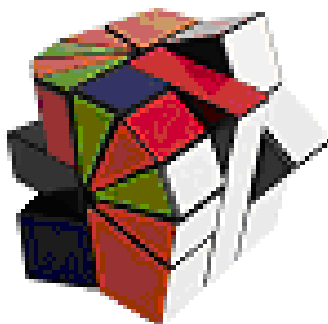


ΤΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΣΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΚΑΙ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΧΑΣΑΠΗΣ

Επιμέλεια



**Πρακτικά 10^{ου} Δημέρου Διαλόγου
για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών
15 & 16 Ιουνίου 2012**

**ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΑΓΩΓΗΣ
ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗ ΗΛΙΚΙΑ**

ΑΘΗΝΑ

ΤΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΣΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΚΑΙ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΧΑΣΑΠΗΣ (Επιμέλεια)

Έκδοση CD-ROM

Τμήμα Εκπαίδευσης & Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία

Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Ναυαρίνου 13^α, 106 80 Αθήνα

© Δημήτρης Χασάπης για την παρούσα συλλογή
Οι συγγραφείς για τα κείμενα τους

Η εικόνα του εξωφύλλου: Ο κύβος του Ρούμπικ

ΑΘΗΝΑ 2012

ISBN 978-960-87577-8-3

Στο ΔΙΗΜΕΡΟ ΓΙΑ ΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ παρουσιάζονται μόνον πρωτότυπες εργασίες, οι οποίες εντάσσονται στο σχετικό θέμα του συνεδρίου, δεν έχουν παρουσιαστεί σε άλλο συνέδριο, δεν έχουν δημοσιευτεί σε άλλο περιοδικό ή βιβλίο και ανταποκρίνονται στις διεθνώς καθιερωμένες απαιτήσεις της επιστημονικότητας.

Η Επιστημονική Επιτροπή διατηρεί το δικαίωμα επιλογής των υποβαλλόμενων εισηγήσεων με βάση εκτεταμένες περιλήψεις τους και φροντίζει για την αξιολόγηση των πλήρων κειμένων τους πριν την συμπερίληψή τους στα Πρακτικά του Δημέρου.

Για την αξιολόγηση τους, τα κείμενα των εισηγήσεων αποστέλλονται, ανώνυμα, σε δύο (2) κριτές από κατάλογο ειδικών για το εκάστοτε θέμα του Δημέρου επιστημόνων, στον οποίο συμπεριλαμβάνονται και τα μέλη της Επιστημονικής Επιτροπής.

Η αναδημοσίευση εισηγήσεων, οι οποίες έχουν δημοσιευτεί στα Πρακτικά του Δημέρου απαιτεί άδεια του Επιμελητή της έκδοσης.

Επιστημονική Επιτροπή

Αλεξάνδρα Ανδρούσου, Πανεπιστήμιο Αθηνών
Ελένη Γιαννακοπούλου, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο
Κώστας Ζαχάρος, Πανεπιστήμιο Πάτρας
Μίννη Καρρά, Σχολή Χιλ
Χαρά Κορτέση-Δαφέρμου, Πανεπιστήμιο Αθηνών
Κώστας Νικολαντωνάκης, Πανεπιστήμιο Δυτ. Μακεδονίας
Μαλβίνα Παπαδάκη, Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση
Ρόη Παραδοπούλου, Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αντιγόνη Παρούση, Πανεπιστήμιο Αθηνών
Χαρά Σταθοπούλου, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Μαρία Σφυρόερα, Πανεπιστήμιο Αθηνών
Δημήτρης Χασάπης, Πανεπιστήμιο Αθηνών
Κώστας Χατζηκυριάκου, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Μαρία Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Άννα Χρονάκη, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

[Λευκή σελίδα]

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Το παιχνίδι, ατομικό ή ομαδικό, με αντικείμενα ή και με κανόνες, αποτελεί την κύρια μορφή δραστηριότητας των παιδιών, μια δραστηριότητα η οποία δεν είναι μόνο αυθόρμητη και ευχάριστη, αλλά διαμορφώνει καθοριστικά τη νοητική, συναισθηματική και κοινωνική ανάπτυξη των παιδιών. Ο σημαντικός ρόλος του παιχνιδιού στην ανάπτυξη των παιδιών προκύπτει από μια σειρά χαρακτηριστικών, τα οποία διακρίνουν το παιχνίδι από όλες τις άλλες μορφές της ανθρώπινης δραστηριότητας. Το παιχνίδι είναι μια δραστηριότητα η οποία έχει ως αφετηρία της την πρωτοβουλία, μια δραστηριότητα αυτο-ρυθμιζόμενη με εγγενή κίνητρα και χωρίς υποχρεωτικά σαφείς στόχους. Τα παιδιά εμπλέκονται δραστήρια στο παιχνίδι από εσωτερική επιθυμία και προσωπικό ενδιαφέρον, δημιουργούν και ελέγχουν τις καταστάσεις του παιχνιδιού τους, οι οποίες στην πλειονότητα των περιπτώσεων τους έχει μια συμβολική διάσταση, μια δράση δηλαδή υποκριτική σε ένα φανταστικό πεδίο, το οποίο συνήθως περιλαμβάνει ρόλους, κανόνες και χειρισμούς αντικειμένων. Μέσα από αυτή την εμπλοκή, η οποία είναι ταυτόχρονα νοητική, συναισθηματική και κοινωνική τα παιδιά οικοδομούν τις βάσεις της αφηρημένης σκέψης και του αναστοχασμού, αναπτύσσουν δεξιότητες επικοινωνίας, ασκούνται στον έλεγχο των συναισθηματικών τους εκδηλώσεων και διερευνώντας ιδιοποιούνται ρόλους και κανόνες της κοινωνίας των ενηλίκων.

Το συμβολικό παιχνίδι, ειδικότερα, παίζει έναν πολύ σημαντικό ρόλο στη νοητική συγκρότηση και ανάπτυξη των παιδιών, αφού μέσα τα παιχνίδια αυτού του είδους τα παιδιά οικοδομούν τη διάκριση των σκέψεων από τις πράξεις και τα αντικείμενα των πράξεων τους και ασκούνται στο νοητικό χειρισμό της διάκρισης αυτής μέσα από την ανάπτυξη νοητικών αναπαραστάσεων των πράξεων και των αντικειμένων, καθώς και μέσα από την ανάπτυξη συμβολικών ενεργειών πάνω στις πράξεις και στα αντικείμενα αυτά. Στον φανταστικό κόσμο που δημιουργεί η συμβολική δραστηριότητα του παιχνιδιού, στον οποίο τα παιδιά επινοούν και χρησιμοποιούν υποκατάστατα ενεργειών και αντικειμένων, διαχωρίζεται το νόημα από το αντικείμενο και μέσα από αυτό το διαχωρισμό οικοδομούνται οι

βάσεις για τη συγκρότηση αφηρημένων εννοιών και την ανάπτυξη αφηρημένης σκέψης, αλληλένδετα με την ανάπτυξη της γλώσσας.

Η ενημέρωση για τους σχετικούς προβληματισμούς, τις ερευνητικές δραστηριότητες και τις πρωτοβουλίες ερευνητών και εκπαιδευτικών για τη διερεύνηση και την αξιοποίηση του παιχνιδιού στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών στην εκπαίδευση αποτέλεσε πρωταρχικό στόχο του 10^{ου} Δημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών με θέμα «Το Παιχνίδι στη Μάθηση και στη Διδασκαλία των Μαθηματικών» που οργανώθηκε στις 27 & 28 Απριλίου 2012 από το Τμήμα Εκπαίδευσης & Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία του Εθνικού & Καποδιστριακού Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Από τους προβληματισμούς του Δημέρου εξαιρέθηκαν τα παιχνίδια σε υπολογιστές και περιβάλλοντα εικονικής πραγματικότητας, λόγω των ιδιαιτεροτήτων του θέματος αυτού, το οποίο αποτελεί πλέον ένα διακριτό ερευνητικό αντικείμενο.

Στην παρούσα έκδοση περιλαμβάνονται τα κείμενα των εισηγήσεων, οι οποίες παρουσιάστηκαν στο Διήμερο αυτό.

Δημήτρης Χασάπης

Αναπληρωτής Καθηγητής Τ.Ε.Α.Π..Η του Ε.Κ.Π. Α.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ Ι

Παιχνίδι, Μάθηση και Διδασκαλία: Προσεγγίσεις και Προβληματισμοί

Καλλιρρόη Παπαδοπούλου

Παιχνίδι και μάθηση: ο ρόλος της αυτο-ρύθμισης 13

Τζέλλα Βαρνάβα-Σκούρα

*Η δημιουργικότητα και η ανάπτυξη της λογικομαθηματικής
σκέψης* 33

Γιάννης Γκιάστας

*Μια ψυχαναλυτική ματιά στη σχέση των μαθηματικών
με το παιχνίδι* 45

Ελένη Γιαννακοπούλου

*Η συμβολή του παιχνιδιού στην αναθεώρηση της σχέσης
των ενηλίκων με τα μαθηματικά* 57

Δημήτρης Χασάπης

Το παιχνίδι στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών 67

ΕΝΟΤΗΤΑ II

Το παιχνίδι στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών: Ερευνητικά Ευρήματα & Διδακτικά Εγχειρήματα

Γκριμπίζη Ολυμπία & Σπανοπούλου Ελένη <i>«Τρία εσύ και πέντε εγώ ... παίζω και μειρώ» Από τα ομαδικά παιχνίδια στις μαθηματικές έννοιες</i>	91
Ιωάννης Θ. Λαζαρίδης <i>Παιχνίδι και Μαθηματικά στο Δημοτικό Σχολείο</i>	111
Κώστας Νικολαντωνάκης <i>Το παιχνίδι - δραστηριότητα "Ο αριθμός στόχος" σε εν ενεργεία δασκάλους/ες Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης υπό το πρίσμα της συστημικής προσέγγισης</i>	129
Σωτήρης Ζωιτσάκος <i>Ανάπτυξη μαθηματικών διδακτικών καταστάσεων με βάση το πλαίσιο του σκακιού</i>	149
Στέλιος Παπακωνσταντίνου <i>Διδασκαλία εννοιών κύκλου ... απουσία βιβλίων</i>	167
Σωφρόνης Βαμβακούσης & Τάσος Πατρώνης <i>Ένα παιχνίδι για τη διδασκαλία των συναρτήσεων στη Β' Γυμνασίου</i>	181

Παναγιώτα Κοταρίνου & Χαρούλα Σταθοπούλου <i>‘Η ιστορία του 5^{ου} αιτήματος του Ευκλείδη στη σκιά’.</i> <i>Παίζοντας με τις σκιές με μαθητές Β Λυκείου</i>	189
Λέλα Λυμπεροπούλου & Μαλβίνα Παπαδάκη <i>Ο κόσμος των παιχνιδιών και ένα μάθημα Μαθηματικών</i> <i>σε μια τάξη διδασκαλίας: Κόσμοι συμβατοί ή ξένοι;</i>	223
Αριστείδης Μαυρομμάτης & Σοφία Σταθοπούλου <i>Η έννοια της ισότητας γεωμετρικών σχημάτων με τη βοήθεια</i> <i>παιχνιδιού με κάρτες που απεικονίζουν ζωγραφικούς πίνακες</i>	245
Χρυσάνθη Σκουμπουρδή <i>Οι κανόνες του παιχνιδιού</i>	263
Τάσος Πατρώνης, Σωφρόνης Βαμβακούσης, Δημήτρης Ζαχαριάδης & Ζήσιμος Μπραέσσας <i>Μεριστικές Ρουλέτες: Κλάσματα και πιθανότητες για κακά παιδιά</i>	293
Γιάννα Νιαχοπέτρου & Δημήτρης Χασάπης <i>Η συμβολή των παιχνιδιών τύχης στη συγκρότηση</i> <i>των εννοιών της τυχαιότητας και της πιθανότητας</i>	299
Απόστολος Παπανικολάου & Αριστείδης Μαυρομμάτης <i>Εισαγωγή στην έννοια της πιθανότητας με τη βοήθεια του</i> <i>παιχνιδιού αλληλεπιδραστικού αντικειμένου</i>	313

Μ. Μοσκοφόγλου-Χιονίδου, Γ. Λιαράκου Γ, Ε. Βασιτή Ε,
Γ. Γιακουμάκης, Σ. Δουκάκης, Δ. Ζυμπίδης, Γ. Κετικίδου,
Ε. Κουβαρά, Δ. Κουμπιάς, Χ. Κωσταντίνου, Ε. Λαζάρου Ε,
Β. Μαραγκού, Π. Παπαϊωάννου & Α. Τσιάβου

*Το Παιχνίδι Ευρω-Αξιοποίηση με χρήση
μαθηματικών εννοιών, κοινωνικο-πολιτισμικών αξιών
και αειφόρου Ανάπτυξης*

327

Νικόλας Τσαφταρίδης

*Μετρώ, διαιρώ, υπολογίζω και φτιάχνω μουσικά όργανα
Ένα παιχνίδι στην πράξη*

367

ΕΝΟΤΗΤΑ Ι

**Παιχνίδι, Μάθηση και Διδασκαλία:
Προσεγγίσεις και Προβληματισμοί**

[λευκή σελίδα]

ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΗ: Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΑΥΤΟ-ΡΥΘΜΙΣΗΣ

Καλλιρρόη Παπαδοπούλου

Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το παιχνίδι προσλαμβάνεται ως μια δραστηριότητα με βασικό κίνητρο τη διασκέδαση και την ψυχαγωγία και συνδέεται με σημαντικά αναπτυξιακά αποτελέσματα για τα παιδιά. Ταυτόχρονα, υπάρχει η γενική παραδοχή ότι το παιχνίδι αποτελεί μια αναπτυξιακά κατάλληλη δραστηριότητα ως προς τη μάθηση, ιδιαίτερα για παιδιά μικρής ηλικίας και, συχνά, επισημαίνεται η σημασία του στην εκπαιδευτική διαδικασία. Τι όμως μαθαίνουν τα παιδιά παίζοντας, δηλαδή με ποιους τρόπους το παιχνίδι συμβάλλει στη μάθηση, δεν είναι αρκετά ξεκάθαρο τόσο θεωρητικά όσο και ερευνητικά. Η εισήγηση αυτή, χρησιμοποιώντας την οπτική του Vygotsky για το συμβολικό παιχνίδι, εξετάζει το ρόλο του παιχνιδιού στην ανάπτυξη της ικανότητας για αυτο-ρύθμιση και της σημασίας της για τη μάθηση στο σχολικό πλαίσιο. Μέσα από αυτήν την ανάλυση επιχειρεί να διερευνήσει μια σημαντική πτυχή της σύνδεσης του παιχνιδιού με τη μάθηση και να προσφέρει μια βάση κατανόησης για την αξιοποίηση του παιχνιδιού στην εκπαιδευτική διαδικασία.

1. Εισαγωγή: παιχνίδι και μάθηση

Το παιχνίδι συνήθως προσλαμβάνεται ως μια συμπεριφορά/δραστηριότητα η οποία είναι οικουμενική και εσωτερικά υποκινούμενη, με σημαντικά αναπτυξιακά αποτελέσματα. Αν και δεν υπάρχει ομοφωνία ως προς το τι ορίζουμε ως παιχνίδι και ποια είναι τα χαρακτηριστικά του, αρκετές απόψεις συγκλίνουν στο ότι το παιχνίδι είναι μια δραστηριότητα που προσφέρει ευχαρίστηση, δεν έχει συγκεκριμένο σκοπό, αλλά το κίνητρο βρίσκεται στην ίδια τη διαδικασία, είναι αυθόρμητη και διαλεγμένη από το άτομο που παίζει και προϋποθέτει την ενεργή συμμετοχή και εμπλοκή του. Το παιχνίδι σχεδόν αυτονόητα ταυτίζεται με το παιδί και θεωρείται ότι αποτελεί κύρια δραστηριότητά του. Ταυτόχρονα όμως, οι μορφές, το περιεχόμενο και οι σημασίες του παιχνιδιού διαφοροποιούνται μέσα στο χρόνο και ανάλογα με την κοινωνία και τον πολιτισμό. Το παιχνίδι δηλαδή, σχετίζεται με κοινωνικοπολιτισμικές παραμέτρους και συνδέεται με τέτοιες αξίες και πρακτικές (Smith, 2010).

Το παιχνίδι παίρνει διάφορες μορφές κατά τη διάρκεια της ζωής του παιδιού ανάλογα με τις κατακτήσεις στο συναισθηματικό, γνωστικό, κινητικό και κοινωνικό επίπεδο. Απ' αυτήν την άποψη, το παιχνίδι μπορεί να θεωρηθεί φυσικό προϊόν της σωματικής και ψυχοκοινωνικής ανάπτυξης (Garvey, 1977/1990). Το παιχνίδι όμως δεν είναι απλώς αποτέλεσμα ικανοτήτων όπως αυτές που προαναφέρθηκαν. Αποτελεί παράλληλα μια από τις πολύ σημαντικές δραστηριότητες η οποία συμβάλλει στην οργάνωση του εαυτού, τη συναισθηματική, γνωστική και κοινωνική ανάπτυξη.

Η αναπτυξιακή σημασία του παιχνιδιού έχει συνδεθεί με το γεγονός ότι κατά το παιχνίδι το παιδί έχει την ευκαιρία: να δράσει ελεύθερα και αβίαστα, να δημιουργήσει και να μάθει, να αναπτύξει τη σκέψη του, να οξύνει την κρίση του, να ερευνήσει τον υλικό κόσμο, να αναπτύξει τη γλωσσική του ικανότητα, να ζήσει σ' έναν κόσμο φανταστικό που μπορεί να εξουσιάσει, να αναπτύξει διαπροσωπικές σχέσεις, να δομήσει πολιτισμικά νοήματα, να εκφράσει συναισθήματα, να αισθάνεται ευχαρίστηση (Smith, 2001, 2010). Σ' αυτό, καθοριστικό ρόλο παίζει το γεγονός ότι το παιχνίδι θεωρείται μια δραστηριότητα η οποία περιορίζει τις συνέπειες για τον εαυτό αλλά και τη ματαίωση, ενώ διακρίνεται από χαλαρή σχέση μέσων και

σκοπών (αλλάζουν με την πορεία του παιχνιδιού). Έτσι, το παιχνίδι γίνεται εξαιρετικό μέσο για εξερεύνηση (π.χ. δοκιμή, λάθος, διερεύνηση ρόλων, σχέσεων) αλλά και για εφεύρεση (Bruner, 1972, Sylva, Bruner & Genova, 1976). Τα παιδιά παρεκκλίνουν από αυτό που κάνουν κατασκευάζοντας υποκατάστατα, παράγοντας νοήματα, δημιουργώντας όταν παίζουν και μετασχηματίζουν, ανασυγκροτούν την πραγματικότητα ανάλογα με τις ανάγκες και σύμφωνα με τις επιθυμίες τους. Επίσης, κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού, τα παιδιά αναπτύσσουν διαπροσωπικές σχέσεις, ανταλλάσσουν πληροφορίες και γνώσεις, επιλύουν προβλήματα και διευθετούν συγκρούσεις, αναπτύσσουν κοινωνικές δεξιότητες και εξασκούνται σε κοινωνικούς ρόλους, διαπραγματεύονται τις κοινωνικές τους σχέσεις (Αυγητίδου, 2001), κατακτούν πολιτισμικές αξίες και συμπεριφορές.

Με άλλα λόγια, μέσα από το παιχνίδι, το παιδί κατακτά τον κόσμο, μαθαίνει και εξασκείται σε όσα πρέπει να μάθει. Με αυτόν τον τρόπο, αν και η μάθηση δε θεωρείται ουσιώδες χαρακτηριστικό γνώρισμα του παιχνιδιού ούτε τα παιδιά παίζουν για να μάθουν, το παιχνίδι θεωρείται ταυτόχρονα και μάθηση αφού ως δραστηριότητα (1) εκθέτει τα παιδιά σε νέες εμπειρίες, δραστηριότητες και ιδέες και αποτελεί το χώρο όπου μπορούν να αποκτηθούν ή να εξασκηθούν νέες εμπειρίες (Garvey, 1977/1990), (2) επιτρέπει στα παιδιά να δομούν νοήματα μέσα από τις εμπειρίες τους (Smith, 2001), (3) ενσωματώνει γνωστικά, συναισθηματικά και κοινωνικά ερεθίσματα (Smith, 2010), (4) παρέχει το νόημα για την πρόσληψη νέων σχέσεων και συνδέσεων μεταξύ ιδεών, εμπειριών, ικανοτήτων και γνώσεων (Golinkoff, Hirsh-Pasek & Singer, 2006).

Γενικά μιλώντας, τα χαρακτηριστικά του παιχνιδιού όπως παρουσιάστηκαν πιο πάνω και η συμπεριφορά του παιδιού όταν παίζει είναι διαφωτιστικά ως προς τη σχέση του παιχνιδιού με τη μάθηση. Η πρόσφατη θεωρία και έρευνα για τη μάθηση υπογραμμίζει τη σημασία της ενεργού συμμετοχής και εμπλοκής των παιδιών στη μαθησιακή διαδικασία, την κοινωνική διάσταση της μάθησης και τη σημασία σύνδεσης της μάθησης με την πραγματική ζωή και με δραστηριότητες με πολιτισμικό νόημα που ανταποκρίνονται στα ενδιαφέροντα, τις ανάγκες και τις επιθυμίες των παιδιών. Σ' αυτό το πλαίσιο, υποστηρίζεται ότι η αποτελεσματική μάθηση βασίζεται στην

ανάπτυξη εσωτερικών κινήτρων, στην ανάληψη, σταδιακά, από το ίδιο το παιδί της ευθύνης για τη μάθηση, δηλαδή στην αυτο-ρύθμιση¹, στη σύνδεση νέων πληροφοριών με την προϋπάρχουσα γνώση και την αναδόμησή της, καθώς και στην εφαρμογή και εξάσκηση των γνώσεων που έχουν αποκτηθεί (Βοσνιάδου, 2001). Όλα τα παραπάνω, όπως αναφέρθηκε, αποτελούν εγγενή χαρακτηριστικά του παιχνιδιού ή, ορθότερα, του «παίζειν»: εσωτερική παρώθηση, δραστηριότητα με νόημα που ικανοποιεί ανάγκες και επιθυμίες, διαβάθμιση απαιτήσεων που μάλιστα ρυθμίζεται από το ίδιο το παιδί, εξερεύνηση, εφεύρεση και θέσπιση στόχων στο πλαίσιο του παιχνιδιού (Gee, 2003). Το παιχνίδι επομένως συνδέεται με τη μάθηση με διττό τρόπο: αποτελεί ένα αναπτυξιακά κατάλληλο πλαίσιο και μέσο μάθησης και συμβάλλει στην ανάπτυξη ικανοτήτων που έχουν κεντρική σημασία για τη μάθηση.

Τι εννοούμε όμως ακριβώς όταν μιλάμε για μάθηση μέσα από το παιχνίδι; Τι μαθαίνουν τα παιδιά παίζοντας; Με ποιους τρόπους συμβάλλει το παιχνίδι στη μάθηση; Ποιός είναι ο μηχανισμός μέσα από τον οποίο το παιχνίδι συνδέεται με τη μάθηση και ποιες διαστάσεις του παιχνιδιού συνδέονται με ποιες διαστάσεις της μάθησης; Απαντώντας σε ερωτήματα όπως τα παραπάνω, μπορούμε να υποστηρίξουμε τη θέση του παιχνιδιού στην εκπαίδευση, όχι απλά ως μέσου για την εκπλήρωση της ακαδημαϊκής εργασίας αλλά ως ουσιαστικής συνιστώσας της μάθησης και της ανάπτυξης του παιδιού.

Ένας σημαντικός δρόμος προς την κατανόηση της σύνδεσης του παιχνιδιού με τη μάθηση περνάει μέσα από την ανάπτυξη της ικανότητας για αυτο-ρύθμιση (Whitebread, Cottman, Jameson & Lander, 2009). Στη συνέχεια του άρθρου συζητιέται ο ρόλος του παιχνιδιού στην ανάπτυξη αυτής της ικανότητας, εστιάζοντας στο παιχνίδι προσποίησης.

¹ Η ανάληψη της ευθύνης για τη μάθηση περιλαμβάνει τη θέσπιση στόχων, την ανάπτυξη και αξιοποίηση κατάλληλων και ευέλικτων στρατηγικών που βοηθούν το παιδί να καταλαβαίνει, να σκέφτεται, να λύνει προβλήματα αλλά και την ικανότητα να παρακολουθεί τη ίδια του τη μάθηση κατανοώντας πότε κάνει λάθη και πώς να τα διορθώσει. Αποτελεί σημαντική διάσταση της ικανότητας για αυτο-ρύθμιση.

2. Η ικανότητα για αυτο-ρύθμιση

Η αυτο-ρύθμιση είναι μια έννοια που χρησιμοποιείται στο πλαίσιο πολλών επιστημονικών πεδίων της ψυχολογίας (γνωστική, εκπαιδευτική, αναπτυξιακή κ.λπ.) , χωρίς όμως να υπάρχει ένας ενιαίος ορισμός ούτε και συμφωνία ως προς τις συστατικές λειτουργίες της (Κωσταρίδου-Ευκλείδη, 2005). Πολύ γενικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η αυτο-ρύθμιση αναφέρεται στην ικανότητα του ατόμου να ρυθμίζει από μόνο του τα συναισθήματα, τη συμπεριφορά και τις διαδικασίες σκέψης, ανάλογα με τις εκάστοτε συνθήκες και λαμβάνοντας υπόψη τους στόχους του. Πρόκειται για μια σύνθετη και δυναμική διεργασία η οποία περιλαμβάνει γνωστικές και μεταγνωστικές διεργασίες, καθώς και κίνητρα, συναισθήματα και βουλευτικό έλεγχο και έχει κεντρική σημασία στη διαδικασία της μάθησης.

Στα παιδιά, η αυτο-ρύθμιση περιλαμβάνει δύο συμπληρωματικές ικανότητες: κατ' αρχήν, περιλαμβάνει την ικανότητα ελέγχου της παρόρμησης και του τερματισμού μιας πράξης, όταν αυτό απαιτείται. Δεύτερον, περιλαμβάνει την ικανότητα για εμπρόθετη συμπεριφορά. Σχετίζεται επομένως τόσο με τον έλεγχο των συναισθημάτων, τις κοινωνικές σχέσεις και την κοινωνικά υπεύθυνη συμπεριφορά (γνωστή και ως συναισθηματική αυτο-ρύθμιση) όσο και με τον έλεγχο γνωστικών λειτουργιών, την ικανότητα σχεδιασμού, τη λύση προβλημάτων και τη δημιουργικότητα (γνωστική αυτο-ρύθμιση) (Bodrova & Leong, 2008, Diamond, Barnett, Thomas & Munro, 2007). Οι διαφορετικές αυτές πλευρές της αυτο-ρύθμισης, δεν λειτουργούν ούτε αναπτύσσονται ανεξάρτητα η μια από την άλλη. Αντίθετα, πρόκειται για συμπληρωματικές ικανότητες και οι κατακτήσεις στη μια επηρεάζουν την ανάπτυξη της άλλης. Για παράδειγμα, όταν ένα παιδί δυσκολεύεται να ελέγξει το άγχος και την αποθάρρυνση, τείνει να αποφεύγει ή να εγκαταλείπει μαθησιακές δραστηριότητες που το δυσκολεύουν. Αντίθετα, όταν καταφέρνει τη συναισθηματική αυτο-ρύθμιση, μπορεί να εμπλακεί πιο αποτελεσματικά σε περίπλοκες μαθησιακές δραστηριότητες. Υποστηρίζεται εξάλλου ότι η επιμονή και η εμπλοκή σε σύνθετες μαθησιακές δραστηριότητες που αποτελούν πρόκληση για το παιδί, αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα της ικανότητας για

αυτο-ρύθμιση (Florez, 2011). Ως εκ τούτου, η ικανότητα για αυτο-ρύθμιση είναι αναγκαία για την ανταπόκριση του παιδιού στις ακαδημαϊκές και κοινωνικές απαιτήσεις του σχολείου. Πολλές μελέτες δε, καταδεικνύουν υψηλή συσχέτιση μεταξύ της ικανότητας για αυτο-ρύθμιση και ακαδημαϊκών επιτευγμάτων, αποδίδοντας στην αυτο-ρύθμιση μεγαλύτερη προγνωστική αξία απ' ότι σε χαρακτηριστικά όπως η νοημοσύνη (Blair & Razza, 2007, Bodrova & Leong, 2008, Duncan, Claessens, Huston et al., 2007).

Τα τελευταία μάλιστα χρόνια, στη γνωστική, εκπαιδευτική και αναπτυξιακή ψυχολογία υπογραμμίζεται, σε σχέση με τη μάθηση (ακαδημαϊκή μάθηση), η σημασία της ανάληψης ευθύνης από το ίδιο το άτομο για την οργάνωση και τη ρύθμιση της μάθησης, δηλαδή τι πρέπει να μάθει και πώς θα το μάθει. Η σημαντική αυτή έκφανση της αυτο-ρύθμισης της συμπεριφοράς, γνωστή ως αυτο-ρυθμιζόμενη μάθηση αλλά και με τον όρο «μαθαίνω πώς να μαθαίνω», σχετίζεται με την ανάπτυξη της αυτο-επίγνωσης και του ελέγχου των διανοητικών διεργασιών σε συνδυασμό με στόχους, κίνητρα, συναισθήματα και βουλευτικές διεργασίες ελέγχου και θεωρείται σημαντική παράμετρος ατομικών διαφορών ως προς τη μάθηση (Whitebread, 2007, Whitebread & Coltman, 2007). Σ' αυτό το πλαίσιο, η αυτο-ρύθμιση αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να παρακολουθούν τη δική τους μάθηση, να μπορούν να ελέγχουν την κατανόησή τους, να ξέρουν πότε κάνουν λάθη και πώς να τα διορθώνουν.

Αν και όταν μιλάμε για την αυτο-ρύθμιση η έμφαση είναι στην ατομική λειτουργία, η ανάπτυξή της δεν είναι ευθύνη μόνο του παιδιού. Αντίθετα, σημαντικό ρόλο έχουν και όλοι όσοι αλληλεπιδρούν με το παιδί, όπως γονείς, εκπαιδευτικοί, συνομήλικοι και ρυθμίζουν, από κοινού με το παιδί, τη συμπεριφορά του (γνωστική, μεταγνωστική, συναισθηματική, βουλευτική) (Κωσταρίδου-Ευκλείδη, 2005). Πρόκειται δηλαδή για μια κοινωνική διαδικασία η οποία έχει την προέλευσή της στην ετερο-ρύθμιση² αλλά και την συν-

² Πρόκειται για τη μετάβαση του ατόμου από μια κατάσταση εξωτερικού ελέγχου και ρύθμισης στην οποία κάποιος άλλος έχει την ευθύνη της καθοδήγησης και της ρύθμισης, σε κατάσταση εσωτερικού ελέγχου και αυτο-ρύθμισης. Στην περίπτωση αυτή, υπονοούνται δύο διαφορετικές,

ρύθμιση³, με νευροβιολογικές βάσεις που χρειάζονται τις απαραίτητες εμπειρίες για να εξελιχθούν (Bronson, 2000, Κωσταρίδου-Ευκλείδη, 2005).

Η ανάπτυξη της ικανότητας της αυτο-ρύθμισης ξεκινάει από τους πρώτους μήνες της ζωής (αν όχι από την εμβρυική περίοδο) με τον έλεγχο της διέγερσης και την εναρμόνιση των αισθητηριακών ερεθισμάτων. Τα βρέφη, χρησιμοποιούν το απαλό άγγιγμα και τη φωνή αυτών που τα φροντίζουν για να αναπτύξουν την ικανότητα να ηρεμούν τον εαυτό τους (Florez, 2011). Αργότερα, περιλαμβάνει τη συμμόρφωση σε υποδείξεις και τον έλεγχο της παρόρμησης. Κατά την πρώτη παιδική ηλικία, τα παιδιά μαθαίνουν πόσο πρέπει να περιμένουν για να ικανοποιήσουν μια επιθυμία και έτσι σταδιακά ρυθμίζουν την εσωτερική ένταση και χρησιμοποιούν εξωτερικές υποδείξεις ή παροτρύνσεις (π.χ. «η σειρά σου είναι μετά») για να αναστείλουν μια επιθυμία (π.χ. να αρπάξουν ένα παιχνίδι, να μιλήσουν κ.λπ.). Έτσι, αρχίζουν να χρησιμοποιούν γνωστικές στρατηγικές για τον έλεγχο των συναισθημάτων και της παρόρμησης, μαθαίνουν να συμπεριφέρονται σύμφωνα με κοινωνικές και ηθικές απαιτήσεις και προσοδευτικά κατευθύνουν και παρακολουθούν τη σκέψη και τη συμπεριφορά τους ώστε να εναρμονιστούν με τις προσδοκίες των άλλων αλλά και να επιτύχουν στόχους που έχουν θέσει τα ίδια (Berk, Mann & Ogan, 2006).

Η συζήτηση για τη σχέση ανάμεσα στο παιχνίδι προσποίησης και την αυτο-ρύθμιση έχει πολύ συχνά ως αφετηρία την προσέγγιση του Vygotsky. Σύμφωνα με τον Vygotsky, τρεις είναι οι σημαντικές συνθήκες για την ανάπτυξη της αυτο-ρύθμισης, οι οποίες είναι στενά συνδεδεμένες μεταξύ τους: η ετερο-ρύθμιση, η οικειοποίηση πολιτισμικών εργαλείων που θα καταστήσουν δυνατή την αυτο-ρύθμιση και η εμπλοκή σε κοινωνιοδραματικό παιχνίδι (Bodrova & Leong, 2003, Dunkan & Taruli, 2003).

ξεχωριστές οντότητες οι οποίες αλληλεπιδρούν και η πιο έμπειρη «ρυθμίζει» τη λιγότερο έμπειρη.

³ Στη συν-ρύθμιση τα άτομα που αλληλεπιδρούν κινούνται σε έναν κοινό άξονα ρύθμισης όπου παρακολουθούν και ελέγχουν τον εαυτό τους και, ταυτόχρονα, παρακολουθούν και ρυθμίζουν τη συμπεριφορά του άλλου.

3. Το παιχνίδι προσποίησης και η αυτο-ρύθμιση

Το παιχνίδι προσποίησης αποτελεί σημαντικό τύπο παιχνιδιού το οποίο αναπτύσσεται κατά την πρώτη παιδική ηλικία και θεωρείται ότι την χαρακτηρίζει. Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του είναι ότι αποτελεί μια αναπαραστατική δραστηριότητα (Piaget, 1962, Vygotsky, 1933/1997). Όταν τα παιδιά προσποιούνται, η σημασία αντικειμένων και πράξεων αλλάζει έτσι ώστε να ανταποκρίνεται σε μια υποθετική κατάσταση, η οποία ικανοποιεί τις ανάγκες τους. Τα παιδιά προσποιούνται μόνα (μοναχικό παιχνίδι προσποίησης) ή με άλλους συντρόφους (κοινωνικό παιχνίδι προσποίησης) και το παιχνίδι τους μπορεί να περιλαμβάνει απλούς χειρισμούς αντικειμένων με μη κυριολεκτικό τρόπο (συμβολικό παιχνίδι) αλλά και κανόνες και ρόλους συντονισμένους σ' ένα φανταστικό πεδίο με τρόπους που απορρέουν από την κοινωνικοπολιτισμική τους εμπειρία (δραματικό παιχνίδι και κοινωνικοδραματικό παιχνίδι όταν η προσποίηση περιλαμβάνει συντονισμένα και αμοιβαία ανάληψη ρόλων μεταξύ συνομηλίκων βάσει «σεναρίου») (Smith, 2010). Κυρίως υπό την επίδραση της άποψης του Piaget ότι τα παιδιά κατακτούν το συλλογικό συμβολισμό ως ένα στάδιο μετά το μοναχικό παιχνίδι (στο 3^ο έτος περίπου), θεωρείται ότι η εξελικτική πορεία του παιχνιδιού προσποίησης είναι από το μοναχικό στο κοινωνικό, με το τελευταίο εννοώντας κυρίως το παιχνίδι μεταξύ συνομηλίκων. Και ο Vygotsky, ο οποίος έδωσε έμφαση στην κοινωνική διάσταση της ανάπτυξης, υποστήριξε ότι αν και η προσποίηση των παιδιών με αντικείμενα στο πλαίσιο της αλληλεπίδρασής τους με άλλους είναι πολύ σημαντική αναπτυξιακά, το πραγματικό παιχνίδι προσποίησης (το οποίο δε διαχώρισε από το κοινωνικοδραματικό) εμφανίζεται στο 3^ο έτος, όταν το παιδί διαφοροποιεί τη συμπεριφορά του στο παιχνίδι από την πραγματικότητα, αποκτά δηλαδή επίγνωση της προσποίησης. Μελέτες όμως στο οικογενειακό περιβάλλον των παιδιών έχουν δείξει ότι το παιχνίδι προσποίησης πρωτοεμφανίζεται κατά τη βρεφική ηλικία στο πλαίσιο της αλληλεπίδρασης με άλλους συντρόφους (κυρίως τη μητέρα) (Haight, 1999, Haight & Miller, 1993).

Αν και υπάρχει επιστημονική αντιπαράθεση για το εάν το παιχνίδι προσποίησης είναι απαραίτητο για την πρόκληση αναπτυξιακών αλλαγών (Lancy, 2007, Smith, 2010), είναι κοινά αποδεκτό ότι

αποτελεί σημαντικό μέσο για την ανάπτυξη γνωστικών και κοινωνικοσυναισθηματικών ικανοτήτων μέσα από τις εμπειρίες που παράγει, οι οποίες έχουν απόλυτη συνάφεια και σημασία για την εκπαιδευτική διαδικασία. Η θέση αυτή αποτυπώνεται σε όλες τις κυρίαρχες ψυχολογικές θεωρίες για την ανάπτυξη του 20^{ου} αιώνα. Το παιχνίδι προσποίησης προσεγγίζεται ως: ασφαλές μέσο συνδιαλλαγής με συναισθηματικούς παράγοντες, έκφρασης και διαχείρισης άγχους αλλά και συμβολικής αποκατάστασης της κυριαρχίας και του ελέγχου (Freud, 1961), συμβολικός τρόπος αντιμετώπισης των φυσιολογικών αντιθέσεων/ συγκρούσεων που αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της ανάπτυξης καθώς και μέσο διερεύνησης και πειραματισμού κοινωνικών ρόλων (Erikson, 1977/1990), δημιουργική δραστηριότητα μεταξύ εσωτερικής και εξωτερικής πραγματικότητας (Winnicott, 1971/1979), μέσο εξάσκησης και εγκαθίδρυσης συμβολικών σχημάτων κατά το στάδιο της προενεργητικής νόησης (Piaget, 1962), ως μέσο ανάπτυξης ευελιξίας της σκέψης (Bruner, 1972), ως κατευθυντήρια δραστηριότητα της πρώτης παιδικής ηλικίας η οποία δημιουργεί ζώνη εγγύτερης ανάπτυξης (Vygotsky, 1933/1997). Σύγχρονες έρευνες έχουν συνδέσει το παιχνίδι προσποίησης με πολλά και διαφορετικά συναισθηματικά, γνωστικά και κοινωνικά οφέλη όπως η έκφραση και επεξεργασία συναισθημάτων, η ανάπτυξη του αυτοελέγχου, η δημιουργικότητα, η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων, η αύξηση της ικανότητας για συγκέντρωση και προσοχή, η επικοινωνία, η συνεργασία, η συμμετοχή κ. α. (π.χ. Berk & Winsler, 1995; Singer, Golinkoff & Hirsh-Pasek, 2006).

Όπως ήδη αναφέρθηκε, η σχέση του παιχνιδιού προσποίησης με την ικανότητα για αυτο-ρύθμιση έχει επισημανθεί στην προσέγγιση του Vygotsky για το παιχνίδι και τη σημασία του. Ο Vygotsky (1933/1997) εξέτασε το παιχνίδι⁴ στο πλαίσιο της πολιτισμικής-ιστορικής θεωρίας του (π.χ. Vygotsky, 1978/1997, 1934/1988) και το συνέδεσε με την κατάκτηση πολιτισμικών εργαλείων και την ανάπτυξη των ανώτερων ψυχολογικών λειτουργιών. Η άποψη του Vygotsky (1933/1997) για το παιχνίδι συνδυάζει συναισθηματικούς

⁴ Με τον όρο παιχνίδι, ο Vygotsky αναφέρεται στο παιχνίδι προσποίησης, το οποίο δεν διαχώρισε από το κοινωνιοδραματικό παιχνίδι.

και γνωστικούς παράγοντες. Σύμφωνα με την άποψη αυτή, η επιθυμία για παιχνίδι ξεπηδάει από την ανάγκη επίλυσης και κατάκτησης μιας δύσκολης ή ανοίκειας κατάστασης. Η εκπλήρωση μέσω της φαντασίας αναγκών και επιθυμιών οι οποίες δεν είναι δυνατό να εκπληρωθούν άμεσα, αποτελεί για τον Vygotsky την ουσία και το βασικό κίνητρο για αυτήν τη δραστηριότητα. Το παιχνίδι δίνει τη δυνατότητα στο παιδί να υπερβεί τους περιορισμούς που θέτουν τα πραγματικά αντικείμενα και ο χώρος μέσα στον οποίο υπάρχουν και, μέσα από τη δημιουργία μιας φανταστικής κατάστασης, να δοκιμάσει συμπεριφορές που απαιτούν μεγαλύτερη οργάνωση και να διευκολυνθεί στη μετάβασή του στον κόσμο των συμβολικών εννοιών.

Η δημιουργία της φανταστικής κατάστασης (η οποία για τον Vygotsky αποτελεί το μόνο χαρακτηριστικό που σαφώς προσδιορίζει το παιχνίδι σε σχέση με άλλες δραστηριότητες) επιτρέπει στο παιδί να διαχωρίζει τη σημασία από τα αντικείμενα και τη δράση και το υποχρεώνει να ασκήσει το μεγαλύτερο δυνατό αυτοέλεγχο, υποτάσσοντας τη συμπεριφορά του σε κανόνες που δεν επιβάλλονται έξωθεν αλλά αποτελούν αναπόσπαστο μέρος του παιχνιδιού. Με τον τρόπο αυτό, το παιχνίδι αποτελεί δραστηριότητα που παρέχει στο παιδί το απαραίτητο υποστηρικτικό πλαίσιο για να λειτουργήσει με τρόπο που ξεπερνάει τις ήδη κατακτημένες ικανότητές του, ο οποίος είναι αναγκαίος ώστε να μπορέσει να εκπληρώσει συμβολικά ανάγκες και επιθυμίες που δεν μπορούν να εκπληρωθούν στην πραγματικότητα. Επομένως, το παιχνίδι επιτρέπει στο παιδί να λειτουργήσει βάσει νοήματος και με αυτοέλεγχο, γεγονός που μετασχηματίζει τις ψυχολογικές του λειτουργίες και το οδηγεί στον κόσμο των εννοιών και στην ικανότητα για αυτο-ρύθμιση.

Πιο συγκεκριμένα, η συμβολή του παιχνιδιού προσποίησης στην ανάπτυξη της ικανότητας για αυτο-ρύθμιση, συνδέεται με τα δύο ξεχωριστά χαρακτηριστικά του: τη φανταστική κατάσταση και τους κανόνες. Αντίθετα με την πεποίθηση ότι στο παιχνίδι το παιδί κάνει αυτό που θέλει απελευθερωμένο από περιορισμούς, ο Vygotsky θεώρησε ότι στη φανταστική κατάσταση το παιδί εκπληρώνει επιθυμίες λειτουργώντας κάτω από περιορισμούς, κάτι που θεώρησε ως το «παράδοξο» του παιχνιδιού. Οι περιορισμοί τίθενται από κανόνες, το δεύτερο και αναπόσπαστα συνδεδεμένο με τη φανταστική

κατάσταση χαρακτηριστικό του παιχνιδιού. Οι κανόνες απορρέουν από την ίδια τη φανταστική κατάσταση και είναι απαραίτητοι για να ξεκινήσει και να διατηρηθεί το παιχνίδι. Οι κανόνες αυτοί μπορεί να μην είναι ρητοί, η ύπαρξή τους όμως διακρίνεται σαφώς όταν σκεφτούμε τους περιορισμούς που θέτουν στη συμπεριφορά των παιδιών όταν υιοθετούνται κατά το παιχνίδι. Όταν για παράδειγμα ένα παιδί προσποιείται τη μητέρα ή τον πατέρα στο παιχνίδι του, δεν μπορεί να συμπεριφερθεί με όποιον τρόπο επιθυμεί αλλά μόνο με τρόπο συνεπή προς τη μητρική ή πατρική συμπεριφορά. Επίσης, όσο και αν το επιθυμεί, δεν θα φάει ποτέ την καραμέλα που χρησιμοποιεί για ρόδα του φανταστικού αυτοκινήτου στο παιχνίδι του (Vygotsky, 1933/1997).

Η αδιάσπαστη αυτή ενότητα φανταστικής κατάστασης και κανόνων, επιτρέπει στο παιδί να διαχωρίζει τη σκέψη και τη δράση του από τα εξωτερικά ερεθίσματα και να ενεργεί όχι βάσει της ίδιας της εξωτερικής πραγματικότητας αλλά βάσει της σημασίας που της έχει αποδώσει. Ως αποτέλεσμα, τα παιδιά μπορούν να δράσουν βάσει ιδεών, βάσει του νοήματος της πράξης, γεγονός που οδηγεί στην επιλεκτική και όχι παρορμητική δράση και στην επιλεκτική συμπεριφορά. Επιπλέον, παρέχει στα παιδιά το υποστηρικτικό πλαίσιο ώστε να ελέγχουν την παρόρμηση και να ρυθμίζουν τη συμπεριφορά τους όπως αρμόζει στο παιχνίδι τους. Και οι δύο ιδιότητες αυτές του παιχνιδιού προσποίησης συνδέονται με την ανάπτυξη της ικανότητας για αυτο-ρύθμιση.

Είναι λοιπόν σα να λέμε ότι κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού, το παιδί έχει την ικανότητα να πετύχει κάτι παραπάνω από αυτό για το οποίο είναι ικανό στην καθημερινή του ζωή. Με τον τρόπο αυτό το παιχνίδι δημιουργεί ζώνη εγγύτερης ανάπτυξης⁵, δηλαδή τα παιδιά θέτουν μόνα τους προκλήσεις στον εαυτό τους και ελέγχουν τη σκέψη και τη συμπεριφορά τους. Η ιδιαιτερότητα που προσλαμβάνει η ζώνη εγγύτερης ανάπτυξης η οποία δημιουργείται μέσω του παιχνιδιού

⁵ Η ζώνη εγγύτερης ανάπτυξης ορίζεται από τον Vygotsky (1978/1997) ως «η απόσταση μεταξύ του πραγματικού αναπτυξιακού επιπέδου, όπως αυτό καθορίζεται από την αυτόνομη επίλυση προβλημάτων, και του επιπέδου της εν δυνάμει ανάπτυξης, όπως αυτό καθορίζεται από την επίλυση προβλημάτων με καθοδήγηση από ενήλικους ή σε συνεργασία με περισσότερο ικανούς συνομήλικους» (σελ. 86).

είναι ότι, η ίδια η διαδικασία του παιχνιδιού είναι αυτή που δημιουργεί τις συνθήκες για λειτουργία σε ένα πιο προχωρημένο (σε σχέση με τις ήδη κατακτημένες ικανότητες του παιδιού) επίπεδο, ακόμα και όταν το παιδί παίζει μόνο του. Στο παιχνίδι, το παιδί πάντα ξεπερνάει τον εαυτό του και πηγαίνει πέρα από τη συνηθισμένη, καθημερινή του συμπεριφορά.

Η θεωρητική αυτή θέση ότι η αυτο-ρύθμιση είναι εγγενές χαρακτηριστικό αλλά και αποτέλεσμα του παιχνιδιού προσποίησης, δεν έχει διερευνηθεί συστηματικά και τα υπάρχοντα αποτελέσματα δεν οδηγούν σε ξεκάθαρα συμπεράσματα. Η σχετική έρευνα που αναπτύσσεται τελευταία, επικεντρώνεται τόσο στην παρατήρηση της συμπεριφοράς των παιδιών σε ποικίλες καταστάσεις όσο και στην πιο συστηματική διερεύνηση της σύνδεσης του παιχνιδιού προσποίησης με την επίδειξη ικανότητας για αυτο-ρύθμιση σε άλλες δραστηριότητες. Σε μελέτες συστηματικής παρατήρησης σε προσχολικά πλαίσια, έχει αποτυπωθεί ότι η πλειοψηφία των καταστάσεων κατά τις οποίες τα παιδιά επιδεικνύουν ικανότητα για αυτο-ρύθμιση, συνδέονται με το παιχνίδι και μάλιστα με το σύνθετο κοινωνιοδραματικό παιχνίδι (Bodrova & Leong, 2001, Elias & Berk, 2002, Whitebread, Coltman, Jameson & Lander, 2009), στο πλαίσιο του οποίου τα παιδιά ρυθμίζουν τη δική τους συμπεριφορά αλλά και τη συμπεριφορά των συμπαικτών τους.

Σε σχέση με την επίδραση του παιχνιδιού προσποίησης στην ικανότητα για αυτο-ρύθμιση σε άλλες δραστηριότητες, οι έρευνες έχουν εστιάσει στην ικανότητα για συναισθηματική ρύθμιση (π.χ. έλεγχος συναισθημάτων και κινήτρων κατά τη διάρκεια μαθησιακών δραστηριοτήτων), στην κοινωνικά υπεύθυνη συμπεριφορά (π.χ. συμμετοχή στην τακτοποίηση του χώρου μετά το παιχνίδι), στην ικανότητα παρακολούθησης προσχολικών δραστηριοτήτων (π.χ. παραμονή και συμμετοχή στην «παρεούλα»), στην εμπλοκή με κάποια δραστηριότητα (π.χ. επιμονή, διάρκεια αλλά και ποιότητα της ενασχόλησης με τη δραστηριότητα αυτή) και στη συχνότητα εμφάνισης του ιδιωτικού (εγωκεντρικού) λόγου, ο οποίος συνδέεται με

την ικανότητα αυτο-ρύθμισης⁶ (Bodrova & Leong, 2001, Diamond, Barnett, Thomas & Munro, 2007, Elias & Berk, 2002, Singer, Golinkoff & Hirsh- Pasek, 2006, Whitebread, Coltman, Jameson & Lander, 2009). Ένας από τους παράγοντες που φαίνεται ότι διαμεσολαβεί τη σχέση του παιχνιδιού προσποίησης με την αυτο-ρύθμιση σχετίζεται πάλι με την πολυπλοκότητα του κοινωνιοδραματικού παιχνιδιού, δηλαδή του παιχνιδιού στο οποίο εμπλέκονται περισσότερα παιδιά και αναλαμβάνουν διαφορετικούς ρόλους (Berk, Mann & Ogan, 2006). Ταυτόχρονα, η διάρκεια και η πολυπλοκότητα του κοινωνιοδραματικού παιχνιδιού φαίνεται να σχετίζεται, κάτω από προϋποθέσεις, με τη συμμετοχή των εκπαιδευτικών στο παιχνίδι των παιδιών, γεγονός που καθιστά σημαντική τη συζήτηση για την εμπλοκή των εκπαιδευτικών στο παιχνίδι προσποίησης των παιδιών και τις παραμέτρους που προσδιορίζουν την αποτελεσματικότητά της (Παπαδοπούλου, υπό δημοσίευση).

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι το παιχνίδι προσποίησης αποτελεί σημαντική δραστηριότητα των παιδιών προσχολικής ηλικίας με οφέλη απόλυτα συνδεδεμένα με τη μάθηση και την ανάπτυξή τους (Bodrova & Leong, 2001, 2003, 2005). Μπορεί επομένως να αποτελέσει σημαντικό μέσο αποτελεσματικής διδασκαλίας και μάθησης κατά την προσχολική και πρωτοσχολική ηλικία (Bodrova & Leong, 2003, 2005; Duncan & Tarulli, 2003; van Oers & Wardekker, 1999; van Oers, 2003).

Στο σημείο αυτό βέβαια θα πρέπει να επισημανθεί ότι αν και το παιχνίδι προσποίησης έχει καθολικό χαρακτήρα, η καθολικότητά του δε σημαίνει έλλειψη διαφορών στο παιχνίδι ούτε απαραίτητως και κοινή εμπειρία. Μελέτες από την κοινωνική ανθρωπολογία και την διαπολιτισμική ψυχολογία έχουν επισημάνει σημαντικές κοινωνικοπολιτισμικές διαφορές και έχουν δείξει ότι η συχνότητα, το περιεχόμενο, η πολυπλοκότητα, οι συμπαίκτες, οι κοινωνικές

⁶ Ο εγωκεντρικός ή ιδιωτικός λόγος (private speech), στην προσέγγιση του Vygotsky χρησιμοποιείται από τα παιδιά για να κατευθύνουν τη σκέψη και τη συμπεριφορά τους, ιδιαίτερα όταν αντιμετωπίζουν δυσκολίες. Μελέτες για τον εγωκεντρικό λόγο έχουν τεκμηριώσει τη σχέση του με την ανάπτυξη της αυτο-ρύθμισης (Berk, Mann & Ogan, 2006).

αλληλεπιδράσεις κατά τη διάρκειά του, οι συνθήκες του (π.χ. αντικείμενα, χώρος, χρόνος), οι σημασίες του παιχνιδιού αλλά και η σχέση του με άλλες καθημερινές δραστηριότητες των παιδιών, διαφοροποιούνται από τη μια κοινωνία στην άλλη (Gaskins & Gönçü, 1988, Gaskins, Haight & Lancy, 2007)⁷. Παρόμοια, έχουν επισημανθεί και ταξικές διαφορές όσον αφορά τόσο στο είδος των δραστηριοτήτων που αποτελούν παιχνίδι όσο και στο είδος των πολιτισμικών περιεχομένων με τα οποία εξοικειώνονται τα παιδιά (Smith, 2010, Μακρυνιώτη, 2000). Επομένως, μια άκριτη παραδοχή της αρχής της οικουμενικότητας του παιχνιδιού προσποίησης και της αναπτυξιακής του σημασίας, μπορεί να ευνοεί τη συγκάλυψη σημαντικών διαφορών αλλά και ενέχει τον κίνδυνο παρερμηνείας της διαφορετικότητας ως μειονεξίας (Haight et al., 1999, Lancy, 2007, Smith, 1983, 2010, Rogoff et al., 1993).

Για τις αποκαλούμενες δυτικές κοινωνίες πάντως, το παιχνίδι προσποίησης αποτελεί σημαντική δραστηριότητα η οποία επιτρέπει στο παιδί να χρησιμοποιήσει τα πολιτισμικά εργαλεία που είναι απαραίτητα τόσο για την ίδια την εκπλήρωση της προσποίησης όσο και για να οικειοποιηθεί απαραίτητες δεξιότητες για τη συμμετοχή του στην κοινωνία στην οποία ανήκει. Ως εκ τούτου, αποτελεί σημαντική δραστηριότητα για την ανάπτυξη και τη μάθηση, ειδικά αν αποδεχθούμε τη θέση ότι *«η ανάπτυξη συντελείται μέσω της ενεργητικής συμμετοχής σε πολιτισμικά δομημένες δραστηριότητες στις οποίες τα παιδιά, σε αλληλεπίδραση με τους γονείς ή άλλους συντρόφους, κατακτούν, τροποποιούν και διευρύνουν τη γνώση, τις αξίες και τις δεξιότητες που χαρακτηρίζουν την κοινωνία τους»* (Rogoff, 2003, σελ. 1).

⁷ Οι Gaskins, Haight & Lancy (2007), περιγράφουν τρία μοντέλα αντιμετώπισης του παιχνιδιού σε διαφορετικούς πολιτισμούς αλλά και κοινωνικές ομάδες, τα οποία συνδέονται με διαφορές στο παιχνίδι των παιδιών καθώς και με τη συμμετοχή των ενηλίκων σε αυτό: την ενθάρρυνση (αναγνώριση της αξίας του παιχνιδιού, υψηλή επένδυση σε αυτό και συμμετοχή ενηλίκων ως συμπαίκτες), την αποδοχή (το παιχνίδι αναγνωρίζεται ως δραστηριότητα των παιδιών, όμως η επένδυση σε αυτό είναι χαμηλή και οι ενήλικοι δεν παίρνουν το ρόλο συμπαίκτη) και την αναστολή του παιχνιδιού (χαμηλή αξία του παιχνιδιού, έμφαση στη συμμετοχή σε άλλες δραστηριότητες).

4. Συμπέρασμα

Στο άρθρο αυτό υποστηρίχθηκε ότι η ανάπτυξη της ικανότητας για αυτο-ρύθμιση μέσα από το παιχνίδι προσποίησης αποτελεί έναν τρόπο αποσαφήνισης της σχέσης του παιχνιδιού με τη μάθηση καθώς και του ρόλου του παιχνιδιού στην κατάκτηση ικανοτήτων σημαντικών για την ακαδημαϊκή πορεία και επιτυχία των παιδιών. Επιπλέον, η σύνδεση του παιχνιδιού προσποίησης με την αυτο-ρύθμιση και η κατανόηση της σημασίας της τελευταίας για τη μάθηση, προσφέρει στους εκπαιδευτικούς μια θεωρητική βάση για την ενθάρρυνση του παιχνιδιού καθώς και για τη δική τους συμμετοχή σε αυτό.

Όπως όμως επισημάνθηκε, τα ερευνητικά ευρήματα αλλά και οι κοινωνικοπολιτισμικές διαφορές στο παιχνίδι προσποίησης, απαιτούν προσεκτική αξιολόγηση της αναπτυξιακής σημασίας του σε σχέση με την ικανότητα της αυτο-ρύθμισης. Επίσης, θα πρέπει να επισημανθεί ότι η ικανότητα αυτή δεν αναπτύσσεται αποκλειστικά μέσα από το παιχνίδι προσποίησης αλλά και μέσα από μαθησιακές δραστηριότητες που μοιράζονται πολλά από τα χαρακτηριστικά που συνδέουν το παιχνίδι με τη μάθηση: συναισθηματική ασφάλεια, πρωτοβουλία και αίσθημα ελέγχου, ενδιαφέρον, ελεγχόμενη δυσκολία του εγχειρήματος- ελεγχόμενη πρόκληση, δημιουργικότητα, συμμετοχή του λόγου (ομιλία, συνομιλία) και, πολύ σημαντικό, δραστηριότητες που έχουν νόημα για το παιδί (Whitebread, Coltman, Jameson & Lander, 2009).

Το παιχνίδι προσποίησης είναι σίγουρα μια σημαντική και αναπτυξιακά κατάλληλη οδός για την ανάπτυξη της αυτο-ρύθμισης, όχι όμως η μοναδική. Στόχος λοιπόν δεν είναι να εξιδανικεύσουμε το παιχνίδι ούτε να υποβαθμίσουμε τη σημασία του σε εκπαιδευτικά πλαίσια και στην εκπαιδευτική διαδικασία. Αντιθέτως, στόχος είναι να κατανοήσουμε τους τρόπους αλλά και τις συνθήκες κάτω από τις οποίες το παιχνίδι αποτελεί σημαντική παιδαγωγική στρατηγική και τρόπο μάθησης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Αυγητίδου, Σ. (2001) Εισαγωγή. Στο Σ. Αυγητίδου (Επιμ.) *Το Παιχνίδι. Σύγχρονες Ερευνητικές και Διδακτικές Προσεγγίσεις* (13-51). Αθήνα: Τυπωθήτω.
- Blair, C., Razza, R.P. (2007) Relating effortful control, executive function and false-belief understanding to emerging math and literacy ability in kindergarten. *Child Development*, 78, 647-663.
- Berk, L., Mann, T.D., Ogan, A.T. (2006) Make-believe play: wellspring for development of self-regulation. Στο D. Singer, R. Golinkoff, Hirsh-Pasek, K. (Επιμ.), *Play=Learning. How Play Motivates and enhances Children's Cognitive and Social-emotional Growth* (74-101). N.Y.: Oxford University Press.
- Berk, L., Winsler, A. (1995) *Scaffolding Children's Learning: Vygotsky and Early Childhood Education*. Washington DC: National Association for the Education of Young Children.
- Βοσνιάδου, Σ. (2001) Πώς Μαθαίνουν οι Μαθητές. Έκδοση της Διεθνούς Ακαδημίας της Εκπαίδευσης και του Διεθνούς Γραφείου Εκπαίδευσης της UNESCO. Διαθέσιμο στο http://users.att.sch.gr/pzafair/c-Arfra/yliko-htm/DID-Pos_math_mathites.pdf
- Bodrova, E., Leong, D. (2001) *Tools of the Mind: A Case Study of Implementing the Vygotskian Approach in American Early Childhood and Primary Classrooms*. Unesco: International Bureau of Education.
- Bodrova, E., Leong, D. (2003) Learning and development of preschool children from the Vygotskian perspective. Στο A. Kozulin, B. Gindis, V. Ageyev, S. Miller (Επιμ.), *Vygotsky's Educational Theory in Cultural Context*. Cambridge: CUP.
- Bodrova, E., Leong, D. (2005) High quality preschool programs: what would Vygotsky say? *Early Education and Development*, 16(4), 435-444.

- Bodrova, E., Leong, D. (2008) Developing self-regulation in Kindergarten. Can we keep all the crickets in the basket? *Young Children on the Web*, 1-3.
- Bronson, M.B. (2000) *Self-Regulation in Early Childhood*. N.Y.: The Guilford Press.
- Bruner, J. (1972) Nature and uses of immaturity. *American Psychologist*, 27, 687-708.
- Diamond, A., Barnett, W.S., Thomas, J., Munro, S. (2007) Preschool program improves cognitive control. *Science*, 318, 1387-1388.
- Duncan, G., Claessens, A., Huston, A., Pagani, L., Engel, M., Sexton, H., et al. (2007) School readiness and later achievements. *Developmental Psychology*, 43, 1428-1446.
- Duncan, R.M., Tarulli, D. (2003) Play as the leading activity of the preschool period: Insights from Vygotsky, Leont'ev and Bakhtin. *Early Education and Development*, 14(3), 271-291.
- Elias, C.L., Berk, L. (2002) Self-regulation in young children: Is there a role for sociodramatic play? *Early Childhood Research Quarterly*, 17, 216-238.
- Erickson, E.H. (1977/1990) *Η Παιδική Ηλικία και η Κοινωνία*. Αθήνα: Εκδόσεις Καστανιώτη.
- Florez, I.R. (2011) Developing young children's self-regulation through everyday experiences. *Young Children*, 66(4), 46-51.
- Freud, S. (1961) *Beyond the Pleasure Principle*. N.Y.: Norton.
- Garvey, C. (1977/1990) *Το Παιχνίδι: Η Επίδρασή του στην Εξέλιξη του Παιδιού*. Αθήνα: Κουτσουμπός.
- Gaskins, S., Göncü, A. (1988) Children's play as representation and imagination: The case of Piaget and Vygotsky. *The Quarterly Newsletter of the Laboratory of Comparative Human Cognition*. 10(4), 104-107.

- Gaskins, S., Haight, W., Lancy, D.F. (2007) The cultural construction of play. In A. Göncü & S. Gaskins (Eds), *Play and Development: Evolutionary, Sociocultural and Functional Perspectives* (179-202). Mahwah, NJ: Laurence Erlbaum.
- Gee, J.P. (2003) What video games have to teach us about learning and literacy. *ACM Computers in Entertainment*, 1(1), 1-4.
- Golinkoff, R., Hirsh-Pasek, K., Singer, D. (2006) Why play = learning: A challenge for parents and educators. Στο D. Singer, R. Golinkoff, Hirsh-Pasek, K. (Επιμ.), *Play=Learning. How Play Motivates and enhances Children's Cognitive and Social-emotional Growth* (3-12). N.Y.: Oxford University Press.
- Haight, W. (1999) The pragmatics of caregiver-child pretending at home: understanding culturally specific socialization practices. In A. Goncu (Ed), *Children's Engagement in the World. Sociocultural Perspectives* (128-147). Cambridge: Cambridge University Press.
- Haight, W., Miller, P.J. (1993) *Pretending at Home: Early Development in a Sociocultural Context*. Albany: State University of New York Press.
- Haight, W., Wang, X.L., Fung, H., Williams, K., Mintz, J. (1999) Universal, developmental and variable aspects of young children's play: a cross-cultural comparison of pretending at home. *Child Development*, 70(6), 1477-1488.
- Κωσταρίδου-Ευκλείδη, Α. (2005) *Μεταγνωστικές Διεργασίες και Αυτορύθμιση*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
- Lancy, D.F. (2007) Accounting for variability in mother-child play. *American Anthropologist*, 109(2), 273-284.
- Μακρυγιάννη, Δ. (2000) Το παιχνίδι στο πρόγραμμα του νηπιαγωγείου. Στο Κ. Γκουγκουλή, Α. Κούρια (Επιμ.) *Παιδί και Παιχνίδι στη Νεοελληνική Κοινωνία* (85-171). Αθήνα: Εκδόσεις Καστανιώτη.

- Παπαδοπούλου, Κ. (υπό δημοσίευση) Ο ρόλος των ενηλίκων στο παιχνίδι προσποίησης των παιδιών. *Πρακτικά Διεθνούς Συνεδρίου «παιγνιοθήκες: χώροι επικοινωνίας και ψυχαγωγίας».*
- Piaget, J. (1962) *Play, Dreams and Imitation*. N.Y.: Wiley.
- Rogoff, B., Mistry, J., Goncu, A., Mosier, C. (1993) Guided participation in cultural activity by toddlers and caregivers. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, 58(8).
- Rogoff, B. (2003) *The Cultural Nature of Human Development*. N.Y.: Oxford University Press.
- Singer, D.G., Golinkoff, R., Hirsh-Pasek, K. (2006) *Play=Learning. How Play Motivates Children's Cognitive and Social-Emotional Growth*. Oxford: Oxford University Press.
- Smith, P. (1983) Differences or deficits? The significance of pretend and sociodramatic play. *Developmental Review*, 3, 6-10.
- Smith, P.K. (2001) Το παιχνίδι και οι χρήσεις του παιχνιδιού. Στο Σ. Αυγητίδου (Επιμ.) *Το Παιχνίδι. Σύγχρονες Ερευνητικές και Διδακτικές Προσεγγίσεις* (203-227). Αθήνα: Τυπωθήτω.
- Smith, P.K. (2010) *Children and Play*. West Sussex: Wiley-Blackwell.
- Sylva, K., Bruner, J., Genova, P. (1976) The role of play in the problem solving of children 3- to 5- years old. Στο J.S. Bruner, A. Jolly, K. Sylva (Επιμ.), *Play: It's Role in Development and Evolution* (55-67). Harmondsworth: Penguin.
- Van Oers, B. & Wardekker, W. (1999). On becoming an authentic learner: semiotic activity in the early grades. *Journal of Curriculum Studies*, 31(2), 229-249.
- Van Oers (2003). Learning resources in the context of play. *European Early Childhood Education Research Journal*, 11(1), 7-25.

- Vygotsky, L.S. (1933/1997) Ο ρόλος του παιχνιδιού στην ανάπτυξη των παιδιών. Στο Σ. Βοσνιάδου (Επιμ.) *Νους στην Κοινωνία. Η Ανάπτυξη των Ανώτερων Ψυχολογικών Διαδικασιών*. Αθήνα: Gutenberg.
- Vygotsky, L.S. (1978/1997) *Νους στην Κοινωνία. Η Ανάπτυξη των Ανώτερων Ψυχολογικών Διαδικασιών* (Επιμ. Σ. Βοσνιάδου). Αθήνα: Gutenberg.
- Vygotsky, L.S. (1934/1988). Σκέψη και Γλώσσα (Μετάφραση Α. Ρόδη). Αθήνα: Εκδόσεις Γνώση.
- Winnicott, D. (1971/1979) *Το Παιδί, το Παιχνίδι και η Πραγματικότητα*. Αθήνα: Εκδόσεις Καστανιώτη.
- Whitebread, D. (2007) Developing independence in learning. Στο J. Moyles (Επιμ.), *Early Years Foundations: Meeting the Challenge*. Maidenhead: Open University Press, 220-238.
- Whitebread, D., Jameson, H. (2005) Play, story-telling and creative writing. Στο J. Moyles (Επιμ.), *The Excellence of Play, 2nd Edition*. Maidenhead: Open University Press, 59-71.
- Whitebread, D., Coltman, P. (2007) Developing young children as self-regulated learners. Στο J. Moyles (Επιμ.), *Beginning Teaching, Beginning Learning. 3rd Edition*. Maidenhead: Open University Press, 154-168.
- Whitebread, D., Coltman, P., Jameson, H., Lander, R. (2009) Play, cognition and self-regulation. What exactly are children learning when they learn through play? *Educational and Child Psychology*, 26(2), 40-52.

Καλλιρρόη Παπαδοπούλου
kalrapad@ecd.uoa.gr

Η ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ ΣΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΛΟΓΙΚΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ

Τζέλλα Βαρνάβα-Σκούρα

Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα τρία παιχνίδια που παρουσιάζονται σχεδιάστηκαν για να προτρέπουν τα παιδιά σε χειρισμούς που δίνουν έναυσμα στην ενεργοποίηση της διαδικασίας της αναστοχαστικής αφαίρεσης. Η διαδικασία αυτή, σύμφωνα με την πιαζετιανή θεωρία στο πλαίσιο της οποίας έχει διαμορφωθεί, συνδέεται με τις πιο δημιουργικές διεργασίες στην ανάπτυξη της λογικό-μαθηματικής σκέψης. Τα συγκεκριμένα παιχνίδια αφορούν έννοιες ταξινόμησης, διάταξης σε σειρά, διατήρησης, χώρου χρόνου και ταχύτητας. Στο σχεδιασμό τους ενσωματώνονται ιδέες σχετικά με τη γνωστική ανάπτυξη στις μικρές ηλικίες αλλά και ιδέες σχετικά με τις συναισθηματικές διαστάσεις που είναι σημαντικές για την ενεργοποίησή της σε ένα μαθησιακό πλαίσιο. Πιο συγκεκριμένα τα παιχνίδια κινητοποιούν της περιέργεια και το ενδιαφέρον των παιδιών να διερευνήσουν τις δυνατότητες που προσφέρουν. Η χαρά η έκπληξη και ο θαυμασμός που αισθάνονται για τις κατασκευές που δημιουργούνται και τις πολλαπλές λύσεις που προκύπτουν μέσα από τους χειρισμούς τους και τις δυνατότητες που προσφέρονται από τα παιχνίδια κάνουν τα παιδιά να εμπλέκονται περισσότερο και να κινούνται στα όρια των γνωστικών δυνατοτήτων τους, συχνά ξεπερνώντας και αυτά.

Τα τρία παιχνίδια αποτέλεσαν μέρος ενός ευρύτερου συνόλου που χρησιμοποιήθηκε στο πλαίσιο ενός προγράμματος αντισταθμιστικής εκπαίδευσης στην Αγγλία το οποίο είχε ιδιαίτερα σημαντικά αποτελέσματα ως προς την ανάπτυξη της λογικό-μαθηματικής συγκρότησης στην πρώτη παιδική ηλικία

Όταν τα παιδιά διδάσκονται μαθηματικά, θέλουμε – όλοι πιστεύω – να μάθουν όχι μόνο συγκεκριμένα δεδομένα, αλλά κυρίως θέλουμε να συναντηθούν με νέα αντικείμενα σκέψης και να οικειοποιηθούν εργαλεία σκέψης με τα οποία θα διευρύνουν τους γνωστικούς τους ορίζοντες. Τα μαθηματικά μάς βοηθούν να λύνουμε πολλά και διαφορετικά προβλήματα στην καθημερινή μας ζωή, αλλά το πιο σημαντικό είναι ότι μας προσφέρουν μοντέλα με τα οποία νοούμε τον κόσμο. Σήμερα, μέσω του σχολείου, μαθηματικές έννοιες που επινοήθηκαν από μεγάλους διανοητές στην ιστορία εξέλιξης της ανθρωπίνης γνώσης δημιουργώντας πραγματικές νοητικές μεταλλάξεις στους ανθρώπινους τρόπους σκέψης, μεταδίδονται στις νέες γενιές με τρόπους που γίνονται κατανοητές και πολλές φορές μάλιστα, προφανείς, ακόμα και σε παιδιά μικρής ηλικίας (Piaget 1965). Στην πιαζετιανή θεωρία για τη γνωστική ανάπτυξη, η λογικο-μαθηματική σκέψη έχει κυρίαρχο ρόλο στην εξελικτική διαδικασία και συνδέεται με τις πιο δημιουργικές διεργασίες τις οποίες ο Piaget χαρακτήρισε με τον όρο ‘αναστοχαστική-ανακλαστική αφαίρεση’ (abstraction reflexchissante)

Θα παρουσιάσω σχηματικά το θεωρητικό πλαίσιο και μερικά παραδείγματα από ένα μαθησιακό πρόγραμμα, το οποίο είχε ως αφετηρία την πιαζετιανή οπτική και αποσκοπούσε στο να δημιουργήσει ερεθίσματα για την υποκίνηση και την υποστήριξη της γνωστικής ανάπτυξης σε παιδιά ηλικίας 5 και 6 ετών τα οποία φοιτούσαν σε δημοτικό σχολείο σε Περιοχή Εκπαιδευτικής Προτεραιότητας του Λονδίνου. Η παρέμβαση εντασσόταν στα προγράμματα αντισταθμιστικής εκπαίδευσης που είχε υιοθετήσει η Αρχή για την Εκπαίδευση του Κεντρικού Λονδίνου (Inner London Education Authority). Βασική έννοια γύρω από την οποία σχεδιάστηκε το εκπαιδευτικό υλικό και οι δράσεις του προγράμματος είναι η κινητοποίηση στα παιδιά της διαδικασίας της ‘αναστοχαστικής-ανακλαστικής αφαίρεσης’, δίνοντας έμφαση στη φαντασία και στην εμπλοκή (Varnava - Skoura, 1976 ,1985).

Ας δούμε όμως, τι σημαίνει ‘αναστοχαστική-ανακλαστική αφαίρεση’. Στον ίδιο τον Πιαζέ άρεσε να την προσδιορίζει μέσα από την αφήγηση ενός πραγματικού περιστατικού. Στην ιστορία, εμπλέκεται ένας φίλος του μαθηματικός, ο οποίος θεωρούσε ότι η καριέρα του ξεκίνησε την

ημέρα που, μικρό παιδί, έπαιζε μετρώντας βότσαλα. Είχε μαζέψει αρκετά βότσαλα όταν ξαφνικά και σκέφτηκε να τα αραδιάσει στη σειρά και να τα μετρήσει: ένα, δύο, τρία , τέσσερα, πέντε ...δέκα. «Ωραία», σκέφτηκε... μετά είχε την ιδέα να τα μετρήσει και προς την άλλη κατεύθυνση για να δει τι θα βρει, και προς μεγάλη του έκπληξη, βρήκε πως ήταν πάλι δέκα. Τότε τα έβαλε σε κύκλο και τα μέτρησε ξανά ... βρήκε πως ήταν πάλι δέκα και θυμόταν, μεγάλος πια, τον ενθουσιασμό του που ανακάλυπτε ότι κατέληγε πάντα στο δέκα.

Όπως λέει ο Piaget, το αίσθημα ενθουσιασμού στο παιδί προέκυψε από τη νέα σημαντική γνώση που κατασκεύασε, η οποία δημιουργήθηκε αφαιρετικά από τον συνολικό συντονισμό των ενεργειών του 'παίζοντας' με τα βότσαλα, και η οποία οδήγησε σε έναν νέο τρόπο σκέψης, σύμφωνα με τον οποίο το άθροισμα των στοιχείων ενός συνόλου αντικειμένων είναι ανεξάρτητο από την διευθέτησή τους στον χώρο.

Σε τι συνίσταται, όμως, αυτή η αφαίρεση και η ευχάριστη έκπληξη που αισθάνθηκε το παιδί; Δεν μπορούμε φυσικά να θεωρήσουμε ότι είναι αποτέλεσμα μιας διεργασίας αφαίρεσης που προκύπτει από επεξεργασίες ιδιοτήτων των φυσικών αντικείμενων: η διάταξη, δεν αποτελούσε ιδιότητα των βοτσάλων, τα βότσαλα ήταν σε πλήρη αταξία. Το παιδί εισήγαγε τη σειρά στα βότσαλα. Αλλά και το άθροισμα δεν αποτελούσε ιδιότητα των βοτσάλων. Τα βότσαλα ήταν εκεί, αλλά δεν είχαν άθροισμα.

Έχουμε, λοιπόν, εδώ δύο έννοιες, το άθροισμα και τη διάταξη, καθώς και τη σχέση ανάμεσά τους που προέκυψε από τις δράσεις του παιδιού και τον συντονισμό τους και όχι από κάποιου είδους εμπειρική αφαίρεση από συγκεκριμένες ιδιότητες των βότσων. Ο Πιαζέ κατέληξε να θεωρεί ότι όχι μόνο η λογικο-μαθηματική σκέψη αλλά και όλες οι δράσεις της διανοητικής δημιουργικότητας είναι διαδικασίες ανακλαστικής-αναστοχαστικής αφαίρεσης.¹

¹ Υπάρχει μια φυσική διάσταση σε αυτή την αφαίρεση, φυσική όπως η ανάκλαση στον καθρέφτη καθώς γίνεται μια μετατόπιση, όπως στην ανάκλαση στον καθρέφτη, από ένα χαμηλότερο επίπεδο νοητικής συγκρότησης σε ένα υψηλό επίπεδο κατασκευής. Το παιδί, στο παράδειγμα του Πιαζέ, μετακινήθηκε από το επίπεδο της δράσης στο επίπεδο της αναπαράστασης της δράσης, δηλαδή από το να μπορεί μόνο να κάνει κάτι

Μπορεί αυτή η διαδικασία να ενεργοποιηθεί μέσω μαθησιακών καταστάσεων και να επιταχύνει τον ρυθμό της γνωστικής ανάπτυξης; Στις έρευνες για τη μάθηση στη Σχολή της Γενεύης (Inhedrer, Sinclair & Bovet ,1974), έγινε προσπάθεια να ενεργοποιηθεί αυτή η διαδικασία μέσα από την πρόκληση γνωστικών συγκρούσεων. Οι πειραματικές καταστάσεις δημιουργούσαν εναύσματα για να ενεργοποιηθούν στο παιδί νοητικά σχήματα διαφορετικής φύσης και διαφορετικής πολυπλοκότητας ώστε να προκληθούν «μη αναμενόμενες συγκρούσεις», οι οποίες με τη σειρά τους οδηγούσαν στο «ξύπνημα της περιέργειας», με αποτέλεσμα μια ενδεχόμενη αναδιοργάνωση της σκέψης και δυνητικά μια εξέλιξη στις λογικο-μαθηματικές δομές της σκέψης του παιδιού.

Στις δικές μας μαθησιακές δράσεις που συνδέονται με λογικο-μαθηματικές έννοιες, το ξύπνημα της περιέργειας δεν συνδεόταν αποκλειστικά με την πρόκληση γνωστικών συγκρούσεων. Τα παιχνίδια-τεχνήματα που σχεδιάσαμε, μια ομάδα σχεδιαστών παιχνιδιών και εγώ, κινητοποιούν τη φαντασία των παιδιών για δυνητικές κατασκευές. Κατασκευές, που προκύπτουν μέσα από τις διαδράσεις των παιδιών με τα παιχνίδια, οι οποίες προκαλούν ευχάριστη έκπληξη, χαρά και θαυμασμό στα παιδιά καθώς τις θεωρούν δημιουργήματα τους. Αυτή η αίσθηση ικανοποίησης γίνεται κινητήρια δύναμη τόσο για την ανάπτυξη μεταγνωστικής συνείδησης, όσο και αφετηρία για νέες διερευνήσεις.

Ενδεικτικά παραδείγματα από το υλικό που διαμορφώσαμε για τις μαθησιακές δράσεις

Διατάξεις σε σειρά με διαφορετικά κριτήρια

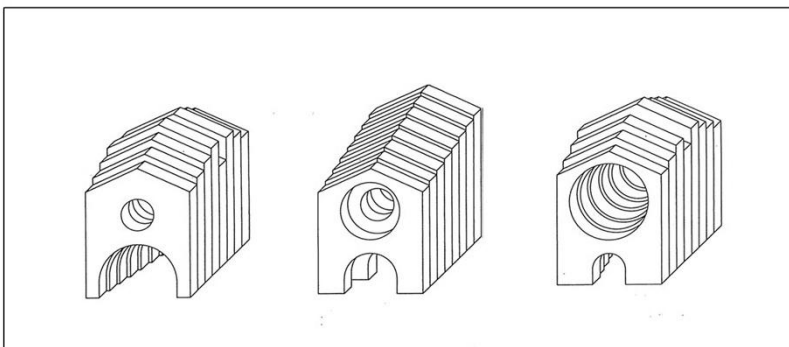
Όπως φαίνεται από τα σχέδια και τις εικόνες, τα παιχνίδια αυτής της ενότητας μπορούν να οδηγήσουν με τους κατάλληλους χειρισμούς σε

στο να μπορεί να σκέπτεται το γίνεσθαι αυτού του κάτι. Τη στιγμή που συνειδητοποιεί κανείς τη δράση του είναι η στιγμή που πραγματοποιείται η κίνηση από ένα επίπεδο σε ένα άλλο υψηλότερο και με αυτή την έννοια έχουμε μια ανάκλαση από το επίπεδο της δράσης στο επίπεδο της αναπαράστασης.

πολλαπλές διατάξεις σε σειρά, κάτι που αποτελεί κατά κάποιον τρόπο μια μεταφορά της κατάστασης των ταξινομήσεων με αλλαγή κριτηρίου στον χώρο των δράσεων της διάταξης σε σειρά (Piaget και την Inhelder, 1959). Για τον Piaget και την Inhelder, η ικανότητα του παιδιού να δημιουργεί τέτοιου είδους ταξινομήσεις συνδέεται με το πέρασμα από τη διαισθητική σκέψη στη συγκεκριμένη λογική σκέψη.

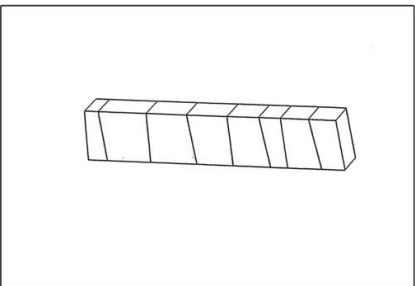
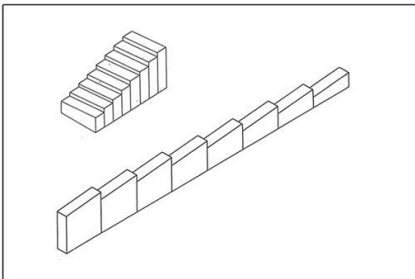
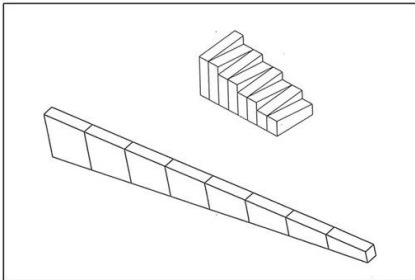
Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, το πρώτο παιχνίδι στην εικόνα αποτελείται από μια συλλογή στοιχείων που μπορούν να διαταχθούν σε σειρά με τρία διαφορετικά κριτήρια: το συνολικό τους ύψος, τη διάμετρο του παράθυρου και το μέγεθος της αφίδας.

Διάταξεις σε σειρά με αλλαγή κριτηρίου



Το δεύτερο παιχνίδι αποτελείται από μια συλλογή στοιχείων που μπορούν να διαταχθούν σε σειρά, με κριτήριο το μέγεθος και με διευθετήσεις από τις οποίες αναδύονται εντυπωσιακά διαφορετικές κατασκευές.

Διάταξεις σε σειρά με αλλαγή κριτηρίου



Μπορούν επίσης να διαταχθούν στη σειρά με ένα εντελώς διαφορετικό κριτήριο, την ένταση του χρώματος σχηματίζοντας έτσι μια κατασκευή πολύ διαφορετική από όλες τις προηγούμενες. Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε στην εικόνα την έκφραση του παιδιού που μόλις έχει ολοκληρώσει μια τέτοια κατασκευή και μοιάζει συνεπαρμένο από το έργο του.

Παρουσιάζοντας τα παιχνίδια στα παιδιά, τους ζητήσαμε, αν θα μπορούσαν να φτιάξουν κάτι με αυτά που θα τους άρεσε. Σε μικρές ομάδες, δύο ή τρία παιδιά μαζί, αλλά μερικές φορές και κάποιο παιδί, μόνο του, άρχισαν να τα περιεργάζονται. Εμείς, προτρέπαμε τα παιδιά να εκφράζουν λεκτικά τις σκέψεις τους και να δοκιμάζουν κάθε ιδέα που είχαν, προσφέροντάς τους τη στήριξή μας όποτε έμοιαζε να χρειάζεται.

Τα παιδιά, διερευνώντας το υλικό, ανακάλυπταν κάποιο από τα κριτήρια δυνητικής διάταξης και το χρησιμοποιούσαν δημιουργικά. Κατά τη διάρκεια της προσπάθειάς τους να ολοκληρώσουν μια διάταξη στη βάση του πρώτου κριτηρίου που είχαν παρατηρήσει και υιοθετήσει, αντιλαμβάνονταν συνήθως ότι τα στοιχεία του συνόλου μπορούσαν να διαταχθούν και με άλλα κριτήρια και με άλλους τρόπους. Αυτή είναι μια πολύ σημαντική διαφορά σε σχέση με τις καταστάσεις ταξινόμησης με αλλαγή κριτηρίου: στις δικές μας μαθησιακές καταστάσεις, τα παιδιά φθάνουν αυθόρμητα να αντιληφθούν τη δυνατότητα αλλαγής κριτηρίου, ακόμα και αν βρίσκονται στο στάδιο της διαισθητικής σκέψης, κάτι που δεν συμβαίνει με τις 'ταξινομήσεις με αλλαγή κριτηρίου' που μελέτησαν ο Piaget και η Inhelder (Piaget και Inhelder, 1959: 288).

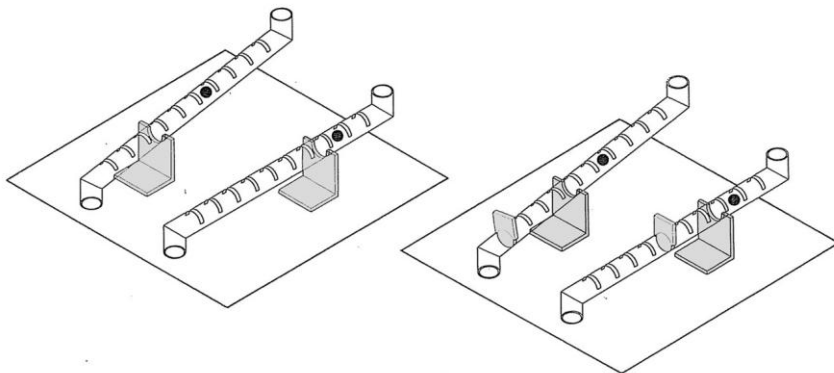
Το ενδιαφέρον στη μεταφορά του προβλήματος από το πεδίο της ταξινόμησης στο πεδίο διάταξης σε σειρά, έγκειται στο γεγονός ότι ακόμα και τα παιδιά που βρίσκονται στο στάδιο της δυνητικής σκέψης, μπορούν να φανταστούν και να φτιάξουν μια νοητική εικόνα, έστω και αν δεν είναι απόλυτα σαφής για το στόχο που έχουν θέσει, υιοθετώντας κάποιο κριτήριο διάταξης. Αυτό, είναι κάτι που έχει ιδιαίτερη σημασία ειδικά στη διαμόρφωση ενός μαθησιακού πλαισίου που στοχεύει στην ενεργοποίηση της διαδικασίας της αναστοχαστικής-ανακλαστικής αφαίρεσης, γιατί λειτουργεί υποστηρικτικά στη διαμόρφωση και στον συντονισμό των δράσεων των παιδιών.

Αντίθετα, στην περίπτωση των ταξινομήσεων, γενικά και ειδικότερα σε εκείνες με αλλαγή κριτηρίου, τα παιδιά που βρίσκονται στο στάδιο της διαισθητικής σκέψης δεν μπορούν να φτιάξουν μια αντίστοιχη νοητική εικόνα, η οποία, θα μπορούσε να λειτουργεί υποστηρικτικά, στη διαμόρφωση των ενεργειών τους (Piaget & Inhelder 1959: 219-220, 285). Έτσι αυτές οι ταξινομήσεις, παρόλο που έχουν ενδιαφέρον ως δοκιμασίες για τη διάγνωση του επιπέδου λογικο-μαθηματικής συγκρότησης, δεν προσφέρονται ως μαθησιακές δοκιμασίες.

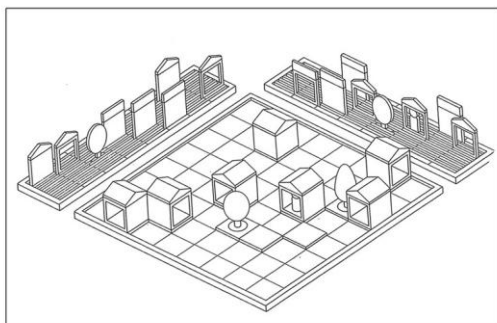
Ας δούμε λίγο πιο συγκεκριμένα τα στοιχεία στο σχεδιασμό των παιχνιδιών διευκολύνουν την ανακάλυψη των κριτηρίων, αλλά και την αυθόρμητη αλλαγή κριτηρίου στη συνέχεια. Προσπαθήσαμε να σχεδιάσουμε το υλικό, έτσι ώστε να δημιουργούνται ενδιαφέρουσες για τα παιδιά κατασκευές με κάθε κριτήριο που θα υιοθετούσαν, και να αναδύονται όταν αυτές ολοκληρώνονται δυνατότητες παιχνιδιού οι οποίες θέλαμε να ξεπερνούν τα όρια των όσων τα παιδιά θα μπορούσαν αρχικά να έχουν φανταστεί. Επίσης, προσπαθήσαμε να είναι όσο το δυνατόν πιο ορατά τα διαφορετικά κριτήρια δυνητικής διάταξης σε σειρά έτσι ώστε τα παιδιά να προτρέπονται και στην αλλαγή κριτηρίων.

Οι μαθησιακές διαδικασίες και το υλικό που παρουσιάσαμε εδώ αποτελούν μικρό μόνο μέρος του υλικού που διαμορφώσαμε. Ενδεικτικά, στις παρακάτω εικόνες μπορούμε να δούμε άλλα δύο παιχνίδια που σχεδιάστηκαν για να ενεργοποιήσουν τη διαδικασία της 'αναστοχαστικής-ανακλαστικής αφαίρεσης' σε δύο άλλα πεδία, εκείνα του χώρου και του χρόνου, έννοιες για τις οποίες οι έρευνες της Σχολής της Γενεύης έχουν δείξει πως είναι αλληλένδετες και έχουν παράλληλη ανάπτυξη στο παιδί (Piaget 1946α, 1946β· Piaget & Inhelder 1948).

Ταχύτητα - χρόνος - απόσταση



Αναπαραστάσεις χώρου



Η εμπλοκή των παιδιών με το υλικό αυτό, ο σχεδιασμός του οποίου τούς επέτρεπε να ανακαλύψουν και να δώσουν λύσεις σε πολύπλοκα θέματα, όπως είναι η σχέση ταχύτητας, χρόνου και απόστασης καθώς και η συσχέτιση και η αναπαράσταση χωρικών διατάξεων από διαφορετικές οπτικές, ήταν ιδιαίτερα σημαντική.

Κλείνοντας, θα ήθελα να τονίσω ότι η πρόοδος στη γνωστική ανάπτυξη για τα παιδιά που συμμετείχαν στις μαθησιακές δραστηριότητες του προγράμματος μας, ήταν πολύ μεγάλη. Υπήρξε μια ουσιαστική πρόοδος στις εννοιολογήσεις τους όχι μόνο σε σχέση με τις έννοιες που συνδέονταν άμεσα με τις μαθησιακές διαδικασίες που αναπτύξαμε, αλλά και ως προς τη γενικότερη ανάπτυξη της λογικο-μαθηματικής σκέψης και όλες τις βασικές έννοιες που χαρακτηρίζουν την πρώτη περίοδο της συγκεκριμένης λογικής σκέψης. Αυτή η πρόοδος, θεωρώ, ότι ήταν αποτέλεσμα μιας δημιουργικής μάθησης μέσα από το παιχνίδι, μάθηση που οδήγησε σε αυθεντική γνωστική ανάπτυξη.

