότασης, τη συστηματική διερεύνηση μιας σύνθετης κατάστασης, ή για μια υποκειμενική επαλήθευση και τον έλεγχο κάποιων υποθέσεων (Τζεκάκη, 2007),
2. διαδικασίες *κατασκευής* με συγκεκριμένα εργαλεία σε συγκεκριμένες συνθήκες,
3. διαδικασίες *συλλογισμού* (Κολέζα, 2000).

Οι διαδικασίες αυτές μπορούν να πραγματοποιηθούν ανεξάρτητα η μια από την άλλη, αλλά ο συνδυασμός τους είναι απαραίτητος για την ωρίμανση της γεωμετρικής σκέψης.

Τα επίπεδα γεωμετρικής αντίληψης

Η γεωμετρική αντίληψη εμφανίζεται ήδη από τη βρεφική ηλικία, η ανάπτυξή της όμως πραγματοποιείται κατά την παιδική ηλικία, όπου οι γεωμετρικές εμπειρίες του ατόμου γίνονται περισσότερες. Η διδασκαλία της Γεωμετρίας στα σχολικά χρόνια προάγει τη γεωμετρική συλλογιστική. Η Γεωμετρία χρησιμοποιείται τόσο ως διδακτικό πλαίσιο γνώσης, όσο και ως υπόβαθρο για την κατανόηση άλλων γνωστικών αντικειμένων και εννοιών.

Μέσα στους πολλούς ειδικούς που τις τελευταίες δεκαετίες ασχολήθηκαν με τη θεωρία και μελέτη της Διδακτικής του αντικειμένου και τη συλλογιστική του χώρου ξεχώρισαν ιδιαίτερα οι προτάσεις των Ολλανδών παιδαγωγών Van Heile. Στο μοντέλο τους, η κατανόηση των ιδεών του χώρου κατανέμεται σε πέντε επίπεδα, τα επίπεδα ανάπτυξης γεωμετρικής σκέψης. Τα επίπεδα έχουν προκαθορισμένη διαδοχική σειρά. Το πέρασμα από το ένα στο άλλο επίπεδο δεν είναι μια αυθόρμητη διαδικασία. Δηλαδή, όταν η συλλογιστική του κάθε επιπέδου έχει πλήρως κατακτηθεί, το πέρασμα είναι συστηματικό και προκαθορισμένο (Van de Walle, 2005). Θα αναφερθούμε στα τρία πρώτα επίπεδα που αφορούν το Δημοτικό Σχολείο.

Επίπεδο 0: *Νοερή απεικόνιση*. Στο επίπεδο αυτό το γεωμετρικό σχήμα αντιμετωπίζεται ως ολότητα. Το σχήμα γίνεται αντιληπτό και ορίζεται από την εμφάνιση, τη μορφή του (Van Hiele, 1999). Δηλαδή, για παράδειγμα, ένα σχήμα είναι τετράγωνο επειδή μοιάζει με τετράγωνο. Ένα τετράγωνο που έχει περιστραφεί ενδέχεται να μην γίνεται αντιληπτό ως τετράγωνο. Τα προϊόντα σκέψης στο επίπεδο αυτό είναι οι κατατάξεις και οι ομαδοποιήσεις των σχημάτων που φαίνονται όμοια.

Επίπεδο 1: *Ανάλυση*. Στο επίπεδο αυτό τα σχήματα είναι φορείς των ιδιοτήτων τους (Van Hiele, 1999) και οι μαθητές αρχίζουν να διακρίνουν τα στοιχεία εκείνα που συνιστούν ένα σχήμα, καθώς και τις σχέσεις μεταξύ σχημάτων που ανήκουν στην ίδια ομάδα. Δραστηριότητες όπως η παρατήρηση, η μέτρηση και η κατασκευή, είναι κατάλληλες. Οι ιδιότητες των σχημάτων είναι το τελικό αποτέλεσμα της συλλογιστικής πορείας στο επίπεδο αυτό.

Επίπεδο 2: *Άτυπα συμπεράσματα.* Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές προβληματίζονται πάνω στις ιδιότητες, τις κατατάσσουν λογικά (Van Hiele, 1999), αντιλαμβάνονται τις σχέσεις των ιδιοτήτων και επιλέγουν τις απολύτως αναγκαίες για να κατατάξουν ένα σχήμα στην ομάδα του. Δηλαδή προχωρούν πέρα από τις ιδιότητες και επικεντρώνονται σε λογικά επιχειρήματα σχετικά με τις ιδιότητες. Οι σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων των σχημάτων είναι τα αποτελέσματα της συλλογιστικής πορείας στο επίπεδο αυτό. Αυτή είναι η μετάβαση από το αισθητό, όπου η εμφάνιση του σχήματος είναι αυτή που καθορίζει τις ιδιότητές του για το παιδί, στο νοερό όπου επιδιώκεται η ακριβής διατύπωση του γεωμετρικού ορισμού του σχήματος.

		Επίπεδο 2: Άτυπα συμπεράσματα	Ιδιότητες σχημάτων	Σχέσεις ανάμεσα στις ιδιότητες
	Επίπεδο 1: Ανάλυση	Ταξινομήσεις σχημάτων	Ιδιότητες σχημάτων	
Επίπεδο 0: Νοερή απεικόνιση	Σχήματα	Ταξινομήσεις σχημάτων		

Διδακτικό σενάριο

Γνωστικό αντικείμενο

Μαθηματικά Δ΄ και Ε΄τάξης

Στο συγκεκριμένο διδακτικό σενάριο αξιοποιείται το μοντέλο των επιπέδων των Van Heile με βάση την προτεινόμενη ύλη του αντίστοιχου σχολικού βιβλίου για τα πολύγωνα της Δ’ Δημοτικού και προτείνεται η επέκταση σε όλα τα σχήματα με τη βοήθεια του βιβλίου «Τέχνη και Μαθηματικά» των Α. Μαυρομάτη, Σ. Σταθοπούλου και Α. Παπανικολάου.

Σκοπός και Στόχοι

Αναμένεται οι μαθητές:

- να αναγνωρίσουν τα σχήματα,
- να εκμεταλλευτούν τις εμπειρικές αντιλήψεις τους για τα σχήματα,
- να κατασκευάσουν τα σχήματα με χειραπτικά υλικά,
- να μετρήσουν τις πλευρές και τις γωνίες των σχημάτων με τα γεωμετρικά όργανα
- να διακρίνουν τις ιδιότητές τους
- να διατυπώσουν τον γεωμετρικό ορισμό των σχημάτων.

Σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών για την Δ' στόχος στη Γεωμετρία είναι οι μαθητές «*να μπορούν να περιγράφουν και να σχεδιάζουν τα συνήθη επίπεδα γεωμετρικά σχήματα*». Σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών αλλά και το Αναλυτικό Πρόγραμμα της Ε΄ Δημοτικού στόχος της Γεωμετρίας είναι οι μαθητές να μπορούν «*να υπολογίζουν το μήκος ενός κύκλου*».

Εκτιμώμενη χρονική διάρκεια

Η διάρκεια του σεναρίου είναι 6 διδακτικές ώρες και εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τις προϋπάρχουσες γνώσεις και δεξιότητες των μαθητών, τόσο στη γεωμετρία όσο και στις ΤΠΕ.

Αξιοποίηση των ΤΠΕ στο διδακτικό σενάριο

Κατά την εξέλιξη του διδακτικού σεναρίου θα χρησιμοποιηθεί το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Geometer's SketchPad (παρέχεται δωρεάν από το Υπουργείο Παιδείας), το λογισμικό κατασκευής διαδραστικών ασκήσεων Articulate Storyline και το ψηφιακό σχολείο e-arsakeio των Αρσακείων Σχολείων.