Βιβλιογραφικές παραπομπές

- Inhelder, B., Sinclair, H. & Bovet, M. (1974). *Learning and the development of cognition*. Λονδίνο: Routledge and Kegan Paul.
- Piaget, J. (1946α). *Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant*. Παρίσι: Presses Universitaires de France.
- Piaget, J. (1946β). *Le développement de la notion de temps chez l'enfant*. Παρίσι: Presses Universitaires de France.
- Piaget, J. (1965). *Études Sociologiques*. Switzerland Librairie Droz.
- Piaget, J. & Inhelder, B. (1948). *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Παρίσι: PUF.
- Piaget, J. & Inhelder, B. (1959). *La genèse des structures logiques élémentaires Classifications et sériations*. Νεσσιέλ - Παρίσι, Delachaux et Niestlé

Varnava – Skoura, G. (1976). Les apprentissages cognitifs chez des enfants des milieux défavorisés: comparaison des effets d'un programme opératoire et d'un programme linguistique. *Enfance*, 1-2 Janvier – Avril

Varnava – Skoura, G. (1985). *Conflict and surprise in learning*. *Collected Original Resources in Education*, Volume 9, No 1

Τζέλλα Βαρνάβα-Σκούρα
enish@otenet.gr

[λευκή σελίδα]

ΜΙΑ ΨΥΧΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΜΑΤΙΑ ΣΤΗ ΣΧΕΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕ ΤΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ

Γιάννης Γκιάστας

Ψυχίατρος

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το παιχνίδι αποτελεί την πιο πρόωπη έκφραση, αλλά και το μέσο για την ωρίμανση και τη λειτουργική απαρτίωση πολύπλοκων νοητικών και αισθησιοκινητικών δομών. Ποια είναι η σχέση του παιχνιδιού με την πραγματικότητα και πως καθορίζεται η πραγματικότητα του παιχνιδιού; Εστιάζοντας στο παιχνίδι και στα διάφορα είδη του οδηγούμαστε στις απαρχές των μαθηματικών ως ανθρώπινη δραστηριότητα, αφού αυτό που λέμε 'μαθηματικά' στην παιδική ηλικία δεν είναι παρά η εξέλιξη ενός συγκεκριμένου τύπου παιχνιδιού και ως εκ τούτου ένα 'μετα-παιχνίδι'. Από αυτή την οπτική συναντούμε το εύλογο ερώτημα: Τι εμποδίζει κάποια παιδιά όχι μόνο να έχουν πρόσβαση στη μαθηματική σκέψη (βλέπε και φοβία των μαθηματικών) αλλά και αισθανθούν οικεία με τους μαθηματικούς χειρισμούς; Τι θα μπορούσε να τα διευκολύνει;

Από την άλλη παρατηρούμε πολύ συχνά ότι στα μαθηματικά –όπως και στην τέχνη– άνθρωποι με σοβαρές ψυχικές δυσκολίες είτε δεν έχουν καμία πρόσβαση είτε γίνονται εξαιρετικοί μαθηματικοί. Ίσως, λοιπόν, η σχέση του ανθρώπου με τα μαθηματικά να ενδιαφέρει και την ψυχανάλυση...

Τα μαθηματικά, ως ένα ιδιαίτερο πεδίο της ανθρώπινης νόησης, φαίνεται να συνδέονται στενά τόσο με έναν ειδικό τύπο παιχνιδιού όσο και με ορισμένα δομικά στοιχεία της προσωπικότητας. Οι σκέψεις που διατυπώνονται παρακάτω έχουν ως αφετηρία τους την οπτική γωνία ενός κλινικού, ενός ψυχαναλυτή που είχε την τύχη (πράγμα καθόλου τυχαίο) να συναντηθεί με τα μαθηματικά αλλά και τη διδακτική τους, κυρίως στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Ας σημειωθεί από την αρχή πως η σημερινή πρόοδος της κλινικής έρευνας στο ζήτημα των σχέσεων της προσωπικότητας με τα μαθηματικά και των μαθηματικών με το παιχνίδι δεν μας επιτρέπει να παρουσιάσουμε μια ολοκληρωμένη και συνεκτική θεωρία. Ωστόσο, μας δίνει τη δυνατότητα να εκ-θέσουμε κάποια στοιχεία από την εμπειρία μας, να διατυπώσουμε υποθέσεις και να διαμορφώσουμε συμπεράσματα που θα μπορούσαν να αποτελέσουν σημεία αναφοράς για περαιτέρω κλινική έρευνα.

Τι είναι παιχνίδι

Ας πάρουμε, όμως, τα πράγματα από την αρχή αποσαφηνίζοντας με κάπως λακωνικό τρόπο, αλλά αναγκαίο για τις ανάγκες αυτής της παρουσίασης, τα κύρια χαρακτηριστικά του συνόλου των ανθρώπινων δραστηριοτήτων που ονομάζουμε παιχνίδι. Το παιχνίδι διακρίνεται από τις άλλες δραστηριότητες στο μέτρο που είναι αυθόρμητο, έχει εγγενή κίνητρα, διακρίνεται από ελευθερία στους στόχους, (χαρακτηρίζεται από ελευθερία απέναντι στην ανάγκη), συχνά εμπλέκει τη φαντασία και –στο πλαίσιο των παραπάνω χαρακτηριστικών επικαλείται μια συμβολική διάσταση. Έτσι, το παιχνίδι ενέχει τη δημιουργία και την επινόηση. Σύμφωνα με τον Άγγλο ψυχαναλυτή Winnicott, το παιχνίδι εγκαθιστά μια δημιουργική σχέση με τον κόσμο. Όπως άλλωστε λέει ο ίδιος «η αίσθηση δημιουργικότητας είναι, περισσότερο από οτιδήποτε άλλο, εκείνο που κάνει το άτομο να αισθάνεται ότι τη ζωή αξίζει να τη ζήσεις»¹ Κατ' αυτόν τον τρόπο θα λέγαμε ότι το παιχνίδι βρίσκεται στον αντίποδα της συμμόρφωσης.

¹ Winnicott, D. W. (1971). *Playing and reality*. London, Tavistock Publications [Ελ. μετάφραση: *Το παιδί το παιχνίδι και η πραγματικότητα*. Αθήνα, Καστανιώτης, σ. 121]

Θα επισημάνουμε ότι τα χαρακτηριστικά που αναφέρθηκαν παραπάνω αφορούν την υποκειμενική πραγματικότητα αυτού που παίζει. Παράλληλα, οι παιγνιώδεις δραστηριότητες εμπλέκονται (με αμφίδρομες και πολύπλοκες σχέσεις) στη σωματική, τη συναισθηματική, την κοινωνική και τη νοητική ανάπτυξη του ανθρώπου.

Είδη παιχνιδιού και Μαθηματικά

Υπάρχει, λοιπόν, ένα ευρύτατο φάσμα χαρακτηριστικών που, στο μέτρο που φέρουν τα παραπάνω χαρακτηριστικά, συνιστούν παιχνίδια. Κατά κάποιον τρόπο, η ποικιλομορφία του παιχνιδιού καλύπτει το σύνολο σχεδόν των ανθρώπινων δραστηριοτήτων. Στο πλαίσιο αυτής της παρουσίασης έχει ενδιαφέρον να διακρίνουμε τις μεγάλες κατηγορίες παιχνιδιού, ακολουθώντας τη σειρά με την οποία πρωτο-εμφανίζονται στην παιδική ηλικία. Ας υπογραμμίσουμε ότι στην ελληνική η λέξη παιδί και η λέξη παιχνίδι έχουν κοινή ρίζα, κάτι που μας παραπέμπει ευθέως στο γεγονός ότι το μεγαλύτερο μέρος των παιδικών δραστηριοτήτων έχουν μια παιγνιώδη διάσταση. Υπό αυτό το πρίσμα οι ενήλικες δραστηριότητες βρίσκουν τις ρίζες τους στο παιχνίδι.

Τα πρώτα παιχνίδια που παρατηρούνται είναι σωματικά και αισθητηριακά. Ακολουθούν παιχνίδια χειρισμού αντικειμένων. Στη συνέχεια παρατηρούνται το πρώτα κοινωνικο-συναισθηματικά και έπονται τα παιχνίδια κανόνων. Από ψυχαναλυτική σκοπιά, τα παιχνίδια αυτών των δύο τύπων σηματοδοτούν μια σημαντική αλλαγή σε ό,τι αφορά τη διαπλοκή των ορμών². Με άλλα λόγια, ενώ τα προηγούμενα σωματικά-αισθητηριακά παιχνίδια επενδύονται είτε κυρίως λιμπιντικά είτε κυρίως από την ορμή της καταστροφής και έχουμε μάλλον μια εναλλαγή των ορμών, τα κοινωνικο-συναισθηματικά παιχνίδια και τα παιχνίδια κανόνων χαρακτηρίζονται από τη διαπλοκή των ορμικών επενδύσεων. Θα μπορούσαμε μάλιστα

² Σύμφωνα με την ψυχαναλυτική οπτική υπάρχουν δύο βασικές ορμές: η libido [ορμή της ζωής] και η ορμή του θανάτου. Freud, S. (1920). *Jenseits des Lustprinzips*. Fischer Verlag, (2009). *Das Ich und das Es*, p.191-250. Σχηματικά θα λέγαμε ότι οι δύο αυτές ορμές συνυπάρχουν στις περισσότερες ανθρώπινες δραστηριότητες.

να πούμε πως στα πρώτα υπερτερούν γενικά οι λιμπιντικές επενδύσεις, ενώ στα δεύτερα οι καταστροφικές, κατά τρόπο που αυτά να αποτελούν μια πρώτη απόπειρα μετουσίωσης³. Βρισκόμαστε ήδη σε αυτό που η εξελικτική ψυχολογία ονομάζει 'συμβολικό παιχνίδι'. Δεν χρειάζεται, κατά τη γνώμη μας, για την οικονομία αυτής της παρουσίασης να κάνουμε ειδική μνεία στα παιχνίδια χειρισμού αντικειμένων με κανόνες. Θα σημειώσουμε μόνο, εν τάχει, ότι τα μαθηματικά βρίσκουν τις ρίζες τους στα παιχνίδια κανόνων.

Ασφαλώς έχουν ανακαλυφθεί νοητικές δομές που είναι ήδη παρούσες κατά τη γέννηση και αποτελούν τις βάσεις τόσο του προσανατολισμού στην πραγματικότητα όσο και των παιχνιδιών κανόνων ή των μαθηματικών. Παραδείγματα τέτοιων δομών είναι η αίσθηση της συνέχειας των αντικειμένων ή της ποσότητάς τους.

Μεταβατικοί χώροι – μεταβατικά αντικείμενα

Προκειμένου να εξετάσουμε σε βάθος τη σχέση του ανθρώπου με το παιχνίδι οφείλουμε να εστιάσουμε σε μια θεμελιακή έννοια που τη βλέπουμε ως συστατική για το ανθρώπινο είδος, αυτή της μεταβατικότητας⁴. Θα μπορούσαμε να την παραστήσουμε ως ένα χώρο (έναν τόπο, με τη μαθηματική έννοια του όρου) ανάμεσα σε εμάς και την πραγματικότητα. Σε αυτόν μπορούμε να παρατηρήσουμε διάφορα φαινόμενα⁵ όπως η ψευδαισθηση, η αναπαράσταση και η συμβολοποίηση.

Σύμφωνα μάλιστα με τον Bion η πρώτη νοητική λειτουργία του βρέφους [protomental] είναι ψευδαισθητική. Το βρέφος ζητά το στήθος που δεν είναι εκεί και το 'ψευθαισθητώνει'. Το παιχνίδι βρίσκεται στον ίδιο ενδιάμεσο χώρο. Η ενσωμάτωση αφηρημένων εννοιών, η συμβολική του εκάστοτε πολιτισμικού επικοδομήματος κτλ. φαίνεται να επωάζονται σε αυτόν τον χώρο και να αποτελούν

³ Μια ορμή θεωρείται μετουσιωμένη όταν στρέφεται με θετικό τρόπο σε κοινωνικά κατξιωμένα αντικείμενα.

⁴ βλ. μεταβατικό αντικείμενο του Winnicott, ό. π.

⁵ Κατά την παρατήρηση αυτή φαίνεται να βρίσκεται σε ισχύ η αρχή της κβαντομηχανικής όπου το παρατηρούμενο αλληλεπιδρά με τον παρατηρητή

αντικείμενο χειρισμού του παιχνιδιού πριν καταστούν 'πραγματικότητα'

Θα παρατηρήσουμε ότι τα μαθηματικά μοιάζουν (πρόκειται για μια σχέση ομομορφισμού;) με τα αντικείμενα αυτού του μεταβατικού χώρου ανάμεσα στην ανθρώπινη επι-νόηση και στην πραγματικότητα:

Στα μαθηματικά, όπως και στο παιχνίδι, οι χειρισμοί και τα 'αποτελέσματά' τους συχνά προηγούνται των εφαρμογών τους!

Βέβαια, υπάρχει μια θεμελιώδης διαφορά ανάμεσα στα μαθηματικά και το παιχνίδι. Δεν έχουμε εδώ την πρόθεση να κάνουμε ένα απάνθισμα ομοιοτήτων και διαφορών των μαθηματικών με το παιχνίδι κανόνων, διαπιστώνοντας, για παράδειγμα ως ομοιότητα την επίλυση προβλήματος ή ως διαφορά το ζήτημα της στοχοθέτησης (στο παιχνίδι χάνεις ή κερδίζεις / έχεις αντίπαλο κτλ.) Εκείνο που μας ενδιαφέρει στην παρουσίασή μας και το βλέπουμε ως θεμελιώδη διαφορά είναι το ζήτημα της εξαπάτησης: Στο παιχνίδι μπορεί κάποιος να επιχειρήσει να κλέψει⁶ Στα μαθηματικά δεν μπορείς να κλέψεις, αφού όταν κλέβεις δεν είναι πια μαθηματικά! ⁷

Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί στη σχέση των μαθηματικών με το υποκείμενο και, αναφορικά με τα ενδιαφέροντα του Δημέρου, στη σχέση των μαθηματικών με τον μαθητή.

Οι κουμπούρες και οι διάνοιες [τα μαθηματικά ως πρόβλημα]

Η εμπειρία όσων διδάσκουν ή έχουν διδάξει μαθηματικά μας δείχνει έναν ιδιότυπο διχασμό: υπάρχουν μαθητές που εκδηλώνουν μια παράξενη αδυναμία να αντιληφθούν τις μαθηματικές διαδικασίες και τους μαθηματικούς χειρισμούς. Ακόμη κι αν απομνημονεύουν κάποιες αλληλουχίες πράξεων ή τα αποτελέσματά τους, μοιάζουν να το κάνουν μηχανικά, όπως απομνημονεύει κανείς ένα ποίημα.

⁶ Ως προς αυτό μοιάζει με το ασυνείδητο: το ασυνείδητο εξαπατά!

⁷ Από τη σκοπιά μιας στρουκτουραλιστικής ψυχανάλυσης τίθεται εδώ το ζήτημα του μεγάλου Άλλου ως τόπος της ετερότητας, του νόμου και της συμβολικής τάξης. Για μια εισαγωγή στο θέμα βλ. Evans, D. (2005). *Εισαγωγικό Λεξικό της Λακανικής Ψυχανάλυσης*. Αθήνα, Ελληνικά Γράμματα, σσ. 49-50.

Από την άλλη, υπάρχουν άνθρωποι που έχουν αυτό που λέμε: 'μαθηματικό μυαλό', που έχουν έφεση στα μαθηματικά και φθάνουν πολύ μακριά στη μαθηματική σκέψη. Για κάποιους μάλιστα, όπως για παράδειγμα για τον Cantor, ακόμη και σοβαρές ψυχικές διαταραχές (αυτό που στην κοινή γλώσσα αποκαλούμε 'τρέλα') δεν τους εμποδίζει να πετύχουν σημαντικά μαθηματικά επιτεύγματα.

Σύμφωνα με τον σημερινό τρόπο σκέψης, η ιδέα ότι μια παρόμοια διαφορά μεταξύ των ανθρώπων έχει τις ρίζες της στη βιολογία φαίνεται σχεδόν αυτονόητη⁸.

Θα ήταν, ωστόσο, σκόπιμο να αποφύγουμε τον από μηχανής θεό της βιολογίας (χωρίς αυτό να σημαίνει ότι θεωρούμε απίθανη την εμπλοκή της στην αιτιότητα αυτού του διχασμού, αντιθέτως) και να καταπιαστούμε με το πρόβλημα σαν μαθηματικοί, ρισκάροντας δηλαδή να βρεθούμε σε αδιέξοδο, όχι όμως χωρίς να προχωρήσουμε αρκετά, και μάλιστα με τη μέγιστη δυνατή συνέπεια.

Η φοβία των μαθηματικών

Ο παραπάνω όρος αναφέρεται σε μια συγκεκριμένη στάση και θυμική αντίδραση απέναντι στα μαθηματικά, αλλά καλύπτει ένα ευρύ σύνολο περιπτώσεων και παραγόντων οι οποίοι είτε είναι αίτιοι είτε ενέχονται στη φοβική εκδήλωση. Για την οικονομία της παρουσίασης θα παρακάμψουμε το 'εύκολο' κομμάτι που αφορά τον καλό και τον κακό μαθητή, τις αρνητικές εμπειρίες (ένας κακός δάσκαλος ή μαθηματικός, ένα ατυχές περιστατικό κτλ.) που καθιστούν κάποιους αρνητικούς απέναντι στα μαθηματικά. Επίσης, θα αντιπαρέλθουμε εν τάχει, φοβίες των γονιών για τα μαθηματικά που μεταβιβάζονται στα παιδιά. [Ως παράδειγμα θα μπορούσαν να αναφερθούν περιστάσεις όπου τα μαθηματικά ήταν κάτι ακατόρθωτο για τους γονείς και στο μέτρο που οι γονείς υπήρξαν ισχυροί τα μαθηματικά –ως σημαίνον- βρέθηκαν στη σφαίρα του αδύνατου! Σε κάποιες από αυτές τις

⁸ Παρενθετικά αναφέρουμε ότι, όπως φαίνεται στον Φαίδρο του Πλάτωνα, η παγανιστική θεώρηση της τρέλας την αποδίδει σε μια θεία έμπνευση, η σημερινή σκέψη –αντίστοιχα- τείνει να αναζητεί την αιτία της στη βιολογία, παρόλο που, αν κοιτάσουμε γύρω μας, θα δούμε πόσο μακριά από τη βιολογία μας οδηγεί ο πολιτισμός.

περιπτώσεις το να τα καταφέρει κανείς στα μαθηματικά σημαίνει να ξεπεράσει τους γονείς του ή και να τους σκοτώσει φαντασιακά (στην ‘άλλη σκηνή’ του ασυνειδήτου⁹)]

Θα θέλαμε εδώ να εστιάσουμε την προσοχή μας στην πιθανότητα πίσω από τη φοβική αντίδραση να υπάρχει κάτι πιο δομικό και ως εργαλείο για τη διερεύνηση της δομής (δομής της προσωπικότητας) θα χρησιμοποιήσουμε το άγχος.

Καταρχάς, για να προσεγγίσουμε τη σχέση ενός παιδιού με τα μαθηματικά, θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε τη σχέση του με το παιχνίδι κανόνων. Άραγε οι κανόνες αυτοί γίνονται αποδεκτοί ως το στήριγμα της εσωτερικής λογικής του παιχνιδιού, του δίνουν νόημα ή θεωρούνται αυθαίρετοι και προκαλούν δυσφορία; Έχει το παιδί την τάση να τους παραβεί για να κερδίσει πάσει θυσία; Μήπως πίσω από τη ‘ζαβολιά’ κρύβεται μια βαθιά αίσθηση αδυναμίας, μια αίσθηση ανημποριάς να κερδίσει διαφορετικά το παιχνίδι; Μήπως υποτάσσεται παθητικά και φοβικά στους κανόνες, ως εάν η υπακοή να έχει μεγαλύτερη αξία από το ίδιο το παιχνίδι, και βυθίζεται έτσι στην ανημποριά;

Ας ξαναγυρίσουμε, όμως, στα μαθηματικά. Τα προβλήματα στα οποία εστιάζουμε (προβλήματα που συνοδεύονται συχνά από άγχος) φαίνεται να συνδέονται με ένα ομόλογο άγχος απέναντι σε κανόνες (που φαίνονται αυθαίρετοι και δεν ενσωματώνονται και όπου στην καλύτερη περίπτωση τα συγκεκριμένα παιδιά συμμορφώνονται φοβικά). Επίσης, η όλη προβληματική φαίνεται να συνδυάζεται συχνά με μια στάση αδυναμίας απέναντι στις δυσκολίες (κάτι σαν ένα θεμελιακό πρόβλημα αυτοπεποίθησης) όπου μπροστά στη δυσκολία αναμένουν τη λύση με την παρέμβαση ενός από μηχανής θεού (π.χ. του ισχυρού ενήλικα) ή θα καταφύγουν σε μια υπέρβαση του προβλήματος (ως ένα άλμα στο κενό). Σε κάθε περίπτωση δε θα είναι σε θέση να αναπτύξουν μια στρατηγική πραγματικής λύσης.

⁹ Μετά από ένα τέτοιο ξεπέρασμα στην αναλυτική διαδικασία μπορεί κανείς να ανακαλύψει τις δυνατότητές του στα μαθηματικά τις οποίες δεν είχε ποτέ διανοηθεί.

Πρόκειται συχνά για μια γενικότερη στάση, μια θεμελιακή αίσθηση αδυναμίας μπροστά στη συνθήκη που θεωρείται ‘πρόβλημα’¹⁰.

Ασφαλώς, μια άλλη συνθήκη που θα πρέπει να μας απασχολήσει σε ό,τι αφορά το δομικό άγχος απέναντι στα μαθηματικά είναι η αβεβαιότητα. Από την άλλη, η αβεβαιότητα αποτελεί ένα από τα πιο διεγερτικά στοιχεία του παιχνιδιού. Αυτό το στοιχείο της αβεβαιότητας και του καινούριου μας ιντριγκάρει σε κάθε διαδικασία επίλυσης προβλήματος και συνδέεται άμεσα με την χαρά που προκαλεί η επίλυση. Η επίλυση παράγει μια αίσθηση αυτεπιβεβαίωσης, αίσθηση θριάμβου, ανάλογη με την υποκειμενική δυσκολία του επιλυόμενου προβλήματος. Ωστόσο, υπάρχουν άνθρωποι για τους οποίους το απρόβλεπτο και το νεοφανές έχουν μια τραυματική διάσταση.

Οι μαθηματικές διάνοιες

Ας δούμε όμως κάποιες από τις ιδιαιτερότητες της μαθηματικής σκέψης που την τοποθετούν σε ένα πεδίο τόσο στεγανό από την ‘κοινή λογική’ ώστε να μην επηρεάζεται από ορισμένα πολύ σοβαρά προβλήματα της ψυχικής ζωής. Στο σημείο αυτό θα αναφέρω την έκπληξή μου όταν για πρώτη φορά έβλεπα ψυχιατρικούς ασθενείς σε ένα νοσοκομείο ημέρας να παίζουν χαρτιά. Έπαιζαν χαρτιά με τους νοσοκόμους για αρκετή ώρα και έδιναν την εντύπωση απολύτως φυσιολογικών ανθρώπων, άνθρωποι που μόλις πριν το παιχνίδι εκδήλωναν τη μεγαλύτερη δυσκολία να εκφραστούν, να επικοινωνήσουν μεταξύ τους, να προσανατολιστούν στην πραγματικότητα! Βεβαίως, τα χαρτιά είναι ένα παιχνίδι κανόνων, αυστηρά προκαθορισμένων και σχετικά περιορισμένων σε αριθμό. Σε αντίθεση με τις περιστάσεις της καθημερινής ζωής δεν υπάρχει το απρόβλεπτο, ή έστω, αυτό που μπορεί να υπάρξει ως απρόβλεπτο είναι αυστηρά προσδιορισμένο. Επίσης, οι κανόνες είναι σε κάθε περίπτωση προκαθορισμένοι, δεν επιδέχονται ερμηνείας. Δεν υπάρχουν φαινόμενα όπως ο υπαινιγμός, η αντιπροσώπευση, η

¹⁰ Οι συνθήκες όπου απαιτείται μια ‘στρατηγική επίλυσης προβλήματος’ δεν είναι η μόνη περίπτωση κατά την οποία εμφανίζεται αυτή η αίσθηση αδυναμίας. Ένας σημαντικός αριθμός ανθρώπων βιώνει μια ανάλογη αίσθηση σε περιστάσεις όπου απαιτείται μια κοινωνική συνδιαλλαγή.

μετωνυμία, η μεταφορά. Με άλλα λόγια οι κανόνες υπάρχουν έξω και πέρα από το υποκείμενο, την ψυχική του υπόσταση, την εγγραφή του στο κοινωνικό δίκτυο. Κάποιοι άνθρωποι –που ενδεχομένως δυσκολεύονται να εγγραφούν στην κοινωνική συναλλαγή– βρίσκουν στα μαθηματικά ένα εργαλείο με το οποίο προσπαθούν να αναπαραστήσουν, να κατανοήσουν και να βάλουν σε τάξη τον κόσμο, έναν κόσμο που σε ένα πρώιμο επίπεδο φαίνεται να υπήρξε για αυτούς χαοτικός. Έτσι, η θεωρία συνόλων για τον Cantor, όπως και η φιλοσοφία για τον Wittgenstein φαίνεται πως απετέλεσαν υπαρξιακά ζητήματα. Παράλληλα, δεν μπορούμε να παραβλέψουμε το γεγονός ότι τα μαθηματικά συγκροτούν ένα πεδίο ανθρώπινης νόησης μέσα στο οποίο μπορεί να υπάρξει υψηλής ποιότητας επινόηση και να αναδυθεί μεγάλη δημιουργικότητα. Τα στοιχεία αυτά μας παραπέμπουν εκ νέου στο παιχνίδι, στο μέτρο που αυτό εγκαθιστά μια δημιουργική σχέση με τον κόσμο.

Γενικές οδηγίες για να βοηθήσουμε τα παιδιά να διέλθουν [να ξεπεράσουν:] τη ‘φοβία’ των μαθηματικών¹¹

Όπως είδαμε παραπάνω η στάση ενός ανθρώπου απέναντι στα μαθηματικά μπορεί ενίοτε να σχετίζεται με τη δομή της προσωπικότητάς του και, κατ’ επέκταση, με τη γενικότερη στάση του απέναντι στα προβλήματα της ζωής. Μπορεί, επίσης, να αποτελεί ένδειξη για την εν γένει δημιουργικότητά του και για το είδος αυτής της δημιουργικότητας. Ως εκ τούτου η δυνατότητα της παρέμβασής μας, παρόλο που είναι περιορισμένη –στο μέτρο που προσκρούει στο σκόπελο αυτής της δομής, δεν μπορεί παρά να στοχεύει σε κάτι ευρύτερο από την κατάκτηση στενών μαθησιακών στόχων. Θα επιχειρήσω παρακάτω να δώσω κάποιες γενικές αρχές που διέπουν αυτή την παρέμβαση, παρέμβαση που σύμφωνα με τα προηγούμενα οφείλουμε να την αντιληφθούμε όχι ως διδακτική, αλλά μάλλον ως ‘θεραπευτική’.

¹¹Meljac, Claire. (2006). A propos des remédiations en général et des remédiations logico-mathématiques en particulier. In : J. Bergès et al. (dir.) *Que nous apprennent les enfants qui n'apprennent pas* ?Erès, Ramonville Saint-Ange, p. 205-212.

- α) Η πρώτη αρχή είναι να θεωρήσουμε ‘δεδομένες’ τις μαθηματικές ικανότητες του μαθητή.

Η αρχή αυτή μας θυμίζει την ‘προσδοκία ανάκαμψης’ [expectancy] που συναντάμε τις τελευταίες δεκαετίες στους ροτζεριανούς ψυχοθεραπευτές, αλλά και τις αρχές του Salmon για την αντιμετώπιση του ψυχικού τραύματος που προκαλεί ο πόλεμος [αρχές 20^{ου} αι.]. Ασφαλώς δεν πρόκειται για σύμπτωση, αλλά για μια γενικότερη τάση του ανθρώπου να ανταποκρίνεται στην προσδοκία του άλλου. Πρακτικά, ενώ προσαρμόζουμε τη διδακτική μας στις γνώσεις και τις δυνατότητες του μαθητή, δεν πρέπει να διστάζουμε, σε κάποιες επιλεγμένες στιγμές, να βγαίνουμε από τους διδακτικούς μας στόχους. Το να απευθυνθούμε κάποτε στα παιδιά σαν σε ενήλικες ειδικούς μπορεί να μας επιφυλάσσει ευχάριστες εκπλήξεις.

- β) Χρειάζεται να επανεισάγουμε την ευχαρίστηση και τη δυνατότητα επιτυχίας για τον μαθητή. Ας μη λησμονούμε πως η επιτυχία και η ευχαρίστηση είναι συστατικό της μάθησης με την πλήρη έννοια του όρου, δηλαδή τη δυνατότητα να χειρίζεται κάποιος δημιουργικά την κατακτημένη γνώση ή δεξιότητα. Μια διδακτική πράξη που επιτρέπει τον ψυχαναγκασμό, την υποταγή και την αίσθηση ανικανότητας, παρά τα όποια μετρήσιμα αποτελέσματά της, είναι εντελώς ακατάλληλη μέθοδοι για τη μάθηση αυτού του τύπου.

- γ) Χρειάζεται να εστιάζουμε κατά το δυνατόν στο αίτημα του μαθητή καθώς και στον τρόπο με τον οποίο ο ίδιος προσεγγίζει το ‘μαθηματικό αντικείμενο’. Για την υποκειμενικότητα του μαθητή που έχει αναπτύξει μια αρνητική στάση απέναντι στα μαθηματικά, που παρουσιάζει σοβαρή αδυναμία να τα αντιληφθεί κτλ., τα μαθηματικά δεν έχουν αξία καθαυτά. (Αυτό ίσως είναι δύσκολο να το αντιληφθούμε ως μαθηματικοί, αφού εμείς έχουμε επενδύσει τόσο τα μαθηματικά που θεωρούμε ενίοτε την αξία τους ως αυτονόητη!) Ο μαθητής για τον οποίο μιλάμε ίσως τα έχει επενδύσει αρνητικά ή καθόλου. Οφείλουμε, λοιπόν, να δημιουργήσουμε έναν μεταβατικό χώρο στον οποίο υπάρχει ο ίδιος ο μαθητής με τα ενδιαφέροντά του, ο διδάσκων ως δυνητικά ταυτισιακό αντικείμενο και, σταδιακά, στον μεταβατικό αυτό χώρο

θα διευκολυνθεί να επενδύσει τα μαθηματικά μέσα από τη σχέση που αναπτύσσει μαζί μας.

- δ) Το ζήτημα του πλαισίου της διδακτικής-θεραπευτικής παρέμβασης είναι ιδιαίτερα σοβαρό. Οι 'κανόνες του παιχνιδιού' όπως η τακτικότητα των συναντήσεων, η ώρα της συνάντησης, οι απουσίες, οι συμπεριφορές, έχουν βαρύνουσα σημασία. Το πλαίσιο αφορά ισότιμα τον διδάσκοντα και τον διδασκόμενο. Είναι ατυχές κάθε φορά που εκλαμβάνεται ως αυθαίρετο ή ως εργαλείο πίεσης και ευτυχές όταν είναι ένα ικανό στήριγμα της διαδικασίας, αποδεκτό και από τα δύο μέρη. Το πλαίσιο διέπει τη συνάντηση διδάσκοντα-διδασκόμενου και αναγνωρίζεται και από τους δύο. Η υποταγή στο πλαίσιο είναι τόσο προβληματική όσο και η μη αποδοχή του και χρειάζεται κάθε φορά να μας προβληματίσει. Σε αυτή τη διαδικασία ο διδάσκων είναι ο εγγυητής του πλαισίου και οφείλει να αναλάβει αυτή τη θέση. (Δεν είναι απλά χειριστής του πλαισίου. Η λειτουργία του δεν τίθεται με όρους ακαμψίας, επιβολής ή ελαστικότητας. Οφείλει να εγγυηθεί ένα πλαίσιο κατάλληλο για την εκπαιδευτική-θεραπευτική συνάντηση. Ας σημειώσουμε πως το πιο ακατάλληλο πλαίσιο είναι αυτό που δεν γίνεται αποδεκτό από τον διδασκόμενο ή/και δεν γίνεται σεβαστό από τον διδάσκοντα). Άλλωστε, όπως είδαμε παραπάνω, το ζήτημα των ορίων, η ύπαρξη κανόνων και τα μαθηματικά είναι αλληλένδετα.
- ε) Τέλος, θα επικαλεστούμε την επινοητικότητα του εκάστοτε διδάσκοντα προσκαλώντας τον να εφεύρει τρόπους ώστε τα μαθηματικά να αποτελέσουν για τον/την διδασκόμενο/η έναν χώρο έκφρασης της δημιουργικότητάς του/της. Αυτό θα του/της δώσει μια ικανοποίηση που πάει πέρα από τη χαρά της κατανόησης. Βέβαια, είναι πρακτικά αδύνατο να δοθούν οδηγίες για αυτήν την επινοητικότητα. Μπορούμε, ωστόσο, να πούμε πως –εν τέλει– εκείνο που μεταβιβάζει ο δάσκαλος μαθηματικών στον μαθητή του δεν είναι τόσο οι γνώσεις του όσο η αγάπη του για τα μαθηματικά.

Γιάννης Γκιάστας

ygkiastas@yahoo.co.uk

[λευκή σελίδα]

Η ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΟΥ ΠΑΙΧΝΙΔΙΟΥ ΣΤΗΝ ΑΝΑΘΕΩΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΧΕΣΗΣ ΤΩΝ ΕΝΗΛΙΚΩΝ ΜΕ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ελένη Γιαννακοπούλου

Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εισήγηση αυτή παρουσιάζονται θεωρητικά σχόλια και ερευνητικές διαπιστώσεις για δύο ζητήματα, στα οποία οι σχετικοί προβληματισμοί φαίνεται να αναπτύσσονται σε απόλυτη μεταξύ τους ασυμβατότητα: τη σχέση των ενηλίκων με τα μαθηματικά και τη σχέση των ενηλίκων με το παιχνίδι. Διατυπώνεται η άποψη, ότι ο εκπαιδευτικός χαρακτήρας της συμμετοχής των ενηλίκων σε δραστηριότητες παιχνιδιού έχει υποτιμηθεί τόσο από θεωρητική, όσο και από ερευνητική άποψη και ότι η αξιοποίηση επιλεγμένων παιχνιδιών, ιδίως παιχνιδιών με κάρτες, μπορεί να συμβάλλει όχι μόνο στην ανάπτυξη μιας θετικής σχέσης των ενηλίκων με τα μαθηματικά, αλλά στην οικειοποίηση μαθηματικών γνώσεων και τεχνικών, αναγκαίων στις καθημερινές τους, επαγγελματικές και κοινωνικές, δραστηριότητες.

ΕΝΗΛΙΚΕΣ ΚΑΙ ΠΑΙΧΝΙΔΙ

Θεωρητικοί και ερευνητές μελετώντας το παιχνίδι από ποικίλες κοινωνιολογικές, ψυχολογικές και εκπαιδευτικές οπτικές ομοφωνούν για τις θετικές επιπτώσεις του στη μάθηση και στην ανάπτυξη νοητικών ικανοτήτων. Επίσης διαπιστώνουν ότι οι διάφορες μορφές του παιχνιδιού ενισχύουν θετικά και άλλες ανθρώπινες ψυχικές και κοινωνικές λειτουργίες, όπως τη δημιουργικότητα, την έκφραση συναισθημάτων, την εκτόνωση ψυχολογικών πιέσεων, την επικοινωνία κ.α. Φαίνεται όμως, ότι όλος ο προβληματισμός για τη συμβολή του παιχνιδιού στις ανθρώπινες νοητικές, κοινωνικές και ψυχικές λειτουργίες περιορίζεται στη παιδική ηλικία, ενώ το παιχνίδι στην ενηλικιότητα αντιμετωπίζεται ως απόκλιση. Μια έρευνα σε επιστημονικά περιοδικά και πρακτικά συνεδρίων που καταγράφονται σε βιβλιογραφικές βάσεις δεδομένων (όπως για παράδειγμα το Eric ή το Scopus) δείχνει ότι ποσοστό μικρότερο του 10% των ετήσιων δημοσιεύσεων που αφορούν στο παιχνίδι, αναφέρεται σε πληθυσμούς ενηλίκων. Από τη διαπίστωση αυτή προκύπτει ότι στη σχετική βιβλιογραφία, όπως και στο γενικότερο επιστημονικό διάλογο είναι ελάχιστοι οι προβληματισμοί για το παιχνίδι των ενηλίκων.

Είναι σαφές ότι κυριαρχεί η λογική ότι τα παιδιά παίζουν, οι έφηβοι κοινωνικοποιούνται, οι ενήλικοι εργάζονται και οι ηλικιωμένοι ψυχαγωγούνται και βέβαια στη λογική αυτή το παιχνίδι χάνεται με την πάροδο του χρόνου από τη ζωή των ανθρώπων (Κnox, 1998). Η απόλυτη διάσταση παιχνιδιού και εργασίας αποτελεί συστατική ιδεολογική παραδοχή του ελληνορωμαϊκού πολιτισμού, ο οποίος αποτέλεσε και τη βάση του σύγχρονου ευρωπαϊκού πολιτισμού. Μια αντίφαση «εν τοις όροις» όπως θα λέγαμε με το λεξιλόγιο της τυπικής λογικής. «Τα παιδιά παίζει» και οι ενήλικοι εργάζονται, άρα δεν «παίζει», είναι μια εδραιωμένη άποψη, η οποία ανοίγει μια τεράστια συζήτηση που ξεπερνάει το πλαίσιο της παρούσας εισήγησης. Η αμφισβήτηση της όμως αποτελεί προϋπόθεση της παρούσας εισήγησης.

Παρά το γεγονός όμως, της ομοφωνίας θεωρητικών και ερευνητών για τις θετικές επιπτώσεις του παιχνιδιού, διατυπώνονται διαφωνίες οι οποίες οδηγούν σε μια πληθώρα διαφορετικών και πολλές φορές αντιθετικών απόψεων για το χαρακτήρα και τις λειτουργίες του

παιχνιδιού, για τα νοήματα που αποδίδονται στο παιχνίδι από τους παίκτες, για τους στόχους και τις επιδιώξεις τους, καθώς και για τους λόγους για τους οποίους οι άνθρωποι εμπλέκονται σε δραστηριότητες παιχνιδιού. Στη πολυφωνία αυτή συμβάλλουν τα διαφορετικά και σε κάποιες περιπτώσεις ασαφή νοήματα του ρήματος «παίζω» στην ελληνική και στις λατινογενείς γλώσσες. Παίζω θέατρο, δηλαδή υποκρίνομαι, παίζω μουσική, παίζω ποδόσφαιρο και παίζω ένα παιχνίδι αντικείμενο, υποδηλώνουν εντελώς διαφορετικές λειτουργίες τόσο στο χαρακτήρα όσο και στο περιεχόμενο τους. Παράλληλα, «παίζω» το ρόλο μου ως μητέρα ή εργαζόμενη δηλαδή ακολουθώ ή δεν ακολουθώ κανόνες και αναπτύσσω ή δεν αναπτύσσω στρατηγικές διεκπεραίωσης των υποχρεώσεών μου. Τελικά, ένα πλήθος ανθρώπινων δραστηριοτήτων προσδιορίζεται από το ρήμα παίζω με αποτέλεσμα η έννοια του παιχνιδιού να καθίσταται πολύπλευρη ή και ασαφής.

Τι είναι παιχνίδι; Αυτό είναι ένα εύλογο ερώτημα, το οποίο οφείλει να απαντήσει κάθε προσέγγιση στις δραστηριότητες του παιχνιδιού.

Στην εισήγηση αυτή υιοθετούμε την προσέγγιση των Χουϊζίνγκα (Huizinga, 1950) και Κεϊλουά (Caillois, 1961), δύο επιφανών αναλυτών του παιχνιδιού, οι οποίοι αντί ενός σαφώς διατυπωμένου ορισμού, παραθέτουν μια σειρά χαρακτηριστικών γνωρισμάτων του:

- Το παιχνίδι μια *βασική δραστηριότητα της ζωής* των παιδιών και των ενηλίκων κατά τον Χουϊζίνγκα, μια *«πρωταρχική κατηγορία της ανθρώπινης ζωής η οποία αποτελεί μια από τις κύριες βάσεις του πολιτισμού»* (Huizinga, 1950, σ. 5). Από την οπτική αυτή το παιχνίδι θεωρείται ότι διαδραματίζει έναν διαμορφωτικό ρόλο τόσο στον κάθε άνθρωπο ατομικά, όσο και συλλογικά στις ανθρώπινες κοινωνίες, σε αντίθεση με τη λογική η οποία θεωρεί την εργασία ως την ουσιαστική ανθρώπινη δραστηριότητα και το παιχνίδι ως μια αντιπαραγωγική ασχολία, λογική η οποία χαρακτηρίζει το λεγόμενο προτεσταντικό εργασιακό έθος (Hoppes et al., 2001).
- Το παιχνίδι είναι μια *διακριτή δραστηριότητα* απολύτως ξεχωριστή από τις άλλες δραστηριότητες της ζωής των ανθρώπων, η οποία αναπτύσσεται σε σαφώς οριοθετημένο –εκ των προτέρων ή και κατά την εξέλιξη του παιχνιδιού - χώρο και χρόνο. Η βασική διαφορά παιχνιδιού και εργασίας συμπυκνώνεται στο γεγονός ότι

στο παιχνίδι δεν προωθούνται υλικά συμφέροντα και δεν αποκομίζονται οικονομικά οφέλη. Με εξαίρεση τα τυχερά παιχνίδια τζόγου που αποσκοπούν αποκλειστικά στο κέρδος (παιχνίδια του ΟΠΑΠ, λαχεία, ιπποδρομίες, καζίνο κ.α.), τα οποία δεν εντάσσονται στην προβληματική μας.

- Το παιχνίδι είναι μια *εθελοντική δραστηριότητα* και επομένως ένα μέσο έκφρασης της προσωπικής αυτονομίας των ανθρώπων. Οι άνθρωποι παίζουν όποτε επιθυμούν, ότι παιχνίδι επιθυμούν, για όποιο λόγο επιθυμούν και κατά κανόνα παίζουν για ψυχαγωγία.
- Το παιχνίδι είναι μια *δραστηριότητα που ρυθμίζεται από κανόνες*, κανόνες σαφείς, τεχνητούς, αλλά υποχρεωτικούς για όλους τους παίκτες, οι οποίοι «αντικαθιστούν σε έναν καθορισμένο χώρο και για προσδιορισμένο χρόνο τους συγκεχυμένους και περίπλοκους νόμους της καθημερινής ζωής των ανθρώπων» όπως σημειώνει ο Κεϊλουά (Caillois, 1961, σ. 7).
- Το παιχνίδι είναι μια *δραστηριότητα με αβέβαιη έκβαση*, η οποία δεν είναι ούτε γνωστή, ούτε δεδομένη προκαταβολικά και συναρτάται άμεσα με τις δεξιότητες, τις στρατηγικές, αλλά και την τύχη των παικτών.
- Το παιχνίδι, τέλος, είναι μια *δραστηριότητα η οποία απορροφά το ενδιαφέρον των παικτών* και επικεντρώνει τη σκέψη και τα συναισθήματα τους στο πεδίο του παιχνιδιού.

Με τα παραπάνω χαρακτηριστικά του παιχνιδιού δεδομένα, οι άνθρωποι παίζουν για διάφορους λόγους και αποκομίζουν από το παιχνίδι διάφορες εμπειρίες, γνώσεις και συναισθήματα.

Από την οπτική της εκπαίδευσης ενηλίκων, το ζητούμενο είναι η αξιοποίηση του παιχνιδιού στον μετασχηματισμό της αρνητικής σχέσης των ενηλίκων με τα μαθηματικά, με στόχο την αποτελεσματικότητα των εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων αριθμητικού γραμματισμού ενηλίκων πληθυσμών, οι οποίοι για διάφορους λόγους δεν μπόρεσαν να ολοκληρώσουν την βασική εκπαίδευση στην καθιερωμένη από το εκπαιδευτικό σύστημα ηλικία.

ΕΝΗΛΙΚΕΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Από μια έρευνα που πραγματοποιήθηκε προ διετίας σε ενήλικους που φοιτούσαν σε σχολεία Δεύτερης Ευκαιρίας της Αθήνας και Θεσσαλονίκης προέκυψαν ενδιαφέροντα συμπεράσματα για τις σχέσεις των ενηλίκων τόσο με τα μαθηματικά του σχολείου όσο και με μαθηματικές δραστηριότητες της καθημερινής ζωής τους (Giannakopoulou & Chassapis, 2012).

Δύο από τις διαπιστώσεις της έρευνας αυτής έχουν ενδιαφέρουν εδώ άμεσα.

Διαπίστωση πρώτη: Οι ενήλικες που συμμετείχαν στην έρευνα αυτή εκδήλωσαν αρνητικά συναισθήματα απέναντι στα σχολικά μαθηματικά, σε τέτοιο μάλιστα βαθμό ώστε η ενασχόληση τους με αυτά να τους προκαλεί, όπως δήλωσαν, άγχος. Είναι εντυπωσιακό ότι σε ποσοστό 36% οι 191 ενήλικες που συμμετείχαν στην έρευνα, δήλωσαν ότι τους προκαλεί άγχος ακόμα και το άκουσμα ή το διάβασμα της λέξης «μαθηματικά». Ένα ποσοστό της τάξης του 60% των ενηλίκων συμπεριέλαβε στις δραστηριότητες των σχολικών μαθηματικών που τους προκαλούν άγχος κάθε μορφή της δραστηριότητας επίλυσης προβλημάτων (την επίλυση ενός προβλήματος από τους ίδιους, την παρακολούθηση της επίλυσης ενός προβλήματος στη σχολική τάξη ή και την εξήγηση σε άλλους του τρόπου με το οποίο έλυσαν ένα πρόβλημα). Ακόμα, όμως, και η παρουσία τους στα μαθήματα των μαθηματικών και πολύ περισσότερο η παρακολούθηση τους αποτελούσε μια απωθητική δραστηριότητα για τους ενήλικους αυτούς. Ένας στους τέσσερεις ενήλικες της έρευνάς μας δήλωσε ότι ακόμα και η αναμονή της έναρξης του μαθήματος των μαθηματικών τους δημιουργούσε μια αγχωτική κατάσταση, ενώ ένας στους τρεις δήλωσε ότι αισθάνεται δυσάρεστα κατά τη διάρκεια της παρακολούθησης του μαθήματος των μαθηματικών ή και στη σκέψη ότι πρέπει να παρακολουθήσουν αρκετά μαθήματα μαθηματικών μέχρι τη λήξη της σχολικής χρονιάς.

Είναι, τέλος, αξιοσημείωτο ότι οι καταστάσεις άγχους των ενηλίκων όταν εμπλέκονται σε δραστηριότητες σχολικών μαθηματικών επιτείνονται στις περιπτώσεις που είναι υποχρεωμένοι να απαριθμήσουν, να μετρήσουν, να εκτελέσουν αριθμητικές πράξεις ή

υπολογισμούς και να λύσουν προβλήματα με την παρουσία άλλων ή να μιλήσουν γι' αυτά σε άλλους.

Διαπίστωση δεύτερη: Η κατάσταση αυτή διαφοροποιείται σημαντικά και σε κάποιες περιπτώσεις αντιστρέφεται πλήρως, όταν απαιτείται από τους ενήλικες να εκτελέσουν μαθηματικές δραστηριότητες ενταγμένες σε διάφορες εργασίες της καθημερινότητας τους. Η ανάγνωση αριθμητικών δεδομένων τα οποία αναγράφονται στους λογαριασμούς του ηλεκτρικού ρεύματος ή ο υπολογισμός ενός ποσοστού στις εκπτώσεις αγορών προκαλούν μεν άγχος, αλλά σε ποσοστά μικρότερα του 40% των ενηλίκων που συμμετείχαν στην έρευνα μας. Αντίθετα, σε ποσοστά που ξεπερνούν το 70% οι ενήλικες δηλώνουν ότι δεν αισθάνονται καμία ανησυχία όταν εκτελούν υπολογισμούς κατά τη διάρκεια των αγορών τους, όταν ελέγχουν την ακρίβεια λογαριασμών ή όταν παίζουν τυχερά παιχνίδια.

Οι διαπιστώσεις αυτές, μεταξύ άλλων που προέκυψαν από την έρευνα αυτή, μας επιτρέπουν να διατυπώσουμε τον ισχυρισμό ότι η αρνητική στάση απέναντι στα μαθηματικά, σε βαθμό μάλιστα που να προκαλεί αγχωτικές βιωματικές καταστάσεις, οφείλεται σε συγκεκριμένες καταστάσεις και δεν μεταφέρεται από ένα πλαίσιο σε ένα άλλο. Εν προκειμένου από τις καταστάσεις της καθημερινότητας στις σχολικές δραστηριότητες ή αντίστροφα, διαπίστωση που έχει επισημανθεί και από άλλους ερευνητές (ενδεικτικά Rounds & Hendel, 1980).

Αυτό σημαίνει ότι η εισαγωγή καταστάσεων καθημερινότητας ή πρακτικών εφαρμογών στα σχολικά μαθηματικά δεν μπορεί να ανατρέψει – τουλάχιστον εύκολα – τα αρνητικά συναισθήματα που δημιουργούν στους ενήλικες τα μαθηματικά του σχολείου και δεν μπορεί να αποτελέσει μέσο δια του οποίου μπορεί να αλλάξει το πλαίσιο της διδασκαλίας και κατά συνέπεια της μάθησης των μαθηματικών .

Παράλληλα, οι βασικοί παράγοντες δημιουργίας αρνητικών σχέσεων με τα μαθηματικά, όπως προκύπτει από την ερμηνεία των ευρημάτων της έρευνας μας, σχετίζονται με δυσκολίες ανάγνωσης και κατανόησης μαθηματικών κειμένων, με κακές εμπειρίες από τα μαθηματικά κατά τη διάρκεια της φοίτησης στο σχολείο, με την ανασφάλεια που αισθάνονται όταν αναγκάζονται να χειριστούν αριθμητικά δεδομένα και να εκτελέσουν υπολογισμούς, με μια

εδραιωμένη πεποίθηση ότι γενικά δεν τα καταφέρνουν με τα μαθηματικά και με την άποψη ότι οι γνώσεις των σχολικών μαθηματικών είναι άχρηστες στην καθημερινότητα τους. Αυτά σημαίνουν, ότι οι αρνητικές σχέσεις των ενηλίκων με τα μαθηματικά είναι παράγωγο του σχολείου, των περιεχομένων και των τρόπων διδασκαλίας των σχολικών μαθηματικών.

Με βάση, λοιπόν, τις παραπάνω διαπιστώσεις μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το σχολείο με τους συμβατικούς τρόπους διδασκαλίας μαθηματικών δεν μπορεί να ανατρέψει τις αρνητικές σχέσεις των ενηλίκων με τα μαθηματικά, έστω και αν το περιεχόμενο των σχολικών μαθηματικών εμπλουτιστεί με παραδείγματα και εφαρμογές μαθηματικών σε καταστάσεις της καθημερινότητας.

ΕΝΗΛΙΚΕΣ, ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Σε μια άλλη έρευνα, που βρίσκεται σε εξέλιξη, ενήλικες που ρωτήθηκαν ποιο παιχνίδι παίζουν συχνά και απολαμβάνουν να παίζουν απάντησαν δηλώνοντας στην πλειονότητα τους τεχνικά παιχνίδια με κάρτες (παιχνίδια τράπουλα). Όλα τα παιχνίδια αυτά απαιτούν αριθμητικές πράξεις ή και υπολογισμούς, μερικά δε σχετικά σύνθετους και όλα τα παιχνίδια απαιτούν την ανάπτυξη λογικών συλλογισμών και τη συναγωγή συμπερασμάτων με βάση αριθμητικά δεδομένα. Τέλος, όλα τα παιχνίδια απαιτούν συζητήσεις με αριθμητικές αναφορές και ανταλλαγή επιχειρημάτων τεκμηριωμένων σε αριθμητικά δεδομένα. Χαρακτηριστικά παιχνίδια με 52 χαρτιά τράπουλας (παιγνιόχαρτα στην τυπική ορολογία) είναι:

- το απολύτως τεχνικό και με σύνθετους κανόνες παιχνίδι μπρίτζ, το πιο διαδεδομένο παιχνίδι ενηλίκων στον κόσμο,
- οι διάφορες παραλλαγές του πανάρχαιου παιχνιδιού ραμί, όπως η μπιρίμπα, οι οποίες συνδυάζουν τεχνική και τύχη,
- τα παιχνίδια με απλούστερους κανόνες και τον παράγοντα της τύχης καθοριστικό, όπως είναι τα διαδεδομένα στην Ελλάδα παιχνίδια ξερή και κολιτσίνα, καθώς και
- τα απολύτως τυχερά παιχνίδια «εικοσιένα» και «τριανταένα», τα οποία παίζονται εθιμικά στην Ελλάδα τις μέρες τις Πρωτοχρονιάς.

Η διαπίστωση αυτή επιτρέπει να διατυπωθεί η πρόταση ότι μπορεί η διδασκαλία των μαθηματικών σε ενήλικους πληθυσμούς να οργανωθεί με αφετηρία και επίκεντρο παιχνίδια με κάρτες. Πέρα από το περιεχόμενο των παιχνιδιών αυτών, το οποίο μπορεί να περιλαμβάνει τις βασικές αριθμητικές γνώσεις (αριθμούς και πράξεις) και τις βασικές μαθηματικές πρακτικές (επίλυση προβλημάτων και διατύπωση συλλογισμών), η διαδικασία τους ενισχύει και μια ουσιώδη συνιστώσα της εκπαίδευσης ενηλίκων, τη δημιουργία κοινοτήτων μάθησης, οι οποίες διευκολύνουν και υποστηρίζουν τη μάθηση των μελών τους (εδώ την απόκτηση αριθμητικών γνώσεων και την ανάπτυξη αριθμητικών δεξιοτήτων), ενώ συμβάλλουν μέσα από την ανταλλαγή εμπειριών για συγκεκριμένα ζητήματα στην κατανόηση και στην υπέρβαση νοητικών και συναισθηματικών προβλημάτων.

Μελετώντας το ρόλο του παιχνιδιού στην εκπαίδευση ενηλίκων η Μέλαμεντ (Melamed, 1987) διακρίνει πέντε κατηγορίες λειτουργιών του παιχνιδιού, οι οποίες συμβάλλουν θετικά στη μάθηση των ενηλίκων ατόμων:

1. Ανάπτυξη κοινωνικών σχέσεων, οι οποίες συμβάλλουν στην οικοδόμηση αμοιβαίων σχέσεων εμπιστοσύνης και στη δημιουργία μιας αίσθησης κοινότητας μεταξύ των ενηλίκων. Οι σχέσεις αυτές υποστηρίζουν τη συνέργια, συμβάλουν στην ευχαρίστηση, αίρουν τις αναστολές και επιτρέπουν τη ελεύθερη έκφραση των συμπαικτών ενός παιχνιδιού.
2. Αξιοποίηση εμπειριών, μέσα από τις συζητήσεις που αναπτύσσονται μεταξύ των συμπαικτών, οι οποίες ενισχύουν την ανταλλαγή εμπειριών και επιτρέπουν σε όλους τους παίκτες να αποκτήσουν νέες γνώσεις ή να επικυρώσουν υπάρχουσες γνώσεις από τις βιωμένες εμπειρίες των άλλων.
3. Ανάπτυξη μεταφορικής σκέψης, η οποία επιτρέπει στους συμπαίκτες να αναπτύξουν τη δημιουργικότητα τους μέσα από την εκδήλωση εικασιών και υποθετικών επιχειρημάτων. Μέσα από τη φαντασία, τη μεταφορική σκέψη και τη μη-κυριολεκτική έκφραση, οι ενήλικοι παίκτες μετασχηματίζουν την άμεση πραγματικότητα τους και δημιουργούν νέους τύπους πραγματικότητας στους οποίους εμπλέκονται και αλληλοδρούν.

4. Διαμόρφωση ολιστικών προσεγγίσεων σε καταστάσεις του παιχνιδιού, οι οποίες εξοικειώνουν στη συσχέτιση προσώπων, γεγονότων, εμπειριών, ιδεών και δεδομένων της πραγματικότητας.
5. Απελευθερωτικές λειτουργίες του παιχνιδιού μέσα από τις οποίες οι ενήλικοι παίκτες υπερβαίνουν κατεστημένες λογικές και καθιερωμένες συμπεριφορές, στις οποίες υποχρεώνονται από τις συμβατικότητες της καθημερινότητας τους.

Όλες αυτές οι λειτουργίες σε διάφορους βαθμούς και σε ποικίλες εκδοχές επιτελούνται και στα ομαδικά παιχνίδια με τράπουλα, καθιστώντας τα προνομιακά παιχνίδια για την εισαγωγή τους σε δραστηριότητες μαθηματικής εκπαίδευσης ενηλίκων.

ΑΝΤΙ ΓΙΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Μια πρόταση, όπως αυτή που διατυπώθηκε εδώ για τη εισαγωγή παιχνιδιών τράπουλας στην εκπαίδευση ενηλίκων είναι βέβαιο ότι θα αντιμετωπιστεί με επιφυλάξεις, πολλές από τις οποίες θα βασίζονται στη λογική που αρνείται στους ενήλικους το δικαίωμα του παιχνιδιού (και όταν αναγκάζεται να το αποδεχτεί αντικαθιστά την αναφορά του με διάφορους ευφημισμούς, όπως διασκέδαση, χόμπυ κ.α) και σε μια τέτοια βάση θα επικαλούνται το ασύμβατο εκπαίδευσης και παιχνιδιού, ιδίως μάλιστα με τραπουλόχαρτα.

Οι επιφυλάξεις αυτού του τύπου είναι θεμιτές, αλλά έξω από την οπτική της παρούσας συζήτησης. Όλες οι άλλες επιφυλάξεις για τη βασιμότητα ή την αποτελεσματικότητα της πρότασης είναι καλοδεχούμενες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- Caillois, R. (1961), *Man, play, and games.*, Glencoe, New York: The Free Press.
- Giannakopoulou, E. & Chassapis, D. (2012), Divided minds: Adults' anxiety towards mathematics, CIEAEM64 *Proceedings "Mathematics Education and Democracy: Learning and Teaching Practices"* Rhodes, Greece.
- Hoppes, S., Wilcox, T. & Graham G. (2001), Meanings of play for older adults, *Physical & Occupational Therapy in Geriatrics*, 18(3), 57-68.
- Huizinga, J. (1950). *Homo ludens; a study of the play-element in culture*, Boston: Beacon Press.
- Ελληνική έκδοση: Χουϊζίνγκα, Γ., (1989) *Ο άνθρωπος και το παιχνίδι (Homo ludens)*, (μτφ. Ροζάνης Σ., Λυκιαρδόπουλος Γ.), Αθήνα: Εκδόσεις Γνώση.
- Knox, S.H. (1998), Treatment through play and leisure. Στο M.E. Neistadt & E.B. Crepeau (Eds.), *Willard & Spackman's Occupational Therapy*, Philadelphia: Lippincott.
- Melamed, L. (1987), The role of play in adult learning. Στο Boud, D. & Griffin, V. (eds.), *Appreciating adults learning: from the learner's perspective*, London: Kogan Page, 13-24.
- Rounds, J. and Hendel, D. (1980), Measurement and dimensionality of mathematics anxiety, *Journal of Counselling Psychology*, 27, 138-149.

Ελένη Γιαννακοπούλου
egian@tutors.eap.gr

ΤΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΣΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΚΑΙ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Δημήτρης Χασάπης

Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εισήγηση διατυπώνονται σχόλια και προβληματισμοί για τις πολύπλευρες σχέσεις του παιχνιδιού με τα μαθηματικά, τη μάθηση και τη διδασκαλία τους στο σχολείο. Διατυπώνεται η άποψη ότι τα μαθηματικά και το παιχνίδι μοιράζονται κοινές οπτικές της πραγματικότητας, άρα υποκινούν ισόμορφες νοητικές δραστηριότητες, οπότε μπορεί να αντιμετωπιστούν «ισότιμα» στη διδασκαλία μαθηματικών. Παρά τα κοινά στοιχεία μαθηματικών και παιχνιδιού, όμως, οι καθιερωμένες σχέσεις τους εντοπίζονται στην εισαγωγή παιχνιδιών στις μαθηματικές δραστηριότητες ή στην ανάδειξη μαθηματικών εννοιών και τεχνικών, οι οποίες ενέχονται σε δραστηριότητες παιχνιδιών. Αντίστοιχα, η διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο χρησιμοποιεί το παιχνίδι ευκαιριακά αποδίδοντας του έναν ρόλο βοηθητικού μέσου για την υποκίνηση του ενδιαφέροντος, την εισαγωγή εννοιών ή την άσκηση δεξιοτήτων. Με βάση τα προηγούμενα διατυπώνονται στοιχεία μιας διαφορετικής προσέγγισης για την εισαγωγή των μαθηματικών στην προσχολική και σχολική εκπαίδευση.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ – ΠΑΙΧΝΙΔΙ: ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΕΣ ΔΙΕΥΚΡΙΝΗΣΕΙΣ

Τι είναι αυτό που στις κοινωνίες που ζούμε αναγνωρίζουμε και αποκαλούμε «μαθηματικά»;

Με δυο λόγια, μαθηματικά είναι μια κοινωνικά κατασκευασμένη οπτική για την κατανόηση της φυσικής και κοινωνικής πραγματικότητας μέσα από την εισαγωγή και τον χειρισμό ποσοτικών και χωρικών σχέσεων και παράλληλα ένας λόγος για την περιγραφή της πραγματικότητας από αυτή την (μαθηματική) οπτική.

Πρόκειται, επομένως, για μια κοινωνική πρακτική, η οποία αξιοποιεί όλους τους ιστορικά αναπτυγμένους τρόπους δράσης για τον χειρισμό ποσοτικών και χωρικών σχέσεων καθώς και προβλημάτων τα οποία προκύπτουν στο πλαίσιο των χειρισμών αυτών, υιοθετώντας για την διεκπεραίωση των δράσεων αυτών τους καθιερωμένους σε μια συγκεκριμένη κοινωνία κανόνες, αξίες και εργαλεία.

Με άλλα λόγια, κάθε μαθηματική πρακτική περιλαμβάνει:

- Επιτελεστικές/εκτελεστικές πράξεις, οι οποίες διεκπεραιώνουν εργασίες με μαθηματικό περιεχόμενο, π.χ. πολλαπλασιασμός διψήφιων αριθμών.
- Διαλογικές/γλωσσικές πράξεις, οι οποίες μιλούν για τις επιτελεστικές πράξεις και τα ζητήματα που προκύπτουν στο πλαίσιο τους, καθώς και για ζητήματα μαθηματικών διατυπώσεων και
- Θέσεις/πεποιθήσεις για την ίδια τη μαθηματική πρακτική και την άσκηση της.

Άρα η άσκηση μιας μαθηματικής πρακτικής σημαίνει:

- Κάνω μαθηματικά, δηλαδή αναπτύσσω μια μαθηματική δραστηριότητα, η οποία όπως κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα έχει κίνητρο, αντικείμενο και αποτέλεσμα.
- Μιλώ μαθηματικά, δηλαδή διατυπώνω με συγκεκριμένη γλώσσα περιγραφές της μαθηματικής δραστηριότητας και των αποτελεσμάτων και διαλέγομαι με βάση τις περιγραφές αυτές και

- Έχω άποψη για τη μαθηματική δραστηριότητα και το λόγο της, η οποία υποβάλλει και μια συγκεκριμένη τοποθέτηση απέναντι τους.

Παράγωγο αποτέλεσμα αυτής της μαθηματικής πρακτικής είναι η οργανωμένη με βάση συγκεκριμένες αρχές μαθηματική γνώση.

Η μαθηματική γνώση, όπως όλα τα παράγωγα των κοινωνικών πρακτικών, μετά την παραγωγή της αυτονομείται πλήρως από την πρακτική στην οποία οφείλει την ύπαρξη της. Δηλαδή, η μαθηματική γνώση - οι έννοιες, τα θεωρήματα οι τεχνικές, των μαθηματικών – παρόλο που είναι ανθρώπινες κατασκευές αποκτούν μετά την παραγωγή τους δικές τους, αντικειμενικά υπαρκτές, ιδιότητες και οδηγούν σε προβλήματα, πέρα από τις προθέσεις και τις προβλέψεις των ανθρώπων-δημιουργών τους.

Όπως έχει αναλυθεί από τον Πόππερ (Popper, 1972), η μαθηματική γνώση είναι ένα διαρκώς αναπτυσσόμενο προϊόν του ανθρώπινου πνεύματος, το οποίο αντικειμενοποιώντας τις δημιουργίες του και στη συνέχεια μελετώντας τις δημιουργίες αυτές και προσπαθώντας να επιλύσει τα συχνά απρόβλεπτα και απρόσμενα προβλήματα που προκύπτουν από τις δημιουργίες αυτές παράγει νέες μαθηματικές έννοιες, νέα προβλήματα και νέες μαθηματικές κατασκευές, παράγει δηλαδή νέα μαθηματική γνώση. Η γνώση αυτή είναι μια «αντικειμενική γνώση», η οποία έχει μια σχετικά αυτόνομη ύπαρξη και διακρίνεται σαφώς από την «υποκειμενική πίστη» του γνωρίζοντος ανθρώπινου υποκειμένου. Το Πυθαγόρειο Θεώρημα, δηλαδή, από τη στιγμή της παραγωγής του ως μιας σχέσης ανάμεσα στο μήκος των πλευρών ενός συγκεκριμένου είδους τριγώνου (ορθογωνίου) και της διατύπωσης του ως ενός μαθηματικού θεωρήματος στα Στοιχεία του Ευκλείδη, υπάρχει ως (νοητικό) αντικείμενο, ανεξάρτητο από τους ανθρώπους που το δημιούργησαν. Η μελέτη του θεωρήματος αυτού, των προβλημάτων που παρήγαγε με την ύπαρξη του και των ερωτημάτων που υποκίνησε οδήγησαν στη δημιουργία νέας μαθηματικής γνώσης, πέρα από τις προθέσεις και τις προβλέψεις των δημιουργών του.

Στην αντικειμενικότητα της μαθηματικής γνώσης, στην ανεξαρτητοποίηση της δηλαδή από τις υποκειμενικές πεποιθήσεις των ανθρώπων συμβάλλει καθοριστικά η γλώσσα στην οποία διατυπώνεται η γνώση αυτή, γλώσσα η οποία αποτυπώνει τις λογικο-παραγωγικές

σχέσεις μεταξύ μαθηματικών εννοιών, θεωρημάτων, αποδείξεων, προβλημάτων και επιχειρημάτων.

Η γλωσσικά διατυπωμένη μαθηματική γνώση υπάρχει αντικειμενικά, όχι όμως με τον ίδιο τρόπο που υπάρχουν τα υλικά αντικείμενα και τα φαινόμενα του φυσικού κόσμου. Υπάρχει ως αντικείμενο ενός αφηρημένου κόσμου, ο οποίος περιλαμβάνει όλα τα προϊόντα της ανθρώπινης σκέψης και της γλώσσας.

Ο Πόππερ εισήγαγε μια διάκριση, η οποία μας ενδιαφέρει εδώ άμεσα. Διέκρινε έναν αντικειμενικά υπαρκτό «πρώτο κόσμο», τον φυσικό κόσμο, ο οποίος περιλαμβάνει όλα τα φυσικά όντα και τα υλικά αντικείμενα, έναν υποκειμενικό «δεύτερο κόσμο», κατασκευασμένο από τους ανθρώπους, ο οποίος περιλαμβάνει τα περιεχόμενα της ανθρώπινης εμπειρίας (τις εντυπώσεις, τα αισθήματα, τις πεποιθήσεις) και σε έναν αντικειμενικά υπαρκτό «τρίτο κόσμο», ο οποίος περιλαμβάνει τα παράγωγα της ανθρώπινης νοητικής δραστηριότητας (τις επιστημονικές γνώσεις, τα καλλιτεχνικά δημιουργήματα, τα φιλοσοφικά συστήματα).

Μέσα από αυτή τη διάκριση της πραγματικότητας σε τρεις διαφορετικούς κόσμους αίρεται η φιλοσοφική αντίθεση ανάμεσα στη θεώρηση των μαθηματικών ως μιας κοινωνικής κατασκευής (κατασκευασιοκρατία) με τη θεώρηση των μαθηματικών ως μιας αναπαράστασης μιας ήδη μαθηματικά οργανωμένης πραγματικότητας (πλατωνισμός).

Οι μαθηματικές έννοιες, τα θεωρήματα και τα προβλήματα υπάρχουν ανεξάρτητα από την ανθρώπινη σκέψη, ενώ είναι προϊόντα της ανθρώπινης κοινωνικής πρακτικής. Είναι, δηλαδή, ταυτόχρονα και ανθρώπινες κατασκευές και υπαρκτά «αντικείμενα», τα οποία αφότου δημιουργηθούν αποξενώνονται από τους δημιουργούς τους, αποκτούν αυτόνομη και α-χρονική ύπαρξη, έχοντας τις δικές τους ιδιότητες, πολλές φορές απρόσμενες και απρόβλεπτες από τους δημιουργούς τους (βλέπε και τα άλυτα προβλήματα των μαθηματικών), ανεξάρτητα από τη γνώση ή την άγνοια των ιδιοτήτων αυτών από τους ανθρώπους. Αυτό σημαίνει, ότι μπορεί να προκύψουν ανακαλύψεις νέων μαθηματικών γεγονότων, τα οποία προκύπτουν από αρχικά ανθρώπινες μαθηματικές κατασκευές, ανακαλύψεις δηλαδή αντικειμενικά υπαρκτών και όχι δι-υποκειμενικά αποδεκτών,

μαθηματικών αληθειών. Για παράδειγμα, αφότου δημιουργήθηκαν οι φυσικοί αριθμοί ως εκφράσεις του πλήθους ενός συνόλου αντικειμένων, η διάκριση άρτιων και περιττών αριθμών ή η διάκριση πρώτων και σύνθετων αριθμών προέκυψαν αντικειμενικά ως ιδιότητες των αριθμών, όπως προέκυψε αντικειμενικά, ανεξάρτητα από τη θέληση των μαθηματικών και εντελώς απρόσμενα, η αναπάντητη μέχρι σήμερα εικασία του Γκόλμπαχ (είναι δυνατόν να γραφεί κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 ως άθροισμα δυο πρώτων αριθμών;).

Συμπερασματικά, η μαθηματική πρακτική αναπτύσσεται στο φυσικό κόσμο των όντων, των αντικειμένων και των φαινομένων, διαμορφώνεται από τον υποκειμενικό κόσμο της ανθρώπινης εμπειρίας και παράγει πνευματικά προϊόντα τα οποία εντάσσονται στο κόσμο των έργων της ανθρώπινης νοητικής δραστηριότητας.

Στο πεδίο αυτό της αλληλεπίδρασης των τριών κόσμων, όπως διακρίθηκαν από τον Πόππερ, του φυσικού κόσμου (των όντων, των αντικειμένων και των φαινομένων), του υποκειμενικού κόσμου της ανθρώπινης εμπειρίας (των αισθημάτων, των απόψεων και των πεποιθήσεων) και του αντικειμενικού κόσμου της μαθηματικής γνώσης (των εννοιών, των τεχνικών και των θεωρημάτων) εντοπίζονται κοινοί τόποι της μαθηματικής δραστηριότητας με τη δραστηριότητα του παιχνιδιού, όπως θα αναλυθεί παρακάτω. Με την χρήσιμη υπογράμμιση ότι ο υποκειμενικός κόσμος της ανθρώπινης συνείδησης διαμεσολαβεί ανάμεσα στον αφηρημένο αντικειμενικό και στο συγκεκριμένο αντικειμενικό κόσμο, δηλαδή ανάμεσα στον πολιτισμό και στη φύση, αίροντας κάθε απόλυτη διάσταση φυσικού και πνευματικού κόσμου.

Αλλά, τι εννοούμε λέγοντας «παιχνίδι»;

Ένα νήπιο βγάζει από ένα κουτί ξύλινους κύβους διαφόρων διαστάσεων και χτίζει έναν πύργο βάζοντας τον έναν κύβο πάνω στον άλλο. Μόλις χρησιμοποιήσει όλους τους κύβους, παρατηρεί για λίγο τον πύργο και αμέσως μετά τον γκρεμίζει με ένα χτύπημα του χεριού του. Επαναλαμβάνει την ίδια δραστηριότητα πολλές φορές συνδυάζοντας τους κύβους με διάφορους τρόπους.

Μια νηπιαγωγός καλεί τα παιδιά να παίξουν ντόμινο. Εξηγεί το παιχνίδι και τους κανόνες του παιχνιδιού. Τοποθετεί τα ντόμινα αντεστραμμένα, ώστε να μην φαίνονται οι βούλες τους, μπροστά στα παιδιά, και κάθε παιδί παίρνει έξι ντόμινα και τα τοποθετεί μπροστά του, χωρίς να μπορούν τα άλλα παιδιά να τα δουν. Αποφασίζουν ποιο παιδί θα παίξει πρώτο και με ποια σειρά θα παίζουν τα υπόλοιπα παιδιά και αρχίζει το παιχνίδι.

Μια δασκάλα μοιράζει στα παιδιά της 3^{ης} τάξης μια σελίδα στην οποία υπάρχει ένα πλήθος κουκίδων, κάθε μια από τις οποίες σημαδεύεται με έναν αριθμό. Ζητά από καθένα παιδί να ενώσει τις κουκίδες ακολουθώντας την αλληλουχία των αριθμών και να αναγνωρίσει την εικόνα που θα προκύψει.

Είναι οι δραστηριότητες αυτές παιχνίδια;

Η απάντηση προφανώς εξαρτάται από ποιόν ορισμό υιοθετούμε για το τι είναι παιχνίδι. Υπάρχουν πολλοί ορισμοί του παιχνιδιού διατυπωμένοι στο πλαίσιο διαφορετικών επιστημονικών προσεγγίσεων και διαφορετικών θεωρητικών οπτικών, ιδίως μετά το ιστορικό πια έργο του Χουιζίνγκα «Homo Ludes: Μια μελέτη του παιχνιδιού ως στοιχείου του πολιτισμού» (Huizinga, 1955/1938, ελληνική έκδοση 1989). Στο έργο αυτό ο Χουιζίνγκα ορίζει το παιχνίδι ως *«μία ελεύθερη δραστηριότητα, η οποία διατηρείται απολύτως συνειδητά εκτός της ‘συννηθισμένης’ ζωής ως ‘μη σοβαρή’, η οποία όμως την ίδια στιγμή απορροφά πλήρως και απολύτως τον παίκτη. Είναι μια δραστηριότητα χωρίς υλικό συμφέρον από την οποία δεν μπορεί να προκύψει κανένα κέρδος. Εξελίσσεται μέσα στα δικά της αρμόζοντα όρια του χρόνου και του τόπου σύμφωνα με σταθερούς κανόνες και καθορισμένα βήματα»*.

Έκτοτε διατυπώθηκαν πολλοί ορισμοί και διακρίσεις του παιχνιδιού, από τους οποίους γίνεται σαφές ότι η έννοια του παιχνιδιού είναι πολύπλευρη και κατά τον Moyles (1994) κάθε απόπειρα διατύπωσης ενός καθολικού ορισμού για το παιχνίδι μοιάζει με μια *«προσπάθεια να πιάσεις αιωρούμενες φουσαλίδες»* (σ. 5).

Μέσα από μια κριτική θεώρηση των ορισμών που υιοθέτησαν ή διατύπωσαν οι παραδοσιακές θεωρίες για το παιχνίδι προβάλλει σήμερα μια προσέγγιση του παιχνιδιού ως μιας σύνθετης και ποικιλόμορφης δραστηριότητας, η οποία καθορίζεται από το εκάστοτε

κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο στο οποίο αναπτύσσεται και παράλληλα ως μιας ατομικής διάθεσης των ανθρώπων (Wood, 2008).

Από μια τέτοια οπτική, το παιχνίδι δεν μπορεί να καθοριστεί ούτε από το αντικείμενο ούτε από τη μορφή του, αλλά πρωτίστως από μια ιδιαίτερη στάση ή από μια ιδιαίτερη προσέγγιση των υλικών αντικειμένων, των ανθρώπινων συμπεριφορών και των ιδεών και όχι από τα αντικείμενα, τις συμπεριφορές ή τις ιδέες καθαυτές. Όπως έχει χαρακτηριστεί διατυπωθεί από την ΜακΛέιν «*παιχνίδι είναι ένας ειδικός τρόπος σκέψης και πράξης. Αυτός ο τρόπος είναι μη-κυριολεκτικός, σηματοδοτεί τις δραστηριότητες ως να μην είναι πραγματικές, ως να μην αποδίδουν όφελος, ως να μην έχουν το κόστος ή τις συνέπειες του πραγματικού κόσμου. Αυτός ο τρόπος επιτρέπει ανοιχτές, διερευνητικές, υποθετικές προσεγγίσεις στις οποίες οι σκοποί υπόκεινται στα μέσα. Αυτός ο τρόπος επιτρέπει στον παίκτη να υιοθετεί μια 'εάν / ως εάν' προσέγγιση, να δοκιμάζει υλικά και ιδέες χωρίς να είναι υποχρεωμένος να παρουσιάζει ένα τελικό προϊόν και χωρίς το φόβο μιας αποτυχίας. Η διαδικασία του παιχνιδιού παρέχει στον παίκτη μια αίσθηση δυνατότητας, όπως επίσης και μια αίσθηση κυριότητας, ελέγχου και επάρκειας. Δηλαδή, το παιχνίδι με υλικά, δραστηριότητες, ταυτότητες, κανόνες και ιδέες μπορεί, με την πάροδο του χρόνου, να ενισχύσει την ανάπτυξη μη-κυριολεκτικών, αφηρημένων, υποθετικών, πειραματικών και δημιουργικών τύπων πράξης και σκέψης*» (McLane, 2003, σ. 11).

Αυτό σημαίνει ότι η διαδικασία του παιχνιδιού χαρακτηρίζεται από μια μορφή υποθετικο-παραγωγικής σκέψης, η οποία δημιουργεί προβληματικές καταστάσεις για τις οποίες υπάρχουν πολλά δυνατά αποτελέσματα και για τις οποίες μπορεί να διατυπώνονται ερωτήσεις χωρίς μια μόνο σωστή απάντηση.

Επομένως, στα ουσιώδη χαρακτηριστικά της διαδικασίας του παιχνιδιού, ανεξάρτητα από το περιεχόμενο του, περιλαμβάνονται η δυνατότητα επιλογών, η μη-κυριολεκτική προσέγγιση, η πολλαπλότητα των δυνατών αποτελεσμάτων και η ανταμοιβή της ικανότητας των παικτών.

Παράλληλα με έναν τρόπο σκέψης και πράξης, το παιχνίδι είναι και μια ατομική προδιάθεση, μια στάση απέναντι σε υλικά, δραστηριότητες, ταυτότητες, κανόνες και ιδέες (Carr, 2001). Όπως

χαρακτηριστικά διατυπώθηκε από τον Αμπι «*παιχνίδι είναι ένας ιδιαίτερος τρόπος να βλέπουμε κάτι, οτιδήποτε*» (Abt, 1970, σ.5)

ΟΙ ΚΟΙΝΟΙ ΤΟΠΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΑΙΧΝΙΔΙΟΥ

Στο πεδίο της αλληλεπίδρασης του φυσικού κόσμου (των όντων, των αντικειμένων και των φαινομένων), του υποκειμενικού κόσμου της ανθρώπινης εμπειρίας (των αισθημάτων, των απόψεων και των πεποιθήσεων) και του αντικειμενικού κόσμου της μαθηματικής γνώσης (των εννοιών, των τεχνικών και των θεωρημάτων) εντοπίζεται, όπως προαναφέρθηκε, ένας κοινός τόπος της μαθηματικής δραστηριότητας με τη δραστηριότητα του παιχνιδιού.

Γιατί τα παιχνίδια, όπως και τα μαθηματικά, εντάσσονται στον αντικειμενικά υπαρκτό «τρίτο κόσμο», ο οποίος περιλαμβάνει τα παράγωγα της ανθρώπινης νοητικής δραστηριότητας και αναφέρονται, όπως και τα μαθηματικά στον φυσικό κόσμο των όντων, των αντικειμένων και των φαινομένων μέσα από τη διαμεσολάβηση της ανθρώπινης δραστηριότητας. Τα μαθηματικά και τα παιχνίδια, δηλαδή, έχουν την ίδια σχέση με την πραγματικότητα, μια σχέση καθοριστική και για τη συγκρότηση και ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και για τη δραστηριότητα του παιχνιδιού.

Όπως η μάθηση των μαθηματικών σημαίνει την εισαγωγή σε μια κοινωνικά καθιερωμένη μαθηματική πρακτική η οποία διαμορφώνει τον «κόσμο» των μαθηματικών, έτσι και το παιχνίδι σημαίνει την είσοδο σε μια διακριτή και ανεξάρτητη σφαίρα ανθρώπινης δραστηριότητας, η οποία αναφέρεται και ως ο «μαγικός κύκλος» του παιχνιδιού, εντός της οποίας η ανθρώπινη συμπεριφορά δομείται από τους κανόνες του παιχνιδιού και μόνο (Huizinga, 1955).

Το «μαγικό» έγκειται στην «άλλη πραγματικότητα» που το παιχνίδι κατασκευάζει. Από τη στιγμή που ενεργοποιείται ή αρχίζει να δημιουργείται ο «μαγικός κύκλος» ενός παιχνιδιού, καθετί στο εσωτερικό του νοηματοδοτείται από τους κανόνες του παιχνιδιού και μόνον και, όπως έχει διατυπωθεί από τον Κεϊλούα κατασκευάζεται μια «δεύτερης τάξης» πραγματικότητα (Caillois, 1961).

Με τις διατυπώσεις του Χουιζίνγκα, «το παιχνίδι αναπτύσσεται και αποκτά υπόσταση μέσα σε ένα πεδίο προκαταβολικά οριοθετημένο, υλικά ή συμβολικά, προσχεδιασμένα ή παρεμπιπτόντως ... Η αρένα, το τραπέζι, ο μαγικός κύκλος, ο ναός, η σκηνή, η οθόνη, το γήπεδο του τένις, το δικαστήριο κλπ. Είναι όλα στη μορφή και στη λειτουργία τους πεδία παιχνιδιού, δηλαδή απαγορευμένοι χώροι, απομονωμένοι, περιφραγμένοι, καθαγιασμένοι, εντός των οποίων ισχύουν ειδικοί κανόνες. Είναι όλοι προσωρινοί κόσμοι μέσα στο συνηθισμένο κόσμο, αφιερωμένοι στην εκτέλεση μιας ξεχωριστής πράξης» (Huizinga, 1955, σ. 10).

Το γεγονός ότι ο «μαγικός κύκλος» είναι ένας κύκλος είναι ουσιώδες χαρακτηριστικό αυτής της μεταφοράς. Ως κλειστό σχήμα ο κύκλος περιγράφει έναν χώρο οριοθετώντας και ξεχωρίζοντας τον από τον πραγματικό κόσμο. Ως σηματοδότης του χρόνου ο «μαγικός κύκλος» μοιάζει με το ρολόι: αντιπροσωπεύει μια διαδρομή με αρχή και τέλος και ταυτόχρονα μια πορεία χωρίς αρχή και τέλος. Δημιουργεί, δηλαδή έναν χώρο-χρόνο επαναλαμβανόμενο, περιορισμένο και απεριόριστο, έναν πεπερασμένο χώρο και απεριόριστες εκδοχές (Salen and Zimmerman, 2003, σ. 95).

Με άλλα λόγια, το παιχνίδι θεωρούμενο ως ένα σύστημα μπορεί να έχει μια ανοιχτή ή μια κλειστή σχέση με την πραγματικότητα που το περιβάλλει, αλλά θεωρούμενο ως ένα σύνολο κανόνων είναι απολύτως κλειστό. Άρα το παιχνίδι ως δραστηριότητα είναι ταυτόχρονα ανοιχτό και κλειστό (Salen and Zimmerman, 2003).

Αυτό σημαίνει, ότι το παιχνίδι, όπως και τα μαθηματικά αλλά με τους δικούς τους όρους, συνάπτει μια δισυπόστατη σχέση με την πραγματικότητα. Αντλεί στοιχεία από τη φυσική και κοινωνική πραγματικότητα και ταυτόχρονα τα μετασχηματίζει σε μορφές που αντιστοιχούν στους όρους του παιχνιδιού, αλλά δεν υπάρχουν στην πραγματικότητα. Μορφές, οι οποίες είναι και δεν είναι πραγματικές, προέρχονται από τον πραγματικό κόσμο, αλλά είναι φανταστικές. Ένα άλογο είναι ζώο υπαρκτό στην πραγματικότητα και ένα καλάμι είναι ένα φυσικό αντικείμενο της πραγματικότητας, αλλά ένα καλάμι που υπεύει ένα παιδί είναι ένα άλογο φανταστικό, που αντιστοιχεί όμως σε μια πραγματικότητα. Το καλάμι-άλογο είναι μια φανταστική πραγματικότητα στον κόσμο του παιχνιδιού.

Το παιδί συνάπτοντας τη δισυπόστατη αυτή σχέση με την πραγματικότητα μέσα από τις δραστηριότητες του παιχνιδιού οικοδομεί, σύμφωνα με τους Πιαζέ και Ίνχελντερ, συστήματα μορφών δράσης, σκέψης και έκφρασης, τα οποία του επιτρέπουν να μετασχηματίζει συμβολικά την πραγματικότητα για να την κατανοήσει και να την αφομοιώσει στις δικές του νοητικές δομές. Στα συστήματα αυτά, η συνύπαρξη του πραγματικού και του φανταστικού, παρέχει στο παιδί (φανταστικές) δυνατότητες να προσεγγίζει συμβολικά (πραγματικές) καταστάσεις, οι οποίες σε (πραγματικές) συνθήκες θα ήταν απρόσιτες. Παράλληλα, μέσα από τη διαπλοκή του πραγματικού με το φανταστικό το παιδί ανατρέπει την πραγματικότητα, παραβιάζοντας σε φανταστικό επίπεδο τα πραγματικά της όρια, τα όρια της ανθρώπινης πράξης και τους περιορισμούς του τόπου και του χρόνου. Μέσα στις δραστηριότητες του παιχνιδιού μπορεί να υποτεθούν ικανότητες και συμπεριφορές, οι οποίες σε πραγματικές συνθήκες είναι ανύπαρκτες ή ανέφικτες. (Piaget & Inhelder, 1990).

Όπως έχει υπογραμμιστεί από τον Βυγκότσκι «*Η σκέψη χωρίζεται από τα αντικείμενα επειδή ένα κομμάτι ξύλο αρχίζει να είναι μια κούκλα και ένα ραβδί γίνεται ένα άλογο. Η δράση που αναπτύσσεται σύμφωνα με κανόνες αρχίζει να καθορίζεται από ιδέες, όχι από αντικείμενα. Αυτή είναι μια ανατροπή της σχέσης του παιδιού με την πραγματική, άμεση, συγκεκριμένη κατάσταση, της οποίας η πλήρης σημασία είναι δύσκολο να εκτιμηθεί. Το παιδί δεν το επιτυγχάνει αυτό με μιας. Είναι εξαιρετικά δύσκολο για το παιδί να διαχωρίσει τη σκέψη (το νόημα μιας λέξης) από το αντικείμενο στο οποίο αναφέρεται και το παιχνίδι είναι ένα μεταβατικό στάδιο σε μια τέτοια κατεύθυνση. Σε εκείνο το κρίσιμο σημείο, που μια ράβδος - δηλαδή ένα αντικείμενο - γίνεται το μέσο για να διαχωριστεί η έννοια άλογο από το πραγματικό άλογο, τότε μια από τις βασικές ψυχολογικές δομές η οποία προσδιορίζει τη σχέση του παιδιού με την πραγματικότητα τροποποιείται ριζικά*» (Vygotsky, 1967).

Η ύπαρξη κανόνων οι οποίοι δομούν κάθε παιχνίδι ως ένα σύστημα και ο ρόλος τους στην οργάνωση και ανάπτυξη του παιχνιδιού είναι ένας δεύτερος κοινός τόπος της μαθηματικής δραστηριότητας με τη δραστηριότητα του παιχνιδιού, εξίσου σημαντικός και απόλυτα συναρτημένος με τις σχέσεις που το παιχνίδι και μαθηματικά συνάπτουν με την πραγματικότητα.

Στο παιχνίδι, όπως και στα μαθηματικά με την ιδιαιτερότητα της πολυμορφίας τους, οι κανόνες αποτελούν συστατικά τους στοιχεία και όρους ανάπτυξης των αντίστοιχων δραστηριοτήτων. Στο παιχνίδι, όπως και στα μαθηματικά, οι κανόνες είναι σαφείς και εφαρμόσιμοι, είναι μη συζητήσιμοι και υποχρεωτικοί για όλους τους παίκτες και κατά την ανάπτυξη του παιχνιδιού δημιουργούν ένα πεδίο δυνατοτήτων, αξιοποιήσιμο από κάθε παίκτη. Οι Σάλεν και Ζίμερμαν διακρίνουν σε κάθε παιχνίδι τρία είδη κανόνων: τους λειτουργικούς κανόνες με τους οποίους παίζεται το παιχνίδι, τους συστατικούς κανόνες, με τους οποίους συγκροτείται η τυπική δομή του παιχνιδιού και τους υπονοούμενους κανόνες, οι οποίοι δεσμεύουν τις εκφράσεις και τις συμπεριφορές των παικτών (Salen and Zimmerman, 2003).

Οι κανόνες, όπως προαναφέρθηκε, δομούν κάθε παιχνίδι ως ένα σύστημα, όπως ακριβώς οι αρχικές έννοιες και τα αξιώματα κάθε μαθηματικού συστήματος μαζί με τους κανόνες της παραγωγικής λογικής δομούν την οργάνωση και την ανάπτυξη κάθε μαθηματικής δραστηριότητας, η οποία αναπτύσσεται στο πλαίσιο του.

Στο παιχνίδι, όπως και στα μαθηματικά, οι κανόνες οργανώνουν το σύστημα και η εφαρμογή τους οργανώνει το παιχνίδι και προσφέρει στους παίκτες τις εμπειρίες του παιχνιδιού μέσα σε καθορισμένα από τους κανόνες και την εφαρμογή τους πλαίσια.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΩΣ ΠΑΙΧΝΙΔΙ: ΜΙΑ ΠΡΟΤΑΣΗ

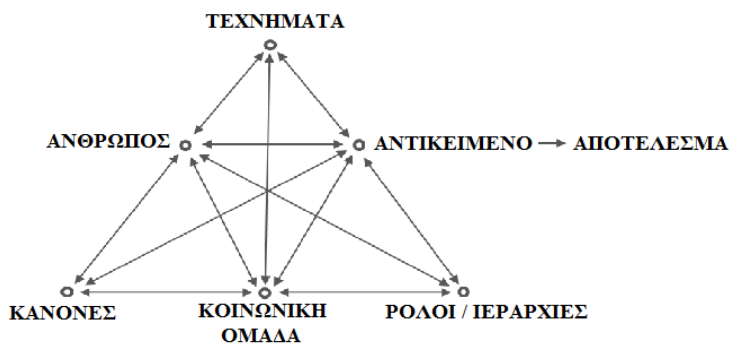
Η δραστηριότητα της μάθησης

Με βάση όσα αρχικά εκτέθηκαν, μαθαίνω μαθηματικά σημαίνει εισάγομαι σε μια κοινωνικά καθιερωμένη μαθηματική πρακτική και παράλληλα αποκτώ μια γνώση, η οποία είναι διάχυτη στο κοινωνικό περιβάλλον και ταυτόχρονα οργανωμένη με συγκεκριμένες αρχές σε εννοιολογικά συστήματα και εκφρασμένη σε μια δική της γλώσσα.

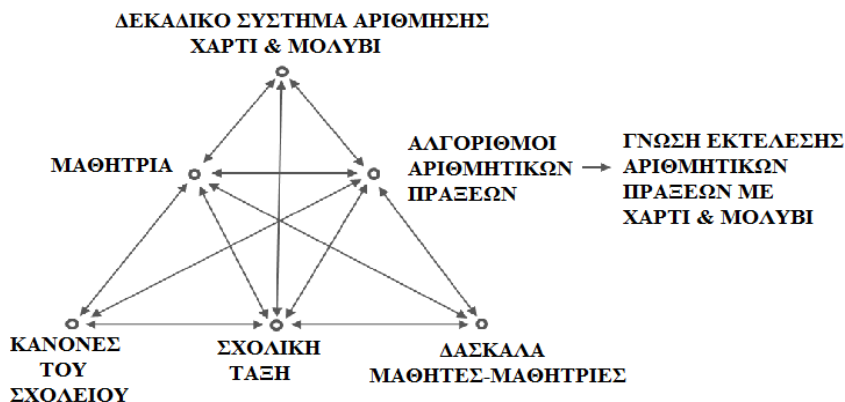
Η εισαγωγή των παιδιών σ' αυτή τη μαθηματική πρακτική και η απόκτηση της μαθηματικής γνώσης και γλώσσας γίνεται μέσα από τη συμμετοχή τους σε δραστηριότητες, με τη γενικότερη έννοια μαθησιακές. Σε μια πρώτη φάση μέσα από την περιφερειακή συμμετοχή τους σε μαθηματικές δραστηριότητες, συμμετοχή η οποία

σταδιακά με την καθοδήγηση ωριμότερων ατόμων, ενηλίκων ή ομηλικών, μεταβάλλεται σε επόμενες φάσεις σε μια συμμετοχή πλήρη και αυτόνομη.