Απαραίτητα χειραπτικά εργαλεία

- Το βιβλίο «Τέχνη και Μαθηματικά»
- Ξυλάκια και σύνδεσμοι
- Χειραπτικός γεωπίνακας και λαστιχάκια

- Έντυπος γεωπίνακας
- Χάρακες και μοιρογνωμόνια

Υλικοτεχνική υποδομή

- Ο ηλεκτρονικός υπολογιστής της τάξης
- Προβολέας πολυμέσων
- Διαδραστικός πίνακας
- Πρόσβαση στο διαδίκτυο
- Το πρόγραμμα Geometer ‘s SketchPad
- Πρόσβαση στο ψηφιακό σχολείο e-arsakeio
- Λογισμικό κατασκευής διαδραστικών ασκήσεων Articulate Storyline

Προαπαιτούμενες γνώσεις και δεξιότητες των μαθητών

Γεωμετρία

Αναγνώριση των βασικών γεωμετρικών σχημάτων

ΤΠΕ

Άνετη χρήση ποντικιού, γραφίδας διαδραστικού πίνακα

Εξοικείωση με τον ψηφιακό γεωπίνακα

Βασικές λειτουργίες του λογισμικού Geometer ‘s SketchPad

Εξοικείωση με το ψηφιακό σχολείο e-arsakeio

Οργάνωση τάξης

Το σενάριο υλοποιείται σε παραδοσιακή αίθουσα με θρανία διαμορφωμένα κατάλληλα ώστε να ευνοείται η ομαδοσυνεργατική διδασκαλία (ομάδες τριών θρανίων, 4-5 μαθητών).

Μορφή διδασκαλίας

Για το διδακτικό μοντέλο ενδείκνυται μια μεικτή μορφή διδασκαλίας, που οι βασικές συνιστώσες του είναι:

- η ομαδοσυνεργατική μέθοδος,
- η ενεργή συμμετοχή των μαθητών στο διερευνητικό μοντέλο,
- οι ερωταποκρίσεις και η διαλογική συζήτηση,
- η επίδειξη,
- ο πειραματισμός,
- η προετοιμασία και χρήση υποδειγμάτων,
- η επιμέρους και γενική ανακεφαλαίωση και
- η διαβάθμιση του επιπέδου δυσκολίας.

Ο ρόλος του δασκάλου κυρίως είναι: διαμεσολαβητικός με καθοδήγηση και παροχή διευκρινίσεων, βοηθητικός, παρεμβατικός και ανατροφοδοτικός.

Στάδια σεναρίου

Α΄ φάση: Ανάκληση – Επανάληψη προϋπάρχουσας γνώσης

Προβάλλεται στον βιντεοπροβολέα μια τριάδα από πίνακες διάσημων καλλιτεχνών. Οι πίνακες αυτοί έχουν ένα κοινό γεωμετρικό σχήμα. Αρχικά μπορεί να γίνει ένας σχολιασμός στην ολομέλεια για την τεχνοτροπία του εκάστοτε καλλιτέχνη. Στη συνέχεια ζητάμε από τους μαθητές να παρατηρήσουν προσεκτικά τα έργα και να αναγνωρίσουν το κοινό σχήμα. Η αναγνώριση των σχημάτων μέσα στα έργα τέχνης αποτελεί μια μορφή ελέγχου της προϋπάρχουσας γνώσης. Οι ερωτήσεις που τίθενται στους μαθητές μπορεί να είναι του τύπου: Τι σχήματα διακρίνετε; Ποιο είναι το κοινό γεωμετρικό σχήμα, που αναγνωρίζετε στους πίνακες ζωγραφικής;

Β΄ φάση: Αποτύπωση του σχήματος στο επίπεδο

Οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν τα σχήματα με τα χειραπτικά εργαλεία που παρέχονται σε κάθε ομάδα.

- Χρησιμοποιώντας τα ξυλάκια και τους συνδέσμους οι μαθητές μπορούν να δημιουργήσουν οποιοδήποτε από τα γεωμετρικά σχήματα.
- Στη συνέχεια οι μαθητές δημιουργούν τα σχήματα στον χειραπτικό γεωπίνακα που διαθέτει η κάθε ομάδα.
- Μετά, ζητούμε από τους μαθητές να κατασκευάσουν το σχήμα σε έντυπο γεωπίνακα με κουκίδες.
- Κατά τη διάρκεια των χειραπτικών κατασκευών μπορούν κάποιοι μαθητές να σχεδιάζουν σχήματα στον ψηφιακό γεωπίνακα, ο οποίος είναι αναρτημένος στο ψηφιακό σχολείο e-arsakeio.
- Έπειτα προβάλλουμε στον βιντεοπροβολέα το αρχείο που αφορά το σχήμα από το βιβλίο «Τέχνη και Μαθηματικά» http://www.livanis.gr/texni-mathimatika/index.html που αφορά τη μέτρηση των πλευρών και των γωνιών του κάθε σχήματος. Σ' αυτή τη φάση τα γεωμετρικά σχήματα πρέπει «**να γίνουν φορείς των ιδιοτήτων τους**». Συνεπώς οι μαθητές καλούνται να κάνουν τις πρώτες παρατηρήσεις σχετικά με τις ιδιότητές τους και να αναφέρουν με ακρίβεια και σαφήνεια την ονομασία και μετρώντας τις πλευρές και τις γωνίες να διατυπώσουν προτάσεις.
- Οι μαθητές συμπληρώνουν το ένα φύλλο εργασίας**.** Σε αυτό μετρούν με τους χάρακες και τα μοιρογνωμόνιά τους τις πλευρές και τις γωνίες των σχημάτων και στη συνέχεια καταγράφουν τα ευρήματά τους. Στη συνέχεια οι μαθητές συμπληρώνουν σε έναν πίνακα διπλής εισόδου τα χαρακτηριστικά-ιδιότητες του κάθε σχήματος: τον αριθμό και τη σχέση των πλευρών και, τον αριθμό και τη σχέση των γωνιών του.

Γ΄ φάση: Ακριβής διατύπωση του γεωμετρικού ορισμού των σχημάτων

Κάθε ομάδα παίρνει ένα φύλλο εργασίας στο οποίο καλείται να συμπληρώσει τον ορισμό για κάθε σχήμα. Ταυτόχρονα προβάλλουμε το αρχείο με το περιστρεφόμενο σχήμα, εκτός του κύκλου, από το βιβλίο «Τέχνη και Μαθηματικά», στο οποίο οι μαθητές παρατηρούν ότι το σχήμα διατηρεί τις ιδιότητές του σε οποιαδήποτε θέση στο επίπεδο. Οι μαθητές συνεργάζονται για τη διατύπωση και μετά την ανακοίνωση της κάθε ομάδας καταλήγουμε στον γεωμετρικό ορισμό κάθε σχήματος.

Δ΄ φάση: Εμπέδωση της αποκτηθείσας γνώσης

Κατά τη φάση αυτή οι μαθητές θα ασχοληθούν με αξιολογήσεις που αναρτήθηκαν στο ψηφιακό σχολείο e-arsakeio. Μέσα από την αξιολόγηση θα έχουν τη δυνατότητα να ελέγξουν τις γνώσεις που απέκτησαν και να τις εφαρμόσουν στα σχετικά ζητήματα. Οι δραστηριότητες αυτοαξιολόγησης και ο διαμαθητικός διάλογος προάγουν τις μεταγνωστικές δεξιότητες των μαθητών.

Διαθεματική δραστηριότητα επέκτασης

Με αφορμή την παγκόσμια ημέρα του «π» οι μαθητές της Ε΄ μπορούν με τη βοήθεια του μικροπειράματος από το ψηφιακό σχολείο (Κεφάλαιο 53, Κύκλος) να ανακαλύψουν τη σχέση ανάμεσα στο μήκος κύκλου και τη διάμετρο, δηλαδή αν το πηλίκο του μήκους κύκλου προς τη διάμετρο είναι σταθερό.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Μαυρομμάτης Α., Σταθοπούλου Σ., Παπανικολάου Α. (2014). Τέχνη και Μαθηματικά. Αθήνα: Α. Α. Λιβάνη

Τζεκάκη Μαριάννα, (2007). Μικρά παιδιά, μεγάλα μαθηματικά νοήματα. Αθήνα: Gutenberg

Βιβλίο Δασκάλου Μαθηματικών Δ΄ και Ε΄ τάξεων Δημοτικού. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο

Van de Walle, (2005). Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μία εξελικτική Διδασκαλία, Αθήνα, Δαρδανός

Κολέζα, Ε. (2000). Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών. Αθήνα: Leader Books, 257-259

Stix, A. (1994). "The Link Between Art and Mathematics". Annual Conference of National Middle School, 1994.

Van Hiele, Pierre M. (1999). "Developing Geometric Thinking through Activities That Begin with Play". Teaching Children Mathematics 6, 310–16 http://flash.lakeheadu.ca/~ed4050/Math_AQ/geovanheile.pdf

jennypg30@yahoo.gr

ΓΝΩΡΙΖΟΥΝ ΤΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ; ΜΙΑ ΠΙΛΟΤΙΚΗ ΠΡΟΣΠΑΘΕΙΑ ΑΠΟΤΥΠΩΣΗΣ ΤΗΣ ΓΝΩΣΗΣ ΠΕΡΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.

Ιωάννης Μιχάλης
Δάσκαλος/Διευθυντής 105ου Δημοτικού Σχολείου Θεσσαλονίκης

Ευάνθης Χατζηβασιλείου
Δάσκαλος/Προϊστάμενος Εκπαιδευτικών Θεμάτων Διεύθυνσης Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης Ανατολικής Θεσσαλονίκης

Αποστολία Γιουψάνη
Δασκάλα 1ου Πρότυπου Πειραματικού Δημοτικού Σχολείου Θεσσαλονίκης

Μαρία Αναστασιάδου
Δασκάλα/Γραμματέας ΠΥΣΠΕ Ανατολικής Θεσσαλονίκης

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η γεωμετρία ως περιοχή των μαθηματικών συμβάλλει στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να συλλογίζονται και να επιχειρηματολογούν (Principles and Standards P&S, NCTM, 2000). Η διδασκαλία της στοχεύει στην αφομοίωση του εποπτικού χώρου και στην ανάπτυξη της ικανότητας συλλογισμού και λογικής επιχειρηματολογίας (Κουρουνιώτης, 2012). Στόχος της έρευνάς μας είναι η αποτύπωση της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών του δημοτικού σχολείου μέσα από την αποτίμηση των γνώσεων βασικών γεωμετρικών εννοιών οι οποίες παρέχονται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, σύμφωνα με τα τρέχοντα αναλυτικά προγράμματα. Τα ερευνητικά μας ερωτήματα αφορούν τις γνώσεις των μαθητών για τις γεωμετρικές έννοιες που διδάσκονται και το επίπεδο κατανόησης αυτών. Για το σκοπό αυτό εντοπίσαμε τους στόχους της διδασκαλίας της γεωμετρίας στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης τους οποίους αντιστοιχίσαμε με τα standards for geometry (NCTM, 2000). Ακολούθως υλοποιήσαμε έρευνα με την αξιοποίηση του εργαλείου National Assessment of Educational Progress at Grades 4 and 8 (NAEP, 2013) σε 105 μαθητές Ε΄ τάξης, τα αποτελέσματα της οποίας παρουσιάζουμε στην παρούσα εργασία.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η γεωμετρία «είναι τα μαθηματικά του σχήματος και του χώρου» (Κολέζα, 2000). Ως περιοχή των μαθηματικών συμβάλλει στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να συλλογίζονται και να επιχειρηματολογούν (P&S, NCTM, 2000). Πρόκειται για το μάθημα στο οποίο καλούνται οι μαθητές να αναλύουν τα χαρακτηριστικά γεωμετρικών σχημάτων και να αναπτύσσουν γεωμετρικά επιχειρήματα για τις γεωμετρικές σχέσεις καθώς και να χρησιμοποιούν τη νοερή αναπαράσταση, τη συλλογιστική του χώρου και τη γεωμετρική μοντελοποίηση για την επίλυση προβλημάτων (P&S, NCTM, 2000). Η διδασκαλία στοχεύει στην αφομοίωση του εποπτικού χώρου και στην ανάπτυξη της ικανότητας συλλογισμού και λογικής επιχειρηματολογίας. Ποιο συγκεκριμένα στοχεύει: (α) στην ανάπτυξη ψυχικών ικανοτήτων σχετικών με το χώρο, (β) τη γνωριμία με τις βασικές γεωμετρικές έννοιες, (γ) την αφομοίωση του εποπτικού χώρου, (δ) την ανάπτυξη ικανοτήτων επίλυσης προβλημάτων, (ε) τη γνωριμία και αξιοποίηση ενός οπλοστασίου ενεργημάτων. Οι μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης καλούνται να καταστούν ικανοί να αντιλαμβάνονται, να αναπαριστάνουν και να αφομοιώνουν εννοιολογικά στο χώρο (Κουρουνιώτης, 2012). Η παιδαγωγική αξία του μαθήματος της γεωμετρίας προκύπτει σύμφωνα με τον Τουμάση (1984) από πέντε βασικούς λόγους:

1. Βοηθά στην ανάπτυξη της ικανότητας αντίληψης του χώρου
2. Καλλιεργεί την ικανότητα νοερής σύλληψης των μαθηματικών
3. Συνδέει άμεσα τα μαθηματικά με τον πραγματικό κόσμο
4. Βοηθά στην κατανόηση των αφηρημένων μαθηματικών ιδεών
5. Αποτελεί παράδειγμα μαθηματικού συστήματος απλού και κατανοητού στους μαθητές.

Οι στόχοι της γεωμετρίας σύμφωνα με την Κολέζα (2000) αφορούν τις γνώσεις των μαθητών για τα σχήματα και τις σχέσεις στο επίπεδο και στο χώρο που αναπτύσσονται μέσα από τρεις γνωστικές διαδικασίες: την οπτικοποίηση, την κατασκευή με συγκεκριμένα εργαλεία υπό συγκεκριμένες συνθήκες και το συλλογισμό.

Απαραίτητες γεωμετρικές δεξιότητες θεωρούν οι Τουμάσης (1994) και Φιλίππου & Χρίστου (1995) τις οπτικές, λεκτικές, σχεδιαστικές, λογικές και της εφαρμογής.

ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ VAN HIELEN

Σύμφωνα με το μοντέλο ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης Van Hielen (Crowley, 1987, Κολέζα, 2000) ο μαθητής διέρχεται από πέντε αναπτυξιακά επίπεδα με καθορισμένη σειρά ξεκινώντας από το βασικό μέχρι το τελικό – ανώτερο, στο οποίο παρατηρείται παραγωγή αφηρημένων συλλογισμών και πλήρεις αποδείξεις (Κολέζα, 2000). Τα στάδια με την σειρά που κατακτώνται είναι:

1. Οπτικοποίηση: Οι μαθητές αναγνωρίζουν τα σχήματα ως ενιαίο σύνολο μα βάση τη μορφή τους και όχι τις ιδιότητές τους
2. Ανάλυση: Τα σχήματα αναλύονται και διακρίνονται από τους μαθητές οι ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά τους βάσεις των οποίων κατηγοριοποιούνται.
3. Άτυπη παραγωγή: Οι μαθητές κατατάσσουν με λογικό τρόπο σχήματα και σχέσεις, κατανοούν τις αλληλοεξαρτήσεις των ιδιοτήτων και αναγνωρίζουν κατηγορίες σχημάτων.
4. Τυπική παραγωγή αυστηρότητα: Στο στάδιο αυτό γίνεται κατανοητή η σημασία του συλλογισμού ως τρόπου θεμελίωσης των γεωμετρικών θεωριών σ' ένα αξιωματικό σύστημα.
5. Αυστηρό: Οι μαθητές αντιλαμβάνονται διάφορα αξιωματικά επίπεδα και διαφορετικά συστήματα πέραν της Ευκλείδιας γεωμετρίας.