Κάθε δραστηριότητα, οποιουδήποτε περιεχομένου και αντικειμένου, διαμεσολαβείται και διαμορφώνεται από συμβολικά και τεχνικά εργαλεία και γενικότερα από τεχνήματα του ανθρώπινου πολιτισμού, ενώ αναπτύσσεται μέσα σε ένα συγκεκριμένο κάθε φορά κοινωνικό πλαίσιο, το οποίο επίσης την συνδιαμορφώνει (Vygotsky, 1997). Το κοινωνικό πλαίσιο ορίζεται από την κοινωνική ομάδα στην οποία συμμετέχει το δρών υποκείμενο, τους κοινωνικούς ρόλους και τις ιεραρχίες, οι οποίες δομούν την κοινωνική ομάδα και τους καθιερωμένους κανόνες για τις σχέσεις μεταξύ των μελών της ομάδας και για την ανάπτυξη κάθε συγκεκριμένης δραστηριότητας (Engeström, 1987).



Για παράδειγμα, μια δραστηριότητα η οποία έχει ως αντικείμενο της τη μάθηση των αλγορίθμων για την εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού διαμεσολαβείται από το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης και τη συμβολική και γλωσσική έκφραση των αριθμών, καθώς και από τα υλικά μέσα για την εκτέλεση των πράξεων, χαρτί-μολύβι ή υπολογιστής (τεχνήματα). Εάν αυτή η δραστηριότητα μάθησης αναπτύσσεται στο σχολείο, τότε το κοινωνικό πλαίσιο ορίζεται από το σχολείο και τη σχολική τάξη, τους ρόλους και τις ιεραρχίες των δασκάλων και των μαθητών, καθώς και τους κανόνες λειτουργίας του σχολείου και διεξαγωγής των μαθημάτων.



Εάν, όμως, η ίδια δραστηριότητα αναπτύσσεται στο πλαίσιο ενός παιχνιδιού με κάρτες, τότε οι ρόλοι και οι κανόνες είναι αυτοί που επιβάλλουν οι κανονισμοί του παιχνιδιού, οπότε και το περιεχόμενο της δραστηριότητας είναι εντελώς διαφορετικό, παρόλο που ίσως έχει το ίδιο αποτέλεσμα.



Η μάθηση μέσα από τη συμμετοχή των παιδιών σε κατάλληλες δραστηριότητες προκύπτει ως αποτέλεσμα αντιφάσεων, οι οποίες δημιουργούνται σε μια ή σε περισσότερες συνιστώσες μιας δραστηριότητας, σε διάφορες φάσεις ανάπτυξης μιας δραστηριότητας ή ανάμεσα σε συμπληρωματικές δραστηριότητες, οι οποίες επιδιώκουν το ίδιο αποτέλεσμα. Οι αντιφάσεις αυτές είναι αποτέλεσμα μιας διάστασης ανάμεσα στις απαιτήσεις που επιβάλλει το αντικείμενο της δραστηριότητας και στα διαθέσιμα από τον ή στον πρωταγωνιστή της δραστηριότητας εννοιολογικά, συμβολικά ή τεχνικά εργαλεία καθώς και των γνώσεων χρήσης τους ή των κανόνων που διέπουν τη

δραστηριότητα ή των ρόλων που επιβάλλει το κοινωνικό πλαίσιο μέσα στο οποίο αναπτύσσεται η δραστηριότητα. Για παράδειγμα, μια δραστηριότητα επιβάλλει την εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού, την οποία ο πρωταγωνιστής δεν έχει οικειοποιηθεί, παρόλο που ξέρει και την έννοια και την τεχνική εκτέλεσης του πολλαπλασιασμού στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.

Σε μια τέτοια περίπτωση, η μαθησιακή δραστηριότητα αναδιοργανώνεται και το περιεχόμενο της διευρύνεται, ώστε να καθίσταται δυνατός ο χειρισμός του αντικειμένου της και η επίτευξη των στόχων της. Στο παράδειγμα που προαναφέρθηκε, το παιδί με την καθοδήγηση της δασκάλας ή άλλου ατόμου διευρύνει τις γνώσεις του για τον πολλαπλασιασμό των αριθμών και αναδιοργανώνοντας την αντίστοιχη μαθηματική δραστηριότητα επιτυγχάνει τους στόχους της. Πρόκειται για μια «μάθηση δια της διεύρυνσης» της δραστηριότητας, όπως έχει αποκληθεί από τον Engeström (1987), η οποία χαρακτηρίζεται από τον ουσιαστικό ρόλο της αποκληθείσας «ζώνη της επικείμενης ανάπτυξης» κάθε παιδιού.

Το παιχνίδι στα μαθηματικά – Τα μαθηματικά στο παιχνίδι

Στις καθιερωμένες σχέσεις μαθηματικών και παιχνιδιού μπορούμε να διακρίνουμε δύο σαφείς καταστάσεις, οι οποίες αποτελούν πάντα αντικείμενο προβληματισμού και πεδίο γόνιμων προτάσεων.

1. *Το παιχνίδι στα μαθηματικά:* στην περίπτωση αυτή είναι δεδομένη η προτεραιότητα των μαθηματικών και στοιχεία μιας μαθηματικής δραστηριότητας, όπως για παράδειγμα η επίλυση ενός προβλήματος, ή μια μαθηματική γνώση, όπως για παράδειγμα μια ιδιότητα των αριθμητικών πράξεων, μετατρέπεται σε ένα είδος παιχνιδιού ή σε ένα διασκεδαστικό γρίφο. Υπάρχουν πάρα πολλά παιχνίδια αυτού του τύπου, τα οποία παίζονται με χαρτί και μολύβι, με κάρτες, ζάρια κλπ. Η εισαγωγή παιχνιδιών στις μαθηματικές δραστηριότητες έχει θετικά αποτελέσματα στη δημιουργία κινήτρων για τη συμμετοχή των παιδιών στις δραστηριότητες αυτές και συνακόλουθα στη δημιουργία κλίματος μάθησης των μαθηματικών, όπως έχει τεκμηριωθεί από πλήθος σχετικών ερευνών.

2. *Τα μαθηματικά του παιχνιδιού:* στην περίπτωση αυτή η δραστηριότητα του παιχνιδιού είναι η κυρίαρχη δραστηριότητα, στην οποία εντάσσονται στοιχεία των μαθηματικών ή η οποία περιέχει στη δομή ή στους κανόνες της μαθηματικές ενέργειες, όπως για παράδειγμα σύγκριση, απαρίθμηση, μέτρηση, εκτέλεση πράξεων ή ανάπτυξη λογικών συλλογισμών. Η περίπτωση αυτή αξιοποιείται ιδίως στην προσχολική και πρώτη σχολική εκπαίδευση ως μια μορφή έμμεσης διδασκαλίας μαθηματικών εννοιών και τεχνικών.

Η εισαγωγή παιχνιδιών στα μαθηματικά και τα παιχνίδια που περιλαμβάνουν μαθηματικά είναι δύο τύποι σύζευξης μαθηματικών και παιχνιδιού, ο καθένας από τους οποίους έχει τα δικά του πλεονεκτήματα και τη δικιά του θετική συμβολή στις μαθηματικές-εκπαιδευτικές δραστηριότητες (ενδεικτικά, Bright et al. 1985, Ginsburg, 2006, Holton et al., 2001, Van Oers, 1996).

Στην κάθε της περίπτωση, όμως, η σύζευξη προϋποθέτει μια κύρια δραστηριότητα - τη μαθηματική ή το παιχνίδι - στα τεχνήματα, στους κανόνες ή στις ενέργειες της οποίας εισάγονται στοιχεία της άλλης δραστηριότητας.

Το ενδιαφέρον ερώτημα, όμως, είναι αν μπορούμε να ταυτίσουμε τη μαθηματική δραστηριότητα με τη δραστηριότητα του παιχνιδιού ή με άλλα λόγια αν μπορούμε να οργανώσουμε τη διδασκαλία των μαθηματικών αποκλειστικά ως παιχνίδι. Γιατί μέσα από μια τέτοια ταύτιση θα υποστηρίξουμε και την σύμπτωση δράσης και σκέψης και άρα σκέψης και μάθησης.

Παρά τις όποιες δυσκολίες, οι οποίες προκύπτουν από τους τρόπους με τους οποίους οργανώνονται και αναπτύσσονται οι σχολικές δραστηριότητες, με τα αναλυτικά και ωρολόγια προγράμματα δεδομένα, με τις διοικητικές ρυθμίσεις της εκπαιδευτικής δραστηριότητας ισχύουσες και τα λοιπά συναφή, ισχυρίζομαι ότι μπορούμε μέσα από μια κατάλληλη δόμηση της αλληλουχίας των μαθημάτων να οργανώσουμε τις μαθηματικές δραστηριότητες στο σχολείο με τη δομή ενός παιχνιδιού, η οποία θα προτρέπει τη συμμετοχή όλων των παιδιών σε δράσεις και πράξεις παιχνιδο-μαθηματικών.

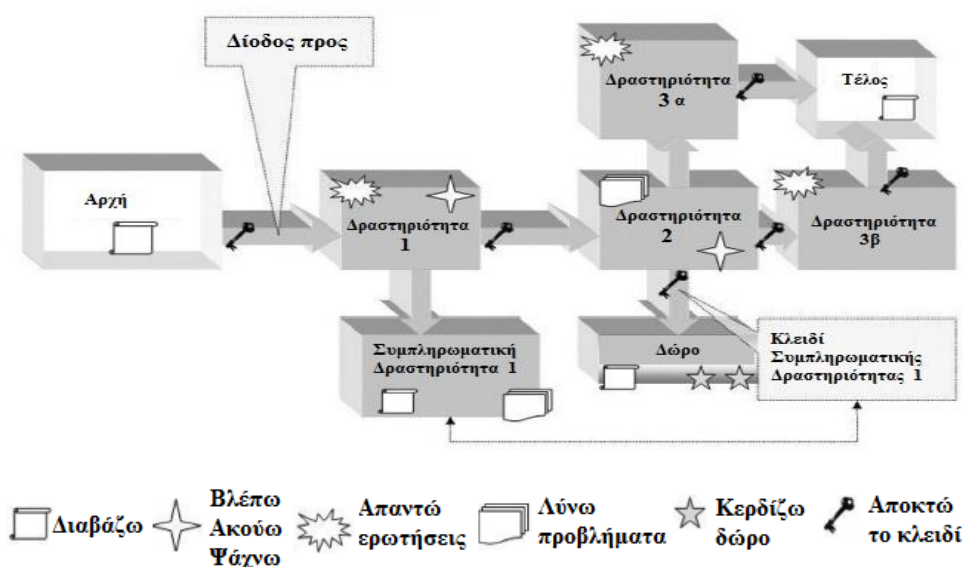
Μπορούμε, δηλαδή, να οργανώσουμε τις μαθηματικές δραστηριότητες στο σχολείο κατά τη διάρκεια μιας σχολικής περιόδου ως ένα «σοβαρό παιχνίδι» (serious game). Ο Abt (1970) ορίζει τα «σοβαρά παιχνίδια» ως εκείνα τα παιχνίδια τα οποία *«έχουν έναν σαφή και προσεκτικά μελετημένο εκπαιδευτικό σκοπό και δεν προορίζονται να παιχτούν κυρίως για διασκέδαση, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι τα σοβαρά παιχνίδια δεν είναι ή δεν πρέπει να είναι διασκεδαστικά»*. Η λογική του «σοβαρού παιχνιδιού» έχει αλματώδως αναπτυχθεί σε περιβάλλοντα υπολογιστών και με την αξιοποίηση των τεχνολογιών της πληροφορικής και των επικοινωνιών έχουν επινοηθεί εξαιρετικά εκπαιδευτικά παιχνίδια και προσομοιώσεις.

Με βάση τις προαναφερθείσες παραδοχές ότι μαθαίνω μαθηματικά σημαίνει:

- εισάγομαι σε μια κοινωνικά καθιερωμένη μαθηματική και δια της πρακτικής αυτής γνωρίζω τον «κόσμο» των μαθηματικών και
- δρώ μέσα σ' αυτόν τον κόσμο για την επίλυση προβλημάτων και την επίτευξη στόχων

μπορούμε αξιοποιώντας τη λογική και την εμπειρία των «σοβαρών παιχνιδιών» να οργανώσουμε τη μάθηση των μαθηματικών ως μια περιπετειώδη εξερεύνηση επιλεγμένων περιοχών του «μαθηματικού κόσμου».

Για παράδειγμα, η εξερεύνηση της περιοχής των αριθμών, η οποία είναι «πρωτεύουσα» του «κόσμου των μαθηματικών» θα μπορούσε να περιλαμβάνει μια αλληλουχία μαθησιακών δραστηριοτήτων, προκλήσεων και εμποδίων με επίκεντρο τους φυσικούς αριθμούς και τις ιδιότητές τους, οργανωμένων στη λογική μιας πορείας, η οποία σχηματικά θα είχε μια δομή όπως η ακόλουθη:



Κάθε μια δραστηριότητα (εννοείται μεταφορικά ως ένας «τόπος») έχει έναν στόχο, ο οποίος είναι η κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας ή η εκμάθηση μιας μαθηματικής τεχνικής, ενώ απαιτεί για την επίτευξη του στόχου την οικειοποίηση ενός μαθηματικού συμβολικού ή τεχνικού εργαλείου και τη χρήση του για την απάντηση ερωτήσεων και την επίλυση προβλημάτων. Η προτροπή στη μελέτη κειμένων, στη βοήθεια της δασκάλας ή στη διεξαγωγή μιας μικρής έρευνας αποτελούν συστατικά στοιχεία μιας δραστηριότητας, με οργανωμένο υλικό ή διδακτικές παρεμβάσεις ανάλογο με το περιεχόμενο της. Οι δραστηριότητες μπορεί να είναι ατομικές ή εναλλακτικά ομαδικές με αντίστοιχες απαιτήσεις στην απάντηση ερωτήσεων ή στην επίλυση προβλημάτων.

Στην περίπτωση των αριθμών, για παράδειγμα, το προς οικειοποίηση μαθηματικό εργαλείο είναι το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, ενώ οι έννοιες και οι τεχνικές αφορούν στις διάφορες έννοιες του αριθμού (πληθικός, διατακτικός, μέτρο, κλασματικός αριθμός κλπ) και στις τεχνικές απαρίθμησης, μέτρησης, εκτέλεσης πράξεων κλπ.

Η επίτευξη του στόχου κάθε μιας δραστηριότητας, η οποία επιβεβαιώνεται από την επιτυχή απάντηση των ερωτήσεων ή την επίλυση προβλημάτων κερδίζει το «κλειδί», το οποίο επιτρέπει στον πρωταγωνιστή να προχωρήσει στην «εξερεύνηση» του επόμενου «τόπου» των μαθηματικών.

Η διαδοχή των δραστηριοτήτων εξασφαλίζει τη λογική ή τη διδακτική αλληλουχία των μαθηματικών εννοιών και τεχνικών, ενώ επιτρέπει τη χρονική οργάνωση των σχολικών μαθημάτων.

Είναι αυτονόητο ότι η εξερεύνηση των επιλεγμένων περιοχών του «μαθηματικού κόσμου» υποστηρίζεται και καθοδηγείται από μια ιστορία, η οποία επιτρέπει στα παιδιά να ταυτιστούν με τον πρωταγωνιστή-ήρωα της και οι ιστορίες, οι οποίες προσφέρονται για τέτοια εγχειρήματα είναι πολλές. Οι άθλοι του Θησέα ή του Ηρακλή, η Οδύσσεια, ο γύρος του κόσμου σε 80 ημέρες και πολλές ιστορίες της μυθολογίας και της λογοτεχνίας μπορεί κατάλληλα διασκευασμένες να αποτελέσουν το υπόβαθρο μαθηματικών περιπετειών. Όπως μπορεί να επινοηθούν ιστορίες με πλοκή, η οποία θα υποβάλλει μια αλληλουχία δραστηριοτήτων.

Δύο παρατηρήσεις έχουν εδώ ενδιαφέρον.

Παρατήρηση πρώτη: Ο Τζούλ (Juul, 2002) έχει διακρίνει τα «σοβαρά παιχνίδια» σε δύο τύπους. Τα παιχνίδια εμφάνισης (emergence games), όπως για παράδειγμα το σκάκι και τα παιχνίδια εξέλιξης (progression games), όπως για παράδειγμα το Μονόπολη. Η δομή των παιχνιδιών εμφάνισης διαμορφώνεται από έναν καθορισμένο, μικρό αριθμό, κανόνων, οι οποίοι επιτρέποντας συνδυασμούς οδηγούν σε ένα πλήθος διαφορετικών κάθε φορά καταστάσεων που οι παίκτες χειρίζονται αναπτύσσοντας διάφορες στρατηγικές. Αντίθετα, η δομή των παιχνιδιών εξέλιξης διαμορφώνεται από μια αλληλουχία προκαθορισμένων καταστάσεων, κάθε μια από τις οποίες απαιτεί από τους παίκτες την επιτυχή αντιμετώπιση της. Είναι σαφές ότι ο κάθε τύπος παιχνιδιού προσφέρει στους παίκτες και διαφορετικού τύπου εμπειρίες, συγκινήσεις, προκλήσεις και κίνητρα, όπως είναι φανερό ότι κάθε τύπος παιχνιδιού έχει τα πλεονεκτήματά του και τα μειονεκτήματά του. Τα παιχνίδια εξέλιξης, η δομή των οποίων προτάθηκε για τη διδασκαλία των μαθηματικών ως παιχνίδι, έχουν δύο σημαντικά μειονεκτήματα σε σχέση με τα παιχνίδια

εμφάνισης. Πρώτον, οι επιτρεπόμενες αλληλεπιδράσεις μεταξύ των παικτών δεν μπορεί να είναι παρά περιορισμένης έκτασης και ποικιλίας και δεύτερον δεν μπορεί να επαναλαμβάνονται στα ίδια παιδιά, χωρίς τροποποιήσεις στις ερωτήσεις, στα προβλήματα και στις εργασίες που προαπαιτούνται για την εξέλιξη του παιχνιδιού.

Παρατήρηση δεύτερη: Από μια άλλη οπτική, τα παιχνίδια εξέλιξης παρέχουν ένα σαφές και με νόημα πλαίσιο για μάθηση μαθηματικών εννοιών και τεχνικών μέσα από την επίλυση προβλημάτων. Ένα παιχνίδι εξέλιξης αποτελείται από μια αλληλουχία προβλημάτων και ταυτόχρονα αποτελεί το ίδιο ένα πρόβλημα. Η αξία των προβλημάτων στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών έχει αναλυθεί σε πλήθος θεωρητικών αναλύσεων και έχει τεκμηριωθεί από πλήθος ερευνητικών διαπιστώσεων, οπότε δεν χρειάζεται εδώ ειδικότερη αναφορά. Ο τύπος των προβλημάτων, τα οποία μπορεί να εισαχθούν σε ένα παιχνίδι εξέλιξης ποικίλει και συναρτάται με το περιεχόμενο και τους στόχους της διδασκαλίας των μαθηματικών που επιδιώκει να υποκαταστήσει. Πρόβλημα μπορεί να συνιστά για τα παιδιά, οποιαδήποτε ερώτηση απαιτεί απάντηση και οποιοδήποτε εμπόδιο απαιτεί την υπέρβαση του για την πορεία του παίκτη προς το στόχο του. Το ακόλουθο σχόλιο του Γκάρντνερ (Gardner, 1990), συγγραφέα πολλών βιβλίων με μαθηματικά προβλήματα, παράδοξα και σπαζοκεφαλιές, είναι για την περίπτωση χαρακτηριστικό. «*Αν και δεν μπορώ να ορίσω ένα μαθηματικό παιχνίδι καλύτερα από όσο μπορώ να ορίσω ένα ποίημα, μπορώ να ισχυριστώ ότι οτιδήποτε και να είναι αυτό είναι το βέλτιστο μέσο για να προκληθεί το ενδιαφέρον των παιδιών κατά τη διδασκαλία των στοιχειωδών μαθηματικών. Ένας καλός μαθηματικός γρίφος, ένα παράδοξο ή ένα μαγικό τέχνασμα μπορεί να διεγείρει τη φαντασία των παιδιών καλύτερα από μια πρακτική εφαρμογή των μαθηματικών (ειδικά αν αυτή η εφαρμογή είναι έξω από τις εμπειρίες των παιδιών) και εάν το 'παιχνίδι' επιλεγεί προσεκτικά μπορεί να οδηγήσει σχεδόν χωρίς νοητική προσπάθεια στην κατανόηση σημαντικών μαθηματικών ιδεών*» (σ. χί).

Ένα τελευταίο, αλλά όχι τελικό, σχόλιο

Ο Bishop (1988) έχει διατυπώσει και αναλύσει την άποψη, ότι η μάθηση και αντίστοιχα η διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο μπορεί να ιδωθεί ως μια διαδικασία εισαγωγής στον μαθηματικό πολιτισμό, η οποία στοχεύει στη μύηση των παιδιών στις έννοιες, στα σύμβολα και στις αξίες των μαθηματικών, θεωρούμενων ως συστατικό στοιχείο των ανθρώπινων πολιτισμών.

Το παιχνίδι αποτελεί ένα εξίσου σημαντικό στοιχείο όλων των πολιτισμών, αιτία και παράγωγο πολλών ανθρώπινων δραστηριοτήτων. Το παιχνίδι, κυρίαρχη δραστηριότητα όλων των παιδιών, όλου του κόσμου και όλων των ιστορικών εποχών, αποτελεί ένα σημαντικό πλαίσιο, αλλά και έναν φορέα μάθησης και πολιτισμικής μεταβίβασης.

Η ταύτιση της μαθηματικής δραστηριότητας με τη δραστηριότητα του παιχνιδιού και μέσα από την ταύτιση αυτή η εισαγωγή των παιδιών στον μαθηματικό πολιτισμό μοιάζει σχεδόν αυτονόητη. Η ανάπτυξη ενός αντίστοιχου πλαισίου μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών, αρχικά στο νηπιαγωγείο και στο δημοτικό σχολείο, είναι ζήτημα υποστήριξης των αυτονόητων στο συγκεκριμένο, όπως και σε πολλά άλλα ζητήματα της σχολικής εκπαίδευσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Abt, Clark (1970), *Serious games*, New York, Viking Press.

Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht: Kluwer

Bright, G.W., Harvey, J.G. & Montague Wheeler, M. (1985), *Learning and Mathematics Games*, *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, vol. 1, 1-189.

Caillois, R. (1961), *Man, play, and games*. The Free Press, Glencoe, New York.

- Engeström, Y. (1987). *Learning by expanding: An activity-theoretical approach to developmental research*. Helsinki: Orienta-Konsultit.
- Gardner, M. (1990), *Mathematical Circus*, Penguin Books, London.
- Ginsburg, H. P. (2006). Mathematical play and playful mathematics: A guide for early education. In R. M. Golinkoff, K Hirsh-Pasek, & D. Singer (Eds.), *Play=learning*, New York: Oxford University Press. 145-165.
- Holton D., Ahmed,A., Williams, H. & Hill, C. (2001): On the importance of mathematical play, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32 (3), 401-415
- Huizinga, J. (1955/1938). *Homo ludens; a study of the play-element in culture*. trans. by R.F.C. Hull, Boston: Beacon Press.
- Ελληνική έκδοση: Χοιζίνγκα, Γ., (1989) *Ο άνθρωπος και το παιχνίδι (Homo ludens)*, (μτφ. Ροζάνης Σ., Λυκιαρδόπουλος Γ.) Γνώση, Αθήνα.
- Juul J. (2002), The Open and the Closed: Game of emergence and games of progression". Στο Frans Mäyrä (Ed.) *Computer Games and Digital Cultures Conference Proceedings*, Tampere: Tampere University Press, 323-329.
- McLane, J. B. (2003). "Does not." "Does too." Thinking about play in the early childhood classroom. Herr Research Center, Erikson Institute Occasional Paper, 4, 2-15. <http://www.erikson.edu/downloads/cmsFile.ashx?VersionID=1301&PropertyID=78> [ανακτήθηκε 1/2/12]
- Moyles, J. (Ed.) (1994) *The Excellence of Play*. Buckingham: Open University Press.
- Piaget, J., & Inhelder, B. *Mental imagery in the child*. New York: Basic, 1971
- Piaget, J. & Inhelder, B. (1990/1950), *Η ψυχολογία του παιδιού*, Μτφ. Κ. Κίτσος, Αθήνα: Δαίδαλος Ι. Ζαχαρόπουλος.

- Popper, K. R. (1972) *Objective Knowledge, An Evolutionary Approach* Oxford, Clarendon Press, London.
- Salen, K. & Zimmerman E. (2003), *Rules of Play - Game Design Fundamentals*. MIT Press, Cambridge,
- Van Oers, B. (1996). Are you sure? Stimulating mathematical thinking during young children's play, *European Early Childhood Education Research Journal*, 4(1), 71-87.
- Vygotsky L.S., (1997) *Νους στην κοινωνία*, (μτφ. Μπίμπου Α. & Βοονιάδου Σ.), Αθήνα: Gutenberg.
- Vygotsky, L. (1967). Play and its role in the mental development of the child. *Soviet Psychology*, 5(3), 6-18.
- Wood, E. (2008) Conceptualising a pedagogy of play: International perspectives from theory, policy and practice. Στο D. Kurschner (Ed.) *From children to red hatters: Diverse images and issues of play*, Play and Culture Studies, vol. 8, Lanham, MD: University Press of America, 166-189.

Δημήτρης Χασάπης
dchasapis@ecd.uoa.gr

ΕΝΟΤΗΤΑ II

**Το Παιχνίδι στη Μάθηση και στη Διδασκαλία των
Μαθηματικών: Ερευνητικά Ευρήματα & Διδακτικά
Εγχειρίσματα**

[λευκή σελίδα]

ΑΠΟ ΤΑ ΟΜΑΔΙΚΑ ΠΑΙΧΝΙΔΙΑ ΣΤΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ: «ΤΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΤΟΥ ΡΟΛΟΓΑ»

Ολυμπία Γκριμπίζη

*Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση
Μεταπτυχιακό Δίπλωμα
ΑΠΘ/ΠΤΔΕ στη Διδακτική των
Μαθηματικών*

Ελένη Σπανοπούλου

*Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση
Μεταπτυχιακό Δίπλωμα
ΑΠΘ/ΠΤΔΕ στη Διδακτική των
Μαθηματικών*

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα παιχνίδια αποτελούν ένα σημαντικό πεδίο μέσα από το οποίο τα παιδιά έρχονται σε επαφή με μαθηματικές έννοιες. Οι μαθηματικές έννοιες που σχηματίζονται μέσα στο πλαίσιο του παιχνιδιού μπορούν να αποτελέσουν τη βάση πάνω στην οποία θα οικοδομηθούν οι σχολικές μαθηματικές γνώσεις. Ο Vygotsky (1997) θεωρεί το παιχνίδι αναγκαία συνθήκη για την ανάπτυξη του παιδιού και περιγράφει το παιχνίδι ως μια Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης όπου τα παιδιά κινητοποιούνται στην μάθηση με την βοήθεια και την εμπειρία των ενηλίκων.

Οι κοινωνικές αλληλεπιδράσεις που αναπτύσσονται στο πλαίσιο του παιχνιδιού δίνουν τη δυνατότητα στα παιδιά να ανακαλύπτουν καινούργια πράγματα, να τολμούν, να δοκιμάζουν, να γνωρίζουν τον εαυτό τους και τους άλλους και να χρησιμοποιούν διάφορους τρόπους για την επίλυση καταστάσεων (Bennett, Wood & Rogers, 1997)

Στην συγκεκριμένη εργασία μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε τις μαθηματικές έννοιες που συναντούμε στα Ομαδικά Παιχνίδια των παιδιών σε ελεύθερο και δομημένο περιβάλλον.

Για το σκοπό αυτό θα παρατηρήσουμε τα παιδιά σε ομαδικά παιχνίδια που εμπεριέχουν μαθηματικές έννοιες και παίζονται στην αυλή του σχολείου αβίαστα και φυσικά. Στη συνέχεια θα οργανώσουμε τα ίδια Ομαδικά Παιχνίδια με καθοδηγημένο τρόπο με στόχο να αναδείξουμε και να επεξεργαστούμε τις μαθηματικές έννοιες που αναδύονται στη διάρκεια του παιχνιδιού.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι ιδεολογικές, φιλοσοφικές και εκπαιδευτικές αρχές για τη σχέση του παιχνιδιού με την ανάπτυξη και την μάθηση έχει τις αναφορές της στην δουλειά της Montessori, του Froebel κλπ. και άλλων πρωτοπόρων εκπαιδευτικών των οποίων η δουλειά έχει επηρεάσει με τη μορφή «εθιμικού δικαίου» ένα πλαίσιο γενικών αρχών για την παιδική ηλικία, το παιδί και την εκπαίδευσή του στην προσχολική κυρίως ηλικία.

Όπως επισημαίνει ο Hughes (1991) πολλοί ερευνητές ανέδειξαν με το έργο τους διάφορες πτυχές του παιχνιδιού, όμως καμία θεωρία δεν υπήρξε ποτέ σε θέση να εξηγήσει πλήρως την σημασία του παιχνιδιού στην ανάπτυξη του παιδιού και οι παιδαγωγικές εφαρμογές σπάνια διερευνήθηκαν σε βάθος.

Ο Atkin (1991) παρατήρησε πως υπάρχει μια γενική δυσπιστία για το παιχνίδι. Αν τα παιδιά παίζουν δεν εργάζονται. Το παιχνίδι είναι για αναψυχή και διασκέδαση, ενώ η εργασία είναι μια σοβαρή εργασία για τη ζωή. Το παιχνίδι συχνά θεωρείται ως μια διαδικασία που πράγει τη μάθηση, αλλά δεν οδηγεί κατ'ανάγκη σε απτά αποτελέσματα. Στο εκπαιδευτικό κλίμα που επικρατεί το παιχνίδι μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο κριτικής καθώς οι εκπαιδευτικοί πρέπει να παρέχουν αποδείξεις για την μάθηση.

Διαφορετικές θεωρίες έχουν διαφορετικές εφαρμογές στην τάξη. Η θεωρία του Piaget (2000) για τη μάθηση αποτέλεσε για χρόνια την κυρίαρχη άποψη και διαμόρφωσε την σχολική πρακτική. Ισχυρίστηκε ότι το παιχνίδι διευκολύνει την μάθηση ενθαρρύνοντας το παιδί μέσω της πρακτικής, της δοκιμής και της επανάληψης να αφομοιώσει την νέα γνώση και κατ'αυτό τον τρόπο να αλλάξει ή να αναδομήσει τις ήδη υπάρχουσες γνωστικές του δομές. Η κατασκευαστική θεωρία του στηρίζεται στην ενεργό μάθηση, στην προσωπική εμπειρία και στα εσωτερικά κίνητρα του παιδιού ως στοιχεία της γνωστικής ανάπτυξης, στοιχεία τα οποία ενυπάρχουν και στα παιχνίδια των παιδιών. Ο ισχυρισμός του ότι η ανάπτυξη του παιδιού περνάει από αναπτυξιακά στάδια συνεπάγεται και τον ενεργό ρόλο του εκπαιδευτικού, ο οποίος πρέπει να «παρατηρεί και να περιμένει» προκειμένου να βοηθήσει το παιδί μέσω της δράσης να κατασκευάσει την νέα γνώση.

Στην πράξη αυτή η άποψη οδήγησε σε αναλυτικά προγράμματα τα οποία στηρίζονται σε μεγάλο βαθμό στην αυτενέργεια η οποία ταιριάζει με την φιλελεύθερη, παιδο-κεντρική ιδεολογικά άποψη που αντλεί από την εργασία προηγούμενων πρωτοπόρων εκπαιδευτικών.

Οι Meadows και Cashdan (1998) εξετάζοντας κριτικά το έργο του Piaget υποστήριξαν πώς το παιχνίδι από μόνο του δεν συνιστά ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ανάπτυξη γνωστικών διεργασιών. Βρήκαν πως τα παιδιά όταν παίζουν είναι ευχαριστημένα και απασχολημένα αλλά τρία πράγματα σπανίζουν: ουσιαστική συζήτηση και παιχνίδι με έναν ενήλικα, παιχνίδι υψηλής πολυπλοκότητας και ζωντανή, σκόπιμη συμμετοχή που οδηγεί σε δημιουργική και συναρπαστική ανακάλυψη. Για παραδειγμα τα παιχνίδια των παιδιών στην άμμο ή στο νερό είναι αρκετά στερεότυπα και έχουν μικρή ή καθόλου αλληλεπίδραση με άλλα παιδιά ή με τους ενήλικες.

Σε αντίθεση, η κοινωνιοπολιτισμική θεωρία του Vygotsky (1997) και του Bruner (1997) τονίζουν την αλληλεπίδραση ως ένα σημαντικό μέρος της μαθησιακής διαδικασίας. Ο Vygotsky (1993) θεωρεί το παιχνίδι ως βασική πηγή ανάπτυξης στην προσχολική ηλικία, αλλά δεν αναφέρεται στην δραστηριότητα. Ισχυρίζεται πώς οι κοινωνικές αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα παιδιά και τους ενήλικες βοηθά τα παιδιά να κατασκευάσουν νόημα μέσα από πολιτισμικά μοιρασμένα πλαίσια. Είναι συγκεκριμένα τα μέσα που χρησιμοποιούνται στα πλαίσια των κοινωνικών αλληλεπιδράσεων, ιδιαίτερα η γλώσσα, που οδηγούν στην μάθηση και την ανάπτυξη. Σ' αυτή τη διαδικασία, τα παιδιά αποκτούν γνώσεις, πληροφορίες και εργαλεία για τη σκέψη και τη μάθηση. Ο Vygotsky (1993) θεωρεί ότι η γνώση επισυμβαίνει σε μια *Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης*. Αυτή αναπαριστά τη διαφορά ανάμεσα στο πραγματικό και το εν δυνάμει αναπτυξιακό επίπεδο- αυτό που το παιδί μπορεί να κάνει χωρίς βοήθεια, και αυτό που μπορεί να μάθει να κάνει με τη βοήθεια ενός ενήλικα ή κάποιου άλλου παιδιού. Το παιχνίδι δημιουργεί μια *Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης*, επειδή δημιουργεί κίνητρα στα παιδιά για να μάθουν και έτσι μπορεί να καταστεί δυνατόν να προχωρήσουν πέρα από το σημερινό επίπεδο ανάπτυξης τους, ιδιαίτερα αν έχει την υποστήριξη από κάποιον με περισσότερα προσόντα ή γνώσεις.

Οι κοινωνικές αλληλεπιδράσεις, η φαντασία και οι συμβολικοί μετασχηματισμοί που συμβαίνουν κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού μπορεί να ειδωθούν ως μια σύνθετη γνωσιακή διαδικασία, η οποία, όπως ισχυρίζεται ο Vygotsky (1993), μπορεί να οδηγήσει σε υψηλότερα γνωσιακά επίπεδα.

Μελετώντας την έννοια και τις διαστάσεις μιας δραστηριότητας, ο συνεχιστής και συγχρόνως μελετητής του έργου του Vygotsky, Leont'ev (1978, 1981), έδωσε ιδιαίτερη έμφαση στη *συστημική υποστήριξη των μαθητών, τα κίνητρα και τα διαμεσολαβητικά πολιτισμικά εργαλεία*. Θέτοντας στο επίκεντρο την ιδέα της δραστηριότητας (activity theory) η οποία αντιμετωπίζεται σαν ένα σύστημα όπου το υποκείμενο «ενεργεί» πάνω σε ένα αντικείμενο με κάποιο επιθυμητό στόχο, επικέντρωσε την προσοχή του σε ένα τρισδιάστατο μοντέλο (Leont'ev, 1978). Σ' αυτό το μοντέλο, η ανθρώπινη δραστηριότητα υποκινείται πάντα από ένα *κίνητρο*. Βασικά συστατικά της δραστηριότητας είναι οι *ενέργειες* που μεταφράζουν το κίνητρο της δραστηριότητας στην πραγματική του διάσταση και κάθε ενέργεια υπάγεται σε έναν *συνειδητό στόχο*. Οι *διαδικασίες* είναι τα μέσα με τα οποία μια δράση πραγματοποιείται και συνδέονται με τις συνθήκες κάτω από τις οποίες πραγματοποιούνται οι ενέργειες. Τα "*εργαλεία*" αποκτούν το ρόλο ενός "*διαμεσολαβητικού μέσου*" του οποίου η χρήση μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές στην επίτευξη του στόχου, που στην περίπτωση της εκπαιδευτικής διαδικασίας είναι η μάθηση. Η ενέργεια του υποκειμένου πάνω στο αντικείμενο υλοποιείται χρησιμοποιώντας "*εργαλεία*" που μπορεί να έχουν την υπόσταση πραγματικών αντικειμένων (χάρακες, μολύβια, γραμμές, κλπ) ή κοινωνικά διαμορφωμένων εργαλείων, όπως η *γλώσσα*. Έτσι το υποκείμενο, δρώντας με τη βοήθεια ειδικά διαμορφωμένων συμβολικών συστημάτων επιτυγχάνει το πέρασμα από το γενικό και αφηρημένο στην ανάπτυξη νέων μαθηματικών εννοιών.

Ο Bruner (1997) πιστεύει ότι το παιχνίδι αποτελεί ένα όχημα για την κοινωνικοποίηση του παιδιού, συμπεριλαμβανομένης της διδασκαλίας για τη φύση των κανόνων και των συμβάσεων της κοινωνίας. Μέσα από το παιχνίδι τα παιδιά μαθαίνουν για τους ρόλους, τους κανόνες, τις σχέσεις, τους κώδικες συμπεριφοράς και

των συνεπειών των πράξεών τους στους άλλους. Το πλαίσιο του παιχνιδιού δημιουργεί ευκαιρίες στα παιδιά να θέσουν του δικούς τους κανόνες να υποδυθούν ρόλους και να καθορίσουν την επιτυχία του παιχνιδιού. Οι κοινωνικές αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στους ενήλικες και στα παιδιά δημιουργούν μια «σκαλωσιά» που διαμεσολαβεί στη μάθηση. Αυτό σημαίνει πως η μάθηση είναι ταυτόχρονα ανακαλυπτική αλλά και υποβοηθούμενη από τις δεξιότητες των άλλων που εμπλέκονται ενεργά και συνεισφέρουν κομίζοντας και τις δικές τους γνώσεις κατά τη διαδικασία της επικοινωνίας.

Οι κονστρουκτιβιστικές θεωρίες βασίζονται σε ένα σύνθετο μοντέλο για τη διδασκαλία και τη μάθηση που αξιοποιεί τόσο τα εσωτερικά κίνητρα του παιδιού όσο και τις δραστηριότητες που σχεδιάζονται από το δάσκαλο. Αυτές οι θεωρίες συνεπάγονται τον ενεργό ρόλο του δασκάλου που αφορά στη δημιουργία περιβάλλοντος μάθησης με πολλά κίνητρα και στην βοήθεια που είναι αναγκαίο να παρέχει τη σωστή στιγμή ακόμη και σε δραστηριότητες παιχνιδιού.

Έρευνες έχουν δείξει ότι οι μαθητές είναι πιθανόν να εμπλακούν πιο ενεργά στην μάθηση των μαθηματικών όταν παίζουν παιχνίδια και κάνουν πρότζεκτ παρά όταν μαθαίνουν σε μια παραδοσιακή τάξη. Οι εκπαιδευτικοί έχουν ερευνήσει τα αποτελέσματα των παιχνιδιών έναντι της παραδοσιακής διδασκαλίας των μαθηματικών εδώ και πολλά χρόνια.

ΣΤΟΧΟΙ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Να διερευνήσουμε ποιες μαθηματικές έννοιες εμπλέκονται στο παιχνίδι (απαρίθμηση, μέτρηση, μέτρηση χρόνου, κλάσματα, έννοιες χώρου)

Πώς από το ελεύθερο παιχνίδι θα περάσουμε στο οργανωμένο και καθοδηγημένο για να συγκροτήσουμε τις μαθηματικές έννοιες

Σε ποιο βαθμό η αλληλεπίδραση διευκολύνει την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Πώς και πόσο το παιχνίδι συνεισφέρει στην μαθηματική σκέψη.

Με ποιο τρόπο και σε τι βαθμό τα παιδιά συνδέουν και αναγνωρίζουν μέσα στο παιχνίδι μαθηματικές έννοιες. Πώς μεταβαίνουν από τις αυθόρμητες έννοιες στις μαθηματικές.

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Για την κατανόηση και τη διδασκαλία της έννοιας του χρόνου επιλέξαμε να παίξουμε με τα παιδιά το παραδοσιακό παιχνίδι του «ρολογά». Θεωρήσαμε ότι μέσα από το παιχνίδι αυτό τα παιδιά βιώνοντας κιναισθητικά την έννοια του χρόνου αντιλαμβάνονται καλύτερα τη ροή του και μεταβαίνουν ευκολότερα από την γραμμικότητα στην κυκλικότητα του.

Το παιχνίδι πραγματοποιήθηκε σε δύο τμήματα, ένα της Γ' (Τρίτης) και ένα της Δ' (Τετάρτης) Τάξης Δημοτικού στην διάρκεια του μαθήματος της Φυσικής Αγωγής και στην Τάξη στην ώρα των μαθηματικών.

Η διδασκαλία της έννοιας του χρόνου προβλέπεται στην διδακτική ύλη των μαθηματικών της Γ'τάξης. Στο βιβλίο των μαθηματικών της Γ'Τάξης, υπάρχουν δραστηριότητες στο βιβλίο του μαθητή στις ενότητες "Εισαγωγή στα κλάσματα με το ρολόι και τη μέτρηση του χρόνου" (Ενότητα 4 σελ. 58-66 και Ενότητα 8 σελ. 118-119) και στα τετράδια εργασιών τεύχος β'σελ. 25-33 και τεύχος δ'σελ 16-17.

Επιλέξαμε, να εφαρμόσουμε την δραστηριότητα σε δυο Τάξεις για να έχουμε συγκριτικά αποτελέσματα σε σχέση με την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

Για τις ανάγκες του παιχνιδιού αξιοποιήθηκαν οι γραμμές και ο κύκλος στο γήπεδο της αυλής, κατασκευάστηκε ένα χάρτινο ρολόι, για τη συνέχιση της δραστηριότητας στην Τάξη και δόθηκε ένα φύλλο εργασίας για την αξιολόγηση της.

Όλο το υλικό που συγκεντρώθηκε μαζί με τις σημειώσεις των ερευνητριών αξιοποιήθηκε στην επεξεργασία και ανάλυση των δεδομένων.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΑΙΧΝΙΔΙΟΥ.

Η ομάδα των παιδιών βγάζει ένα παιδί που θα κάνει τον “ρολογά”. Ο “ρολογάς” στέκεται σε ένα σημείο και όλα τα άλλα παιδιά στέκονται σε απόσταση 4-5 μέτρα από αυτόν.

Τότε, κάθε παιδί με τη σειρά του, ρωτά:

- Ρολογά, ρολογά, τι ώρα είναι;

Ο ρολογάς του απαντάει ό,τι θέλει, πχ.:

- Δυο μεγάλα βήματα μπροστά, ή πέντε μικρά βήματα πίσω κ.ο.κ

Έτσι κάθε παιδί κινείται, πλησιάζει ή απομακρύνεται από το ρολογά, ανάλογα με τις εντολές του. Οι ερωτήσεις επαναλαμβάνονται κανονικά σε κάθε παιδί με τη σειρά του, μέχρις ότου κάποιο παιδί φτάσει το ρολογά. Τότε, μπαίνει αυτό ρολογάς και το παιχνίδι ξαναρχίζει (Δαράκη, 1980).

ΒΗΜΑΤΑ- ΚΑΝΟΝΕΣ ΤΟΥ ΠΑΙΧΝΙΔΙΟΥ

Αφού παίξαμε το παιχνίδι στη γραμμή, στη συνέχεια πήγαμε στον κύκλο που ήταν το ρολόι. Αναπαραστήσαμε το παιχνίδι στον κύκλο για να βιώσουν τα παιδιά ότι ο χρόνος είναι ένας κύκλος

- α) Χωρίσαμε τον κύκλο σε 4 ίσα μέρη και ζητήσαμε από τα παιδιά:

Να αντιστοιχίζουν τα μεγάλα βήματα με τέταρτα (2/4 μισή ώρα, 4/4 μια ώρα).

1 μεγάλο βήμα = 1/4

2 μεγάλα βήματα = 2/4

3 μεγάλα βήματα = 3/4

4 μεγάλα βήματα = 4/4

Και τα μικρά βήματα με 5'λ

- β) Έχοντας στο οπτικό μας πεδίο το ρολόι, το κάθε παιδί είχε να υπολογίσει με βάση τα βήματα που έκανε πόση ώρα πέρασε.

γ) Ο ρολογάς έλεγε στον κάθε παίκτη, ξεκινώντας από το 12, να βρει πού είναι η ώρα: 12:30/ 12:40/ 12:50 κλπ πηδώντας βηματάκια

«μικρά» που καθένα αντιστοιχούσε, όπως είχαμε συμφωνήσει, σε πέντε λεπτά.

Σκόπιμα επιλέξαμε να αρχίσουμε από την 12η ώρα, για να σηματοδοτήσει την αφετηρία της μέτρησης.

δ) Προσθέτοντας ένα βαθμό δυσκολίας ακόμη, γράψαμε το «και» στο μισό κύκλο και το «παρά» στον άλλο μισό. Επιλέγοντας, τυχαία ώρες πχ 2:50 τα παιδιά, έπρεπε ξεκινώντας από το δώδεκα, να πηγαίνουν βήματα μπροστά μέχρι να βρουν που είναι δύο και πενήντα. Αν έπεφταν στο μέρος του κύκλου που έγραφε παρά, έπρεπε ξεκινώντας πάλι από το δώδεκα να κάνουν βήματα προς τα πίσω. Για να γίνει όμως αυτό «έφευγε η ώρα» και το ρολόι πήγαινε στην επόμενη ώρα, δηλαδή, τρεις παρά δέκα. Οπότε, ταύτιζαν το 2:50' με το 3 παρά δέκα.

ε) Μέσα στην Τάξη τα παιδιά σε ομάδες συνέχισαν το παιχνίδι κατασκευάζοντας χάρτινα ρολόγια και αντικαθιστώντας τα “βήματα” με τους δείκτες του ρολογιού.

στ) Η δραστηριότητα ολοκληρώθηκε με την συμπλήρωση ενός φύλλου εργασίας που δόθηκε στα παιδιά (βλ. Παράρτημα).

ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΑΙΧΝΙΔΙΟΥ.

- Μεγαλύτερη εμπλοκή των μαθητών (περισσότερο ενεργητικοί, ενθουσιώδεις, δεν είναι καθηλωμένοι στις θέσεις, μαθαίνουν πράττοντας, μιλώντας και παίζοντας)
- Συνεργατική μάθηση

Με τη επικοινωνία τους δίνεται η ευκαιρία να δώσουν νόημα στις πράξεις τους και να φτάσουν σε βαθύτερη κατανόηση των εννοιών.

Προάγονται οι κοινωνικές σχέσεις μεταξύ των μαθητών, αναπτύσσεται θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά. Μαθητές που έχουν άγχος μπορούν να μοιραστούν τις ιδέες τους με όλη την τάξη και συχνά αισθάνονται πιο άνετα όταν εκτίθενται σε μικρότερη ομάδα.

- Αύξηση των επιδόσεων

Ερευνητικά δεδομένα υποδηλώνουν ότι οι μαθητές χρειάζονται ευκαιρίες και για ανακάλυψη και για εξάσκηση. Τα δεδομένα από αρκετές ερευνητικές μελέτες δείχνουν ότι όταν οι μαθητές ανακαλύπτουν τις μαθηματικές ιδέες και διαδικασίες, αποκτούν μια ισχυρότερη εννοιολογική κατανόηση των συνδέσεων ανάμεσα στις μαθηματικές έννοιες.

- Υλοποίηση δυο βασικών αρχών του Freudenthal (1973) για τα μαθηματικά:

1. ότι προκειμένου να έχουν ανθρώπινη αξία πρέπει να συνδέονται με την πραγματικότητα, να είναι κοντά στις εμπειρίες των παιδιών και να σχετίζονται με καταστάσεις της καθημερινότητάς τους και
2. ότι είναι μια ανθρώπινη δραστηριότητα και άρα, μαθαίνονται μέσα από την πράξη. Όταν οι μαθητές βρίσκονται σε καταστάσεις να «κάνουν» μαθηματικά, δουλεύουν πάνω σε προβλήματα με προσωπικό νόημα γι' αυτούς, αναπτύσσουν μαθηματική σκέψη αναλογιζόμενοι, συζητώντας μεταξύ τους και επιχειρηματολογώντας, δομώντας δικά τους νοήματα για να εξηγήσουν ή να αποδείξουν τη λύση κάποιου προβλήματος

- Αλληλεπιδραστικό μοντέλο διδασκαλίας.

Ο εκπαιδευτικός σε όλη τη διάρκεια του μαθήματος αφιερώνει ένα αρκετά μεγάλο μέρος του χρόνου που διαθέτει στην αρχή για να κάνει σύνδεση με έννοιες οι οποίες διδάχθηκαν σε προηγούμενα μαθήματα και σχετίζονται με το νέο μαθηματικό αντικείμενο

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ.

Η επεξεργασία του υλικού μας γίνεται με βάση τους στόχους της εργασίας μας.

- *Το ελεύθερο παιχνίδι και οι μαθηματικές έννοιες*
- *Το οργανωμένο καθοδηγούμενο παιχνίδι και η συγκρότηση των μαθηματικών εννοιών*

- *Η μετάβαση από τις αυθόρμητες έννοιες στις μαθηματικές*
- *Η αλληλεπίδραση ως σημαντικός παράγοντας στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών*

Από τη διαδικασία της δραστηριότητας και την επεξεργασία των δεδομένων, διαπιστώνουμε αρχικά πόσο σημαντική είναι η σχέση του χώρου με τη μάθηση. Η αυλή συνδέεται με την κίνηση, το οργανωμένο ή ελεύθερο παιχνίδι, την ενεργητική συμμετοχή των παιδιών, την ομαδικότητα, την ευχαρίστηση. Τα παιδιά χρησιμοποιούν το σώμα τους ελεύθερα, χωρίς να είναι καθλωμένα σε μια θέση και ο στόχος της κίνησής τους είναι ορατός και άμεσος.

Το παιχνίδι αποτελεί ένα ισχυρό εσωτερικό κίνητρο για τα παιδιά και αυξάνει το ενδιαφέρον τους για τη συμμετοχή και την επίτευξη του σκοπού. Στο παιχνίδι του «ρολογά» στην αυλή, τα παιδιά συμμετείχαν ενεργά και με την κίνηση και το λόγο τους, μπορούσαν να κατανοήσουν ευκολότερα τις μαθηματικές έννοιες του χώρου και του χρόνου.

Στην πρώτη φάση έπρεπε να γίνουν ξεκάθαροι και κατανοητοί οι κανόνες και ο σκοπός του παιχνιδιού και να δημιουργηθούν οι συνθήκες για τη διεξαγωγή του. Τα παιδιά συμμετείχαν πρόθυμα και με ενδιαφέρον στη διαδικασία αυτή και ακολούθησαν πιστά τις οδηγίες και τους κανόνες.

Στη δεύτερη φάση το παιχνίδι οργανώθηκε με τέτοιο τρόπο ώστε να εξυπηρετηθούν οι διδακτικοί στόχοι για την εξοικείωση των μαθητών με την έννοια του χρόνου. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο ρόλος του εκπαιδευτικού ήταν σημαντικός στην οργάνωση και στη διεξαγωγή του παιχνιδιού. Προκειμένου να συνδυαστεί η ευχαρίστηση από το παιχνίδι με τη μάθηση, το ρόλο του «ρολογά» ανέλαβε αυτή τη φορά ο εκπαιδευτικός. Τα παιδιά τοποθετήθηκαν στη γραμμή και στη συνέχεια ένα-ένα έπρεπε να εκτελέσουν την οδηγία του «ρολογά». Ο εκπαιδευτικός αξιοποιώντας τις δυνατότητες που του έδινε ο ρόλος του στο παιχνίδι μπορούσε να δίνει εντολές ανάλογες με τις μαθηματικές έννοιες που ήθελε να προσεγγίσει.

Για παράδειγμα, τα μικρά βήματα αντιστοιχούσαν στα 5' λεπτά, και τα μεγάλα βήματα σε τέταρτα. Με αυτό τον τρόπο τα παιδιά μπορούσαν να γνωρίσουν βιωματικά το πέρασμα του χρόνου, αλλά και τη διαφορά του χρονικού διαστήματος. Παράλληλα έκαναν αντιστοιχίσεις με κλασματικούς αριθμούς και αριθμητικές πράξεις. Τα 2/4 αντιστοιχούσαν σε μισή ώρα ή τα τρία 5/λεπτα σε 15 λεπτά ή ένα τέταρτο.

Η τοποθέτηση των παιδιών στη γραμμή διευκόλυνε την εξοικείωση τους με το χώρο (μπροστά-πίσω) και τη σύνδεση με το χρόνο (και-παρά) που έγινε πιο κατανοητό όταν το παιχνίδι παίχτηκε και σε κύκλο. Σε όλη αυτή τη διαδικασία τα παιδιά ανταποκρίνονταν με ενθουσιασμό και θετική διάθεση προσέχοντας ν' αποφεύγουν λανθασμένες κινήσεις.

Ένα ακόμη σημαντικό στοιχείο ήταν ότι τα παιδιά υπολόγιζαν όχι μόνο πόσος χρόνος αντιστοιχούσε στα δικά τους βήματα, αλλά και στα βήματα των άλλων προκειμένου να φτάσουν πιο γρήγορα στο τέρμα και να πάρουν τη θέση του “ρολογά”. Μ'αυτόν τον τρόπο εξασκούσαν στον υπολογισμό, αλλά ταυτόχρονα λειτουργούσαν υποστηρικτικά σε παιδιά που δεν τα κατάφερναν. Επίσης, έμπαινε το στοιχείο της επίτευξης του σκοπού που ήταν σημαντικό κίνητρο για να κρατάει ζωντανό το ενδιαφέρον των παιδιών.

Η μεταφορά από τη γραμμή στον κύκλο ανέδειξε πολλές από τις δυσκολίες που έχει η εκμάθηση της ώρας και η κατανόηση της έννοιας του χρόνου. Στον κύκλο το κάθε παιδί έβρισκε πόση ώρα πέρασε σύμφωνα με τα βήματά του και γύριζε γύρω-γύρω σαν να ήταν λεπτοδείκτης. Τρία μεγάλα βήματα - 45' λεπτά ή $\frac{3}{4}$ του κύκλου. Δέκα μικρά βήματα - 50' λεπτά. Αυτή η σωματική κίνηση τα βοηθούσε να κατανοήσουν το πέρασμα του χρόνου για να μπορέσουν πιο ομαλά να περάσουν στην αλλαγή της ώρας.

Στη συνέχεια, μπήκε στον κύκλο το “και” και το “παρά”. Με τις οδηγίες του εκπαιδευτικού η αφετηρία ήταν η 12η ώρα του κύκλου. Κάθε παιδί έπρεπε να κινηθεί πάνω στον κύκλο, όσα λεπτά του έλεγε ο “ρολογάς”, τώρα όμως με έναν επιπλέον βαθμό δυσκολίας. Αν τύχαινε στην πλευρά του κύκλου που ήταν το “παρά”, έπρεπε να βρει την ώρα με δυο τρόπους, πηδώντας και προς τα μπρος και προς τα πίσω.

Για παράδειγμα, αν είχε να υπολογίσει 9 (εννέα) μικρά βήματα, που αντιστοιχούσαν σε 5'λεπτά το καθένα, πηδώντας έφτανε στις 12:45' και έλεγε “δώδεκα και σαράντα πέντε”. Επειδή, όμως, βρισκόταν στην πλευρά του “παρά” με αφετηρία το 12 πηδούσε προς τα πίσω, μέχρι να φτάσει στο ίδιο σημείο, δηλαδή το 12:45'. Έτσι, οδηγούνταν στην αλλαγή της ώρας και μάθαινε ότι η ώρα μπορεί να ειπωθεί με δυο τρόπους, και “μία παρά τέταρτο” και “δώδεκα και σαράντα πέντε”.

Είναι χαρακτηριστική η έκπληξη ενός παιδιού, το οποίο όταν υπολόγισε το χρόνο που αντιστοιχούσαν τα βήματα στον κύκλο και με τους δυο τρόπους είπε:

-Κυρία φωτίστηκα, δεν μπορούσα να καταλάβω πού το έβρισκαν και έλεγαν “τρεις παρά είκοσι” και “δύο και σαράντα”.

Ωστόσο, η αλλαγή της ώρας, ήταν το πιο δύσκολο σημείο στον υπολογισμό του χρόνου, γεγονός που καταγράφηκε και στα φύλλα εργασίας.

Μπορούμε να σταθούμε σε τρία σημεία του παιχνιδιού που ήταν καθοριστικά για τη *μετάβαση* και *εξέλιξη* των εννοιών από αυθόρμητες σε επιστημονικές (Vygotsky, 1993).

- 1) Η μετακίνηση μπρος-πίσω στη γραμμή σύμφωνα με τα βήματα που υποδείκνυε ο “ρολογάς”. Εκεί τα παιδιά είχαν να υπολογίζουν το δικό τους χρόνο σύμφωνα με τα βήματα, αλλά και να βρίσκουν τη διαφορά τους από το χρόνο των άλλων παιδιών για να πλησιάσουν στον “ρολογά” και να προχωρήσει το παιχνίδι. Το σημείο αυτό ήταν καθοριστικό, διότι τα παιδιά έμπαιναν στη λογική της ροής του χρόνου και του υπολογισμού του. Από την άλλη τα πίσω βήματα ήταν η “σκαλωσιά” για την κατανόηση του “παρά” στην επόμενη φάση του παιχνιδιού.
- 2) Ο χωρισμός του κύκλου σε “και” / “παρά” και ο κανόνας που υποχρέωνε όποιο παιδί περνούσε στην πλευρά του “παρά” να κάνει και βήματα από το 12 προς τα πίσω. Στο σημείο αυτό τα παιδιά έπρεπε να κατανοήσουν την αλλαγή της ώρας.
- 3) Η μετατροπή των βιωματικών δράσεων σε συμβολικές πράξεις. Στο τελευταίο στάδιο τα παιδιά είχαν να περάσουν από το παιχνίδι

στην καθαρά μαθηματική διάσταση του χρόνου. Έπρεπε να χειριστούν το χρόνο ως έννοια πλέον, με συμβολικά εργαλεία, εικονικούς ωρολοδείκτες και λεπτοδείκτες, μαθηματικές ασκήσεις με κλάσματα κλπ.

Σε όλη αυτή τη διαδρομή ο ρόλος του εκπαιδευτικού ήταν καθοριστικός. Η συμμετοχή του στο παιχνίδι μέσα από διάφορους ρόλους (του συμπαίκτη, του παρατηρητή, του βοηθού) του έδινε τη δυνατότητα να αξιοποιεί τις ευκαιρίες που προέκυπταν και να παρεμβαίνει σε καθοριστικές στιγμές, δίνοντας κίνητρα και ταυτόχρονα υποστηρίζοντας τα παιδιά στις γνωστικές δυσκολίες που συναντούσαν. Με αυτό τον τρόπο δημιουργούσε μια *Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης* που σύμφωνα με τον Vygotsky, (1993) βοηθά τα παιδιά να προχωρήσουν στους απαραίτητους γνωστικούς μετασχηματισμούς και να κατακτήσουν υψηλότερα γνωστικά επίπεδα.

Ένα αξιοσημείωτο πλεονέκτημα του παιχνιδιού ήταν πώς η δραστηριότητα είχε χαρακτηριστικά συνεργατικής μάθησης. Σε όλη τη διάρκεια του παιχνιδιού τα παιδιά επικοινωνούσαν, αντάλλασαν απόψεις, άκουγαν και βοηθούσαν το ένα το άλλο, λειτουργούσαν ομαδικά στα πλαίσια ενός κοινού στόχου. Το γεγονός ότι το παιχνίδι δεν είχε έντονα ανταγωνιστικό χαρακτήρα και διακριτά ηγετικούς ρόλους βοήθησε παιδιά πιο διστακτικά να αισθάνονται άνετα και ισότιμα μέσα στην ομάδα. Καθώς, το παιχνίδι συνδύαζε την προσωπική συμβολή με το ομαδικό πνεύμα, δεν χανόταν το στοιχείο της υπευθυνότητας.

Τα χάρτινα ρολόγια αποτέλεσαν ένα καλό συνδετικό κρίκο ανάμεσα στην αυλή και την τάξη, ανάμεσα στο παιχνίδι και στο βιβλίο. Τα παιδιά μέσω των χάρτινων ρολογιών συνέχισαν το παιχνίδι μέσα στην τάξη και στη συνέχεια οδηγήθηκαν στις ασκήσεις των φύλλων εργασίας.

Από τα φύλλα εργασίας φάνηκε μια δυσκολία στη μετάβαση από το βιωματικό στο συμβολικό μέρος. Τα παιδιά στο καθοδηγούμενο παιχνίδι, φαινόταν να αντιλαμβάνονται την αλλαγή της ώρας και να κατανοούν τη χρήση των όρων “και”- “παρά”. Όμως, όταν κλήθηκαν να το αποτυπώσουν στα φύλλα εργασίας με λέξεις, αριθμητικά και εικονικά σύμβολα (δείκτες ρολογιού) δυσκολεύτηκαν και έκαναν

αρκετά λάθη. Η μεγαλύτερη δυσκολία καταγράφηκε στην περιοχή του “παρά” και στην αλλαγή της ώρας. Μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα :

Στην οδηγία “12 και $\frac{3}{4}$, γράψε πώς το λέμε και τοποθέτησε τους δείχτες στο ρολόι”, τα παιδιά απαντούσαν:

“12 παρά τέταρτο, 1(μία) και τρία τέταρτα, και τοποθετούσαν τους δείχτες στο 12 παρά τέταρτο”

Στην οδηγία “12 και $\frac{4}{4}$, γράψε πώς το λέμε και τοποθέτησε τους δείχτες στο ρολόι”, τα παιδιά απαντούσαν:

“12 και μία ώρα, 12 ακριβώς, 12 και 60 λεπτά και τοποθετούσαν τους δείχτες στο 12 ακριβώς”.

Διαφάνηκε ότι τα παιδιά βρίσκονταν σε μια γνωστική σύγκρουση, και χρειάζονταν την βοήθεια και την καθοδήγηση του δασκάλου για να συνδυάσουν τις μαθηματικές έννοιες που εμπλέκονταν στην έννοια του χωρο-χρόνου για να καταφέρουν να τις αποδώσουν με σύμβολα.

Η συνέχιση της δραστηριότητας με άλλες εργασίες και δράσεις θεωρείται αναγκαία για την μεγαλύτερη εξοικείωση των παιδιών με τις μαθηματικές έννοιες του χρόνου.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η παραπάνω δραστηριότητα κατέδειξε την μεγάλη συμβολή του παιχνιδιού στη διαδικασία της διδασκαλίας και της μάθησης. Τα παιδιά φαίνεται ότι έχουν την ανάγκη να παίξουν και μέσα από το παιχνίδι αναπτύσσουν δεξιότητες και κατακτούν με μεγαλύτερη ευκολία και ευχαρίστηση βασικές μαθηματικές έννοιες.

Διαπιστώθηκε ότι συμμετέχουν ενεργητικά και αναπτύσσουν διάφορες στρατηγικές, όταν η δραστηριότητα έχει νόημα για αυτά και συνδέεται με την επίτευξη ενός στόχου. Στο οργανωμένο και καθοδηγημένο παιχνίδι συνδυάζεται η ευχαρίστηση, η ευρηματικότητα με την επίλυση ενός προβλήματος και κατά συνέπεια με την κατάκτηση της γνώσης.

Τα παιδιά παίζουν και παίζοντας μαθαίνουν. Το παιχνίδι αποτελεί ισχυρό κίνητρο για να μάθουν τα παιδιά να συνεργάζονται, να υπακούουν σε οδηγίες, να βάζουν κανόνες και να τους τηρούν, να ασκούνται σε επικοινωνιακές δεξιότητες.

Ο χώρος που λαμβάνει χώρα μια δραστηριότητα αποτελεί βασικό στοιχείο στην εξέλιξή της και στην κινητοποίηση και συμμετοχή των παιδιών. Ο χώρος της αυλής επιτρέπει την κίνηση, την έκφραση των συναισθημάτων, τη δυνατή φωνή χωρίς να αφαιρεί στο οργανωμένο παιχνίδι τη δυναμική της διεξαγωγής του. Η ίδια δραστηριότητα μέσα στην τάξη πραγματοποιείται με διαφορετικούς τρόπους, καθώς οι κανόνες της τάξης επιβάλλουν άλλες πρακτικές. Τα θρανία, ο περιορισμένος χώρος, η ακουστική, τα μέσα, δημιουργούν διαφορετικό πλαίσιο που πολλές φορές είναι ανασταλτικός παράγοντας για την ένταξη του παιχνιδιού στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Οι διαπιστώσεις των δυσκολιών για τη μετάβαση από τις *αυθόρμητες έννοιες στις μαθηματικές, από το βίωμα στην συμβολική πράξη* καταδεικνύουν πόσο απαραίτητη είναι η σύνδεση των μαθηματικών με τη ζωή και τις καθημερινές πρακτικές των παιδιών. Αναδεικνύουν τη σημαντικότητα των εναλλαγών στις διδακτικές πρακτικές και την αξιοποίηση του παιχνιδιού ως μέσου για τη συγκρότηση της γνώσης.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Atkin, j. (1991). *Thinking about Play*. London :Hodder and Stoughton
- Bennett, N., Wood, E. , Rogers, S. (1997). *Teaching through play Teachers' thinking and classroom practice*. Buckingham Philadelphia:Open University Press.
- Bruner, J. (1997). *Πράξεις νοήματος*, μτφρ. Ήβη Ρόκου, Γιώργος Καλομοίρης, επιμέλεια Αλέξης Ζώτος, Ιωάννα Χατζηνικολή, Μανώλης Τσαγκαράκης. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
- Βυγκότσκι, Λ., (1993). *Σκέψη και γλώσσα*. Αθήνα:Γνώση

- Δαράκη, Π., (1980). *Ομαδικά Παιχνίδια των Παιδιών μας*. Αθήνα: Gutenberg
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics As an Educational Task*. Dordrecht - Holland: D. Reidel Publishing Company
- Huges, F.P. (1991). *Children, Play and Development*. Needham Heights, MA: Allyn and Bacon
- Leont'ev, A.N. (1978). *Activity, Consciousness, and Personality*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Leont'ev, A.N. (1981). *Problems of the Development of the Mind*. Moscow: Progress
- Meadows, S. and Cashdan, A. (1998). *Helping Children Learn: Contributions to a Cognitive Curriculum*. London: David Fulton
- Piaget, J. (2000). *Περί Παιδαγωγικής*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
- Vygotsky, L.S., (1997). *Νους στην κοινωνία: Η ανάπτυξη των Ανώτερων Ψυχολογικών Διαδικασιών*, μτφ Α. Μπίμπου και Σ. Βοσνιάδου. Αθήνα: Gutenberg

ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΤΩΡΑ ΠΡΟΣΠΑΘΗΣΕ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΕΙΣ:



Μια (1) ώρα έχει 60' λεπτά.

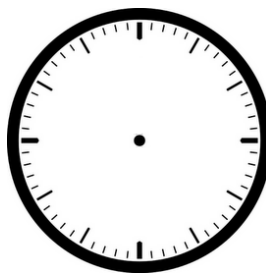
Πόσο είναι:

- Το $\frac{1}{4}$ της ώρας είναι 15' λεπτά.
- Τα $\frac{2}{4}$ της ώρας είναι.....λεπτά.
- Τα $\frac{3}{4}$ της ώρας είναι λεπτά.
- Τα $\frac{4}{4}$ της ώρας είναι.....λεπτά.

Τοποθέτησε τους δείκτες στο ρολόι ώστε να δείχνει 12 και $\frac{1}{4}$ ή 12 και ' λεπτά.

Και γράψε πώς το

λέμε.....



Τοποθέτησε τους δείκτες στο ρολόι ώστε να δείχνει 12 και $2/4$ ή 12 και λεπτά

Και γράψε πώς το

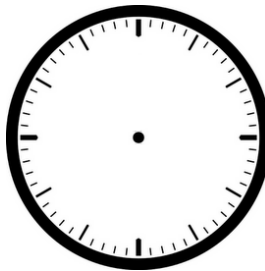
λέμε.....



Τοποθέτησε τους δείκτες στο ρολόι ώστε να δείχνει 12 και $3/4$ ή 12 και λεπτά.

Και γράψε πώς το

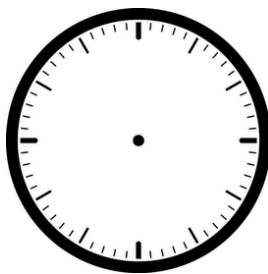
λέμε.....



Τοποθέτησε τους δείκτες στο ρολόι ώστε να δείχνει 12 και 4/4 ή 12 και λεπτά

Και γράψε πώς το

λέμε.....



Ολυμπία Γκριμπίζη
olympizi@gmail.com

Ελένη Σπανοπούλου
elspano61@gmail.com

ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ

Ιωάννης Θ. Λαζαρίδης

Σχ. Σύμβουλος Π.Ε.

Δρ Διδακτικής Μαθηματικών Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το παιχνίδι αποτελεί ένα ιδιαίτερο μέσο των παιδιών για την ανακάλυψη νέων γνώσεων, αλλά και για την εμπέδωση και εφαρμογή των ήδη αποκτημένων. Προσφέρει δυνατότητες για να δημιουργηθούν καταστάσεις προβληματισμού, γόνιμες και ευχάριστες για τα παιδιά, με βάση τις οποίες γεννιούνται οι μαθηματικές «ιδέες». Στο τρέχον άρθρο παρουσιάζουμε, τρία διαφορετικά παιχνίδια από την ενασχόλησή μας με τη διδασκαλία των μαθηματικών: α) Στο πλαίσιο διδακτορικής διατριβής περιγράφουμε ένα διδακτικό επεισόδιο, όπου η δασκάλα ζήτησε από τους μαθητές να «κάνουν» μαθηματικά και παίζοντας να συνδυάσουν βιωματικά «Θέματα Διατροφής - Θερμίδες» και «Σωματικές Ασκήσεις». β) Το δεύτερο παιχνίδι είναι μία διδακτική πρόταση για την παιδαγωγική υποστήριξη των εκπαιδευτικών της Α' τάξης Δημοτικού. Τα παιδιά παίζοντας και βηματίζοντας στην αριθμογραμμή, προς τα μπρος για να προσθέσουν και προς τα πίσω για να αφαιρέσουν, ενθαρρύνονται να μη μετρούν πλέον δάχτυλα, αλλά να μετρούν νοερά αριθμολέξεις. γ) Το τρίτο είναι ένα «μαθηματικό παιχνίδι» με τίτλο: «Εκατό ή χάνεις», μέσω του οποίου, οι μαθητές βοηθούνται στην κατανόηση της αξίας θέσης ψηφίου και στη βελτίωση των δεξιοτήτων τους στην εκτέλεση νοερών πράξεων. Συμπερασματικά, μέσα και από τα τρία παιχνίδια που περιγράφουμε σε τελείως διαφορετικά πλαίσια, τα παιδιά κατανοούν ότι τα μαθηματικά δεν είναι κάτι αφηρημένο, αλλά είναι μία ακόμη ανθρώπινη δραστηριότητα.

1. Εισαγωγή

Στη σύγχρονη διδακτική αντίληψη για τη διδασκαλία των μαθηματικών, βασική παιδαγωγική και διδακτική αρχή είναι ότι κάποιος μαθαίνει καλύτερα όταν του δημιουργούνται κίνητρα και ενδιαφέρον για μάθηση και όταν έχει να αντιμετωπίσει μια κατάσταση - πρόβλημα στην οποία εμπλέκεται ενεργά και βιωματικά (Δ.Ε.Π.Π.Σ. 2003). Ο Piaget (1965) αναφέρει πως όλοι οι μαθητές έχουν την ικανότητα να κάνουν μαθηματικούς συλλογισμούς, αν αφενός στρέψουμε την προσοχή τους προς δραστηριότητες που τους ενδιαφέρουν και αφετέρου καταφέρουμε με αυτή τη μέθοδο να απομακρύνουμε τις συναισθηματικές αναστολές που πολύ συχνά τους δημιουργούν ένα αίσθημα κατωτερότητας στα μαθήματα αυτού του τομέα. Εξάλλου, έχει αναδειχθεί ερευνητικά, ότι οι διδακτικές καταστάσεις είναι απαραίτητο να προέρχονται από την καθημερινή πραγματικότητα των παιδιών (Ρεαλιστικά Μαθηματικά), ώστε να έχουν νόημα για αυτά. Για την επίτευξη των στόχων της μαθηματικής εκπαίδευσης στο δημοτικό πρέπει να ληφθεί μέριμνα, ώστε η εισαγωγή των νέων εννοιών και διαδικασιών να γίνεται μέσα από προβλήματα συνδεδεμένα με τη ζωή και τα ενδιαφέροντα των μαθητών.

Στο ανωτέρω πλαίσιο, το παιχνίδι στα μαθηματικά, αποτελεί ένα ιδιαίτερο μέσο των παιδιών για την ανακάλυψη νέων γνώσεων, αλλά και για την εμπέδωση κι εφαρμογή των ήδη αποκτημένων. Παρέχει δυνατότητες για να δημιουργηθούν καταστάσεις προβληματισμού, γόνιμες και ευχάριστες για τα παιδιά, με βάση τις οποίες γεννιούνται οι μαθηματικές «ιδέες». Διευκολύνει τους μαθητές να κατασκευάσουν μαθηματικές έννοιες όπως του αριθμού και των πράξεων, της μέτρησης, της γεωμετρίας και των πιθανοτήτων.

2. Θεωρητικό Υπόβαθρο

Με τα παιχνίδια, δίνεται έμφαση στην επίλυση προβλημάτων, χρησιμοποιώντας στοιχεία της καθημερινής ζωής και συνδέοντας τις μαθηματικές έννοιες με την πρακτική εφαρμογή τους. Βεβαίως δε μένουμε στις εμπειρικές καταστάσεις, μοντελοποιούμε, κάνουμε αφαιρέσεις και κινούμαστε από το συγκεκριμένο προς το αφηρημένο.

Βοηθούμε τους μαθητές να οδηγηθούν από τα πλαισιωμένα προς τα αποπλαισιωμένα μαθηματικά (Λεμονίδης, 2003).

Στο νηπιαγωγείο, κύριος στόχος είναι τα παιδιά να αρχίσουν να σκέφτονται με τρόπους που χαρακτηρίζουν τη μαθηματική σκέψη, ταυτόχρονα συνειδητοποιώντας την κοινωνική διάσταση των μαθηματικών, το λόγο δηλαδή για τον οποίο χρησιμοποιούμε τα μαθηματικά στη ζωή μας. Ο Σακονίδης αναφέρει ότι προκαλώντας τα παιδιά να σκέφτονται πάνω σε πράγματα και καταστάσεις της πραγματικής τους ζωής με συγκεκριμένους στόχους, τους παρέχουμε τη δυνατότητα να αντιληφθούν τα μαθηματικά ως εργαλείο επίλυσης προβλημάτων στον πραγματικό κόσμο και να θελήσουν να συμμετάσχουν ενεργά στην κατάκτησή τους (όπως αναφ. στο Δαφέρμου, Κουλούρη & Μπασαγιάννη, 2006, κεφ.9). Η συμμετοχή σε καθημερινές δραστηριότητες, αλλά και το παιχνίδι, που στο νηπιαγωγείο αποτελεί βασικό πλαίσιο μάθησης, με την κατάλληλη διαμεσολάβηση του ενήλικα, μπορούν να συμβάλλουν στην κατανόηση από τα μικρά παιδιά της σημασίας που έχουν τα μαθηματικά στην καθημερινή ζωή.

Έχει ερευνητικά αναδειχθεί ότι το παιχνίδι είναι μια παιδαγωγική προσέγγιση η οποία συμβάλλει στην ενίσχυση της μαθηματικής εκπαίδευσης (Bragg, 2007). Τα παιχνίδια στα μαθηματικά βελτιώνουν την αριθμητική γνώση των μικρών παιδιών (Peters, 1998), αλλά βοηθούν ακόμη και φοιτητές της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης να ξεπεράσουν τις δυσκολίες τους (Gueron, 2001). Αρκετές ακόμη έρευνες στη διεθνή βιβλιογραφία, αναδεικνύουν (Griffiths, 1994. Caldwell, 1998. Gerdes, 2001) την εκπαιδευτική αξία των παιχνιδιών, τα οποία φαίνεται ότι συμβάλλουν, αφενός στη διδασκαλία των μαθηματικών παρέχοντας επιπλέον κίνητρα και αφετέρου στη μαθησιακή πρόοδο των μαθητών.

Επίσης όταν τα παιδιά ασχολούνται με παιχνίδια στα μαθηματικά, διευκολύνονται να αντιμετωπίσουν τους φόβους τους για το μάθημα, βελτιώνεται η στάση τους και η συμμετοχή τους. Επιπροσθέτως μέσω των παιχνιδιών, αρχίζουν να συνεργάζονται περισσότερο με τους γονείς τους (Hansen, 2005) και με τους δασκάλους τους (Ceglowski, 1997). Απ' την άλλη οι γονείς, όπως αναδεικνύεται σε πρόσφατη έρευνα (Σκουμπουρδή, Τάτσης, Καφούση, 2009), συνειδητοποιούν τη

σημασία των μαθηματικών και τους τρόπους με τους οποίους αυτά εμπλέκονται σε πλήθος καθημερινών δραστηριοτήτων και παιχνιδιών. Όταν οι γονείς μικρών παιδιών ρωτούνται τι κάνουν για να υποστηρίξουν τη μάθηση των μαθηματικών των παιδιών τους, αναφέρονται μεταξύ άλλων και στο παιχνίδι (Young Loveridge, 1989).

Εξάλλου μεταξύ της επίλυσης προβλημάτων που αναφέρονται στην καθημερινότητα και της συμμετοχής σε ομαδικά παιχνίδια υπάρχει μια κοινή νοητική διεργασία, η επινόηση της δομής της κατάστασης από το ίδιο το παιδί, η κατανόηση των κανόνων και η έννοια της επαλήθευσης είτε με την εμπειρία είτε με την αλληλεπίδραση. Η χρήση των παιχνιδιών στα μαθηματικά δεν είναι κάτι καινούργιο, μάλιστα τα νεότερα μαθηματικά π.χ. «Θεωρία των Παιγνίων» διαμορφώθηκαν μέσα από τη μελέτη των παιχνιδιών (Σκουμπουρδή & Καλαβάσης, 2005). Όμως τα παιχνίδια χρησιμοποιήθηκαν κυρίως ως συμπλήρωμα στην παραδοσιακή διδασκαλία. Η Kamii (1995) αντίθετα υποστηρίζει ότι πρέπει να αναβαθμιστεί ο ρόλος των παιχνιδιών στη διδασκαλία των μαθηματικών και προσθέτει ότι έπειτα από πολυετή έρευνα για τα ομαδικά παιχνίδια σε παιδιά προσχολικής ηλικίας, είναι πλέον πεπεισμένη ότι τα παιχνίδια είναι επαρκή διδακτικά μέσα και μάλιστα πολύ καλύτερα από τα φύλλα εργασίας για την εκμάθηση της αριθμητικής της πρώτης τάξης του δημοτικού (Kamii & De Vries, 1980).

3. Προτεινόμενες διδακτικές προσεγγίσεις αξιοποίησης παιχνιδιών στα μαθηματικά

Η ενασχόλησή μας με τη μαθηματική εκπαίδευση περιλαμβάνει τρεις διαστάσεις με τις αντίστοιχες δράσεις που απορρέουν: α) Ως ερευνητής στο πλαίσιο διδακτορικής διατριβής στη Διδακτική των Μαθηματικών. β) Ως Σχολικός Σύμβουλος Δημοτικής εκπαίδευσης, όπου απαιτείται να προσφέρουμε τις υπηρεσίες μας για την επιστημονική και παιδαγωγική καθοδήγηση και υποστήριξη των εκπαιδευτικών της περιφέρειάς μας (και στα μαθηματικά) είτε μέσα στην τάξη είτε μέσω επιμορφώσεων. γ) Ως μέλος της συγγραφικής ομάδας του περιοδικού της Ε.Μ.Ε. για τα μαθηματικά του Δημοτικού: «Ο Μικρός Ευκλείδης».

Στο τρέχον άρθρο παρουσιάζουμε, τρία διαφορετικά παιχνίδια που χρησιμοποιήσαμε κατά την ενασχόλησή μας με τη διδασκαλία των μαθηματικών, στο πλαίσιο και των τριών διαστάσεων που αναφέρθηκαν ανωτέρω.

3.1. Μελέτη Περίπτωσης στη διαθεματική ενότητα: «Διατροφή - Θερμίδες»

Στο πλαίσιο της διδακτορικής διατριβής μας επιχειρήθηκε η παρατήρηση τεσσάρων τάξεων δημοτικών σχολείων, που υλοποίησαν στη σχολική τους πράξη διαθεματικές δραστηριότητες - project με βάση τα μαθηματικά, κατά τη διάρκεια των διδακτικών ωρών της ευέλικτης ζώνης. Οι θεματικές των διαθεματικών project ήταν τα «Θέματα Διατροφής» και η «Κυκλοφοριακή Αγωγή». Σκοπός της έρευνάς μας, μέσα στο νέο μαθησιακό πλαίσιο της διδασκαλίας των μαθηματικών δια μέσου διαθεματικών project, ήταν η διερεύνηση των διδακτικών και μαθησιακών πρακτικών, των δασκάλων και των μαθητών αντίστοιχα.

Δύο συσχετικές κατηγορίες που αναδύθηκαν από τις μελέτες περίπτωσης που παρατηρήσαμε, αφορούν τις αλλαγές που διαπιστώσαμε στο ευρύτερο μαθησιακό πλαίσιο των τάξεων, κατά την υλοποίηση των διαθεματικών project. Η πρώτη εστιάζει στη διεύρυνση του περιεχομένου και των διαδικασιών των σχολικών μαθηματικών και η δεύτερη εστιάζει στην έμφαση που δόθηκε στην «πλαισιωμένη» μάθηση και στη «ρεαλιστική» διάσταση των μαθηματικών πλαισίων. Ως προς τη στοιχειοθέτηση της διεύρυνσης του περιεχομένου και των διαδικασιών της διδασκαλίας των μαθηματικών, μέσα από τη διαθεματική προσέγγιση, διερευνήσαμε αν και κατά πόσο εμπλουτίστηκε η μαθηματική μάθηση με βιωματικές δράσεις και με χρήση χειραπτικού υλικού και αν η μαθηματική ενασχόληση των παιδιών περιορίστηκε ή όχι στη διδακτέα ύλη της τάξης τους. Ως προς την αποτύπωση της έμφασης που δόθηκε στην «πλαισιωμένη» μάθηση και στη «ρεαλιστική» διάσταση των μαθηματικών πλαισίων, διερευνήσαμε αν και κατά πόσο κατά τη διαθεματική προσέγγιση, η νέα μαθηματική γνώση παρουσιαζόταν σε αυθεντικά πλαίσια μέσα από την καθημερινή ζωή των μαθητών, με τη χρήση χειραπτικού υλικού και βιωματικών δράσεων.

Στην τρίτη Μελέτη Περίπτωσης σε μία Δ' τάξη Δημοτικού, στη διαθεματική ενότητα: «Διατροφή - Θερμίδες», δόθηκε στα παιδιά ένα φύλλο εργασίας με τίτλο: «Πόσες θερμίδες καίμε σε δέκα λεπτά».

Πόσες θερμίδες καίμε;

Δείτε τι μπορείτε να κάνετε σε 10 λεπτά μόνο!

Σωματική άσκηση	Περπάτημα	Ποδηλασία	Πατινάζ	Σχοινάκι	Τρέξιμο
Αντίστοιχες θερμίδες που καίγονται σε 10'	25	40	50	60	80

Αυτό το φύλλο εργασίας εισήγαγε, ως προοργανωτής, σ' ένα ανοικτό Πρόβλημα, που δόθηκε σε έναν πίνακα διπλής εισόδου με τίτλο: «Χρόνος Σωματικής Άσκησης για να καούν θερμίδες από διάφορες λιχουδιές» κι εκτελέστηκε συνδυαστικά (βλ. πίνακα στην επόμενη σελίδα). Εξηγήσαμε στα παιδιά ότι πρέπει να βρουν σε πόσα λεπτά, θα καούν οι θερμίδες από μια λιχουδιά, κάνοντας μια σωματική άσκηση από αυτές του προηγούμενου πίνακα και δώσαμε το εξής παράδειγμα: «Π.χ. από τον πίνακα προκύπτει ότι με 10 λεπτά περπάτημα καίμε 25 θερμίδες. Για να κάψουμε όλες τις 150 θερμίδες που μας δίνουν τα πατατάκια, πόσα λεπτά περπάτημα χρειαζόμαστε;». Τους είπαμε ότι σε κάθε ομάδα μπορούν να επιλέξουν για να ασχοληθούν με όποια λιχουδιά θέλουν.

Χρόνος Σωματικής άσκησης που χρειάζεται για να καούν
οι θερμίδες από διάφορες λιχουδιές

	Περπάτημα	Ποδηλασία	Πατινάζ	Σχοινάκι	Τρέξιμο
12-15 πατατάκια(150cal)					
μπισκότο σοκολάτας(55cal)	25λ	15λ	11λ	9λ.10δ.	8λ.
μια φέτα κέικ καρότου(240cal)					
μια μερίδα(μπάλα) παγωτού σοκολάτα(300cal)	120λ.	75λ	60λ.	50λ	40λ
15 νιφάδες(1 φλιτζάνι) ποπ-κορν(120cal)					
μεγάλο ποτήρι(10 oz) αναψυκτικού(110cal)					
μια μερίδα λουκουμάδες(280cal)					
100gr. σοκολάτα γάλακτος(600cal)	240λ. ή 4φ.	150λ			

10 λ. 25 θ.
20 λ. 50 θ.
30 λ. 75 θ.
40 λ. 100 θ.
50 λ. 125 θ.
60 λ. 150 θ.
70 λ. 175 θ.
80 λ. 200 θ.
90 λ. 225 θ.
100 λ. 250 θ.
110 λ. 275 θ.
120 λ. 300 θ.

10 λ. 40 θ.
20 λ. 80 θ.
30 λ. 120 θ.
40 λ. 160 θ.
50 λ. 200 θ.
60 λ. 240 θ.
70 λ. 280 θ.
75 λ. 300 θ.

10λ. 50 θ.
20λ. 100 θ.
30λ. 150 θ.
40λ. 200 θ.
50λ. 250 θ.
60λ. 300 θ.

10 λ. 60 θ.
20 λ. 120 θ.
30 λ. 180 θ.
40 λ. 240 θ.
50 λ. 300 θ.

5 λ. 40 θ.
8 λ. 55 θ.

10 λ. 25 θ.
20 λ. 50 θ.
25 λ. 35 θ.

40 λ. 40 θ.
15 λ. 55 θ.

10 λ. 80 θ.
20 λ. 160 θ.
30 λ. 240 θ.
40 λ. 300 θ.

6 λ. 36 θ.
7 λ. 42 θ.
8 λ. 48 θ.
9 λ. 54 θ.

10 λ. 50 θ.
15 λ. 55 θ.

Σε ένα διδακτικό επεισόδιο η δασκάλα ζήτησε να κάνουν ένα συνδυασμό από τον πίνακα του φυλλαδίου βιωματικά. Μοιράσαμε στον καθένα από ένα μπισκότο σοκολάτας κι από τον πίνακα υπολογίσαμε ότι τις 55 θερμ. του μπισκότου τις καίμε σε 9 λεπτά σχοινάκι ή σε 7 λεπτά τρέξιμο.

Έπειτα βγήκαμε στο προαύλιο, όπου άλλα παιδιά έτρεξαν για 7 λεπτά κι άλλα έκαναν σχοινάκι για 9 λεπτά με σκοπό να κάψουν τις θερμίδες από το μπισκότο που έφαγαν. Αυτή η βιωματική δραστηριότητα άρεσε ιδιαίτερα στα παιδιά και μάλιστα συμμετείχαμε κι εμείς, η δασκάλα κάνοντας σχοινάκι μαζί με τα παιδιά κι εγώ φωτογραφίζοντας. Διαπιστώσαμε πόσο εύκολα, γρήγορα, τρως ένα μπισκότο και πόσο δύσκολα και τις θερμίδες που παίρνεις.



Στα σχολικά βιβλία και τα Α.Π., τα μαθηματικά σπανιότατα συνδεόνταν με βιωματικές καταστάσεις. Στην προσέγγισή μας τα παιδιά είχαν την ευκαιρία να επεξεργαστούν πρώτα μέσα στην τάξη μια μαθηματική κατάσταση, να βρουν με μαθηματικούς υπολογισμούς σε πόσα λεπτά τρέξιμο και πόσα λεπτά σχοινάκι καίγονται οι θερμίδες που παίρνουμε από ένα μπισκότο και τέλος να βιώσουν στην πράξη όλα τα αφηρημένα, μαθηματικά δεδομένα. Να γευτούν ένα μπισκότο σοκολάτας και να κάνουν 9 λεπτά σχοινάκι ή 7 λεπτά τρέξιμο, ιδρώνοντας για να κάψουν τις θερμίδες από το μπισκότο. Τα παιδιά με αυτόν τον τρόπο βελτίωσαν τη στάση τους στα μαθηματικά συνειδητοποιώντας ότι τα μαθηματικά είναι μια ανθρώπινη δραστηριότητα.

Βέβαια, μόλις άκουσαν ότι θα βγουν στο προαύλιο, προκλήθηκε αναστάτωση. Η έμπειρη δασκάλα το ανέμενε αυτό, για αυτό προληπτικά τους είπε να βγουν ήσυχα για να μην ενοχλήσουν και τις άλλες τάξεις. Εφόσον ήταν το τέλος της ώρας, αφήσαμε τα παιδιά στο προαύλιο να παίξουν ξένοιαστα κάνοντας σχοινάκι ή τρέξιμο, χωρίς να υπενθυμίζουμε την αποστολή τους. Είναι σχεδόν βέβαιο ότι πολλά από τα παιδιά, την ώρα που έκαναν τη σωματική άσκηση, ξέχασαν εντελώς το γενικότερο πλαίσιο και δεν σκέφτονταν ότι εκείνη την ώρα καίνε τις θερμίδες του μπισκότου. Όμως στη συγκεκριμένη περίπτωση, δασκάλα και ερευνητής το θεωρήσαμε μη επιζήμιο μαθησιακά και αναμενόμενο.

Τη «ρεαλιστική» διάσταση της προσέγγισής μας, την διαπίστωσαν αμφότεροι και οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί, απαντώντας στα ερωτηματολόγια. Ένας μαθητής, εξηγώντας γιατί του άρεσε η ενότητα «θέματα διατροφής» απάντησε: «Μου άρεσε...γιατί ήμασταν μια ομάδα που λύναμε προβλήματα της ζωής μας. Αναλύαμε ό,τι τρώγαμε κι ό,τι κάναμε, το κάναμε με χαμόγελο κι όχι με πίεση των δασκάλων».

3.2. Παιχνίδια βηματίζοντας στην αριθμογραμμή

Το δεύτερο παιχνίδι προέκυψε, ως διδακτική πρότασή μας για την παιδαγωγική υποστήριξη των εκπαιδευτικών της περιφέρειάς μας. Συχνά στο πλαίσιο των καθηκόντων μας επισκεπτόμαστε τις Α' τάξεις Δημοτικού, γιατί σε αυτές θεωρούμε ότι γίνεται πολύ κρίσιμο έργο,

αφού δομούνται τα θεμέλια ολόκληρου του εκπαιδευτικού οικοδομήματος του δημοτικού σχολείου - και για τα μαθηματικά.

Κατά τις επισκέψεις μας, συχνά οι δασκάλες - δάσκαλοι της Α' τάξης ρωτούν τι να κάνουν με τους μαθητές - μαθήτριες που μετρούν δάχτυλα κατά την πρόσθεση και την αφαίρεση και ως πότε θα τους το επιτρέπουν, αφού μερικά παιδιά εξακολουθούν να χρησιμοποιούν δάχτυλα, ακόμη και στη Β' και στη Γ' Δημοτικού. Τους εξηγούμε ότι δεν πειράζει κι αν μερικοί μαθητές μετρούν δάχτυλα, γιατί είναι κι αυτός ένας τρόπος. Σημασία έχει ότι προσπαθούν κι εμπλέκονται στη διαδικασία επίλυσης των προβλημάτων. Τονίζουμε στις - στους εκπαιδευτικούς ότι πρέπει να ενθαρρύνουν τα παιδιά να μετρούν φανερά, χωρίς να κρύβουν τα χέρια τους αισθανόμενα ενοχές.

Εξηγούμε ότι σύμφωνα με τη συγκρότηση των μαθηματικών δομών κατά τον J. Bruner, η μέτρηση δακτύλων αντιστοιχεί στο στάδιο της «Πραξιακής αναπαράστασης» όπου: το παιδί μαθαίνει μέσα από τη δράση, τη μίμηση και το χειρισμό των αντικειμένων και πρέπει να διευκολυνθεί για να περάσει στο στάδιο της «Εικονιστικής αναπαράστασης» όπου: η αναπαράσταση του εξωτερικού κόσμου γίνεται μέσω εσωτερικών πνευματικών εικόνων.

Επίσης προσθέτουμε ότι τα παιδιά χωρίς να μετρούν δάχτυλα, το ίδιο, μπορούν να το κάνουν νοερά, στο μυαλό τους, μετρώντας αριθμολέξεις, δηλαδή λέξεις που δείχνουν αριθμούς στη σειρά, προβάλλοντας εσωτερικά στη σκέψη τους την αριθμογραμμή. Τα δάχτυλα είναι ένας τρόπος για να ξεκινήσει κανείς. Μετά, μεγαλώνοντας, μπορεί να περάσει από τα χειροπιαστά αντικείμενα, όπως τα δάχτυλα, τα κυβάκια, τις χάντρες στο αριθμητήριο, τα ραβδάκια, τους κρίκους στον άβακα, σε πιο αφηρημένες, εσωτερικές αναπαραστάσεις των αριθμητικών ποσοτήτων, όπως είναι οι αριθμολέξεις και η αριθμογραμμή.

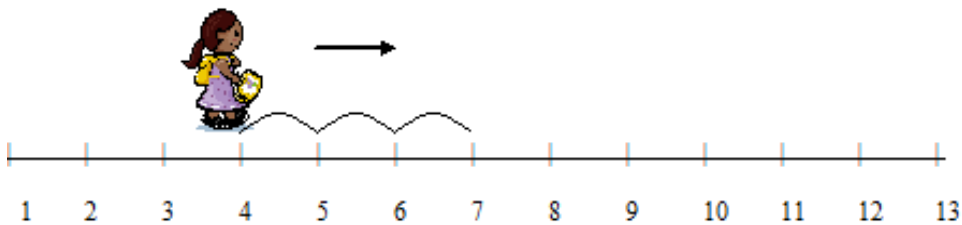
Φέρνουμε ως παράδειγμα, μία παρομοίωση και ρωτούμε τις δασκάλες: «έχετε παρατηρήσει, πώς φτάνει να περπατήσει μόνο του ένα μωρό;». Απαντούν ότι πρώτα αρχίζει να μπουσουλάει στα τέσσερα, μετά σηκώνεται στα δύο πόδια και πιάνεται από τον καναπέ, τις πολυθρόνες, στηρίζεται και περπατάει. Μετά αρχίζει να τον κρατά απ' το χέρι, η μαμά ή ο μπαμπάς και περπατάει πιο πολύ... Τέλος

περπατάει μόνο του. Εξηγούμε, λοιπόν, ότι παρομοίως και όταν μαθαίνουμε μία διαδικασία, στην αρχή χρειαζόμαστε πολλά στηρίγματα και προχωράμε αργά, αλλά σταδιακά χρειαζόμαστε όλο και λιγότερη στήριξη, προχωράμε γρηγορότερα και τελικά τα καταφέρνουμε μόνοι μας...

Τότε περιγράφω το παιχνίδι με την αριθμογραμμή. Στην τάξη, όταν το πάτωμα έχει πλακάκια, βάζουμε σε κάθε πλακάκι, έναν αριθμό από το 1 μέχρι το 13 ή μέχρι όσο θέλουμε. Αν όμως δεν υπάρχουν πλακάκια, μπορούμε να φτιάξουμε μία μεγάλη αριθμογραμμή σε μία λωρίδα από χαρτόνι και να την κολλήσουμε στο σοβατεπί κάτω από τον πίνακα, εκεί που τελειώνει ο τοίχος και αρχίζει το πάτωμα. Αυτό που πρέπει να προσέξουμε είναι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών αριθμών, να είναι περίπου όσο ένα βήμα μικρού παιδιού... Αφού φτιάξουν την αριθμογραμμή, αρχίζουν να παίζουν. Η δασκάλα θα κάνει το ρομπότ και τα παιδιά θα δίνουν εντολές, για να εκτελέσει το ρομπότ πράξεις, προσθέσεις και αφαιρέσεις, βηματίζοντας στην αριθμογραμμή... Μετά κάποιο παιδί θα κάνει το ρομπότ... Για παράδειγμα:

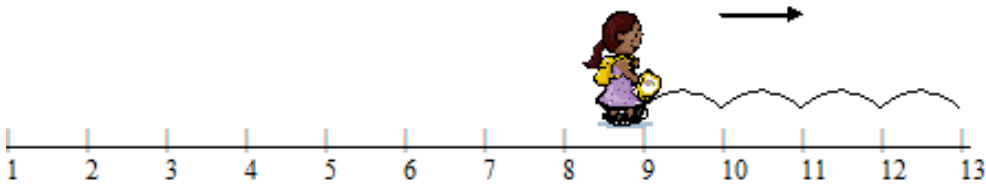
Δασκάλα: Μαρία, πρόσθεσε βηματίζοντας στην αριθμογραμμή $4 + 3$.

Μαρία: Πηγαίνω και στέκομαι πρώτα στο 4, μετά κάνω 3 βήματα εμπρός... 4 κι ένα 5 κι άλλο ένα 6 κι άλλο ένα 7. Έφτασα στο 7... Άρα $4 + 3 = 7$.



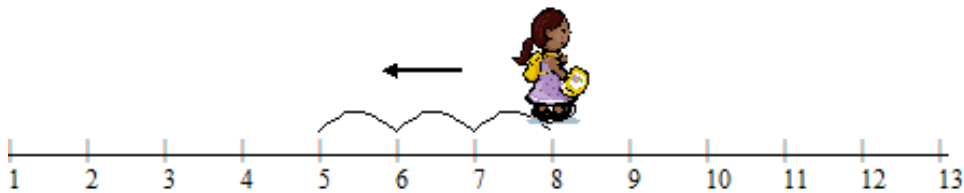
Δασκάλα: Μαρία, πρόσθεσε βηματίζοντας στην αριθμογραμμή $9 + 4$.

Μαρία: Πάω στο 9 και κάνω 4 βήματα εμπρός... 10, 11, 12, 13. Έφτασα στο 13... Άρα $9 + 4 = 13$.



Δασκάλα: Ας κάνουμε αφαιρέσεις. Μαρία, αφάίρεσε βηματίζοντας στην αριθμογραμμή $8-3$.

Μαρία: Πάω στο 8 και κάνω 3 βήματα προς τα πίσω... 7, 6, 5. Έφτασα στο 5... Άρα $8 - 3 = 5$.



Ειδικά στην αφαίρεση, πολλά παιδιά όταν αφαιρούν μετρώντας αντίστροφα, π.χ. για να βρουν $8-3$, βρίσκουν λανθασμένο αποτέλεσμα, γιατί μετρούν και τον αριθμό αφαιρετή, στην περίπτωση μας το 8 και λένε: «8, 7, 6...». Τα παιδιά παίζοντας και βηματίζοντας προς τα πίσω στην αριθμογραμμή για να αφαιρέσουν, συνειδητοποιούν ότι δεν μετράμε στην αφαίρεση αριθμούς, βηματίζοντας προς τα πίσω, αλλά βήματα, δηλαδή τα διαστήματα ανάμεσα σε διαδοχικούς αριθμούς. Προτρέπουμε τις - τους εκπαιδευτικούς, αφού τα παιδιά εξοικειωθούν με το παιχνίδι της αριθμογραμμής, να τα ενθαρρύνουν να

προσπαθούν, στην πρόσθεση και στην αφαίρεση, να μη μετρούν πλέον δάκτυλα, αλλά να μετρούν νοερά αριθμολέξεις. Να κλείνουν οι μαθητές τα μάτια τους και να σκέφτονται την αριθμογραμμή. Να κάνουν νοερά ό,τι έκαναν με τα βήματα, μετρώντας αριθμολέξεις, προς τα μπρος στην πρόσθεση και αντίστροφα προς τα πίσω στην αφαίρεση.

3.3. Ένα «μαθηματικό παιχνίδι» με τίτλο: «Εκατό ή χάνεις»

Το τρίτο παιχνίδι, είναι ένα «μαθηματικό παιχνίδι» με τίτλο: «Εκατό ή χάνεις», που δημοσιεύσαμε σε άρθρο στο περιοδικό της Ε.Μ.Ε. για τα μαθηματικά του Δημοτικού: «Ο Μικρός Ευκλείδης». Αυτό το παιχνίδι είχαμε την ευκαιρία να το παίξουμε με τα παιδιά σε τάξεις Β' δημοτικού που επισκεφτήκαμε - μία ομάδα παιδιών ήταν ο ένας παίκτης κι εμείς ήμασταν ο άλλος, ώστε να μάθουν τα παιδιά πώς να παίξουν το συγκεκριμένο παιχνίδι. Από τις διαπιστώσεις των δασκάλων αναδύθηκε το συμπέρασμα ότι μέσω αυτού του παιχνιδιού, οι μαθητές βοηθήθηκαν πολύ στην κατανόηση της αξίας θέσης ψηφίου και βελτίωσαν τις δεξιότητές τους στην εκτέλεση νοερών προσθέσεων κι αφαιρέσεων. Το παιχνίδι είναι το εξής:

Εκατό ή χάνεις!

Ένα μαθηματικό παιχνίδι για την αξία θέσης των αριθμών, κατάλληλο για μαθητές των τάξεων Β' - Ε'.

Απαραίτητα Υλικά (για κάθε ζευγάρι παικτών)

1. Ένα φύλλο χαρτί (κάθε παίκτης από ένα).
2. Ένα μολύβι (κάθε παίκτης από ένα).
3. Ένα ζάρι.

Οδηγίες

1. Φτιάξτε ένα πινακάκι όπως αυτό παρακάτω και πάρτε ο κάθε παίκτης από ένα.
2. Ο παίκτης που θα φέρει τη μεγαλύτερη ζαριά παίζει πρώτος.
3. Ο πρώτος παίκτης ρίχνει το ζάρι και γράφει στο πινακάκι τον αριθμό που έφερε στη ζαριά του είτε στη στήλη των δεκάδων είτε στη στήλη των μονάδων - όχι και στις δύο (π.χ. ένα «6» στη στήλη

των δεκάδων είναι 60, ενώ ένα «6» στη στήλη των μονάδων είναι 6). Στη συνέχεια ο δεύτερος παίκτης παίζει με τη σειρά του, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία και καταγράφοντας τη δική του ζαριά στο πινακάκι του.

4. Το παιχνίδι επαναλαμβάνεται για επτά γύρους και όποιος μετά τους επτά γύρους φτάσει στο τέλος πιο κοντά στο 100 - χωρίς να το ξεπεράσει - κερδίζει.

Συμβουλές: Χρησιμοποιήστε τη στήλη των δεκάδων προσεκτικά, αλλιώς θα ξεπεράσετε το 100 και θα χάσετε! Πριν να επιλέξετε σε ποια στήλη θα καταγράψετε τη ζαριά σας, αθροίστε με το νου σας τους αριθμούς απ' τους προηγούμενους γύρους για να δείτε τι περιθώριο έχετε μέχρι το 100. Προσέξτε να μην μπερδεύετε και καταγράφετε τις ζαριές δύο συνεχόμενων γύρων στην ίδια σειρά.

Εκατό ή χάνεις!

<i>Γύροι</i>	<i>Δεκάδες</i>	<i>Μονάδες</i>
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
<i>Σύνολο</i>		

4. Συμπεράσματα - Προεκτάσεις

Σε παρόμοιες μελέτες περίπτωσης και αντίστοιχες έρευνες με εφαρμογή παιχνιδιών στη διδασκαλία των κλασμάτων, όταν το παιχνίδι χρησιμοποιήθηκε επιδέξια από τους δασκάλους για την αναπαράσταση κλασματικών ποσοτήτων, ενίσχυσε σημαντικά την εξελισσόμενη γνώση των παιδιών για τα κλάσματα (Smith, 2002). Οι διαφορετικοί τρόποι που οι μαθητές διατάσσουν τα χειραπτικά υλικά - τουβλάκια που αναπαριστούν κλάσματα, απεικονίζουν τη μαθηματική σκέψη τους. Αυτό δίνει την ευκαιρία στους εκπαιδευτικούς να μάθουν περισσότερα για τις στρατηγικές των μαθητών τους και να αναστοχαστούν. Αναλύοντας τον τρόπο σκέψης των παιδιών, οι δάσκαλοι μπορούν να νοηματοδοτήσουν τη διδασκαλία τους περισσότερο και να την κάνουν πιο ελκυστική για τους μαθητές (Burrrill, 1997). Μπορούν επίσης να δουν αλληλεπιδραστικά τη μαθηματική διδασκαλία τους, μέσα από τα μάτια των μαθητών τους (Naiser et al., 2004) και να λάβουν ανατροφοδότηση.

Ανακεφαλαιώνοντας τις τρεις μελέτες περίπτωσης που παρουσιάσαμε, αναδύονται οι ακόλουθες διαπιστώσεις. Στην πρώτη περίπτωση, μαθητές της Δ' τάξης, αφού πρώτα επεξεργάστηκαν μέσα στην τάξη ένα μαθηματικό πρόβλημα και υπολόγισαν σε πόσα λεπτά τρέξιμο και πόσα λεπτά σχοινάκι καίγονται οι θερμίδες που παίρνουμε από ένα μπισκότο, έπειτα βγήκαν στο προαύλιο, όπου άλλα παιδιά έτρεξαν κι άλλα έκαναν σχοινάκι, με σκοπό να κάψουν τις θερμίδες από το μπισκότο που έφαγαν, βιώνοντας στην πράξη όλα τα αφηρημένα, μαθηματικά δεδομένα. Στη δεύτερη περίπτωση μέσω του παιχνιδιού, βηματίζοντας στην αριθμογραμμή, τα παιδιά της Α' τάξης, εκτέλεσαν βιωματικά προσθέσεις και αφαιρέσεις κι υποστηρίχθηκαν με αυτόν τον τρόπο ώστε να μη μετρούν πλέον δάχτυλα, αλλά να μετρούν νοερά αριθμολέξεις. Στην τρίτη περίπτωση, μαθητές Β' τάξης, μέσω του παιχνιδιού «Εκατό ή χάνεις», διευκολύνθηκαν σημαντικά στην κατανόηση της αξίας θέσης ψηφίου και βελτίωσαν τις δεξιότητές τους στην εκτέλεση νοερών προσθέσεων κι αφαιρέσεων.

Συμπερασματικά, μέσα και από τα τρία παιχνίδια που περιγράψαμε, τα οποία βίωσαν διαφορετικές ηλικιακές ομάδες παιδιών, σε διαφορετικές κάθε φορά περιστάσεις και σε διαφορετικά πλαίσια, τα παιδιά κατανόησαν ότι τα μαθηματικά δεν είναι κάτι αφηρημένο, αλλά

είναι μία ακόμη ανθρώπινη δραστηριότητα, όπως είπε ένας από τους μέντορες της σύγχρονης διδακτικής των μαθηματικών, ο Ολλανδός Hans Freudenthal (1973).

5. Βιβλιογραφία

- Bragg, L. (2007). Students' conflicting attitudes towards games as a vehicle for learning mathematics: A methodological dilemma. *Mathematics Education Research Journal*, 19(1), 29-44.
- Bruner, J. (1977). The process of education: A landmark in educational theory. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Burrill, G. (1997). Choices and challenges. *Teaching Children Mathematics*, 4, 58-63.
- Caldwell, M. (1998). Parents, Board Games, and Mathematical Learning. *Teaching Children Mathematics*, 4(6), 365-367.
- Ceglowski, D. (1997). Understanding and Building upon Children's Perceptions of Play Activities in Early Childhood Programs. *Early Childhood Education Journal*, 25(2), 107-112.
- Δαφέρμου, Χ., Κουλούρη, Π. & Μπασαγιάννη, Ε. (2006). Οδηγός Νηπιαγωγού, Εκπαιδευτικοί σχεδιασμοί, Δημιουργικά περιβάλλοντα μάθησης. ΥΠΕΠΘ & Π.Ι., ΟΕΔΒ, Αθήνα.
- Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών & Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης (ΔΕΠΠΣ), Τόμος Α' (2003). Αθήνα:ΥΠΕΠΘ & Π.Ι.
- Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an educational task, Dordrecht.
- Gerdes, P. (2001). Exploring the Game of "Julidre": A Mathematical-Educational Game Played by Fulbe Children in Cameroon. *Teaching Children Mathematics*, 7(6), 321-327.

- Griffiths, R. (1994). Mathematics and play. Στο J. R. Moyles (ed), *The excellence of Play* (pp. 145-157). Great Britain: Open University Press.
- Gueron, S. (2001). A game-like activity for learning Cantor's theorem. *The College Mathematics Journal*, 32, 122-125.
- Hansen, E. L. (2005). ABCs of Early Mathematics Experiences. *Teaching Children Mathematics*, 12(4), 208.
- Kamii, C. (1995). Τα παιδιά ξαναεφευρίσκουν την αριθμητική, μτφρ. Γ. Ζακοπούλου, Εκδόσεις Πατάκη, Αθήνα.
- Kamii, C., & DeVries, R. (1980). *Group Games In Early Education: Implications Of Piaget's Theory*. Washington, DC: National Association for the Education of Young Children.
- Λεμονίδης, Χ. (2003). Μια νέα πρόταση διδασκαλίας των Μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου, Εκδόσεις Πατάκη, Αθήνα.
- Naiser, E. A., Wright, W. E., & Capraro, R. M. (2004). Teaching fractions: Strategies used for teaching fractions to middle grade students. *Journal of Research in Childhood Education*, 18(3), 193-198.
- Peters, S. (1998). Playing games and learning mathematics: The results of two intervention studies. *International Journal of Early Years Education*, 6(1), 49-58.
- Piaget, J. (1965). *The Child's Conception of Number*, The Norton Library, New York.
- Σκουμπουρδή, Χ. & Καλαβάσης, Φ. (2005). Ταξινόμηση του εκπαιδευτικού παιχνιδιού: σύνδεση με τη Θεωρία Παιγνίων. *22ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας: Οι Σύγχρονες Εφαρμογές των Μαθηματικών και η Αξιοποίησή τους στην Εκπαίδευση*, 504-514, Λαμία.

- Σκουμπουρδή, Χ., Τάτσης, Κ., Καφούση, Σ. (2009). Απόψεις γονέων, παιδιών νηπιαγωγείου, για την εμπλοκή των Μαθηματικών σε καθημερινές δραστηριότητες και παιχνίδια. *Πρακτικά 3ου Συνεδρίου ΕυΕΔιΜ 'Μαθηματική Εκπαίδευση και Οικογενειακές Πρακτικές'*, 131-139, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, Αθήνα.
- Smith, III, J. P. (2002). The development of students' knowledge of fractions and ratios. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions: 2002 Yearbook*. (pp. 3-17). Reston, VA: NCTM.
- Young Loveridge, J.M. (1989). The relationship between children's home experiences and their mathematical skills on entry to school. *Early Child Development and Care* 43, 43-59.

Ιωάννης Θ. Λαζαρίδης
ilazaridis@tellas.gr

ΤΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ – ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ “Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΣΤΟΧΟΣ” ΣΕ ΕΝ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΔΑΣΚΑΛΟΥΣ/ΕΣ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΥΠΟ ΤΟ ΠΡΙΣΜΑ ΤΗΣ ΣΥΣΤΗΜΙΚΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ

Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης

Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το παρόν άρθρο μελετάει τη διδακτική δράση στα μαθηματικά κάνοντας χρήση του παιχνιδιού - δραστηριότητα «Ο αριθμός στόχος» το οποίο προτάθηκε σε εν ενεργεία δασκάλους/ες Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στο πλαίσιο προγράμματος συνεχούς επιμόρφωσής τους. Εστιάζει στην περιγραφή στοιχείων των δράσεων των εκπαιδευτικών και του επιμορφωτή. Στην εφαρμογή γίνεται χρήση σεναρίου-φάσεων και εξετάζουμε τη μαθησιακή διαδικασία επικεντρώνοντας το ενδιαφέρον μας στην ομάδα εκπαιδευτικών – τάξη - ως σύστημα και στις διαδράσεις που αναπτύσσονται. Οι έννοιες της πλαισίωσης, της αλληλεπίδρασης και της συν-κατασκευής αποτελούν τον κύριο κορμό της ανάλυσης της παραπάνω δραστηριότητας, ενώ ταυτόχρονα επανατοποθετείται η έννοια της διαίρεσης στο πλαίσιο της διαλεκτικής εργαλείο – αντικείμενο.

1. Εισαγωγή

Η συστημική προσέγγιση αποτέλεσε ένα νέο επιστημονικό παράδειγμα και μια εναλλακτική πρόταση στο πεδίο των ψυχοκοινωνικών και παιδαγωγικών πρακτικών.

Η συστημική οπτική εξακολουθεί να εστιάζει στην πολυπλοκότητα των σχέσεων μεταξύ ατόμων ή/και ιδεών και να μας υπενθυμίζει ότι 'αποτελούμε μέρη ενός διασυνδεδεμένου όλου' (Bateson, 1973).

Το εκπαιδευτικό πλαίσιο ήταν ένας από τους προνομιούχους χώρους σκέψης για τους συστημικούς με διαφορετική αφειρηρία κάθε φορά (δυναμική των σχέσεων στο εσωτερικό του σχολείου, μορφές συνεργασίας με τους εκπαιδευτικούς για προβλήματα που αναδύονταν με τους μαθητές, συνεργασία οικογένειας και σχολείου, συνεργασία εκπαιδευτικών και επαγγελματιών υγείας, σχολική αποτυχία...) .

Με την παρούσα εισήγηση θα επιχειρήσουμε να προσεγγίσουμε τον χώρο της εκπαίδευσης και ειδικότερα την διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών και την αντίστοιχη διαδικασία μάθησης υπό το φως της συστημικής οπτικής. Πολύτιμος βοηθός σε αυτήν τη διαδρομή θα είναι η ενασχόληση μιας ομάδας-τάξης εν ενεργεία δασκάλων πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης κι ενός εκπαιδευτικού-επιμορφωτή με ένα μαθηματικό πρόβλημα στο πλαίσιο ενός προγράμματος συνεχούς επιμόρφωσής τους.

Πριν προχωρήσουμε όμως στη συστημική ανάγνωση της διαδικασίας που ακολουθήθηκε, θα θέλαμε να σταθούμε καταρχήν στο πλαίσιο μέσα στο οποίο πραγματοποιήθηκε η διδασκαλία: την τάξη των εν ενεργεία δασκάλων. Θα εξετάσουμε τη τάξη ως σύστημα, θα αναφερθούμε σε κάποιες όψεις της δομής και της λειτουργίας της και στη συνέχεια θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στο 'γίγνεσθαι' της συγκεκριμένης τάξης έχοντας ως αναφορά τις έννοιες της πλαισίωσης, της αλληλεπίδρασης και της συν-κατασκευής.

2. Η σχολική τάξη ως σύστημα

“Ένα σύστημα είναι ένα σύνολο, με εντοπισμένα όρια, αποτελούμενο από άτομα που αλληλεπιδρούν, εξελισσόμενο μέσα στο χρόνο, οργανωμένο σε συνάρτηση με το περιβάλλον και τις σκοπιμότητες”. Όλα τα στοιχεία αυτού του ορισμού είναι σημαντικά, εμείς όμως θα σταθούμε στις έννοιες-κλειδιά 'όρια' και 'σκοπιμότητες'.

Όρια

Οι αλληλεπιδράσεις λαμβάνουν χώρα στο εσωτερικό των ορίων ενός συγκεκριμένου συστήματος και μπορούν να κατανοηθούν σε σχέση με αυτό το πλαίσιο. Υπάρχουν τα όρια 'δείκτης του ανήκειν' που δηλώνει ποιος ανήκει και ποιος δεν ανήκει σε αυτό το σύστημα, τα όρια που αφορούν στον τόπο και τον χρόνο κλπ. Το να χαράσσει κανείς τα όρια ευνοεί την οργάνωση του συστήματος, δηλαδή ευνοεί μια ορισμένη σταθερότητα. Είναι σημαντικό για τους εκπαιδευτικούς να δείχνουν ενδιαφέρον για την κατάσταση της οργάνωσης του συστήματος-τάξης γιατί μια οργανωμένη ομάδα μπορεί να αποτελέσει ένα καλό περιέχον για την μάθηση (Curonici & McCulloch, 1997; Pauzé & Roy, 1987).

Σκοπιμότητες

Ένα από τα καθήκοντα του εκπαιδευτικού είναι να κρατά στο επίκεντρο τις επίσημες σκοπιμότητες του σχολείου και στην συγκεκριμένη περίπτωση του προγράμματος επιμόρφωσης (εκμάθηση γνώσεων και τεχνικών) και να δημιουργεί τις συνθήκες μαζί με τους μαθητές/τριες - επιμορφούμενους ώστε να τα καταφέρνουν. Στη συστημική προσέγγιση, η έννοια του σχεδίου παίζει έναν καθοριστικό ρόλο: η συμπεριφορά ενός συστήματος ερμηνεύεται σε σχέση με τα σχέδια του και όχι με τις δομές του. Η ρύθμισή του και η προσαρμογή του έχουν ως αντικείμενο την ικανοποίηση των σχεδίων του, οι επιδόσεις του ορίζονται σε σχέση με τις παρατηρούμενες συμπεριφορές και τα σχέδιά του ή τις σκοπιμότητές του.

Στην περίπτωσή μας, το παιχνίδι-δραστηριότητα “Ο αριθμός στόχος” αποτέλεσε το σχέδιο στο οποίο επικεντρώθηκε η ομάδα-τάξη των ενεργεία δασκάλων πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στο πλαίσιο προγράμματος συνεχούς επιμόρφωσής τους (Βλ. Παράρτημα 1). Το σχέδιο αυτό θα αποτελέσει σημείο αναφοράς καθ' όλη τη διάρκεια του

άρθρου και θα μας επιτρέψει να δούμε την πορεία του συστήματος-τάξη και τις συν-κατασκευές των πρωταγωνιστών του αναφορικά με ένα μαθηματικό παιχνίδι-πρόβλημα. «Ο αριθμός στόχος», ως παιχνίδι - δραστηριότητα βρίσκεται στον πυρήνα της θεωρίας των διδακτικών καταστάσεων του G. Brousseau (Brousseau, 1998)¹, αποτελεί πεδίο επανατοποθέτησης της έννοιας της διαίρεσης στο πλαίσιο της διαλεκτικής εργαλείο – αντικείμενο (Douady, 1987)² και αποτελεί εφαρμογή της έννοιας του εννοιολογικού πεδίου (Vergnaud, 1991)³.

¹ Η θεωρία διδακτικών καταστάσεων εκφράζει και εξετάζει τις συνθήκες γένεσης των μαθηματικών γνώσεων που διαμορφώνονται ανάμεσα σε έναν διδάσκοντα και τους διδασκόμενους. Σε αυτή διακρίνουμε ένα κοινωνικού χαρακτήρα σχέδιο που αποσκοπεί στην εκμάθηση μιας γνώσης από το διδασκόμενο και αποτελεί μια λίστα συνθηκών που πρέπει να ικανοποιηθούν για να καλυτερεύσουμε τις δυνατότητες του μαθητή να ανταπεξέλθει στην επίλυση ενός προβλήματος.

² Η Γνώση των μαθηματικών έχει διπλή όψη. Από την μία σημειώνουμε την λειτουργική διαθεσιμότητα ορισμένων μαθηματικών εννοιών και θεωρημάτων ώστε να επιλυθούν προβλήματα, να ερμηνευθούν οι νέες ερωτήσεις ... Μέσα σε μία τέτοια επιστημονική λειτουργία, οι μαθηματικές έννοιες και τα θεωρήματα έχουν θέση εργαλείου. Τα εργαλεία έχουν εγγραφεί σε ένα πλαίσιο, υπό την δράση και τον έλεγχο κάποιου (μιας ομάδας) σε μία δεδομένη στιγμή. Οι καταστάσεις όπου τα προβλήματα μέσα στα οποία εξελίσσονται οι μαθηματικές έννοιες είναι γενεσιουργά της σημασίας για αυτές τις έννοιες υπό μία συγκεκριμένη οπτική γωνία που ονομάζουμε σημαντική (*sémantique*). Γνώση των μαθηματικών, είναι επίσης να αναγνωριστούν οι έννοιες και τα θεωρήματα ως στοιχεία ενός αναγνωρισμένου, επιστημονικά και κοινωνικά, σώματος. Επίσης είναι η διατύπωση των ορισμών, η εκφώνηση των θεωρημάτων του σώματος και η απόδειξή τους. Οι μαθηματικές έννοιες και τα θεωρήματα έχουν μία θέση αντικειμένου και είναι α-ποπλαισιωμένα, α-πρόσωπα και α-χρονικά. Η εργασία αποπλαισίωσης και απροσωπίας συμμετέχει στην κεφαλαιοποίηση της γνώσης. Η εργασία της επαναπλαισίωσης και η επεξεργασία των προβλημάτων επιτρέπουν την διεύρυνση της σημασίας. Αυτό δεν απαγορεύει την κεφαλαιοποίηση των πρακτικών ή τις ιδιαίτερες (προσωρινές) γνώσεις. Οι έννοιες, όπως και τα θεωρήματα, μπορούν να τύχουν επεξεργασίας, να τροποποιηθούν σύμφωνα με τις καταστάσεις όπου τα χρησιμοποιούν και να οδηγήσουν σε νέες έννοιες, με τη σειρά τους υλικά εργασίας, ερμηνείας, μετατροπής, γενίκευσης ... Για τα θεωρήματα, μπορούμε να εξερευνήσουμε το πεδίο εγκυρότητας: να φανταστούμε μεταβλητές, να τις αποδείξουμε ή αντίθετα να κατασκευάσουμε αντιπαραδείγματα ώστε να διασφαλίσουμε ότι αυτό δεν είναι δυνατό. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις, συσχετίζουμε διαφορετικές έννοιες. Αυτές οι συσχετίσεις αποτελούν επίσης μία πηγή σημασίας για αυτούς που τις εκτελούν. Η μαθηματική εργασία μπορεί να γίνει στα εργαλεία στο πλαίσιο ενός προβλήματος, όπως και στα αντικείμενα για την διεύρυνση του βεληνεκούς. Είναι απαραίτητος ο σεβασμός του συνόλου των εσωτερικών μαθηματικών κανόνων. Σε αυτή την περίπτωση διαπιστώνουμε ένα άλλο συστατικό της σημασίας που το ονομάζουμε

Ο Enequoz (1990) από την δική του πλευρά επιμένει στο γεγονός ότι μία τάξη είναι ένα τεχνητό σύστημα του οποίου η ιστορία είναι πιο σύντομη απ' ότι ενός φυσικού συστήματος. Καθώς θεμελιώνεται σε μια ιεραρχική δομή σε δύο επίπεδα (αυτό του εκπαιδευτικού-επιμορφωτή και αυτό των μαθητών-επιμορφούμενων), παρατηρούμε δύο είδη αλληλεπιδράσεων: τις κάθετες, μεταξύ εκπαιδευτικού και των μαθητών-επιμορφούμενων του, τις οριζόντιες, μεταξύ των ίδιων των μαθητών-επιμορφούμενων. Ο εκπαιδευτικός-επιμορφωτής υποτίθεται ότι αναλαμβάνει την λειτουργία της 'πλοήγησης'.

3. Ομάδα-τάξη και έννοια της πλαισίωσης

Η πλαισίωση είναι μια βασική έννοια στην εισήγησή μας όσον αφορά στην ομάδα-τάξη και στην πλαισίωση των επιμορφούμενων από τον επιμορφωτή.

Η έννοια της πλαισίωσης αναπτύχθηκε από μια ομάδα οικογενειακών θεραπειών και ερευνητών στην Λωζάνη (Fivaz & al. 1982). Αποτελεί μια έννοια η οποία εφαρμόζεται σε μια θεραπευτική, γονεϊκή και παιδαγωγική σχέση. «Η λειτουργία της πλαισίωσης είναι να ευνοήσει την ανάπτυξη και την αυτονομία του υπό πλαισίωση συστήματος. Το σύστημα που πλαισιώνει κατέχει μια ανώτερη ιεραρχική θέση σε σχέση με το υπό πλαισίωση σύστημα. Χαρακτηρίζεται από μεγαλύτερη σταθερότητα στον χρόνο και από μια ικανότητα προσαρμογής στο υπό πλαισίωση σύστημα» (Cironici & McCulloch, 1994;2004).

Η πλαισίωση των επιμορφούμενων από τον επιμορφωτή παίρνει διάφορες μορφές στο παιχνίδι-δραστηριότητα «Ο αριθμός στόχος» (βλ.

συντακτική (*syntaxique*). Η μαθηματική εργασία πραγματοποιείται και επικοινωνείται με διαφορετικούς τρόπους έκφρασης οι οποίοι συχνά αλληλεπιδρούν.

- ³ Μια μαθηματική έννοια είναι φορέας πολλών σημασιών που περικλείονται σε πολλές διαφορετικές καταστάσεις. Μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι ο μαθητής έχει κατανοήσει το σύνολο της έννοιας όταν θα έχει αντιμετωπίσει όλες τις διαφορετικές καταστάσεις τις οποίες αντιπροσωπεύει η έννοια. Χρειάζεται να κατασκευαστεί ένα σύνολο προβλημάτων-καταστάσεων που η επεξεργασία τους θα οδηγήσει στην ολοκληρωμένη έννοια.

Παράρτημα 2). Καταρχήν, ο επιμορφωτής οφείλει να δράσει στον πυρήνα του διδακτικού συστήματος για να δημιουργήσει:

1. τους τόπους του επιμορφωτή και του επιμορφούμενου,
2. τους χρόνους διδασκαλίας και εκμάθησης και
3. τα αντικείμενα των περιβαλλόντων των καταστάσεων και την οργάνωση των σχέσεων ως προς αυτά τα αντικείμενα

Οι ενέργειες του επιμορφωτή ορίζουν και διασφαλίζουν το πλαίσιο μέσα στο οποίο οι επιμορφούμενοι και ο επιμορφωτής θα αλληλεπιδράσουν έτσι ώστε οι επιμορφούμενοι να μπορέσουν να διαπραγματευθούν το δεδομένο πρόβλημα.

Ενδεικτικά στην σκηνή 1 τους θέτουμε κάθε φορά την εξής ερώτηση. Είστε έτοιμοι; Αυτή η ερώτηση μπορεί να τους κάνει να σκεφτούν ότι κάτι πρέπει να προετοιμάσουν. Αν όχι κάνουμε λίγες παρτίδες και λογικά θα αρχίζουν να αντιλαμβάνονται και να ζητούν λίγα λεπτά για συζήτηση στο πλαίσιο της ομάδας τους με στόχο να συμφωνήσουν μεταξύ τους ένα σχέδιο δράσης.

Στην σκηνή 2, ο επιμορφωτής ρυθμίζει την κατάσταση όπου η δράση της έχει ως τελικό σκοπό την παραγωγή από τους μαθητές-εν ενεργεία δάσκαλοι/ες- μιας κερδοφόρας στρατηγικής, ακόμη και αν αυτή την στιγμή αυτός ο σκοπός είναι σχετικά μακρινός. Ένα σημαντικό μέρος της δράσης του επιμορφωτή συνίσταται σε ένα κατασκευαστικό συμβόλαιο, να διαχέει τις εκφωνήσεις και να διασφαλίζει την μεταχείριση και την συζήτησή τους στην τάξη.

Στην σκηνή 3, ορίζει το καθήκον της κάθε ομάδας, ενώ ταυτόχρονα τους δίνει τον απαραίτητο χώρο και αναθέτει στους επιμορφούμενους να καταγράψουν την στρατηγική τους, να την καταθέσουν σε μία άλλη ομάδα, να παραλάβουν τον κανόνα μίας άλλης ομάδας και να εκτελέσουν το παιχνίδι-δραστηριότητα με την νέα στρατηγική.

Στο πλαίσιο της διδασκαλίας ενός μαθήματος οι έννοιες της 'πλαισίωσης' και της 'πλοήγησης' από τον εκπαιδευτικό υπονοούν άραγε ότι ο εκπαιδευτικός είναι αυτός που χειρίζεται την διαδικασία της μάθησης μέσα από μια γραμμική σχέση με τους μαθητές του; Με άλλα λόγια, η μαθηματική γνώση είναι ένα προϊόν μετάδοσης από

τον Α στον Β και η αντίληψη για την διδασκαλία ταυτίζεται με την άμεση μετάδοση της γνώσης;

Σύμφωνα με την Fivaz & al. (1982) η λειτουργία της πλαισίωσης μπορεί να ευνοήσει την αυτονομία του υπό πλαισίωση συστήματος: την αυτονομία των επιμορφούμενων σε σχέση με τον επιμορφωτή.

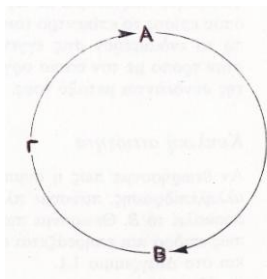
Στην σκηνή 4, ο επιμορφωτής προσκαλεί τους επιμορφούμενους να ακούσουν και να μελετήσουν. Διαμορφώνει συνθήκες αντιπαράθεσης και διαλόγου. Ο επιμορφωτής ενδιαφέρεται για αυτό που κάνουν οι επιμορφούμενοι, τους ακούει και αυτό όχι γιατί περιμένει μια ακριβή απάντηση σε κάτι που ρώτησε (κλασσική λειτουργία του εκπαιδευτικού στο διδακτικό συμβόλαιο) αλλά διότι είναι ικανοί να πουν και να συμμετέχουν στη διαμάχη. Η συζήτηση αυτή μπορεί να οδηγήσει πιο κοντά στην πραγματική κερδοφόρα θεωρία. Σε αυτή την σκηνή επίσης, η ερώτησή του «Λοιπόν, πιστεύεις ότι είναι αυτό;» αναζητά επιβεβαίωση και παρακινεί την ομάδα των επιμορφούμενων να κατασκευάσει μια λογική επιχειρηματολογία. Η φράση που επαναλαμβάνει συχνά «Δεν ξέρω, πρέπει να δούμε ...» κάνει μια δήλωση άγνοιας η οποία ταυτόχρονα αποτελεί παρακίνηση για έρευνα. Η ανάθεση αποτελεί διαδικασία μέσω της οποίας ο επιμορφωτής εκφράζει μια μορφή συμμετρίας με τον επιμορφούμενο στην διδακτική εργασία, αποτελεί είσοδο σε ερευνητική εργασία και με αυτό τον τρόπο νομιμοποιεί την άγνοια του επιμορφούμενου και τον παρακινεί να επενδύσει στην έρευνα (Sensevy & al., 2000).

Κατά συνέπεια, το γεγονός της πλαισίωσης του μαθητή-επιμορφούμενου από τον εκπαιδευτικό - επιμορφωτή δεν σημαίνει ότι ο μαθητής-επιμορφούμενος δεν αυτενεργεί. Αντίθετα, το ενεργό υποκείμενο παρεμβάλλεται μεταξύ ερεθίσματος και αντίδρασης. Για τον Piaget (1937), «Η νοημοσύνη οργανώνει τον κόσμο με το να αυτοοργανώνεται», η μάθηση δηλαδή είναι μια διαδικασία συνεχούς νοητικής επανοργάνωσης. Αυτή η οργάνωση και επανοργάνωση πραγματοποιείται μέσω μιας εμπειρικής και αναστοχαστικής διαδικασίας κατά την οποία το κύριο βάρος για την ερμηνευτική διαδικασία αποδίδεται στο υποκείμενο.

Στο πλαίσιο της σκηνής 2, οι μαθητές-επιμορφούμενοι παίζουν ως συνεργάτες. Το σχέδιο που έχουν συμφωνήσει είναι κάθε φορά ο οδηγός τους για να συμμετέχουν στο παιχνίδι και ταυτόχρονα αυτό το

σχέδιο τίθεται κάθε φορά στην θέση επιβεβαίωσης ή απόρριψης. Σκοπός της κάθε ομάδας είναι να κερδίσει, δηλ. να κατασκευάσει αθροιστικά τον ζητούμενο αριθμό. Με την επανάληψη των παρτίδων η ομάδα αναπτύσσει στρατηγικές, δηλαδή λόγους για τους οποίους το κάθε μέλος της επιλέγει να παίξει έναν αριθμό παρά έναν άλλο. Οι μαθητές – επιμορφούμενοι σε κάθε ομάδα κατασκευάζουν μια αναπαράσταση της κατάστασης που την χρησιμοποιούν σαν μοντέλο για να μπορούν να παίρνουν αποφάσεις. Θα πρέπει βέβαια να παρατηρήσουμε ότι η αλληλεπίδραση με τους συμμαθητές - συνεπιμορφούμενους για το συγκεκριμένο πρόβλημα προς επίλυση επιδρά με καίριο τρόπο στη διαδικασία μάθησης.

4. Μάθηση και αλληλεπίδραση



Στη συστημική προσέγγιση η έννοια της αλληλεπίδρασης, της διάδρασης, (Watzlawick, 1972) είναι θεμέλιος λίθος της λειτουργίας ενός συστήματος, των μελών ενός συστήματος. Κατά τη συστημική θεώρηση, τα ανθρώπινα συστήματα είναι ανοικτά συστήματα, δηλαδή υπάρχει συνεχή ροή των ανταλλαγών (ύλη, ενέργεια ή πληροφορία) με το περιβάλλον (Bertalanffy, 1973). Η αλληλεπίδραση μεταξύ των στοιχείων ενός συστήματος χαρακτηρίζεται από την κυκλικότητα δηλαδή μια σύνθετη διαδικασία επανατροφοδότησης και αμοιβαιότητας. Στο πλαίσιο του συστήματος τάξη για το παιχνίδι - δραστηριότητα “Ο Αριθμός στόχος” συγκροτούνται υποσυστήματα που απαρτίζονται από τους αντίστοιχους μαθητές-επιμορφούμενους που συμμετέχουν σε κάθε ομάδα εργασίας και οι μαθητές συζητούν στο πλαίσιο κάθε ομάδας.

Στην σκηνή 4, οι συνθήκες συνίστανται από επικοινωνίες μεταξύ επιμορφούμενων οι οποίοι προτείνουν και αντιτίθενται. Οι επιμορφούμενοι βρίσκονται σε σύμμετρες θέσεις σε σχέση (α) με τα μέσα δράσης στο περιβάλλον, (β) τις πληροφορίες και (γ) τους κανόνες του διαλόγου. Οι επιμορφούμενοι βρίσκονται σε ανάδραση με 1) το περιβάλλον για δράση και 2) με την άποψη του συνομιλητή. Οι επιμορφούμενοι αλληλεπιδρούν με το περιβάλλον και τα

ανταλλασσόμενα μηνύματα είναι θεωρήματα και αποδείξεις (Παράρτημα 3).

Εάν επικαλεσθούμε την Α' Κυβερνητική περίοδο της συστημικής και μένοντας στενά στην κυβερνητική έννοια της ανάδρασης (feedback) (Bertalanffy, 1973) θα μπορούσαμε να πούμε ότι το άτομο δέχεται, με ανάδραση, την πληροφορία που αφορά τις συνέπειες των πράξεών του και με βάση αυτή την πληροφορία μπορεί να αντιμετωπίσει τις παλαιές πληροφορίες, μπορεί να βγάλει νέα συμπεράσματα και να προσανατολισθεί στην οδό της αλλαγής (επίλυση του προβλήματος). Αυτό όμως δεν επιτυγχάνεται παρά χάριν και εξαιτίας των διαδράσεων των επιμορφούμενων.

Οι Maturana και Varela (1980) εργαζόμενοι πάνω στην αντίληψη, μας προσκαλούν να θεωρήσουμε συγχρόνως τον οργανισμό ως ένα σύστημα προικισμένο με τη δική του εσωτερική λογική και ως μια ενότητα με πολυάριθμες αλληλεπιδράσεις. Ταυτόχρονα ο Maturana αναπτύσσει μια θεωρία για την αυτοοργάνωση ή αυτοποίηση. Ο άνθρωπος ως σύστημα αλλά και ευρύτερα μικροκοινωνικά συστήματα, όπως η οικογένεια, το σχολείο υπόκεινται σε μια διαδικασία αυτοποίησης ανταλλάσσοντας ενέργεια και πληροφορίες με το περιβάλλον. Η διαδικασία αυτή είναι αναγκαία για την εξέλιξη τους και συντελείται με τέτοιο τρόπο ώστε να μην απειλείται η ταυτότητά τους (δηλαδή το ανθρώπινο σύστημα νοείται συγχρόνως ως ανοικτό και κλειστό σύστημα).

Στη σκηνή 2, ζητάμε από τους μαθητές να αναδράσουν με το περιβάλλον και να επαναλάβουν το παιχνίδι με στόχο να κατακτήσουν εκείνη τη γνώση (κανόνα, τεχνική, στρατηγική) ώστε να περάσουν απ' την βασική στρατηγική στην άριστη. Πέρασμα αποτελεί η μείωση ή/και η εξάλειψη της αβεβαιότητας του μαθητή – ομάδα επιμορφούμενων για τις επιλογές που πρέπει να κάνει. Η ομάδα των επιμορφούμενων εκφράζει τις επιλογές και τις αποφάσεις της μέσω των δράσεων της στο περιβάλλον. Ανάδραση θεωρείται η επίδραση του περιβάλλοντος στον ομάδα, η οποία γίνεται αντιληπτή από την ομάδα ως επιβράβευση ή απόρριψη σχετική με την δράση της και της επιτρέπει να διορθώνει την δράση της, να δεχτεί ή να απορρίψει μια υπόθεση και να επιλέξει μεταξύ περισσότερων λύσεων.

Η Patricia McCulloch (1994) μελέτησε ιδιαίτερα τις οριζόντιες αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μαθητών υπογραμμίζοντας την τεράστια δυνατότητα για ολόκληρο το σύστημα τάξη. Κι εκεί έχει μια θέση ο εκπαιδευτικός - επιμορφωτής αφού αναλαμβάνοντας τον σχετικό έλεγχο της τάξης, τον οποίο η McCulloch προτιμά να ορίζει ως μια θέση πλαισίωσης, ο εκπαιδευτικός ευνοεί την ανταλλαγή μεταξύ συνομηλίκων σε μία σχολική τάξη ή μελών μίας ομάδας επαγγελματιών (εν ενεργεία δασκάλων). Κατά συνέπεια απομακρυνόμαστε από μια γραμμική αντίληψη της διδασκαλίας (Α προς Β) και περνούμε σε μια κονστρουκτιβιστική αντίληψη της διδασκαλίας των μαθηματικών όπου πρόκειται πια για μια διαδικασία κατασκευής της επιδιωκόμενης γνώσης. Το άτομο, ο κάθε μαθητής - επιμορφούμενος συμμετέχει ενεργά στη διαδικασία μάθησης και συν-κατασκευάζει με τους υπόλοιπους μαθητές - επιμορφούμενους την λύση του μαθηματικού προβλήματος. Η κατασκευή αυτή συν-υφαίνεται μέσω των αλληλεπιδράσεων των - επιμορφούμενων σε ομάδες εργασίας όπου η δι-υποκειμενικότητα είναι ζητούμενο, ευκταίο και όχι πια πρόβλημα.

Ο Heinz von Foerster (1982) θεωρεί ότι δεν υπάρχει διάκριση μεταξύ παρατηρούντων και παρατηρούμενων συστημάτων. Προτείνει να αντικαταστήσουμε την επιστημολογία της περιγραφής με την επιστημολογία της κατασκευής.

Θα μπορούσαμε λοιπόν να πούμε ότι η προτεινόμενη άσκηση στους μαθητές από τον εκπαιδευτικό έχει ως βάση της την κονστρουκτιβιστική οργάνωση της διδασκαλίας η οποία διασφαλίζει σε γνωστικό επίπεδο την μαθησιακή αυτενέργεια μέσα από την συλλογικότητα.

5. Συστημική και μάθηση

Οι έννοιες της μάθησης και του συστήματος συνδέονται στενά και παρουσιάζουν σημαντικές ομοιότητες. Από την μια πλευρά η μάθηση είναι μια συστημική διαδικασία και από την άλλη πλευρά κάθε συστημική προσέγγιση βασίζεται σε μια ανάγκη μάθησης. Σε κάθε διαδικασία μάθησης το υποκείμενο μαθαίνει να μαθαίνει και γίνεται

όλο και πιο ικανό να επιλύει όχι μόνο το πρόβλημα που τίθεται αλλά και τα προβλήματα γενικότερα.

Πιστεύουμε ότι το να κάνεις μαθηματικά σε σχολικό πλαίσιο είναι πρώτα απ' όλα μια κοινωνική δραστηριότητα και όχι μόνο ατομική. Το πέρασμα από την φυσική σκέψη στην χρήση μιας λογικής σκέψης όπως αυτή των μαθηματικών συλλογισμών συνοδεύεται από κατασκευές και απορρίψεις, από χρήση των διαφορετικών μέσων απόδειξης. Στην σκηνή 4, οι μαθητές κάνουν διακηρύξεις (κάποιας μορφής ολοκληρωμένης ή μερικώς ολοκληρωμένης στρατηγικής επίλυσης, Παράρτημα 3) οι οποίες εξετάζονται απ' τους συνομιλητές που μπορούν όμως να αρνηθούν μια λογική που την θεωρούν λανθασμένη και στην συνέχεια να αποδείξουν με την σειρά τους.

Ο Bateson (1973) διακρίνει τέσσερα επίπεδα μάθησης: το πρώτο αντιστοιχεί σε μια συμπεριφορά αντανakλαστικού είδους, το δεύτερο συνίσταται στο να μαθαίνει, το επόμενο να μαθαίνει πως να μαθαίνει και το τελευταίο επίπεδο θα μπορούσε να οριστεί ως το επίπεδο να μαθαίνει κανείς πως έμαθε να μαθαίνει ή ακόμη να βρει τους λόγους του δικού του λόγου.

Στην σκηνή 2, ο επιμορφωτής επανέλαβε την φράση «τι πρέπει να κάνετε ώστε να βρίσκετε πάντα τον ζητούμενο αριθμό - στόχο» καθώς και μετά τις πρώτες προσπάθειες των διαφορετικών ομάδων «τι συνέβη και τον βρήκατε αυτή τη φορά;» ή σε άλλη ομάδα «τι κάνατε εσείς ώστε να τον βρίσκετε πάντα δηλ. σε όλες τις παρτίδες;» τους παροτρύνει να αναγνωρίζουν τι κάνουν όταν το κάνουν. Με την φράση που την απευθύνει στην κάθε ομάδα χωριστά αλλά και συνολικά προς την τάξη «τι στρατηγική είναι αναγκαίο (μαθηματικά) να ακολουθήσετε ώστε να κερδίζετε πάντα;» τους επαναλαμβάνει την αρχική γενική οδηγία. Παρατηρούμε σε αυτό το σημείο με ποιόν τρόπο ο εκπαιδευτικός ωθεί τους μαθητές να αναγνωρίζουν τις δράσεις τους κάνοντας χρήση των τεχνικών αναγνώρισης – ανακατασκευής των κατάλληλων ενδείξεων που χαρακτηρίζουν τη δράση τους.

Θα θέλαμε όμως να σταθούμε και στην συλλογική διάσταση της τελευταίας φάσης της μαθησιακής διαδικασίας όπου όλα τα διαφορετικά υποσυστήματα της τάξης (εκπαιδευτικός/ διαφορετικές ομάδες εργασίας) αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και αποφαίνονται σχετικά με την 'ορθότητα' της λύσης του προβλήματος. Οι μαθητές -

επιμορφούμενοι καταθέτουν τα θεωρήματα της κάθε ομάδας τα οποία τέθηκαν σε ανοικτό διάλογο στην τάξη. Στην σκηνή 4, συχνά ο επιμορφωτής-εκπαιδευτικός θέτει μια ερώτηση μεταξύ των εκφωνήσεων των μαθητών «μπορεί όλα να είναι σωστά;». Οι εκφωνήσεις των μαθητών είναι κατάλληλες από το γεγονός ότι μπορούν να κάνουν να εξελιχθεί η τάξη στο σύνολό της ως συλλογικά σκεπτόμενη μονάδα. Έτσι, οι μαθητές - επιμορφούμενοι κατέθεσαν ενδιαφέροντα επιχειρήματα που οδήγησαν όλους τους επιμορφούμενους να αποδεχθούν την χρήση της διαίρεσης (διαίρεση του 9 ή διαίρεση του 3 ή κάποιες μικρές παραλλαγές) ως μέρος της λύσης του προβλήματος. Γενική θεώρηση στην σκηνή 4 είναι ότι «Κάνω μαθηματικά δεν σημαίνει μόνον δέχομαι, μαθαίνω και εκπέμπω σωστά μαθηματικά μηνύματα. Διατυπώνω ένα θεώρημα δεν σημαίνει να δώσω μια πληροφορία, αλλά αυτό που αποφαινόμαστε είναι αληθές μέσα σ' ένα σύστημα». Ο von Glasersfeld (1988) αναφέρεται σε 'περιοχές συναίνεσης' όσον αφορά στην παραγωγή γνώσης και όχι σε μια πραγματικότητα με Π κεφαλαίο. Η επισημοποίηση θεωρείται γενικά ως μια θεμελιώδης διάσταση της παραγωγικής εργασίας μιας τάξης, μιας ομάδας κ.λπ.. Ο εκπαιδευτικός - επιμορφωτής και οι μαθητές - επιμορφούμενοι δομούνται ως συλλογικότητα σκέψης για την παραγωγή γνώσης και επιτρέπουν ταυτόχρονα να αξιολογήσουν αυτή την παραγωγή. Προσδιορίζουν τους τρόπους εκτέλεσης και η δομή που διαμορφώνουν αναγνωρίζει την νομιμότητά τους. Συνοψίζοντας με όρους της θεωρίας διδακτικών καταστάσεων θα μπορούσαμε να σημειώσουμε ότι ο μαθητής - επιμορφούμενος τίθεται μπροστά σ' ένα πρόβλημα που πρέπει να προσπαθήσει να λύσει. Κατά την προσπάθεια του αυτή κινητοποιεί τα αποθέματα της γνώσης που διαθέτει, τους τρόπους και τα συστήματα δράσης που έχει χρησιμοποιήσει με επιτυχία μέχρι τότε για να έχει το βέλτιστο αποτέλεσμα. Οι δραστηριότητες, οι αποφάσεις που θα πάρει/ουν διαμορφώνουν το προσχέδιο της έννοιας που χρησιμοποιείται για τη λύση του προβλήματος αυτού και οδηγούν στην έννοια που απαιτείται και στην αποτελεσματική χρησιμοποίηση της. Αφού ο μαθητής - επιμορφούμενος περάσει από μια κατάσταση δράσης, αναζητεί τους τρόπους διατύπωσης των ενεργειών που έχει κάνει ώστε να μπορεί να τις συγκρατήσει συνοπτικά διατυπωμένες στη μνήμη του και να

μπορεί να τις ανακοινώσει στους συμμαθητές - συνεπιμορφούμενους του. Στη συνέχεια το περιβάλλον του μαθητή – επιμορφούμενο επιβάλλουν σ' αυτόν να είναι σε θέση να πείσει για την αποτελεσματικότητα της λύσης που προβάλλει. Χρειάζεται να πείσει για την ορθότητα των αποφάσεων και των προτάσεων του. Έχουμε δηλαδή μια κατάσταση επικύρωσης. Με την ολοκλήρωση της αναζήτησης, της διατύπωσης και της τεκμηρίωσης του κύρους της έννοιας που απαιτείται για τη βέλτιστη αντιμετώπιση του προβλήματος που δόθηκε, καταλήγουμε σε μια έγκυρη και συνοπτική διατύπωση της έννοιας που κατασκευάστηκε από το μαθητή – επιμορφούμενο ή την ομάδα των μαθητών - επιμορφούμενων με τη μορφή κανόνα δράσης που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε παρόμοιες καταστάσεις. Μιλάμε για καταστάσεις επισημοποίησης όπου μια έννοια που κατασκευάστηκε και χρησιμοποιήθηκε από το μαθητή - επιμορφούμενο αποκτά με την παρέμβαση του καθηγητή – επιμορφωτή το χαρακτήρα καθιερωμένης γνώσης.

6. Επίλογος

Η συλλογική μάθηση είναι εκ φύσεως συστημική με την έννοια ότι πρόκειται για μια αλληλεπιδραστική διαδικασία και συνοψίζεται στο να μάθει κανείς να δρα σε ένα πολύπλοκο σύστημα όπου δρουν και άλλοι πρωταγωνιστές, στο να μάθει κανείς να αντιπαραβάλει και να συνδυάζει αναπαραστάσεις και να επεξεργάζεται με άλλους κοινές αναπαραστάσεις. Κατά συνέπεια, η συστημική προσέγγιση μπορεί να βοηθήσει να αναπτυχθούν ανάλογες μαθησιακές διαδικασίες, κυρίως προτείνοντας ανοιχτά μοντέλα αναφορών και αναπαραστάσεων, περισσότερο αναστοχαστικά παρά κανονιστικά.

Όσον αφορά στην κονστρουκτιβιστική οργάνωση της διδασκαλίας, θα θέλαμε να επισημάνουμε ότι επιτρέπει και ενισχύει την εξέλιξη των μαθητών - επιμορφούμενων σε πολλαπλά επίπεδα. Διασφαλίζει την μαθησιακή αυτενέργεια στο γνωστικό επίπεδο, δίνει τη δυνατότητα στον μαθητή - επιμορφούμενο να μάθει να χρησιμοποιεί τον εαυτό του μέσα σε πολύπλοκες διαδραστικές καταστάσεις, επιτυγχάνει συγχρόνως τη συνεργατικότητα μέσα στην ομάδα-τάξη και την αυτοπραγμάτωση.

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να είναι ο εγγυητής της πλαισίωσης της διαδικασίας εξέλιξης των μαθητών - επιμορφούμενων. Με ποιόν τρόπο; Με την διπλή κίνηση της σταθερότητας και της προσαρμογής του εκπαιδευτικού (σύστημα πλαισίωσης) που επιτρέπει στους μαθητές - επιμορφούμενους (υπό πλαισίωση σύστημα) να πειραματιστούν στο γεγονός, να αναγνωριστούν, να ακουστούν με τον ρυθμό τους, τις δυσκολίες τους, τα δυνατά σημεία τους και τις ποιότητές τους και την ίδια στιγμή να σχετιστούν με τους συνομήλικούς τους ή τους συναδέλφους τους που θα φροντίσουν να διατηρήσουν τους στόχους, τις αναμονές, τις απαιτήσεις, μια δυναμική ένταση στα πλαίσια μιας αμφίδρομης σχέσης των μαθητών - επιμορφούμενων στην άσκηση που τους δόθηκε.

Με άλλα λόγια, διαμορφώνεται μια διδακτική τεχνική όπου ο εκπαιδευτικός οργανώνει την αντιπαράθεση των εκφωνήσεων των μαθητών - επιμορφούμενων και την προσαρμογή τους (Sensevy & al., 2000). Από την επιτυχία της εξαρτάται ο μετασχηματισμός του περιβάλλοντος (Comiti & Grenier, 1997). Ένα σημαντικό μέρος της δράσης του εκπαιδευτικού συνίσταται, σε ένα κατασκευαστικό συμβόλαιο, να διαχέει τις εκφωνήσεις και να διασφαλίζει την μεταχείριση και την συζήτησή τους στην τάξη. Στην περίπτωση του παιχνιδιού - δραστηριότητας “Αριθμός - στόχος” είμαστε μπροστά στην αναγνώριση της ανάγκης («βρίσκουμε λοιπόν πράγματα») που φαίνεται να διαμορφώνει όχι μόνο το μαθηματικό και επιστημολογικό σχέδιο του εκπαιδευτικού - επιμορφωτή αλλά επίσης και ένα διδακτικό μέσο «αν βρίσκονται πράγματα» αυτό σημαίνει για τους μαθητές - επιμορφούμενους ότι η αναγνώρισή τους είναι ικανή να τους οδηγήσει στο να κερδίζουν. Αναγνωρίζουμε λοιπόν την θεμελιώδη λειτουργία της κατασκευής ενός διαλόγου σε πολλαπλά επίπεδα (εκπαιδευτικός, μαθητής - επιμορφούμενος, τάξη).

7. Βιβλιογραφία

- Bateson G., (1973). *Steps to an Ecology of Mind* Chandler, Publishing Company New York.
- Bertalanffy von L., (1973). *Théorie générale des systèmes*, Paris, Dunod.
- Brousseau G., (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Comiti C. & Grenier D., (1997). Régulations didactiques et changements de contrats, *Recherches en didactique des mathématiques*, 17 (3), 81-102.
- Curonici C., & McCulloch P. (1997). *Psychologues et enseignants Regards systémiques sur les difficultés scolaires*, De Boeck, Bruxelles.
- Curonici C., & Mccullogh P., (2004). L'approche systémique en milieu scolaire: réflexions 20 ans, *Thérapie familiale*, Genève, Vol. 25, No 4.
- Douady R., (1987). Jeux de cadres et dialectique outil-objet *Recherches en didactique des mathématiques*, n° 7.2, p. 5-32, La Pensée sauvage, Grenoble.
- Evéquoz G. (1990). *Y a-t-il un pilote dans la classe? Le problème de la hiérarchie dans un système artificiel*. *Thérapie familiale*, Vol. XI, 4, 407-423.
- Fivaz E., Fivaz R., & Kaufmann L. (1982) : Encadrement du développement, le point de vue systémique, *Cahiers critiques de thérapie familiale et de pratiques de réseaux*, 4-5, 63-74.
- Forster, von H., (1988). La construction d'une réalité, in Watzlawick (éd.), *L'invention d'une réalité*, Le Seuil.
- Glaserfeld, von E., (1988). Introduction à un constructivisme radical, in Watzlawick (éd.), *L'invention d'une réalité*, Le Seuil.

- Καρκαζή, Ε., & Νικολαντωνάκης, Κ., (2011). Συστημική ανάγνωση μιας μαθηματικής δραστηριότητας σε μία σχολική τάξη, *Πρακτικά 4ου Συνεδρίου της ΕΝΕΔΙΜ με γενικό θέμα Η τάξη ως πεδίο ανάπτυξης μαθηματικής δραστηριότητας*.
- Καρκαζή, Ε., & Νικολαντωνάκης, Κ.,(2009). Σχολείο, Μαθηματικά και Οικογένεια υπό το πρίσμα της Συστημικής Προσέγγισης, *Πρακτικά 3ου Συνεδρίου της ΕΝΕΔΙΜ με γενικό θέμα Μαθηματική Εκπαίδευση και Οικογενειακές Πρακτικές*, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Ρόδος.
- Maturana U., & Varela F., (1980). *Autopoeisis and Cognition*. Pays Bas D. Reidel Publishing Company.
- Maturana H., & Varela F. (1994). *L'arbre de la connaissance*. Addison Wesley France. Paris.
- Mc Culloch P. (1994). *Reconnaissance et partage: agir sur l'échec scolaire à l'école*. In Echec scolaire, ESF, Paris.
- Νικολαντωνάκης, Κ., (2010). Η εφαρμογή της δραστηριότητας «Η Κούρσα για το 20» σε μαθητές Γ' Τάξης Δημοτικού Σχολείου στο Νομό Πέλλας, στο Χασάπη, Δ., *Μαθηματικά και Φυσικές Επιστήμες στην Εκπαίδευση, Πρακτικά 8ου Δηήμερου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, 16 & 17 Απριλίου 2010.
- Pauzé R., & Roy L. (1987). Agrégat ou système : indices d'analyse, *Traces de faire*, 4, 41-57.
- Piaget, J. (1937). *La construction du réel chez l'enfant*, Neuchâtel, Delachaux et Niestlé.
- Sensevy, G., Mercier, A., & Schubauer-Leoni, M-L., (2000). Vers un modèle de l'action didactique du Professeur a propos de la course à 20, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 20, no 3, 263-304.
- Watzlawick P., Bewin J., & Jackson D., (1972). *Une logique de la communication*, Paris, Seuil.
- Vergnaud G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, n° 10.2.3, La Pensée sauvage, Grenoble.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

Περιγραφή του παιχνιδιού-δραστηριότητα “Ο Αριθμός - στόχος”

Κάθε μαθητής και μαθήτρια, σχηματίζει 10 κάρτες αριθμημένες από 0 έως 9. Ο κάθε παίκτης κρατάει τις κάρτες στα χέρια του ή τις τοποθετεί με εμφανή τρόπο μπροστά του πάνω στο θρανίο του. Οι μαθητές χωρίζονται σε ομάδες των 3 ατόμων. Ο δάσκαλος – επιμορφωτής δίνει στις ομάδες την εντολή “Θα σας προτείνω έναν αριθμό τον οποίο θα ονομάσω αριθμό – στόχο”. Κάθε ένας, χωρίς να κοιτάξει τις επιλογές των συμπαιχτών του και χωρίς να συνομιλήσουν, θα επιλέξει μια κάρτα, θα την τοποθετήσει επάνω στο θρανίο στο κέντρο της ομάδας και ο σκοπός της κάθε ομάδας θα είναι το άθροισμα των τριών καρτών των μελών της να δίνει τον αριθμό-στόχο.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

Σενάριο της δραστηριότητας

- Σκηνή 1. Δοκιμάζουμε μια φορά. Τους θέτουμε κάθε φορά την εξής ερώτηση. Είστε έτοιμοι;
- Αυτή η ερώτηση μπορεί να τους κάνει να σκεφτούν ότι κάτι πρέπει να προετοιμάσουν. Αν όχι κάνουμε λίγες παρτίδες και λογικά θα αρχίζουν να αντιλαμβάνονται και να ζητούν λίγα λεπτά για συζήτηση στα πλαίσια της ομάδας τους.
- Σκηνή 2 Ο δάσκαλος προτείνει ορισμένες παρτίδες θέτοντας αριθμούς μικρούς και μεγάλους, καθώς και πολλαπλάσια του 3.
- Σκηνή 3 Ο δάσκαλος ζητάει σε κάθε ομάδα να σημειώσει σε μια κόλλα χαρτιού την στρατηγική της. Οι διαφορετικές ομάδες θα ανταλλάξουν μεταξύ τους τις στρατηγικές. Σ αυτή την φάση θα επαναλάβουμε το παιχνίδι με τις καινούργιες στρατηγικές.

- Σκηνή 4 Κάνουμε καταγραφή των διαφορετικών στρατηγικών και ξεκινάμε έναν διάλογο σχετικά με το αν υπάρχει μια στρατηγική καλύτερη από τις άλλες, και ποια είναι τα χαρακτηριστικά μιας καλής στρατηγικής.
- Σκηνή 5 Παίζουμε το ίδιο παιχνίδι με ομάδες των 4, 5, 6 ή 7 κ.λπ. παιχτών.
- Σκηνή 6 Σ' αυτή την φάση επαναλαμβάνουμε το ίδιο παιχνίδι αλλά χρησιμοποιούμε τις κάρτες από 0 έως 7 ή από 0 έως κ, όπου $\kappa < 9$. Στο τέλος παίζουμε όλοι μαζί σε μια ομάδα.
- Σκηνή 7 Ο δάσκαλος - επιμορφωτής μπορεί να δώσει για έρευνα το ακόλουθο πρόβλημα.
- Έχουμε κάρτες από 0 έως λ. Οι παίχτες είναι χωρισμένοι σε ομάδες των κ. Ο αριθμός-στόχος είναι ν. Εξηγείστε γι' αυτή την περίπτωση την στρατηγική που αποδεχθήκατε στην προηγούμενη φάση.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3

Κατάλογος των στρατηγικών

(1) Χρήση της διαίρεσης του 9

Είναι η διαδικασία που οι περισσότεροι αποδέχονται στο τέλος. Διαιρούμε το ν με 9. Λαμβάνουμε $\nu = 9\pi + \upsilon$. Οι π πρώτοι παίχτες παίζουν 9, ο επόμενος υ και οι επόμενοι 0.

Πολύ σπάνια είναι εκφρασμένη μ' αυτή την μορφή. Την βρίσκουμε συχνότερα στην εξής μορφή

- μεταξύ 0 και 9, ο παίχτης Α παίζει ν, οι παίχτες Β, Γ παίζουν 0.
- μεταξύ 9 και 18, ο παίχτης Α παίζει 9, ο παίχτης Β παίζει $\nu - 9$ και ο παίχτης Γ παίζει 0.
- μεταξύ 18 και 27, οι παίχτες Α και Β παίζουν 9 και ο παίχτης Γ παίζει $\nu - 18$

Με κ παίχτες και κάρτες από 0 έως λ , αρκεί να κάνεις την ευκλείδεια διαίρεση του v με το λ , και παίρνεις $v = \lambda\pi + u$. Οι π πρώτοι παίχτες παίζουν λ , ο παίχτης στην θέση $\pi+1$ παίζει u και οι υπόλοιποι 0. Ο αριθμός κ χρησιμοποιείται για τον καθορισμό του διαστήματος των αριθμών-στόχων. Η δυσκολία βρίσκεται στο να αριθμήσεις τους παίχτες, και για τον καθένα να τοποθετήσεις τον αριθμό του σε σχέση με τον π . Στο τέλος της φάσης 5, αυτή η γενίκευση χρησιμοποιείται για να μοιράσει τους ρόλους του καθένα σε σχέση με το αν ο αριθμός-στόχος βρίσκεται πριν, μέσα ή μετά το διάστημα του.

(2) Χρήση της διαίρεσης με το 3.

Διαιρούμε το v με το 3 και έχουμε $v=3\pi+u$.

Αν $u=0$, ο κάθε παίχτης παίζει π , αν $u=1$, δύο παίχτες παίζουν π και ένας άλλος $\pi+1$, αν $u=2$, ένας παίχτης παίζει π και δύο άλλοι $\pi+1$.

Και αυτή η στρατηγική γενικεύεται. Με κ παίχτες και κάρτες από 0 έως λ , εκτελούμε την διαίρεση του v με το κ , και παίρνουμε $v=\kappa\mu+u$. Οι u πρώτοι παίχτες παίζουν $\mu+1$ και οι άλλοι μ . Ο αριθμός λ δεν παίζει κανέναν ρόλο στους υπολογισμούς, αλλά μόνον στον υπολογισμό του διαστήματος των πιθανών αριθμών.

(3) Άλλη διαδικασία

Αν $v \leq 18$

Αν v είναι άρτιος, οι παίχτες A, B παίζουν $v/2$ και ο παίχτης Γ παίζει 0.

Αν v είναι περιττός, οι παίχτες A και B παίζουν $(v-1)/2$ και ο Γ παίζει 1.

Αν $v > 18$, οι παίχτες A και B παίζουν 9 και ο Γ συμπληρώνει.

Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης

nikolantonakis@noesis.edu.gr

[λευκή σελίδα]

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ ΣΚΑΚΙΟΥ

Σωτήρης Ζωιτσάκος

Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αναγνωρίζοντας την αναγκαιότητα για την ανάπτυξη ενός περισσότερο βιωματικού πλαισίου για την τοποθέτηση προβληματικών μαθηματικών καταστάσεων στην εκπαιδευτική πραγματικότητα, παρουσιάζουμε στην παρούσα εργασία διδακτικές - μαθηματικές δραστηριότητες με βάση το πλαίσιο του σκακιού. Για το ρόλο του παιχνιδιού στην ανάπτυξη του παιδιού και στις νοητικές διεργασίες παρουσιάζουμε τη θεωρία του Vygotsky για το παιχνίδι. Οι δραστηριότητες αναπτύσσονται με βάση το θεωρητικό πλαίσιο του Dienes και μελετώνται ιδιαίτερες πλευρές τους, που διακρίνονται από το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας. Επίσης συζητώνται κάποια πρώτα στοιχεία από μια προσπάθεια εφαρμογής τους στη διδακτική πράξη.

Εισαγωγή

Αρκετά συχνά οι καθηγητές μαθηματικών της β/θμιας εκπαίδευσης προβληματίζονται σχετικά με την έλλειψη ενδιαφέροντος που δείχνουν οι μαθητές για τα μαθηματικά. Ένας από τους λόγους για τους οποίους ίσως να συμβαίνει αυτό είναι μια αποσπασματικότητα που φαίνεται να διέπει τα σχολικά μαθηματικά.. Έτσι ο κανόνας στη σχολική μαθηματική πραγματικότητα είναι ότι οι μαθητές διδάσκονται μαθηματικές προτάσεις τις οποίες ενίοτε τις αποδεικνύουν και στη συνέχεια τις εφαρμόζουν. Τα προβλήματα τίθενται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο, συνήθως ως εφαρμογές της θεωρίας, αν και οι καθηγητές μερικές φορές επιδιώκουν να αναδείξουν συνδετικούς κρίκους.

Φαίνεται ότι λείπει από τη διαπραγμάτευση των προβλημάτων το ότι αυτά δεν τίθενται σε κάποιο πλαίσιο το οποίο να δίνει δυνατότητες παρέμβασης σ' αυτά και στις διαδικασίες προσέγγισής τους. Ένα πλαίσιο το οποίο μπορεί να λειτουργήσει σαν πεδίο διαισθητικής αναφοράς για την αφηρημένη σκέψη. Ένα πλαίσιο στο οποίο ένας μαθητής μπορεί να προκαλέσει μ' ένα πρόβλημα ένα συμμαθητή του, να δεχτεί, να απορρίψει ή να βελτιώσει μια προτεινόμενη λύση, ακόμα και έξω από τα στενά όρια της τάξης.

Λείπει από τη διδακτική διαπραγμάτευση των μαθηματικών, η αντιμετώπισή τους σαν ένα σύστημα κουλτούρας. Είναι χαρακτηριστικός ο ολιστικός τρόπος με τον οποίο απευθύνονται οι διαφημιστικές εταιρείες για την προώθηση προϊόντων στη νεολαία. Παρεμβαίνουν με μια σειρά ταινιών, διαφημιστικές μπλούζες, παιχνίδια, συλλογές, περιοδικά και ότι άλλο μπορεί να φανταστεί κανείς δημιουργώντας έτσι ένα σύστημα, μια κουλτούρα μέσα στο οποίο κάποιος κατευθύνεται να δρα, να σκέφτεται, να επικοινωνεί.

Με βάση τους παραπάνω προβληματισμούς και λαμβάνοντας υπόψη το ρόλο που παίζει το παιχνίδι στην ανάπτυξη του παιδιού, όπως αναπτύσσεται από το Vygotsky στη θεωρία του για το παιχνίδι, αναπτύσσουμε ενδεικτικά κάποιες μαθηματικές δραστηριότητες για διδακτική χρήση, στο πλαίσιο ενός πασιγνώστου παιχνιδιού με κανόνες, του σκακιού με βάση το θεωρητικό πλαίσιο του Dienes για τη μάθηση των μαθηματικών.

Θεωρητικό πλαίσιο

Το θεωρητικό μας πλαίσιο χωρίζεται σε δυο μέρη. Στο πρώτο μέρος γίνεται αναφορά στη θεωρία του Vygotsky για το παιχνίδι και αποτελεί ένα ευρύτερο πλαίσιο τοποθέτησης της εργασίας, επικεντρώνοντας στο ρόλο του παιχνιδιού με κανόνες και στο δεύτερο αναπτύσσονται τα στάδια ανάπτυξης της διαδικασίας μάθησης στα μαθηματικά κατά τον Z. Dienes, που αποτελεί ένα συγκεκριμένο πλαίσιο ανάπτυξης των προτεινόμενων δραστηριοτήτων.

Η θεωρία του Vygotsky για το παιχνίδι

Το παιχνίδι θεωρείται μια έννοια δύσκολη στον ορισμό της (Carvey, 1990). Ένα φαινόμενο σύνθετο και πολύπλοκο που περιλαμβάνει πολύ διαφορετικές πράξεις και εκδηλώσεις (Παπαδόπουλος, 1991). Για το λόγο αυτό έχουν αναπτυχθεί αρκετές θεωρίες για το παιχνίδι στην προσπάθεια να διερευνηθεί ο ρόλος του και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του και να μελετηθούν οι αιτίες που το προκαλούν. Ανάλογα με το ιδεολογικό υπόβαθρο των διαφόρων σχολών αναπτύσσονται και αντίστοιχες θεωρίες για το παιχνίδι. Έτσι έχουμε θεωρίες για το παιχνίδι με βάση βιολογικές, ψυχαναλυτικές, μπιχεβιοριστικές προσεγγίσεις, (Carvey 1990, Αντωνιάδης 1994) αλλά και γνωστικές θεωρήσεις με κύριο εκπρόσωπο τον L. S. Vygotsky στη θεωρία του οποίου κυρίως θα αναφερθούμε.

Ο Vygotsky (2000) αναπτύσσει τη θεωρία του για το παιχνίδι με βάση τρεις άξονες. Αναδεικνύει τον πρωταγωνιστικό ρόλο του παιχνιδιού στην ανάπτυξη του παιδιού επισημαίνοντας ότι δεν αποτελεί το κυρίαρχο χαρακτηριστικό της παιδικής ηλικίας, εντοπίζει τα χαρακτηριστικά που μεταβάλλονται κατά την εξέλιξη του παιχνιδιού και επισημαίνει τους εσωτερικούς μετασχηματισμούς που επιφέρει το παιχνίδι στην ανάπτυξη του παιδιού.

Παιχνίδι και ανάπτυξη

Ο Vygotsky (1997) επισημαίνει τη δυσκολία διάκρισης στα μικρά παιδιά της σκέψης για ένα αντικείμενο από το ίδιο το αντικείμενο. Ήδη όμως από την προσχολική ηλικία εμφανίζεται στο παιδί κάποια διάκριση ανάμεσα στις ιδέες για τα αντικείμενα και στα ίδια τα αντικείμενα. Η σημασία αυτού του γεγονότος είναι ιδιαίτερα μεγάλη γιατί ανατρέπει δραστικά τη σχέση του παιδιού με την άμεση, τη συγκεκριμένη πραγματικότητα αλλά και γιατί αποτελεί ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της ανθρώπινης αντίληψης. Το παιδί από πολύ μικρή ηλικία αντιλαμβάνεται όχι μόνο το χρώμα και το σχήμα αλλά και το νόημα. Παρόμοια αντίληψη δεν υπάρχει στα ζώα. Για παράδειγμα ακόμα και παιδιά της πρωτοσχολικής εκπαίδευσης διακρίνουν στο ρολόι όχι ένα απλά ένα στρογγυλό μαύρο αντικείμενο με δείκτες αλλά αποδίδουν ένα νόημα σ' αυτό. Αποκτούν δηλαδή αντίληψη των πραγματικών αντικειμένων. Αυτός ο διαχωρισμός όμως δεν μπορεί να γίνει αυτόματα, γι' αυτό μέσα από το παιχνίδι παρέχεται στο παιδί ένα μεταβατικό στάδιο προς αυτήν την κατεύθυνση. Έτσι σύμφωνα με το Vygotsky στα ζώα και αρχικά στα παιδιά το αντικείμενο υπερισχύει του νοήματος αλλά από κάποιο σημείο και μετά το νόημα κυριαρχεί επί του αντικειμένου.

Όμως αυτό δε σημαίνει ότι οι ιδιότητες των αντικειμένων δεν έχουν σημασία για το παιδί. Δε σημαίνει δηλαδή ότι στο παιχνίδι οτιδήποτε μπορεί να συμβολίσει οτιδήποτε. Άλλωστε για τον Vygotsky το παιχνίδι δεν είναι συμβολισμός. Ένα σύμβολο θεωρείτε σα σημείο που διατηρεί τις ιδιότητες των αντικειμένων αλλά αλλάζει τη σημασία τους. Στο σημείο αυτό ο Vygotsky επισημαίνει κάτι που μπορεί να μας φανεί χρήσιμο στη διδακτική των μαθηματικών. Πολλές φορές στην μαθηματική εκπαίδευση εμφανίζεται το φαινόμενο οι μαθητές να εκτίθενται σε συμβολισμούς του τύπου όπου οτιδήποτε συμβολίζει οτιδήποτε. Τα παιδιά θεωρούνται ώριμα να διαπραγματευτούν συστήματα συμβόλων χωρίς αναφορικό πλαίσιο. Στην προσπάθεια διάκρισης της σκέψης από το αντικείμενο αυτή έχει αποξενωθεί απ' αυτό θεωρούμενη ότι μπορεί να αποκτήσει νόημα στα πλαίσια ενός συστήματος.

Βέβαια στο παιχνίδι το παιδί διακρίνει τη σημασία από το αντικείμενο χωρίς να έχει συνείδηση αυτής του της πράξης. Έτσι μέσα από το παιχνίδι το παιδί φτάνει σ' ένα λειτουργικό ορισμό των εννοιών ή των αντικειμένων όπου οι λέξεις αποτελούν τμήματα του αντικειμένου.

Η ανάπτυξη του παιχνιδιού

Ο Vygotsky διακρίνει τρεις φάσεις στην ανάπτυξη του παιχνιδιού. Στην πρώτη φάση το πολύ μικρό παιδί αρχίζει με μια φανταστική κατάσταση πολύ κοντά στην πραγματικότητα. Στη δεύτερη φάση καθώς το παιχνίδι αναπτύσσεται, αποκτά νόημα από το σκοπό, του οποίου το καθορίζει. Στο τέλος της ανάπτυξης του παιχνιδιού εμφανίζονται οι κανόνες και το νόημα του παιχνιδιού αποκτάται απ' αυτούς. Δημιουργείται μια νέα σχέση ανάμεσα στο πεδίο της έννοιας και του ορατού κόσμου - δηλαδή ανάμεσα στις καταστάσεις της σκέψης μας και τις πραγματικές καταστάσεις. Έτσι όπως η φανταστική κατάσταση μπορεί να θεωρηθεί σαν μέσο δημιουργίας της αφηρημένης σκέψης έτσι και η ανάπτυξη των κανόνων οδηγεί σε πράξεις με βάση τις οποίες είναι δυνατός ο διαχωρισμός της εργασίας από το παιχνίδι. Δηλαδή ενώ στην προσχολική ηλικία φαίνεται ότι το παιχνίδι για το παιδί αποτελεί μια φανταστική κατάσταση με κρυφούς κανόνες, αντίστροφα στα παιχνίδια με φανερούς κανόνες δημιουργείται πάντα μια φανταστική κατάσταση. Για παράδειγμα στο σκάκι οι δυνατότητες και οι περιορισμοί για τις κινήσεις των κομματιών μπορεί να μη προσφέρουν άμεσα υποκατάστατα για τις σχέσεις της πραγματικής ζωής αλλά δημιουργούν μια φανταστική κατάσταση με συγκεκριμένους κανόνες συμπεριφοράς.

Στο παιχνίδι με κανόνες το παιδί από τη μια είναι ελεύθερο να αποφασίσει για τις πράξεις του από την άλλη οι πράξεις του πρέπει να υπακούν στο νόημα των αντικειμένων. Τα πολύ μικρά παιδιά είναι αδύνατο να διαχωρίσουν το πεδίο του νοήματος από το οπτικό πεδίο, επειδή το νόημα και η οπτική εμπειρία είναι συγχωνευμένα. Κάποια διάσταση ανάμεσα στο νοηματικό και το οπτικό πεδίο εμφανίζεται στην προσχολική ηλικία όπου στο παιχνίδι, η σκέψη διαχωρίζεται από τα αντικείμενα και η δράση είναι επακόλουθο των ιδεών μάλλον παρά των πραγμάτων. Η δράση, βάση των κανόνων αρχίζει να καθορίζεται από ιδέες και όχι από τα ίδια τα αντικείμενα.

Η ψυχαναλυτικές θεωρήσεις που θεωρούν το παιχνίδι του παιδιού να είναι φαντασία σε δράση αντιστρέφονται από τον Vygotsky ο οποίος θεωρεί ότι το παιδί παίζοντας δημιουργεί μια φανταστική δράση ή αλλιώς ότι στους ενήλικες και τα παιδιά του σχολείου η φαντασία είναι το παιχνίδι χωρίς δράση. Έτσι για τον Vygotsky το παιχνίδι δεν αποτελεί μια συμβολική δραστηριότητα παρόμοια με την άλγεβρα όπου με ένα σύστημα σημείων γενικεύεται η πραγματικότητα. Το παιδί δεν πρέπει να αντιμετωπισθεί σα μαθηματικός που χρησιμοποιεί σημεία τα οποία δεν μπορεί να γράψει για να τα απεικονίσει στην πράξη.

Στη εργασία προτείνουμε μια δραστηριότητα όπου το παιδί έχει τη δυνατότητα να δράσει μέσα σε κάποιο πλαίσιο αλλά και να ορίσει κανόνες μέσα στο πλαίσιο αυτό. Γίνεται έτσι ορατό ότι τα παιδιά μπορούν να βρουν νόημα μέσα σε εικονικές καταστάσεις ακόμα και αν αυτές δεν παραπέμπουν άμεσα σε αντίστοιχες καταστάσεις της πραγματικότητας. Η ίδια η λειτουργία με βάση συγκεκριμένους κανόνες μπορεί να αποτελέσει ενδιαφέρον πλαίσιο δράσης αρκεί η δράση αυτή να έχει κάποιο σκοπό, να αναφέρεται σε κάποιο πλαίσιο μέσα στο οποίο το παιδί μπορεί να δράσει.

Η δραστηριότητα του παιδιού με βάση κάποιο παιχνίδι δεν είναι απαραίτητο να σχετίζεται άμεσα με την πραγματικότητα δηλαδή να έχει χαρακτηριστικά μοντελοποίησης της ή εφαρμογής σ' αυτή. Οι ενέργειες που αναπτύσσονται μέσα στις δράσεις με κανόνες αντιστοιχούν σε σχέσεις που αναπτύσσονται σε πραγματικές καταστάσεις και συσχετίζουν νοητικές και πραγματικές καταστάσεις.

Η δράση σε μια φανταστική κατάσταση διδάσκει το παιδί να ρυθμίζει τη συμπεριφορά του όχι μόνο με την άμεση αντίληψη των αντικειμένων ή βάσει της κατάστασης που το επηρεάζει άμεσα αλλά και βάση του νοήματος αυτής της κατάστασης.

Η διαδικασία μάθησης των μαθηματικών κατά τον Dienes

Ο Zoltan Paul Dienes μια από τις μεγάλες φυσιογνωμίες που έβαλε το στίγμα του στις απαρχές της διδακτικής των μαθηματικών αναπτύσσει (Dienes Z. 1966, Πατρώνης Τ., Σπανός Δ., 1996) κάποιες βασικές αρχές για τη διδασκαλία των μαθηματικών.

- α) βάζει το μαθητή στο κέντρο της διδακτικής διαδικασίας με το ρόλο του δασκάλου σ' αυτόν του προμηθευτή του κατάλληλου υλικού και ένα γενικότερο συντονιστικό και συμβουλευτικό ρόλο.
- β) Στοχεύει στη ανάδειξη των δομικών χαρακτηριστικών της μαθηματικής γνώσης.
- γ) Αναδεικνύει τη σημασία του συμβολισμού στη μαθηματική γνώση (ιδιαίτερα αυτού που επινοείται από τους ίδιους τους μαθητές.
- δ) Έχει μεγάλη ευρύτητα στόχων όσον αφορά το βαθμό δυσκολίας (από την απλή παρατήρηση-εμπειρισμό μέχρι την αξιωματικοποίηση).

Διακρίνει μάλιστα τα παρακάτω στάδια για τη μάθηση των μαθηματικών :

- α) Στο πρώτο στάδιο γίνεται γνωριμία και αλληλεπίδραση του μαθητή με το διδακτικό υλικό. Τα παιδιά εξερευνώντας το γύρω τους κόσμο, «χτίζουν» πάνω στις πρώτες εμπειρίες τους, τη γνώση των αντικειμένων πρώτα, και σιγά-σιγά πάνω σ' αυτή τις πρώτες έννοιες. Το υλικό πρέπει να είναι ποικιλόμορφο και να παρέχει ερεθίσματα για την ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών.
- β) Στο δεύτερο στάδιο οι μαθητές εισάγονται σε ένα πλαίσιο νόμων και ομαλοτήτων, οι οποίοι αποτελούν τους κανόνες του παιχνιδιού. Για τη σημασία των κανόνων του παιχνιδιού στην εξέλιξη των εσωτερικών λειτουργιών έχουμε αναφερθεί προηγουμένως στην γνωστική θεώρηση του Vygotsky για το παιχνίδι. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η ικανότητα αλλαγής των κανόνων ενός παιχνιδιού που θεωρείται, μια ικανότητα πολύ σπουδαία για την κατασκευή της μαθηματικής γνώσης και παραπέρα για τη διαμόρφωση μιας αυτοδύναμης προσωπικότητας.
- γ) Στο τρίτο στάδιο από τα πολλά διαφορετικά παιχνίδια που έχει παίξει αναζητούνται κοινά χαρακτηριστικά ή κάποια κοινή δομή στην οποία υπακούουν οι διαφορετικές καταστάσεις. Η διαδικασία αυτή συντείνει στην ανάπτυξη των λειτουργιών της γενίκευσης και της αφαίρεσης.

- δ) Στο τέταρτο στάδιο γίνεται συμβολική αναπαράσταση της κοινής δομής, μια διαδικασία που έχει ιδιαίτερη σημασία για το προχώρημα της διαδικασίας της αφαίρεσης – γενίκευσης.
- ε) Στο πέμπτο γίνεται στοχασμός πάνω στη γενίκευση, έρευνα και επινόηση γενικών ιδιοτήτων να μπουν σε λογική τάξη τα προηγούμενα στάδια, να χρησιμοποιηθεί περισσότερο θεσμικός συμβολισμός.
- στ) Στο τελευταίο στάδιο επιδιώκεται ο μαθητής να βάλει σε τάξη την περιγραφή που επιχειρούσε να κάνει στα προηγούμενα στάδια και θα μπορούσε να παρομοιαστεί με το τελευταίο στάδιο της ιστορικής εξέλιξης μιας επιστήμης ή ενός κλάδου: την αξιωματική θεμελίωση. Όπως παρατηρεί ο Dienes, το μεγάλο σφάλμα της παραδοσιακής διδασκαλίας των μαθηματικών είναι ότι ξεκινάει σχεδόν απ' αυτό το τελικό στάδιο αντί να καταλήγει σ' αυτό (Πατρώνης, Σπανός 1996).

Προβληματισμοί ανάπτυξης των δραστηριοτήτων

Ο Hans Freudenthal (1983) διαπιστώνει στη διαδικασία γέννησης και εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών (ή θεωριών), μια τάση αποσύνδεσης των εννοιών από το αρχικό τους πλαίσιο, μια απώλεια περιεχομένου (της ουσίας των μαθηματικών οντοτήτων, μια απογύμνωση από την ουσία τους και βαθμιαίας αντικατάστασής τους από τους αφηρημένους κανόνες τους οποίους χαρακτηρίζουν ένα σύστημα. Η τάση αυτή που χαρακτηρίζει ιστορικά τη μαθηματική δραστηριότητα, ο Freudenthal τη χαρακτηρίζει με τον όρο αποοντολογιοποίηση (an-ontologization). Η τάση αυτή ενώ θεωρείται απόλυτα δικαιολογημένη από τον Freudenthal επισημαίνεται ωστόσο ότι «είναι προϊόν της ιστορικής και προσωπικής εξέλιξης των ατόμων και δεν μπορεί να υποτεθεί εκ των προτέρων ότι ο μαθητής μπορεί να εκτεθεί σε αποοντολογιοποιημένα μαθηματικά»(Freudenthal 1983, σ. 81).

Ο Freudenthal (1983) διατυπώνει επίσης την ιδέα της διδακτικής φαινομενολογίας ως εξής: «Η φαινομενολογία μιας μαθηματικής ιδέας είναι η περιγραφή της σε σχέση με τα φαινόμενα στα οποία η ιδέα αυτή δημιουργήθηκε, και με εκείνα τα φαινόμενα στα οποία η ιδέα αυτή επεκτάθηκε, μέσα από τις ανθρώπινες διαδικασίες μάθησης. Στο

πλαίσιο των διαδικασιών μάθησης των παιδιών, η φαινομενολογία αυτή είναι η διδακτική φαινομενολογία.».

Όμως σε ορισμένες περιπτώσεις τα φαινόμενα στα οποία μια μαθηματική ιδέα δημιουργήθηκε μπορεί να είναι εξαιρετικά υψηλών απαιτήσεων. Έτσι στην εκπαιδευτική πραγματικότητα καταφεύγουμε σε κάποιες καταστάσεις που άλλες φορές υπάρχει μια πηγαία φαινομενολογική προσέγγιση και σε άλλες δημιουργούνται απίθανες καταστάσεις προκειμένου να δικαιολογηθεί οπωσδήποτε ο μαθηματικός φορμαλισμός.