Βασικά χαρακτηριστικά της διδασκαλίας της γεωμετρίας σύμφωνα με το μοντέλο Van Hielen είναι η διαδοχικότητα, η πρόοδος, η κατανόηση της πραγματικότητας, η ανάπτυξη γλωσσικών συμβόλων και η αντιστοιχία.

ΟΙ ΣΤΟΧΟΙ ΤΟΥ ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΤΑΞΕΙΣ Α΄, Β΄, Γ΄ ΚΑΙ Δ΄ ΤΟΥ ΕΛΛΗΝΙΚΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Από τη μελέτη των βιβλίων του δασκάλου των τάξεων Α΄, Β΄, Γ΄ & Δ΄ εντοπίσαμε και απομονώσαμε τους διδακτικούς στόχους της γεωμετρίας ως εξής:

Α΄ Τάξη: Προσανατολισμός στο χώρο, αναγνώριση σχημάτων και σωμάτων από τη μορφή τους (όχι από τις ιδιότητές τους), χάραξη ευθείας, καμπύλης και τεθλασμένης γραμμής, προσδιορισμός θέσης κίνησης, ομαδοποίηση σχημάτων με βάση τη φόρμα τους, χάραξη, ανάλυση, σύνθεση σχημάτων, εισαγωγή στον άξονα συμμετρίας.

Β΄ Τάξη: Αναγνώριση της συμμετρίας άξονα, αναγνώριση της παραλληλίας και καθετότητας, αναγνώριση γεωμετρικών στερεών και συσχέτισή τους με σχήματα, κατασκευή σχημάτων και σωμάτων, υπολογισμοί μήκους και εμβαδού.

Γ΄ Τάξη: Αναγνώριση, ονομασία, σχεδιασμός, φαντασία, ανάπλαση σχημάτων, εμπειρικά, διαισθητικά και νοητικά, ανακάλυψη του αναπτύγματος των στερεών σωμάτων, χρήση χάρακα, γνώμονα και διαβήτη, αναγνώριση των διαστάσεων των σχημάτων και σωμάτων, αναπαραγωγή αναπτυγμάτων σωμάτων.

Δ΄ Τάξη: Εξοικείωση με πολύγωνα (αναγνώριση, κατάταξη, σχεδίαση), χρήση ορολογίας για την παραλληλία και την καθετότητα, χρήση γεωμετρικών οργάνων για έλεγχο της καθετότητας και το σχεδιασμό κάθετων και παράλληλων, αναγνώριση στοιχείων παραλληλογράμμου, σχεδίαση ρόμβου, σχεδίαση συμμετρίας προς άξονα.

ΣΤΟΧΟΙ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΟ PRINCIPALES & STANDARDS FOR GEOMETRY NCTM 2000

Στα Principles and Standards (P&S) του NCTM 2000, οι μαθητές μαθαίνουν να αποδεικνύουν γεωμετρικά θεωρήματα. Καλούνται να αναλύουν τα χαρακτηριστικά γεωμετρικών σχημάτων και να αναπτύσσουν μαθηματικά επιχειρήματα για τις γεωμετρικές σχέσεις, να χρησιμοποιούν τη νοερή αναπαράσταση, τη συλλογιστική του χώρου και τη γεωμετρική μοντελοποίηση για την επίλυση προβλημάτων.

Μεγάλη διαφοροποίηση παρουσιάζει ο χρόνος που διατίθεται στη γεωμετρία στο ελληνικό αναλυτικό πρόγραμμα, σε σχέση με τα P&S του NCTM. Σε αυτά η γεωμετρία καταλαμβάνει το 28% περίπου του χρόνου στη διάρκεια της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, ενώ άλλο 18% καταλαμβάνουν οι μετρήσεις, σε αντίθεση με το ελληνικό αναλυτικό πρόγραμμα όπου η γεωμετρία δεν ξεπερνά το 17% του περιχεομένου των μαθηματικών.

ΤΟ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ NATIONAL ASSESSMENT OF EDUCATIONAL PROGRESS (NAEP) ΤΟΥ INSTITUTE OF EDUCATION SCIENCE (IES).

Το εθνικό πρόγραμμα αξιολόγησης της εκπαιδευτικής προόδου (National Assessment of Educational Progress, NAEP) στις ΗΠΑ, εφαρμόζεται μεταξύ των πολιτειών σε μαθητές της 4ης, 6ης και 8ης τάξης. Πρόκειται για ένα κοινό εργαλείο αξιολόγησης, σε εθνική κλίμακα για τη συνεχή αποτύπωση των γνώσεων των μαθητών της Αμερικής σε διάφορα γνωστικά αντικείμενα. Η αξιολόγηση πραγματοποιείται ανά τακτά χρονικά διαστήματα στο σύνολο των μαθητών. Ως κοινό εργαλείο παρέχει ενιαίο και σταθερό σύστημα αποτύπωσης των γνώσεων των μαθητών μεταξύ των πολιτειών, δίνοντας τη δυνατότητα για συγκρίσεις με την πάροδο του χρόνου από περιοχή σε περιοχή. Το πρόγραμμα παρέχει γενικά αποτελέσματα επίδοσης σε γνωστικά αντικείμενα και όχι ατομικές επιδόσεις των μαθητών ή των σχολείων, με την αξιοποίηση των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας (ΤΠΕ) (http://nces.ed.gov/nationsreportcard/about/, τελευταία προσπέλαση 8-4-2015).

Η αξιολόγηση των μαθηματικών NAEP μέτρα γνώσεις και δεξιοτήτων των μαθητών στα μαθηματικά και την ικανότητα να εφαρμόσουν τις γνώσεις τους στην επίλυση των προβλημάτων. Σε κάθε τάξη, οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν σε ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής και δομημένων απαντήσεων που είναι σχεδιασμένες να μετρούν αυτό που ξέρουν και μπορούν να κάνουν σε πέντε περιοχές των μαθηματικών:

1. Ιδιότητες και πράξεις,
2. μέτρηση,
3. γεωμετρία,
4. ανάλυση των δεδομένων, στατιστικών στοιχείων, και την πιθανότητα,
5. άλγεβρα.

Στόχος της έρευνας που ακλουθεί είναι η αποτύπωση της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών των τάξεων Α΄, Β΄, Γ΄ και Δ΄ του δημοτικού σχολείου μέσα από την αποτίμηση των γνώσεων βασικών γεωμετρικών εννοιών οι οποίες παρέχονται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, σύμφωνα με τα τρέχοντα αναλυτικά προγράμματα.