Με βάση το παραπάνω σκεπτικό προτείνουμε προβληματικές καταστάσεις που γίνεται προσπάθεια το πρόβλημα να δώσει νόημα στην έννοια και όχι το αντίστροφο όπως συνήθως συμβαίνει, εντοπίζοντας όμως τα σημαντικά θέματα που στοχεύουμε να αναδειχθούν.

Ο Guy Brousseau (1983, 1986) έδειξε τρεις διαφορετικούς τρόπους λειτουργίας της μαθηματικής γνώσης, που εκδηλώνονται ανάλογα με το είδος της κατάστασης στην οποία βρίσκεται το υποκείμενο. Έτσι μερικές καταστάσεις που χρειάζονται μόνο τη λειτουργία ενός αυθόρμητου μοντέλου δράσης, που μπορεί να μη γίνονται συνειδητές από το υποκείμενο είναι οι *καταστάσεις δράσης*. Άλλες καταστάσεις οι οποίες απαιτούν από το υποκείμενο ρητά τις αποφάσεις που πήρε στις καταστάσεις δράσης λέγονται *καταστάσεις διατύπωσης*. Και τέλος έχουμε τις *καταστάσεις εγκυροποίησης* στις οποίες αναπτύσσονται επιχειρήματα, αιτιολογήσεις, εμπειρικές επαληθεύσεις, αποδεικτικές διαδικασίες. Πολύ συχνά όμως συμβαίνει ένα υποκείμενο που χρησιμοποιεί μέσα συμβολικής αναπαράστασης να δρα και στα τρία παραπάνω είδη καταστάσεων. Με τη διαδικασία αυτή το υποκείμενο αναστοχάζεται, αναβιώνει εσωτερικά τα δρώμενα μια συγκεκριμένης κατάστασης και τις σκέψεις που έκανε πάνω σ' αυτά τα δρώμενα.

Ο Brousseau (1983) επισημαίνει ότι η σημασία μιας έννοιας συνίσταται .όχι μόνο στην αλήθεια αλλά και στο ενδιαφέρον ενός θεωρήματος που είναι εκείνο που κάνει αυτή τη γνώση να θεωρείται ως βέλτιστη λύση, μέσα σ' ένα πεδίο ορισμένο από τις συνθήκες που βάσει το υποκείμενο ή μπαίνουν εγγενώς από τα πράγματα και αυτός ο ιδιαίτερος χαρακτήρας που κάνει αυτή τη γνώση κατάλληλη. Το νόημα μιας μαθηματικής γνώσης καθορίζεται, όχι μόνο από το

σύνολο των καταστάσεων, που αυτή η γνώση έχει αποκτηθεί, όχι μόνο από το σύνολο των καταστάσεων, στις οποίες το υποκείμενο χρησιμοποίησε τη γνώση ως μέσο για λύση, αλλά επίσης από το σύνολο των αντιλήψεων, από τα λάθη (που τώρα αποφεύγονται), από την ‘οικονομία’ που γίνεται, τις εκφωνήσεις που αναθεωρούνται.

Ανάλυση δραστηριοτήτων

Χρησιμοποιούμε ως πλαίσιο διατύπωσης και διερεύνησης μαθηματικών προβληματικών καταστάσεων το πλαίσιο που αναπτύσσεται ένα πασίγνωστο και με μεγάλη παράδοση παιχνίδι, το σκάκι. Συγκεκριμένα διατυπώνουμε προβλήματα που αναφέρονται σε μια σκακιέρα με βάση τις κλασικές κινήσεις των κομματιών του σκακιού (πύργος, βασιλιάς, βασίλισσα, ίππος, αξιωματικός). Θα μπορούσαμε όμως να κάνουμε και κάποιες παραλλαγές. Για παράδειγμα να θεωρούμε προβλήματα σε σκακιέρες μικρότερων ή μεγαλύτερων διαστάσεων από την κλασική (8x8). Επίσης θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε κομμάτια τα οποία κινούνται με τρόπο τον οποίο εμείς θα ορίσουμε. Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να ορίσουμε ένα κομμάτι το οποίο θα κινείται μόνο σε οριζόντια ή κατακόρυφη κατεύθυνση αλλά μόνο κατά ένα τετράγωνο κάθε φορά.

Προβλήματα ανεξαρτησίας και καλυπτικότητας στη σκακιέρα

Με βάση το προηγούμενο πλαίσιο έχουν διατυπωθεί αντίστοιχα προβλήματα¹ εκ των οποίων εδώ θα αναπτύξουμε δυο.

Στην πρώτη κατηγορία προβλημάτων δίνεται η δυνατότητα διερεύνησης λύσεων με εμπειρικό τρόπο, η διατύπωση και ο έλεγχος εικασιών, η ανάπτυξη κάποιου αναγκαίου συμβολισμού, η ανάπτυξη επιχειρημάτων αιτιολόγησης των λύσεων, η προσπάθεια γενίκευσης των συμπερασμάτων.

Τέτοια είναι τα προβλήματα ανεξαρτησίας (Independence problems) και τα προβλήματα καλυπτικότητας (Domination ή covering problems).

Στα προβλήματα ανεξαρτησίας δίνεται ένα βασικό κομμάτι (πύργος, βασιλιάς, βασίλισσα, ίππος, αξιωματικός) και ζητείται να βρεθεί ο μέγιστος αριθμός όμοιων κομματιών τα οποία μπορούν να

τοποθετηθούν σε μια σκακιέρα έτσι ώστε κανένα κομμάτι να μην απειλεί το άλλο. Στα προβλήματα καλυπτικότητα ζητείται ο ελάχιστος αριθμός κομματιών (πύργος, βασιλιάς, βασίλισσα, ίππος, αξιωματικός) ενός είδους που πρέπει να τοποθετηθούν σε μια σκακιέρα ώστε όλα τα τετράγωνα της σκακιέρας να απειλούνται από τα τοποθετημένα κομμάτια.

Στα παραπάνω προβλήματα δίνεται η δυνατότητα οι μαθητές να ξεκινήσουν από τις απλούστερες περιπτώσεις και να προχωρήσουν στις πιο σύνθετες. Συγκεκριμένα οι μαθητές μπορούν να αντιμετωπίζουν τα προβλήματα ξεκινώντας από σκακιέρες μικρότερων διαστάσεων π.χ. 3×3 να προχωρούν σταδιακά στη κλασική σκακιέρα 8×8 και να αναζητούν γενικεύσεις στην νχν. Επίσης θα μπορούσαν να εξετάζουν σε κάθε περίπτωση αν η λύση που βρήκαν είναι μοναδική ή υπάρχουν και άλλες. Αν κάποιος προτείνει μια λύση οι υπόλοιποι θα μπορούν να την επιβεβαιώσουν ή να την απορρίψουν τεκμηριώνοντας τη γνώμη τους σε κάθε περίπτωση. Θα μπορούσαν επίσης να διατυπώσουν τα δικά τους μαθηματικοσκακιστικά προβλήματα.

Ας δούμε όμως πιο αναλυτικά μια δυνατότητα εφαρμογής της προτεινόμενης δραστηριότητας. Σε πρώτη φάση όπως είπαμε οι μαθητές έρχονται σε επαφή με το υλικό, και γνωρίζουν τους κανόνες του παιχνιδιού και του προβλήματος. Για παράδειγμα μπορεί να αναζητηθεί ο μέγιστος αριθμός των πύργων που μπορεί να τοποθετηθεί σε μια σκακιέρα 3×3 ώστε ο ένας να μην απειλεί τον άλλο. Σχετικά εύκολα μπορεί να προκύψει ότι ο αριθμός αυτός είναι 3. Έτσι μπορούν να ανακύψουν κάποιες εικασίες σχετικά με τον αντίστοιχο αριθμό στη σκακιέρα 8×8 ή στη σκακιέρα νχν. Μεγαλύτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η προσπάθεια αιτιολόγησης της απάντησης. Σε μια τέτοια προσπάθεια οι μαθητές πρέπει να υπολογίσουν τα τετράγωνα που καλύπτονται από περισσότερους από ένα πύργους. Επίσης ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο υπολογισμός των διαφορετικών λύσεων σε κάθε περίπτωση. Μάλιστα στην περίπτωση αυτή οι μαθητές μπορούν να έρθουν σε επαφή με τις ισοδύναμες λύσεις που προκύπτουν από στροφή της σκακιέρας κατά 90° , 180° και 270° .

Για τα προβλήματα καλυπτικότητας μπορεί αρχικά να ζητηθεί από τους μαθητές να βρουν τον ελάχιστο και το μέγιστο αριθμό τετραγώνων που καλύπτει κάποιο βασικό κομμάτι του σκακιού. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να διερευνηθεί για διάφορα κομμάτια του σκακιού και σε σκακιέρες διαφόρων διαστάσεων. Μπορεί στη συνέχεια να εξετασθεί το πλήθος των τετραγώνων που καλύπτουν δυο όμοια βασικά κομμάτια σε σκακιέρα συγκεκριμένης διάστασης, το πλήθος των τετραγώνων που παραμένουν ακάλυπτα αλλά και το πλήθος των τετραγώνων που καλύπτονται από δυο κομμάτια. Έτσι δημιουργούνται προϋποθέσεις αιτιολόγησης των αρχικών απαντήσεων των μαθητών.

Αποστάσεις και μετρικές στη σκακιέρα

Μια άλλη κατηγορία προβλημάτων που μπορεί να τεθεί στο συγκεκριμένο πλαίσιο είναι προβλήματα που σχετίζονται με την έννοια της απόστασης. Οι μαθητές στο σχολείο διδάσκονται μόνο την ευκλείδεια μετρική για οποία γνωρίζουν κάποιες ιδιότητες οι οποίες μη γνωρίζοντας καμία άλλη μετρική, θεωρούνται κατά κάποιο τρόπο φυσικές. Έτσι, διερευνώντας και άλλες μετρικές μπορούν να ανακαλύψουν τα κοινά χαρακτηριστικά της έννοιας της μετρικής.

Με βάση την Ευκλείδεια μετρική αν $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ δυο σημεία ενός συστήματος συντεταγμένων τότε η απόστασή τους υπολογίζεται από τον τύπο $d(A,B)=\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Σε μια σκακιέρα θα μπορούσαν να οριστούν διαφορετικές μετρικές από την ευκλείδεια οι οποίες να παρουσιάζουν νόημα για τους μαθητές.

Μια τέτοια διαφορετική μετρική μπορεί να αναζητηθεί από τον ελάχιστο αριθμό κινήσεων που απαιτείται σ' ένα βασιλιά για να μεταβεί από ένα σημείο της σκακιέρας σ' ένα άλλο. Οι μαθητές στην προσπάθειά τους να υπολογίσουν μια τέτοια απόσταση θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν μ' ένα πιο ίσως 'φυσιολογικό' τρόπο απ' ότι συνήθως, την ιδέα του συστήματος συντεταγμένων. Έτσι μπορούν να οδηγηθούν στη μετρική του Chebychev που είναι $D_c = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$. Κάποια ζητήματα τα οποία αξίζει να

διερευνηθούν είναι τα εξής:

- α) Η διαδρομή που πρέπει να ακολουθήσουν για να μεταβούμε από ένα σημείο σ' ένα άλλο στην ευκλείδεια γεωμετρία είναι μοναδική και είναι η γνωστή μας ευθεία. Στην περίπτωση της σκακιέρας είναι μοναδική η ελάχιστη διαδρομή που πρέπει να ακολουθήσει ο βασιλιάς για να μεταβεί από ένα τετράγωνο σ' ένα άλλο;
- β) Μια βασική σχέση που ισχύει για την ευκλείδεια μετρική είναι η τριγωνική ανισότητα. Δηλαδή αν A, B, Γ τρία σημεία του επιπέδου τότε; $d(A, \Gamma) \leq d(A, B) + d(B, \Gamma)$. Ισχύει άραγε η σχέση αυτή και για την μετρική του Chebychev;. Επίσης η προηγούμενη σχέση ισχύει ως ισότητα όταν τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά. Ισχύει κάτι αντίστοιχο στη νέα μετρική;
- γ) Σε ποιες περιπτώσεις οι δυο μετρικές είναι ίσες;

Μια άλλη μετρική η οποία μπορεί να αναδείξει ενδιαφέροντα ζητήματα στα μαθηματικά είναι η μετρική της γεωμετρίας των ταξί η οποία είναι γνωστή και ως απόσταση Manhattan ή απόσταση L_1 η οποία δίνεται από τον τύπο $t(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$. Στη σκακιέρα η μετρική αυτή μας δίνει την ελάχιστη απόσταση (σε πλευρές τετραγώνου) για να μεταβεί ένα πύργος από ένα τετράγωνο $A(x_1, y_1)$ σ' ένα τετράγωνο $B(x_2, y_2)$. Αλλιώς είναι ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων που απαιτούνται για να μεταβεί ένα κομμάτι που κινείται όπως ο πύργος αλλά κατά ένα τετράγωνο κάθε φορά για να μεταβεί από μια θέση σε μια άλλη.

Κάποια ζητήματα εκτός από τα προηγούμενα που θα μπορούσαν να διερευνηθούν είναι τα εξής:

- α) Να βρεθεί η σχέση που συνδέει τις μετρικές d, t αν είναι γνωστός ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB .
- β) Να μελετηθεί η έννοια του κύκλου στη γεωμετρία των ταξί.
- γ) Να μελετηθεί η έννοιας της γωνίας και του μέτρου της στη γεωμετρία των ταξί.
- δ) Να μελετηθεί η ισχύς των κριτηρίων ισότητας τριγώνων στη γεωμετρία των ταξί.

ε) Να μελετηθούν οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις στη γεωμετρία των ταξί.

στ) Να μελετηθούν οι κωνικές τομές στη γεωμετρία των ταξί.

Κάποια 'παράξενα' συμπεράσματα από τις παραπάνω μελέτες είναι: Ο κύκλος στη γεωμετρία των ταξί είναι τετράγωνο. Ο λόγος του μήκους του «κύκλου» προς τη διάμετρό του είναι 4. Υπάρχει ορθογώνιο και ισόπλευρο τρίγωνο. Αν δυο τρίγωνα έχουν τις δυο πλευρές τους ίσες και τις περιεχόμενες σ' αυτές γωνίες ίσες τότε τα τρίγωνα δεν είναι αναγκαία ίσα. (Δ. Γ. Κοντογιάννης, 1991, Βλαχάκη Α. 2011).

Συζήτηση

Με την παρούσα εργασία προτείνουμε ένα πλαίσιο τοποθέτησης μαθηματικών προβλημάτων για τη διδακτική πράξη με βάση το σκάκι η οποία στηρίζεται στη θεωρία του Vygotsky για το παιχνίδι, λαμβάνοντας υπόψη τις βασικές αρχές για τη μάθηση των μαθηματικών από τον Dienis. Στη πρότασή μας γίνεται μια προσπάθεια τα παιδιά να διερευνήσουν σημαντικές μαθηματικές ιδέες μέσα σε ένα πραγματικό πλαίσιο. Στόχος είναι να γίνει μια προσπάθεια αποστασιοποίησης της σημασίας από το πραγματικό πλαίσιο αλλά μέσα από μια συνειδητή διαδικασία της μεταξύ τους διάκρισης. Ενδεικτικά οι προτεινόμενες δραστηριότητες διέπονται από τα εξής χαρακτηριστικά:

- α) Δίνουν τη δυνατότητα να έρθουν σε επαφή με τη μαθηματική διεργασία μαθητές με μεγάλο εύρος στο μαθηματικό τους υπόβαθρο αφού δίνουν τη δυνατότητα να διερευνηθούν προβλήματα από εξαιρετικά απλά έως ιδιαίτερα σύνθετα μέσα σ' ένα ενιαίο πλαίσιο.
- β) Υπάρχει η δυνατότητα δημιουργίας προβλημάτων, τρόπων αντιμετώπισης και κανόνων προσέγγισης από τους ίδιους τους μαθητές προσφέροντας έτσι δυναμικά χαρακτηριστικά στη δραστηριότητα, αντίστοιχα με το παιχνίδι.
- γ) Οι μαθηματικές ιδέες που προσεγγίζονται έχουν ιδιαίτερο βάθος δίνοντας έτσι τη δυνατότητα στους μαθητές να έρχονται σε επαφή με σημαντικές μαθηματικές ιδέες οι οποίες αποκτούν κάποιο

νόημα. Με κάποιες απ' αυτές μάλιστα οι μαθητές σπάνια έρχονται σε επαφή στην κλασική μαθηματική τους εκπαίδευση και σε αρκετές υπάρχει αρκετή προκλητικότητα, αφού δε συμβαδίζουν με τη διαμορφωμένη διαισθητική τους αντίληψη.

- δ) Το πλαίσιο λειτουργίας της δραστηριότητας είναι αρκετά βιωματικό δίνοντας τη δυνατότητα για διερεύνηση εικασιών, τεκμηρίωση, αποδοχή ή απόρριψή τους αναβαθμίζοντας το επικοινωνιακό πλαίσιο της διαπραγμάτευσης. Αναδεικνύονται με αυτόν τον τρόπο τα μαθηματικά ως πολιτισμικό ανθρώπινο εξελισσόμενο δημιούργημα, κάτι που φαίνεται να λείπει από την παραδοσιακή διδασκαλία τους.

Κάποια από τα προηγούμενα προβλήματα διαπραγματεύτηκαν μαθητές του Μουσικού Λυκείου Παλλήνης. Συγκεκριμένα μια ομάδα μαθητών της Α' Λυκείου διερεύνησαν προβλήματα ανεξαρτησίας και προβλήματα καλυπτικότητας στα πλαίσια της ερευνητικής τους εργασίας: «Μήπως αδικούμε το σκάκι ονομάζοντάς το παιχνίδι;»².

Μια άλλη ομάδα μαθητών της Γ' Λυκείου διερεύνησε προβλήματα σχετικά με τις μετρικές στη σκακιέρα κατά τη διάρκεια της πενταήμερης εκδρομής! Οι μαθητές που ενεπλάκησαν με τα προβλήματα δεν θα χαρακτηρίζονταν όλοι ως ιδιαίτερα 'καλοί μαθητές'. Όμως φάνηκε ότι χαρακτηρίζονται από ένα ιδιότυπο τρόπο σκέψης με τον οποίο δεν τα καταφέρνουν πάντα στα τυπικά σχολικά μαθηματικά προβλήματα. Επίσης φάνηκε να επιδεικνύουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον μη επαληθεύοντας έτσι το νόμο της ήσσονος προσπάθειας.

Συγκεκριμένα η μετρική της γεωμετρίας των ταξί βρέθηκε χαρακτηριστικά εύκολα. Όπως εύκολα βρέθηκε και ότι ο κύκλος στη γεωμετρία των ταξί είναι τετράγωνο. Για την εύρεση των ελάχιστων κινήσεων που μπορεί να κάνει ο βασιλιάς για να μεταβεί από ένα σημείο της σκακιέρας σ' ένα άλλο (μετρική του Chebychev) τα παιδιά έκαναν την εξής κατηγοριοποίηση. Αν τα σημεία είναι: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ τότε μια περίπτωση είναι τα σημεία να βρίσκονται στην ίδια διαγώνιο. Αυτό το εκφράσανε αλγεβρικά από τη σχέση $|x_2 - x_1| = |y_2 - y_1|$. Τότε η ζητούμενη απόσταση είναι $D = |x_2 - x_1| = |y_2 - y_1|$. Αν τα σημεία απέχουν οριζόντια λιγότερο από όσο

απέχουν κατακόρυφα, δηλαδή $|x_2 - x_1| < |y_2 - y_1|$ τότε η απόστασή τους είναι $D = |x_2 - x_1| + \left| |y_2 - y_1| - |x_2 - x_1| \right|$. Δηλαδή, όπως εξήγησαν προσθέτουν στη διαγώνια απόσταση τη διαφορά της κατακόρυφης από την οριζόντια απόσταση. Αντίστοιχα, αν η οριζόντια απόσταση είναι μεγαλύτερη από την κατακόρυφη τότε η απόσταση είναι $D = |y_2 - y_1| + \left| |y_2 - y_1| - |x_2 - x_1| \right|$. Είναι προφανές ότι η προσέγγισή τους είναι ισοδύναμη με τη μορφή $D_c = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$ αλλά εννοιολογικά είναι πολύ πιο πλούσια από αυτή. Βέβαια η μορφή D_c είναι αρκετά πιο λυτή δημιουργώντας τους ένα αίσθημα απογοήτευσης όταν συγκρίναν τη μορφή D_c με τον πολύπλοκο τύπο τους. Επίσης, οι μαθητές είδαν ότι τύποι οι οποίοι με μια πρώτη ματιά έχουν διαφορετική μορφή, μπορεί να είναι ουσιαστικά ισοδύναμοι.

Από τη μικρή αυτή διδακτική εμπειρία, φαίνεται ότι η παιγνιώδης ενασχόληση μαθητών με τα μαθηματικά, βοηθάει στην ανάπτυξη ενός διερευνητικού - επικοινωνιακού πλαισίου, στο οποίο μπορούν οι μαθητές να λειτουργούν ομαδικά. Επίσης τέτοιες δραστηριότητες μπορούν να λειτουργήσουν προωθητικά για την ανάπτυξη της αφηρημένης σκέψης, έχοντας ένα πραγματικό υπόβαθρο.

Υποσημειώσεις

¹http://en.wikipedia.org/wiki/Category:Mathematical_chess_problems

²http://www.pmglp.org/index.php?option=com_content&view=article&id=86%3Aprojects&catid=30%3A2010-12-02-00-29-14&lang=el&limitstart=1

Βιβλιογραφία

- Αντωνιάδης, Α. (1994): «Το παιχνίδι». Θεσσαλονίκη University Studio Press.
- Βλαχάκη Λαμπρινή (2011): «Μετρική προσέγγιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με μοντέλα – Το Taxicab μοντέλο και η χρήση στη διδακτική των Μαθηματικών», Διπλωματική εργασία στο ΠΜΣ 'Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών' Αθήνα.
- Brousseau, Guy (1983): «*Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques*» Rech. En Didact. des Math. 4.2
- Brousseau, Guy (1986): «*Fondements et methodes de la Didactique des Mathematiques*» Rech. en Did. Des Math. 7.2
- Carvey, C. (1990): «Το παιχνίδι: η επίδραση στην εξέλιξη του παιδιού». Κουτσουμπός Α.Ε
- Dienes, Zoltan. (1966): «Construction des Mathematiques» Press Univ. de France
- Κοντογιάννης, Δ. (1991): «Η Γεωμετρία των ταξί». Περιοδικό Ευκλείδης Β' τ.1, Αθήνα Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.
- Πατρώνης Τάσος. Σπανός Δημήτρης (1996): «Σύγχρονες θεωρήσεις και έρευνες στη μαθηματική παιδεία». Αθήνα Πνευματικός.
- Παπαδόπουλος, Νικόλαος (1991) "Ψυχολογία: σύγχρονα θέματα: σπουδές, εφαρμογές, κοινωνικοποίηση, παιχνίδι, μάθηση, επιθετικότητα, ωριμότητα, περιβάλλον, προσωπικότητα, εφηβεία, πειθαρχία, αυτοχειρία, ναρκωτικά Έκδοση 3^η, (Χ.Ο) Αθήνα
- Freudental, Hans (1983): «*Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*» Reidel Publ.
- Vygotsky, Lev (2000): «Νους στην Κοινωνία». Αθήνα Gutenberg.

Σωτήρης Ζωισάκος

sotiris.vivi@gmail.com

[λευκή σελίδα]

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΕΝΝΟΙΩΝ ΚΥΚΛΟΥ ΑΠΟΥΣΙΑ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟΥ : ‘Η ΛΙΜΝΟΥΛΑ ΤΟΥ ΒΑΤΡΑΧΟΥ’

Στέλιος Παπακωνσταντίνου

Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η ανάγκη τέχνες εργάζεται. Η ελληνική παροιμία συναντά ένα γερμανικό παιχνίδι ανοικτού χώρου κι εμείς επιχειρούμε την οργάνωση γνήσιων γεωμετρικών δραστηριοτήτων απουσία βιβλίου.

Στην πραγματικότητα πρόκειται για την αντιστροφή μιας κατά τα άλλα προβληματικής κατάστασης στο χώρο της εκπαίδευσης και τη μετάβαση από την καταφατική φράση «το σχολικό εγχειρίδιο είναι απαραίτητο» στο ερώτημα «πόσο απαραίτητο ή έστω αναντικατάστατο είναι» ;

Το εγχείρημα μιας ανορθόδοξης διδασκαλίας για τη γεωμετρική έννοια του κύκλου στηρίχθηκε στην πεποίθηση ότι τα Μαθηματικά αποτελούν πολιτισμικό παράγωγο.

Ανατρέξαμε σε βάσεις δεδομένων ομαδικών παραδοσιακών παιχνιδιών. Επιλέξαμε τη «Λιμνούλα του βατράχου» και διακρίναμε ομόκεντρους κύκλους, κινήσεις επί ακτινών και διαμέτρων, κυκλικούς δίσκους, κυκλικούς τομείς και ένα κέντρο.

Το λιβάδι και η λιμνούλα (ομόκεντροι κυκλικοί δίσκοι), το ποτάμι (περιφέρεια κύκλου), μαζί με τους πελαργούς και τα βατράχια (άλλοτε σημεία των ομόκεντρων δίσκων και άλλοτε φορείς κίνησης) επιβάλλονται δημιουργικά με την υλικότητά τους και προσφέρουν ένα λιθαράκι σ’ αυτό που αποκαλείται κοινωνική και πολιτισμική θεώρηση των Μαθηματικών.

Τελικά, όλα ξεκίνησαν από τη σχολική αυλή κι όταν επιστρέψαμε στην αίθουσα διδασκαλίας ... γνωρίζαμε ήδη πολλά. Ταυτόχρονα πιστέψαμε ότι αυτή τη φορά η γνώση δε θα στερείται διάρκειας και λόγου ύπαρξης – στα μάτια των παιδιών, φυσικά !

Η ανάγκη τέχνες εργάζεται.

Για την αντιμετώπιση των διδακτικών δυσχερειών που προέκυψαν από την αιφνίδια απουσία βιβλίων αλλά και για τις ανάγκες αυτής της εισήγησης, η ελληνική παροιμία συνάντησε ένα γερμανικό παιχνίδι ανοικτού χώρου κι επιχειρήθηκε η οργάνωση γνήσιων γεωμετρικών δραστηριοτήτων.

Στην πραγματικότητα πρόκειται για την αντιστροφή μιας κατά τα άλλα προβληματικής κατάστασης στο χώρο της εκπαίδευσης και τη μετάβαση από την καταφατική φράση «το σχολικό εγχειρίδιο είναι απαραίτητο» στο ερώτημα ‘πόσο απαραίτητο ή έστω αναντικατάστατο είναι’;

Εκκινώντας από την πεποίθηση ότι τα Μαθηματικά αποτελούν πολιτισμικό παράγωγο, ανατρέξαμε σε βάσεις δεδομένων ομαδικών παραδοσιακών παιχνιδιών. Επιλέξαμε τη ‘Λιμνούλα του βατράχου’ και διακρίναμε ομόκεντρους κύκλους, κινήσεις επί ακτινών και διαμέτρων, κυκλικούς δίσκους, κυκλικούς τομείς και ένα κέντρο.

Το λιβάδι και η λιμνούλα ως ομόκεντροι κυκλικοί δίσκοι, το ποτάμι ως περιφέρεια κύκλου, μαζί με τους πελαργούς και τα βατράχια, άλλοτε ως σημεία των ομόκεντρων δίσκων και άλλοτε ως φορείς κίνησης, επιβάλλονται δημιουργικά με την υλικότητά τους και προσφέρουν ένα λιθαράκι σ’ αυτό που αποκαλείται κοινωνική και πολιτισμική θεώρηση των Μαθηματικών.

‘Η λιμνούλα του βατράχου’ είναι ένα γερμανικό ομαδικό παιχνίδι που απευθύνεται σε παιδιά που ηλικιακά φοιτούν στην προσχολική αγωγή αλλά και την πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Απαιτεί τη χρήση υλικών μέσων, όπως ο σπάγκος, μια κιμωλία, μια μετροταινία, έναν κώνο και φυσικά την ενεργητικότητα των παιδικών σωμάτων.

Χαράσσουμε έναν κύκλο με διάμετρο τουλάχιστον 8 μέτρα. Αυτό θα είναι και το «λιβάδι». Έξω απ’ αυτόν τον κύκλο βρίσκεται το «ποτάμι» και στη μέση του «λιβαδιού» ορίζουμε μ’ ένα μικρό κύκλο τη «λιμνούλα». Μετά χαρακτηρίζουμε τρία παιδιά «πελαργούς». Τα υπόλοιπα παιδιά είμαστε «βατράχοι» και πηγαίνουμε μέσα στη λιμνούλα. Από εδώ προσπαθούμε, περνώντας το «λιβάδι», να φτάσουμε για ασφάλεια στο «ποτάμι». Όμως οι πεινασμένοι πελαργοί προσπαθούν να πιάσουν τους «βατράχους» και να τους «καταβροχθίσουν». Το παιχνίδι τελιώνει, όταν

οι πελαργοί «φάνε» όλους τους «βατράχους». Τότε ορίζουμε τρεις νέους «βατράχους» και ξαναρχίζουμε. Αυξάνοντας τη δυσκολία του παιχνιδιού, συμφωνούμε οι «βάτραχοι» να μετακινούνται με πηδηματάκια και οι «πελαργοί» μόνο με κουτσό.

Ωστόσο, στους παραπάνω παραδοσιακούς κανόνες, οι μαθητές μας της ΣΤ' τάξης επέβαλαν τροποποιήσεις ή και νέους κανόνες. Έτσι :

Κάθε βάτραχος μπορεί να διανύσει την απόσταση από το κέντρο της λιμνούλας (κέντρο ομόκεντρων κύκλων) έως τον ποταμό (περιφέρεια ευρύτερου κύκλου) μόνο με ευθύγραμμη κίνηση (ως ακτίνα). Αν τα καταφέρει και δεν τον καταβροχθίσει κάποιος πελαργός, χαράσσουμε με κιμωλία την πορεία του. Επαναλαμβάνουμε και για το δεύτερο παιδί που με επιτυχία θα διανύσει την απόσταση κέντρου-περιφέρειας. Τότε οι βάτραχοι επιβραβεύονται με πόντους καθώς κατάφεραν να δημιουργήσουν μια επίκεντρη γωνία. Αν καταφέρουν να δημιουργήσουν ευθεία γωνία κι έτσι εισάγουν τις έννοιες της διαμέτρου και του ημικυκλίου, τότε συγκεντρώνουν επιπλέον πόντους.

Συμφωνήσαμε ώστε κάθε φορά να κινούνται αιφνιδιαστικά δύο βάτραχοι ταυτόχρονα. Το αν θα αποφασίσουν να παράγουν με αντικείμενες ημιευθείες μια ευθεία γωνία ή με τυχαίες ημιευθείες μια αμβλεία ή οξεία γωνία, είναι δική τους επιλογή..

Οι παραπάνω κανονισμοί συναποφασίστηκαν με τους μαθητές-τριες μιας ΣΤ' τάξης πρωτοβάθμιου σχολείου, τάξης που διδάσκεται τον κύκλο. Μπορεί φυσικά να λειτουργήσει στην αυλή και στην τάξη του νηπιαγωγείου με εμπλοκή και της χαρτοκοπτικής.

Θεωρητική προσέγγιση

Τόσο η εμπειρία μας όσο και η μελέτη των διδακτικών εγχειριδίων μάς οδηγούν στη διαπίστωση της κυριαρχίας της απολυταρχικής αντίληψης για τα μαθηματικά, σύμφωνα με την οποία τα Μαθηματικά αποτελούν μία αντικειμενική, υπερ-ιστορική, διαχρονική αλήθεια, και η διδασκαλία τους στοχεύει στη μετάδοση αυτής της αλήθειας. Αντίθετα η κριτική μαθηματική εκπαίδευση θεωρεί τα Μαθηματικά πολιτισμικό επιτεύγματα και κοινωνική κατασκευή, ενώ διδακτικά στοχεύει στην ανάδειξη των κοινωνικών και πολιτισμικών τους διαστάσεων.

Η ίδια η έννοια της μαθηματικής αρχαιολογίας, όπως την προτείνει ο Skovsmose ως ανακάλυψη των μαθηματικών που είναι ενσωματωμένα σε κοινωνικο-πολιτικές δομές, μπορεί να θεωρηθεί ως μία δραστηριότητα ανακάλυψης των κοινωνικών, πολιτικών, πολιτισμικών διαστάσεων που είναι ενσωματωμένες σε ένα μαθηματικό πρόβλημα. (Skovsmose, 1994)

Αλλά και για την κατά Frankenstein οπτική της κριτικής μαθηματικής εκπαίδευσης, η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων απουσία των ζητημάτων αυτών, καταντά λειτουργικός αναλφαβητισμός.

Ωστόσο, για τον κονστρουκτιβισμό, σε κάθε του έκφανση, ένα βασικό ερώτημα είναι οι συνθήκες μετάβασης από τα συστήματα δράσης στα συστήματα λειτουργίας. Δηλαδή, με ποιο τρόπο το παιδί παράγει αφαιρετικά εννοιολογικές δομές μέσω της δράσης του επί υλικότητων. (Paour, 1994, σ. 86)

Ο Vygotsky απαντά στο παραπάνω ερώτημα με τη διάκριση των εννοιών σε καθημερινές-αυθόρμητες τις οποίες το παιδί φέρει μαζί του και σε ακαδημαϊκές-επιστημονικές οι οποίες διαμορφώνονται στα πλαίσια της οργανωμένης σχολικής διδασκαλίας. Όπου οι επιστημονικές έννοιες είναι ισχυρές, υστερούν οι καθημερινές έννοιες και το αντίθετο. Γενικά, η ισχύς του ενός τύπου υποδηλώνει την αδυναμία του άλλου τύπου των εννοιών. Π.χ. αφετηρία της εξέλιξης της έννοιας της κύκλου δεν αποτελεί η ακαδημαϊκή διατύπωση που το σχολείο για πρώτη φορά εμφανίζει στο παιδί. Η έννοια αυτή, αλλά και κάθε παρόμοια, είναι πλήρης από προσωπικές εμπειρίες του παιδιού κι έχει διανύσει το πιο σημαντικό εξελικτικό τμήμα της πραγματικής-εμπειρικής του διάστασης.

Όμοια, η σχέση μεταξύ της λέξης και του αντικειμένου είναι διαφορετική όταν προσεγγίζουμε καθημερινές ή ακαδημαϊκές έννοιες. Στην περίπτωση μάλιστα, των ακαδημαϊκών εννοιών, αντικείμενο και λέξη δε βρίσκονται σε μίαν απευθείας σχέση, αλλά διαμεσολαβούνται από κάποιες προγενέστερα διαμορφωμένες έννοιες.

Έτσι, η καθημερινή έννοια (λίμνη, λιβάδι, ποτάμι), τοποθετημένη ανάμεσα στην επιστημονική έννοια (κυκλικός δίσκος, κύκλος) και στο αντικείμενό της (σχέδιο), αποκτά ολόκληρη σειρά καινούργιων

σχέσεων με άλλες έννοιες, και μεταμορφώνεται η ίδια ως προς την σχέση της με το αντικείμενο. Δηλαδή, η λίμνη σχεδιάζεται ως γεωμετρικός κύκλος.

Κατά τη διδασκαλία, οι λίμνη παύει να είναι αποκλειστικά αντικείμενο της οικολογίας με συγκεκριμένη λειτουργία και συνδέεται με την έννοια του κυκλικού δίσκου. Γίνεται πλέον μια υλικότητα που δε δεσμεύεται από το αυθόρμητο περιεχόμενο αλλά αποκτά συνδέσεις και με μια σειρά μαθηματικών εννοιών.

Ταυτόχρονα, μια έννοια δεν μπορεί να υπάρξει παρά μόνο σε σχέση με άλλες έννοιες, όπως και ένα αντικείμενο υφίσταται μέσω πολύπλοκων συναφειών, εξαρτήσεων και σχέσεων ανάμεσα στα αντικείμενα. Η λίμνη περιβάλλεται από το λιβάδι κι αυτό με τη σειρά του από το ποτάμι. Η άμεση αισθητήρια αντίληψη βλέπει τα αντικείμενα στα πλαίσια μιας συνολικής πραγματικότητας. Ομοίως, η σχέση μιας έννοιας με μια άλλη, η σχέση του κύκλου και του κέντρου του - αλλά και μιας σειράς άλλων εννοιών, αποτελεί μια σχέση γενικότητας.

Εφαρμογή της διδακτικής παρέμβασης

Εικάσαμε ότι αν η διδακτική μας πρόταση εφαρμόζονταν σε μαθητές της πρώτης σχολικής ηλικίας, θα παρατηρούσαμε μια αδυναμία τους να συνδέσουν τις ακαδημαϊκές έννοιες με τα γεγονότα μιας ισχυρής ακόμα καθημερινότητας. Στα μικρά παιδιά, τα ίδια τα αντικείμενα, υπαγορεύουν τη δραστηριότητα - η λίμνη και το λιβάδι προκαλούν την κίνηση. Όμοια, οι μικρότεροι μαθητές θα αφιερώνονταν ολοκληρωτικά στις καθημερινές έννοιες του λιβαδιού και της λίμνης, αδιαφορώντας για την κωδικοποίησή τους σε γεωμετρικά εννοιολογικά σχήματα. Για το μικρό παιδί, ο διαχωρισμός λέξης και αντικειμένου είναι αδύνατος. Η έννοια της 'λίμνης' ή του 'λιβαδιού' ταυτίζεται με την υλική εκφορά της.

Όσοι η επιλογή της εφαρμογής σε μαθητές που ολοκληρώνουν την πρωτοβάθμια εκπαίδευση, μας οδηγούσε στην καταγραφή μιας αντίστροφης πορείας. Έτσι, αναμέναμε ότι οι μαθητές αυτοί, εκπαιδευμένοι σε ένα σχολείο με σαφή ακαδημαϊκό προσανατολισμό, θα μετέφραζαν κάθε καθημερινή έννοια σε ακαδημαϊκή. Και αυτή τη

ρωγή θέλαμε να εκμεταλλευτούμε. Για τους μεγαλύτερους μαθητές, οι λέξεις αυτές θα γίνονταν φορείς αφαίρεσης και γενίκευσης. (Luria, 1992, σ. 111)

Το μεγαλύτερο παιδί συμμετείχε στο παιχνίδι για να αποσπάσει το νόημα π.χ. της ακτίνας του κύκλου από την πραγματική πράξη της κίνησής του ως βάτραχος. Έτσι, το νόημα αποσπάται όχι μόνο από τα αντικείμενα αλλά κι από τις πράξεις που αυτά τα αντικείμενα υπονοούν. Π.χ. ο εγκλεισμός σε μια λίμνη προκαλεί το μαθητή να διασχίσει το 'λίβάδι'.

Ο διδακτικός στόχος της κατανόησης των εννοιών κύκλου ως παρελθοντικό οπτικό πεδίο και το επιλεγμένο παιχνίδι χώρου ως παροντικό οπτικό πεδίο, συνδεόμενα, ευνοούν τη μνήμη. Όμως το χρονικό πεδίο της δράσης επεκτείνεται όχι μόνο προς το παρελθόν αλλά και προς το μέλλον. Οι μελλοντικές δραστηριότητες στην αίθουσα διδασκαλίας ενσωματώνονται με την παρούσα χωρική δραστηριότητα μέσω συμβόλων, γραφημάτων κ.ά. Δημιουργείται έτσι ένα συνεκτικό σύστημα που εμπεριέχει στοιχεία του παρελθόντος (διδακτικός στόχος), του παρόντος (το παιχνίδι με την υλικότητά του) και του μέλλοντος (χρήση ακαδημαϊκών εννοιών).

Κατά τη διάρκεια μιας αναπαραστατικής κατάστασης (όπως το παιχνίδι) κάθε υλικότητα επιτελεί μια λειτουργία υποκατάστατου. Τα πεδία της 'λίμνης' και του 'λίβαδιού' υποκαθιστούν την έννοια του κυκλικού δίσκου. Ωστόσο, η απλή έκθεση των μαθητών σε καθημερινές χωρικές έννοιες (λίβάδι, λίμνη, ποταμός) θα ήταν ανεπαρκής. Για το Vygotsky, μόνο η κατάλληλη κίνηση τα νοηματοδοτεί. Η κίνηση αυτή επιτρέπει στις υλικότητες όχι μόνο να δηλώσουν τις έννοιες στις οποίες αντιστοιχούν, αλλά και να τις αντικαταστήσουν.

Η εφαρμογή στη σχολική αυλή έδειξε ότι η επικοινωνία μεταξύ των μαθητών προκύπτει αβίαστα, προτείνονται και επιλέγονται κινήσεις και συμφωνείται μια στρατηγική η οποία οφείλει να συμπεριλάβει όλες τις πιθανές γωνίες. Η γραμματεία καταγράφει την παραγόμενη κίνηση την οποία και βαθμολογεί με θετικό ή αρνητικό πρόσημο.

Κατά τη μετάβαση από το παιχνίδι στη γεωμετρική δραστηριότητα, τα παιδιά αναθεωρούν της σχέσεις μεταξύ των υλικοτήτων κι εδώ είναι

σημαντικός ο ρόλος του εκπαιδευτικού.¹ Προβάλλονται οι παραγόμενες κινήσεις τους και συμπληρώνονται από τους μαθητές τα κατάλληλα βέλη ως ακτίνες στο κυκλικό λιβάδι. Η συζήτηση περνά στις επίκεντρες γωνίες που η υλικότητα των παιδικών σωμάτων όρισε. Η γνώση αυτή είναι κοινωνική γνώση, γνώση γνήσιας συναναστροφής κι έχει αναφορά στον ιστορικό χρόνο ως δράση που εκτελέστηκε στο πρόσφατο παρελθόν κι ως λαϊκό παιχνίδι ενός γεωγραφικού χώρου (Γερμανία).

Όλα ξεκίνησαν από τη σχολική αυλή κι όταν επιστρέψαμε στην αίθουσα διδασκαλίας ... γνωρίζαμε ήδη πολλά. Οι μαθητές και οι μαθήτριες επέδειξαν εννοιολογική κατανόηση που ξεπέρασε τις προσδοκίες μας. Κάθε γεωμετρική έννοια είχε την παιγνιώδη της αναφορά, όμως στην επιφάνεια έρχονταν ένας ακαδημαϊκός λόγος που δε στερούνταν διάρκειας και λόγου ύπαρξης – στα μάτια των παιδιών, φυσικά !

¹ Με τον τίτλο *‘Προετοιμασία και εκτέλεση παιγνιωδών παρεμβάσεων’* περιγράφονται οι δράσεις που προηγήθηκαν της εφαρμογής και οι οποίες εκτελέστηκαν στην αίθουσα των Τ.Π.Ε., η ίδια η εφαρμογή στην αυλή του σχολείου, αλλά και οι διδακτικές παρεμβάσεις που ακολούθησαν κατά την επιστροφή μας στην αίθουσα των Τ.Π.Ε.

Με τον τίτλο *‘Παρεμβάσεις με χειρισμούς’* περιγράφονται οι δράσεις που ακολούθησαν την προηγούμενη φάση και οι οποίες εκτελέστηκαν στην Αίθουσα των Εικαστικών. Είναι δράσεις που προτείνονται και για την Προσχολική Αγωγή.

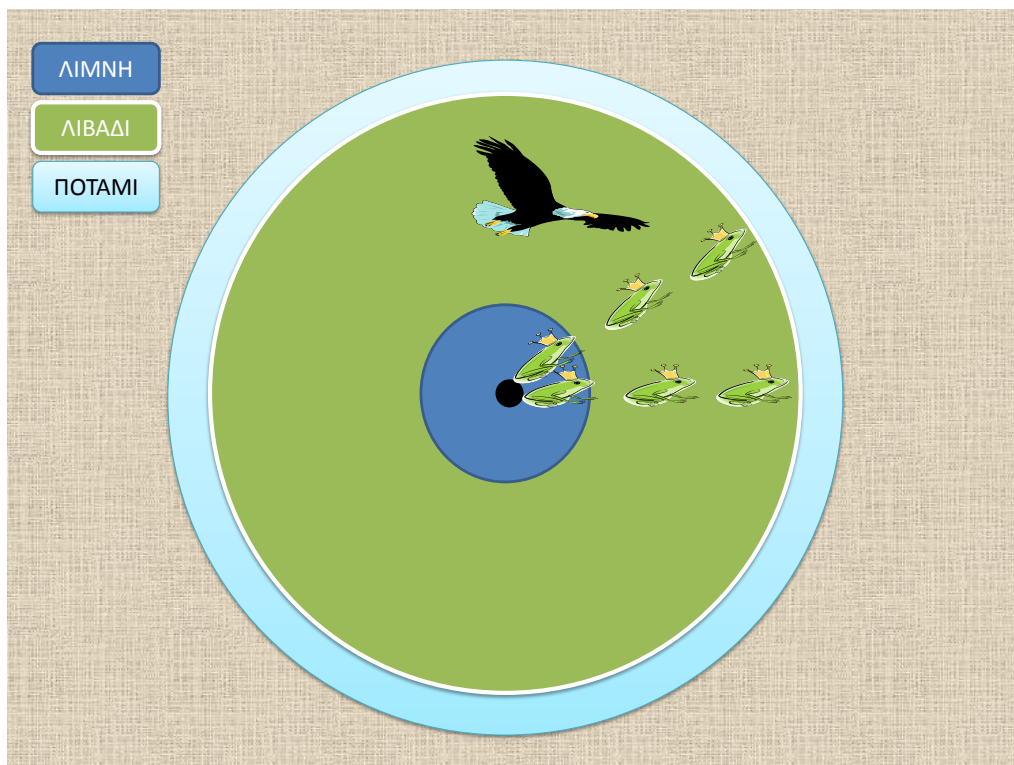
Η εφαρμογή και των δύο φάσεων με παιδιά προσχολικής ηλικίας αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για την επαλήθευση των εικασιών που προηγήθηκαν της εφαρμογής αλλά έθεσαν τις βάσεις μιας θεωρητικής προσέγγισης.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

α/α	Κανονισμοί παιχνιδιού «Η λιμνούλα του βατράχου»
1	Οι βάτραχοι προσπαθούν να μετακινηθούν από τη λίμνη στον ποταμό.
2	Οι πελαργοί παραμονεύουν στο λιβάδι ώστε να πιάσουν κάθε μετακινούμενο βάτραχο.

α/α	Κανονισμοί παιχνιδιού από την ολομέλεια
1	Κάθε βάτραχος κινείται ευθύγραμμα από τη λίμνη στο ποτάμι.
2	Κάθε μη ευθύγραμμη κίνηση επιφέρει μείωση της βαθμολογίας.
3	Κάθε επιτυχής συνδυασμένη μετακίνηση δύο βατράχων επιφέρει αύξηση της βαθμολογίας.
4	Κάθε ανεπιτυχής συνδυασμένη μετακίνηση δύο βατράχων επιφέρει μείωση της βαθμολογίας.
5	Πλήθος βατράχων : 8 μαθητές,-τριες
6	Πλήθος πελαργών : 10 μαθητές,-τριες
7	Οι ρόλοι αντιστρέφονται μετά τη συμμετοχή του συνόλου των μαθητών.

Στην αίθουσα διδασκαλίας



Στην αίθουσα Πληροφορικής (1^η φάση)



Στην αυλή του σχολείου (Επιλογή στρατηγικής)



Στην αυλή του σχολείου (Εφαρμογή)

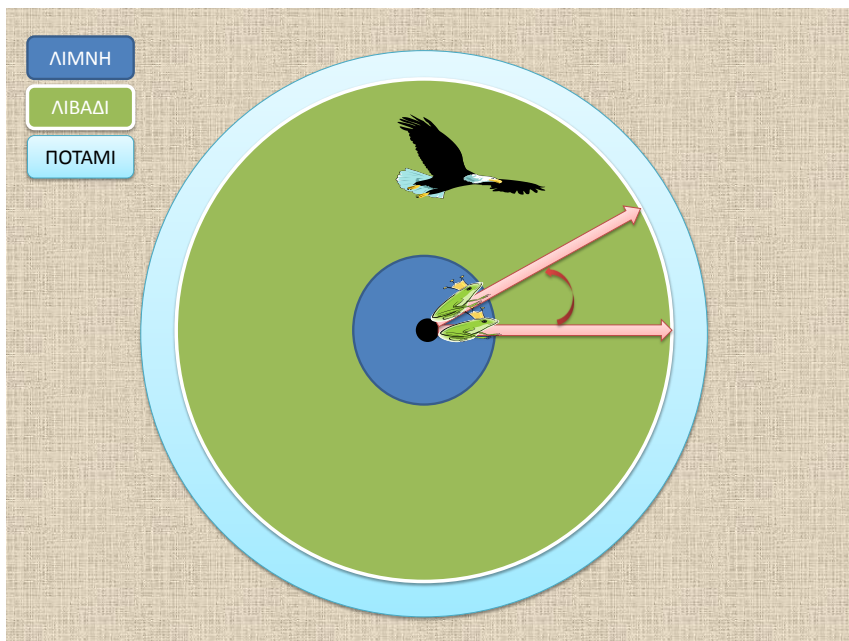
α/α προσπαθειών	επιτυχίες βατράχων	επιτυχίες πελαργών	είδος διαφυγής	bonus κίνησης	βαθμολογία βατράχων
1 ^η	✓		Ορθή γωνία	+ 30	+ 30
2 ^η		✓	Αμβλεία γωνία	- 40	- 10
3 ^η		✓	Οξεία γωνία	- 20	- 30
4 ^η		✓	Ευθεία γωνία	- 50	- 80
5 ^η					
6 ^η					
7 ^η					

παράδειγμα					
1 ^η	✓		Οξεία γωνία	+ 20	+ 20
2 ^η	✓		Ορθή γωνία	+ 30	+ 50
3 ^η		✓	Αμβλεία γωνία	- 40	+ 10
4 ^η	✓		Ευθεία γωνία	+ 50	+ 60

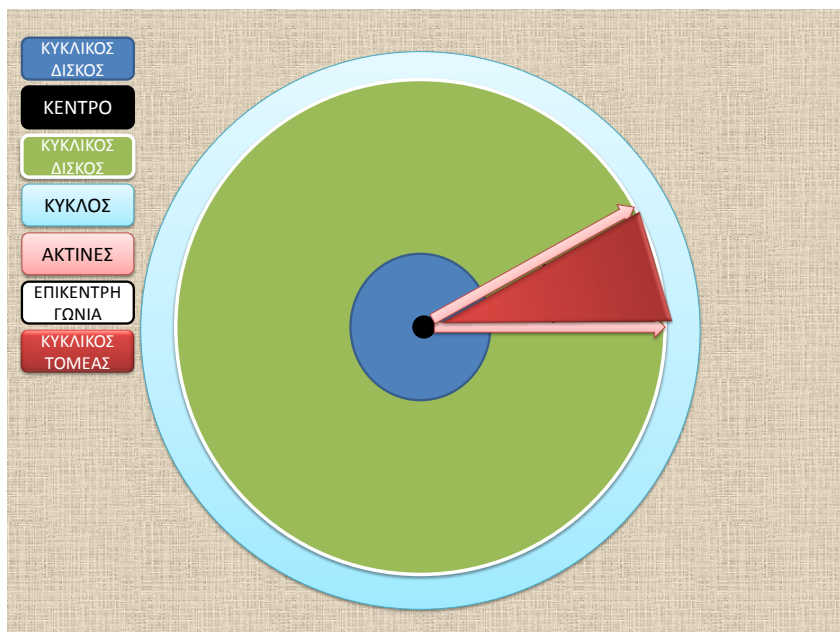
Στην αίθουσα Πληροφορικής (2^η φάση)



Στην αυλή του σχολείου



Στην αίθουσα Πληροφορικής (3^η φάση)



Στην αίθουσα Πληροφορικής (4^η φάση)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΙΣ ΜΕ ΧΕΙΡΙΣΜΟΥΣ ΓΙΑ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗ ΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ	<u>Έννοιες κύκλου</u> <u>Αίθουσα Διδασκαλίας</u>
1. Χρήση πλαστικών ποτηριών για τη διάκριση μεταξύ κύκλου και κυκλικού δίσκου. 2. Παρατήρηση της υλικής απουσίας ενός κέντρου στο στόμιο και της κατασκευαστικής πρόβλεψης ύπαρξης ενός υλικού κέντρου στη βάση του ποτηριού. 3. Χρήση εργαλείου (ψαλίδι) για την αφαίρεση της υλικής περιφέρειας του κύκλου (στόμιο) και του υλικού κυκλικού δίσκου (ατομικοί χειρισμοί με χρήση εργαλείου). 4. Διάρθρωση του υλικού κέντρου και παραγωγή ακτίνας με τη χρήση έγχρωμης κλωστής. Παραγωγή δευτέρης ακτίνας.	5. Επανάληψη του 4^{ου} βήματος. Χρήση μαρκαδόρων για τον υλικό ορισμό της επίκεντρης γωνίας ως χώρου μεταξύ ακτινών. 6. Παρατήρηση της διχρωμίας του κυκλικού δίσκου και οικοδόμηση των εννοιών της κυρτής-μη κυρτής γωνίας καθώς και του κυκλικού τομέα. 7. Χρήση του στομίου και μονωτικής ταινίας για την οικοδόμηση της έννοιας του τόξου. Χρήση χρωματιστής κλωστής για την παραγωγή χορδών. 8. Τα παιδιά εκφράζονται γνωστικά (λόγος-σχέδιο) και συναισθηματικά. Η διδακτική παρέμβαση αξιολογείται. (γενίκευση).

Βιβλιογραφία

- Dahlin, Bo (2001): *“The Primacy of Cognition – or of Perception? A Phenomenological Critique of the Theoretical Bases of Science Education”*. Περιοδικό Science & Education, τεύχος 10, σελ. 453-475.
- Luria, A., R., (1992): *Γνωστική Ανάπτυξη*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
- Paour, J., L., (1994): «Ο Πιαζεπικός Οικοδομισμός και η Έννοια της Διαμεσολαβημένης Μαθησιακής Εμπειρίας». Στη συλλογή *Κοινωνιο-γνωστική Προσέγγιση και Διδακτικές Διαδικασίες της Μάθησης των Φυσικών και Λογικο-μαθηματικών Εννοιών στο Σχολείο* (επιμέλεια Γιάννη Παπαμιχαήλ). Αθήνα: Gutenberg, σελ. 80-103.
- Skovsmose, Ole, (1994): *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*. Netherlands: Mathematics Education Library.
- Vygotsky, Lev (1993): *Σκέψη και Γλώσσα*. Αθήνα: Γνώση.
- Vygotsky, Lev (2000): *Νους στην Κοινωνία*. Αθήνα: Gutenberg.

Στέλιος Παπακωνσταντίνου

pstelcm@otenet.gr

ΈΝΑ ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΤΗ Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Σωφρόνης Βαμβακούσης & Τάσος Πατρώνης

Πανεπιστήμιο Πάτρας

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η έννοια της συνάρτησης εισάγεται στο 2^ο κεφάλαιο του σχολικού βιβλίου της Β' Γυμνασίου, αλλά η διδακτική εμπειρία και οι έρευνες έχουν δείξει ότι οι μαθητές δεν κατανοούν εύκολα αυτή τη βασική έννοια στα Μαθηματικά. Γενικότερα η έννοια της αντιστοιχίας φέρνει αμηχανία στους μαθητές αυτής της ηλικίας, αφού αντί για αντιστοιχίες είναι εξοικειωμένοι με την έννοια της ισότητας, από τα χρόνια του Δημοτικού Σχολείου. Ο μοντέρνος τρόπος εισαγωγής των συναρτήσεων μέσω διατεταγμένων ζευγαριών είναι πρόωρος και φαίνεται ακατανόητος στα παιδιά.

Η κατάσταση αυτή μπορεί να μεταβληθεί σε μια θετική και ουσιαστική εμπειρία και γνώση για τους μαθητές, αν επιλεγούν εναλλακτικοί τρόποι προσέγγισης της έννοιας της συνάρτησης, στην κλασική της μορφή της “λειτουργίας” (*function*) που είχε από την εποχή του Euler. Η βασική ιδέα είναι να δημιουργηθεί ενδιαφέρον στους μαθητές, ενεργός συμμετοχή τους στο μάθημα και ευχαρίστηση από την δραστηριότητά τους σε σχέση με την εισαγωγή της έννοιας της συνάρτησης. Σκεφθήκαμε λοιπόν να συνδέσουμε την έννοια αυτή με τη *λειτουργία* ενός μαθηματικού παιχνιδιού.

“Give the pupils something to do, not something to learn, (when) the doing is of such a nature as to demand thinking; learning naturally results”.

John Dewey

“We learn by example and by direct experience because there are real limits to adequacy of verbal instruction”

Malcolm Gladwell,

Blink: The Power of Thinking Without Thinking, 2005

Εισαγωγή

Από την εποχή του Διαφωτισμού ορισμένοι διανοητές θεωρούν τον άνθρωπο ως “φύσει” φιλομαθές ον. Σύμφωνα με τις αντιλήψεις αυτές, η μάθηση θα επιτευχθεί αν ο άνθρωπος είναι ελεύθερος να αξιοποιήσει την ερευνητική του φύση. Στα έργα του Λοκ “Δοκίμιο περί της Ανθρώπινης Κατανόησης” και του Ρουσσώ “Αιμίλιος” προβάλλονταν οι μαθητοκεντρικές αντιλήψεις ήδη από τον 18^ο αιώνα. Το σημερινό Εκπαιδευτικό Σύστημα είναι ένα μίγμα αποτελούμενο από το “Διαφωτιστικό” πνεύμα και από το αυταρχικό και σκοταδιστικό πνεύμα του Τάγματος των Ιησουιτών.

Στη σύγχρονη εποχή σπουδαία προσωπικότητα υπήρξε η Μαρία Μοντεσσόρι, η οποία είχε εντάξει το παιχνίδι μέσα στην Εκπαίδευση με εξαιρετικά αποτελέσματα στην βιωματική μάθηση και κοινωνικοποίηση μέσω παιχνιδιού. Η Μοντεσσόρι παρατηρώντας τα παιδιά καθώς έπαιζαν, σημείωνε πως η ενασχόλησή τους με το παιχνίδι ήταν γι αυτά μία σοβαρή δουλειά που απαιτούσε τη συγκέντρωση και τη δημιουργικότητά τους (Houssaye , 2000: 204-9). Κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού, τα παιδιά συνεργάζονται ελεύθερα και αρμονικά και από τότε έχει αναπτυχθεί η εργασία σε ομάδες. Έτσι το παιδί συνδέει την εργασία με την ευχαρίστηση και την επιστημονική αναζήτηση. Κατά την διεξαγωγή του παιχνιδιού το παιδί κατανοεί τις διάφορες λειτουργίες και τις σχέσεις που το διέπουν (Raillon, 1993).

Οι ψυχολόγοι έχουν τονίσει τη σπουδαιότητα του παιχνιδιού στην κοινωνικοποίηση, τη μάθηση των συμβόλων, των τρόπων κοινωνικής συμπεριφοράς και το σημαντικό ρόλο του στην ανάπτυξη της

δημιουργικότητας, καθιστώντας το κεντρική δραστηριότητα στην πορεία της κοινωνικής και γνωστικής ωρίμανσης.

Η έννοια της συνάρτησης εισάγεται στο 2^ο κεφάλαιο του σχολικού βιβλίου της Β' Γυμνασίου, αλλά η διδακτική εμπειρία και οι έρευνες έχουν δείξει ότι οι μαθητές δεν κατανοούν εύκολα αυτή τη βασική έννοια στα Μαθηματικά (π.χ. Tall & Bakar, 1991, Sierpinska, 1992). Σημαντικό εμπόδιο για την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης είναι οι διαφορετικοί τρόποι που αναπαρίσταται (Sierpinska, 1992). Όπως είναι γνωστό μία συνάρτηση μπορεί να δοθεί μέσω γραφικής αναπαράστασης, μέσω αλγεβρικού τύπου ή μέσω πίνακα τιμών. Οι μαθητές δυσκολεύονται να συσχετίσουν αυτές τις αναπαραστάσεις και να μεταβούν από ένα τρόπο αναπαράστασης σε άλλο. Επίσης δυσκολεύονται να εξαγουν συμπεράσματα από την γραφική παράσταση και να χειρίζονται σύμβολα που σχετίζονται με τη συνάρτηση όπως $f(x)$, $x \rightarrow y$ (Sierpinska, 1992). Γενικότερα η έννοια της αντιστοιχίας φέρνει αμηχανία στους μαθητές αυτής της ηλικίας, αφού από τα χρόνια του Δημοτικού Σχολείου είναι εξοικειωμένοι με την έννοια της ισότητας. Η κατάσταση αυτή μπορεί να μεταβληθεί, αν επιλεγούν εναλλακτικοί τρόποι προσέγγισης της έννοιας της συνάρτησης και η διδασκαλία τους να αποτελέσει, μία θετική και ουσιαστική εμπειρία και γνώση για τους μαθητές. Η αρχική ιδέα της συνάρτησης είναι αυτή της "λειτουργίας" (*function*) που είχε από την εποχή του Euler. Η βασική ιδέα είναι να δημιουργηθεί πρώτα απ' όλα ενδιαφέρον στους μαθητές, έτσι ώστε να εξασφαλιστεί η συμμετοχή τους στο μάθημα και να αντλήσουν ευχαρίστηση από την δραστηριότητά τους. Σκεφτήκαμε λοιπόν να συνδέσουμε την έννοια αυτή με τη *λειτουργία* ενός μαθηματικού παιχνιδιού.

Τα ερωτήματα που μας οδήγησαν στην δραστηριότητα αυτή ήταν: 1) Αν η χρήση κατάλληλα επιλεγμένων παιχνιδιών στη διδασκαλία των συναρτήσεων είναι δυνατόν να βοηθήσει τους μαθητές της Β' Γυμνασίου στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης. 2) Αν μια τέτοιου είδους διδασκαλία βοηθάει στην κινητοποίηση, ενεργοποίηση και στην αλλαγή στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά.

Εξάλλου στο Βιβλίο του Εκπαιδευτικού για τα Μαθηματικά της Β' Γυμνασίου αναφέρεται ότι η ενασχόληση των μαθητών με δραστηριότητες, που καθιστά πιο ενεργητικό το ρόλο τους μέσα στην τάξη, διαφοροποιεί τη διδασκαλία από το παραδοσιακό διδακτικό μοντέλο (Π.Ι. 2007).

Έτσι η χρήση κατάλληλων παιχνιδιών στη διδασκαλία των Μαθηματικών, πέρα από τη βελτίωση στο γνωστικό τομέα, δίνει τη δυνατότητα:

- α) να αλλάξουν οι τρόποι με τους οποίους οι μαθητές συνεργάζονται μεταξύ τους,
- β) οι μαθητές να αναλαμβάνουν μεγαλύτερη ευθύνη στη διαδικασία της μάθησης και
- γ) οι μαθητές να συμμετέχουν σε διαφοροποιημένες διδακτικές δραστηριότητες, που να ταιριάζουν στα ενδιαφέροντά τους.

Αναγκαία προϋπόθεση, για την συμμετοχή των μαθητών σ' αυτή τη δραστηριότητα (διδασκαλία-παιχνίδι) είναι η εξοικείωσή τους με την έννοια της μεταβλητής, καθώς και με τις στοιχειώδεις πράξεις μεταξύ μεταβλητών και σταθερών. Γιαυτό το λόγο πραγματοποιήθηκε σχετική διδασκαλία σε ένα τμήμα Β' Γυμνασίου με 21 μαθητές. Στο τμήμα υπήρχαν λίγοι μαθητές με καλή επίδοση στα μαθηματικά, οι περισσότεροι ήταν μέτριοι και ελάχιστοι ήταν αδιάφοροι. Δεδομένου ότι γενικά οι μαθητές της Β' Γυμνασίου έχουν ελάχιστη εμπειρία και κατανόηση των μεταβλητών και του χειρισμού τους, έγινε εισαγωγή στην έννοια της μεταβλητής. Γιαυτό αφιερώθηκαν 2 διδακτικές ώρες. Την πρώτη ώρα έγινε εισαγωγή και κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής και εξοικείωση των μαθητών στη μετάφραση προτάσεων από την καθημερινή γλώσσα, όπως π.χ. (α) «Το άθροισμα δύο αριθμών » και «Το διπλάσιο ενός αριθμού μειωμένο κατά 3» , σε αλγεβρικές εκφράσεις. Στη δεύτερη διδακτική ώρα, οι μαθητές έμαθαν να κάνουν στοιχειώδεις πράξεις με μεταβλητές, καθώς και την επιμεριστική ιδιότητα: π.χ. $2x+3x = 5x$, $7x+2x- 3x = 6x$, $3(x+4) = 3x + 12$ κ.ά.

Το παιχνίδι

Οι μαθητές χωρίζονται σε ομάδες 2, 3 ή 4 ατόμων. Μοιράζονται σε κάθε ομάδα κάρτες του ίδιου χρώματος στις οποίες αναγράφονται όλοι οι ακέραιοι αριθμοί (ένας αριθμός ανά κάρτα) από -20 έως 20. Ο διδάσκων κρατάει επίσης ίδιες κάρτες, άλλου χρώματος. Ορίζεται ότι οι κάρτες του διδάσκοντος αντιπροσωπεύουν το σύμβολο x και των μαθητών το σύμβολο ψ . Ο “κανόνας” του παιχνιδιού, δηλαδή ο τύπος της συνάρτησης (γραμμικής στην πρώτη διδακτική ώρα), αναγράφεται σε ένα φύλλο μεγέθους B3, που τοποθετείται σε θέση ορατή από όλους.

Αρχίζει το “παιχνίδι” και δίνεται π.χ. η συνάρτηση με τύπο $\psi = 3x+1$. Ο διδάσκων δείχνει ένα αριθμό x στις ομάδες των μαθητών και τους ζητά να υπολογίσουν το αποτέλεσμα ψ . Οι μαθητές της κάθε ομάδας κάνουν τις πράξεις (σύμφωνα με τον τύπο της συνάρτησης) και μόλις βρουν τον αντίστοιχο αριθμό ψ , σηκώνουν την αντίστοιχη κάρτα για να την δουν οι υπόλοιποι. “Κερδίζει” (ή τουλάχιστον χαίρεται περισσότερο) η ομάδα που κάθε φορά δείχνει πρώτη τον αντίστοιχο αριθμό, σωστά υπολογισμένο.

Στη δική μας εμπειρία, οι μαθητές αντικαθιστούσαν χωρίς δυσκολία τη μεταβλητή x με τις δοσμένες τιμές. Οι μαθητές έδειξαν ευχέρεια στους υπολογισμούς και την εύρεση των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής. Κάθε σωστή απάντηση-κάρτα των μαθητών (εξαρτημένη μεταβλητή ψ) τοποθετούνταν μαζί με την αντίστοιχη κάρτα x , σε μορφή ζευγαριών (x,ψ) . Τα ζευγάρια αυτά χρησιμοποιήθηκαν σε άλλη διδακτική ώρα για να εισαχθεί η παρουσίαση της γραφικής αναπαράστασης.

Κάποια στιγμή ένας μαθητής έκανε την πρόταση να αντιστραφεί η κατεύθυνση του παιχνιδιού, δηλαδή πρότεινε να δείχνουν οι μαθητές κάρτες στον διδάσκοντα ώστε να υπολογίζει εκείνος τις τιμές x . Μετά από επανάληψη λίγων τέτοιων υπολογισμών, κάποιος μαθητής έκανε την πρόταση να αντιστραφεί η κατεύθυνση του παιχνιδιού, δηλαδή πρότεινε να δείχνουν οι μαθητές κάρτες στον διδάσκοντα ώστε να υπολογίζει τις τιμές της μεταβλητής x . Διαισθητικά, είχε ανακαλύψει την έννοια της αντίστροφης συνάρτησης. Έτσι το παιχνίδι συνεχίστηκε με την αντίστροφη διαδικασία.

Συμπεράσματα

Η εμπειρία μας από αυτή τη διδασκαλία μας οδήγησε σε συμπεράσματα που είχαν να κάνουν με τη θετική συμμετοχή των μαθητών στο μάθημα “παιχνίδι”, το ενδιαφέρον και τον ενθουσιασμό, που τελικά τους οδήγησαν στην κατανόηση της νέας γνώσης.

Η εργασία σε ομάδες βοήθησε τους μαθητές στην καλύτερη κατανόηση, αφού οι “καλοί”, βοηθώντας τους “αδύνατους”, εμπέδωσαν καλύτερα την έννοια και “οι αδύνατοι” επίσης αφού πήραν βοήθεια από τους “καλούς”. Ενδιαφέρον είχε ότι κινητοποιήθηκαν οι “αδύνατοι” μαθητές, που συνήθως δεν συμμετείχαν στο μάθημα. Κάποιος μάλιστα από αυτούς τους μαθητές διευκρίνισε ότι ο αλγεβρικός τύπος της συνάρτησης μας “λέει” τι να κάνουμε. Ο ίδιος μαθητής επίσης έθεσε το ερώτημα τι θα συμβεί αν αντιμετωθίσουμε τις μεταβλητές x και y . Κάποιοι απάντησαν ότι αν οριστούν οι ρόλοι των μεταβλητών δεν υπάρχει πρόβλημα.

Απρόβλεπτο ήταν το γεγονός ότι κάποιος μαθητής ανακάλυψε την έννοια της αντίστροφης συνάρτησης και αυτό έδωσε την ευκαιρία να συζητήσουμε σε επόμενο μάθημα για τις αντιστρέψιμες ενέργειες και πράξεις στην καθημερινότητα και στα Μαθηματικά.

Τα παιδιά παίζουν μαθαίνοντας και μαθαίνουν παίζοντας, όπως μας λέει η Μοντεσσόρι.

Βιβλιογραφία

- Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ. & Ρεκούμης, Κ. (2007). *Βιβλίο του Εκπαιδευτικού, Μαθηματικά Β' Γυμνασίου*. Αθήνα, Ελλάδα: ΟΕΔΒ.
- Βοσνιάδου, Στ. *Πως μαθαίνουν τα παιδιά*. Αθήνα 2002. Εκδ. Gutenberg.
- Houssaye, J. *Δεκαπέντε παιδαγωγοί: σταθμοί στην ιστορία της παιδαγωγικής σκέψης*. Αθήνα 2000. Εκδ. Μεταίχμιο.
- Raillon, L. PROSPECTS: the quarterly review of comparative education vol. 23, no. ½, 1993, pp. 221-33. UNESCO: International Bureau of Education.

- Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy*, (pp. 25-58). United States: The Mathematical Association of America.
- Tall, D. O., & Bakar, M. (1991). Students' mental prototypes for functions and graphs. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of PME 15*. (Vol. 1, pp. 104-111)

Σωφρόνης Βαμβακούσης
sofronis_vamvakousis@hotmail.gr

Τάσος Πατρώνης
valdemar@master.math.upatras.gr

[λευκή σελίδα]

Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΟΥ 5^{ΟΥ} ΑΙΤΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ ΣΤΗ ΣΚΙΑ΄. ΠΑΙΖΟΝΤΑΣ ΜΕ ΤΙΣ ΣΚΙΕΣ ΜΕ ΜΑΘΗΤΕΣ Β ΛΥΚΕΙΟΥ.

Παναγιώτα Κοταρίνου & Χαρούλα Σταθοπούλου

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή διερευνάται η επίδραση του παιχνιδιού ρόλων σε συνδυασμό με το παιχνίδι με τις σκιές, σε μια τάξη μαθητών Β Λυκείου, στην προσπάθειά τους να μελετήσουν τη διαχρονική προσπάθεια για την απόδειξη του 5ου αιτήματος του Ευκλείδη. Αξιοποιώντας εθνογραφικές τεχνικές, αλλά και τη λογική του διδακτικού πειράματος, διαπιστώσαμε ότι το παιχνίδι ρόλων και το παιχνίδι με τις σκιές ενεργοποίησαν του μαθητές, οι οποίοι είχαν την ευκαιρία να αναπτύξουν τη φαντασία και τη δημιουργικότητά τους διερευνώντας, αποτελεσματικά, ζητήματα που συνδέονται με την προσπάθεια απόδειξης του 5ου αιτήματος. Από την ανάλυση του λόγου, όπως αυτός εκφράστηκε στα δρώμενα, φάνηκε ότι οι μαθητές κατανόησαν και χρησιμοποίησαν ορθά τις υπό διερεύνηση μαθηματικές έννοιες και προτάσεις, ενώ από τις συνεντεύξεις τους αναδείχθηκε η συμβολή αυτών των παιχνιδιών στη μαθησιακή διαδικασία.

1. Εισαγωγή

Παίζω μουσική, παίζω θέατρο, κάνω μαθηματικά. Για τις πρώτες δυο δραστηριότητες χρησιμοποιείται το ρήμα 'παίζω', για τα μαθηματικά 'κάνω'. Το ρήμα 'παίζω' παραπέμπει σε ενεργό εμπλοκή σε κάποια δραστηριότητα, η οποία είναι και ευχάριστη για το συμμετέχοντα σε αντίθεση με το ρήμα 'κάνω' το οποίο όταν αναφέρεται στα μαθηματικά συχνά συνδέεται με αρνητικά συναισθήματα. Μπορούμε να 'κάνουμε' μαθηματικά, μέσω του παιχνιδιού, να χρησιμοποιήσουμε, δηλαδή, τα μαθηματικά ως κίνητρο που ενεργοποιεί τους μαθητές; Τι αλλάζει στον τρόπο που αντιλαμβάνονται οι μαθητές τα μαθηματικά όταν εμπλέξουμε στη διδασκαλία τους τεχνικές σχετικές με το παιχνίδι;

Για τη διερεύνηση του παραπάνω ερωτήματος αξιοποιήσαμε το παιχνίδι ρόλων σε συνδυασμό με το παιχνίδι με τις σκιές, σχεδιάζοντας ένα διαθεματικό project, σε μια τάξη μαθητών Β Λυκείου στους οποίους είχε ανατεθεί η μελέτη της διαχρονικής προσπάθειας απόδειξης του 5^{ου} αιτήματος του Ευκλείδη. Το project αφορούσε στο 5^ο αίτημα του Ευκλείδη και την αμφισβήτησή του, ως ένα αίτημα ανεξάρτητο από τα άλλα αιτήματα, τόσο από τους διαδόχους του Ευκλείδη, όσο και από τους μαθηματικούς του κλασσικού Ισλάμ, αλλά και από μαθηματικούς της Δύσης ως τον 18^ο αιώνα. Επειδή όλες αυτές οι αποτυχημένες προσπάθειες για την απόδειξη του 5^{ου} αιτήματος έχουν παραμείνει στη σκιά, ενθαρρύνουμε τους μαθητές να τις παρουσιάσουν με τεχνικές του θεάτρου σκιών, σε συνδυασμό με παιχνίδι ρόλων.

2. Παιχνίδι και Μαθηματικά

2.1. Το παιχνίδι στη διδασκαλία/διδασκαλία των μαθηματικών

Το παιχνίδι είναι μια μορφή κοινωνικής δραστηριότητας, διαφορετικού χαρακτήρα από κάθε άλλη κοινωνική επαφή με το όριο του πραγματικού/ μη πραγματικού να αποτελεί κοινή αποδοχή και με τη σύμβαση να μη συμπεριφέρονται τα άτομα, όταν παίζουν 'με το συνήθη τρόπο' (Bishop, 1988). Το παιχνίδι, παγκόσμια δραστηριότητα, θεωρείται ζωτικής σημασίας για την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης: *"Δεν υπάρχει αμφιβολία στο μυαλό μου ότι το παιχνίδι (playing) είναι μια κρίσιμη δραστηριότητα για μαθηματική*

ανάπτυξη, και ελπίζω συνεπώς ότι τα ανθρωπολογικά και διαπολιτισμικά δεδομένα θα αυξηθούν ώστε να μπορούμε να προωθήσουμε εκπαιδευτικά τη σημασία αυτής της παγκόσμιας δραστηριότητας, με στόχο την πολιτισμική ανάπτυξη" (Bishop, 1988, σελ. 48).

Ο ίδιος, επίσης, θέτει τα παρακάτω ερωτήματα, μάλλον ρητορικά, σχετικά με το ρόλο του παιχνιδιού στην προετοιμασία του παιδιού να δεχτεί μαθηματική γνώση:

- Θα μπορούσαν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του παιχνιδιού να αξιοποιηθούν ως ρίζες για την ανάπτυξη της υποθετικής σκέψης;
- Θα μπορούσε το παίξιμο να αναπαριστά το πρώτο στάδιο, όπου διακρίνει κάποιος μια κατάσταση από την πραγματικότητα, για να την αναστοχαστεί στην πορεία και πιθανώς να επινοήσει τη μοντελοποίησή της;

Το γεγονός ότι τα παιχνίδια προσφέρουν μια άλλη όψη της 'αφαίρεσης' τα καθιστά σημαντικά για τη μαθηματική εκπαίδευση. Σε πολλά από τα παιχνίδια, ο στόχος είναι η μίμηση ή η μοντελοποίηση της πραγματικότητας· στοιχεία ιδιαίτερας σημασίας για τη μαθηματική εκπαίδευση.

Ο Huizinga (Huizinga, 1949) κάνει μια σημαντική επισήμανση για το παιχνίδι: το παιχνίδι δεν είναι σοβαρό ως προς το σκοπό, αλλά ως προς την εκτέλεση. Τα παιχνίδια εκτιμώνται, ιδιαίτερα, από τους μαθηματικούς, γιατί υπαγορεύουν μια συμπεριφορά, η οποία στηρίζεται στον έλεγχο συγκεκριμένων κανόνων—διαδικασία παρόμοια με εκείνη που χρησιμοποιείται στα μαθηματικά.

Η διαπίστωση ότι το παιχνίδι συμβάλλει στη μαθησιακή διαδικασία έχει οδηγήσει πολλούς ερευνητές και παιδαγωγούς να το εντάξουν, κυρίως στην εκδοχή του ως εκπαιδευτικό/διδακτικό παιχνίδι, στη διδασκαλία στην τάξη.

Στο εκπαιδευτικό παιχνίδι από τους Průcha, Walterová & Mareš (1998, p. 48, όπως παρουσιάζεται στην εργασία του Vankůš, 2005, p. 370) αποδίδονται τα παρακάτω κύρια χαρακτηριστικά:

- είναι σε αναλογία με αυθόρμητη δραστηριότητα των παιδιών, που υλοποιεί όμως εκπαιδευτικούς σκοπούς.

- Μπορεί να λάβει χώρα στην τάξη, σε χώρο άθλησης, στο έδαφος κλπ.
- Κάθε παιχνίδι έχει τους κανόνες του, χρειάζεται διαρκή έλεγχο και τελική αξιολόγηση.
- Είναι κατάλληλο και για ατομική και για ομαδική διδασκαλία.
- Ο δάσκαλος έχει ποικίλους ρόλους: από κύριος συντονιστής μέχρι απλός παρατηρητής.
- Το αβαντάζ του είναι ότι αποτελεί κίνητρο: εγείρει το ενδιαφέρον, αυξάνει την εμπλοκή των παιδιών στις δραστηριότητες, ενθαρρύνει τη δημιουργικότητα, τη συνεργατικότητα, τη συναγωνιστικότητα.
- Τα παιδιά μπορούν να χρησιμοποιήσουν τη γνώση τους, τις ικανότητές τους και την εμπειρία τους.
- Μερικά παιχνίδια πλησιάζουν τη μοντελοποίηση καταστάσεων από την πραγματική ζωή.

Επίσης ο Brousseau αναφέρει ως βασικά χαρακτηριστικά του εκπαιδευτικού παιχνιδιού, χαρακτηριστικά τα οποία το διαφοροποιούν από αυτό με την καθημερινή έννοια τα παρακάτω (Brousseau, 1997; Vankúš. 2007 p. 54):

- Το σύννηθες παιχνίδι είναι ελεύθερο, ενώ στο εκπαιδευτικό όλοι οι μαθητές πρέπει να συμμετέχουν.
- Το εκπαιδευτικό παιχνίδι χρησιμοποιείται για να υλοποιήσει εκπαιδευτικούς στόχους, ενώ ο κύριος στόχος του συνήθους παιχνιδιού είναι απλώς η διασκέδαση και η ευχαρίστηση.
- Το εκπαιδευτικό παιχνίδι έχει εξωτερικό έλεγχο (δάσκαλος, κανόνες του παιχνιδιού)

Η αξία του παιχνιδιού ως μέσου διδασκαλίας έχει συζητηθεί από αρχαιολάτων χρόνων. Ενδεικτικά θα αναφερθούμε σε μερικές χαρακτηριστικές απόψεις για τη χρήση του παιχνιδιού στη διδασκαλία/μάθηση φιλοσόφων, ερευνητών, ψυχολόγων επιλεγμένες από μια ενδιαφέρουσα επισκόπηση του Vankúš (2007).

Ο Πλάτωνας (Πολιτεία και Νόμοι) θεωρεί ως κύρια εκπαιδευτική μέθοδο για τα παιδιά το παιχνίδι, καθώς μπορεί να τα ετοιμάσει για μελλοντική επαγγελματική ενασχόληση. Επίσης τονίζει το ρόλο του παιχνιδιού στο να κάνει την εκπαίδευση ευχάριστη αντί για βίαιη.

Ο Αριστοτέλης στα 'Πολιτικά' και 'Ηθικά Νικομάχεια' υποστήριξε την ανάγκη του παιχνιδιού, θεωρώντας το ως την πιο κατάλληλη δραστηριότητα.

Ο J. A. Comenius θεωρεί το παιχνίδι ως κάτι πολύ σημαντικό για τα παιδιά γιατί προσθέτει ευχαρίστηση και απόλαυση, καθώς επίσης ότι συνεισφέρει στην ανάπτυξη κοινωνικών δεξιοτήτων του παιδιού όπως είναι η συνεργασία.

Ο Piaget ταξινομήσε τέσσερις τύπους παιχνιδιού: παιχνίδι για ευχαρίστηση, συμβολικό, παιχνίδι με κανόνες (αναδύεται η σημασία της κοινωνικοποίησης και της συνεργασίας), κατασκευαστικό παιχνίδι (κάνει τα παιδιά να αναλαμβάνουν υπευθυνότητες).

Κατά τον Piaget το παιχνίδι είναι σημαντικό για την κοινωνικοποίηση των παιδιών, την ανάπτυξη της συνεργατικότητας, ως προετοιμασία για δημιουργικές δραστηριότητες και λύση προβλήματος. Έτσι θεωρείται απαραίτητο και σημαντικό μέρος της εκπαίδευσης.

Επίσης, και ο Vygotsky (1978) επισημαίνει το σημαντικό ρόλο του παιχνιδιού, ισχυριζόμενος ότι «η επιρροή του παιχνιδιού στην ανάπτυξη των παιδιών είναι τεράστια» και τονίζοντας και αυτός το ρόλο του στην κοινωνικοποίηση του παιδιού (Van Kúš, 2007, σ. 59). Αναφέρεται, ακόμα, στον πολύ σημαντικό ρόλο του για την ανάπτυξη του παιδιού, διευκρινίζοντας ότι δεν είναι δραστηριότητα μόνο για παιδιά.

Ο Brousseau, αναφέρεται στην έννοια της “διδακτικής κατάστασης”, χρησιμοποιώντας τη μεταφορική έννοια του παιχνιδιού. Η διδακτική κατάσταση είναι προσωμοίωση ενός παιχνιδιού καθορισμένο από συγκεκριμένους κανόνες που αναλαμβάνονται από μαθητές και δασκάλους.

2.2. Το παιχνίδι ρόλων στη διδασκαλία των Μαθηματικών

Μία ειδική μορφή παιχνιδιού αποτελεί και το παιχνίδι ρόλων, το οποίο προέρχεται από το ψυχόδραμα (psychodrama), μια θεραπευτική μέθοδο που εφαρμόζουν οι ψυχοθεραπευτές, με εμπνευστή το Moreno (Άλκηστis 2000; Blatner 2002) και πληροί τις προϋποθέσεις του εκπαιδευτικού παιχνιδιού. Στο παιχνίδι ρόλων οι μαθητές υποδύονται ένα χαρακτήρα, βάζοντας τον εαυτό τους στην ίδια θέση με αυτόν και προσπαθώντας να φανταστούν τι θα έλεγε, τι θα σκεφτόταν και θα αισθανόταν (Neelands, 2000). Οι συμμετέχοντες παίζουν ρόλους προκειμένου να κατανοήσουν μια κατάσταση ή μια έννοια, να ταυτιστούν με τους άλλους, να ξαναζήσουν κάτι που έζησαν ή να βιώσουν κάτι εκ των προτέρων σε ασφαλές περιβάλλον.

Το παιχνίδι ρόλων αποτελεί ένα εργαλείο ζωτικής σημασίας για την πρώιμη παιδική ηλικία παρέχοντας ευκαιρίες για την ανάπτυξη σε όλες τις περιοχές μάθησης. Αποτελεί τον καλύτερο τρόπο για να αναπτυχθούν οι ικανότητες επικοινωνίας, επίλυσης προβλήματος και αυτοεπίγνωσης (Blatner 1995; Blatner 2002). Ενθαρρύνει τη μάθηση με αλληλοβοήθεια, και επιμερίζει την ευθύνη της μαθησιακής διαδικασίας στο δάσκαλο και το μαθητή (Porter-Ladousse, 1987). Το παιχνίδι ρόλων αποτελεί μια μέθοδο που βοηθά το μαθητή να κατανοήσει τις πιο λεπτές όψεις της λογοτεχνίας, των κοινωνικών σπουδών ακόμα και ορισμένες διαστάσεις των Φυσικών επιστημών και των Μαθηματικών (Blatner, 2002).

Την αποτελεσματικότητα αυτή του παιχνιδιού ρόλων έχουν αρχίσει να αντιλαμβάνονται οι εκπαιδευτικοί, κυρίως αυτοί των πρώτων τάξεων του Δημοτικού και του Νηπιαγωγείου. Όπως διαπιστώνουμε από την έρευνα των Bain et al (1989), η οποία αφορά στις διδακτικές πρακτικές και τα χαρακτηριστικά των πιο αποτελεσματικών δασκάλων 1^{ης} Δημοτικού, μεταξύ των παραγόντων που συνδέονται με την αποτελεσματικότητα των δασκάλων αναφέρεται και ο ενθουσιασμός τους για τις δραστηριότητες με παιχνίδι ρόλων. Οι δάσκαλοι χρησιμοποιούν το παιχνίδι ρόλων για να διδάξουν τους μαθητές γεγονότα, έννοιες, δεξιότητες ή να τους καλλιεργήσουν την αυτοεπίγνωση ή να τους ευαισθητοποιήσουν σε διάφορα θέματα. Ανάλογα με τους στόχους του δασκάλου, το παιχνίδι ρόλων μπορεί να

προσαρμολογείται στο πρόγραμμα με διάφορους τρόπους (van Ments, ο.α. οι Cohen και Manion, 1994 σελ.361):

1. ως εισαγωγή στο μάθημα
2. ως μέσο για συμπλήρωση κάποιου θέματος που διερευνάται
3. ως κύριο σημείο του μαθήματος
4. ως διάλειμμα από τη ρουτίνα της τάξης
5. ως τρόπος για ενοποίηση διαφορετικών θεμάτων
6. ως τρόπος για ανασκόπηση ή επανάληψη ενός θέματος
7. ως μέσο εκτίμησης της εργασίας

Τα τελευταία χρόνια έχει αναπτυχθεί μια πλούσια έρευνα και αντίστοιχη αρθρογραφία σχετική με το “παιχνίδι ρόλων” στη διδασκαλία των Μαθηματικών σε μαθητές κυρίως του Νηπιαγωγείου και των πρώτων τάξεων του Δημοτικού σχολείου (Charette, 2004; Tyce 2002; Griffiths, 2001; Simpson, 1997; Oers, 1996; Hallenberg, 1995; Anderson, 1995; Heck, 1980; Jarrett, 1977), ενώ μόλις πρόσφατα άρχισε να εφαρμόζεται και στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Kotarinou, Chronaki, Stathopoulou, 2010; Kotarinou, Stathopoulou, 2008). Στα άρθρα αυτά τονίζεται η συμβολή του “παιχνιδιού ρόλων” και προτείνονται διάφορες δραστηριότητες για την εφαρμογή του στη διδασκαλία των Μαθηματικών.

Το θέατρο σκιών και γενικότερα το παιχνίδι με τις σκιές αξιοποιείται στη διδακτική διαδικασία στις μικρές κυρίως ηλικίες, αλλά και στην εκπαίδευση των εκπαιδευτικών της αντίστοιχης σχολικής βαθμίδας (Παρούση και Τσελφές, 2008). Δεν εντοπίστηκαν, ωστόσο, έρευνες που αφορούν στη συνύπαρξη θεάτρου σκιών και Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

3. Η έρευνα: σχεδιασμός και υλοποίηση

3.1. το πλαίσιο και η μέθοδος της έρευνας

Τα πραγματολογικά δεδομένα για αυτήν την εργασία προέκυψαν από την έρευνα με θέμα “Η διδασκαλία των Μαθηματικών μέσα από τη χρήση τεχνικών της ΔΤΕ: διερεύνηση της επίδρασης της *Δραματικής*

Τέχνης στην Εκπαίδευση στη μάθηση των μαθηματικών σε τάξεις του Λυκείου”, η οποία πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο διδακτορικής διατριβής με το ίδιο θέμα. Στην παρούσα εισήγηση εστιάζουμε στη διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο η διδασκαλία μέσω του ‘παιχνιδιού ρόλων’ σε συνδυασμό με το ‘θέατρο σκιών’ επέδρασε στη μάθηση και διδασκαλία.

Το πλαίσιο της έρευνας: Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε τμήμα με 26 μαθητές-τριες Β’ Λυκείου (16 κορίτσια, 10 αγόρια, εκ των οποίων 17 θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης και 9 θεωρητικής) του Πειραματικού Λυκείου Ιλίου, σε διάρκεια τεσσάρων μηνών (σχολ. έτος 2010-2011).

Μέθοδος της έρευνας: για τη συλλογή των δεδομένων αξιοποιήσαμε τεχνικές εθνογραφικής έρευνας (παρατήρηση, συνεντεύξεις), ενώ για την παρέμβασή μας στηριχτήκαμε στη λογική του διδακτικού πειράματος (Χρονάκη, 2008). Το διδακτικό πείραμα αφορούσε στη διδασκαλία με χρήση τεχνικών ΔΤΕ της διαχρονικής προσπάθειας για την απόδειξη του 5^{ου} αιτήματος του Ευκλείδη.

3.2. Το project ‘Η ιστορία στη σκιά’. Η αμφισβήτηση του 5^{ου} αιτήματος ως τον 18^ο αι.’

Το project αυτό το οποίο αποτελεί μία ενότητα ενός διδακτικού πειράματος με θέμα την αξιωματική θεμελίωση της Ευκλείδειας και των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών (Υπερβολικής και Ελλειπτικής Γεωμετρίας), αφορούσε στην ιστορία της αμφισβήτησης του 5^{ου} αιτήματος ως ενός αιτήματος ανεξάρτητου από τα άλλα αιτήματα, από τους διαδόχους του Ευκλείδη, από μαθηματικούς του κλασσικού Ισλάμ, και από μαθηματικούς της Δύσης από την Αναγέννηση ως τον 19^ο αιώνα. Η αμφισβήτηση αυτή του 5ου αιτήματος περιελάμβανε τις προσπάθειές τους:

- Να αντικαταστήσουν το 5^ο αίτημα με ένα πιο αποδεκτό ισοδύναμό του, ή
- Να καταργήσουν το αίτημα, ως τέτοιο και να το αποδείξουν ως θεώρημα, βασισμένοι στα άλλα αιτήματα.

Σκοπός για όλες τις δραστηριότητες της ενότητας ‘Η ιστορία στη σκιά’, ήταν, να γνωρίσουν οι μαθητές μέσα από την ιστορία της αμφισβήτησης του 5^{ου} αιτήματος, πώς ένα καθαρά διανοητικό πρόβλημα— στην περίπτωση μας ένα μαθηματικό πρόβλημα— μπορεί να αποτελέσει πρόκληση για την επίλυσή του, για σχεδόν 20 αιώνες. Μέσα από την επαφή των μαθητών με το συγκεκριμένο πρόβλημα και κυρίως με τις συνεχείς και τις ανεπιτυχείς προσπάθειες επίλυσής του στοχεύσαμε στην αμφισβήτηση των στερεοτυπικών εικόνων που συνδέονται με τα Μαθηματικά ως ένα απόλυτο, βέβαιο και αμετακίνητο σώμα γνώσης.

Επιδιώξαμε να αντιληφθούν οι μαθητές ότι τα Μαθηματικά είναι μια πολιτισμική κατασκευή και ότι η ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης εξαρτάται όχι μόνο από επιστημονικές, αλλά και από φιλοσοφικές, πολιτισμικές και κοινωνικές συγκυρίες. Στόχος μας ήταν αναδειχθεί η ανθρωπιστική εικόνα για τα Μαθηματικά τα οποία δεν ορίζονται πλέον ως ένα σώμα καθαρής αφηρημένης γνώσης που υπάρχει σε κάποια υπεράνθρωπη, αντικειμενική πραγματικότητα αλλά αντίθετα συνδέονται με σύνολα κοινωνικών πρακτικών, καθένα με την ιστορία του, τα πρόσωπα, τους θεσμούς και τους κοινωνικούς χώρους, τις συμβολικές μορφές, τους σκοπούς και τις σχέσεις εξουσίας (Ernest, 2008:110).

Επιπλέον ένας ευρύτερος στόχος που υπερβαίνει τη διδασκαλία των μαθηματικών ήταν η γνωριμία και εξοικείωση των μαθητών μας με μια άγνωστη σε αυτούς πτυχή του ισλαμικού πολιτισμού, όπως τα Μαθηματικά. Μέσα από τη γνωριμία αυτή υπονομεύτηκε η στερεοτυπική αντίληψη για το Ισλάμ αλλά και η ευρωκεντρική αντίληψη για την ανάπτυξη των μαθηματικών ιδεών που συγκροτούν αυτό που είναι γνωστό ως δυτικά μαθηματικά.

Οι γνωστικοί μας στόχοι ήταν να γνωρίσουν οι μαθητές, μέσα από τα σφάλματα κατά την προσπάθεια απόδειξης του 5^{ου} αιτήματος, διάφορες ισοδύναμες με το 5^ο αίτημα προτάσεις οι οποίες χαρακτηρίζουν την Ευκλείδεια Γεωμετρία και παράλληλα να γνωρίσουν το λογικό σφάλμα της ‘λήψης ζητουμένου’ δηλ. τη χρησιμοποίηση κατά τη διαδικασία της απόδειξης μιας πρότασης ισοδύναμης με την αποδεικτέα, σφάλμα στο οποίο υποπίπτουν αρκετές φορές και οι ίδιοι.

Για όλες τις δραστηριότητες αυτής της ενότητας απαιτήθηκαν 4 διδακτικές ώρες στα μαθήματα Ιστορίας και Γεωμετρίας, οι δε μαθητές κλήθηκαν να παρουσιάσουν με τεχνικές του θεάτρου σκιών, ορισμένες από τις προσπάθειες απόδειξης του 5^{ου} αιτήματος.

Οι δραστηριότητες ακολούθησαν την παρακάτω δομή:

- Αρχική διάλεξη από την ερευνήτρια με ταυτόχρονη ψηφιακή προβολή, ως εισαγωγή στο θέμα.
- Εργασία των μαθητών σε ομάδες, με τη βοήθεια φύλλου εργασίας, μετά από μελέτη κατάλληλης βιβλιογραφίας, που τους υποδείχθηκε.
- Προετοιμασία των δρώμενων με τεχνικές ΔΤΕ, από τις ομάδες
- Παρουσίαση των δρώμενων
- Αναστοχασμός

Στο μάθημα της Ιστορίας με τη βοήθεια ενός ppt¹ παρουσιάστηκαν και συζητήθηκαν οι προσπάθειες απόδειξης του 5^{ου} αιτήματος από τους διαδόχους του Ευκλείδη, Ποσειδώνιο, Πτολεμαίο και Πρόκλο καθώς και από μαθηματικούς του κλασσικού Ισλάμ.

Στην αρχή τονίστηκε το γεγονός ότι καθώς το αντίστροφο του 5^{ου} αιτήματος αποδεικνύεται ενισχύθηκε έτσι η άποψη ότι το 5^ο αίτημα αποτελεί και αυτό πρόταση η οποία αποδεικνύεται² και ότι η διστακτικότητα του Ευκλείδη να χρησιμοποιήσει το 5^ο αίτημα συνηγορεί, σύμφωνα με τους μελετητές του, στην αμφιβολία του ίδιου

¹ Ορισμένες διαφάνειες είναι από παρουσίαση του Τεύκρου Μιχαηλίδη με το ίδιο θέμα, στο site του Θαλής και Φίλοι.

² Η πρόταση 17 αποτελεί το αντίστροφο του 5ου αιτήματος: (Παντός τριγώνου αι δύο γωνίαι είναι μικρότεροι των δύο ορθών, καθ' οιονδήποτε τρόπον και αν λαμβάνονται αύται). Η πρόταση αυτή αποτελεί το μοναδικό παράδειγμα που υπάρχει στο Α' βιβλίο των 'Στοιχείων', όπου ένα θεώρημα αληθεύει, ενώ το αντίστροφό του δεν μπορεί να αποδειχθεί (Bunt et al (1981) σελ.194-5)

του Ευκλείδη για το πόσο αυτή η πρόταση αποτελεί αίτημα³ (Greenberg, 1994).

Παραθέτοντας και εξηγώντας τις προσπάθειες απόδειξης του 5^{ου} αιτήματος από τους μαθηματικούς του Ισλάμ, αναφερθήκαμε γενικότερα στους λόγους ανάπτυξης των Μαθηματικών στον Ισλαμικό κόσμο από τον 8^ο έως τον 13^ο αι. μ. Χ. Έτσι διαβάστηκε ένα μικρό απόσπασμα από το βιβλίο 'Το θεώρημα του Παπαγάλου' του Denis Guedj (σελ. 269-272) το οποίο αναφέρεται στο 'Σπίτι της σοφίας' στη Βαγδάτη και το ρόλο του στη συγκέντρωση και μετάφραση του έργου των αρχαίων Ελλήνων. Έγιναν αναφορές στον Αλ Κβαρίσμι και τη συμβολή του στη Άλγεβρα, καθώς και τη διάδοση στη Δύση, μέσω του έργου του, του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης. Στη συνέχεια και μέσω της ψηφιακής παρουσίασης έγιναν γνωστές οι προσπάθειες των Thabit ibn Qurrah⁴, Al-Haytham γνωστού και ως Alhazen⁵, Omar Khayyam⁶ και Nasir al-Din al-Tusi ⁷.

³ Το 5ο αίτημα εμφανίζεται για πρώτη φορά στα στοιχεία του Ευκλείδη, στην απόδειξη της 29ης πρότασης (Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες και τέμνονται υπό τρίτης, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες,).

⁴ Ο Ταμπίτ Ιμπν Κουράχ, προσπαθώντας να αποδείξει το 5ο αίτημα, χρησιμοποιεί την ισοδύναμη πρόταση ότι το σύνολο των σημείων που ισαπεχουν από μια ευθεία αποτελούν επίσης ευθεία. Η πρόταση αυτή είναι χαρακτηριστική του Ευκλείδειου χώρου και μας εξασφαλίζει τη δυνατότητα να μετατοπίζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα στο χώρο, χωρίς να παραμορφώνεται, αναγκαίο για να ελέγχουμε την ισότητα των σχημάτων μέσω της μετακίνησής τους στο χώρο (Mlodinov,).

⁵ Ο Αλ Χαϊθάμ ή Αλχάζεν (965-1040), υπέθεσε ένα τρισορθογώνιο τετράπλευρο και θεώρησε ότι απέδειξε ότι η τέταρτη γωνία είναι και αυτή ορθή. Ως αποτέλεσμα της πρότασης αυτής συνάγεται εύκολα το 5ο αίτημα. Ο Αλχάζεν για την απόδειξη της πρότασής του υπέθεσε ότι ο γεωμετρικός τόπος ενός σημείου που κινείται ώστε να ισαπέχει συνεχώς από μια δεδομένη ευθεία, είναι αναγκαστικά μια ευθεία παράλληλη στην πρώτη, πρόταση η οποία είναι ισοδύναμη με το 5ο αίτημα (Boyer et al., 1997)

⁶ Ο Ομάρ Καγιάμ δεν προσπάθησε να συμπεράνει το 5^ο αξίωμα από τα άλλα τέσσερα. Στη θέση του 5^{ου} αιτήματος έθεσε ως αίτημα μια άλλη πρόταση, την πρόταση ότι οι συγκλίνουσες ευθείες τέμνονται. Για να αποδείξει το 5ο αίτημα, θεώρησε ένα ισοσκελές δισορθογώνιο (σχήμα 1) και υπέθεσε ότι οι άλλες δύο ίσες γωνίες θα είναι οξείες, ορθές ή αμβλείες και για να απορρίψει τις περιπτώσεις της οξείας και της της αμβλείας γωνίας χρησιμοποίησε την ισοδύναμη με το 5ο αίτημα πρόταση ότι οι συγκλίνουσες ευθείες τέμνονται. Με τον τρόπο αυτό απέδειξε ότι οι γωνίες είναι ορθές, και ότι ισχύει το 5ο αίτημα (Katz, 1998)

Τελειώσαμε την παρουσίαση με τις προσπάθειες απόδειξης του 5ου αιτήματος από τους Wallis, Saccheri⁸ και Lambert⁹, επισημαίνοντας στους μαθητές ότι αν και οι Άραβες προηγήθηκαν των Ευρωπαίων στη χρήση τόσο του τρισορθογώνιου τετραπλεύρου όσο και του ισοσκελούς δισορθογώνιου αυτά φέρουν ονόματα δυτικοευρωπαϊών μαθηματικών. Επίσης συζητήθηκε η προσφορά όλων αυτών των ανεπιτυχών προσπαθειών για την απόδειξη του 5ου αιτήματος στην επιστήμη των Μαθηματικών.

Όταν αναφερθήκαμε στο ισοσκελές δισορθογώνιο του Πέρση Ομάρ Καγιάμ (1048-1131) οι μαθητές απέδειξαν την ισότητα των δύο άλλων γωνιών του σχήματος, αλλά διαπίστωσαν ότι δεν ήταν δυνατόν να αποδειχθεί ότι οι γωνίες αυτές είναι ορθές.

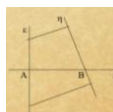
⁷ Και ο Ναζίρ αλ Ντιν αλ Τούσι (1201-1274) ξεκινά από το τετράπλευρο Khayyam-Saccheri και τις τρεις υποθέσεις ορθής, αμβλείας ή οξείας γωνίας. Για την απόδειξη της υπόθεσης ότι οι δύο γωνίες είναι ορθές χρησιμοποιεί μία ισοδύναμη προς το 5^ο αίτημα πρόταση πιο πολύπλοκη από αυτές των προηγούμενων μαθηματικών. Αν η ευθεία (ε) είναι κάθετη στη (ζ) στο σημείο Α και η (η) τέμνει πλάγια τη (ζ) στο σημείο Β, τότε οι κάθετες από την (ε) στη (η) είναι μικρότερες της ΑΒ όταν βρίσκονται προς το μέρος της οξείας γωνίας και μεγαλύτερες της ΑΒ όταν βρίσκονται προς το μέρος της αμβλείας (σχήμα 2) (Boyer et al., 1997).

⁸ Ο Saccheri (1667-1733), εντυπωσιασμένος από την αποδεικτική μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο, την οποία διάβασε στα Στοιχεία του Ευκλείδη, εφάρμοσε τη μέθοδο αυτή στη μελέτη του αιτήματος των παραλλήλων του Ευκλείδη, μελετώντας τις συνέπειες μιας άρνησης του περίφημου αυτού αιτήματος. Θεωρώντας ένα ισοσκελές δισορθογώνιο κατάφερε με την εις άτοπον απαγωγή, να δείξει ότι οι δυο άλλες γωνίες, δε θα είναι ούτε αμβλείες, ούτε οξείες, άρα θα είναι ορθές (Eves, 1983, II τόμος).

⁹ Ο Λάμπερτ για την απόδειξη του 5ου αιτήματος επιλέγει το ισοσκελές δισορθογώνιο και απορρίπτει την υπόθεση της ορθής γωνίας, βασιζόμενος στην παραδοχή ότι οι ευθείες γραμμές είναι άπειρες σε μήκος, ενώ για την απόρριψη της οξείας γωνίας τα επιχειρήματά του είναι αόριστα και μη ικανοποιητικά (Eves, 1983, II τόμος). Όμως με βάση τις υποθέσεις της αμβλείας ή οξείας γωνίας συνάγει αρκετές προτάσεις που αποτελούν σήμερα προτάσεις της ελλειπτικής και της υπερβολικής Γεωμετρίας αντίστοιχα.



σχήμα 1



σχήμα 2

Στη συνέχεια, αφού χωρίσαμε τους μαθητές σε έξι ομάδες, τους αναθέσαμε να παρουσιάσουν τις προσπάθειες απόδειξης του 5ου αιτήματος των Thabit ibn Qurrah, Al-Haytham, Omar Khayyam, Nasir al-Din al-Tusi, Saccheri και Lambert. Οι παρουσιάσεις έπρεπε να αναφέρονται στην πρόταση στην οποία στηρίχτηκαν για να συμπεράνουν το 5ο αίτημα, καθώς και στο λάθος που υπέπεσαν στην προσπάθειά τους να την αποδείξουν. Οι μαθητές κατά τη διάρκεια δύο διδακτικών ωρών μελέτησαν σχετική με το θέμα βιβλιογραφία και αποφάσισαν τους ρόλους και τα κείμενα για την παρουσίασή τους.

Για τις παρουσιάσεις αξιοποιήθηκε η τεχνική του θεάτρου σκιών καθώς και το παιχνίδι ρόλων. Για τα ιστορικά πρόσωπα επελέγη το παιχνίδι με τις σκιές παραπέμποντας στο γεγονός της αφάνειας των αποτυχημένων προσπαθειών και των προσώπων.

Στη συζήτηση —με την ολοκλήρωση των παρουσιάσεων— με στόχο τον αναστοχασμό, αναδείχθηκε μεταξύ άλλων και το γεγονός ότι κατά τη μελέτη της ιστορίας του 5ου αιτήματος δε συναντήσαμε γυναίκες μαθηματικούς. Η παρατήρηση αυτή οδήγησε τους μαθητές να αντιληφθούν και να σχολιάσουν τον αποκλεισμό των γυναικών αλλά και ευρύτερα τις διακρίσεις λόγω φύλου και άλλων χαρακτηριστικών.

3.2.1. Αξιολόγηση του project ως προς την υλοποίηση των γνωστικών στόχων

Για να εξετάσουμε αν και κατά πόσο υλοποιήθηκαν οι στόχοι μας ως προς τη γνωστική διάσταση της διδασκαλίας αναλύσαμε τόσο τα κείμενα των μαθητών από τις αποβιντεοσκοπήσεις των παρουσιάσεων, τις απαντήσεις τους σε σχετικά ερωτήματα μέσω των συνεντεύξεων, όσο και τις απαντήσεις τους σε ερωτήματα κατά τον αναστοχασμό στο τέλος του project.

1. Ανάλυση των δρώμενων ως προς ‘το περιεχόμενο’.

Στις ομάδες είχε δοθεί η οδηγία στις παρουσιάσεις τους να αναφερθούν συγκεκριμένα στις μαθηματικές προτάσεις που οι μαθηματικοί αυτοί θεώρησαν ότι απέδειξαν και στο λάθος που εντοπίστηκε σε κάθε απόδειξη. Οι ομάδες είχαν τη δυνατότητα να

αποφασίσουν να συμπεριλάβουν στην παρουσίασή τους και όποια άλλη επιπλέον πληροφορία θα θεωρούσαν σημαντικό να αναφερθεί.

α) Η πρώτη ομάδα: Η προσπάθεια του Thabit ibn Qurrah

Η ομάδα συμπεριέλαβε στην παρουσίαση αυτά που της ζητήθηκαν. Ανέφερε την 'πρόταση' (*Αν υποθέσουμε λοιπόν, ότι έχουμε μια ευθεία α και σημεία που κείνται προς το ίδιο μέρος και απέχουν την ίδια απόσταση από τη δεδομένη ευθεία, σχηματίζουν επίσης ευθεία β παράλληλη προς την ευθεία α*) την οποία χρησιμοποίησε ο Thabit ibn Qurrah για να αποδείξει το 5^ο αίτημα καθώς και το λάθος του στην απόδειξη του 5ου αιτήματος (*Το λάθος που έκανε ο Thabit ibn Qurrah είναι ότι έκανε 'λήψη ζητούμενου'. Στην προσπάθειά του δηλ. να αποδείξει το 5^ο αίτημα, χρησιμοποιεί το ίδιο το αίτημα και βασίζει εκεί την απόδειξή του*).

Η ομάδα συνέδεσε το 5^ο αίτημα με την χαρακτηριστική ιδιότητα του Ευκλείδειου χώρου, της παράλληλης μετατόπισης σχήματος χωρίς παραμόρφωση, όμως δεν αναφέρεται με σαφήνεια το λάθος του Thabit ibn Qurrah¹⁰:

Το 5^ο αίτημα του Ευκλείδη, εξαρτάται από τη δυνατότητα να μετακινούμε τα σχήματα στο χώρο, χωρίς αυτά να παραμορφώνονται, προκειμένου να τα αλληλοεπικαλύπτουμε. Έτσι μονάχα μπορούμε να ελέγχουμε την σύμπτωση ή την ισοδυναμία των γεωμετρικών σχημάτων, όπως στην περίπτωση του Thabit οι δύο ευθείες τις οποίες πρέπει να αποδείξουμε την παραλληλία τους. Παρ' όλα αυτά σε έναν διαφορετικό χώρο από τον Ευκλείδειο, τα σχήματα με τη μετατόπισή τους μπορεί να παραμορφώνονται, γεγονός που καθιστά εσφαλμένο το 5^ο αίτημα του Ευκλείδη καθώς και την προσπάθεια απόδειξής του από τον Thabit ibn Qurrah.).

¹⁰ Ο Thabit ibn Qurrah ερμήνευσε την παραμόρφωση ενός σχήματος ως 'απόδειξη' της υπόθεσής του σχετικά με την ίση απόσταση των γραμμών¹⁰ (Mlodinov, 2007 σελ., 131.)

β) Η δεύτερη ομάδα: Η προσπάθεια του Al Haytham

Οι μαθητές ανέσυραν όλες τις πληροφορίες που τους ζητήθηκαν από τη βιβλιογραφία και τις συμπεριέλαβαν με πολύ ευρηματικό τρόπο στην παρουσίασή τους.

Χαρακτηριστικό είναι το παρακάτω απόσπασμα από το δρώμενο που παρουσίασαν.

- Ο Αλ Χαυθάμ ή Αλχάζεν (σαν το παλιό γήπεδο Αλ-Καζάρ της Λάρισσας, σαν τον Abou Diaby της Arsenal ή σαν ένα κίτρινο υποβρύχιο της Βιγερεάλ) υποθέτει την ύπαρξη ενός τρισσορθογώνιου τετραπλεύρου με τρεις ορθές γωνίες
- (2^η σκιά) τετράπλευρο Lambert
- (1^η σκιά) και εξετάζει τις περιπτώσεις η τέταρτη γωνία να είναι οξεία, ορθή ή αμβλεία.
- (2^η) Μόνο αυτό;
- (1^η) Όχι βέβαια. Αποκλείει τις περιπτώσεις της οξείας και αμβλείας γωνίας θεωρώντας τις παράλληλες ευθείες ως ισαπέχουσες. Αυτό είναι ισοδύναμο με το 5^ο αίτημα.

Το κείμενο της ομάδας αν και είναι σουρρεαλιστικό, περιγράφει σωστά τις μαθηματικές έννοιες.

- (2^η) Τελικά είχαν δίκιο οι άλλοι που με έλεγαν γεωμετρικό τόπο.
- (1^η σκιά) Όντως ναι παραδέχομαι ότι είμαι ένα σημείο που κινούμαι σαν πολύχρωμο δελφίνι (που να ησυχάσω δε μ' αφήνουν) στο σμαραγδένιο ωκεανό της αγάπης και της αληθινής γεωμετρίας ώστε να ισαπέχω από ευθεία σε ευθεία, από δρόμο σε δρόμο, από ουρανό σε ουρανό

Το δρώμενο αυτό ξάφνιασε ευχάριστα όλους τους μαθητές και το είδος γραφής που επέλεξαν έδειξε έναν τελείως διαφορετικό τρόπο χρήσης μαθηματικών όρων στο λόγο.

γ) Η τρίτη ομάδα: Η προσπάθεια του Omar Khayyam

Η ομάδα συμπεριέλαβε στην παρουσίασή της την πρόταση που προσπάθησε να αποδείξει ο Ομάρ Καγιάμ, για να συναγάγει από αυτή το 5^ο αίτημα (*Θεωρώ ένα τετράπλευρο του οποίου οι δύο απέναντι πλευρές είναι ίσες και κάθετες στη βάση και εύκολα αποδεικνύω ότι οι δύο άλλες είναι ίσες. Μπορώ όμως να αποδείξω ότι είναι και ορθές, απορρίπτοντας τις περιπτώσεις να είναι οξείες ή αμβλείες αντίστοιχα;*)

Η ομάδα αναφέρθηκε στο λάθος του Ομάρ Καγιάμ, με μια μικρή παράλλειψη (*Πράγματι, απέρριψε και τις δύο τελευταίες περιπτώσεις, όμως για να αποδείξει ότι είναι ορθές χρησιμοποίησε στην απόδειξή του την πρόταση “Δύο συγκλίνουσες ευθείες θα τέμνονται”, η οποία είναι ισοδύναμη με το 5^ο αίτημα του Ευκλείδη*).¹¹

δ) Η τέταρτη ομάδα: Η προσπάθεια του Nasir-al-Din al-Tusi

Η ομάδα αυτή αναφέρθηκε ορθά στην παρουσίασή της στην πρόταση με την οποία ο Αλ Τούσι προσπάθησε να αποδείξει το 5^ο αίτημα (*Προσπάθησα να αποδείξω ότι σε ένα τετράπλευρο στο οποίο οι δύο πλευρές είναι κάθετες και ίσες στη βάση, τότε και οι άλλες δυο γωνίες είναι ορθές*) .

Η ομάδα επίσης είχε κατανοήσει ότι το λάθος του Αλ Τούσι για την απόδειξή του προηγούμενου θεωρήματος οφείλεται σε ‘λήψη ζητουμένου’¹² (*Όμως η απόδειξη που έδωσε ο Ναζίρ Αλ Ντιν Αλ Τούσι, είναι λανθασμένη. Προσπάθησε να αποδείξει το 5^ο αίτημα χρησιμοποιώντας κάτι ισοδύναμο με αυτό*) και παραθέτει την πρόταση που χρησιμοποίησε και η οποία είναι ισοδύναμη με το 5^ο αίτημα (*Στην απόδειξή μου χρησιμοποίησα ότι αν η ευθεία (ε) είναι κάθετη στη (ζ) στο σημείο Α και η (η) τέμνει πλάγια τη (ζ) στο σημείο Β, τότε οι*

¹¹ Ολοκληρωμένη η απάντηση είναι: ο Ομάρ Καγιάμ χρησιμοποίησε την πρόταση “Δύο συγκλίνουσες ευθείες θα τέμνονται” για να απορρίψει τις υποθέσεις της οξείας και της αμβλείας γωνίας και έτσι να αποδείξει την τρίτη υπόθεση ότι είναι ορθές.

¹² Χρησιμοποιείται δηλ. το κυκλικό επιχείρημα.

κάθετες από την (ε) στη (η) είναι μικρότερες της AB όταν βρίσκονται προς το μέρος της αμβλείας¹³.

ε) Η πέμπτη ομάδα: Η προσπάθεια του Sacchieri

Ο μαθητής στο ρόλο του Σακκέρι, δίνει μια πλήρη απάντηση στο τι προσπάθησε να αποδείξει και με ποιο τρόπο (*Κατάφερα να αποδείξω το 5^ο αίτημα. Δημιουργώντας ένα δισορθογώνιο τετράπλευρο, ένα τετράπλευρο που έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες οι οποίες είναι κάθετες στη μία του βάση, κατάφερα με τη μέθοδό μου, την εις άτοπον απαγωγή, να δείξω ότι οι δυο άλλες γωνίες, οι οποίες θα είναι ίσες, σύμφωνα με τις 28 πρώτες προτάσεις της ουδέτερης Γεωμετρίας, της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που δε χρησιμοποιεί το 5^ο αίτημα, ότι αυτές δε θα είναι ούτε αμβλείες, ούτε οξείες , άρα θα είναι ορθές*).

Αντίθετα, τα σχόλια για την απόρριψη της υπόθεσης της αμβλείας και της οξείας γωνίας είναι ελλιπή¹⁴ (Ο Σακκέρι όντως κατάφερε να απορρίψει την υπόθεση της αμβλείας γωνίας, αλλά η απόρριψη της υπόθεσης ότι οι δύο απέναντι γωνίες των δύο ορθών γωνιών είναι οξείες γωνίες τον δυσκόλεψε πολύ. Πράγματι το έργο του βασίζεται σε πολλές ανακρίβειες και τελικά δεν είναι πολύ πειστικό)

στ) Η έκτη ομάδα: Η προσπάθεια του Lambert

Στην παρουσίασή τους οι μαθητές αναφέρονται ορθά στο τρισορθογώνιο (ορθογώνιο Al Haytham-Lambert) και στις τρεις υποθέσεις της ορθής, οξείας ή αμβλείας γωνίας (*Ονομάζομαι John Heinrich Lambert. Στην προσπάθειά μου να αποδείξω το 5^ο αίτημα του*

¹³ Αντί για αμβλεία γωνία έπρεπε να πει οξεία. Το λάθος μάλλον οφείλεται μάλλον σε αβλεψία

¹⁴ Ο Σακκέρι κατάφερε να απορρίψει την υπόθεση της αμβλείας γωνίας με την παραδοχή ότι οι ευθείες είναι άπειρες σε μήκος, ενώ για την απόρριψη της οξείας γωνίας χρησιμοποιεί ασαφείς έννοιες για στοιχεία στο άπειρο (Eves, 1983, τόμος Β σελ.98).

Ευκλείδη επιλέγω θεμελιώδες σχήμα το τετράπλευρο αλλιώς τρισσορθογώνιο εξασφαλίζοντας την ύπαρξη τριών ορθών γωνιών από τις τέσσερις γωνίες του. Η τέταρτη και τελευταία γωνία θα είναι οξεία, ορθή ή αμβλεία όπως προκύπτουν και από τις υποθέσεις του Σακκίερι. Προχώρησα λοιπόν τη θεωρία του μερικά βήματα πιο πέρα καταλήγοντας τις παρακάτω υποθέσεις. Αρκεί να αποδείξω ότι η τέταρτη γωνία είναι ορθή, για να αποδείξω μια ισοδύναμη πρόταση με το 5^ο αίτημα του Ευκλείδη. Απέρριψα την υπόθεση της οξείας και αμβλείας γωνίας και έτσι κατέληξα στο συμπέρασμα ότι η τέταρτη γωνία είναι ορθή, οπότε πέτυχα το σκοπό μου και απέδειξα το 5^ο αίτημα του Ευκλείδη).

Ως προς τα σχόλια, η ομάδα αναφέρεται γενικότερα στο έργο του Λάμπερτ, αλλά δεν αναφέρεται πιο συγκεκριμένα στο λάθος που υπέπεσε.

Συμπεράσματα από την ανάλυση των παρουσιάσεων

Συνοψίζοντας τις αναλύσεις όλων των δρώμενων, όπως είδαμε αναλυτικά προηγουμένως, συμπεραίνουμε ότι οι ομάδες χρησιμοποίησαν στα δρώμενά τους αυτά που τους είχαν ζητηθεί. Και έξι ομάδες αναφέρθηκαν ορθά στις μαθηματικές προτάσεις που οι μαθηματικοί αυτοί θεώρησαν ότι απέδειξαν και από αυτές συνεπέραναν το 5ο αίτημα.

Αναφέρονται στο λογικό λάθος που έκαναν κατά την απόδειξη, δηλ. στη 'λήψη ζητουμένου', αλλά δεν διατυπώνουν σε όλες τις περιπτώσεις με απόλυτη ακρίβεια και σαφήνεια το λάθος που έκαναν.

2. Αναστοχασμός

Μετά την παρουσίαση των δρώμενων, επακολούθησε αναστοχασμός και συζήτηση.

Ως προς το γνωστικό τομέα, στο ερώτημα της ερευνήτριας, σχετικά με το έργο όλων αυτών των μαθηματικών που παρουσιάστηκε, οι μαθητές έδωσαν σωστές απαντήσεις.

- (Αντ.) Προσπάθησαν να αποδείξουν μια ισοδύναμη πρόταση προς το 5ο αίτημα του Ευκλείδη
- (ερευν.) Προσπάθησαν να αποδείξουν. Απέτυχαν για ποιο λόγο;

- (Μαρ.) Δε μπόρεσαν να απορρίψουν την υπόθεση της οξείας γωνίας.
(Μεταξύ αυτών) ο Σακκέρι
- (ερευν.) Όλοι όμως τι λάθος έκαναν;
- (Στέφ.) Έπαιρναν μια ισοδύναμη πρόταση του 5ου αιτήματος και παίρνοντας το ζητούμενο ως δεδομένο προσπαθούσαν να το αποδείξουν.

3. Συνεντεύξεις μαθητών

Κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων με τους μαθητές του τμήματος, θέσαμε σε 17 μαθητές ερωτήματα σχετικά με την αμφισβήτηση του 5ου αξιώματος. Τις απαντήσεις τους τις αξιολογήσαμε με βάση την παρακάτω ρουμπρίκα αξιολόγησης.

I) Απάντησαν επαρκώς σχετικά με την αμφισβήτηση του 5ου αξιώματος από τους Άραβες και τους Σακκέρι και Λάμπερτ (Αναφέρθηκαν αφ' ενός στην προσπάθεια απόδειξης του 5ου αιτήματος ή στο κύριο λάθος κατά την απόδειξη, τη λήψη ζητουμένου)
II) Απάντησαν ανεπαρκώς σχετικά με την αμφισβήτηση του 5ου αξιώματος (Έδωσαν γενικόλογες απαντήσεις ή υπήρξαν λάθη στις απαντήσεις τους)
III) Δήλωσαν αδυναμία να απαντήσουν στο ερώτημα

I) Έδωσαν επαρκή απάντηση σχετικά με την αμφισβήτηση του 5ου αξιώματος

Όταν ρωτήσαμε τους μαθητές σχετικά με το έργο των Αράβων, των Σακκέρι και Λάμπερτ προσδοκούσαμε να αναφερθούν γενικά στην προσπάθειά τους να αποδείξουν το 5ο αίτημα ή να το αντικαταστήσουν με κάποιο απλούστερο και όχι να αναφερθούν αναλυτικά στις προσπάθειες καθ' ενός μαθηματικού. Πράγματι είχαμε απαντήσεις αυτής της μορφής.

- (Α) Είχε να κάνει με το λεγόμενο 5^ο αίτημα του Ευκλείδη, το οποίο ουσιαστικά διέφερε, διότι δε μπορούσαν να καταλάβουν, θα πρέπει να μπει σαν αίτημα αλλά θα έπρεπε να αποδεικνύεται αυτό το 5^ο αίτημα, διότι ήταν κάτι το οποίο δε βασιζόταν στις θεμελιώδεις έννοιες.

-(Γ) Θυμάμαι ότι είχε γίνει ντόρος (για το 5^ο αίτημα) ότι το αμφισβητούσανε και δε μπορούσε να το αποδείξει, όλοι.

-(Στ.) Φυσικά. Ήταν πολλοί που προσπάθησαν είτε να αποδείξουν το 5^ο αίτημα του Ευκλείδη, ή να το αμφισβητήσουν και έχουμε τους Άραβες μαθηματικούς οι οποίοι όπως παραστατικά είδαμε έμειναν στη σκιά, γιατί έκαναν όλοι λάθος, όπως ο Άλ Χαϋθάμ. Πολύ γόνιμη αυτή η προσπάθεια γιατί όπως αποδείχτηκε αργότερα το 18ο, 19ο 20ο αιώνα ότι δεν είναι μόνο η Ευκλείδεια Γεωμετρία.

- (Σ.) Το 5^ο είτανε εκείνο το αξίωμα που είχανε παιδευτεί οι άλλοι 500 χρόνια μέχρι να το βρούνε. Αλλά εντάξει αυτό δεν το θυμάμαι να σας το πω στην αλήθεια, αλλά θυμάμαι ότι παιδεύτηκαν αρκετά. Αυτό το θυμάμαι.

Αναμέναμε επίσης να αναφερθούν στο λάθος της μεθόδου επίλυσης και όχι στο λάθος κάθε μαθηματικού ξεχωριστά.

-(Π) (Έκαναν) Λήψη ζητουμένου. Την είχε κάνει ο Ντεκάρτ στην προσπάθειά του να αποδείξει ότι υπάρχει θεός, χρησιμοποίησε την ίδια την ύπαρξη του θεού ως δεδομένο.

-(Γ.) Προσπαθούσαν να το αποδείξουν και το χρησιμοποιούσαν κατά τη διάρκεια της απόδειξης.

-(Ν) Βασικά αυτό που προσπαθούσαν να αποδείξουν, το 5^ο αίτημα, αναγκαστικά το αποδείκνυαν χρησιμοποιώντας το.

- (Σ.) Κάνανε λήψη ζητουμένου, και μέσω αυτού δηλ. αυτό που είχανε πάρει ως δεδομένο ήτανε και το ζητούμενο, και έτσι καταλήγανε σε λάθη, πάρα πολλά...

Θεωρήσαμε επομένως επαρκείς τις απαντήσεις των μαθητών οι οποίες αναφέρονταν σε αυτά τα δύο σημεία.

II) Απάντησαν ανεπαρκώς σχετικά με την αμφισβήτηση του 5^{ου} αξιώματος.

Αρκετοί από τους μαθητές έδωσαν γενικόλογες απαντήσεις, χωρίς να μπορούν να απαντήσουν επακριβώς σ' αυτά που ρωτήθηκαν ενώ συναντάμε επίσης ανακρίβειες και λάθη στις απαντήσεις τους.

-(Βιρ.) Το 5^ο αίτημα, που κάποιοι άλλοι προσπάθησαν να το ορίσουν, χρησιμοποιούσαν κάποιον αυθαίρετο όρο και στην ουσία έλεγαν ότι μπορεί να συνοψιστεί από τα υπόλοιπα τέσσερα αιτήματα.

-(Τατ.) Προσπαθούσαν να αποδείξουν κάτι το οποίο δεν είχε αποδειχθεί. Θυμάμαι ότι προσπαθούσαμε να αποδείξουμε και ότι μετά ήτανε με κάτι θεωρήματα, μπορεί να λέω και λάθος, προσπαθούσαν να αποδείξουν κάποια θεωρήματα και μετά, με κάτι σε τετράγωνα, με τετράγωνα με τέσσερις ίσες γωνίες, που το τελευταίο έβγαине καμπυλωτό.

III) Δήλωσαν αδυναμία να απαντήσουν στο ερώτημα

Στα παραπάνω ερωτήματα, τρεις μαθητές, αν και τους υπενθυμήσαμε ότι αναφερόμαστε στις ιστορίες στη σκιά, δήλωσαν αδυναμία να απαντήσουν

Ο παρακάτω πίνακας αποτυπώνει συνοπτικά τα αποτελέσματα.

Επαρκής απάντηση	9 μαθητές
Ανεπαρκής απάντηση	5 μαθητές
Αδυναμία απάντησης	3 μαθητές

Έχοντας την πλήρη εικόνα των απαντήσεων συμπεραίνουμε ότι εννιά στους 17 μαθητές που ρωτήθηκαν μετά την πάροδο των δύο μηνών, είχαν τη δυνατότητα να μας δώσουν μια ικανοποιητική εικόνα του τι προσπάθησαν να αποδείξουν οι Άραβες και οι Σακκέρι και Λάμπερτ. Οι περισσότεροι δε από αυτούς αναφέρονταν στη 'λήψη ζητουμένου', έννοια η οποία είχε εντυπωθεί στους μαθητές.

3.2.2.Αξιολόγηση του project ως προς τους στόχους επιστημολογικής διάστασης

Ι) Απαντήσεις των μαθητών σχετικά με τον αγώνα απόδειξης του 5ου αιτήματος

Μπορεί όλοι οι μαθητές να μην ήταν σε θέση να απαντήσουν επακριβώς για την αμφισβήτηση του 5^{ου} αξιώματος από τους Άραβες και τους άλλους μαθητικούς στην Ευρώπη, όμως ο αγώνας και οι προσπάθειες όλων όλων αυτών τους εντυπωσίασε. Οι μαθητές τόνισαν στις απαντήσεις τους τη συνεχή και επίπονη αυτή προσπάθεια, χαρακτηρίζοντας την αξιοθαύμαστη και εντυπωσιακή.

-(Σοφ.)... θυμάμαι ότι παιδεύτηκαν αρκετά. Αυτό το θυμάμαι, καταλήγανε σε λάθη, πάρα πολλά, αλλά εντάξει και από τα λάθη μαθαίνει κανένας.

-(Θοδ.) Είναι ιδιαίτερα αξιοθαύμαστο, προσπάθησαν και είναι πολύ σημαντικό όχι μόνο στη γεωμετρία, σ' όλα τα πράγματα όλοι οι άνθρωποι να προσπαθούν μέχρι να καταφέρουν κάτι να πετύχουν.

- (Ι) Ναι αλλά ήταν εντυπωσιακό αυτό που έκαναν όλοι αυτοί οι άνθρωποι να αποδείξουν ένα αίτημα που κάποιος άλλος είχε σκεφτεί.

Οι μαθητές γνώρισαν για πρώτη φορά έναν αγώνα πολλών μαθηματικών ο οποίος δεν στέφτηκε από επιτυχία. Αποδίδουν την επιμονή, τον αγώνα, την υπομονή κι τη δύναμη θέλησης αυτών των μαθηματικών να αποδείξουν το 5ο αίτημα, στην αγάπη και την αφοσίωσή τους στα Μαθηματικά.

-(Τζ.) Στην αρχή λέω, καλά αφού δεν το βρίσκουν γιατί δε σταματάνε; Κι όμως εκεί προσπαθούσαν, προσπαθούσαν, είναι ανάλογα, τους άρεσαν πάρα πολύ αυτά για να το κάνουν. Εντάξει, εγώ στη θέση τους δεν θα τόκανα, δεν. Άμα ήταν κάτι άλλο μπορεί να τόκανα, αλλά εντάξει.

- (Τατ.) Κοιτούσα περισσότερο το χαρακτήρα τους. Ήταν πολύ ωραίος ο αγώνας αυτών των ανθρώπων. Σίγουρα προσπαθούσανε και παλεύανε ν' αποδείξουν κάτι το οποίο τους άρεσε. Δηλ. γι' αυτό και μόνο έχει ενδιαφέρον, γιατί κάνανε κάτι που τους άρεσε. Γενικότερα δείχνει τη θέληση που είχανε, το ότι ήθελαν κάτι να καταφέρουν και το είχαν βάλει μπροστά τους και πήγαιναν εκεί, δείχνει και τη δύναμη της

θέλησης που είχανε, δείχνει και το ότι είχανε υπομονή, γιατί σίγουρα ήθελε υπομονή, γιατί ήθελε πολλούς τρόπους για να αποδείξουνε κάτι, ήθελε εξυπνάδα, το μυαλό να παίρνει στροφές, γενικότερα μας έδειξε πολλά και στο να προσπαθούμε και στο να βάζουμε στόχους και στο να έχουμε υπομονή.

Οι μαθητές για πρώτη φορά έβλεπαν τα μαθηματικά ως ένα ανθρώπινο δημιούργημα, γνωρίζοντας τις προσπάθειες μιας σειράς προσώπων στην επίλυση του ίδιου μαθηματικού προβλήματος.

-(Τζ.) Ήταν πιο ωραίο , γιατί αν βλέπεις μόνο το αποτέλεσμα είναι βαρετό. Πρέπει να μάθεις λίγο και τι έγινε πιο πίσω, ποιοι τα δημιούργησαν και έτσι ήταν πιο ωραίο, έμαθα περισσότερα πράγματα.

II) Απαντήσεις των μαθητών σχετικές με το ιστορικό και πολιτισμικό πλαίσιο

Οι μαθητές υποδέχθηκαν θετικά τις δραστηριότητες που αφορούσαν την ιστορία της Γεωμετρίας και οι οποίες συνέδεσαν την επιστήμη αυτή με το ιστορικό, οικονομικό πολιτικό πλαίσιο στο οποίο αυτή αναπτύχθηκε.

-(Α) ... έλειπε από το σχολείο πολύ καιρό, η εξέταση μιας επιστήμης όπως της πρέπει, ιστορικά, και πολιτικά.

- (Π) Γενικώς είναι ωραίο να παρατηρείς σε κάθε επιστήμη την ιστορία της. Να συνδέεις την κάθε επιστήμη και την κάθε ανακάλυψη της επιστήμης με τα γεγονότα που συνέβαιναν εκείνη την περίοδο, για να δεις την ψυχοσύνθεση και το πώς ακριβώς λειτουργούσαν και αντιδρούσαν οι άνθρωποι και τα ερεθίσματα που είχαν οι ίδιοι εκείνη την περίοδο

- (Χαρ.) Όχι, δεν ξέρω, δεν τόχω σκεφτεί όλο αυτό, αλλά ήταν ωραίο γιατί μαθαίναμε τέλος πάντων για εκείνη την εποχή που λέτε, ενώ όταν κάναμε στο κανονικό μάθημα δε μαθαίναμε τίποτα απ' ότι είχε γραφτεί και όλα αυτά, ήταν απλά τριγώνα , τετράγωνα.

Από τις συνεντεύξεις των μαθητών φάνηκε ότι υπήρξαν μαθητές οι οποίοι συνέδεσαν την ανάπτυξη των μαθηματικών με την οικονομική ανάπτυξη της περιοχής στην οποία αυτά αναπτύχθηκαν.

-(Στ.) Καταλάβαμε ότι για να υπάρχει ανάπτυξη της επιστήμης, πρέπει να υπάρξει ανάπτυξη πρώτα σε όλους τους υπόλοιπους τομείς, ο οικονομικός και αργότερα ο πολιτισμικός.

-(Ζ) (Η ανάπτυξη έγινε) Λόγω της οικονομικής ευμάρειας που είχαν εκείνες οι περιοχές (στο Ισλάμ).

3.2.3. Αξιολόγηση των δρώμενων ως προς τη μορφή

Σε όλες τις παρουσιάσεις των δρώμενων αξιοποιήθηκε με επιτυχία το παιχνίδι ρόλων, με τα ιστορικά πρόσωπα να παρουσιάζονται με την τεχνική της σκιάς, ενώ σε αντίστιξη οι σύγχρονοι χαρακτήρες – δημοσιογράφοι, μελετητές του έργου των παραπάνω μαθηματικών—χωρίς τη χρήση της σκιάς. Οι σκιές, σε πανί ή σε τοίχο σχηματοποιήθηκαν από τις φιγούρες των ίδιων των μαθητών με τη βοήθεια φορητού προβολέα, τον οποίο χειρίστηκε ένας μαθητής για όλες τις παρουσιάσεις, ενώ πριν αρχίσουν το δρώμενο οι μαθητές έπαιξαν με τον προβολέα, για να βρεθεί η πιο κατάλληλη θέση ώστε να δημιουργούνται σκιές με καθαρά περιγράμματα. Οι μαθητές επέλεξαν ευφάνταστο δραματικό πλαίσιο, πρωτότυπους διαλόγους και υποστήριξαν με επιτυχία τους ρόλους τους, ενώ τα κατάλληλα κοστούμια εποχής και τα τουρμπάνια στα κεφάλια τους δημιούργησαν πολύ πειστικές σκιές.

Αναφέρουμε ενδεικτικά το ‘δραματικό πλαίσιο’ ορισμένων δρώμενων.

- Παρουσίαση του έργου του Ομάρ Καγιάμ μέσα από διάλογο μεταξύ της σκιάς του Ευκλείδη και της σκιάς του Ομάρ Καγιάμ.
- Ένας ‘θίασος από πνεύματα’ παρουσιάζει το έργο του Αλ Χαϋθάμ.
- Ένας δημοσιογράφος ο οποίος ήθελε να γράψει ένα άρθρο σχετικό με τον Αλ Τούσι, τον βλέπει στο όνειρό του να του μιλάει για το έργο του.

3.2.4. Αξιολόγηση των δρώμενων από τους ίδιους τους μαθητές

Σε όλες τις ενότητες του διδακτικού πειράματος παρουσιάστηκαν 26 δρώμενα, εκ των οποίων τα έξι ήταν της συγκεκριμένης ενότητας που αφορούσε στο 5^ο αίτημα, και πραγματοποιήθηκαν με την τεχνική της σκιάς. Οι μαθητές όταν ρωτήθηκαν ποιο ήταν το δρώμενο, από αυτά που συμμετείχαν οι ίδιοι, που τους άρεσε περισσότερο οι 8 στους 13 απάντησαν ότι προτιμούσαν το δρώμενο με το παιχνίδι ρόλων και τις σκιές. Όταν δε ρωτήθηκαν το ίδιο για τα δρώμενα που παρακολούθησαν ως θεατές, 9 στις 22 απαντήσεις αφορούσαν τις σκιές και όλοι οι μαθητές επέλεξαν το ίδιο δρώμενο με θέμα τον Αλχάζεν.

Οι μαθητές αιτιολόγησαν τις επιλογές τους αυτές σύμφωνα με τα παρακάτω κριτήρια που αφορούσαν τη μορφή και το περιεχόμενο των παρουσιάσεων:

- Την ίδια την τεχνική του θεάτρου σκιών, την οποία για πρώτη φορά αξιοποίησαν στη διδακτική διαδικασία.

-(Τζίνα) Ήταν πάρα πολύ ωραίο , γιατί πάντα εμένα μ' άρεσαν αυτό το φως από πίσω, οι σκιές και να παίζεις κάτι, μ'άρεσε από μικρή αυτό , τόκανα και στο σπίτι. Και μ' άρεσε, και λέω εγώ θα πάω από πίσω, εντάξει.

-(Τατιάνα) Αλλά μου άρεσε περισσότερο το κομμάτι με τις σκιές. Ήτανε πολύ ωραίο το πώς βάλουμε το πανί, που κάναμε ένα θέατρο σκιών. Ήταν πολύ ωραίο.

-(Νίκος) Βασικά εγώ θα ήθελα να πω για τις σκιές που βασικά είχε πολύ ενδιαφέρον. Ήταν κάτι πολύ διαφορετικό και πολύ πρωτοποριακό θα λέγαμε. Ήταν πολύ ενδιαφέρον. Ναι, ακόμα και για το θεατή ήταν πάρα πού ενδιαφέρον.

-(Γιάννης) Ήταν άλλη εμπειρία Ήταν κάτι καινούργιο. Πέρασαμε ωραία. Είναι αυτό που είπαμε ακριβώς ότι θα θέλαμε να γίνει αλλιώς.

- Τους διαλόγους του δρώμενου. Το σκετς με τον Αλχάζεν ήταν ένα σουρεαλιστικό κείμενο το οποίο γοήτευσε τους μαθητές.

- (Βιργιάννα) Εμένα μ' άρεσε προσωπικά πάρα πολύ αυτό που κάναμε με τις σκιές, ήταν εντυπωσιακό, επίσης ήταν πολύ καλοί οι διάλογοι που

είχαν τα παιδιά μεταξύ τους και πώς το αναπαραστήσαμε και ήταν έτσι κάτι διαφορετικό.

-Το σκιάζομαι. Καταπληκτικό. Ήταν πολύ καλό, γιατί έδινε και αυτό που ήθελε να δώσει και έκανε μια σουρεαλιστική περιγραφή.

- (Τζίνα) Ήταν ωραίο το κείμενο εκείνο με τα λόγια του Γιάννη και του Χρήστου, που ήταν στις σκιές.

-(Γ.) Αυτό μ' άρεσε πάρα πολύ. Δεν περίμενα να το γράψει ο Γιάννης αυτό, είχα μείνει, γιατί συνήθως είναι παιδί που δεν μιλάει, κάνει πιο πολύ πλάκες, πειράζει και αυτά. Και είχα μείνει . Ο Γιάννης τα έγραψε όλα αυτά; Μου άρεσε πάρα πολύ. Αυτή ήταν η καλύτερη από τις σκιές που είδα εγώ, η καλύτερη απ' όλες, μου άρεσε πάρα πολύ.

- Το χιούμορ.

-(Μίνα) Του Γιάννη και του Χρήστου, είχε πολύ γέλιο με τις σκιές.

-(Αγγελική) ... και με τις σκιές εκεί πέρα, εγώ προσωπικά διάβαζα, είχα πάρει φωτοτυπία με το κείμενο ,διάβαζα και γέλαγα με τις μέρες.

- (Σοφία)Και τα σκετσάκια ήταν καλά, αυτό δηλ. που θα έβγαζε πάρα πολύ γέλιο είναι των παιδιών που τελικά γέλαγαν στο τέλος και δε μπορούσαν να το βγάλουνε. Δηλ ακόμα και τώρα όταν μιλάμε και θέλουμε να πούμε κάτι αστείο γυρνάμε και λέμε 'σκιάζομαι' και έτσι επικοινωνούμε κιόλας. Με τη σκιά δε μου άρεσε κάποιο σκετσάκι όσο αυτό.

-(Ζωή) Εμένα θα έλεγα οι σκιές. Δε μπορούσαμε να σταματήσουμε τα γέλια.

-(Β) και αυτό των παιδιών του Γιάννη και του Χρήστου με το 'σκιάζομαι', είχε πολύ γέλιο

- Την καλύτερη γνωριμία και συνεργασία με άτομα με τα οποία δεν είχαν ξανά συνεργαστεί και κάνει παρέα, αποτέλεσε ένα επιπλέον κριτήριο για την επιλογή τους.

-(Ζ) Εμένα θα έλεγα οι σκιές. Κατ' αρχάς Γνωριστήκαμε λίγο καλύτερα με αυτά τα άτομα. Δεν κάναμε ποτέ πολύ παρέα. Ήταν κάτι διαφορετικό. Ήμουν εκτός της παρέας μου, της ομάδας μου και εντάξει. Να βρούμε κώδικες επικοινωνίας, να συνεργαστούμε.

- Την πλήρη ελευθερία για τη δημιουργία των δρώμενων. Αυτή η ελευθερία αποτέλεσε βασικό κριτήριο για τον έναν από τους δημιουργούς της παρουσίασης που άρεσε περισσότερο.

-(Χρήστος) Πιστεύω η σκιά ήτανε τα πιο ωραία σημεία. Ναι γιατί εκτός του ότι προετοιμάζαμε οι ίδιοι τι θα πούμε, δηλ. μας δίνετε κάποια στοιχεία στα οποία θα κινηθούμε, αλλά παρ' όλα αυτά μπορούσαμε να το κάνουμε εμείς όπως θέλουμε, να τα παρουσιάσουμε με όποιο τρόπο θέλουμε , δε μας περιορίζατε θα τα πείτε με τη σειρά θα κάνετε αυτό, αυτό.

4. Τελικές επισημάνσεις

Η χρήση διαδικασιών παιχνιδιού στη διδασκαλία των μαθηματικών φάνηκε να αποτελεί κίνητρο που ενεργοποίησε τους μαθητές και άλλαξε την αντίληψή τους για τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους. Μέσω του παιχνιδιού ρόλων και του παιχνιδιού με τις σκιές είχαμε την ευκαιρία να πραγματευτούμε έννοιες και ιστορικές στιγμές των μαθηματικών οι οποίες δε συζητούνται συχνά στο πλαίσιο της τάξης. Από την ανάλυση των κειμένων που ετοίμασαν οι ομάδες των μαθητών για τα δρώμενα φάνηκε ότι χρησιμοποίησαν ορθά και με πολύ ευρηματικό τρόπο τις μαθηματικές έννοιες και προτάσεις που τους είχε ζητηθεί να μελετήσουν, ενώ από τις συνεντεύξεις τους, δύο σχεδόν μήνες μετά τις παρουσιάσεις, φάνηκε ότι οι μαθητές εντυπωσιάστηκαν από τη διαχρονική προσπάθεια να αποδειχθεί το 5^ο αίτημα. Ακόμα περισσότερο όμως οι μαθητές ενθουσιάστηκαν με τις τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν στις παρουσιάσεις τους και κυρίως με το παιχνίδι με τις σκιές, επιδεικνύοντας δημιουργικότητα και φαντασία στην παρουσίαση των σκηνικών δρώμενων.

Από όλα τα προηγούμενα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το παιχνίδι ρόλων και το παιχνίδι με τις σκιές λειτούργησαν ως ένα αποτελεσματικό διαμεσολαβητικό εργαλείο για την επίτευξη των γνωστικών μας στόχων, ενώ βοήθησαν στο να διαμορφωθούν νέες πρακτικές σε μια τάξη ενεργών μαθητών οι οποίοι συνεργάστηκαν για να αναπτύξουν μαθηματική γνώση.

-(Ταλ.) Όταν παρουσιάζεις κάτι , γίνεσαι και συ ενεργός, μπαίνεις στη διαδικασία του να πεις θα το παρουσιάσω, άρα δεν θα το δει μόνο καθηγητής, άρα έχει σημασία, αρχικά έχει σημασία πρέπει να προσθέσω κάτι καλό. Μετά πρέπει και ειδικά όταν είναι σκεις, μπαίνεις στη διαδικασία του να είναι πιο, είναι πιο δημιουργικό και γενικότερα είναι σαν παιχνίδι, μέσα απ' το παιχνίδι το παιδί γενικότερα ο μαθητής κάνει περισσότερα πράγματα.

Τέλος οι μαθητές σχολίασαν τη θετική συμβολή του παιχνιδιού με τις σκιές στη διαδικασία πραγμάτευσης του θέματος.

- (Γ) Μας άρεσε το θέατρο, μας άρεσαν τα εφέ σε εισαγωγικά, π.χ. με τις σκιές. Τι άλλο θα κάναμε στο σχολείο με σκιές, αν δεν είχατε έρθει εσείς ή κάποιος άλλος να μας το δείξει. Δε θα κάναμε τίποτα.

Η Βιβλιογραφία που δόθηκε στους μαθητές

Για τον Ταμπίτ ιμπν Κουράχ (Thabit ibn Qurrah)

- L. Mlodinow (2007) *‘Το παράθυρο του Ευκλείδη’*, απόσπασμα σχετικό με τον Thabit ibn Qurrah, σελ. 131.
- H. Eves (1983) *‘Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών μετά το 1650’*, κεφάλαιο *‘Η απελευθέρωση της Γεωμετρίας’* ισοδύναμες προτάσεις με το 5ο αίτημα του Ευκλείδη, σελ. 93.

Για τον Αλ Χαϋθάμ (Al-Haytham)

- Boyer και Merzbach (1997) *‘Η ιστορία των Μαθηματικών’*, απόσπασμα σχετικό με τον Αλχάζεν.
- H. Eves (1983) *‘Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών μετά το 1650’*, κεφάλαιο *‘Η απελευθέρωση της Γεωμετρίας’* ισοδύναμες προτάσεις με το 5ο αίτημα του Ευκλείδη, σελ. 93.

Για τον Ομάρ Καγιάμ (Omar Khayyam)

- Boyer και Merzbach (1997) *‘Η ιστορία των Μαθηματικών’*, απόσπασμα σχετικό με τον Ομάρ Καγιάμ.
- H. Eves (1983) *‘Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών μετά το 1650’*, κεφάλαιο *‘Η απελευθέρωση της Γεωμετρίας’* ισοδύναμες προτάσεις με το 5ο αίτημα του Ευκλείδη, σελ. 93.

Για τον Ναζίρ αλ Ντιν αλ Τούσι (Nasir-al-Din al-Tusi)

- Boyer και Merzbach (1997) *‘Η ιστορία των Μαθηματικών’*, απόσπασμα σχετικό με τον Ομάρ Καγιάμ.
- H. Eves (1983) *‘Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών μετά το 1650’*, κεφάλαιο *‘Η απελευθέρωση της Γεωμετρίας’* ισοδύναμες προτάσεις με το 5ο αίτημα του Ευκλείδη, σελ. 93.

Για τον Σακκίερι

- H. Eves (1983) *‘Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών μετά το 1650’*, κεφάλαιο *‘Η απελευθέρωση της Γεωμετρίας’* απόσπασμα σχετικό με τον Σακκίερι σελ. 95,96,97,98.
- H. Eves (1983) *‘Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών μετά το 1650’*, κεφάλαιο *‘Η απελευθέρωση της Γεωμετρίας’* ισοδύναμες προτάσεις με το 5ο αίτημα του Ευκλείδη, σελ. 93.

Για τον Λάμπερτ

- H. Eves (1983) *‘Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών μετά το 1650’*, κεφάλαιο *‘Η απελευθέρωση της Γεωμετρίας’* απόσπασμα σχετικό με τον Λάμπερτ σελ. 99,100.
- H. Eves (1983) *‘Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών μετά το 1650’*, κεφάλαιο *‘Η απελευθέρωση της Γεωμετρίας’* ισοδύναμες προτάσεις με το 5ο αίτημα του Ευκλείδη, σελ. 93.

Βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε για το project

- Μιχαηλίδης Τεύκρος (2006) *Πυθαγόρεια εγκλήματα*, Αθήνα, εκδόσεις Πόλις,σελ.52.
 - Greenberg, Marvin G. (1994). *Euclidean and non- Euclidean geometries: Development and history*, 3d Edition, W. H. Freeman and Company. σελ.148,149,154, 159 Ιστορία του 5^{ου} αξιώματος, Πρόκλος, Saccheri, Lambert.
 - Katz, Victor (1998). *A History of Mathematics. An Introduction*, Second Edition, Addison-Wesley Educational Publishers, σελ. 269, 270 Για τον Αλ Χαϋθάμ και τον Ομάρ Καγιάμ.
- Rolwing, Raymond (1969). The Parallel Postulate, *The Mathematics Teacher*, December 1969, σελ.665.
- Mlodinow, Leonard (2007). *Το παράθυρο του Ευκλείδη. Η ιστορία της Γεωμετρίας από τις παράλληλες ευθείες ως τον υπερχώρο*, Αθήνα, Κάτοπτρο. σελ.126 Για τον Πτολεμαίο και τον Πρόκλο, σελ. 131 για τον Ταμπίτ ιμπν Κουράχ, σελ. 132 για το Ναζίρ αλ Τούσι.
 - Boyer, Carl B., Merzbach Uta C. (1997). *Η Ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α. Για τις προσπάθειες των Αλ Χαϋθάμ, Ναζίρ αλ Ντιν αλ Τούσι και Ομάρ Καγιάμ.
 - Eves, Howard (1983) *Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών, μετά το 1650*, Αθήνα, Τροχαλία. 2ος τόμος, σελ. 92 για τον Πρόκλο, σελ. 94 για τον Ναζίρ αλ Ντιν και σελ. 95-100 σχετικά με τους Σακκέρι και Λάμπερτ.
 - Γκετζ, Ντενί (2000). *Το θεώρημα το παπαγάλου*, Αθήνα, Εκδόσεις Πόλις. σελ. 269 Σχετικά με τη Βαγδάτη, την “Ισλαμική αυτοκρατορία” και τα Μαθηματικά στον Αραβικό κόσμο τον 9^ο -15^ο αι. μ. Χ.
 - Barrat, Elisabeth (2002). Saccheri Quadrilaterals: The discovery of non-Euclidean Geometry, *Journal of Undergraduate Mathematics at Puget Sound*, Volume 3, May 2002.Για το ορθογώνιο Ομάρ-Καγιάμ Saccheri.
 - Osserman, Robert (1998). *Η ποίηση του σύμπαντος. Μια μαθηματική εξερεύνηση του κόσμου*, Αθήνα , Κάτοπτρο.σελ. 82-85 για τον Lambert.

- Davis, Ronald (2007). *Η φύση και η δύναμη των Μαθηματικών*, Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης. Καντ και Γεωμετρία σελ.133-134.
- Kline, Morris, *Τα Μαθηματικά στο Δυτικό πολιτισμό*, Μετάφραση Σ. Μαρκέτος, Τόμος Β', Αθήνα, Εκδόσεις, Κώδικας.τόμος Β', αλλαγή στο μαθηματικό κόσμο του 19^{ου} αι. σελ.275, για τον Gauss σελ.276.
- Torkil, Heide. (2000). The History of Non-Euclidean Geometry, in (V. Katz ed.) *Using History to teach Mathematics, an International perspective*, The Mathematical Association of America, σελ. 203-205.

Βιβλιογραφία

- Αλκησις, Κ. (2000) *Η δραματική τέχνη στην εκπαίδευση*, Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα.
- Anderson, A. (1995). Creative Use of Worksheets: Lessons My Daughter Taught Me, *Teaching Children Mathematics*, v2 n2 p72-79 Oct 1995.
- Bain, H. (1989) *A Study of First Grade Effective Teaching Practices from the Project Star Class-Size Research. A Study of Fifty Effective Teachers Whose Class Average Gain Scores Ranked in the Top.* (ED321887).
- Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation: a cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht, Holland: Kluwer.
- Blatner A. (2002). *Role playing in Education*, <http://www.blatner.com/adam/pdntbk/rlplayedu.htm>
- Blatner, Adam. (1995). Drama in education as mental hygiene: A child psychiatrist's perspective. *Youth Theatre Journal*, 9, 92-96.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Kluwer Academic Publisher.

- Charette, R. (2004). "Integrating the history of mathematics in the teaching of mathematics" ICME, Topic Study Group 17.
- Cohen, L., Manion, L. (1994). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας*, Αθήνα, Μεταίχμιο.
- Griffiths, R. (2001) Money and Shops, Role Play and Real Life, *Mathematics Teaching*, n174 p20-22 Mar 2001.
- Ernest P. (2008). Ποια είναι η σημασία της νέας φιλοσοφίας των Μαθηματικών για τη Μαθηματική Εκπαίδευση; *Ομιλία στο 25ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρίας*, Η Μαθηματική Παιδεία και η σύνθετη πραγματικότητα του 21ου αιώνα, Βόλος 21- 22- 23 Νοεμβρίου 2008.
- Hallenberg, H. (1995). Mathematics in History, *Montessori Life*, v7 n2 p30-32 Spr 1995.
- Heck, S. F., (1980). Problem Solving Plus Role Playing Equal Interest Plus Basic Skills in Mathematics, *Arithmetic Teacher*, v28 n1 p34-36 Sep 1980.
- Huizinga, J. (1949). *Homo ludens: A study of the play-element in culture*. Boston: Beacon.
- Jarret , O. S.(1997). Science and Math through Role-Play Centers in the Elementary School Classroom, *Science Activities*, v34 n2 p13-19 Sum 1997.
- Kotarinou, P., Chronaki, A., Stathopoulou, C. (2010). Debating for 'one measure for the world': Sensitive pendulum or heavy earth? Mathematics Education and Society 6th International Conference, Berlin, Germany 20-25 March, 2010.
- Kotarinou, P., Stathopoulou Ch. (2008a). Role-playing in Mathematics instruction, in proceedings of the 13th International congress of Drama/Theatre in Education, Ankara 21-23 November 2008, pg. 108-118, November 21-22-23 2008, Ankara.

- Neelands, J., Goode, T. (2000), *Structuring Drama Work: A handbook of available forms in theatre and drama*, 2d Edition, Cambridge University Press.
- Oers, Bert van (1996). Are You Sure? Stimulating Mathematical Thinking during Young Children's Play. *European Early Childhood Education Research Journal*, v4 n1 p71-87 1996.
- Παρούση, Α., Τσελφές, Β. (2008). Θέατρο Σκιών και Φυσική στην εκπαίδευση εκπαιδευτικών προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας, *Εκπαίδευση και Θέατρο* (Ειδική έκδοση), 9, 86-96.
- Porter-Ladousse, Gillian, (1987). *Role-play*, Oxford University Press.
- Prucha, J., Walterová, E. and Mareš, J. (1998). *Pedagogický slovník, (Pedagogical Dictionary)*, Portál, Prague.
- Simson, A. (1997). *Kid Town: A Thematic Simulation about Community Life through Reading, Speaking, Math, and Art Skills*, Interaction Publishers, Inc., DBA Interact, El Cajon.
- Tyce, C. (2002). Mathematical Adventures in Role Play, *Mathematics Teaching*, n179 p19-23 Jun 2002.
- Χρονάκη, Α. (2008). Το 'διδακτικό πείραμα': Μελετώντας τη διαδικασία μάθησης και διδασκαλίας, στο Β. Σβολόπουλος (επιμ.) *Σύνδεση εκπαιδευτικής έρευνας και πράξης*, Αθήνα, Ατραπός, 371-401.
- Vankůš, P. (2007): Influence of didactical games on pupils' attitudes towards mathematics and process of its teaching, *CERME 5*, Cyprus, Larnaca.
- Vankůš, P. (2005) 'History and present of didactical games as a method of mathematics teaching', *Acta Didactica Universitatis Comenianae- Mathematics*, 5, 53-68.
- Van Ments, M. (1983). *The effective use of Role-Play: A Handbook for Teachers and Trainers*, Croom Helm, London.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society. The development of higher Psychological Processes*, Cambridge

Παναγιώτα Κοταρίνου
pkotarinou@uth.gr

Χαρούλα Σταθοπούλου
hastath@uth.gr

ΤΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΚΑΙ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΑΝΓΚΡΑΜ: ΔΥΟ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΙΣ

Λέλα Λυμπεροπούλου & Μαλβίνα Παπαδάκη

2^ο Πειραματικό Γυμνάσιο Αθηνών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Μπορεί δηλαδή η διδασκαλία των μαθηματικών να τέρπει και να διασκεδάζει όπως ένα παιχνίδι, γιατί το αντίστροφο είναι βέβαιο ότι γίνεται: το παιχνίδι ασφαλώς διδάσκει. Αυτές και άλλες σκέψεις και ερωτήματα μας έχουν απασχολήσει εδώ και καιρό.

Στην εργασία αυτή θα παρουσιάσουμε πώς χρησιμοποιήσαμε ένα παιχνίδι στη διδασκαλία των Μαθηματικών με δύο διαφορετικές παρεμβάσεις.

Η μία παρέμβαση που θα την ονομάσουμε *Τάνγκραμ και κλάσματα* έγινε το σχολικό έτος 2009 – 2010 σε δύο τμήματα της ' Γυμνασίου του 2^{ου} Πειραματικού Γυμνασίου Αθηνών στο μάθημα των Μαθηματικών. Το παιχνίδι είναι το *τάνγκραμ* για την διδασκαλία της ενότητας: *τα κλάσματα*. Η άλλη παρέμβαση που θα την ονομάσουμε *Τάνγκραμ και κύκλος* έγινε κατά την διάρκεια του σχολικού έτους 2004-2005 στον θεσμό της *ευέλικτης ζώνης*, που επιχειρήθηκε να καθιερωθεί τότε, δηλαδή έξω από το μάθημα σε ένα δώρο μέσα στο σχολικό πρόγραμμα μεν, αλλά με δραστηριότητες εκτός από τα στενά όρια του Αναλυτικού Προγράμματος.

Οι συγκεκριμένοι στόχοι κάθε μιας παρέμβασης είναι βέβαια διαφορετικοί. Η γενική ιδέα όμως είναι ίδια: να μάθουμε παίζοντας και να παίξουμε μαθαίνοντας. Στα συμπεράσματα της εργασίας αυτής θα συζητήσουμε ποια από τις δύο περιπτώσεις υπηρέτησε την ιδέα αυτή καλύτερα.

I. Εισαγωγή

Ποιος δάσκαλος δεν έχει ποτέ επιθυμήσει να μπορέσει να μετατρέψει το μάθημά του σε παιχνίδι. Ποιος δεν θα ήθελε οι μαθητές του να απολαμβάνουν το μάθημά του όπως απολαμβάνουν τα παιχνίδια που αγαπούν. Πολύ περισσότερο ένας καθηγητής Μαθηματικών, που διδάσκει ένα μάθημα το οποίο πολλοί μαθητές θεωρούν δύσκολο και σίγουρα αρκετοί το αντιπαθούν.

Προσπαθώντας να βρει κανείς τι κοινό αλλά και ποιες διαφορές έχει ένα παιχνίδι από μια ώρα διδασκαλίας, δεν θα δυσκολευτεί καθόλου. Γιατί στο παιχνίδι, όπως και σε ένα μάθημα Μαθηματικών στην τάξη, υπάρχουν κανόνες, υπάρχουν διαφορετικοί ρόλοι, παίρνονται αποφάσεις, ανακοινώνονται αποτελέσματα, αναπτύσσονται συνεργασίες, υπάρχουν στόχοι, επιλέγονται στρατηγικές, υπάρχει εξάσκηση, γίνονται επαναλήψεις, κάνει κανείς πρακτικές δραστηριότητες, ελέγχει, ανακαλύπτει τον δρόμο που οδηγεί στον στόχο του. Παρόλα αυτά όμως, το παιχνίδι είναι πιο ευχάριστο από ένα μάθημα στο σχολείο. Τι είναι εκείνο λοιπόν που το κάνει πιο ευχάριστο; Γιατί οι μαθητές απολαμβάνουν πολύ περισσότερο ένα παιχνίδι από μια ώρα διδασκαλίας;

Αν παρατηρήσουμε καλύτερα τα πράγματα θα δούμε ότι εκείνο που διαφοροποιεί αυτά τα δύο είναι ότι το μεν παιχνίδι είναι μια ελεύθερη επιλογή των παιδιών που πολλές φορές βάζουν μόνοι τους στόχους, διαφοροποιώντας τους στόχους των ίδιων των παιχνιδιών, και καθορίζουν τα ίδια το πλαίσιο του παιχνιδιού τους, ενώ η διδασκαλία καθορίζεται κυρίως από τον δάσκαλο ο οποίος περισσότερο ή λιγότερο είναι εκείνος που αποφασίζει και θέτει τους στόχους.

Οι διαπιστώσεις αυτές έχουν απασχολήσει πολλούς εδώ και αιώνες. Αφού ξεπεράστηκαν θέσεις όπως *το μάθημα είναι ένα σοβαρό πράγμα, δεν μπορεί να γίνει παιχνίδι, ή τώρα κάνουμε μάθημα, δεν παίζουμε*, οι ερευνητές της Ψυχολογίας και της Αγωγής ανακάλυψαν την ιδιαίτερη παιδαγωγική σημασία του παιχνιδιού.

Δεν είναι επομένως καθόλου τυχαίο πως όλοι οι θεωρητικοί και ερευνητές της διδασκαλίας και της μάθησης των Μαθηματικών

αναγνωρίζουν την σημασία και την αξία των παιχνιδιών στην διδασκαλία. (Piaget, Vigotsky, Montessori κ.α.)

Το ερώτημα λοιπόν που τίθεται είναι: *Μπορεί η διδασκαλία να γίνει απολαυστική όπως ένα παιχνίδι;*

Μπορεί δηλαδή η διδασκαλία να τέρπει και να διασκεδάζει όπως ένα παιχνίδι, γιατί το αντίστροφο είναι βέβαιο ότι γίνεται: το παιχνίδι ασφαλώς διδάσκει.

II. Δύο παρεμβάσεις στην τάξη των Μαθηματικών με ένα παιχνίδι, προς συζήτηση

Αυτές και άλλες σκέψεις και ερωτήματα μας έχουν απασχολήσει εδώ και καιρό. Στην εργασία αυτή θα παρουσιάσουμε πώς χρησιμοποιήσαμε ένα παιχνίδι στη διδασκαλία των Μαθηματικών.

Για την ακρίβεια θα παρουσιάσουμε δύο διαφορετικές παρεμβάσεις. Η μία παρέμβαση που θα την ονομάσουμε *Τάνγκραμ και κλάσματα* έγινε το σχολικό έτος 2009 – 2010 σε δύο τμήματα της ' Γυμνασίου του 2^{ου} Πειραματικού Γυμνασίου Αθηνών στο μάθημα των Μαθηματικών. Το παιχνίδι είναι το *τάνγκραμ* για την διδασκαλία της ενότητας: *τα κλάσματα*.

Η άλλη παρέμβαση που θα την ονομάσουμε *Τάνγκραμ και κύκλος* έγινε κατά την διάρκεια του σχολικού έτους 2004-2005 στον θεσμό της *ευέλικτης ζώνης*, που επιχειρήθηκε να καθιερωθεί τότε, δηλαδή έξω από το μάθημα σε ένα δώρο μέσα στο σχολικό πρόγραμμα μεν, αλλά με δραστηριότητες εκτός από τα στενά όρια του Αναλυτικού Προγράμματος.

Οι συγκεκριμένοι στόχοι κάθε μιας παρέμβασης είναι βέβαια διαφορετικοί. Η γενική ιδέα όμως είναι ίδια: να μάθουμε παίζοντας και να παίξουμε μαθαίνοντας.

Στα συμπεράσματα της εργασίας αυτής θα συζητήσουμε ποια από τις δύο περιπτώσεις υπηρέτησε την ιδέα αυτή καλύτερα.

III. Μερικές βασικές αρχές

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση των δύο διδασκαλιών, θα παρουσιάσουμε εδώ μερικές παραδοχές που αφορούν την φιλοσοφία της διδασκαλίας των Μαθηματικών, που διέπει την υλοποίηση και των δύο.

Ο κύριος στόχος της διδασκαλίας των Μαθηματικών, πιστεύουμε, πρέπει να είναι η *εννοιολογική κατανόηση* και όχι η απομνημόνευση διαδικασιών. Η βαθιά γνώση των Μαθηματικών εννοιών δίνει την δυνατότητα στους μαθητές να χρησιμοποιούν τη γνώση ευέλικτα, με ευχέρεια, να εφαρμόζουν αυτό που γνωρίζουν σε ένα περιβάλλον και με κατάλληλο τρόπο και σε ένα άλλο. Αντίθετα, η διδασκαλία που στοχεύει στο να θυμούνται οι μαθητές διαδικασίες χωρίς κατανόηση, τους κάνει αδύναμους να χρησιμοποιήσουν αυτά όταν αλλάξει το πλαίσιο.

Κάτω από αυτή την οπτική, η ίδια η έννοια καθορίζει τον τρόπο διδασκαλίας και το διδακτικό υλικό που θα χρησιμοποιηθεί, αλλά και τα εποπτικά μέσα και όχι αντιστρόφως. Σε μία τέτοια αντίληψη ο τρόπος διδασκαλίας υπηρετεί τον στόχο που έχει τεθεί και την έννοια που πρόκειται να προσεγγίσουμε. Δεν νοείται δηλαδή να θεωρηθεί το διδακτικό υλικό ως αυτοσκοπός που θα υποκαταστήσει τον στόχο.

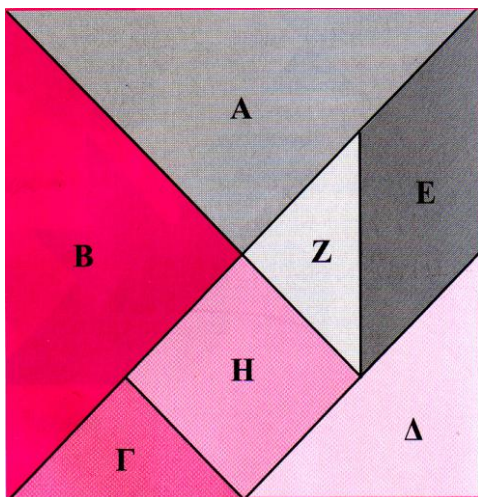
Από την άλλη η ενεργός μάθηση στηρίζεται και προϋποθέτει την εμπειρία. Μέσω αυτής τα παιδιά αποκτούν αίσθηση του κόσμου γύρω τους και κάνουν την σύνδεση με αυτά που μαθαίνουν. Ένας τρόπος να στηρίξει κανείς την διδασκαλία του στην προϋπάρχουσα εμπειρία των μαθητών του είναι να χρησιμοποιήσει το παιχνίδι.

Το παιχνίδι βοηθά την επικοινωνία των παιδιών, την κοινωνικοποίησή τους, τους μαθαίνει να παίζουν διαφορετικούς ρόλους. Οι διαδικασίες αυτές γίνονται με φυσικό τρόπο σε ένα παιχνίδι.

Ακόμα, αν η δημιουργικότητα είναι το κλειδί για τη μάθηση, τότε επειδή η συμμετοχή των παιδιών σε ένα καλά σχεδιασμένο παιχνίδι τα εμπλέκει σε ποικίλες δραστηριότητες, διευκολύνεται η μάθηση και γίνεται ενδιαφέρουσα την διδασκαλία.

IV. Το παιχνίδι

Οι Κινέζοι ανέπτυξαν από πολύ νωρίς την «τέχνη» των Μαθηματικών, όπως μαρτυρούν τα γραπτά κείμενα. Ιδιαίτερα ανέπτυξαν τη γεωμετρία των εμβαδών και είχαν προσδεύσει στην τεχνική της επικάλυψης επιφανειών. Σ' αυτή την τεχνική στηρίζεται το πανάρχαιο κινέζικο παιχνίδι τάνγκραμ (σχ. 1)



σχ.1

- Η Μαθηματική διάσταση (δομή) του παιχνιδιού:

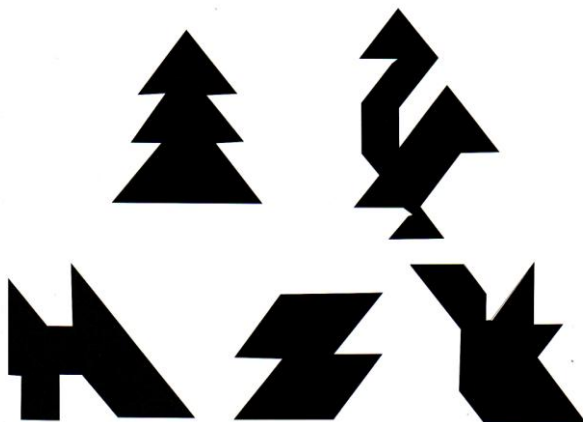
Το τετράγωνο χωρίζεται σε 7 επίπεδα (ευθύγραμμα) σχήματα (κομμάτια) με ίσα ή διαφορετικά εμβαδά, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα (σχ.1). Τα 7 επίπεδα σχήματα είναι ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα διαφορετικών μεγεθών, ένα τετράγωνο και ένα παραλληλόγραμμο. Το σχήμα με το μικρότερο εμβαδόν είναι το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο του οποίου το εμβαδόν ισούται με το $1/16$ ολόκληρου του τετραγώνου. Αυτό δημιουργεί μια δομή στην οποία η βασική μονάδα είναι το $1/16$ και τα υπόλοιπα σχήματα έχουν εμβαδά πολλαπλάσια αυτού. Αυτή η δομή προσφέρεται για μια

αναπαράσταση των κλασμάτων διαφορετική από τις συνήθειες που ως προς το «κόψιμο» χρησιμοποιούν ένα ορθογώνιο ή κυκλικό σχήμα που χωρίζεται σε μικρότερα ίσα ορθογώνια ή ίσους κυκλικούς τομείς συνήθως με δεκαδική διαίρεση.

Η χρήση όλων των κομματιών για τον σχηματισμό εικόνων, χωρίς να επικαλύπτονται οδηγεί στον σχηματισμό ισοδύναμων σχημάτων (όλα έχουν ίσα εμβαδά, ίσα με το εμβαδόν του αρχικού τετραγώνου), ουσιαστικά μέσω μετασχηματισμών όπως η στροφή, η μεταφορά, η αξονική συμμετρία.

- Η Αισθητική διάσταση του παιχνιδιού:

Λέγεται ότι οι Κινέζοι έχουν σχηματίσει πάνω από 1600 διαφορετικές εικόνες. Μερικές από αυτές τις εικόνες βλέπουμε στο σχήμα (σχ.2). Το παιχνίδι παίζεται συνήθως ως εξής: δίνεται στον παίκτη ένα σχήμα και πρέπει να το κατασκευάσει στον συντομότερο δυνατό χρόνο χρησιμοποιώντας όλα τα κομμάτια και χωρίς επικαλύψεις.



σχ. 2

V. Σχεδιασμός και οργάνωση της διδασκαλίας

1^η παρέμβαση: Τάνγκραμ και κλάσματα

Η παρέμβαση έγινε μέσα στο σχολικό πρόγραμμα, στα πλαίσια επομένως του πολύ σφικτά δομημένου Αναλυτικού προγράμματος, το οποίο κεντρικά κατευθύνει το ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα. Η όποια προσπάθειά μας είχε επομένως να κάνει με την επιλογή της διδακτικής προσέγγισης της ενότητας που είχαμε να διδάξουμε, ώστε να είναι αφενός μεν πρόσφορη σε μαθηματικές ιδέες και μαθηματικό περιεχόμενο και αφετέρου να ενδιαφέρει και να έχει κίνητρο για τους μαθητές οπότε να εμπλακούν οι ίδιοι.

Είχαμε να διδάξουμε *τα κλάσματα και τις πράξεις τους*. Έπρεπε επομένως να δημιουργήσουμε ένα περιβάλλον κατάλληλο, με ποικιλία δραστηριοτήτων που θα συνέπαιρνε τους μαθητές και θα ήταν ασφαλώς πλούσιο στις μαθηματικές έννοιες που θέλαμε να διδάξουμε. Σκεφτήκαμε τότε να χρησιμοποιήσουμε ένα παιχνίδι, γιατί αυτό συνδυάζει με τον καλύτερο τρόπο την χαρά και την περιέργεια της εμπλοκής αλλά και με έμμεσο τρόπο συνδέει τους μαθητές με μαθηματικές έννοιες, που τις κάνουν κτήμα τους και τις οποίες θα κατανοήσουν σε επόμενο στάδιο. Τα σύμβολα και οι αλγόριθμοι μπορούν να εισαχθούν αργότερα, σε μεγαλύτερη ηλικία.

Οι έννοιες που θέλαμε να διδάξουμε ήταν ήδη γνωστές από το Δημοτικό, έννοιες που δεν είναι όμως κατακτημένες. Για την εισαγωγή τους έχουν χρησιμοποιηθεί με κατάχρηση εικόνες με πίττες, πίτσες και σοκολάτες. Με αυτές είναι γεμάτα τα σχολικά βιβλία του Δημοτικού, αλλά και του Γυμνασίου. Εικόνες με έντονα χρώματα, οι οποίες περνούν μπροστά από τα μάτια των μικρών μαθητών η μία κατόπιν της άλλης. Οι μαθητές τις παρατηρούν από μακριά, δεν κάνουν συνήθως κάτι με αυτές, δεν επεμβαίνουν σε αυτές, δεν παίρνουν μέρος σε καμιά διαδικασία, τις παρακολουθούν όπως μια προβολή.

Θα μπορούσε, βέβαια, κανείς να φέρει ψαλίδια στην τάξη και να αρχίσουν οι μαθητές να κόβουν τις πίττες σε κομμάτια. Θα δούλευαν όμως για να «ανακαλύψουν» κάτι που τους ήταν ήδη γνωστό και προφανές, άρα καθόλου ενδιαφέρον.

Από την άλλη, το κλάσμα όπως όλοι οι ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών συμφωνούν έχει τέσσερις διαφορετικές αναπαραστάσεις: είναι μέρος του όλου, είναι διαίρεση, είναι λόγος και τέλος είναι τελεστής.

Κατά τον Freudenthal το κλάσμα πριν από όλα είναι η φαινομενολογική πηγή του ρητού αριθμού. Με τη λέξη κλάσμα, συνεχίζει ο ίδιος, μια λέξη, που σε όλες τις γλώσσες έχει σχέση με το «σπάσιμο» εισάγεται ο ρητός αριθμός, μια έννοια που δεν συνδέεται πια με τη θραύση, αλλά με τον λόγο υπό την έννοια της αναλογίας στη μέτρηση.

Για την αναπαράσταση των κλασμάτων, έχουν χρησιμοποιηθεί και χρησιμοποιούνται πολλά μέσα. Τα πιο φυσικά από αυτά είναι, πάλι κατά τον Freudenthal, τα μήκη και οι επιφάνειες. Αυτά χρησιμοποιούνται είτε συγκρίνοντάς τα δι' επιθέσεως το ένα πάνω στο άλλο, είτε μετασχηματίζοντάς τα σε άλλες επιφάνειες ή μήκη με διαίρεση. Αλλά και το κλάσμα ως τελεστής, υποστηρίζεται και ενυπάρχει στις προηγούμενες αναπαραστάσεις, αφού μια επιφάνεια μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να κατασκευαστεί μια άλλη επιφάνεια.

Όλα τα παραπάνω μπορούσαν να γίνουν με τη βοήθεια του παιχνιδιού τάνγκραμ. Αυτός είναι ο κύριος λόγος που το επιλέξαμε. Όμως υπήρχε ένας επί πλέον λόγος: το τάνγκραμ δεν είναι αφενός πολύ γνωστό, και αφετέρου είναι ένα πραγματικό παιχνίδι. Και βέβαια δεν έχει χρησιμοποιηθεί στο σχολείο.

Ακόμα θέλαμε να δουλέψουν οι μαθητές σε ένα περιβάλλον ανοικτό, όχι αυστηρά καθοδηγούμενο, σε ένα περιβάλλον στο οποίο δεν χρειαζόταν η άμεση ανάμειξη του καθηγητή.

Τέλος θέλαμε τα υλικά που θα χρησιμοποιούσαμε να είναι ωραία αισθητικά και να παράγουν ωραίο αισθητικό αποτέλεσμα.

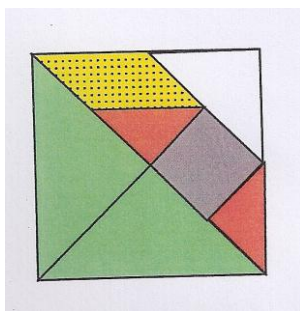
Η παρέμβαση αυτή είχε διάρκεια πέντε διδακτικές ώρες. Αυτές θα παρουσιάσουμε παρακάτω:

1η Διδακτική Ώρα:

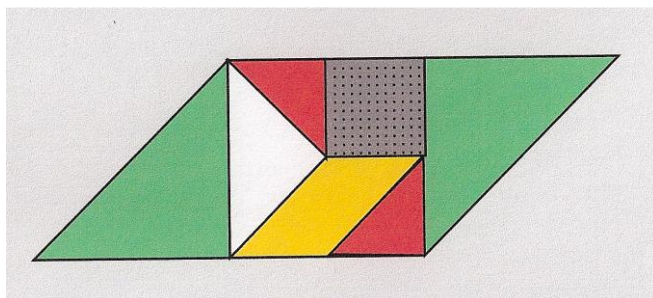
Δώσαμε στους μαθητές το τάνγκραμ σε χαρτί, ένα τετράγωνο δηλαδή 10cm x 10cm χωρισμένο στα επτά μικρότερα επίπεδα σχήματα και τους ζητήσαμε να το κόψουν στα επτά αυτά σχήματα. Μετά, όλα τα σχήματα που θα είχαν κόψει να τα συναρμολογήσουν με τέτοιο τρόπο, ώστε να σχηματίσουν α) ένα ορθογώνιο β) ένα παραλληλόγραμμο, γ) ένα ορθογώνιο τρίγωνο.

Ακόμα τους παρακινήσαμε να χρωματίσουν με διαφορετικά χρώματα τα κομμάτια στα οποία το τάνγκραμ είναι χωρισμένο.

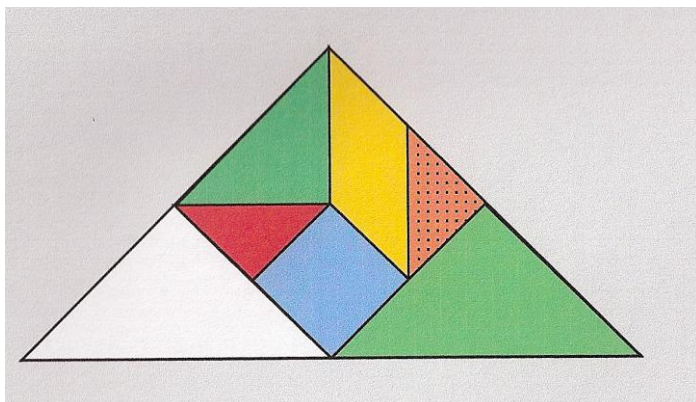
Με αυτό τον τρόπο επιδιώκαμε αφενός να εξοικειωθούν οι μαθητές με το tangram και αφετέρου να κατανοήσουν τον τρόπο με τον οποίο έχει διαιρεθεί στα επί μέρους κομμάτια, αλλά και την σχέση που αυτά έχουν μεταξύ τους. Μερικά από τα σχέδια που έφεραν είναι τα παρακάτω:



σχ. α



σχ. β



σχ. γ

Τα σχέδια που έφτιαξαν είχαν περισσότερες από μία λύση στη διάταξη των κομματιών.

2η Διδακτική Ώρα:

Στη συνέχεια ζητήσαμε από τους μαθητές να βρουν ποιο μέρος του τετραγώνου ή του ορθογωνίου ή του παραλληλογράμμου είναι το μικρό τρίγωνο, το τετράγωνο, το παραλληλόγραμμο, ή το μεγάλο τρίγωνο.

Τους είπαμε να χρωματίσουν το $\frac{1}{8}$ του τάνγκραμ ώστε να διακρίνουν

και να συνειδητοποιήσουν τα ισοδύναμα σχήματα. Τους ρωτήσαμε να εξηγήσουν ποιο μέρος του τάνγκραμ είναι το μικρό, το μεγάλο και το μεσαίο τρίγωνο για να εισάγουμε την έννοια του κλάσματος. Ακόμα να απαντήσουν ποιο μέρος του μεγάλου τριγώνου είναι το μικρό τρίγωνο.

3η Διδακτική Ώρα:

Στη συνέχεια ζητήσαμε να συγκρίνουν τα μέρη στα οποία είναι χωρισμένο το τάνγκραμ και να τοποθετήσουν τα επιμέρους σχήματα, άρα και τα κλάσματα που εκφράζουν από το μικρότερο στο

μεγαλύτερο. Να συγκρίνουν τέλος όλα τα κομμάτια με το ίδιο το τάνγκραμ, δηλαδή με το «όλον», με τη μονάδα.

4η Διδακτική Ώρα:

Ζητήσαμε τώρα από τους μαθητές να χρωματίσουν το $\frac{3}{4}$ του τάνγκραμ. Έτσι δόθηκε η ευκαιρία να συζητηθεί η έννοια της πρόσθεσης και η αναγκαιότητα των ομώνυμων κλασμάτων. Η αναγκαιότητα αυτή προέκυψε με φυσικό τρόπο. Είχαμε και εδώ περισσότερες από μία λύσεις.

5η Διδακτική Ώρα:

Ζητήσαμε από τους μαθητές να χρωματίσουν το κομμάτι – παραλληλόγραμμο και να σκεφτούν πιο μέρος του τάνγκραμ μένει χωρίς χρώμα. Έτσι έγινε η εισαγωγή της πράξης της αφαίρεσης αλλά και της διαφοράς κλάσματος από την μονάδα.

Να σημειώσουμε εδώ πως δώσαμε εργασίες για το σπίτι σχετικές με το tangram. Π.χ.

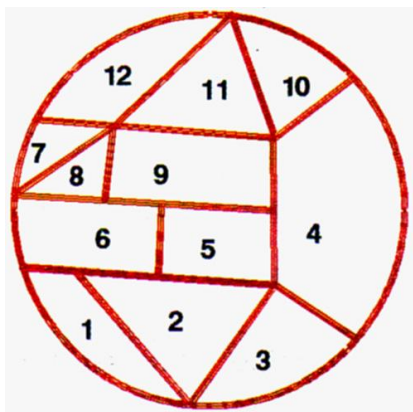
Να κατασκευάσετε εικόνες χρησιμοποιώντας τα $\frac{5}{8}$ του τάνγκραμ ή τα $\frac{7}{4}$ του τάνγκραμ.

2η παρέμβαση

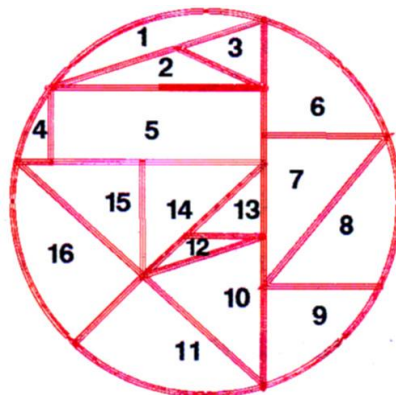
1η Φάση: Η επιλογή και το «κόψιμο του κύκλου»

Στα πλαίσια της ευέλικτης ζώνης, στη διάρκεια μιας δράσης για ολόκληρο το σχολείο με θέμα το παιχνίδι, μια ομάδα μαθητών της Β' Γυμνασίου αποφάσισε να ασχοληθεί με το τάνγκραμ. Οι μαθητές, οι οποίοι γνώριζαν το τάνγκραμ και είχαν παίξει μ' αυτό στην Α' Γυμνασίου, μετά από συζήτηση αποφάσισαν να αντικαταστήσουν το

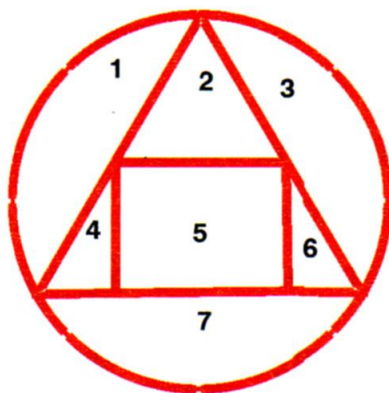
τετράγωνο με κύκλο. Χωρίστηκαν σε ομάδες των 4-5 μαθητών και προσπάθησαν να χωρίσουν έναν κύκλο σε κομμάτια. Ενδεικτικά παραθέτουμε τα τρία παρακάτω σχήματα – προτάσεις των ομάδων: (σχ3), (σχ. 4), (σχ.5).