Τα ερευνητικά μας ερωτήματα αφορούν τις γνώσεις των μαθητών για τις γεωμετρικές έννοιες που διδάσκονται και το επίπεδο κατανόησης αυτών. Για το σκοπό αυτό εντοπίσαμε τους στόχους της διδασκαλίας της γεωμετρίας στο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης τους οποίους αντιστοιχίσαμε με τα standards for geometry (NCTM, 2000). Ακολούθως υλοποιήσαμε πιλοτική έρευνα με την αξιοποίηση του εργαλείου National Assessment of Educational Progress at Grades 4 and 8 (NAEP, 2013) σε 105 μαθητές Ε΄ τάξης, τα αποτελέσματα της οποίας παρουσιάζουμε στην παρούσα εργασία.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Για την πραγματοποίηση της πιλοτικής έρευνας αξιοποιήσαμε το ερωτηματολόγιο του NAEP (IES, 2015) επιλέγοντας τα ερωτήματα που αφορούν στο γνωστικό αντικείμενο της γεωμετρίας, τα οποία μεταφράσαμε και προσαρμόσαμε στα πλαίσια του ελληνικού δημοτικού σχολείου. Μετά την επεξεργασία του ερωτηματολογίου καταλήξαμε σε 54 ερωτήματα που αντιστοιχούν σε όλους σχεδόν τους

στόχους του αναλυτικού προγράμματος της γεωμετρίας των τάξεων Α', Β', Γ' και Δ' (Παράρτημα 1).

Το εργαλείο διανεμήθηκε σε έντυπη μορφή σε δείγμα 105 μαθητών της 5ης τάξης, 5 τμημάτων, δύο σχολικών μονάδων της Θεσσαλονίκης με την παρουσία του δασκάλου του κάθε τμήματος.

Επισημαίνουμε ότι για την επιλογή του δείγματος της πιλοτικής έρευνας δεν εφαρμόσαμε τις αρχές του τυχαίου και αντιπροσωπευτικού, λόγω αντικειμενικών δυσκολιών στην άμεση εξεύρεση ικανού αριθμού μαθητών - υποκειμένων.

Για την συμπλήρωσή του ερωτηματολογίου διατέθηκε ένα διδακτικό δίωρο. Οι μαθητές χρειάστηκαν περίπου 80 λεπτά για να το ολοκληρώσουν.

Μετά τη συλλογή των εντύπων ακολούθησε η κωδικοποίηση και εισαγωγή των δεδομένων σε βάση δεδομένων excel 2007.

Για την στατιστική επεξεργασία των δεδομένων αξιοποιήθηκε το πρόγραμμα SPSS 11. Επίσης προβήκαμε σε έλεγχο της αξιοπιστίας του εργαλείου με τη χρήση του λογισμικού πακέτου της "Acer Quest", το οποίο διεξάγει ανάλυση με το όνομα Rasch Analysis.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟΥ

Στον πίνακα 1 παραθέτουμε τα αποτελέσματα από την ανάλυση των δεδομένων. Η στήλη Α αντιστοιχεί στο αντίστοιχο ερώτημα, η στήλη Β στο ποσοστό επιτυχίας στα ερωτήματα των μαθητών του δείγματος της πιλοτικής έρευνας και η στήλη Γ στο ποσοστό επιτυχίας στα ίδια ερωτήματα των μαθητών των ΗΠΑ, όπως αυτά καταγράφονται στην ηλεκτρονική πλατφόρμα του προγράμματος NAEP 2013 (http://www.nationsreportcard.gov/ reading_math_2013/#/).

Πίνακας 1

A	B	Γ
e1	88,6	86,0
e2	55,2	41,6
e3	91,4	94,6
e4	89,5	59,0
e5	94,3	50,2
e6	96,2	95,9
e7	64,8	45,2
e8	88,6	78,6
e9	47,6	71,5
e10	62,9	49,1

A	B	Γ
e11	37,1	44,5
e12	89,0	56,5
e13	38,1	77,9
e14	96,2	67,8
e15	59,0	44,3
e16	76,2	91,0
e17	83,8	64,8
e18	83,3	47,8
e19	81,9	38,3
e20	54,3	12,5

A	B	Γ
e21	92,4	89,9
e22	68,6	39,7
e23	85,7	55,8
e24	87,6	86,8
e25	45,7	44,0
e26	72,4	31,9
e27	52,4	36,4
e28	52,4	53,5
e29	85,7	68,1
e30	49,5	71,8

A	B	Γ
e31	81,0	69,0
e32	46,7	37,7
e33	37,6	29,7
e34	95,2	95,0
e35	24,8	29,6
e36	28,1	30,6
e37	82,9	63,7
e38	75,2	52,6
e39	62,4	15,4
e40	79,0	51,1

A	B	Γ
e41	40,0	22,0
e42	49,5	27,0
e43	61,9	59,2
e44	78,1	43,6
e45	77,1	62,4
e46	80,5	48,3
e47	69,5	64,8
e48	50,5	24,4
e49	61,0	40,4
e50	47,6	66,1

Ως ποσοστό επιτυχίας ορίζεται το σύνολο των σωστών απαντήσεων προς το πλήθος του δείγματος και προέκυψε από τους πίνακες συχνοτήτων της στατιστικής ανάλυσης με το πρόγραμμα SPSS. Για κάθε σωστή απάντηση οι μαθητές βαθμολογήθηκαν με 1 και με 0 για κάθε λάθος απάντηση.

Από τα αριθμητικά δεδομένα του πίνακα 1 φαίνεται ότι οι μαθητές των δυο σχολείων στους οποίους δόθηκες το ερωτηματολόγιο πέτυχαν υψηλές επιδόσεις. Είναι χαρακτηριστικό ότι στη σύγκριση με τους μαθητές των ΗΠΑ εμφανίζουν υπεροχή στους περισσότερους δείκτες.

Από τα στοιχεία που παρατίθενται προκύπτει ότι οι στόχοι στους οποίους οι έλληνες μαθητές έχουν υψηλότερες επιδόσεις και φαίνεται να κατακτούν καλύτερα είναι:

1. Αναγνώριση της συμμετρίας ως προς άξονα
2. Αναγνώριση σχημάτων και σωμάτων βάσει της μορφής τους
3. Αναγνώριση των ιδιοτήτων των σχημάτων
4. Αναγνώριση των σχημάτων που συμμετέχουν στην κατασκευή γεωμετρικών στερεών
5. Σχεδιασμός σχημάτων βάσει της μορφής τους

Στον αντίποδα μεγαλύτερες δυσκολίες παρουσιάζονται στους στόχους:

1. Αναγνώριση και διαχείριση παραλληλίας και καθετότητας
2. Υπολογισμός περιμέτρου και εμβαδού
3. Αναγνώριση και κατασκευή γωνιών
4. Κατασκευή σχημάτων υπό συνθήκες

5. Ανάπτυγμα στερεών

Σε σχέση με τα αποτελέσματα των αντίστοιχων δοκιμασιών στις ΗΠΑ οι έλληνες μαθητές φαίνεται να υπερτερούν στην κατανόηση των περισσότερων εννοιών και την κατάκτηση των στόχων του αναλυτικού προγράμματος. Οι αμερικανοί μαθητές υπερέχουν στα εξής:

1. Κατανόηση των συνεπειών από την περιστροφή εικόνας (γύρω από άξονα συμμετρίας)
2. Υπολογισμό του εμβαδού σχήματος
3. Πρόβλεψη του αριθμού μονάδων μέτρησης επιφάνειας που χρειάζονται για την επικάλυψη ενός σχήματος και
4. Αποκάλυψη κρυμμένων σχημάτων σε μαγικές εικόνες

Ένα στοιχείο από την στατιστική ανάλυση που παρουσιάζει ενδιαφέρον και ενισχύει την αξιοπιστία του εργαλείου, είναι η σταθερότητα των επιδόσεων των μαθητών ανά τμήμα όπως φαίνεται στον πίνακα 2.