σχ. 3



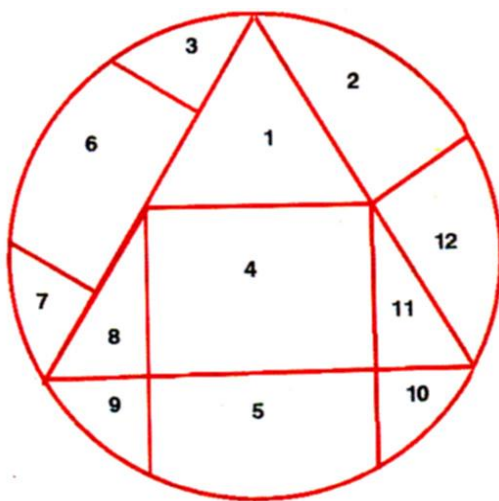
σχ. 4



σχ. 5

Στην συζήτηση με όλη την τάξη που ακολούθησε όλοι οι μαθητές σχολίασαν αυτά τα σχήματα και αποφάσισαν να διαλέξουν το σχ. 5 για να κατασκευάσουν διάφορα σχέδια. Στην προσπάθειά τους αυτή βρέθηκαν μπροστά στην δυσκολία του να μην έχουν πολλές επιλογές στις κατασκευές τους. Έτσι κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι ο κύκλος

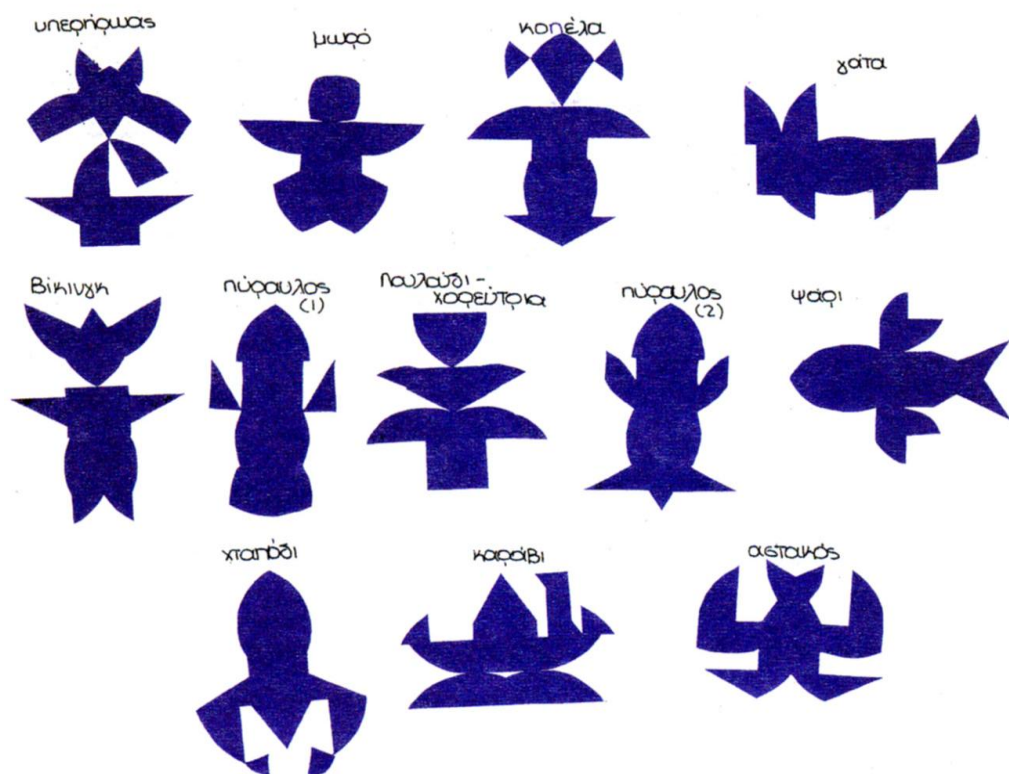
πρέπει να χωριστεί σε τόσα τμήματα, ώστε να μην είναι πάρα πολλά γιατί το παιχνίδι γίνεται πολύ δύσκολο, αλλά ούτε και πολύ λίγα, όπως στο σχ. 5, γιατί τότε δυσκολευόμαστε να κατασκευάσουμε ενδιαφέροντα σχέδια. Αποφασίστηκε, λοιπόν, να «κοπεί» λίγο περισσότερο το σχ.5 και αυτό που προέκυψε φάνηκε *πιο συμμετρικό* στους περισσότερους μαθητές. Το τελικό κόψιμο ήταν το παρακάτω: (σχ.6)



σχ. 6

2η Φάση: Οι κατασκευές

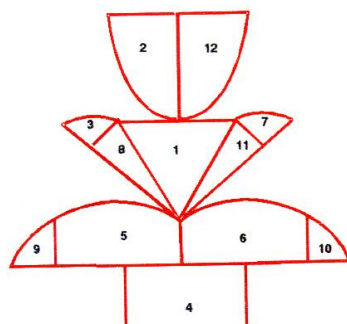
Στη συνέχεια, οι μαθητές έκοψαν σε χαρτόνι τον κύκλο και τα δώδεκα κομμάτια του και προσπάθησαν να κατασκευάσουν, χρησιμοποιώντας όλα αυτά τα κομμάτια και χωρίς επικαλύψεις, σχέδια που όχι μόνον να *είναι όμορφα* αλλά και να *παριστάνουν κάτι*. Τα σχέδια που προέκυψαν είναι τα παρακάτω: (σχ. 7).



σχ. 7

3η Φάση: Οι λύσεις

Για κάθε ένα από τα παραπάνω σχέδια κατασκεύασαν και την «λύση» του. Για παράδειγμα, το «λουλουδι-χορεύτρια» έχει την παρακάτω λύση: (σχ. 8).



σχ, 8

4η Φάση: Παίζοντας

Το παιχνίδι με τις λύσεις κρυμμένες παίχτηκε στην τάξη με χρονομέτρηση.

VI. Αποτίμηση

A. Η πρώτη παρέμβαση : Τάνγκραμ και κλάσματα

Η διδασκαλία της ενότητας αυτής με τη βοήθεια του τάνγκραμ απέδειξε ότι η έκπληξη που έδειξαν οι μαθητές στην αρχή, γρήγορα μετατράπηκε σε δημιουργική περιέργεια.

Η επιλογή του τάνγκραμ λειτούργησε καταλυτικά. Δημιούργησε μια κατάσταση μάθησης στην οποία έχουμε καταγράψει τα παρακάτω:

α) Ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο:

Αλγεβρική αναφορά του παιχνιδιού: η βασική μονάδα του σχήματος είναι το $\frac{1}{16}$ του τετραγώνου – τάνγκραμ

Γίνεται η εισαγωγή:

- ✓ Της έννοιας του κλάσματος ως μέρος του όλου και ως τελεστή μέσω του εμβαδού επιφανειών. Οι μαθητές ορίζουν το κλάσμα και συζητούν την αξία του. Παρατηρούν ότι το ίδιο σχήμα (τρίγωνο) εμφανίζεται με διαφορετικά μεγέθη (το μικρό τρίγωνο είναι μέρος του μεγάλου).
- ✓ Σπουδάζουν την ευρύτερη έννοια του κλάσματος: κλάσμα μεγαλύτερο της μονάδας.
- ✓ Μελετούν τη διαίρεση του επιπέδου σχήματος και η διατήρηση του εμβαδού του. Παρατηρούν ότι η μετακίνηση ή η στροφή ενός σχήματος δεν μεταβάλλει το εμβαδόν και τις διαστάσεις του.
- ✓ Μιλούν για τη διάταξη και η σύγκριση κατά μέγεθος, εδώ ως προς το εμβαδόν

- ✓ Μελετούν επίπεδα σχήματα. Συζητούν ομοιότητες και διαφορές μεταξύ των σχημάτων. Η περίπτωση του τετραγώνου και η διαφορά του από τον ρόμβο.
- ✓ Ανακαλύπτουν τις πλακοστρώσεις και την κάλυψη του επιπέδου.

β) Ως προς τις δεξιότητες:

- ✓ Οι μαθητές μαθαίνουν να χρησιμοποιούν τα υλικά που τους διατίθενται
- ✓ Χρησιμοποίησαν τη φαντασία τους για λύσεις και σχήματα που δεν είναι τετριμμένα.
- ✓ Αξιοποίησαν τα υλικά που έχουν στη διάθεσή τους όχι μόνο για να ορίσουν ή να διερευνήσουν μαθηματικές έννοιες, αλλά και για αισθητικούς σκοπούς.
- ✓ Οι μαθητές μαθαίνουν εξίσου και με τα χέρια αλλά και με το μυαλό. Ο ρόλος της αφής και η σχέση αφής – νόησης αξιοποιείται και αναδεικνύεται με το τάνγκραμ.
- ✓ Το μεγαλύτερο μέρος της τάξης ανταποκρίθηκε με ενδιαφέρον
- ✓ Υπήρξε αύξηση της αυτοεκτίμησης των μαθητών, αφού το περιεχόμενο δεν ήταν μόνο μαθηματικό.
- ✓ Δημιούργησαν δικές τους εικόνες – σχέδια που χρωμάτισαν.

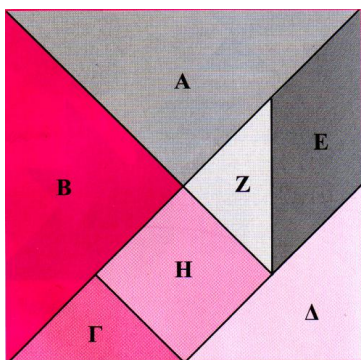
Β) Η δεύτερη παρέμβαση: Τάνγκραμ και κύκλος

Η παρέμβαση αυτή παραπέμπει στο «μαστόρεμα» του παιχνιδιού με τη έννοια που δίνει ο Papert ... «ο καλύτερος τρόπος είναι να κτίσουμε κάτι το χειροπιαστό – κάτι έξω από το κεφάλι μας – που είναι επίσης προσωπικά νοηματοδοτημένο.

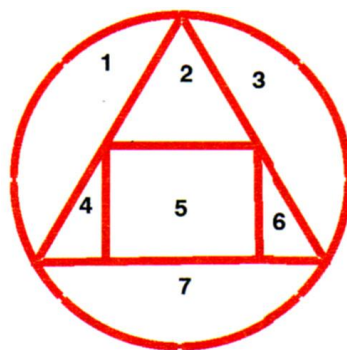
Η επιλογή του κύκλου ήταν μια πολύ τολμηρή διεύρυνση του πλαισίου του παιχνιδιού και το τελικό «κομμάτιασμα» του παρουσιάζει αρκετά μεγάλο ενδιαφέρον από μαθηματική άποψη.

Στην αρχή έγιναν κάποιες προτάσεις κοψίματος του κύκλου, όπως βλέπουμε στα σχήματα 3 και 4, με έναν εντελώς αυθόρμητο, ανορθολογικό θα λέγαμε, τρόπο. Η πρώτη πρόταση που έγινε αποδεκτή προς συζήτηση απ' όλους είναι αυτή του σχήματος 5 που είναι μία πρόταση αυστηρά ορθολογική ενός σχήματος σχεδόν συμμετρικού και με λίγα κομμάτια.

Η αντιπαραβολή των δύο σχεδίων, του αυθεντικού τάνγκραμ (σχ. α) και της πρώτης αποδεκτής πρότασης με τον κύκλο (σχ. β), μας οδηγεί σε πολύ ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις ως προς την μαθηματική δομή τους:



σχ α

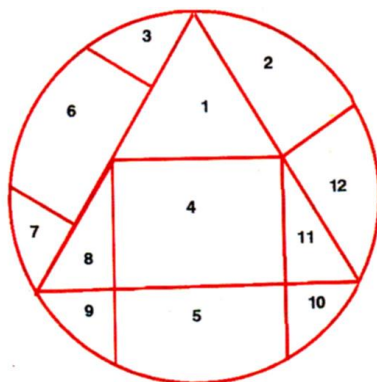


σχ. β

Το αυθεντικό τάνγκραμ χωρίζεται-κόβεται αρχικά με την διαγώνιο του τετραγώνου σε δύο ισοδύναμες επιφάνειες (επιφάνειες με ίσα εμβαδά) οι οποίες, με την σειρά τους, χωρίζονται σε μικρότερες. Θα περίμενε κανείς, με ισοδύναμο τρόπο, να χωριστεί ο κύκλος με μία διάμετρό του, όμως αυτό δεν συμβαίνει: τον ρόλο της διαμέτρου παίζει το ισοπλευρο εγγεγραμμένο στον κύκλο τρίγωνο. Τα δύο «μικρά» τρίγωνα υπάρχουν και στα δύο σχέδια, καθώς και το «μεσαίο» τρίγωνο που ισοδυναμεί με το διπλάσιο του μικρού. Το τετράγωνο του σχήματος α παρουσιάζεται στον κύκλο ως ορθογώνιο και «περισεύουν» τρία κυκλικά τμήματα. Έτσι μπορούμε να κωδικοποιήσουμε τις παρακάτω αντιστοιχίες:

Διαγώνιος τετραγώνου	→	Εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο
Παραλληλόγραμμο	→	Ορθογώνιο
Δύο μικρά τρίγωνα	→	Δύο μικρά τρίγωνα
Δύο μεγάλα τρίγωνα	→	Τρία κυκλικά τμήματα
Μεσαίο τρίγωνο	→	Μεσαίο τρίγωνο

Η σχεδόν απόλυτη συμμετρία του σχήματος β καθώς αποδείχθηκε φτωχή ως προς την δυνατότητα σχηματισμού εικόνων ανατρέπεται με το τελικό κόψιμο (σχ. γ) όπου διχοτομείται το ένα κυκλικό τμήμα ή χωρίζονται στα τρία τα άλλα δύο.



σχ. γ

Μ' αυτόν τον τρόπο σπάει η συμμετρία και δίνεται η δυνατότητα κατασκευής πολλών διαφορετικών σχεδίων. Αξίζει να παρατηρήσουμε πόσο σοφή είναι η δομή του αυθεντικού τάνγκραμ: δεν υπάρχει συμμετρία και το πλήθος των κομματιών είναι το μικρότερο δυνατόν ώστε να μας επιτρέπει να κατασκευάζουμε πολλά διαφορετικά σχέδια.

Οι μαθητές επένδυσαν πολλά σ' αυτή την προσπάθεια:

- ✓ «Μαστόρεψαν» ένα γνωστό τους παιχνίδι θέτοντας τους δικούς τους κανόνες και δίνοντας νόημα στις κατασκευές τους.
- ✓ Συνειδητοποίησαν, σύμφωνα με τα λεγόμενά τους ότι *τα μαθηματικά μπορεί να είναι ένα πολύ ευχάριστο παιχνίδι*
- ✓ Έμαθαν να δουλεύουν ομαδικά, να δέχονται την κριτική, να συντονίζονται και να μοιράζονται τα αποτελέσματα της δουλειάς τους.
- ✓ Έμαθαν να ολοκληρώνουν ένα σχέδιο, μια εργασία, με εμμονή στη λεπτομέρεια και την αρτιότητα της κατασκευής

VII. Συγκριτική διερεύνηση των δύο περιπτώσεων - παρεμβάσεων

Για να συγκρίνουμε αυτές τις δύο παρεμβάσεις θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στα παρακάτω ερωτήματα σε κάθε περίπτωση:

- ✓ Ποιοι είναι οι κανόνες του παιχνιδιού;
- ✓ Ποιος θέτει τους κανόνες του παιχνιδιού;
- ✓ Ποια είναι τα κοινά στοιχεία με το αυθεντικό τάνγκραμ;
- ✓ Ποιο είναι το μαθηματικό περιεχόμενο;

Παιχνίδι με κλάσματα	Παιχνίδι με κύκλο
- Οι κανόνες του παιχνιδιού ανατρέπονται μετά την δεύτερη ώρα: το παιχνίδι αλλάζει και γίνεται μάλλον μια αφορμή για μαθηματική διερεύνηση και επεξεργασία της έννοιας του κλάσματος. - Ο δάσκαλος είναι αυτός που θέτει τους κανόνες του παιχνιδιού με μορφή ερωτήσεων. - Η μορφή του αυθεντικού τάνγκραμ (τετράγωνο χωρισμένο σε 7 σχήματα) παραμένει η ίδια) και η κατασκευή σχεδίων είναι ελεύθερη, σύμφωνα με την βούληση των μαθητών. - Το μαθηματικό περιεχόμενο είναι πολύ πλούσιο: η έννοια του κλάσματος ως μέρους ενός όλου αλλά και ως τελεστή, η πράξη του αθροίσματος ομώνυμων αλλά και ετερόνυμων κλασμάτων κ.λ.π.	- Οι κανόνες του παιχνιδιού παραμένουν οι ίδιοι: τα κομμάτια, τα σχέδια, η κατασκευή των σχεδίων χωρίς επικάλυψη, αλλά το βασικό σχέδιο (τετράγωνο) αλλάζει και γίνεται κύκλος. - Οι ίδιοι οι μαθητές θέτουν τους κανόνες του παιχνιδιού αποφασίζοντας για την μορφή του αρχικού σχεδίου (κύκλος) και για τα σχέδια προς κατασκευή. - Η μορφή του τάνγκραμ αλλάζει (κύκλος) καθώς και η μορφή των σχεδίων ως συνέπεια της αλλαγής της αρχικής μορφής. - Το μαθηματικό περιεχόμενο αφορά στις γεωμετρικές έννοιες και δεξιότητες: η διαίρεση του επιπέδου σχήματος (κύκλου) και η διατήρηση του εμβαδού του, ο σχηματισμός ισοβαδικών και χωρίς επικάλυψη σχημάτων κ.λ.π.

Συνοψίζοντας...

Το παιχνίδι με τα κλάσματα «πρόδωσε» το αυθεντικό παιχνίδι δίνοντας στον δάσκαλο την απόλυτη κυριαρχία των κανόνων του, κράτησε όμως την αυθεντική του εικόνα και έδωσε την ευκαιρία ανάπτυξης ενός πιο πλούσιου διδακτικού, πλέον, παιχνιδιού με ευρύτατο μαθηματικό περιεχόμενο αριθμητικό και γεωμετρικό.

Το παιχνίδι με τον κύκλο κέρδισε ως προς την ελευθερία που δόθηκε στους μαθητές να αλλοιώσουν την μορφή του και να θέσουν τους δικούς τους κανόνες, περιορίστηκε, όμως, μόνο στο γεωμετρικό περιεχόμενο.

Θα μπορούσαμε, ίσως, να πούμε ότι, αυτό που κερδίζει σε μαθηματικό περιεχόμενο το ένα, το κερδίζει σε ελευθερία ως προς τους κανόνες του παιχνιδιού το άλλο. Περιορίζει δηλαδή το πρώτο τις δυνατότητες ενεργητικής παρέμβασης του παίκτη – μαθητή στη διαδικασία του παιχνιδιού.

Μένει, βέβαια, να αναλογιστεί κανείς τον βαθμό της ευχαρίστησης που προξένησε η ενασχόληση με τα δύο αυτά διδακτικά «παιχνίδια» στους μαθητές μας, κάτι που δεν είναι εύκολα ή μάλλον καθόλου μετρήσιμο αν θέλουμε να είμαστε ειλικρινείς απέναντι στους μαθητές μας και την διδασκαλία μας...

Αν ένα ευχάριστο παιχνίδι δεν είναι πάντα ένα παιχνίδι χρησιμοποιήσιμο στην τάξη... ένα χρήσιμο παιχνίδι μπορεί να είναι ένα νεκρό παιχνίδι.

VIII. Βιβλιογραφία

- Γαγάτσης, Αθανάσιος (1993): *Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών* (κείμενα: L. Bazzini, G. Brousseau, A. Γαγάτσης, J. Fauvel, H. Maier, T. Πατρώνη), Θεσσαλονίκη: Αδελφοί Κυριακίδη.
- Γκουγκουλή, Κλειώ., Αφροδίτη Κούρια (2000): *Παιδί & Παιχνίδι στη νεοελληνική κοινωνία*, Αθήνα: Καστανιώτη.
- Πολυδούρης Βαγγέλης (1996): *Παιδεία, το αθέατο ημισφαίριο*: Θεσσαλονίκη Αδελφοί Κυριακίδη.
- ΥΠ.Ε.Π.Θ. (2004) *Η Ευέλικτη ζώνη στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση*. Περιφέρεια Αττικής.
- Freudenthal, H. (1983): *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel.
- Griffith R (1994): *Mathematics & play*, in J R Moyles (ed) *The excellence of play*. Open University Press.
- Papert, Seymour (1990): *A Critique of Technocentrism in Thinking About the School of the Future*, M.I.T Media Lab Epistemology and Learning Memo No.2.
- Tucker, Kate (2005): *Mathematics through play in the early years*, London: Sage.

Λέλα Λυμπεροπούλου

l lelalibe@gmail.co

Μαλβίνα Παπαδάκη

mp@power.ece.ntua.gr

Η ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΠΑΙΧΝΙΔΙΟΥ ΜΕ ΚΑΡΤΕΣ ΖΩΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

Αρης Μαυρομαμάτης

*Καθηγητής Εθνικής Εστίας
Επιστημών – Πανεπιστήμιο Αιγαίου –
Επιστημονικός υπεύθυνος Μουσείου
Ηρακλειδών*

Σοφία Σταθοπούλου

*Δασκάλα – Μαθηματικός -
Συντονίστρια Μαθηματικών
Αρσακείων Σχολείων*

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζεται μια διδακτική πρόταση προσέγγισης της έννοιας της ισότητας τριγώνων. Το σκεπτικό της πρότασης μπορεί να επεκταθεί και για την ισότητα οποιονδήποτε άλλων κυρτών ευθυγράμμων σχημάτων. Ως πρόκληση για την προσέγγιση της έννοιας, χρησιμοποιήθηκε ένα παιχνίδι με κάρτες που εικονίζουν πίνακες του ζωγράφου Sol Lewitt.. Στη συγκεκριμένη πρόταση παρουσιάζεται: α) το παιχνίδι, το οποίο μέσω των κανόνων του, λειτουργεί ως μέσον πρόκλησης προβληματισμών, η αναγκαιότητα επίλυσης των οποίων, οδηγεί στον αφαιρετικό κόσμο των Μαθηματικών και β) η ανάπτυξη της πορείας όλων των συλλογισμών από την εμπειρία στην αφαίρεση που ακολουθήθηκε, μέσω ενός διαλόγου, ο οποίος συγκροτήθηκε και διαμορφώθηκε μέσα από απομαγνητοφωνημένους διαλόγους με ομάδες μαθητών ηλικίας 10 ως 12 ετών. Οι μαθητές αυτοί συμμετείχαν στα εκπαιδευτικά προγράμματα «Τέχνη και Μαθηματικά» που πραγματοποιούνται στο Μουσείο Ηρακλειδών, σε παιδιά του Δημοτικού σχολείου.

Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να εφαρμοστεί και στην οποιαδήποτε σχολική τάξη, διότι το παιχνίδι - κάρτες, το οποίο χρησιμοποιήθηκε είναι απλό τόσο στην κατασκευή, όσο και στη χρήση του.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Διεθνείς έρευνες υποστηρίζουν τη συνεισφορά των παιχνιδιών στη μάθηση των μαθηματικών, ως προς το κίνητρο που προσφέρουν και ως προς τη μαθησιακή πρόοδο που λαμβάνει χώρα (Tapson, 1997- Szendrei, 1996- Αυγητίδου, 2001- Wood & Bennett, 2001- Ρεκαλίδου, 2004).

Το παιχνίδι θεωρείται ως η βάση των προγραμμάτων στα πρώτα χρόνια της εκπαίδευσης του παιδιού. Ερευνητικές επισκοπήσεις υποδηλώνουν ότι το παιχνίδι πράγματι συμβάλλει από κάθε άποψη στην παιδική μάθηση και ανάπτυξη, αλλά αυτό εξαρτάται από το εκπαιδευτικό πλαίσιο μέσα στο οποίο λαμβάνει χώρα (Wood & Bennett, 2001).

Στις ψυχαναλυτικές θεωρίες: Το παιχνίδι είναι ταυτόχρονα έκφραση της αρχής της ηδονής και ένας μηχανισμός κάθαρσης που μας επιτρέπει να απελευθερωθούμε από ορισμένα τραύματα (Freud).

Στις ψυχολογικές θεωρίες: Το παιδί αντιμετωπίζεται ως μικρός επιστήμονας που μέσω του παιχνιδιού, πειραματίζεται τον κόσμο και κατασκευάζει με αυτό τον τρόπο τη νοημοσύνη του (Piaget).

Ο Bruner θεωρεί ότι το παιχνίδι είναι ένα μέσο εξερεύνησης και επινόησης που επιτρέπει στο παιδί να οδηγηθεί χωρίς ιδιαίτερο κόστος και κίνδυνο στην ανακάλυψη των δεξιοτήτων του.

Ο Dienes πάει ακόμα παραπέρα με το να προτείνει ότι όλη η διδασκαλία των μαθηματικών πρέπει να αρχίζει με παιχνίδια.

Στις κοινωνιολογικές θεωρίες: Ο Vygotsky υποστηρίζει ότι τα παιδιά, προκειμένου να αλλάξουν το κοινωνικό και υλικό τους περιβάλλον, χρησιμοποιούν και προσαρμόζουν καταλλήλως τα πολιτισμικά εργαλεία, όπως τη γλώσσα στο παιχνίδι τους, αλλά πολλές φορές πάλι τα μεταμορφώνουν και τα επεκτείνουν στη διαδικασία αυτής της προσαρμογής.

Στις παιδαγωγικές θεωρίες: τα παιχνίδια ενθαρρύνουν τη συζήτηση των μαθητών μεταξύ τους αλλά και με τον εκπαιδευτικό τους ενώ βοηθούν και στην ανάπτυξη της επιθυμίας για μάθηση (Ernest, 1986- Williams, 1986- Ceglowski, 1997- Αυγητίδου, 2001- Ascher, 2001). Η ενασχόληση με τα παιχνίδια επιτρέπει στους παίκτες-μαθητές να

αντιμετωπίσουν και να υπερνικήσουν τους φόβους τους για το μάθημα των μαθηματικών με ένα ευχάριστο τρόπο.

Έρευνες που έχουν γίνει κατά καιρούς (Ernest, 1986- Marland, 1986- Williams, 1986- Barta & Schaelling, 1998- Ceglowski, 1997- Ascher, 2001- Smith, 2001) δείχνουν ότι το παιχνίδι είναι ένας από τους αποτελεσματικούς τρόπους για τη διδασκαλία των μαθηματικών και για την ανάπτυξη της επιθυμίας των μαθητών για μάθηση καθώς και για την επίτευξη των μαθηματικών στόχων που έχουν τεθεί με βάση τις δυνατότητες της προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας.

Τέλος σύμφωνα με τον Tapson (1997), πρέπει να παίζουμε παιχνίδια στις τάξεις των μαθηματικών για τρεις λόγους: α) γιατί στην πλειοψηφία των παιχνιδιών υπάρχουν εσωτερικά μαθηματικά, β) γιατί η ενασχόληση με το παιχνίδι ενεργοποιεί το κίνητρο και το ενδιαφέρον και τέλος γ) γιατί με την ενασχόληση με ποικίλα παιχνίδια επιτυγχάνεται η βαθιά κατανόηση μιας κατάστασης πάνω στην οποία εργαζόμαστε.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΑΙΧΝΙΔΙΟΥ

Το συγκεκριμένο παιχνίδι αποτελείται από ένα πλήθος καρτών ανάλογων σε μέγεθος εκείνων των καρτών μιας τράπουλας. Επάνω στις κάρτες εικονίζονται ευθύγραμμα γεωμετρικά σχήματα (Εικόνα1), από ζωγραφικούς πίνακες του ζωγράφου Sol Lewitt (www.herakleidon-art.gr) διαφορετικών μορφών και μεγεθών.

Ο τρόπος με τον οποίο παίζεται το παιχνίδι είναι ο ακόλουθος:

Οι μαθητές χωρίζονται σε μικρές ομάδες. Η επιλογή και το πλήθος των μελών κάθε ομάδας καθορίζεται ελεύθερα από τους ίδιους τους μαθητές. Κάθε ομάδα παίρνει 52 κάρτες. Η κάθε ομάδα παίζει ανεξάρτητα από τις άλλες ομάδες. Οι παίκτες κάθε ομάδας μοιράζονται ισόποσα το πλήθος των καρτών. Σε κάθε ομάδα ο πρώτος παίκτης (ο εναρκτήριος παίκτης, καθώς επίσης και η φορά ανάπτυξης του παιχνιδιού ορίζονται από τους ίδιους τους παίκτες) κατεβάζει μία κάρτα. Κάθε επόμενος παίκτης της ίδιας ομάδας πρέπει να τοποθετήσει πάνω σ' αυτήν όλες τις κάρτες του ίδιου σχήματος και του ίδιου μεγέθους που έχει στα χέρια του. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται κυκλικά. Νικητής θεωρείται αυτός που εξάντλησε

πρώτος το πλήθος των καρτών του και αιτιολόγησε με τρόπο πειστικό την ισοτιμία των σχημάτων. Ο νικητής παίρνει επιπλέον bonus ανάλογα με τον βαθμό της γενικότητας του κριτηρίου που διατύπωσε για την ισοτιμία των γεωμετρικών σχημάτων.

Σκοπός του παιχνιδιού είναι: μέσα από το ευχάριστο περιβάλλον που δημιουργεί, να προκαλέσει στους μαθητές προβληματισμούς, σε ό,τι αφορά τη σύγκριση ευθύγραμμων γεωμετρικών σχημάτων. Στη συνέχεια μέσω μιας διαδικασίας συνεχούς αφαίρεσης, να τους οδηγήσει από μια διαισθητική και εμπειρική αντίληψη της έννοιας της ισοτιμίας των γεωμετρικών σχημάτων, στην αναζήτηση ενός λογικο-μαθηματικού κριτηρίου που θα αιτιολογεί την επιλογή τους.

Τα βήματα αναζήτησης κριτηρίων που ακολουθούνται είναι: α) η διαισθητική αντίληψη που συγκροτούν βλέποντας απλώς τα σχήματα (διαισθητικό κριτήριο) β) η υπέρθεση των σχημάτων (εμπειρικό κριτήριο), γ) το διαφανές χαρτί (εμπειρικό κριτήριο) και δ) τα γεωμετρικά στοιχεία των σχημάτων (λογικο- μαθηματικό κριτήριο)

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Τα Μαθηματικά

Τα Μαθηματικά είναι ένα λογικό εργαλείο, το οποίο έρχεται να δώσει απάντηση σε λογικούς προβληματισμούς με τρόπο αυστηρά ακριβή και βέβαιο. Όμως η αξία χρήσης του εργαλείου εμφανίζεται, μόνο όταν το άτομο έχει φτάσει μετά από αφαίρεση στη διατύπωση μιας ερώτησης. Οι συνιστώσες της ερώτησης αυτής αποτελούνται από καθαρά νοητικά αντικείμενα, τα οποία προήλθαν από αφαιρέσεις αισθητών αντικειμένων του εμπειρικού κόσμου εντός του οποίου διατυπώθηκε μέσω πρόκλησης ο προβληματισμός. Αυτό σημαίνει ότι το άτομο έχει ξεπεράσει το επίπεδο των προσωπικών του πεποιθήσεων και έχει εισέλθει στο επιστημονικό γνωσιολογικό πεδίο.

Η ερώτηση: «γιατί συμβαίνει αυτό που συμβαίνει;» δεν απαιτεί από το ίδιο το άτομο σε πρώτη φάση απάντηση επιστημονική. Ανεξάρτητα αν η *ακρίβεια*, η *εγκυρότητα* και η *βεβαιότητα* πρόκειται να αντιμετωπιστούν στο επιστημονικό πεδίο, αφού μόνο το πεδίο αυτό τα

εγγυάται, εν τούτοις το ίδιο το άτομο δεν υποψιάζεται ούτε θεωρεί άμεσα ότι πρέπει να υπαχθεί κατ' ευθείαν σ' αυτό.

Κατά κανόνα δίνει πρώτα μια γενική απάντηση στο «γιατί» που έθεσε με κριτήρια καθαρά υποκειμενικά και στη συνέχεια κρίνει το αληθές του προσωπικού ισχυρισμού του, σε σχέση με αντίστοιχους ισχυρισμούς άλλων ατόμων.

Η μετάβαση επομένως στο γνωσιολογικό πεδίο και κατά συνέπεια στον κόσμο των Μαθηματικών, θα πρέπει να διέλθει μέσα από μια σύγκρουση πεποιθήσεων, οι οποίες θα το οδηγήσουν σε αντιφάσεις και επομένως σε αμφισβητήσεις περί του αληθούς των ισχυρισμών του. Αν δεν προκληθεί αμφισβήτηση, τότε η μετάβαση στο γνωσιολογικό-Μαθηματικό πεδίο δεν πρόκειται να υπάρξει.

Η «δυσκολία» για την οποία μιλάμε στα Μαθηματικά δεν είναι πάντα η δυσκολία των ίδιων των Μαθηματικών, αλλά της ανυπαρξίας «γέφυρας μετάβασης» από το πεδίο των υποκειμενικών θέσεων και απόψεων, στο Μαθηματικό πεδίο των αυστηρά δομημένων συστημάτων.

Η αναγνώριση της σημαντικότητας των Μαθηματικών που πολλές φορές διατυπώνεται από τους περισσότερους με τη φράση:

«τα Μαθηματικά είναι χρήσιμα γιατί βρίσκονται παντού»

αναφέρεται συνήθως στην ικανότητα διενέργειας αριθμητικών υπολογισμών και επίλυσης πρακτικών προβλημάτων, κάτι που είναι άμεσα συνδεδεμένο με την εμπειρική πραγματικότητα και το οποίο αποτελεί εφαρμογή των Μαθηματικών και όχι τα ίδια τα Μαθηματικά. Βέβαια τίθεται το ερώτημα: «Πώς θα μπορούσαμε να μιλήσουμε για τα ίδια τα Μαθηματικά σε μικρές ηλικίες;»

Αυτό είναι ένα σοβαρό ερώτημα και θα πρέπει να αντιμετωπιστεί με τρόπο εξίσου σοβαρό και προσεκτικό.

Θα πρέπει πρωτίστως το παιδί να αντιληφθεί τον κόσμο μέσα στον οποίο οικοδομούνται τα ίδια τα Μαθηματικά, και ότι ασφαλώς αυτός είναι ένας κόσμος καθαρά νοητός και γενικά μη εμπειρικά αναπαραστάσιμος.

Πώς όμως μπορούμε να οδηγήσουμε τη σκέψη του παιδιού σ' αυτόν τον καθαρά νοητό κόσμο;

Στόχος του παρόντος άρθρου είναι να απαντήσει κατά βάση σ' αυτό το ερώτημα. Με ποιον τρόπο μπορεί να καταλήξει σε αφαιρετικά συμπεράσματα ξεκινώντας με εμπειρικές ανάγκες που προκάλεσε το παιχνίδι και ακλουθώντας λογικούς συλλογισμούς που διέπονται από εγκυρότητα και ορθότητα;

Η απόδειξη: από τη σύμπτωση στα λογικά κριτήρια

Για τη Γεωμετρία η σύμπτωση είναι μια ιδιότητα που έχουν τα ίσα σχήματα να επικαλύπτονται ακριβώς όταν τα υπερθέτουμε. Η 7^η κοινή έννοια στα στοιχεία του Ευκλείδη αναφέρει:

«Και τα εφαρμόζοντα επ' άλληλα είναι ίσα μεταξύ τους.»

Στη γεωμετρία η σύμπτωση που έχει προέλθει από υπέρθεση είναι ισότητα. Πρόκειται για μια διαδικασία κάπως πρωτόλεια. Για να συμπίσουν δυο σχήματα πρέπει να τοποθετήσουμε το ένα επάνω στο άλλο, δηλαδή να μετακινήσουμε τουλάχιστον ένα. Η σύμπτωση έχει ανάγκη την κίνηση. Αλλά ποιος μας βεβαιώνει ότι η μετακίνηση δεν παραμορφώνει τα σχήματα; Η γεωμετρία έχει αυτή τη δυνατότητα επειδή θέτουμε ως θεμελιώδη αρχή ότι η μετακίνηση δεν επηρεάζει την ακεραιότητα των μορφών. Σώματα και σχήματα παραμένουν αμετάβλητα όταν τα μετακινούμε. Η σύμπτωση ως ιδέα είναι ριζοσπαστική. Αναδεικνύει άμεσα την ισότητα όλων των στοιχείων. Όμως αυτό έχει ένα τίμημα, τη μετακίνηση.

Όσο, αν αρνηθούμε να μετακινήσουμε τα σχήματα μπορούμε να αποδείξουμε ότι είναι ίσα; Το ερώτημα αυτό μας εισάγει στη θεωρητική σκέψη και ανοίγει ταυτόχρονα τις πύλες των μαθηματικών, πραγματοποιώντας μια μετάβαση από την φυσική κίνηση που απαιτεί η μετατόπιση, απτή απόδειξη σύμπτωσης, στην κίνηση εντός του πνεύματος, το οποίο θεσπίζοντας κριτήρια ισότητας, επικαλείται το συλλογισμό και την απόδειξη.

Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ

Η προτεινόμενη δραστηριότητα αφορά τη μελέτη της ισότητας ευθύγραμμων γεωμετρικών σχημάτων και ειδικότερα των τριγώνων. Σύμφωνα με τους κανόνες του παιχνιδιού, οι μαθητές πρέπει να αιτιολογήσουν τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη διεξαγωγή του. Σε πρώτη φάση οι ομάδες των μαθητών αποφαινούνται ως προς την

ισότητα ευθυγράμμων γεωμετρικών σχημάτων με τρόπο διαισθητικό. Στη συνέχεια και κάτω από την ανάγκη της επαλήθευσης του διαισθητικού ισχυρισμού τους, προβαίνουν με τρόπο εμπειρικό στην υπέρθεση των γεωμετρικών σχημάτων. Ακολουθώντας η πορεία προς την αφαίρεση μας οδηγεί στην διατύπωση του ερωτήματος: τι θα συνέβαινε αν η υπέρθεση των σχημάτων ήταν αδύνατη; Σ' αυτή την περίπτωση ανακαλύπτεται η ιδέα του τρίτου μέσου. Δηλαδή της σύγκρισης των δυο γεωμετρικών σχημάτων με τη χρήση διαφανούς μεμβράνης. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή αποτυπώνεται το πρώτο σχήμα επάνω στη διαφανή μεμβράνη και το αποτύπωμα αυτό (τρίτο μέσο) συγκρίνεται με το δεύτερο τρίγωνο (νόμος της μεταβατικότητας: αν $A=B$ και $B=\Gamma$ τότε $A=\Gamma$).

Στην ερώτηση αν θα μπορούσαμε να βρούμε ένα κριτήριο ισότητας των σχημάτων χωρίς τη χρήση διαφανούς μεμβράνης, δημιουργείται η ανάγκη αναζήτησης νοητικών αντικειμένων εντός του χώρου που ανήκουν τα γεωμετρικά σχήματα. Ο χώρος αυτός είναι η Ευκλείδεια Γεωμετρία. Η αναζήτηση ενός τέτοιου λογικο-μαθηματικού κριτηρίου θα στηριχθεί στη χρήση και σύγκριση των αντικειμένων αυτών που στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι τα ευθύγραμμα τμήματα και οι γωνίες, από τα οποία δομούνται τα ευθύγραμμα γεωμετρικά σχήματα. Οι μετρήσεις των συγκεκριμένων γεωμετρικών μεγεθών θα γίνουν με τη χρήση μετρητικών γεωμετρικών οργάνων όπως ο διαβαθμισμένος κανόνας και το μοιρογνωμόνιο. Τέλος με τρόπο συνεχή και λογικά αδιάλειπτο θα αναζητηθεί η διατύπωση ενός καθολικού ορισμού της ισότητας, ο οποίος θα αποτελέσει και το ζητούμενο μαθηματικό κριτήριο.

Επιλέξαμε να παρουσιάσουμε τη διδακτική πρόταση, ως συνέχεια της ανάγκης που δημιούργησε το παιχνίδι, με τρόπο διαλογικό, προκειμένου να φανεί καθαρά η πορεία της νοητικής αφαίρεσης που πραγματοποιήθηκε. Η ανάπτυξη των συλλογισμών που παρουσιάζονται στα πλαίσια του διαλόγου μεταξύ μαθητών και δασκάλου, ακολουθούν τόσο την Πλατωνική, όσο και την Αριστοτελική θέση περί διαλεκτικής (Αριστοτέλης. Όργανο 4, Αναλυτικά πρότερα Α, 25), αντανakλώντας παράλληλα τη διαλεκτική μιας ορθολογικά ανακατασκευασμένης ή «αποσταγμένης» ιστορίας. (Lakatos)

Ο διάλογος μετά από το παιχνίδι

- Δ. Βλέπω ότι τοποθετήσατε την κάρτα K1 πάνω στην κάρτα K2 (Εικόνα 4). Θα μπορούσατε να αιτιολογήσετε την απόφασή σας αυτή; (Οι κάρτες K1 και K2 εικονίζουν δυο ίσα τρίγωνα, Εικόνες 2, 3).
- Μ. Ασφαλώς. Γιατί σύμφωνα με τους κανόνες του παιχνιδιού πάνω από κάθε σχήμα πρέπει να τοποθετήσουμε αντίστοιχα το ίσο του.
- Δ. Ποιός είναι ο λόγος που σας κάνει να πιστεύετε ότι αυτά είναι ίσα;
- Μ. Γιατί τα βλέπουμε.
- Δ. Αν ισχυριστώ, ότι δεν μπορώ να διακρίνω αυτό που εσείς λέτε, θα μπορούσατε με κάποιο τρόπο να με πείσετε;
- Μ. Ασφαλώς. Τοποθετώντας το ένα επάνω στο άλλο.

Η τοποθέτηση του ενός επάνω στο άλλο από το δάσκαλο, γίνεται με τρόπο που η ταύτιση να μην είναι ακριβής (Εικόνες 5, 6) Ο σκοπός αυτής της ενέργειας είναι: να προκαλέσει τα παιδιά να εκδηλώσουν αυτό που εκείνα αντιλαμβάνονται ως τοποθέτηση του ενός επί του άλλου, δηλαδή της ακριβούς ταύτισης. Τα παιδιά διορθώνουν την τοποθέτηση των καρτών, τοποθετώντας αυτά όπως δείχνει η εικόνα 4.

- Δ. Ωραία, γιατί θεωρείτε ότι με την τοποθέτησή σας αυτή μπορείτε να ισχυριστείτε ότι είναι ίσα;
- Μ. Γιατί αν τοποθετήσουμε, το κίτρινο επάνω στο κόκκινο κατ' αυτόν τον τρόπο, θα παρατηρήσουμε ότι το κόκκινο δεν φαίνεται. Το ίδιο επίσης θα συμβεί, αν τα τοποθετήσουμε αντίστροφα (Εικόνα 4).
- Δ. Θα μπορούσατε να διατυπώσετε τον ισχυρισμό σας σε ότι αφορά την ισότητα των δυο τριγώνων στη φυσική σας γλώσσα;
- Μ. Βεβαίως: *Το κίτρινο τρίγωνο είναι ίσο με το κόκκινο τρίγωνο, όταν τοποθετώντας το κίτρινο επάνω στο κόκκινο δεν φαίνεται το κόκκινο και τοποθετώντας το κόκκινο επάνω στο κίτρινο δεν φαίνεται το κίτρινο.*
- (Πρώτος προσεγγιστικός ορισμός της ισότητας δυο τριγώνων)

- Δ. Νομίζω σε ό,τι αφορά τα δύο συγκεκριμένα χρωματιστά τρίγωνα με πείσατε για ό,τι προηγουμένως διατυπώσατε. Σκέφτομαι όμως πώς

θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε τον προηγούμενο ισχυρισμό περί της ισότητας των δύο τριγώνων αν αυτά δεν είχαν διαφορετικά χρώματα, αλλά αντιθέτως ήταν του ίδιου χρώματος.

Μ. Τότε θα βάζαμε δύο διαφορετικά σημάδια, ένα σε κάθε τρίγωνο και θα ελέγχαμε την ισότητά τους μέσω των σημαδιών τους.

Δ. Το ότι έχουν δύο διαφορετικά χρώματα δεν είναι το ίδιο με το ότι έχουν δύο διαφορετικά σημάδια;

Μ. Βεβαίως. Αλλά μήπως εσείς εννοείτε να μην έχουν κανένα διακριτικό στοιχείο μεταξύ τους;

Δ. Ακριβώς.

Μ. Τότε θα τα τοποθετούσαμε και πάλι το ένα επάνω στο άλλο, θα τα κοιτάζαμε από τη μια όψη και από την άλλη και θα ελέγχαμε αν αυτά εφαρμόζουν ακριβώς. (Εικόνα 7).

Δ. Θα μπορούσατε σ' αυτή την περίπτωση να επαναδιατυπώσετε τον ισχυρισμό σας περί της ισότητας των δύο τριγώνων;

Μ. Βεβαίως: *Τα δύο τρίγωνα είναι ίσα επειδή τοποθετώντας το ένα επάνω στο άλλο με κατάλληλο τρόπο αυτά εφαρμόζουν ακριβώς.*

(Δεύτερος προσεγγιστικός ορισμός της ισότητας δυο τριγώνων)

Δ. Σκέφτομαι πάλι πώς θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε τον προηγούμενο ισχυρισμό της ισότητας των δύο τριγώνων, αν αυτά δεν μπορούσαν να μεταφερθούν το ένα επάνω στο άλλο.

Μ. Τότε θα βρίσκαμε ένα άλλο τρίτο μέσο για να τα συγκρίνουμε, για παράδειγμα ένα διαφανές χαρτί. Θα αποτυπώναμε το ένα τρίγωνο επάνω σ' αυτό και το αποτύπωμά του θα το συγκρίναμε με το άλλο τρίγωνο.

Δ. Θα μπορούσατε τώρα να επαναδιατυπώσετε τον ισχυρισμό σας περί της ισότητας των δύο τριγώνων;

Μ. Βεβαίως: *Τα δύο τρίγωνα θα είναι ίσα όταν αποτυπώνοντας το ένα από αυτά επάνω σ' ένα διαφανές χαρτί και τοποθετώντας το αποτύπωμά του κατάλληλα επάνω στο άλλο, αυτά εφαρμόσουν ακριβώς.*

(Τρίτος προσεγγιστικός ορισμός της ισότητας δυο τριγώνων)

Δ. Σκέφτομαι τώρα αν θα μπορούσαμε να μιλήσουμε για την ισότητα μεταξύ δύο τριγώνων, θεωρώντας ότι η μεταφορά του ενός επί του άλλου ή η αποτύπωση σε διαφανή μεμβράνη ήταν αδύνατη.

Σε αυτό το σημείο του διαλόγου προκύπτει προβληματισμός. Τα παιδιά συζητούν μεταξύ τους και αναζητούν τρόπο επίλυσης του προβλήματος που δημιούργησε το ανέφικτο της μεταφοράς. Στη συνέχεια διατυπώνουν την ακόλουθη πρόταση.

Μ. Νομίζουμε ότι σε αυτή την περίπτωση τη μεταφορά θα πρέπει να την κάνουμε με το νου μας.

Δ. Σωστά. Αλλά αυτό που έχουμε στο νου μας δυστυχώς δεν φαίνεται, δηλαδή δεν μπορούν να το αντιληφθούν οι αισθήσεις μας. Είναι κάτι το νοητό. Επομένως θα πρέπει εξηγήσουμε πώς αντιλαμβανόμαστε αυτή τη νοητή μεταφορά και ακόμα με ποιο τρόπο από αυτή τη νοητή μεταφορά θα προκύψει η ισότητα.

Μ. Για τη νοητή μεταφορά δεν μπορούμε να πούμε τίποτα περισσότερο εκτός από το ότι αποτελεί μια κίνηση μέσα στη φαντασία μας. Σε ότι αφορά την ισότητα,

μετράμε τα δύο σχήματα και αν οι μετρήσεις μας είναι οι ίδιες τότε αυτά είναι ίσα.

Δ. Στον ισχυρισμό που διατυπώθηκε θα πρέπει να εξηγήσουμε αφ' ενός πώς προέκυψε η ιδέα της *μέτρησης* και αφ' ετέρου τι είναι αυτό που μετράμε.

Προκειμένου να οδηγηθούμε σ' ένα ακριβή, έγκυρο και γενικό ορισμό της ισότητας μεταξύ δύο ευθύγραμμων σχημάτων θα πρέπει οι συλλογισμοί μας να ακολουθούν μία συνέχεια. Δηλαδή να είναι έγκυροι. Αυτό σημαίνει ότι η μετάβαση σ' ένα νέο πιο ισχυρό ορισμό της ισότητας μεταξύ δύο τριγώνων θα πρέπει να στηριχτεί στον τελευταίο ορισμό που διατυπώσαμε. Διαφορετικά οποιοσδήποτε νέος ορισμός δεν θα νομιμοποιείται ως έγκυρος αφού ανάμεσα σ' αυτόν και τον προηγούμενο θα υπάρχει κενό σκέψης.

Μ. Η αλήθεια είναι ότι ενώ διαισθανόμαστε αυτό που είπαμε για τη μέτρηση, εν τούτοις δεν μπορούμε να το συνδέσουμε με τον τελευταίο ορισμό που διατυπώσαμε.

Δ. Θα πρέπει πράγματι να αναγνωρίσουμε ότι δεν είναι εύκολο. Πολλές φορές συμβαίνει η διαίσθησή μας για τα πράγματα να μας οδηγεί σε συμπεράσματα άλλοτε αληθή, άλλοτε όχι, χωρίς όμως να μπορούμε να βρούμε εκείνα τα επιχειρήματα που θα κρίνουν τις επιλογές αυτής της διαίσθησης. Στην τελευταία περίπτωση θα πρέπει να επιστρέψουμε στον τελευταίο ορισμό που διατυπώσαμε και να αναζητήσουμε μέσα σ' αυτόν τις λέξεις κλειδιά που χρησιμοποιήσαμε. Θα μπορούσατε να τις ανακαλύψετε;

Μ. Νομίζουμε πως ναι. Αυτές είναι: *μεταφορά, κατάλληλη τοποθέτηση, ακριβής εφαρμογή*.

Δ. Ωραία. Ας προσπαθήσουμε τώρα να αναγνώσουμε βαθύτερα τα νοήματα που κρύβουν οι λέξεις που χρησιμοποιήσαμε. Ας αρχίσουμε με τη λέξη *μεταφορά*. Πίσω από τη λέξη μεταφορά κρύβεται η αναγκαιότητα του τρόπου της σύγκρισης. Δεν μπορεί να υπάρξει σύγκριση αν τα τρίγωνα δεν βρίσκονται σε μια σχέση επαφής μεταξύ τους. Ως τέτοιες βρήκαμε διαδοχικά τις ακόλουθες: μεταφορά του ενός επί του άλλου, μεταφορά του ενός από τον άλλον μέσω τρίτου μέσου, νοητή μεταφορά.

Όσον αφορά τις δύο πρώτες περιπτώσεις διατυπώθηκε ορισμός. Το πρόβλημα προέκυψε στην τρίτη περίπτωση, η οποία όπως προηγουμένως αναφέρθηκε, μπορεί να καλυφθεί από μια φανταστική κίνηση.

Πίσω από τη φράση «*κατάλληλη τοποθέτηση*» κρύβεται η αναγκαιότητα της σύγκρισης χαρακτηριστικών στοιχείων των σχημάτων με τον *απλούστερο δυνατό τρόπο*. Εδώ θα πρέπει να διαπιστώσουμε ότι εκείνο που μας οδηγεί σ' αυτό που ονομάζουμε κατάλληλη τοποθέτηση δεν είναι το υλικό αντικείμενο, αλλά τα *νοητά όρια* αυτού του αντικειμένου, δηλαδή το νοητό περιγράμματό του.

Τέλος πίσω από τη λέξη *ακριβής εφαρμογή* κρύβεται η αναγκαιότητα του τελικού αναγνώσματος, δηλαδή της ισότητας. Ποιας όμως ισότητας;

Μ. Ασφαλώς, της ισότητας των νοητών περιγραμμάτων.

Δ. Με ποιο τρόπο όμως μπορεί να ισχυριστεί κάποιος αυτήν την ισότητα των νοητών περιγραμμάτων, όταν μάλιστα αυτό είναι πολύπλοκο;

- Μ. Με το να τα αναλύσει σε απλούστερα.
- Δ. Ωραία. Θα μπορούσαμε να αποσυνθέσουμε γεωμετρικά το νοητό περίγραμμα ενός τριγώνου, αναλύοντας αυτό στα απλούστερα νοητικά στοιχεία που το συγκροτούν ως γεωμετρικό σχήμα;
- Μ. Ασφαλώς. Είναι οι *πλευρές* του που είναι *ευθύγραμμα τμήματα* και οι *γωνίες* του.
- Δ. Ωραία. Ανακαλύψατε ότι το νοητό περίγραμμα του τριγώνου αποτελείται από απλούστερα νοητά γεωμετρικά αντικείμενα τα οποία είναι: οι *πλευρές* του που είναι *ευθύγραμμα τμήματα* και οι *γωνίες* του. Θα μπορούσατε τώρα να απλουστεύσετε στο μυαλό σας την ισότητα των νοητών περιγραμμάτων των δύο τριγώνων;
- Μ. Ασφαλώς. Θα μπορούσαμε να μιλήσουμε για ισότητα των αντίστοιχων απλών στοιχείων τους. Δηλαδή για την ισότητα των *πλευρών* και των *γωνιών* τους.
- Δ. Με ποιο τρόπο θα μπορούσατε να συγκρίνετε δυο ευθύγραμμα τμήματα χωρίς να τοποθετήσετε το ένα επάνω στο άλλο;
- Μ. Με το να τα *μετρήσουμε* χρησιμοποιώντας ένα υποδεκάμετρο.
- Δ. Και σε ότι αφορά τις γωνίες;
- Μ. Με το να τις *μετρήσουμε* χρησιμοποιώντας ένα μοιρογνωμόνιο.
- Δ. Ακριβώς. Να λοιπόν πώς μπορούμε να αιτιολογήσουμε την ανάγκη της μέτρησης. Ας συνοψίσουμε λοιπόν τι είναι αυτό που τελικά μετράμε.
- Μ. Μετράμε τις πλευρές και τις γωνίες του.
- Δ. Θα μπορούσατε τώρα να ισχυριστείτε με βεβαιότητα ότι τα δύο συγκεκριμένα τρίγωνα που έχετε είναι μεταξύ τους ίσα;
- Μ. Βεβαίως: *Τα δύο τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν αντίστοιχα τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις γωνίες τους επίσης ίσες μία προς μία.*
(Τέταρτος προσεγγιστικός ορισμός της ισότητας δυο τριγώνων)
- Δ. Θα ήθελα τώρα να θέσω τον τελευταίο προβληματισμό μου. Αν αυτό προέκυψε για την ισότητα των δύο συγκεκριμένων τριγώνων, τι θα είχαμε να πούμε για την ισότητα οποιωνδήποτε δύο άλλων τριγώνων;
- Μ. Αν σκεφτούμε λίγο θα καταλάβουμε ότι μια διαφορετική δυάδα ίσων τριγώνων, με τις ίδιες γωνίες, θα διέφερε από τη συγκεκριμένη στο ότι οι πλευρές τους θα είχαν μεγαλύτερα ή μικρότερα μεγέθη σε σχέση με τις πλευρές της αρχικής δυάδας. Αυτό όμως δεν θα επηρέαζε καθόλου τη σχέση ισότητας που θα είχαν μεταξύ τους τα

τριγωνα της δεύτερης δυάδας. Νομίζουμε ότι σ' αυτό δεν μπορεί κανείς να διαφωνήσει.

Δ. Σωστά. Η τελευταία διαπίστωσή μας οδηγεί σ' ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα. Να διατυπώσουμε έναν ορισμό για την ισότητα μεταξύ δύο τριγώνων ανεξάρτητα από το πόσο μεγάλες ή μικρές είναι οι πλευρές τους. Θα μπορούσατε να διατυπώσετε τώρα αυτόν τον ορισμό;

Μ. Βεβαίως: *Δύο οποιαδήποτε τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν τις αντίστοιχες πλευρές τους ίσες μια προς μια και τις αντίστοιχες γωνίες τους επίσης ίσες μια προς μια.*

(Ο ορισμός της ισότητας δυο τριγώνων)

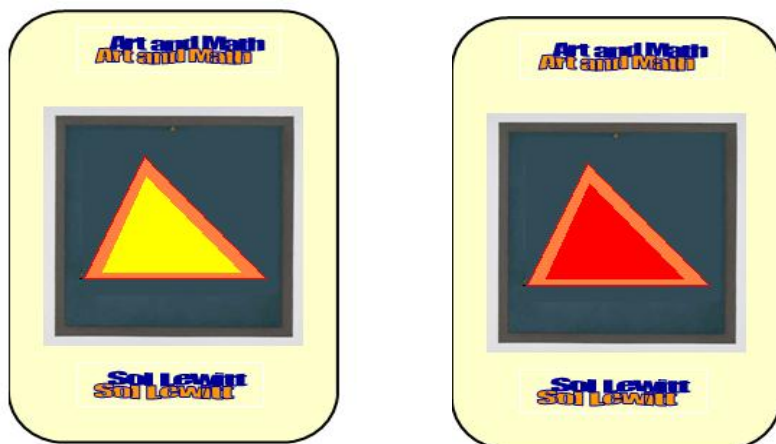
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΕΙΚΟΝΩΝ¹



Εικόνα 1

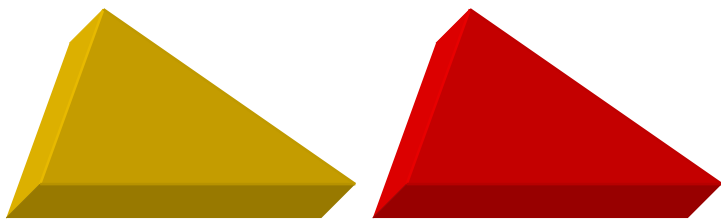
Κάρτα Κ1

Κάρτα Κ2

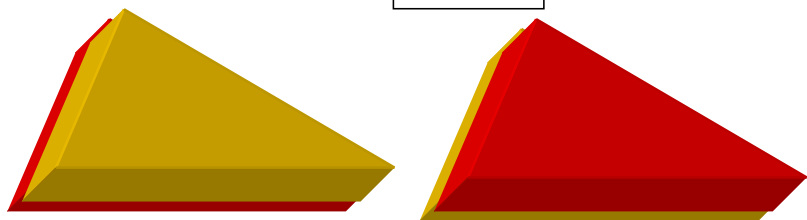


Εικόνα 2

¹ Τα τρίγωνα που εικονίζονται παραπλεύρως των εικόνων, όπως για παράδειγμα στις εικόνες 2 και 3, αντιστοιχούν στα τρίγωνα που εικονίζονται στις κάρτες. Ο λόγος της κατασκευής τους εξυπηρετεί την καλύτερη διαχείριση των όσων γράφονται στο άρθρο.



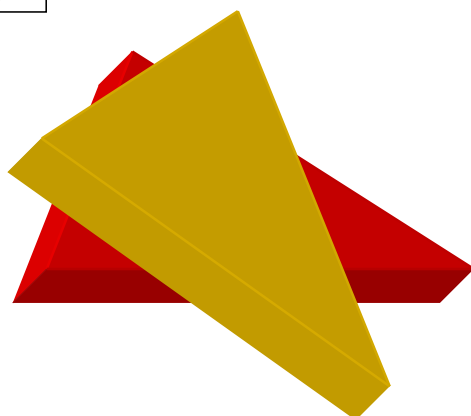
Εικόνα 3



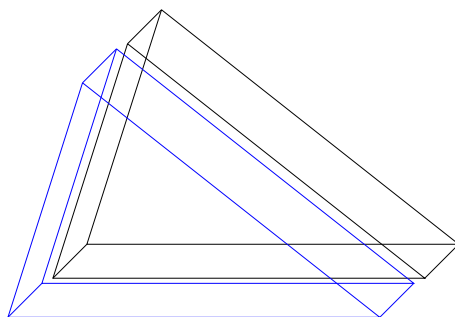
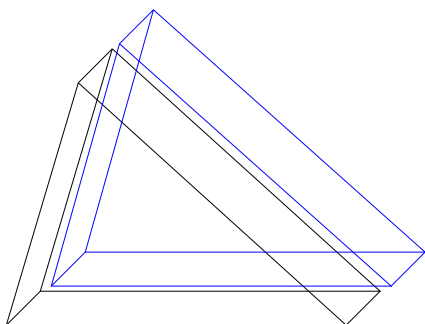
Εικόνα 4



Εικόνα 5



Εικόνα 6



Εικόνα 7

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Αριστοτέλης Όργανον, Αναλυτικά πρότερα Α,Β. Αρχαία Ελληνική Γραμματεία (1994). Εκδόσεις Κάκτος.
- Ascher, M. (2001). Learning with Games of Strategy from Mongolia *Teaching Children Mathematics* Vol. 8 No. 2
- Αυγητίδου, Σ. (επιμ.) (2001). Το παιχνίδι. Σύγχρονες ερευνητικές και διδακτικές προσεγγίσεις. ΤΥΠΩΘΗΤΩ Γιώργος Δάρδανος
- Barta, J & Schaelling, D. (1998). Games we Play: Connecting Mathematics and Culture in the Classroom *Teaching Children Mathematics* Vol. 4 No. 7
- Bishop, A. (1991). *Mathematical enculturation: a cultural perspective on mathematics education* Dordrecht: Kluwer Academic.
- Ceglowski, D. (1997). Understanding and Building upon Children's Perceptions of Play Activities in Early Childhood Programs *Early Childhood Education Journal*, Vol. 25, No. 2.
- Ernest, P. (1986). Games a rationale for their use in the teaching of mathematics in school *Mathematics in School* Vol. 15, No 1
- Lakatos, I. (1991) *Αποδείξεις και Ανασκευές*. Εκδόσεις Τροχαλία.
- Marland, H. (1986). Cheating *Mathematics in School* Vol 15, No 1.
- Ρεκαλίδου, Γ. (2004). Παιχνίδι και Μέθοδος Project στην Προσχολική Εκπαίδευση. Η συνδρομή του παιχνιδιού στην υλοποίηση των στόχων του Α.Π. μέσα από τη Μέθοδο Project *Ανοιχτό Σχολείο* Τ. 90
- Smith, P. (2001). Το παιχνίδι και οι χρήσεις του παιχνιδιού. Στο Αυγητίδου, Σ. (επιμ.). *Το παιχνίδι. Σύγχρονες ερευνητικές και διδακτικές προσεγγίσεις*. ΤΥΠΩΘΗΤΩ Γιώργος Δάρδανος
- Szendrei, J. (1996). *Concrete Materials in the Classroom* in Bishop, A.J. et al. (eds) *International Handbook of Mathematics Education* Kluwer Academic Publishers
- Σταμάτη Ε. (1975) *Ευκλείδου Γεωμετρία-Στοιχεία*. ΟΕΔΒ.

Tapson, F. (1997). Mathematical Games *Mathematics in school* Vol. 26 No 4

Williams, M. (1986). The Place of Games in Primary Mathematics *Mathematics in School* Vol.15, No 1 (pp. 19)

Wood, E. & Bennett, N. (2001). Οι θεωρίες των εκπαιδευτικών για το παιχνίδι. Κονστρουκτιβισμός ή κοινωνικός κονστρουκτιβισμός; Στο Αυγητίδου, Σ. (επιμ.). *Το παιχνίδι. Σύγχρονες ερευνητικές και διδακτικές προσεγγίσεις*. ΤΥΠΩΘΗΤΩ Γιώργος Δάρδανος

Άρης Μαυρομάτης

amavromatis@rhodes.aegean.gr

Σοφία Σταθοπούλου

sosta@rhodes.aegean.gr

[λευκή σελίδα]

ΟΙ ΚΑΝΟΝΕΣ ΤΟΥ ΠΑΙΧΝΙΔΙΟΥ: ΤΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Χρυσάνθη Σκουμπουρδή

Τ.Ε.Π.Α.Ε.Σ.

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το παιχνίδι είναι ένα πλαίσιο το οποίο μπορεί να υποστηρίξει την κριτική και τη δημιουργική μαθηματική εκπαίδευση γιατί μπορεί να βοηθήσει στην καλλιέργεια του συναισθηματικού τομέα και της επικοινωνίας, στην ανάπτυξη σχέσης με τον πολιτισμό, στη νοητική ανάπτυξη, στην ανάπτυξη (μαθηματικής) συζήτησης, καθώς και στην ενίσχυση της σχέσης με το ίδιο το γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών. Ένα είδος ομαδικού παιχνιδιού που μπορεί να συνεισφέρει στην εκπαιδευτική διαδικασία είναι και τα επιτραπέζια παιχνίδια.

Από τα σημαντικότερα στοιχεία των επιτραπέζιων παιχνιδιών είναι οι κανόνες. Οι κανόνες βοηθάνε τους μαθητές να κατανοήσουν το νόημα, το σκοπό και τη λειτουργία του παιχνιδιού και να επικοινωνήσουν με τους συμπαίκτες τους. Μπορεί να είναι απλοί, πολύπλοκοι, καλογραμμένοι ή όχι, εύκολο ή δύσκολο να μαθευτούν. Πολλές φορές είναι απαραίτητο να διαμορφωθούν με τέτοιο τρόπο ώστε να ανταποκρίνονται στις ανάγκες των παικτών. Ακόμα και η καλύτερη επιλογή παιχνιδιού μπορεί να οδηγήσει σε αποτυχία από τη μη κατανόηση των κανόνων.

Μέσω των κανόνων μπορεί να δημιουργηθούν, να αποδυναμωθούν ή/και να ενδυναμωθούν οι συνθήκες για δημοκρατική επικοινωνία στην τάξη των μαθηματικών. Για παράδειγμα, η δημιουργία κανόνων από τους μαθητές αναπτύσσει την αυτονομία τους. Εντούτοις, έχει φανεύει ότι η δημιουργία των κανόνων ενός παιχνιδιού δεν εξασφαλίζει απαραίτητα και δημοκρατικό παιχνίδι.

Με αφορμή τις παραπάνω σκέψεις πραγματοποιήθηκε έρευνα με χρήση ενός σχεδιασμένου επιτραπέζιου παιχνιδιού τακτικής που συνδυάζει τη στρατηγική, την τακτική και την τύχη. Ο σκοπός της έρευνας ήταν να διερευνηθεί η ικανότητα παιδιών Β' τάξης να σχεδιάσουν λειτουργικούς κανόνες για ένα 'ιδιαιτερο' παιχνίδι.

Εισαγωγή

Η χρήση του παιχνιδιού στην εκπαιδευτική διαδικασία δε θεωρείτο πάντα δεδομένη, αλλά διαμορφωνόταν κάθε φορά από τις εκάστοτε αντιλήψεις που επικρατούσαν για την παιδική ηλικία (Fournier, 2004), καθώς και από άλλους παράγοντες. Διακρίνονται, σε γενικές γραμμές, τρεις, χαρακτηριστικές, περίοδοι (Σκουμπουρδή & Καλαβάσης, 2007). Στην πρώτη περίοδο (έως το 18^ο αιώνα), το παιχνίδι διαχωρίζεται από την εκπαίδευση. Στη δεύτερη περίοδο (18^{ος} και κυρίως 19^{ος} αιώνας έως τη δεκαετία του '70) το παιχνίδι θεωρείται μία πολύ σοβαρή δραστηριότητα και συνδέεται εν μέρει με την εκπαιδευτική διαδικασία. Στην τρίτη περίοδο (από τη δεκαετία του '70 και πέρα), το παιχνίδι συνδέεται λειτουργικά με την ανάπτυξη του παιδιού και αποκτά εκπαιδευτική διάσταση ακόμη και στις επιμέρους αυθόρμητες μορφές του.

Η υιοθέτηση του παιχνιδιού στη διαδικασία διδασκαλίας/μάθησης των μαθηματικών, ακόμα και σήμερα, δεν είναι δεδομένη, αλλά εξαρτάται από το εκπαιδευτικό πλαίσιο μέσα στο οποίο λαμβάνει χώρα (Szendrei, 1996· Wood & Bennett, 2001) και διχάζει την ερευνητική κοινότητα. Από τη μια το παιχνίδι θεωρείται ως η βάση πολλών προγραμμάτων, ιδιαίτερα στα πρώτα χρόνια της εκπαίδευσης (Abbott, 1994· ΠΣΝ, 2011) και πολλοί είναι οι εκπαιδευτικοί που αναφέρουν, έστω και θεωρητικά, ότι το παιχνίδι προσφέρει το κατάλληλο πλαίσιο για μάθηση και θα ήθελαν να χρησιμοποιήσουν το παιχνίδι για υποστήριξη της διδασκαλίας. Από την άλλη, υπάρχουν απόψεις που υποστηρίζουν ότι το παιχνίδι δεν έχει θέση σε μια τάξη μαθηματικών (Szendrei, 1996). Πολλοί είναι οι εκπαιδευτικοί που ενώ αντιλαμβάνονται το σημαντικό ρόλο του παιχνιδιού στην εκπαιδευτική διαδικασία αντιμετωπίζουν δυσκολία στην ενσωμάτωσή του στη διδασκαλία τους (Griffiths, 1994) για τρεις κυρίως λόγους: 1. γιατί θεωρούν ότι οι μαθητές μπορεί να προσλάβουν λανθασμένη εικόνα για τη φύση των μαθηματικών, 2. γιατί σκέφτονται το χάος που μπορεί να δημιουργηθεί, μέσα στην τάξη, κατά τη διάρκειά του (Perry & Dockett, 2007) και 3. γιατί οι συνθήκες που μπορούν μέσω του παιχνιδιού να οδηγήσουν στη μάθηση δεν είναι πάντα εύκολο να εντοπιστούν (Bennett, Wood & Rogers, 1997). Όταν τα παιδιά παίζουν δε σημαίνει ότι αυτόματα μαθαίνουν. Η μάθηση δεν μπορεί κάθε φορά να θεωρείται δεδομένη και γνωστικές διαδικασίες που συνδέονται με

τη μάθηση δε γίνονται πολλές φορές φανερές μέσα στο παιχνίδι.

Όμως τι θέλουμε να μάθουν τα παιδιά σήμερα; Θέλουμε απλά και μόνο να μάθουν τους τυπικούς αλγόριθμους, τις μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες και να πραγματοποιούν μαθηματικούς υπολογισμούς ή θέλουμε να καλλιεργήσουν και άλλες δεξιότητες και ικανότητες που θα τους φανούν χρήσιμες στη μελλοντική τους πορεία; Κατά το Skovsmose (1994), ο κύριος στόχος μιας κριτικής μαθηματικής εκπαίδευσης, είναι η προώθηση της κριτικής συμμετοχής των μαθητών/πολιτών στην κοινωνία, μέσω της καλλιέργειας της ικανότητας διαπραγμάτευσης πολιτικών, οικονομικών και περιβαλλοντικών ζητημάτων τα οποία υποστηρίζονται από τα μαθηματικά. Για μια αποτελεσματική διδασκαλία των μαθηματικών η τάξη αντιμετωπίζεται ως κοινότητα μάθησης όπου αναπτύσσεται μαθηματικός διάλογος και ο/η εκπαιδευτικός ενθαρρύνει την έκφραση των ιδεών και των στρατηγικών των παιδιών και την επικέντρωση στις μεγάλες ιδέες των μαθηματικών, χρησιμοποιεί άτυπες μεθόδους αξιολόγησης για την υποστήριξη των διδακτικών του/ης αποφάσεων, διευκολύνει τους μαθητές να δρουν και να σκέφτονται. Μια ποιοτική διδασκαλία κατά την Brown (1998) περιλαμβάνει ερωτήσεις υψηλού επιπέδου, ανάπτυξη της σκέψης, πρακτική δράση, σύνδεση νοημάτων, μαθηματικών ιδεών και περιεχομένων, λύση προβλήματος, συνεργατική λειτουργία της τάξης, παραχώρηση αυτονομίας στα παιδιά για την ανάπτυξη ιδεών και μεθόδων. Ο D'Ambrosio (2011), υιοθετώντας ένα νέο τρόπο συλλογισμού για τη μαθηματική εκπαίδευση τονίζει ότι το πιο σημαντικό μέλημα της διδασκαλίας των μαθηματικών είναι η εξασφάλιση της πρόσβασης και της συμμετοχής με την ευρεία έννοια, δηλαδή, η επίτευξη της ευημερίας η οποία περιλαμβάνει τα βασικά συστατικά για μια καλή ζωή: την ελευθερία και την επιλογή, την υγεία και τη σωματική ευεξία, τις καλές κοινωνικές σχέσεις, την ασφάλεια, την ψυχική ηρεμία και την πνευματική εμπειρία. Ισχυρίζεται ότι τα παιδιά πρέπει να είναι προετοιμασμένα για ένα μέλλον που δεν μπορούμε να προβλέψουμε. Το να προετοιμάζουμε τα παιδιά να γνωρίζουν άριστα τα παρωχημένα μαθηματικά είναι σαν να τα προετοιμάζουμε οριακά για το μέλλον λόγω της παράκαιρης γνώσης που θα κατέχουν και αυτό πρέπει να αποφευχθεί. Υποστηρίζει την άποψη της διδασκαλίας των μαθηματικών ως στρατηγικής για καλή

εκπαίδευση—αναγνωρίζοντας την ύπαρξη διαφορετικών ενδιαφερόντων, διαφορετικών βαθμών δημιουργικότητας και διαφορετικών ταλέντων μεταξύ των παιδιών—και όχι τη χρήση της εκπαίδευσης ως στρατηγικής για τη διδασκαλία των μαθηματικών.

Το παιχνίδι είναι ένα πλαίσιο το οποίο μπορεί να υποστηρίξει την κριτική και δημιουργική μαθηματική εκπαίδευση (Σκουμπουρδή, 2010), γιατί μπορεί να βοηθήσει στην καλλιέργεια του συναισθηματικού τομέα και της επικοινωνίας (Caldwell, 1998· Ceglowski, 1997· Hansen, 2005· Heaslip, 1994· Perry & Dockett, 2007), στην ανάπτυξη σχέσης με τον πολιτισμό (Ascher, 2001· Barta & Schaelling, 1998· Bishop, 1991· Σταθοπούλου, 2005), στη νοητική ανάπτυξη (Wolfgang & Stakenas, 1985), στην ανάπτυξη (μαθηματικής) συζήτησης (Skoumpourdi, Kafoussi & Tatsis, 2009· Tatsis, Kafoussi & Skoumpourdi, 2008), καθώς και στην ενίσχυση της σχέσης με το ίδιο το γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών (Caswell & Nisbet, 2005· Epstein, Gelfand & Lock, 1998· Ernest, 1986· Gerdes, 2001· Kamii & Rummelsburg, 2008· Olson, 2007· Szendrei, 1996· Smith, 2001).

Σύμφωνα με τον Tapson (1997), πρέπει να παίζουμε παιχνίδια στις τάξεις των μαθηματικών γιατί στην πλειοψηφία τους ενσωματώνουν μαθηματικά, γιατί το παιχνίδι ενεργοποιεί το κίνητρο και το ενδιαφέρον των μαθητών και γιατί η ενασχόληση με ποικίλα παιχνίδια βοηθάει στην κατανόηση μιας κατάστασης πάνω στην οποία εργαζόμαστε. Για να είναι όμως εκπαιδευτικά χρήσιμο ένα (ομαδικό) παιχνίδι πρέπει (Kamii & DeVries, 1980, σ. 4): 1. να προτείνει κάτι ενδιαφέρον που να προκαλεί τα παιδιά να ασχοληθούν με αυτό, 2. να δίνει τη δυνατότητα στα παιδιά να κρίνουν την επιτυχία τους και 3. να επιτρέπει σε όλους τους παίκτες να συμμετέχουν ενεργά σε όλη τη διάρκεια του παιχνιδιού.

Ένα είδος ομαδικού παιχνιδιού που μπορεί να συνεισφέρει στην εκπαιδευτική διαδικασία είναι το επιτραπέζιο παιχνίδι (Σκουμπουρδή, 2009α). Από τα σημαντικότερα στοιχεία των επιτραπέζιων παιχνιδιών τα οποία καθορίζουν και την επιτυχία τους είναι οι κανόνες. Οι κανόνες είναι σχεδιασμένοι για να ρυθμίζουν την έκβαση του παιχνιδιού, καθώς και για να παρέχουν στους παίκτες συγκεκριμένη εμπειρία η οποία ορίζεται από τον κατασκευαστή του. Στο παιχνίδι το

παιδί πρέπει να συσχετίσει τις επιθυμίες και τις ανάγκες του με τους κανόνες του παιχνιδιού ενεργώντας εναντίον της άμεσης παρόρμησής του. Σε κάθε του βήμα έρχεται αντιμέτωπο με μια σύγκρουση μεταξύ των κανόνων του παιχνιδιού και αυτού που θα έκανε αν μπορούσε να δράσει αυθόρμητα (Hannikainen, 2001). Οι κανόνες βοηθάνε τους παίκτες να κατανοήσουν το νόημα, το σκοπό και τη λειτουργία του παιχνιδιού και να επικοινωνήσουν με τους συμπαίκτες τους κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού (Bruce, 1991). Επιπλέον, βοηθούν τους παίκτες να εξοικειωθούν με μικροσυστήματα αξιωμάτων (Szendrei, 1996). Οι κανόνες μπορεί να είναι απλοί, πολύπλοκοι, καλογραμμένοι ή όχι, εύκολο ή δύσκολο να μαθευτούν. Σε κάθε περίπτωση είναι απαραίτητο να διαβαστούν, να εξηγηθούν και να εξασφαλιστεί ότι έγιναν κατανοητοί από όλους τους παίκτες, πριν αρχίσει το παιχνίδι. Ακόμα και η καλύτερη επιλογή παιχνιδιού μπορεί να οδηγήσει σε αποτυχία από τη μη κατανόηση των κανόνων. Σύμφωνα με την Olson (2007) όταν επιλέγουμε ένα παιχνίδι για την τάξη θα πρέπει πρώτα να το παίξουμε εμείς για να εξοικειωθούμε με τους κανόνες και τις ιδιαιτερότητές τους, καθώς και για να εντοπίσουμε τις μαθηματικές ιδέες που ενσωματώνει και το πώς μπορεί να αναδυθούν από το παιχνίδι.

Μέσω των κανόνων μπορεί να δημιουργηθούν, να αποδυναμωθούν ή/και να ενδυναμωθούν οι συνθήκες για δημοκρατική επικοινωνία στην τάξη των μαθηματικών. Για παράδειγμα, η εξήγηση των κανόνων ενός παιχνιδιού που επιλέγεται να παιχτεί σε μια τάξη μαθηματικών για πρώτη φορά γίνεται συνήθως από τον/ην εκπαιδευτικό και αυτό δημιουργεί σχέσεις εξουσίας μεταξύ εκπαιδευτικού και μαθητών (Kamii & De Clark, 1985). Συχνά οι εκπαιδευτικοί επιβάλλουν συμβατικούς προκατασκευασμένους κανόνες τους οποίους θεωρούν σωστούς. Άλλες φορές διαμορφώνουν τους κανόνες με τέτοιο τρόπο ώστε να ανταποκρίνονται στις ανάγκες των μαθητών τους. Αν οι κανόνες είναι πολύ δύσκολοι απλοποιούνται έτσι ώστε να μη δημιουργηθεί απογοήτευση σε κάποιους/ες μαθητές/ριες. Αν οι κανόνες είναι πολύ απλοί διαμορφώνονται ανάλογα με τις ανάγκες και τις ικανότητες των μαθητών/ριών ώστε να έχει ενδιαφέρον το παιχνίδι.

Ο τρόπος διαχείρισης των κανόνων, υφιστάμενων ή σχεδιασμένων, μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους. Η διαφορετική διαχείριση, από ενήλικες (νηπιαγωγό και μητέρα), των κανόνων ενός επιτραπέζιου

παιχνιδιού επηρέασε τον τρόπο συμμετοχής των παιδιών σε αυτό (Skoumpourdi, 2011). Οι πρακτικές που χρησιμοποίησαν η νηπιαγωγός και η μητέρα όταν οργάνωσαν το επιτραπέζιο παιχνίδι είχαν κοινό σκοπό, να δώσουν την ευκαιρία στα παιδιά να αναπτύξουν ποικίλες στρατηγικές και να κάνουν μια πετυχημένη κίνηση. Οι πρακτικές τους διέφεραν κυρίως ως προς την ποιότητα της παρέμβασης και τη χρονική στιγμή και σχετιζόνταν με τη μέθοδο διαχείρισης των κανόνων του παιχνιδιού. Όταν η παρέμβαση γινόταν νωρίς, έδινε στο παιδί την ευκαιρία να αναπτύξει μια στρατηγική. Όταν ήταν πολύ κατευθυνόμενη δεν άφηνε στο παιδί το περιθώριο να σκεφτεί. Όταν γινόταν με μεγάλη καθυστέρηση δεν ήταν χρήσιμη για το συγκεκριμένο παιδί, εφόσον είχε ολοκληρώσει την κίνησή του. Ως προς την ποιότητα των παρεμβάσεων διακρίθηκαν πέντε επίπεδα. Στο πρώτο επίπεδο η ενήλικη δε παρενέβαινε με κάποιο τρόπο. Στο δεύτερο επίπεδο η ενήλικη εμποδίζει το παιδί να ενεργήσει βασισμένο στην παρόρμηση. Χαρακτηριστική ήταν η έκφραση «πριν κινήσεις τα πιόνια σου σκέψου τι δυνατότητες έχεις, τι μπορείς να κάνεις». Στο τρίτο επίπεδο η ενήλικη παρενέβαινε μετά την ολοκλήρωση της κίνησης του παιδιού θυμίζοντάς του τους κανόνες ή προτείνοντας εναλλακτικές κινήσεις. Στο τέταρτο επίπεδο η ενήλικη επαναλάμβανε όλους τους κανόνες ή μέρος τους στο παιδί που ετοιμαζόταν να παίξει. Στο πέμπτο επίπεδο η ενήλικη υποδείκνυε/πρότεινε στο παιδί συγκεκριμένη κίνηση. Από τα παραπάνω φάνηκε ότι τα διαφορετικά παιδιά είχαν διαφορετικές εμπειρίες που σχετιζόνταν με τη διαχείριση των κανόνων, όταν έπαιζαν το ίδιο παιχνίδι.

Από την άλλη η δημιουργία κανόνων από τους ίδιους τους μαθητές, σύμφωνα με τις Kamii και De Clark (1985), μειώνει την εξουσία των εκπαιδευτικών, αναπτύσσει την αυτονομία των παιδιών και μεταφέρει την ευθύνη της επίλυσης τυχόν διαφωνιών που σχετίζονται με τους κανόνες στα ίδια τα παιδιά. Σε έρευνα (Skoumpourdi, 2012) έγινε η υπόθεση ότι η παραγωγή, από τα παιδιά μιας Α' τάξης δημοτικού και της εκπαιδευτικού τους, κανόνων, για ένα επιτραπέζιο παιχνίδι που συνδύαζε τύχη και γνώσεις, ίσως να δημιουργεί τις συνθήκες για δημοκρατική επικοινωνία στην τάξη και για δημοκρατικό παιχνίδι. Στη συγκεκριμένη έρευνα καταγράφηκαν οι επικοινωνιακές πρακτικές των παιδιών και της εκπαιδευτικού κατά τη δημιουργία των κανόνων. Επίσης διερευνήθηκε αν οι κατασκευασμένοι κανόνες οδήγησαν σε

δημοκρατικό παιχνίδι. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι ενώ η επικοινωνία για τη δημιουργία των κανόνων έλαβε χώρα σε ένα δημοκρατικό περιβάλλον αυτό δεν είχε ως αποτέλεσμα ένα δημοκρατικό παιχνίδι. Φάνηκε ότι τα παιδιά είχαν πράγματι την ικανότητα να φτιάξουν τους δικούς τους κανόνες, προβληματίστηκαν για το τι είναι δίκαιο, κατανόησαν εύκολα το παιχνίδι και εξοικειώθηκαν με αυτό. Πάραυτα οι κανόνες δεν ήταν πάντα ξεκάθαροι και ακριβείς για όλους. Κάποιοι κανόνες ήταν επηρεασμένοι από τις διαφορετικές ανάγκες, επιλογές και εμπειρίες του παιδιού που τους κατασκεύαζε. Οι κανόνες των παιδιών αφορούσαν κυρίως το πώς θα αρχίσει και το πώς θα συνεχίσει το παιχνίδι. Σημαντικά ερωτήματα όπως πώς τελειώνει το παιχνίδι, πώς εμπλέκονται τα διάφορα υλικά που παρέχονται στο παιχνίδι ποια είναι τα δικαιώματα και οι υποχρεώσεις των παικτών, ποιος είναι ο νικητής, τι επιλογές έχει κάθε παίκτης/τρια, δεν απαντήθηκαν από τους κατασκευασμένους κανόνες, αλλά κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού. Πολλές επικοινωνιακές στρατηγικές αναπτύχθηκαν μεταξύ εκπαιδευτικού και μαθητών/ριών κατά τη δημιουργία των κανόνων οι οποίες συνέβαλαν στην εμφάνιση δημοκρατικών πρακτικών. Οι μαθητές/ριες πρότειναν κάποιο κανόνα, αιτιολογώντας τον, ο οποίος γινόταν ή δε γινόταν δεκτός από τους τους/ις άλλους/ες μαθητές/ριες. Ό,τι προέκυπτε κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού διευκρινιζόταν από τους/ις μαθητές/ριες που έπαιζαν. Η εκπαιδευτικός εξασφάλιζε τη συμφωνία όλων των μαθητών για ένα κανόνα και βοηθούσε το/η μαθητή/ρια να τον γράψει (κάθε κανόνας συμφωνήθηκε να γράφεται από διαφορετικό/ή μαθητή/ρια) με το να τον επαναλαμβάνει. Έθετε διευκρινιστικές ερωτήσεις τσεκάροντας τους κανόνες και προτρέποντας τους/ις μαθητές/ριες να συμμετέχουν. Ωστόσο παρόλο που η δημιουργία των κανόνων από τα παιδιά εξασφάλισε την καλή επικοινωνία στην τάξη και δίκαιο παιχνίδι σε ότι είχε σχέση με τους κανόνες του παιχνιδιού για τους οποίους όλοι είχαν συμφωνήσει, δεν εξασφάλισε και δημοκρατικό παιχνίδι ως προς τους κανόνες ηθικής. Ο σεβασμός στη σειρά του συμπαίκτη και στη ρίψη του ζαριού δεν ήταν πάντα δεδομένος για όλα τα παιδιά.

Συνεχίζοντας τη διερεύνηση των παραγόντων που επηρεάζονται από τους κανόνες του παιχνιδιού και τη σύνδεσή τους με τη μαθηματική εκπαίδευση πραγματοποιήθηκε έρευνα με χρήση ενός επιτραπέζιου παιχνιδιού που συνδυάζει τη στρατηγική, την τακτική και την τύχη. Ο

σκοπός της έρευνας ήταν να διερευνηθεί η ικανότητα παιδιών Β' τάξης να σχεδιάσουν λειτουργικούς κανόνες για ένα 'ιδιαιτερο' παιχνίδι. Τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν ήταν τα εξής: 1) Ποιες επικοινωνιακές πρακτικές χρησιμοποιήθηκαν κατά το σχεδιασμό των κανόνων και κατά το παιχνίδι; 2) Αναδύεται από τους κανόνες που δημιούργησαν τα παιδιά η στρατηγική και η τακτική που απαιτούν οι υφιστάμενοι κανόνες του παιχνιδιού;

Μεθοδολογία

Παρόλη την ποικιλία των επιτραπέζιων παιχνιδιών που διατίθενται στο εμπόριο συχνά προκύπτει ως ανάγκη ο σχεδιασμός παιχνιδιών που να ανταποκρίνονται στις διαφορετικές συνθήκες κάθε τάξης καθώς και στις ιδιαίτερες επιδιώξεις κάθε εκπαιδευτικού για την εξυπηρέτηση συγκεκριμένων στόχων και την υποστήριξη της μαθηματικής εκπαίδευσης των μαθητών τους (Σκουμπουρδή, 2010). Τα παιχνίδια αυτά μπορεί να δημιουργηθούν από τον/ην εκπαιδευτικό, από τα παιδιά, από τους γονείς ή/και από τη συνεργασία τους. Όταν οι μαθητές/ριες κατασκευάζουν οι ίδιοι/ες παιχνίδια και ασχολούνται με αυτά, φαίνεται ότι κατανοούν περισσότερο τις διαδικασίες που εφαρμόζουν (Barta & Schaelling, 1998).

Τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των επιτραπέζιων παιχνιδιών δηλαδή η θεματολογία τους, το ταμπλό, η διαδρομή, τα πιόνια, οι κάρτες και τα άλλα αντικείμενα που καθορίζουν τη λειτουργία τους, οι κανόνες, καθώς και τα μέσα τυχαιότητας (μέσα που χρησιμοποιούνται για να οριστεί η σειρά των παικτών και η συνέχεια του παιχνιδιού) είναι στοιχεία που λαμβάνονται υπόψη κατά το σχεδιασμό, την ανάπτυξη και τη διαχείρισή τους. Επιπλέον, διαμορφώνουν την πρώτη εικόνα για το παιχνίδι και δημιουργούν την επιθυμία για την επιλογή του. Η απλότητα ή η πολυπλοκότητα των χαρακτηριστικών του παιχνιδιού το κάνουν εύκολο ή δύσκολο. Απλό ταμπλό, συγκεκριμένη διαδρομή, λειτουργικά πιόνια και κατανοητοί κανόνες κάνουν ένα παιχνίδι να διαφέρει από ένα άλλο με σύνθετο ταμπλό, πολύπλοκη διαδρομή, μη λειτουργικά πιόνια και ακατανόητους κανόνες.

Με βάση τα παραπάνω χαρακτηριστικά σχεδιάστηκε το παιχνίδι «Ο γάτος και τα ποντίκια» (Σκουμπουρδή, 2009β΄ Σκουμπουρδή, 2010). Το ταμπλό του παιχνιδιού αποτελείται από πλαίσια με διάταξη 10Χ7, χωρίς αρίθμηση (Φωτ. 1). Τα πιόνια του είναι τέσσερα ποντίκια σε διαφορετικά χρώματα. Υπάρχει επίσης ένα πιόνι γάτος και ένα καλάθι με τυράκια τα οποία ανήκουν σε όλους τους παίκτες και κινούνται από κάθε παίκτη, στη σειρά του. Οι κινήσεις των παικτών ορίζονται με το ζάρι και είναι ελεύθερες πάνω στο ταμπλό. Κάθε παίκτης/ρια ορίζει τη διαδρομή του προχωρώντας. Σε κάθε γύρο αποφασίζει ποια είναι η καλύτερη κατεύθυνση για να κινήσει το ποντίκι του/ης ώστε να απομακρυνθεί από το γάτο, να πλησιάσει τα τυράκια, αλλά και να μετακινήσει το γάτο προς τα αντίπαλα ποντίκια. Τα παιδιά κινώντας το ποντίκι τους, πρέπει να φτιάσουν τα τυράκια για να φάνε (στόχο έχουν να μαζέψουν όσο περισσότερα τυράκια μπορούν) και να αποφύγουν το γάτο. Κινώντας το γάτο προσπαθούν να τον οδηγήσουν κοντά στα αντίπαλα ποντίκια (στόχο έχουν να ‘φάνε’ τα αντίπαλα ποντίκια και να τα οδηγήσουν στην αφετηρία). Κινώντας τα τυράκια προσπαθούν να τα φέρουν κοντά στο δικό τους ποντίκι. Το παιχνίδι τελειώνει μόλις ‘φαγωθεί’ και το τελευταίο τυράκι από το δοχείο. Νικητής/ες είναι ο/οι παίκτης/ες που έχει/ουν συγκεντρώσει τα περισσότερα τυράκια.