Πίνακας 2

Report

SCORE

TMIMA	Mean	N	Std. Deviation	Median
1	34,53	20	7,243	34,50
2	34,02	21	6,942	36,50
3	35,27	22	6,195	37,00
4	33,43	21	8,433	35,50
5	32,67	21	7,450	34,00
Total	33,99	105	7,195	36,00

Τα μέτρα κεντρικής τάσης του πίνακα 2 αφορούν το συνολικό σκορ που πέτυχαν οι μαθητές ανά τμήμα στα 50 ερωτήματα.

Με δοκιμασία ANOVA διαπιστώθηκε ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των επιδόσεων των μαθητών ανά τμήμα (Sig. 0.806>0.05) (πίνακας 3). Κατά συνέπεια θεωρούμε αξιόπιστα τα στοιχεία του πίνακα 2.

Πίνακας 3

ANOVA Table

			Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
SCORE * TMIMA	Between Groups	(Combined)	85,342	4	21,335	,403	,806
	Within Groups		5298,649	100	52,986		
	Total		5383,990	104			

Η σταθερή κατανομή των απαντήσεων σε όλες τις τάξεις που διενεργήθηκε η πιλοτική έρευνα αποτελεί ένδειξη αξιοπιστίας του εργαλείου.

Ένας ακόμη δείκτης αξιοπιστίας του ερωτηματολογίου είναι ο βαθμός δυσκολίας των ερωτήσεων. Προκειμένου να μελετήσουμε το βαθμό δυσκολίας του ερωτηματολογίου προβήκαμε σε δοκιμασία ελέγχου εγκυρότητας με RASH ANALYSIS (Παράρτημα 2). Από την ανάλυση φαίνεται ότι τα ερωτήματα εμφανίζουν κλιμακούμενη δυσκολία και κατανέμονται ισομερώς γύρω από τη μηδενική τιμή στις περιοχές του πίνακα -2 έως +3.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Έχοντας ως στόχο την πιλοτική αποτύπωση των γεωμετρικών γνώσεων των μαθητών των τάξεων Α', Β', Γ' και Δ' του δημοτικού σχολείου, σύμφωνα με το τρέχων αναλυτικό πρόγραμμα, προβήκαμε στην αξιοποίηση του διερευνητικού εργαλείου National Assessment of Education Progress του Institute of Education Science (NAEP) το οποίο μετρά γνώσεις και δεξιότητες των μαθητών στα μαθηματικά και την ικανότητά τους να εφαρμόζουν τις γνώσεις αυτές στην επίλυση προβλήματος. Η γενικευμένη και σε τακτά διαστήματα επαναλαμβανόμενη αξιοποίηση της αποτύπωσης αυτής θα μπορούσε να αξιοποιηθεί ως μέσο για τον μελλοντικό σχεδιασμό των αναλυτικών προγραμμάτων, αλλά και ως ανατροφοδότηση των εκπαιδευτικών για τον βαθμό κατάκτησης των στόχων του προγράμματος, αφού θα παρείχε πληροφορίες για την κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών που έχουν διδαχτεί.

Από την ανάλυση του ερωτηματολογίου προέκυψε ότι οι μαθητές του δημοτικού σχολείου κατακτούν σε ικανοποιητικό βαθμό τους στόχους του αναλυτικού προγράμματος που αφορούν την αναγνώριση σχημάτων, σωμάτων και την κατανόηση ιδιοτήτων, όμως υστερούν σε σχέση με τους μαθητές των ΗΠΑ στην εφαρμογή της αποκτηθείσας γνώσης.

Με την έρευνά μας εντοπίσαμε τα πλεονεκτήματα και τις αδυναμίες της διδασκαλίας της γεωμετρίας στο δημοτικό σχολείο σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα. Πιο συγκεκριμένα από τα πέντε στάδια του αναπτυξιακού μοντέλου Van Hielen φαίνεται να επιτυγχάνονται επαρκώς τα δυο πρώτα, της οπτικοποίησης (οι μαθητές αναγνωρίζουν τα σχήματα ως ενιαίο σύνολο μα βάση τη μορφή τους και όχι τις ιδιότητές τους) και της ανάλυσης (τα σχήματα αναλύονται και διακρίνονται από τους μαθητές οι ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά τους βάσεις των οποίων κατηγοριοποιούνται) και μερικώς το στάδιο της άτυπης παραγωγής (οι μαθητές κατατάσσουν με λογικό τρόπο σχήματα και σχέσεις, κατανοούν τις αλληλοεξαρτήσεις των ιδιοτήτων και αναγνωρίζουν κατηγορίες σχημάτων).

Η γενικευμένη σε εθνικό επίπεδο και τακτική χρήση του ερωτηματολογίου στα σχολεία της γενικής εκπαίδευσης θα μπορούσε να βοηθήσει στην ουσιαστική αποτύπωση των γεωμετρικών γνώσεων των μαθητών αλλά και στην διαπίστωση των μεταβολών από χρόνο σε χρόνο που θα προκύπτουν έπειτα από παρεμβάσεις και διορθωτικές διδακτικές προσεγγίσεις. Με βάση αυτή την πληροφορία οι σχεδιαστές των αναλυτικών προγραμμάτων θα διέθεταν ένα σημαντικό εργαλείο για την ανατροφοδότησή τους και την επιλογή των καταλληλότερων μέσων για την πιο αποτελεσματική διδασκαλία της γεωμετρίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Crowley, M. (1987). *The Van Hiele Model of thw Development of Geometric Though*. In M.M. Lindquist, A.P. Shulte (eds.), Learning and Teaching Geometry, K-12, Yearbook, Reston. NCTM, 1987

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*. Αθήνα, Leader Book

Κουρουνιώτης, Χ. (2012). Η θέση της γεωμετρίας στα Αναλυτικά Προγράμματα. Σημειώσεις του *μαθήματος Βασικές Έννοιες Γεωμετρίας και η Διδακτική* του, Πανεπιστήμιο Κρήτης, ΠΤΔΕ

Τουμάσης, Μ. (1984). *Σύγχρονη διδακτική των μαθηματικών*. Αθήνα, Gutenberg

Φιλίππου, Γ. & Χρίστου, Κ. (1995). *Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα, Γιώργος Δάρδανος

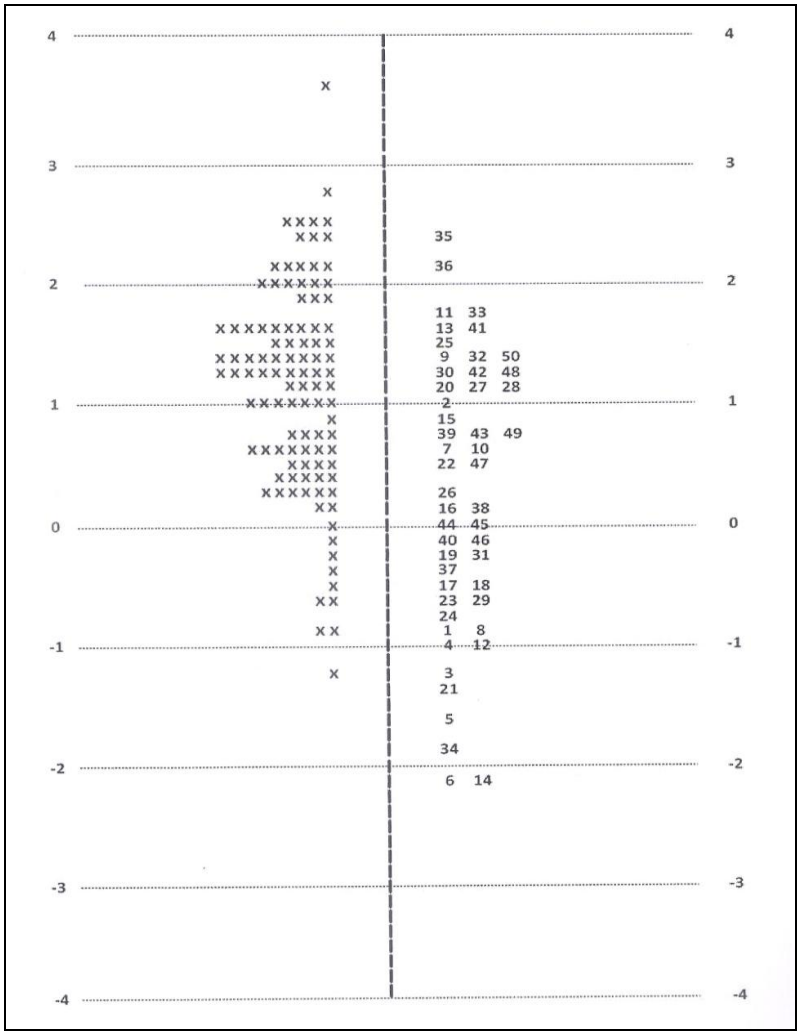
http://nces.ed.gov/nationsreportcard/ (τελευταία πρόσβαση 11-04-2015)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

ερώτημα	Στόχοι που ερευνόνται
ε1	χρήση περιγραφής για αναγνώριση στερεού
ε2	αναγνώριση αποτελέσματος κοπής διπλωμένου χαρτιού
ε3	αναγνώριση μη συμπληρωμένου σχήματος
ε4	σύγκριση ιδιοτήτων απλών σχημάτων
ε5	κατασκευή και αναγνώριση σχήματος σε σύστημα συντεταγμένων
ε6	αναγνώριση μη συμμετρικού σχήματος
ε7	καθορισμός απόστασης μεταξύ των κέντρων εφαπτόμενων τετραγώνων
ε8	αναγνώριση επίπεδων σχημάτων που σχηματίζουν ένα στερεό
ε9	αναγνώριση εικόνας μετά από γύρισμα
ε10	σύγκριση απλών σχημάτων για την αναγνώριση κοινών ιδιοτήτων
ε11	αναγνώριση παράλληλων και κάθετων γραμμών
ε12	διαίρεση τετραγώνων σε ποκίλλα σχήματα
ε13	καθορισμός αριθμού ενός σχήματος που καλύπτουν ένα άλλο
ε14	αναγνώριση σχήματος με σκιασμένη επιφάνεια
ε15	σημείωση σημείων σε σύστημα συντεταγμένων ώστε να ικανοποιούν ορισμένες συνθήκες
ε16	εύρεση αντικειμένου σε μια εικόνα
ε17	αναγνώριση του στερεού που προκύπτει από επίπεδα σχήματα
ε18	σχεδίαση διαφορετικών τετραγώνων σε ένα σχέδιο
ε19	σχεδίαση διαφορετικών τριγώνων σε ένα σχέδιο
ε20	σχεδίαση διαφορετικών τετραπλεύρων σε ένα σχέδιο
ε21	αιτιολογία αναγνώρισης σχήματος βάση ορισμένης περιγραφής
ε22	εύρεση αριθμού ορθών γωνιών σε μια εικόνα
ε23	εύρεση του αριθμού των κύβων που χρησιμοποιηθηκαν για την κατασκευή στερεού
ε24	αναγνώριση κυλίνδρου
ε25	εύρεση γωνιών μικρότερων των 90 μοιρών
ε26	σημείωση τετραγώνου που ικανοποιεί συνθήκη
ε27	τοποθέτηση τετραγώνων έτσι ώστε να ικανοποιούν συνθήκες
ε28	εύρεση πλάτους τετραγώνου αφού διπλωθεί
ε29	συμπλήρωση γραπτών οδηγιών σ' ένα χάρτη
ε30	αναγνώριση αποτελέσματος μετά από δίπλωμα
ε31	αιτιολογία με τη χρήση των ιδιοτήτων τετραπλέυρων
ε32	αναγνώριση σχήματος που δεν μπορεί να γίνει κύβος
ε33	σχεδίαση γωνίας μεγαλύτερης της ορθής
ε34	αναγνώριση σχήματος με τρεις γωνίες
ε35	αναγνώριση επιφάνειας με δεδομένες συνθήκες
ε36	σύγκριση δυο γεωμετρικών σχημάτων
ε37	σύγκριση γεωμετρικών σχημάτων
ε38	τοποθέτηση σχημάτων για τη δημιουργία ενός άλλου
ε39	τοποθέτηση σχημάτων για τη δημιουργία ενός άλλου
ε40	σχεδίαση ορθογωνίου με συγκεκριμένες διαστάσεις
ε41	επιπεδοποιημένος κύβος
ε42	εφαρμογή έννοιας παράλληλων γραμμών
ε43	εφαρμογή κατανόησης της διαμέτρου σε οπτικό πλαίσιο
ε44	εύρεση δυο παράλληλων οδών
ε45	αναγνώριση κυλίνδρου
ε46	κατασκευή γραμμή συμμετρίας
ε47	εύρεση σχήματος με το μεγαλύτερο εμβαδό
ε48	εύρεση εμβαδού από την περίμετρο
ε49	υπολογισμός εμβαδού
ε50	υπολογισμός εμβαδού

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

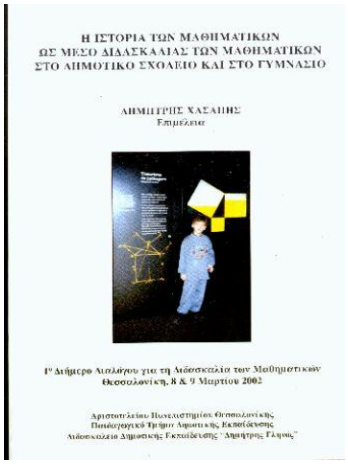


jonious@otenet.gr

evanthys@otenet.gr

apostolia77@gmail.com

tamila39@gmail.com



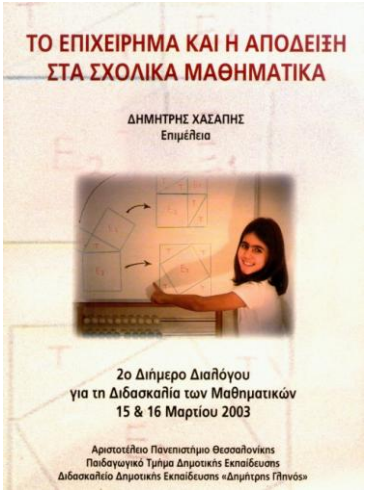
Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΩΣ ΜΕΣΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ ΚΑΙ ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Πρακτικά 1ου Διημέρου Διαλόγου
για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Θεσσαλονίκη, 2002, σελ. 175

Εξαντλημένο

ISBN 960-312-085-5



ΤΟ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑ ΚΑΙ Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Πρακτικά 2ου Διημέρου Διαλόγου
για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Θεσσαλονίκη, 2003, σελ. 250

Εξαντλημένο

ISBN 960-312-115-0

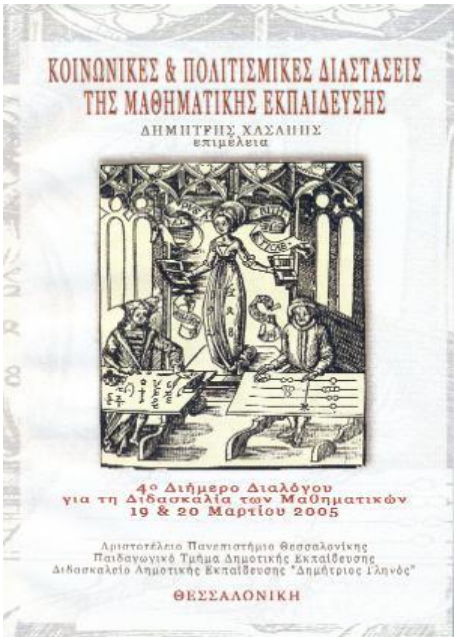
ΕΙΚΟΝΑ, ΣΧΗΜΑ ΚΑΙ ΛΟΓΟΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πρακτικά 3ου Διημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Θεσσαλονίκη, 2004, σελ. 185

Εξαντλημένο

ISBN 960-87530-8-2



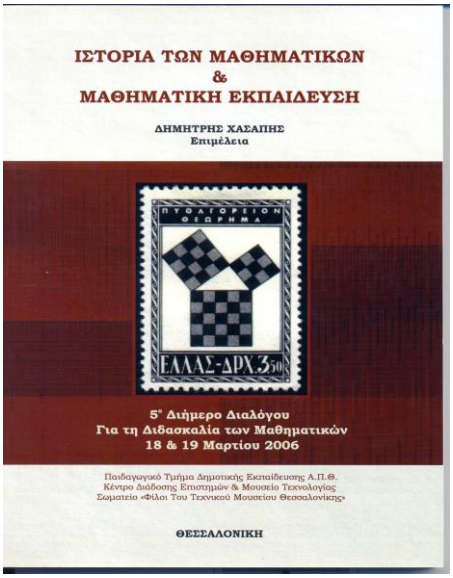
ΚΟΙΝΩΝΙΚΕΣ & ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΕΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Πρακτικά 4ου Διημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Θεσσαλονίκη, 2005, σελ. 208

Εξαντλημένο

ISBN 960-88333-5-3



ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Πρακτικά 5ου Διημέρου Διαλόγου
για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Θεσσαλονίκη, 2006, σελ. 220

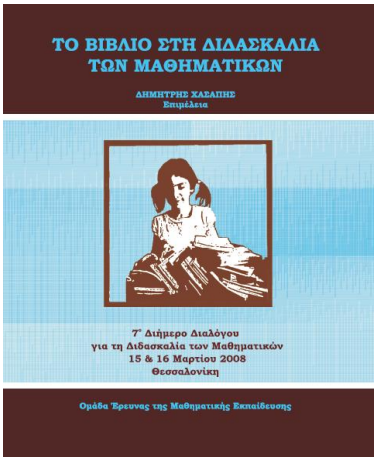
Εξαντλημένο

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΛΟΓΟΤΕΧΝΙΑ

Πρακτικά 6ου Διημέρου Διαλόγου
για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Θεσσαλονίκη, 2007, σελ. 315

Διαθέσιμο σε CD

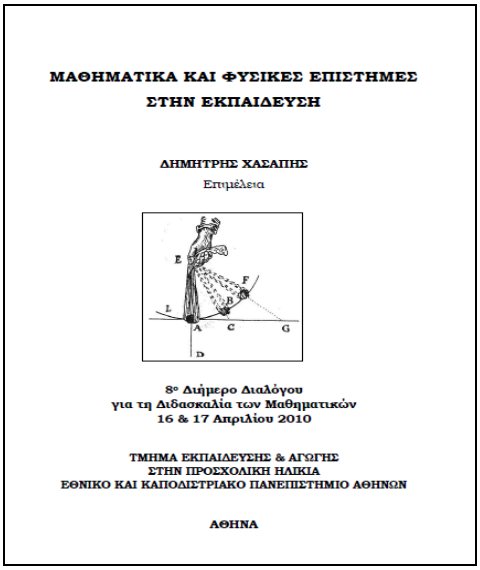


ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πρακτικά 7ου Διημέρου Διαλόγου
για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Θεσσαλονίκη, 2008, σελ. 367

Διαθέσιμο σε CD



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Πρακτικά 8ου Διημέρου Διαλόγου
για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Αθήνα, 2010, σελ. 256

Διαθέσιμο σε CD

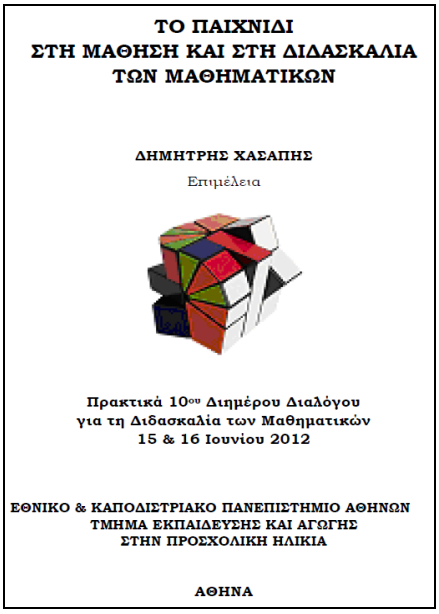
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΤΕΧΝΕΣ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Πρακτικά 9ου Διημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Αθήνα, 2011, σελ. 386

Διαθέσιμο σε CD

ISBN 978-960-87577-7-6



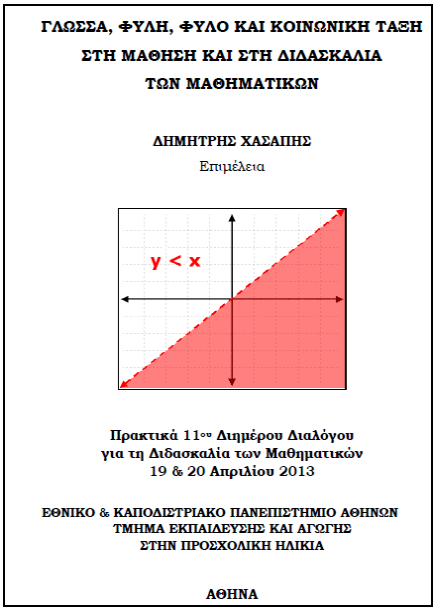
ΤΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΣΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΚΑΙ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πρακτικά 10ου Διημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Αθήνα, 2012, σελ. 372

Διαθέσιμο σε CD

ISBN 978-960-87577-8-3



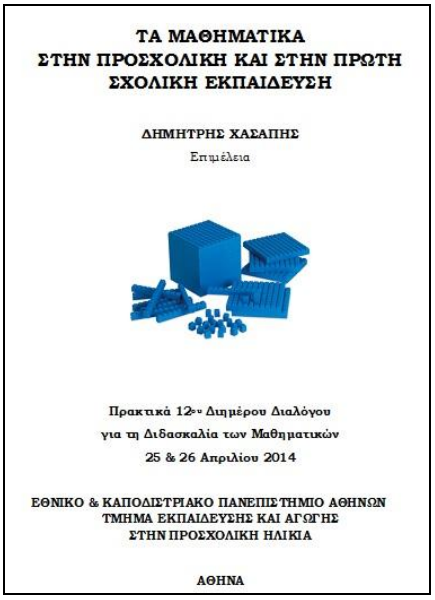
ΓΛΩΣΣΑ, ΦΥΛΗ, ΦΥΛΟ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗ ΤΑΞΗ ΣΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΚΑΙ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πρακτικά 11ου Διημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Αθήνα, 2013, σελ. 284

Διαθέσιμο σε CD

ISBN 978-618-80640-0-3



ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗ ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΠΡΩΤΗ ΣΧΟΛΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Πρακτικά 12ου Διημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Αθήνα, 2014, σελ. 406

Διαθέσιμο σε CD

ISBN 978-618-80640-2-7

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΧΑΣΑΠΗΣ (Επιμέλεια)

ΧΩΡΟΣ & ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Πρακτικά 13ου Διημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Αθήνα 8 & 9 Μαΐου 2015

ISBN 978-618-80640-4-1