Φωτ. 1 «Ο γάτος και τα ποντίκια»

«Ο γάτος και τα ποντίκια» είναι ένα παιχνίδι που σχετίζεται με τις εμπειρίες των παιδιών αυτής της ηλικίας, από τα ομότιπλα κινούμενα σχέδια. Οι ήρωες του παιχνιδιού είναι ο γάτος και τα ποντίκια, που βρίσκονται σε διαρκές κυνήγι. Αυτή τη φορά βρέθηκαν στο χώρο της τραπεζαρίας με τα ποντίκια να προσπαθούν να φάνε όσο περισσότερα τυράκια μπορούν αποφεύγοντας συγχρόνως το γάτο που τα κυνηγάει σε όλη τη διάρκεια του παιχνιδιού. Η περιγραφή των κανόνων του παιχνιδιού στα παιδιά, λόγω ίσως και της ιδιαιτερότητάς του—ιδιόμορφο παιχνίδι με ειδικές απαιτήσεις όπως η κίνηση τριών πιονιών ταυτόχρονα με διαφορετικό σκοπό—δημιουργεί αρχικά την εντύπωση ενός δύσκολου παιχνιδιού με πολύπλοκους κανόνες που πρέπει να αφιερωθεί ολόκληρη διδασκαλία για την κατανόησή τους. Όμως τα άλλα στοιχεία του παιχνιδιού απλοποιούν την κατάσταση. Πιο συγκεκριμένα η θεματολογία φάνηκε οικεία στα παιδιά εφόσον γάτος, ποντίκια και τυριά συνδέονται με μια ιδιαίτερη σχέση που τους είναι γνωστή και μπορούν να τη χρησιμοποιούν κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού. Η δομή του ταμπλό με τα πλαίσια δε δημιουργεί δυσκολία εφόσον η κίνηση είναι ελεύθερη προς κάθε κατεύθυνση. Η ιδιαιτερότητα του παιχνιδιού, εκτός από την ελεύθερη κίνηση των πιονιών πάνω στο ταμπλό είναι ότι κάθε παίκτης μετακινεί τρία πιόνια ταυτόχρονα με διαφορετικό στόχο. Είναι ένα παιχνίδι που συνδυάζει τη στρατηγική¹ και την τακτική², αλλά εξαρτάται και από την τύχη³.

Παρόλο που σύμφωνα με την Olson (2007), τα παιχνίδια τύχης αρέσουν στα νήπια και στα παιδιά της Α' και Β' τάξης δημοτικού και τα παιχνίδια στρατηγικής προτιμούνται από παιδιά της Γ' και Δ' τάξης δημοτικού, το παιχνίδι «Ο γάτος και τα ποντίκια» φάνηκε να είναι

¹ Τα παιχνίδια στρατηγικής παρέχουν κίνητρο στον παίκτη να σκεφτεί εναλλακτικές κινήσεις, λαμβάνοντας υπόψη και τι μπορεί να κάνει ο αντίπαλος, ώστε να μεγιστοποιήσει την πιθανότητα επιτυχίας του. Απαιτούν από τον παίκτη να καταστρώσει ένα σχέδιο πάνω στο οποίο θα βασιστεί, πριν αρχίσει το παιχνίδι.

² Στα παιχνίδια τακτικής ο παίκτης ενεργεί χωρίς ένα προκαθορισμένο σχέδιο (Levy, 2002). Είναι αναγκαίο, σε τέτοιου είδους παιχνίδια, ο παίκτης να είναι ικανός να σκέφτεται γρήγορα και να διαπραγματεύεται με συνθήκες που συνεχώς αλλάζουν. Σε αυτή την περίπτωση, δεν μπορεί ο παίκτης να μένει σταθερός σε ένα τρόπο παιχνιδιού. Τα παιχνίδια τακτικής συνήθως παρουσιάζονται, στη βιβλιογραφία, ως παιχνίδια στρατηγικής

³ Τα παιχνίδια τύχης εξαρτώνται από τη σύμπτωση και όχι από την ικανότητα. Στα παιχνίδια αυτά εφαρμόζεται αυτό που υπαγορεύεται από την τύχη.

κατάλληλο ακόμα και για νήπια (Σκουμπουρδή, 2010). Η εξήγηση των κανόνων έγινε από τη νηπιαγωγό. Τα νήπια κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού είχαν στρατηγική και χρησιμοποίησαν εντυπωσιακή τακτική. Κινούσαν τα πιόνια τους (ποντικό, γάτο και τυράκια) με τέτοιο τρόπο ώστε να απομακρύνουν το ποντίκι τους από το γάτο, να πλησιάσουν το γάτο στα αντίπαλα ποντίκια καθώς και να πλησιάσουν το καλάθι με τα τυράκια προς το δικό τους ποντίκι. Κάποια παιδιά, επικεντρώθηκαν περισσότερο στο να φάνε όσο περισσότερα τυράκια μπορούσαν. Δεν εκμεταλλεύονταν τη γάτα ώστε να καθυστερήσουν τα αντίπαλα ποντίκια, οδηγώντας τα στην αφετηρία.

Για τις ανάγκες της συγκεκριμένης έρευνας το παιχνίδι δόθηκε σε παιδιά (10 παιδιά: 5 αγόρια και 5 κορίτσια) μιας Β' τάξης δημοτικού, μετά το ωρολόγιο πρόγραμμα, για να παίξουν αφού δημιουργήσουν τους δικούς τους κανόνες. Μαζί με το παιχνίδι δόθηκαν δύο ζάρια—ένα κόκκινο με τους αριθμούς 2, 3, 4, 5 και ένα μπλε με κουκίδες—για να αποφασίσουν ποιο/α θα χρησιμοποιήσουν.

Αποτελέσματα

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται σε δύο ενότητες σύμφωνα με τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν. Η πρώτη ενότητα αφορά στις επικοινωνιακές πρακτικές που χρησιμοποιήθηκαν κατά το σχεδιασμό των κανόνων και κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού. Η δεύτερη ενότητα αφορά στη συσχέτιση των υφιστάμενων και των κατασκευασμένων κανόνων ως προς τη λειτουργικότητά τους και συγκεκριμένα για το αν αναδύεται από τους κανόνες που σχεδίασαν τα παιδιά η στρατηγική και η τακτική που απαιτούν οι υφιστάμενοι κανόνες του παιχνιδιού.

(1α) Επικοινωνιακές πρακτικές κατά το σχεδιασμό των κανόνων

Κατά το σχεδιασμό των κανόνων κάθε παιδί είχε την ελευθερία να εκφράσει τη δική του άποψη. Προτείνοντας και αποφασίζοντας τα παιδιά για τους κανόνες του παιχνιδιού άλλες φορές είχαν τη συμφωνία των συμμαθητών τους και άλλες όχι (Οι αριθμοί στις παρενθέσεις αντιστοιχούν στις εναλλαγές των ομιλητών—οι αριθμοί στις παρενθέσεις με έντονη γραφή αντιστοιχούν στην εκπαιδευτικό. Όπου Ε: εκπαιδευτικός, όπου Μ1-Μ9: μαθητές, όπου Μ2-Μ10:

μαθήτριες, όπου ...: απάντηση από πολλούς μαθητές ταυτόχρονα):

(5) M3: Μπορούμε να παίξουμε δύο-δύο να πετάει καθένας μια φορά το ζάρι να διαλέγουμε άλλους παίκτες ένας μένει έξω και όποιος τερματίσει πρώτος βάζει άλλο έναν παίκτη μπροστά.

(6) M1: Έτσι παίζεται το παιχνίδι που ξέρεις εσύ. Αυτό το παιχνίδι έχει πιόνια, ζάρια, τυριά, μπορούμε να βάλουμε τα τυριά κάπου και να προχωράμε και να τρώμε και να πηγαίνουμε πέντε βήματα πάνω.

(9) M8: Όχι δεν είναι δίκαιο γιατί αν είναι κοντά στον τερματισμό και κάνει πέντε βήματα έτσι (δείχνει την κατεύθυνση) θα το νικήσει πανεύκολα και αυτό δεν είναι τόσο δίκαιο.

(34) E: Ποιο ζάρι θέλετε να χρησιμοποιήσουμε;

(35) M1: Και τα δύο.

(36) ...: Όχι, το ένα έχει τελίτσες και το άλλο αριθμούς.

(37) M7: Ναι, αλλά το ίδιο είναι.

(52) M3: Και θα είναι η γάτα κάποιος και τα ποντίκια θα προχωράνε στον τερματισμό για να μην τα πιάσει η γάτα. Αν τα πιάσει η γάτα δηλαδή αν είναι η γάτα και το ποντίκι στο ίδιο τετραγώνκι θα βγαίνει έξω ο παίκτης. Και αν πάει το ποντίκι στον τερματισμό, κερδίζει το ποντίκι, αν πάει η γάτα στον τερματισμό, κερδίζει η γάτα.

...

(56) M1: Όχι ... Γιατί δεν είναι δίκαιο να είναι τέσσερις εναντίον ενός.

(57) M5: Δεν είναι έτσι είπαμε κάθε ποντίκι θα προσπαθεί να ξεφύγει από τη γάτα.

...

(59) M1: Ναι αλλά η γάτα να μην πηγαίνει στα τυριά, γιατί οι γάτες δεν τρώνε τυριά. Αν πάει στα τυριά να κάνει ένα βήμα πίσω. Η γάτα θα κυνηγάει τα ποντίκια.

(63) M1: Αν η γάτα πάει στα τυριά θα κάνει ένα βήμα πίσω, ενώ το ποντικάκι αν πάει στα τυριά θα φάει ένα τυράκι να πάρει δύναμη και θα πάει και ένα βήμα μπροστά.

(64) M2: Μπορεί το ποντίκι να κάνει τέσσερα βήματα.

(65) M3: Όχι, γιατί δε θα προλαβαίνει η γάτα, για αυτό ένα (βήμα εννοεί) για να προλαβαίνει.

(67) M4: Τα τυριά να είναι στο τέλος.

(68) M5: Όχι, γιατί αν είναι στο τέλος θα είναι δύσκολο, ενώ αν είναι ανακατεμένα στη μέση στην άκρη παντού είναι πιο εύκολο.

Τα παιδιά κατά την επικοινωνία τους με τους συμμαθητές τους και με την εκπαιδευτικό έπαιρναν πρωτοβουλίες και αναλάμβαναν αρμοδιότητες:

(10) Ε: Ποιος θα γράφει τους κανόνες που θα αποφασίζουμε;

(11) ...: Εγώ.

(95) Ε: Τι προτείνετε; Πώς μπορούμε να παίξουμε;

(96) M1: *(προτείνει να το παίξουμε με τη σειρά που κάθονται στα θρανία-ίσως επειδή εκείνος κάθεται μπροστά)*

(97) M3: Όχι να παίξουμε σε ομάδες, πέντε πιόνια (4 ποντίκια και 1 γάτα) πέντε παίκτες, 1,2,3,4,5 και 1,2,3,4,5 και μετά οι υπόλοιποι.

(98) M1: Όχι να παίξουμε δύο-δύο.

(99) ...: Όχι αφού έχει πολλά πιόνια.

(104) M2: Εγώ δεν είμαι έτοιμη να παίξω γιατί δεν κατάλαβα πώς παίζεται;

... ... προετοιμάζεται η πρώτη ομάδα με τους 5 παίκτες να παίξουν

(105) ...: και εγώ θέλω να παίξω και εγώ.

Τα παιδιά πολύ συχνά αιτιολογούσαν την επιλογή τους:

(40) E: Το κόκκινο το επιλέγετε για το χρώμα ή γιατί έχει πάνω αριθμούς;

(41) M5: Γιατί έχει πάνω αριθμούς.

(42) M6: Γιατί δε χρειάζεται να μετράμε γιατί έχει αριθμούς.

(43) M4: Άμα έχουμε το μπλε ζάρι και έρθει η σειρά κάποιου θα κάνουμε τόση ώρα να μετρήσουμε τις τελίτσες.

(55) E: Γιατί όχι;

(56) M1: Γιατί δεν είναι δίκαιο να είναι τέσσερις εναντίον ενός.

(57) M5: Δεν είναι έτσι, είπαμε κάθε ποντίκι θα προσπαθεί να ξεφύγει από τη γάτα.

...

(59) M1: Ναι αλλά η γάτα να μην πηγαίνει στα τυριά, γιατί οι γάτες δεν τρώνε τυριά. Αν πάει στα τυριά να κάνει ένα βήμα πίσω. Η γάτα θα κυνηγάει τα ποντίκια.

...

(65) M3: Όχι, γιατί δε θα προλαβαίνει η γάτα, για αυτό ένα (βήμα εννοεί) για να προλαβαίνει.

(87) E: Να περάσει όλα τα φαγητά, ε; και θα θυμόμαστε ποια φαγητά πέρασε ο καθένας;

(88) M2: Αυτά που αρέσουν στον καθένα.

Οι πρωτοβουλίες που έπαιρναν τα παιδιά καθώς και η αυτονομία τους σε πολλές δράσεις προήλθε από τον τρόπο που επέλεξε η εκπαιδευτικός να οργανώσει και να συντονίσει τη διαδικασία της δημιουργίας των κανόνων δίνοντας πρωτοβουλία στα παιδιά και ενισχύοντας την αυτονομία τους σε αποφάσεις και αρμοδιότητες:

(3) Ε: εσείς τώρα πρέπει να αποφασίσετε πώς μπορούμε να παίξουμε αυτό το παιχνίδι γιατί χάσαμε τους κανόνες. Μπορείτε να φτιάξετε εσείς κανόνες.

(10) Ε: Ποιος θα γράφει τους κανόνες που θα αποφασίζουμε;

...

(12) Ε: Μπορεί να γράφει όποιος θέλει.

(34) Ε: Ποιο ζάρι θέλετε να χρησιμοποιήσουμε;

(48) Ε: Τα ποντικάκια πώς θα τα χρησιμοποιήσουμε;

(62) Ε: Άρα τι κανόνα να γράψουμε;

(93) Ε: Νομίζετε ότι με αυτούς τους κανόνες μπορούμε να το παίξουμε;

...

(95) Ε: Τι προτείνετε; Πώς μπορούμε να παίξουμε;

(102) Ε: Ποιοι πέντε θα παίξουνε πρώτοι;

Επίσης, η εκπαιδευτικός προέτρεπε τα παιδιά να διευκρινίζουν θέματα που προέκυπταν και κανόνες που προτεινόταν ή λιγότερο συχνά, έδινε εκείνη τις απαραίτητες διευκρινίσεις:

(14) Ε: Ο πρώτος κανόνας ποιος είναι;

(15) Μ2: Όποιος ρίξει 1 ή 6 να αρχίζει πρώτος.

(16) Ε: Άρα ο πρώτος μας κανόνας είναι όποιος ρίξει 1 ή 6 παίζει πρώτος.

(17) Μ3: Εγώ δε συμφωνώ, έχω άλλο κανόνα. Να βάλουμε 20 τυριά και όποιος πάρει πρώτος 10 τυριά κερδίζει.

(18) Ε: Αυτός ο κανόνας δεν έρχεται σε αντίθεση με αυτό που είπε η συμμαθήτριά σου. Είναι ένας άλλος κανόνας. Άρα ένας άλλος κανόνας είναι ότι όποιος πάρει πρώτος 10 τυριά είναι ο νικητής.

(22) Ε: Άρα άλλος κανόνας θα είναι όποιος πάρει όλα τα τυριά είναι ο νικητής;

(24) Ε: Γίνεται όμως να πάρει όλα τα τυριά ένας παίκτης;

(26) Ε: Α! πολύ ωραίο αυτό! Μήπως να το κάνουμε έτσι; Μήπως να μετρήσουμε στο τέλος ποιος έχει τα περισσότερα τυριά και να είναι ο νικητής;

(30) Ε: Να γράψουμε τον κανόνα;

(32) Ε: Άρα γράφουμε: όταν τελειώσουν όλα τα τυριά μετράμε ποιος έχει πάρει τα περισσότερα... τα τυριά τα χρησιμοποιήσαμε τι άλλο υπάρχει για να χρησιμοποιήσουμε;

- (40) E: Το κόκκινο το επιλέγετε για το χρώμα ή γιατί έχει πάνω αριθμούς;
- (41) M5: Γιατί έχει πάνω αριθμούς.
- (42) M6: Γιατί δε χρειάζεται να μετράμε γιατί έχει αριθμούς.
- (43) M4: Άμα έχουμε το μπλε ζάρι και έρθει η σειρά κάποιου θα κάνουμε τόση ώρα να μετρήσουμε τις τελίτσες.
- (46) E: Πολύ ωραία, άρα γράφουμε κανόνα ότι θα παίξουμε με το κόκκινο ζάρι ... τι άλλο έχει το παιχνίδι που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε;
- (55) E: Γιατί όχι;
- (58) E: Άρα τα ποντίκια είναι τα πιόνια και τέσσερις παίκτες θα παίζουν με τα τέσσερα ποντίκια;
- (70) E: Πώς θα κινείται όμως η γάτα;
- (72) E: Δηλαδή εγώ έχω το πράσινο ποντίκι ρίχνω 6 προχωρώ 6 θέσεις το ποντίκι μου και μετά κινώ και τη γάτα;
- (74) E: ... και τα τυριά ποιος θα τα κινεί;
- (78) E: Άρα γράφουμε κανόνα Η γάτα θα είναι ξεχωριστός παίκτης. Και τι θα προσπαθεί να κάνει η γάτα ως ξεχωριστός παίκτης;
- (80) E: Ναι, αλλά τι σημαίνει νικάει; Δεν είπαμε ότι νικάει όποιος φάει τα περισσότερα τυριά;

- (81) ...: Ναι.
- (82) M1: Όποιος φτάσει πρώτος στο τέλος.
- (83) E: Ναι, αλλά εδώ δεν έχει καθορισμένη διαδρομή. Άρα άμα φτάσει πού;
- (84) M3: Στο τραπέζι.
- (85) E: Ναι αλλά με ποια διαδρομή; Δηλαδή εγώ μπορώ να πάρω μια σύντομη διαδρομή και να φτάσω αμέσως.
- (86) M2: Πρέπει να περάσει όλα τα φαγητά.
- (87) E: Να περάσει όλα τα φαγητά, ε; και θα θυμόμαστε ποια φαγητά πέρασε ο καθένας;
- (88) M2: Αυτά που αρέσουν στον καθένα.
- (89) E: Είναι όμως δίκαιο; Γιατί εγώ μπορώ να πω ότι μου αρέσει μόνο ένα φαγητό και να το περάσω και να φτάσω αμέσως στο τραπέζι, δε θα είναι λίγο άδικο;
- (90) M3: Ναι πάρα πολύ ... μπορεί όταν η γάτα πατάει στα φαγητά να κάνει 1 βήμα μπροστά όπως κάνει το ποντίκι όταν πάρει τυρί.
- (100) E: Λοιπόν να αρχίσουμε να παίζουμε για να δούμε αν οι κανόνες μας είναι εντάξει ή αν χρειάζεται να αλλάξουμε κάτι;

Επιπλέον, η εκπαιδευτικός εξασφάλιζε τη συμφωνία όλων των παιδιών για τους κανόνες που προτείνονταν:

- (7) E: Συμφωνείτε όλοι με αυτό τον κανόνα;
- (20) E: Πρέπει να συμφωνήσουμε. Όποιος πάρει όλα τα τυριά θα είναι ο νικητής ή όποιος πάρει πρώτος 10 τυριά;

(44) Ε: Άρα συμφωνούμε όλοι ότι θα χρησιμοποιήσουμε το κόκκινο ζάρι;

(50) Ε: Συμφωνείτε ότι θα τα χρησιμοποιήσουμε (εννοεί τα ποντίκια) σαν πιόνια;

(76) Ε: Συμφωνούμε όλοι ότι η γάτα θα είναι ξεχωριστός παίκτης;

(91) Ε: Αχ! μπερδεύτηκα λίγο με τους κανόνες, για διάβασέ μας Ευαγγελία να δούμε συμφωνούμε όλοι με τους κανόνες;

(1β) Επικοινωνιακές πρακτικές κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού

Κατά τη διάρκεια το παιχνιδιού η επικοινωνία περιοριζόταν στην επίλυση θεμάτων που προέκυπταν και σχετιζόνταν κυρίως με τους κανόνες. Τα θέματα που προέκυπταν λύνονταν είτε από τα ίδια τα παιδιά είτε από τα παιδιά με τη βοήθεια της εκπαιδευτικού. Για παράδειγμα στην έναρξη του παιχνιδιού δημιουργήθηκε κάποιο θέμα με το ζάρι. Ενώ ετοιμάζονταν να ρίξουν το ζάρι για να δουν ποιος θα αρχίσει να παίζει πρώτος, αντιλήφθηκαν ότι το ζάρι με τους αριθμούς δεν ήταν κανονικό γιατί έλειπε ο αριθμός 6 και ο αριθμός 1 με τους οποίους είχαν ορίσει ότι ξεκινάει το παιχνίδι. Μεταξύ τους τα παιδιά αποφάσισαν να αλλάξουν ζάρι και να χρησιμοποιήσουν τελικά το μπλε ζάρι με τις κουκίδες. Το πρόβλημα όμως συνεχίστηκε εφόσον παρόλο που έριξαν το ζάρι, αρκετές φορές ο καθένας, δεν ερχόταν ούτε το 6 ούτε το 1. Στο σημείο αυτό παρενέβη η εκπαιδευτικός η οποία πρότεινε να αλλάξει ο κανόνας:

Ε: Επειδή παίρνει αρκετό χρόνο για να αρχίσει το παιχνίδι με αυτό τον κανόνα, θέλετε να τον αλλάξουμε;

...: Ναι.

Ε: Τι κανόνα να φτιάξουμε;

Μ2: Όποιος φέρει το μεγαλύτερο αριθμό.

Ε: Συμφωνείτε όλοι ότι αρχίζει το παιχνίδι όποιος φέρει στο ζάρι το μεγαλύτερο αριθμό;

...: Ναι.

Άλλο θέμα που προέκυψε σχετιζόταν με την αναζήτηση του τερματισμού, το οποίο διευκρινίστηκε από άλλο παιδί:

M1: Πού είναι ο τερματισμός;

M3: Δεν έχει τερματισμό είναι όποιος φάει τυριά.

Επίσης, θέμα προέκυψε ως προς τους άγραφους κανόνες του παιχνιδιού, που σχετίζονται με την ηθική, δηλαδή πώς προχωράω σε ένα παιχνίδι:

M3: Κλέφτη, είσαι κλέφτης δεν προχωράει σωστά, 1,2,3,4,5,6 εδώ πρέπει να πας.

Στο τέλος του παιχνιδιού, έγινε και η ανατροπή όπου το παιχνίδι θεωρήθηκε άδικο για μία από τις παίκτριες. Όταν τα παιδιά μετρούσαν πόσα τυράκια είχαν μαζέψει για να βρεθεί ο νικητής, η παίκτρια που είχε ως πιόνι το γάτο δεν μπορούσε να συμμετάσχει, παρόλο που το θέμα αυτό είχε διευκρινιστεί με κανόνα. Έτσι ανέλαβαν να της το εξηγήσουν οι συμπαίκτες της:

Ε: Για να μετρήσουμε πόσα τυριά έχετε μαζέψει.

M1: 1,2,3,4

M3: 1,2,3

M4: 1,2,3,4,5

M2: Ναι, αλλά εγώ δεν μπορώ να μετρήσω γιατί η γάτα δεν τρώει τυριά και αυτό είναι άδικο ...

Ε: Για ακούστε μια αδικία που λέει η συμμαθήτριά σας, «μόνο τα ποντίκια μπορούν να κερδίσουν γιατί μόνο τα ποντίκια τρώνε τυρί» τι μπορούμε να κάνουμε για αυτό;

M1: Να μετράει τα ποντίκια.

Ε: Δηλαδή πόσα ποντίκια έχει φάει;

Η δημιουργία των κανόνων ενός παιχνιδιού δεν είναι εύκολη υπόθεση γιατί αφενός πρέπει να συνυπολογιστούν πολλοί παράγοντες κατά το σχεδιασμό τους και αφετέρου πρέπει να δοκιμαστούν στην πράξη για τη λειτουργικότητά τους.

(2) Συσχέτιση υφιστάμενων και κατασκευασμένων κανόνων

Η συσχέτιση των υφιστάμενων κανόνων και των κατασκευασμένων από τα παιδιά κανόνων παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα (οι διαγραμμένες εκφράσεις αφορούν σε κανόνες που άλλαξαν κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού):

Υφιστάμενοι κανόνες	Κατασκευασμένοι κανόνες
Κάθε παίκτης κινεί τρία πιόνια (δες μεθοδολογία)	Κάθε παίκτης κινεί ένα πιόνι, τον ποντικό. Η γάτα είναι ξεχωριστός παίκτης και όταν φτάσει στα τυριά πάει ένα βήμα πίσω. Τα τυράκια είναι τοποθετημένα στο ταμπλό.
Το παιχνίδι αρχίζει με τον παίκτη που θα φέρει τη μεγαλύτερη ένδειξη στο ζάρι.	Το παιχνίδι αρχίζει με τον παίκτη που θα φέρει τη μεγαλύτερη ένδειξη στο ζάρι.
Χρησιμοποιείται ζάρι με κουκίδες.	Χρησιμοποιείται ζάρι με κουκίδες.
Οι παίκτες κινούνται ελεύθερα στο ταμπλό.	Οι παίκτες κινούνται ελεύθερα στο ταμπλό.
Νικητής είναι ο παίκτης με τα περισσότερα τυράκια.	Νικητής είναι ο παίκτης με τα περισσότερα τυράκια και ο γάτος ανάλογα με τα ποντίκια που έστειλε στην αφετηρία.

Υπήρχαν πολλοί κοινοί κανόνες μεταξύ των υφιστάμενων και των σχεδιασμένων, τουλάχιστον όπως διαμορφώθηκαν μετά τις αλλαγές. Παρόλο όμως που οι κανόνες των παιδιών ήταν λειτουργικοί και μπόρεσαν να παίξουν το παιχνίδι, η στρατηγική και η τακτική δεν αναδείχθηκαν με τον τρόπο που απαιτείται από τους υφιστάμενους κανόνες. Οι αρμοδιότητες μοιράστηκαν. Τα ποντίκια απέφευγαν το γάτο, τον οποίο δεν είχαν στον έλεγχό τους και πήγαιναν προς τα τυράκια τα οποία βρίσκονταν σε σταθερά σημεία. Δεν είχαν να κινήσουν και τα τρία πόνια ταυτόχρονα έχοντας στο μυαλό τους το διαφορετικό ρόλο του καθενός.

Διαφορετικά παιδιά επέλεξαν να καταγράψουν/αναπαραστήσουν με διαφορετικό τρόπο τους κανόνες του παιχνιδιού. Το παιδί που είχε, ουσιαστικά, αναλάβει την αρμοδιότητα της καταγραφής των κανόνων τους παρουσίασε λεκτικά (εικ. 1), γράφοντάς τους με τη σειρά που ακούγονταν, αποτυπώνοντας και τις αλλαγές που γίνονταν στην πορεία. Τα άλλα τρία παιδιά παρουσίασαν κανόνες λεκτικά και εικονικά (εικ. 2 και 3), αλλά και συμβολικά (εικ. 4) καταγράφοντας περισσότερο τις δικές τους προτάσεις παρά τους κανόνες που έγιναν αποδεκτοί από την τάξη. Η επιθυμία τους να φέρνουν συνέχεια 6 στο ζάρι, να πάρουν τα περισσότερα τυριά, αλλά και η αποτύπωση της πολυπλοκότητας των κινήσεων που προτάθηκαν κατά τη δημιουργία των κανόνων, έγινε φανερή μέσα από τις ζωγραφιές τους.

όποιος ρίξει ή βγάλει στην
αρχή.
όποιος ρίξει το μεγαλύτερο
ονικησ όποιος είναι τα ρι τα περόσε-
ρα τερνά.

θα πέρουμε με το ~~κόκκινο~~
ζάρκι. πλε

όταν η γάτα παίξοτα
τιρία θα πάει να βίρα
πίοτα.

Η γάτα θα είναι ξεχωρι-
ατος πέχτης.

βάζουμε τα τερακια
στα άδια τετραχονα

αριθμός

πάμε όπως πάει το
ρολόι

Εικόνα 1

Έχουμε 4 ποντίκια ονγκίς είναι αυτός που έχει τα περισσότερα τυριά και αυτός που ρίχνει συνέχεια 6, θα πεζούμε με το Κόκκινο ζάρι.

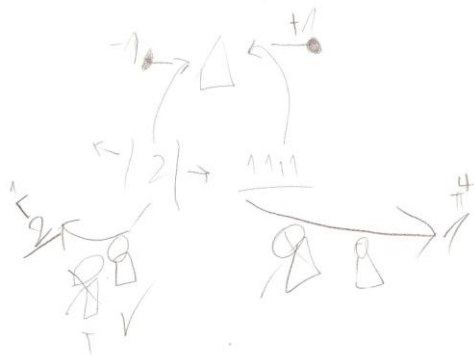


Εικόνα 2

Ο καθένας να έχει έναν παίχτη και να έχουμε 20 τυριά και 10 ούζες. Πάρε τα περισσότερα τυριά και ούζες και θα γίνει νηκεύς. Παίχτες με χρονο



Εικόνα 3



Εικόνα 4

Συμπεράσματα – Προτάσεις

Αναγνωρίζοντας το σημαντικό ρόλο του παιχνιδιού σε μια κριτική και δημιουργική μαθηματική εκπαίδευση και λαμβάνοντας υπόψη ότι οι κανόνες του παιχνιδιού αποτελούν ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά του, διερευνήθηκε η ικανότητα παιδιών Β΄ τάξης δημοτικού να δημιουργήσουν κανόνες και καταγράφηκαν οι επικοινωνιακές τους πρακτικές καθώς και η λειτουργικότητα των κανόνων.

Από τα αποτελέσματα φάνηκε ότι τα παιδιά είχαν την ικανότητα να κατασκευάσουν κανόνες για το παιχνίδι που τους δόθηκε. Όμως η τακτική που ενυπάρχει στους υφιστάμενους κανόνες του παιχνιδιού δεν αποτυπώθηκε στους κανόνες των παιδιών. Παρόλα αυτά οι κανόνες τους ήταν πιο ολοκληρωμένοι από τους κανόνες που προσπάθησαν να δημιουργήσουν μικρότερα παιδιά (Α΄ τάξης δημοτικού) σε ένα παιχνίδι γνώσεων και τύχης (Skoumpourdi, 2011). Οι κανόνες δημιουργήθηκαν μέσα από ποικίλες επικοινωνιακές πρακτικές που χρησιμοποιήθηκαν τόσο από την εκπαιδευτικό όσο και από τα παιδιά κατά τη διαπραγμάτευση διαφόρων θεμάτων που τέθηκαν και ήταν πιο σύνθετες από τις πρακτικές που υιοθετήθηκαν στην έρευνα με τα μικρότερα παιδιά. Ίσως η ηλικία και η

ιδιαιτερότητα του παιχνιδιού να είναι δύο παράγοντες που συνδιαμορφώνουν την πολυπλοκότητα των κανόνων και της επικοινωνίας.

Μέσω του σχεδιασμού των κανόνων του παιχνιδιού, καθώς και μέσω της ίδιας της διαδικασίας του παιχνιδιού καλλιεργούνται επικοινωνιακές, αλληλεπιδραστικές και διαπραγματευτικές ικανότητες. Η τάξη των μαθηματικών λειτουργεί ως κοινότητα μάθησης. Με τη χρήση του παιχνιδιού μπορεί να δημιουργηθεί το κατάλληλο εκπαιδευτικό πλαίσιο στο οποίο η διδασκαλία των μαθηματικών να αποτελέσει στρατηγική για καλή εκπαίδευση.

Βιβλιογραφικές αναφορές

- Abbott, Lesley (1994): “*Play is Ace! Developing Play in Schools and Classrooms*”. Στη συλλογή *The Excellence of Play* (επιμέλεια Janet Moyles). Grate Britain: Open University Press, σελ. 76-87.
- Ascher, Marcia (2001): “*Learning with Games of Strategy from Mongolia*”. Περιοδικό *Teaching Children Mathematics*, τεύχος 8(2), σελ. 96-99.
- Barta, James, Diane Schaeffer (1998): “*Games we Play: Connecting Mathematics and Culture in the Classroom*”. Περιοδικό *Teaching Children Mathematics*, τεύχος 4(7), σελ. 388-393.
- Bennett, Neville, Elizabeth Wood & Sue Rogers (1997): *Teaching Through Play: Teachers’ Thinking and Classroom Practice*. USA, California: Open University Press, σελ. 1-17 & 116-132.
- Bishop, Alan (1991): *Mathematical Enculturation: A Cultural Perspective on Mathematics Education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.
- Brown, Margaret (1999): “*Is More Whole-Class Teaching the Answer?*” Περιοδικό *Mathematics Teaching*, τεύχος 169, σελ. 5-7.

- Bruce, Tina (1991): *Time to Play in Early Childhood Education*. Grate Britain: Hodder & Stoughton Educational.
- Caldwell, Marion (1998): "Parents, Board Games, and Mathematical Learning". Περιοδικό *Teaching Children Mathematics*, τεύχος 4(6), σελ. 365-367.
- Caswell, Rosemaree, Steve Nisbet (2005): "The Value of Play in Mathematics Learning in the Middle Years". Στη συλλογή *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (επιμέλεια H.L. Chick, & J.L. Vincent). Melbourne: PME, τόμος 1, σελ. 232.
- Ceglowski, Deborah (1997): "Understanding and Building upon Children's Perceptions of Play Activities in Early Childhood Programs". Περιοδικό *Early Childhood Education Journal*, τεύχος 25(2), σελ. 107-112.
- D'Ambrosio, Ubiratan (2011): "Mathematicians, Mathematics Educators and the State of the World". Στη συλλογή *Facilitating Access and Participation: Mathematical Practices Inside and Outside the Classroom*, Barcelona, Spain: CIEAEM63, CD.
- Epstein, Suzan, Jack Gelfand & Esther Lock (1998): "Learning Game-Specific Spatially-Oriented Heuristics". Περιοδικό *Constraints*, τεύχος 3(2-3), σελ. 239-253.
- Ernest, Paul (1986): "Games a Rationale for Their Use in the Teaching of Mathematics in School". Περιοδικό *Mathematics in School*, τεύχος 15(1), σελ. 2-5.
- Fournier, Martine (coord) (2004): "Dossier : "A quoi sert le jeu?". Περιοδικό *Sciences Humaines*, τεύχος 152.
- Gerdes, Paulus (2001): "Exploring the Game of "Julirde": A Mathematical-Educational Game Played by Fulbe Children in Cameroon". Περιοδικό *Teaching Children Mathematics*, τεύχος 7(6), σελ. 321-327.
- Griffiths, Rose (1994): "Mathematics and Play". Στη συλλογή *The Excellence of Play* (επιμέλεια Janet Moyles). Great Britain: Open University Press, σελ. 145-157.

- Hannikainen, Maritta (2001): «Οι Αρχές του Συλλογικού Παιχνιδιού των Ρόλων στον Παιδικό Σταθμό. Η Προσέγγιση του Παιχνιδιού ως Συστήματος Δραστηριότητας». Στη συλλογή *Το παιχνίδι. Σύγχρονες Ερευνητικές και Διδακτικές Προσεγγίσεις* (επιμέλεια Σοφίας Αυγητίδου). Αθήνα: ΤΥΠΩΘΗΤΩ Γιώργος Δάρδανος, σελ. 229-245.
- Hansen, Laurie (2005): “ABCs of Early Mathematics Experiences”. Περιοδικό *Teaching Children Mathematics*, τεύχος 12(4), σελ. 208-212.
- Heaslip, Peter (1994): “Making Play Work in the Classroom”. Στη συλλογή *The Excellence of Play* (επιμέλεια Janet Moyles), Buckingham – Philadelphia: Open University Press, σελ. 99-109.
- Kamii, Constance, Georgia DeClark (1985): *Young Children Reinvent Arithmetic: Implications of Piaget’s Theory*. Columbia University: Teachers College Press.
- Kamii, Constance, Rheta DeVries (1980): *Group Games in Early Education: Implications of Piaget’s Theory*. Washington, DC: National Association for the Education of Young Children, σελ. 4 και 55-65.
- Kamii, Constance, Judith Rummelsburg (2008): “Arithmetic for First Graders Lacking Number Concepts”. Περιοδικό *Teaching Children Mathematics*, τεύχος 14(7), σελ. 89-394.
- Olson, Clay (2007): “Developing Students’ Mathematical Reasoning Through Games”. Περιοδικό *Teaching Children Mathematics*, τεύχος 13(9), σελ. 464-471.
- Perry, Bob, Sue Dockett (2007): *Play and Mathematics*. Adelaide: Australian Association of Mathematics Teachers.
- Πρόγραμμα Σπουδών Νηπιαγωγείου (2011): Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Αθήνα.
- Skovsmose, Ole (1994): *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

- Σκουμπουρδή, Χρυσάνθη (2009α): «*Επιτραπέζια Παιχνίδια για τα Μαθηματικά: Κριτήρια Σχεδιασμού/Επιλογής και Τρόποι Διαχείρισής τους στο Σπίτι και το Σχολείο*». Στη συλλογή *Μαθηματική Εκπαίδευση και Οικογενειακές Πρακτικές*, (επιμέλεια Φραγκίσκου Καλαβάση, Σόνιας Καφούση, Μαρίας Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Χρυσάνθης Σκουμπουρδή & Γιώργου Φεσσάκη). Αθήνα: Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, 3^ο Συνέδριο ΕνΕΔιΜ, Ρόδος, σελ. 837-839.
- Σκουμπουρδή, Χρυσάνθη (2009β): «*Ο Γάτος, τα Ποντίκια και τα Τυράκια*». Περιοδικό *Ο μικρός Ευκλείδης*, τεύχος 21, σελ. 4-5.
- Σκουμπουρδή, Χρυσάνθη (2010): «*Το Παιχνίδι ως Πλαίσιο για την Προσέγγιση των Μαθηματικών της Πρώτης Σχολικής Ηλικίας: Σχεδιασμός Επιτραπέζιων Παιχνιδιών*». Περιοδικό *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, τεύχος 162, σελ. 82-99.
- Skoumpourdi, Chrysanthi (2011): “*Playing Board Games Inside and Outside the Classroom*”. Στη συλλογή *Facilitating Access and Participation: Mathematical Practices Inside and Outside the Classroom*, Barcelona, Spain: CIEAEM63, CD.
- Skoumpourdi, Chrysanthi (2012): “*Democratic Game Play: Is it a Matter of Rules?*” Στη συλλογή *Mathematics Education and Democracy: Learning and Teaching Practices*. Greece, Rhodes: CIEAEM64.
- Σκουμπουρδή, Χρυσάνθη, Φραγκίσκος Καλαβάσης (2007): «*Σχεδιασμός Ένταξης του Παιχνιδιού στη Μαθηματική Εκπαίδευση για την Προσχολική και Πρώτη Σχολική Ηλικία*». Στη συλλογή *Θέματα Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού* (επιμέλεια Φραγκίσκου Καλαβάση & Αναστάσιου Κοντάκου). Αθήνα: Ατραπός, σελ. 137-156.
- Skoumpourdi, Chrysanthi, Sonia Kafoussi & Konstantinos Tatsis (2009): “*Designing Probabilistic Tasks for Kindergartners*”. Περιοδικό *Journal of Early Childhood Research*, τεύχος 7(2), σελ. 153-172.
- Σταθοπούλου, Χαρούλα (2005): *Εθνομαθηματικά Διερευνώντας την Πολιτισμική Διάσταση των Μαθηματικών και της Μαθηματικής Εκπαίδευσης*. Αθήνα: Ατραπός.

- Szendrei, Julianna (1996): “Concrete Materials in the Classroom”. Στη συλλογή *International Handbook of Mathematics Education* (επιμέλεια Alan Bishop). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, σελ. 411-434.
- Tapson, Frank (1997): “Mathematical Games”. Περιοδικό *Mathematics in school*, τεύχος 26(4), σελ. 2-6.
- Tatsis, Konstantinos, Sonia Kafoussi & Chrysanthi Skoumpourdi (2008): “Kindergarten Children Discussing the Fairness of Probabilistic Games: The Creation of a Primary Discursive Community”. Περιοδικό *Early Childhood Education*, τεύχος 36(3), σελ. 221-226.
- Wolfgang, Charles, Robert Stakenas (1985): “An Exploration of Toy Content of Preschool Children's Home Environments as a Predictor of Cognitive Development”. Περιοδικό *Early Child Development and Care*, τεύχος 19(4), σελ. 291-307.
- Wood, Elizabeth, Neville Bennett (2001): «Οι Θεωρίες των Εκπαιδευτικών για το Παιχνίδι. Κονστροκτιβισμός ή Κοινωνικός Κονστροκτιβισμός;» Στη συλλογή *Το παιχνίδι. Σύγχρονες ερευνητικές και διδακτικές προσεγγίσεις* (επιμέλεια Σοφίας Αυγητίδου). Αθήνα: ΤΥΠΩΘΗΤΩ Γιώργος Δάρδανος, σελ. 301-328.

Χρυσάνθη Σκουμπουρδή
kara@aegean.gr

ΜΕΡΙΣΤΙΚΕΣ ΡΟΥΛΕΤΕΣ: ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΚΑΚΑ ΠΑΙΔΙΑ

**Τάσος Πατρώνης, Δημήτρης Ζαχαριάδης,
Σωφρόνης Βαρβακούσης & Ζήσιμος Μπραέσσας**

Πανεπιστήμιο Πάτρας

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα πιο συνηθισμένα μοντέλα για τη διδασκαλία των κλασμάτων στο Δημοτικό, “πίτ(σ)ες”, “τούρτες” και “σοκολάτες”, έχουν ένα βασικό μειονέκτημα: δεν πείθουν τα παιδιά. Κανένας δεν σκέφθηκε ποτέ, να φάει π.χ. «δύο δωδέκατα» από μία τούρτα ή μία σοκολάτα, ούτε τα «τρία έβδομα» μιας πίτσας (που, άλλωστε, είναι ήδη χωρισμένη σε προκαθορισμένα κομμάτια όταν σερβίρεται). Έτσι, ενώ ιστορικά ο κύκλος ήταν το φυσικό πεδίο για τα κλάσματα (ιδιαίτερα και σε σχέση με τη μέτρηση του χρόνου), τα συνήθη αυτά προσφερόμενα “υλικά” μοντέλα πάσχουν από *μη-φυσικότητα*, ή καλύτερα από *μη-αληθοφάνεια*: είναι τόσο προφανής η προσποίηση (το τέχνασμα) της διδασκαλίας, ώστε μερικές φορές να αναιρεί κάθε περιέργεια ή ενδιαφέρον για μάθηση και να προκαλεί εκνευρισμό ή βαρεμάρα.

Η κουλτούρα των τυχερών παιχνιδιών μπορεί να μην ευνοεί κοινωνικές αρετές όπως η αλληλεγγύη και η δημιουργική συνεργασία, είναι όμως τόσο μακραίωνη και δημοφιλής ώστε να μην έχει νόημα ο εξοβελισμός της από την εκπαίδευση, αλλά η απομυθοποίηση και παιδαγωγική αξιοποίησή της. Εδώ παρουσιάζουμε ένα *παιχνίδι τύχης* χωρίς “τζόγο”, που μπορεί να είναι συναρπαστικό για τα παιδιά – ιδιαίτερα για εκείνα που εύκολα βαριούνται με τα παραδοσιακά σενάρια και τεχνάσματα της διδασκαλίας – και ταυτόχρονα να τα οδηγεί σε καινούργιους δρόμους σκέψης.

Οι *μεριστικές ρουλέτες* είναι ένα νέο, ελκυστικό παιχνίδι για την αναπαράσταση των ρητών αριθμών στην εκδοχή τους ως “Αιγυπτιακών κλασμάτων”.

Παιχνίδι και μάθηση σε μία ‘αόρατη’ παιδαγωγική

Ακολουθούμε εδώ τον B. Bernstein σε μια βασική θεωρητική διάκριση , που μπορεί να επανατοποθετήσει τη μοντέρνα (ή προοδευτική) παιδαγωγική σε μια κριτική πειραματική βάση . Ο Bernstein ορίζει ως ‘αόρατη’ (invisible) ή ‘υπόρρητη’ (implicit) *παιδαγωγική* μια παιδαγωγική πρακτική με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά¹ .

- (α) Ο έλεγχος της δασκάλας ή και της μητέρας ως ‘δασκάλας’ πάνω στο παιδί είναι μάλλον έμμεσος παρά άμεσος .
- (β) Η δασκάλα τοποθετεί το *πλαίσιο* , που το παιδί αναμένεται να επανατοποθετήσει και να εξερευνήσει .
- (γ) Μέσα σ ‘ αυτό το πλαίσιο , το παιδί *φαίνεται* ότι έχει μεγάλη ελευθερία για ό,τι επιλέγει , για το πώς το δομεί και για το χρόνο της δραστηριότητας . Γενικότερα :
- (δ) Το παιδί *φαίνεται* ότι ρυθμίζει μόνο του τις κινήσεις του και τις κοινωνικές του σχέσεις .
- (ε) Υπάρχει μειωμένη έμφαση στη μετάδοση και απόκτηση ειδικών δεξιοτήτων . Και :
- (στ) Τα κριτήρια αξιολόγησης αυτής της παιδαγωγικής είναι πολλαπλά, ασαφή και όχι εύκολα μετρήσιμα .

Η βασική μορφή που αντιστοιχεί στην ‘αόρατη’ παιδαγωγική είναι το *παιχνίδι* , καθώς με τη βοήθεια του παιχνιδιού το παιδί εκφράζει τον εαυτό του απέναντι στη δασκάλα . Επιπλέον , στην κοινωνιολογική ανάλυση του Bernstein , τόσο η ‘αόρατη’ παιδαγωγική όσο και η αντίθετη της , ‘ορατή’ (ή παραδοσιακή) παιδαγωγική , συνδέονται ε την μεσοαστική τάξη : ένα μέρος αυτής της τάξης θέλει να δει «το παιχνίδι ως εργασία και την εργασία ως παιχνίδι» . Όμως οι κανόνες κάθε παιχνιδιού μπορεί να αλλάξουν ευκολότερα από τους άκαμπτους κανόνες της παραδοσιακής περιχάραξης των παιδαγωγικών δραστηριοτήτων (ένας τέτοιος πρωταρχικός παραδοσιακός κανόνας είναι , π.χ. : «άλλο η διδασκαλία και η μάθηση και άλλο το παιχνίδι!») .

Γι' αυτό στην 'αόρατη' παιδαγωγική είναι πιθανότερο να γίνουν αποδεκτές η γλώσσα και κουλτούρα των παιδιών των άλλων κοινωνικών στρωμάτων , πέρα από τη μεσαία αστική τάξη .

Εξερεύνηση έναντι 'διαχείρισης' της γνώσης

Η μοναδική νέα αντίληψη που εισάγεται μέσα από την τελευταία εξέλιξη των σχολικών βιβλίων των Μαθηματικών (ιδίως για τις τρεις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού) είναι μια κουλτούρα 'διαχείρισης αριθμών' , όπως αυτή που αντιμετωπίζει ο *Μικρός Πρίγκηπας* του Εξυπερύ στο πρόσωπο του *Επιχειρηματία*² .

Πέρα από την πρωτοφανή αυτή παιδαγωγική αναισθησία του εγχειρήματος μιας τόσο βίαιης αποκόλλησης των παιδιών από την αθωότητα της ηλικίας τους , έχουμε εδώ και ένα ατόπημα στο καθαρά γνωστικό επίπεδο : όταν το παιδί των 8 – 12 χρόνων στρέφεται στο βασίλειο των αριθμών για να θέσει κάποια ερωτήματα , το κάνει παίζοντας σχεδόν και ξεκινώντας από συγκεκριμένες παραστάσεις οικείων πραγμάτων . Αντίθετα , τα σχολικά βιβλία του ζητούν να επενδύσει τους αφηρημένους αριθμούς στα συγκεκριμένα πράγματα .

Απέναντι στην υποτιθέμενη 'διαχείριση' της μαθηματικής γνώσης μπορούμε, λοιπόν, να αντιτάξουμε την προέκταση αυτού που κάνουν αυθόρμητα τα παιδιά: την εξερεύνηση των παραστάσεων των πραγμάτων μέσα από ένα παιχνίδι , είτε αυτές οι παραστάσεις είναι μαθηματικές είτε επιδέχονται κάποιου είδους μαθηματικοποίηση .

Νέες τεχνολογίες , παλιές αντιλήψεις στο Γυμνάσιο

Τα Μαθηματικά στο Γυμνάσιο δεν έχουν αλλάξει ουσιαστικά από τη δεκαετία του '80 , παρόλες τις μάλλον ασυνάρτητες *paroles* περί 'διαθεματικότητας' που προστέθηκαν τα τελευταία χρόνια στα αναλυτικά προγράμματα (ΔΕΠΣ) και τα διδακτικά βιβλία . Επίσημα προτείνεται η χρήση εκπαιδευτικών λογισμικών πακέτων (όπως το CABRI και το SKETCHPAD) με τη βοήθεια των οποίων προτείνονται πολλές δραστηριότητες για την τάξη .

Όμως οι βασικές οργανωτικές δομές (η ‘περιχάραξη’ – ‘framing’ κατά τον Bernstein) δεν έχουν αλλάξει , ώστε να ενθαρρύνονται οι εναλλακτικές διδακτικές προσεγγίσεις και το ψηφιακό ή άλλο παιχνίδι ως ‘αόρατη’ παιδαγωγική και έμμεση μάθηση .

Μία πίτσα διαφορετική από τις άλλες

Τα πιο συνηθισμένα μοντέλα για τη διδασκαλία των κλασμάτων στο Δημοτικό, “πίτ(σ)ες”, “τούρτες” και “σοκολάτες”, έχουν ένα βασικό μειονέκτημα: δεν πείθουν τα παιδιά. Κανένας δεν σκέφθηκε ποτέ, να φάει π.χ. «δύο δωδέκατα» από μία τούρτα ή μία σοκολάτα, ούτε τα «τρία έβδομα» μιας πίτσας (που, άλλωστε, είναι ήδη χωρισμένη σε προκαθορισμένα κομμάτια όταν σερβίρεται). Έτσι, ενώ ιστορικά ο κύκλος ήταν το φυσικό πεδίο για τα κλάσματα (ιδιαίτερα και σε σχέση με τη μέτρηση του χρόνου), τα συνήθη αυτά προσφερόμενα “υλικά” μοντέλα πάσχουν από *μη-φυσικότητα*, ή καλύτερα από *μη-αληθοφάνεια*: είναι τόσο προφανής η προσποίηση (το τέχνασμα) της διδασκαλίας, ώστε μερικές φορές να αναιρεί κάθε περιέργεια ή ενδιαφέρον για μάθηση και να προκαλεί εκνευρισμό ή βαρεμάρα.

Η κουλτούρα των τυχερών παιχνιδιών μπορεί να μην ευνοεί κοινωνικές αρετές όπως η αλληλεγγύη και η δημιουργική συνεργασία, είναι όμως τόσο μακραίωνη και δημοφιλής ώστε να μην έχει νόημα ο εξοβελισμός της από την εκπαίδευση, αλλά η απομυθοποίηση και παιδαγωγική αξιοποίησή της. Εδώ παρουσιάζουμε ένα *παιχνίδι τύχης* χωρίς “τζόγο”, που μπορεί να είναι συναρπαστικό για τα παιδιά – ιδιαίτερα για εκείνα που εύκολα βαριούνται με τα παραδοσιακά σενάρια και τεχνάσματα της διδασκαλίας – και ταυτόχρονα να τα οδηγεί σε καινούργιους δρόμους σκέψης.

Οι *μεριστικές ρουλέτες* είναι ένα νέο, ελκυστικό παιχνίδι για την αναπαράσταση των ρητών αριθμών στην εκδοχή τους ως “Αιγυπτιακών κλασμάτων”.

Πιο συγκεκριμένα, μια μεριστική ρουλέτα για N παίκτες $A_1, A_2, \dots, A_N$ προκύπτει από μερισμό του κύκλου σε N οικογένειες από κυκλικούς τομείς, με το ίδιο χρώμα για κάθε οικογένεια.

Οι τομείς κάθε οικογένειας αναπαριστούν, αναλογικά, μία και την ίδια για όλες τις οικογένειες ανάλυση του κλάσματος $1/N$ σε μικρότερα κλάσματα, έστω την:

$1/N = \mu_1/N_1 + \mu_2/N_2 + \dots + \mu_k/N_k$, όπου $k \geq 2$ και $\mu_i N \leq N_i$, $i=1,2, \dots, k$, που ισοδυναμεί με την ανάλυση:

$$1 = \mu_1 N/N_1 + \mu_2 N/N_2 + \dots + \mu_k N/N_k \quad (1)$$

Η αναπαράσταση της (1) γίνεται στον κύκλο με τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε κυκλικός τομέας να αναπαριστάνει αναλογικά μία από τις κλασματικές μονάδες $1/N_i$, έτσι να εμφανίζονται όλες (σε πλήθος, αντίστοιχα, $\mu_i N$, $i = 1, 2, \dots, k$) και οι τομείς του ίδιου χρώματος να μη συνορεύουν μεταξύ τους. Κάθε φορά που η βελόνα της ρουλέτας σταματά στο εσωτερικό ενός τομέα του χρώματος J ($J=1, 2, \dots, N$), ο παίκτης A_J “κερδίζει”, αν το επιθυμεί, την αντίστοιχη κλασματική μονάδα $1/N_i$. Ο παίκτης που συγκεντρώνει πρώτος άθροισμα ακριβώς ίσο με τη μονάδα αναδεικνύεται νικητής. Είναι όμως πιθανόν κανείς να μην πετύχει το αναμενόμενο αποτέλεσμα (π.χ. αν όλοι οι παίκτες ξεπεράσουν τη μονάδα).

Σε κάθε περίπτωση το παιχνίδι τελειώνει όταν έχουν εμφανιστεί όλοι οι κυκλικοί τομείς της μεριστικής ρουλέτας, από μία τουλάχιστον φορά ο καθένας: τότε νικητής ανακηρύσσεται όποιος (ή όποιοι) παίκτες έχουν κάποια στιγμή πετύχει ένα άθροισμα κλασμάτων, που είναι το πλησιέστερο δυνατό προς τη μονάδα. Είναι φανερό, ότι όσο μικρότεροι και περισσότεροι είναι οι κυκλικοί τομείς μιας μεριστικής ρουλέτας, τόσο μεγαλώνει η πιθανότητα το παιχνίδι να συνεχίζεται μετά από πολλές κινήσεις, π.χ. μετά από 50 ή 100 κινήσεις.

Είτε η παραπάνω διαδικασία συντελείται με μια πραγματική ρουλέτα είτε με ψηφιακή προσομοίωση (για μεγαλύτερα παιδιά), υπεισέρχεται το τυχαίο και η μάθηση γίνεται παιχνίδι. Τα κλάσματα αισθητοποιούνται στο σχήμα ή στο εμβαδό κυκλικών τομέων. Τα παιδιά οδηγούνται να συγκρίνουν μεταξύ τους αυτούς τους τομείς και να αθροίσουν με τη βοήθειά τους τα κλάσματα που τούς τυχαίνουν.

Το δίκαιο ως «ίσες πιθανότητες» στο παιχνίδι

Από την εποχή του Laplace, ο ορισμός της έννοιας της πιθανότητας επανεμπλέκει κυκλικά την ίδια έννοια μέσω των «ισοπίθανων

γεγονότων» (σε μια σειρά από ισοπίθανα στοιχειώδη τυχαία γεγονότα, η πιθανότητα του ενδεχόμενου Α είναι ο λόγος του πλήθους των ευνοϊκών προς το Α γεγονότων προς το πλήθος όλων των στοιχειωδών τυχαίων γεγονότων) . Ενδεχομένως στη διατύπωση αυτή επέδρασε ιστορικά (και επιδρά ακόμη) η ιδέα του *δίκαιου* σε μία δημοκρατική κοινότητα . Αυτό το δίκαιο μεταφράζεται σε ίσους όρους (συνθήκες) για τον κάθε πολίτη , ή ίσες πιθανότητες στον κοινωνικό στίβο . Ειδικά και ένα *παιχνίδι* θα πρέπει να διέπεται από μία τέτοια έννοια δικαίου (fair play) . Ο όρος αυτός στην περίπτωση των τυχερών παιχνιδιών , που ήταν ο ιστορικός λόγος ανάπτυξης του Λογισμού των Πιθανοτήτων, σημαίνει ίσες πιθανότητες επιτυχίας για τον κάθε παίκτη .

Είναι αναμενόμενο τα παιδιά να θελήσουν να βεβαιωθούν ότι μια μεριστική ρουλέτα αποτελεί δίκαιο παιχνίδι , προβλέποντας τις ίσες πιθανότητες για κάθε παίκτη . Ενδέχεται , όμως , για κάποια παιδιά , το ισοπίθανο της επιτυχίας να εξαρτάται όχι απλά από τον απαιτούμενο μερισμό του κύκλου σε ομόλογους τομείς διαφορετικών χρωμάτων , αλλά και από τη συγκεκριμένη *διάταξη* αυτών των τομέων στον κύκλο . Έτσι , π.χ. , προκειμένου κυρίως για μικρά παιδιά , δεν είναι βέβαιο αν θα δουν μια μεριστική ρουλέτα ως δίκαιο παιχνίδι , αν δεν υπάρχει συμμετρία ή έστω ένας κοινός τρόπος διάταξης των τομέων διαφορετικού χρώματος .

Σημειώσεις – αναφορές

1. B. Bernstein , ‘Class and Pedagogies : Visible and Invisible’ , *Educational Studies* , vol. 1 , No 1 , 1975 .
2. Στα Μαθηματικά της Ε’ Δημοτικού , με τις δραστηριότητες που συνοδεύουν μια διασκευή αποσπάσματος από τον *Μικρό Πρίγκηπα* στο Τετράδιο Εργασιών του Μαθητή (τεύχος α’ , σελίδα 8) το νόημα του λογοτεχνικού έργου αλλοιώνεται και σε τελευταία ανάλυση αντιστρέφεται υπέρ της κουλτούρας την οποία εκθέτει με την ειρωνία του ο Εξυπερύ .

Τάσος Πατρώνης

valdermar@math.upatras.gr

ΤΑ ΠΑΙΧΝΙΔΙΑ ΤΥΧΗΣ ΚΑΙ Η ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΟΥΣ ΣΤΗ ΣΥΓΚΡΟΤΗΣΗ ΤΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΤΗΣ ΤΥΧΑΙΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Δημήτρης Χασάπης & Γιάννα Νιαχοπέτρου

Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εισήγηση παρουσιάζονται και σχολιάζονται αποτελέσματα μιας έρευνας, η οποία μεταξύ άλλων διερευνά την επίδραση παιχνιδιών που παίζουν τα παιδιά που δεν έχουν ακόμη εκτεθεί στη διδασκαλία των πιθανοτήτων, στη διαμόρφωση πιθανολογικών εννοιών, όπως της τυχαιότητας, του δειγματοχώρου και τη πιθανότητας, όπως και διαμόρφωση των εννοιών αυτών διαφοροποιείται στα παιδιά με βάση επιλεγμένα κοινωνικοπολιτιστικά χαρακτηριστικά τους.

Ανάμεσα στα ευρήματα της έρευνας είναι ότι τα παιδιά που παίζουν παιχνίδια τύχης έχουν πολύ καλύτερη προσέγγιση στην έννοια της τυχαιότητας, ανεξάρτητα από την τυπική τους εκπαίδευση. Ακόμη παιδιά που παίζουν παιχνίδια στα οποία πρέπει να κάνουν συνδυασμούς έχου πολύ καλύτερη αντίληψη του δειγματοχώρου, ακόμη και σε ηλικία μικρότερη των επτά χρονών, που αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως ηλικιακό σκαλοπάτι.

Τα παιδιά με ανεπτυγμένη αντίληψη της τυχαιότητας δεν είχαν απαραίτητα ανεπτυγμένη αντίληψη της συνδυαστικής κι αντίστροφα. Επομένως, διαπιστώνεται ότι οι έννοιες αυτές συγκροτούνται ανεξάρτητα η μία από την άλλη. Από την έρευνα διαπιστώθηκε, ακόμη, ότι η προηγούμενη εξοικείωση των παιδιών με συγκεκριμένα εργαλεία τυχαιότητας, βοηθάει στην επίλυση πιθανολογικών προβλημάτων αλλά όταν αλλάξει το εργαλείο, τα παιδιά δεν μπορούν να επιλύσουν το ίδιο πρόβλημα. Ακόμη, ότι στα παιχνίδια τύχης τα παιδιά έχουν την τάση να βγάζουν συμπεράσματα από ένα μικρό αριθμό παρατηρήσεων. Τέλος, καταγράφηκαν πιθανολογικές παρανοήσεις, οι οποίες έχουν σχέση με τη διαφορά της χρήσης σχετικών όρων στη γλώσσα των πιθανοτήτων και στην καθημερινή ζωή των παιδιών.

Πιθανότητες και τύχη

Οι πιθανότητες είναι ένας πολύ σημαντικός τομέας των μαθηματικών με εφαρμογές στην καθημερινή ζωή, σε πολλούς επιστημονικούς κλάδους, καθώς κι ένα πολύ σημαντικό εργαλείο για την ανάλυση της πραγματικότητας. Σύμφωνα με τους Piaget & Inhelder (1950/1974), (San Martin, 2006) *η πιθανότητα είναι μια δευτερογενής έννοια ως σύνθεση της τύχης και των λειτουργιών, η οποία μας επιτρέπει να δομήσουμε το πεδίο της τύχης.*

Οι Piaget και Inhelder ακολουθούν τον ορισμό του Cournot για την τύχη: Σύμφωνα με τον Cournot (1843), η θεμελιώδης αρχή που ελέγχει την ανθρώπινη σκέψη είναι ότι κάθε γεγονός έχει μια αιτία. Αυτή η αρχή τον οδήγησε να συλλάβει αλυσίδες αιτιών – αποτελεσμάτων μέσα στο χρόνο. Αυτές οι αλυσίδες, νοούνται ως γραμμικές σειρές. Στη χρονική γραμμή προϋπάρχει ένας άπειρος αριθμός σειρών που μπορούν να διασταυρωθούν. Έτσι η ύπαρξη ενός γεγονότος είναι το προϊόν ενός μεγάλου αριθμού αιτιωδών σειρών. Ο Cournot διαχωρίζει δύο τύπους σειρών: εξαρτημένες και ανεξάρτητες. Τα γεγονότα που παράγονται από το συνδυασμό ή τη διασταύρωση των φαινομένων που ανήκουν σε ανεξάρτητες αιτιώδεις σειρές, είναι γεγονότα που αποκαλούνται τυχαία. (San Martin, 2006). *Η τύχη λοιπόν σύμφωνα με τον Cournot (1843), είναι η αλληλεπίδραση ανεξάρτητων αιτιωδών αλληλουχιών.* Αυτή η έννοια είναι περίπλοκη, γιατί για την κατανόησή της, χρειάζεται η κατανόηση των εννοιών της αλληλεπίδρασης και της ανεξαρτησίας. Για παράδειγμα, όταν μια πόρτα κλείσει από τον άνεμο και χτυπήσει ένα παιδί που βρίσκεται κοντά της, το παιδί μπορεί να κατανοήσει την αλληλεπίδραση των αιτιών που το έφεραν κοντά στην πόρτα και έκαναν την πόρτα να κλείσει, αλλά δεν μπορεί να παραδεχτεί την ανεξαρτησία τους. Έτσι, δεν μπορεί να καταλάβει ότι αυτό το συμβάν είναι τυχαίο. Γενικά, αυτό που εμποδίζει το παιδί να κατανοήσει την έννοια της τύχης είναι ότι είτε μπορεί να κατανοήσει την αλληλεπίδραση των αιτιών, χωρίς να μπορεί να κατανοήσει την ανεξαρτησία τους, είτε μπορεί να κατανοήσει την ανεξαρτησία των φαινομένων χωρίς να κατανοεί την αλληλεπίδρασή τους. (Piaget και Inhelder, 1975)

Η έννοια της τύχης και η σχετική έρευνα

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, τα παιδιά για να συγκροτήσουν πιθανολογικές έννοιες πρέπει να συγκροτήσουν την έννοια της τύχης. Η τύχη αποτελεί τη βάση της ανάπτυξης της πιθανολογικής σκέψης και δε θεωρείται εγγενής. Αυτή αποκτάται στη διάρκεια της νοητικής ανάπτυξης του παιδιού, μετά την απόκτηση των αντίθετων εννοιών, δηλαδή τα τυχαία φαινόμενα μπορούν να γίνουν αντιληπτά μόνο αφού προσδιοριστούν τα φαινόμενα που δεν είναι τυχαία. Πριν τα παιδιά προσπαθήσουν να λύσουν ένα πρόβλημα με πιθανολογικό συλλογισμό, θα πρέπει καταρχήν να ξεχωρίσουν αν υπόκειται στους κανόνες της τύχης. Θα πρέπει να μπορούν δηλαδή να ξεχωρίσουν ένα απρόβλεπτο από ένα προβλέψιμο ενδεχόμενο.

Οι ερευνητές δε συμφωνούν για την ηλικία στην οποία τα παιδιά κατανοούν το οικοδόμημα της αβεβαιότητας. Σύμφωνα με τους Byrnes & Beilin (1991) οι ηλικίες ποικίλλουν από τα 4 έως τα 10. (Jones & Thornton, 2005).

Σύμφωνα με τους Piaget & Inhelder (1975), η ικανότητα διαφοροποίησης ανάμεσα στη βεβαιότητα και την αβεβαιότητα δεν εκδηλώνεται μέχρι τα 7. Όταν ζητήθηκε από τα παιδιά να εξηγήσουν τη λέξη «τύχη», βρέθηκε ότι τα παιδιά 6-7 ετών δεν την καταλαβαίνουν. Μερικά παιδιά 6-9 ετών για να εξηγήσουν ένα τυχαίο γεγονός, έδιναν την έννοια ενός σπάνιου ή εξαιρετικού γεγονότος. Και τελικά σε μεγαλύτερες ηλικίες τα παιδιά προσδιόριζαν την τύχη ως την αλληλεπίδραση ή τη συμβολή ανεξάρτητων αιτιωδών αλληλουχιών. Π.χ. «προσκληθήκε για πρώτη φορά και αρρώστησε ακριβώς εκείνη την ημέρα». Άλλα ευρήματα των Piaget & Inhelder (1975), είναι ότι το παιδί προσχολικής ηλικίας : α) συγχέει το τυχαίο με το αυθαίρετο, ερμηνεύοντας το τυχαίο ως την εκδήλωση βούλησης του αντικειμένου. β) έχει την τάση να κρίνει στη βάση των αμέσως προηγούμενων γεγονότων. γ) έχει την πεποίθηση ότι ένα πρόσωπο μπορεί να ελέγξει ένα τυχαίο γεγονός, όταν αντικειμενικά ένας τέτοιος έλεγχος είναι αδύνατος. δ) η διάκριση που κάνει ανάμεσα στο τυχαίο και το συναγόμενο είναι ασταθής. ε) έχει την τάση να προβλέπει το Α αποτέλεσμα, μετά από μια σειρά Α αποτελεσμάτων (positive recency effect).

Ο Fischbein (1975) ανέφερε ότι στην περίοδο των συγκεκριμένων λογικών λειτουργιών, η τάση πρόβλεψης του αποτελέσματος Α μετά από μια σειρά Α αποτελεσμάτων, αντικαθίσταται από την τάση πρόβλεψης του αποτελέσματος Β, μετά από μια σειρά Α αποτελεσμάτων (negative recency effect).

Άλλες έρευνες δείχνουν ότι τα παιδιά πιστεύουν ότι τα εργαλεία τύχης (ζάρια, νομίσματα) γνωρίζουν το αποτέλεσμα ή θέλουν συγκεκριμένα αποτελέσματα., ότι η τύχη ή οι προλήψεις προσδιορίζουν τα αποτελέσματα, ή ότι εξωτερικές δυνάμεις ελέγχουν τις τυχαίες καταστάσεις (Langrall, Mooney, 2005).

Η έρευνα του G. Amir σε παιδιά 11-12 ετών έδειξε ότι η τύχη γίνεται κατανοητή με διάφορους τρόπους: ως δυνατότητα ή ευκαιρία, κάτι που έχει σχέση με την αβεβαιότητα, κάτι που συμβαίνει χωρίς πρόθεση ή σχέδιο, ανεξήγητο ή υπερφυσικό. Ακόμη φάνηκε ότι οι προλήψεις και οι πεποιθήσεις παίζουν σημαντικό ρόλο στην οικοδόμηση της πιθανολογικής σκέψης.

Η έρευνα των Χασάπη & Χατζηβασιλείου (2008) σε μαθητές 10-11 ετών στην Ελλάδα και την Ιορδανία δείχνει ότι τα παιδιά αποδίδουν στην έννοια της τύχης τη σημασία του απρόσμενου γεγονότος. Η αιτία για το απρόσμενο αποδίδεται από τους Μουσουλμάνους στο θέλημα Θεού.

Η έρευνα του Sharma (2006) δείχνει ότι μαθητές 14-16 ετών στα νησιά Φίτζι πιστεύουν ότι τα αποτελέσματα πειραμάτων με ζάρια ή νομίσματα μπορούν να ελεγχθούν κι ότι αν η τύχη είναι με το μέρος κάποιου μπορεί να φέρει το επιθυμητό αποτέλεσμα. Ακόμη πιστεύουν ότι η μοίρα κάποιου είναι προδιαγεγραμμένη και υπάρχει πάντα μια ανώτερη δύναμη που επηρεάζει τα γεγονότα.

Τα παιχνίδια τύχης και η συμβολή τους στη συγκρότηση των πιθανολογικών εννοιών: Η παρούσα έρευνα

Σύμφωνα με σχετικές έρευνες (Amir & Williams, 1999, Chassapis & Chatzivasiliou, 2008), η γλώσσα, οι πεποιθήσεις και η εμπειρία των παιδιών ως στοιχεία της κουλτούρας τους επηρεάζουν την άτυπη γνώση των πιθανοτήτων.

Επιπλέον, οι διαφορετικές κοινωνικοπολιτιστικές καταβολές αποδίδουν διαφορετικές αξίες στις κοινωνικές δραστηριότητες οι οποίες σχετίζονται με τις έννοιες της τύχης και των πιθανοτήτων.

Ιδιαίτερα για τα παιδιά προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας, οι κοινωνικές δραστηριότητες οι σχετικές με τις έννοιες της τύχης και των πιθανοτήτων (με δεδομένο ότι στην Ελλάδα αυτές οι έννοιες δε διδάσκονται στο Νηπιαγωγείο και στο Δημοτικό) είναι κυρίως τα παιχνίδια που παίζουν τα παιδιά, τα οποία μπορεί να έχουν ή να μην έχουν σχέση με την τύχη και τις πιθανότητες. Επιπρόσθετα, η άτυπη γνώση των πιθανοτήτων για τα παιδιά αυτών των ηλικιών διαμορφώνεται μέσα από την τρέχουσα αντίληψη, όπως αυτή εκφράζεται από φίλους, συγγενείς, τηλεόραση κ.λπ. Τα παιχνίδια που παίζουν τα παιδιά και η αντίληψη που σχηματίζουν, διαφοροποιούνται με βάση το κοινωνικό και πολιτιστικό περιβάλλον.

Σύμφωνα με τη διάκριση του Piaget (όπως αναφέρεται στο Χασάπης 2011) τα επιτραπέζια είναι παιχνίδια με κανόνες, δηλαδή παιχνίδια με τα εξής χαρακτηριστικά:

1. Παίζουν δύο ή περισσότεροι παίκτες.
2. Υπάρχει μια σειρά κανόνων οι οποίοι καθορίζουν τη συμπεριφορά ή τις επιλογές των παικτών.
3. Υπάρχει αντίθεση στις επιδιώξεις των παικτών.
4. Κάθε παίκτης έχει καθορισμένες δυνατότητες δράσης και συγκεκριμένες προτιμήσεις.
5. Υπάρχει ένα σύστημα καταγραφής.
6. Το αποτέλεσμα είναι καθορισμένο ή προβλέψιμο.

Επιπλέον στα παιχνίδια τύχης υπάρχουν εργαλεία, όπως ζάρια με τα οποία αποφασίζεται η σειρά των παικτών και το μήκος της διαδρομής που θα διανύσει ο κάθε παίκτης. Τέτοιου είδους παιχνίδια είναι το φιδάκι, ο γκρινιάρης, η μονόπολη κ.λπ. Όταν τα παιδιά παίζουν συχνά παιχνίδια τύχης με εργαλείο ένα ζάρι για παράδειγμα, , μπορούν να αντιληφθούν ότι:

α) Ένα αμερόληπτο ζάρι μπορεί να φέρει οποιοδήποτε τυχαίο αποτέλεσμα που δεν μπορούμε να ελέγξουμε. Τα μεμονωμένα αποτελέσματα της ρίψης ενός ζαριού είναι απρόβλεπτα.

β) Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου ρίψης ζαριού είναι 1 στα 6.

γ) Σε ένα μεγάλο αριθμό ρίψεων, η πιθανότητα του κάθε ενδεχομένου τείνει στο $1/6$.

Με βάση τα προηγούμενα διερευνήσαμε τη συμβολή των παιχνιδιών τύχης στην ανάπτυξη της πιθανολογικής / ενδεχομενικής σκέψης σε παιδιά προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας, σε σχέση με το κοινωνικό και πολιτιστικό τους περιβάλλον.

Η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας σκιαγραφεί την πιθανολογική σκέψη των παιδιών, τις ιδέες τους για την τύχη και τις πιθανότητες, καθώς και τα μέσα καταγραφής αυτών των ιδεών. Όπως έχει ήδη φανεί, τη βάση για τις έρευνες της πιθανολογικής σκέψης των παιδιών έθεσε ο Piaget, ο οποίος αναλύει την πιθανολογική σκέψη σε μεγάλο βάθος. Στηριχτήκαμε λοιπόν στην έννοια της τύχης η οποία θεωρείται από τον Piaget ότι είναι η βάση της πιθανολογικής σκέψης. Ως μέθοδος έρευνας επιλέχθηκε η κλινική μέθοδος της οποίας η πατρότητα αποδίδεται επίσης στον Piaget. Σε αυτή τη μέθοδο ο Piaget συνδύασε τη μέθοδο των τυποποιημένων συνεντεύξεων και τη φυσική παρατήρηση. Από τις έρευνες του Piaget και τις μετέπειτα έρευνες αντλήσαμε συγκεκριμένα έργα. Ο σχεδιασμός των συνεντεύξεων, των ερωτήσεων που αυτές περιλαμβάνουν και τα συγκεκριμένα έργα, έχει στηριχτεί στις προηγούμενες έρευνες κι έχει εμπλουτιστεί με έργα δικής μας επινόησης

Η έρευνα έγινε σε 15 παιδιά ηλικιών από 4,5 έως 11 ετών, με διαφορετικές χώρες καταγωγής. Τα περισσότερα από αυτά μένουν σε οικοτροφείο για παιδιά που δεν μπορούν να φροντίσουν οι οικογένειές τους.

Η παρατήρηση, οι ατομικές συνεντεύξεις και τα παιχνίδια ήταν η κύρια μέθοδος συλλογής στοιχείων. Η διάρκεια των συνεντεύξεων ήταν διαφορετική, από μία έως τρεις ώρες, ανάλογα με το ενδιαφέρον των παιδιών, τις γνώσεις τους και την ταχύτητα με την οποία ολοκλήρωναν τα έργα. Στη διάρκεια των συνεντεύξεων ζητήθηκε από τα παιδιά:

- Να μας πουν τι είναι τύχη, να δώσουν παραδείγματα τυχαίων συμβάντων και να διαχωρίσουν συγκεκριμένα συμβάντα σε τυχαία και μη τυχαία, ώστε να ερευνήσουμε την αντίληψη που έχουν σχηματίσει τα παιδιά για την τύχη.
- Να μας πουν τι παιχνίδια παίζουν και να παίξουν μαζί μας παιχνίδια τύχης, όπως φιδάκι και παιχνίδια που σχεδιάστηκαν για τις ανάγκες της παρούσας έρευνας, ώστε να ερευνήσουμε τη σχετική εμπειρία που είχαν τα παιδιά σε παιχνίδια τύχης και να τη συνδέσουμε με την αντίληψη που έχουν σχηματίσει για την έννοια της τύχης. Στη διάρκεια αυτών των παιχνιδιών γίνονταν σχετικές ερωτήσεις, όπως για παράδειγμα για το αποτέλεσμα της ρίψης του ζαριού και προτεινόταν διαφορετικά εργαλεία για να παιχτούν τα παιχνίδια, ώστε να βρούμε τον τρόπο με τον οποίο τα διαφορετικά εργαλεία επηρεάζουν την πιθανολογική σκέψη των παιδιών.

Αποτελέσματα

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων των συνεντεύξεων προκύπτουν τα εξής:

1. Τα παιδιά δεν παίζουν πια παιχνίδια τύχης. Τα επιτραπέζια που έπαιζαν οι παλιότερες γενιές έχουν αντικατασταθεί από ηλεκτρονικά παιχνίδια. Τα παιδιά που ερωτήθηκαν στη συγκεκριμένη έρευνα συνήθως δεν παίζουν με παιχνίδια τύχης. Το μόνο επιτραπέζιο που λένε ότι παίζουν, είναι η μονόπολη.. Πολλά παιδιά δεν είναι καν εξοικειωμένα με τη ρίψη των ζαριών. Επομένως, το κοινωνικοπολιτιστικό και οικογενειακό περιβάλλον δεν ενθαρρύνει παιχνίδια τύχης. Η τυπική εκπαίδευση έχει καθαρά ντετερμινιστικό χαρακτήρα. Πολλά παιδιά λοιπόν δεν έχουν εμπειρία σε ζητήματα τύχης και αυτό φαίνεται ότι επηρεάζει την αντίληψη των παιδιών για την τύχη , όπως θα φανεί πιο κάτω.
2. Τα παιδιά που έχουν επαφή με παιχνίδια που περιέχουν εργαλεία τύχης, ανεξάρτητα από την τυπική τους εκπαίδευση, έχουν συνεπέστερη αντίληψη και δίνουν καλύτερα παραδείγματα απαντώντας στην ερώτηση «τι είναι τύχη». Τη συνεπέστερη αντίληψη της τύχης σε αυτή την έρευνα δείχνει να την έχει μια τσιγγάνα που δεν έχει πάει σχολείο, αλλά στη γειτονιά της έπαιζε

τυχερά παιχνίδια. Το παιδί δίνει ένα παράδειγμα αλληλεπίδρασης ανεξάρτητων αιτιωδών αλληλουχιών, διαχωρίζει τα τυχαία από τα μη τυχαία συμβάντα, κατανοεί ότι το ζάρι φέρνει τυχαία αποτελέσματα κι επιλέγει σωστά το εργαλείο που δίνει περισσότερες πιθανότητες επιτυχίας σε ένα τυχερό παιχνίδι. Το παράδειγμα τυχαίου συμβάντος που δίνει το παιδί είναι το εξής: «Έχω τον αρκούδο μου και μου άρεσε όταν τον είδα στο Jumbo και τον αγόρασα.. Ένας ίδιος αρκούδος άρεσε στη φίλη μου όταν τον είδε σε ένα άλλο Jumbo και τον αγόρασε κι εκείνη. Μπήκαμε στο αυτοκίνητο, σε άλλο η καθεμία και συναντηθήκαμε με τους δυο αρκούδους μας στο φανάρι».

3. Η ηλικία παίζει σημαντικό ρόλο στη συγκρότηση της έννοιας της τύχης. Τα μικρότερα παιδιά που συμμετέχουν στην έρευνα δεν μπορούν να την αποδώσουν, ούτε να δώσουν παράδειγμα, γιατί την αγνοούν. Με την προϋπόθεση ότι έχουν επαφή με παιχνίδια τύχης, μπορούν να διαχωρίσουν τα συμβάντα σε τυχαία και μη τυχαία. Ακόμα στη σκέψη τους εμπλέκονται μαγικά ραβδιά και μαγικοί αριθμοί.
4. Πολλά παιδιά συγχέουν την έννοια του τυχαίου με την έννοια του τυχερού και αποδίδουν αυτή τη σημασία σε ευχάριστα γεγονότα ή σε γεγονότα που δεν ελέγχουν. Τα παιδιά αποδίδουν στην έννοια της τύχης θετική χροιά και τη συνδέουν με «καλά» πράγματα. Αυτή η έννοια είναι διαφορετική από την έννοια που δίνεται στα μαθηματικά. Στην πραγματικότητα όμως δεν πρόκειται για παρανόηση, διότι η καθημερινή έννοια της τύχης, αυτή δηλαδή που καταγράφουν τα παιδιά από το κοινωνικό και πολιτιστικό τους περιβάλλον είναι ακριβώς αυτή, η έννοια της καλής τύχης. Η έννοια της τύχης πολύ συχνά αποδίδεται στην καθημερινότητα ως μία δύναμη που καθορίζει ευνοϊκά τα γεγονότα. Όταν μιλάμε για τύχη συνήθως αναφερόμαστε σε θετική για μας έκβαση των γεγονότων. Για την αρνητική έκβαση των γεγονότων χρησιμοποιείται η λέξη ατυχία. Οι διάφορες ελληνικές παροιμίες αποδίδουν αυτή τη θετική έννοια, π.χ. «τύχη βουνό», «έκανε την τύχη του», «αν έχεις τύχη διάβαινε» κ.λπ. Δικαίως λοιπόν τα παιδιά αποδίδουν στην τύχη την έννοια της καλής τύχης και είναι εντυπωσιακό, ότι η τσιγγάνα που παίζει τυχερά παιχνίδια χωρίς καμία εκπαίδευση αποδίδει στην τύχη την έννοια της αλληλεπίδρασης των ανεξάρτητων αιτιωδών

αλληλουχιών. Για παράδειγμα στην ερώτηση για τη διάκριση μεταξύ τυχαίων και μη τυχαίων συμβάντων, δύο παιδιά απαντούν ως εξής:

Ερ: Είναι τυχαίο να βρεις κάτι στο δρόμο;

Παιδί 1: Εξαρτάται τι είναι αυτό που θα βρεις. Αν είναι λεφτά, τότε είναι τυχαίο.

Ερ: Είναι τυχαίο να πας ένα προσχεδιασμένο ταξίδι;

Παιδί 2: Εξαρτάται, αν εκεί που θα πας έχεις ξαναπάει κι αν έχεις παρέα.

5. Μια άλλη παρανόηση που εμφανίζεται είναι στη διάκριση ελεγχόμενων και μη ελεγχόμενων συμβάντων, όπου τα συμβάντα στα οποία το παιδί νιώθει ότι δεν έχει έλεγχο εμφανίζονται ως τυχαία. Στην ερώτηση αν είναι τυχαίο να γράφεις καλά ορθογραφία, δύο παιδιά 10 ετών απαντούν πως είναι τύχη. Εδώ η τύχη είναι μια υποθετική δύναμη που καθορίζει ευνοϊκά τα γεγονότα στα οποία δεν υπάρχει υποκειμενικός έλεγχος. Όμως, ο έλεγχος που έχουν στα πράγματα τα υποκείμενα μπορεί να ποικίλλει από το πόσο καλά θα γράψουν ορθογραφία, μέχρι το αν θα δουν τηλεόραση ή θα διασκεδάσουν. Για παράδειγμα ένα άλλο παιδί λέει ότι «τύχη είναι όταν λέω μακάρι να δω τηλεόραση και βλέπω». Επομένως η έλλειψη υποκειμενικού ελέγχου ή η άγνοια για τα γεγονότα αποδίδεται στην τύχη. Στις αρχές του 20^{ου} αιώνα ο Henri Poincaré παρατήρησε ότι η άγνοια των νόμων που καθορίζουν τα φυσικά φαινόμενα δε σημαίνει απαραίτητα ότι ερμηνεύονται με βάση την τύχη. Δήλωσε: « Είναι απαραίτητο η τύχη να είναι διαφορετική από το όνομα που δίνουμε στην άγνοιά μας»;
6. Η έννοια της τυχειότητας δεν είναι σταθερή, αλλά στο μυαλό των παιδιών υπάρχουν αλληλοσυγκρουόμενες αντιλήψεις για τα τυχαία ενδεχόμενα. Όπως αναφέρθηκε ήδη, τα παιδιά που έπαιζαν επιτραπέζια παιχνίδια με ζάρι, δεν δείχνουν να πιστεύουν ότι μπορούν να προβλέψουν το αποτέλεσμα της επόμενης ρίψης. Ένα παιδί 6 ετών, όταν ρωτήθηκε αν ξέρει το αποτέλεσμα όταν ρίξει το ζάρι απάντησε ότι δεν ξέρει γιατί «θάρθει ότι νάναι». Όμως, στη συνέχεια δήλωσε ότι «μερικές φορές κάνω κάτι μαγικά θέλω νάρθει 6 κι έρχεται 6», γεγονός που δείχνει ότι η έννοια της τυχειότητας

δεν είναι σταθερή. Και οι δύο αντιλήψεις έχουν προκύψει αυθόρμητα, γιατί το παιδί δεν έχει διδαχθεί ποτέ αυτές τις έννοιες. Αυτές οι έννοιες στο παιδί έχουν σχηματιστεί από την προσωπική του εμπειρία και στη συγκεκριμένη χρονική στιγμή παρότι αντιφάσκουν, συνυπάρχουν. Αυτό, όπως λέει ο Vygotsky, μπορεί να οφείλεται στην απουσία ενός συστήματος γενικότητας στη σκέψη του παιδιού που θα του επιτρέψει να διαπιστώσει την αντίφαση. Ένα παιδί 11 ετών, δίνει παράδειγμα τύχης, διαχωρίζει τα τυχαία από τα μη τυχαία συμβάντα, αλλά αναφέρει και 3 τυχερούς αριθμούς.

7. Σε αρκετά παιδιά δε φαίνεται να υπάρχουν πρωτογενείς διαισθήσεις για την τυχαιότητα. Σύμφωνα με το Fischbein οι πρωτογενείς διαισθήσεις είναι γνωστικά αποκτήματα που απορρέουν από την εμπειρία του ατόμου, χωρίς να έχει προηγηθεί συστηματική διδασκαλία και που υπάρχουν στο παιδί, από την προσχολική ακόμα ηλικία. Όμως βλέπουμε ότι τα παιδιά που δεν έχουν επαφή με επιτραπέζια ή άλλα παιχνίδια τύχης, δεν έχουν σχηματίσει αντίληψη σχετική με την τυχαιότητα. Για παράδειγμα, ένα παιδί 6 ετών αποδίδει το αποτέλεσμα της ρίψης του ζαριού στη μαγεία, ενώ η ίδια ορίζει την τύχη ως «αυτό που δεν έχουν πει ακόμα τα παιδάκια, δηλαδή τα ονόματα και τα επώνυμα τους». Ένα άλλο παιδί 8 ετών, απλώς στρίβει το ζάρι και το αφήνει στο αποτέλεσμα που θέλει. Οι πρωτογενείς διαισθήσεις της τυχαιότητας δεν αποκτώνται ακόμα και σε μεγαλύτερες ηλικίες, αν δεν προϋπάρχει ανάλογη εκπαίδευση και επαφή με παιχνίδια που εμπλέκουν τυχαιότητα. Μία δεκάχρονη, που θεωρητικά, σύμφωνα με τον Piaget, είναι σε ηλικία που να μπορεί να αντιληφθεί την έννοια του τυχαίου, δεν απαντάει σχεδόν σε καμία ερώτηση στην πρώτη συνέντευξη. Φαίνεται να μην έχει καμία σχετική διαίσθηση, γεγονός που μπορεί να αποδοθεί στη μηδενική σχέση της με παιχνίδια τύχης. Όπως, εξάλλου αναφέρεται χαρακτηριστικά (Knight, 2003) «*οι έρευνες του Piaget που διαμόρφωσαν τη θεωρία για τα στάδια ανάπτυξης και τις συγκεκριμένες μαθηματικές λειτουργίες αφορούν παιδιά από την Ελβετία. Σε ποια έκταση όμως αυτές οι θεωρίες εφαρμόζονται σε παιδιά αναπτυσσόμενων χωρών;*» Φαίνεται λοιπόν ότι για να υπάρξει διαίσθηση πρέπει να υπάρξει σχετικό ερέθισμα.

8. Τα παιδιά που παίζουν παιχνίδια τύχης έχουν καλύτερη σχέση με τους αριθμούς και τους προφορικούς λογαριασμούς. Ένα παιδί 6 ετών που δεν έχει πάει ακόμη στο δημοτικό, αλλά παίζει από μικρό φιδάκι και γκρινιάρη έχει μεγάλη άνεση με τους αριθμούς: Αναγνωρίζει στο ταμπλό όλους τους αριθμούς από το 1 έως το 100 και μπορεί ήδη να κάνει πράξεις που υπερβαίνουν τη δεκάδα. Ένα παιδί 12 ετών που έχει πάει μόνο 4 μήνες σχολείο, δεν αναγνωρίζει μεν γραπτά τους αριθμούς και δεν μπορεί να κάνει γραπτά πρόσθεση και αφαίρεση, επειδή όμως έπαιζε παιχνίδια τύχης στα οποία μεταξύ άλλων έπρεπε να λογαριάζει, έχει αρκετή άνεση σε προφορικές προσθέσεις. Επομένως, από τα παράπλευρα οφέλη της ενασχόλησης με τυχερά παιχνίδια είναι η καλή σχέση των παιδιών με τους αριθμούς, τους προφορικούς λογαριασμούς, την τυχαιότητα και εν τέλει τις πιθανότητες. Για παράδειγμα, όταν τα παιδιά παίζουν φιδάκι μαθαίνουν τα εξής:

- α) Ότι ένα αμερόληπτο ζάρι μπορεί να φέρει οποιοδήποτε τυχαίο αποτέλεσμα που δεν μπορούμε να ελέγξουμε.
- β) Να μετράνε και να λογαριάζουν πάνω στο ταμπλό.
- γ) Βλέπουν τους αριθμούς από το 1 – 100 τυπωμένους κι έτσι βοηθούνται στην αναγνώρισή τους.
- δ) Να κινούνται στο χώρο, δεξιά, αριστερά, πάνω, κάτω, ανάλογα με τη διεύθυνση των αριθμών.
- ε) Αντιλαμβάνονται σιγά- σιγά ότι η πιθανότητα ενός ενδεχομένου ρίψης ζαριού είναι 1 στα 6.
- στ) Αντιλαμβάνονται ότι σε ένα μεγάλο αριθμό ρίψεων, η πιθανότητα του κάθε ενδεχομένου τείνει στο 1/6.

Η συγκεκριμένη ενασχόληση λοιπόν ενισχύει ταυτόχρονα την αντίληψη της τυχαιότητας, την πιθανολογική και τη μαθηματική σκέψη. Όπως έχουν δείξει οι Piaget & Inhelder η ανάπτυξη των πιθανολογικών εννοιών συνδέεται ευθύγραμμα με την ανάπτυξη των λογικομαθηματικών εννοιών (Piaget & Inhelder 1975).

Συμπεράσματα

Τα παιδιά που είναι εξοικειωμένα με παιχνίδια τύχης, ανεξάρτητα από τη τυπική τους εκπαίδευση, αναπτύσσουν με συνέπεια τις έννοιες της τύχης και των πιθανοτήτων. Η ενασχόληση και εξοικείωση τους με τα παιχνίδια, λειτουργεί διδακτικά και σε συνδυασμό με την ηλικία, τους επιτρέπει να εξαλείψουν τις παρανοήσεις που εμφανίζονται σε αρχικά στάδια. Αντίστροφα, τα παιδιά που δεν παίζουν παιχνίδια τύχης δεν είναι εξοικειωμένα με τις σχετικές έννοιες, ακόμα και αν πηγαίνουν σχολείο. Επομένως σε ένα περιβάλλον που τα παιδιά ενθαρρύνονται να παίζουν παιχνίδια τύχης οι πιθανολογικές έννοιες αναπτύσσονται συνεπέστερα σε σχέση με ένα περιβάλλον που τα παιδιά δεν ενθαρρύνονται να παίζουν παιχνίδια τύχης.

Η αντίληψη του κοινωνικού περιγύρου για την τύχη, όπως εκφράζεται μέσω της γλώσσας, διαμορφώνει άμεσα την αντίληψη των παιδιών για την τύχη, ιδιαίτερα αν τα παιδιά δεν έχουν άλλες σχετικές εμπειρίες. Όταν λοιπόν τα παιδιά δεν παίζουν παιχνίδια τύχης η αντίληψή τους διαμορφώνεται από την συγκεκριμένη τρέχουσα αντίληψη για την τύχη, που όμως απέχει από αυτή των μαθηματικών.

Η ενασχόληση με παιχνίδια τύχης έχει και παράπλευρα οφέλη, βοηθώντας τα παιδιά στο μέτρημα, στους προφορικούς λογαριασμούς και στην κίνηση σε ταμπλό.

Βιβλιογραφικές αναφορές

- Amir G.S. & Williams J.S. (1999), Cultural influences on children's probabilistic thinking, *The Journal of Mathematical Behavior*, 18 (1), 85–107
- Chassapis, D. and Chatzivasileiou E. (2008) Socio-cultural influences on children's conceptions of chance and probability. Στο J.F. Matos, P. Valero & K. Yasukawa (Eds.) *Proceedings of the Fifth International Mathematics Education and Society Conference*, Lisbon: Centro de Investigacao em Educacao, Universidade de Lisboa – Department of Education, Learning and Philosophy, Aalborg University

- Fishbein E., Nello S.M. & Marino S. M. (1991) Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 523-549.
- Jones G. & Thornton C. (2005) An overview of research into the teaching and learning of probability. Στο G. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, New York: Springer, 65-92.
- Knight R. (2003) *The games children play, The foundation for mathematical learning*, Paris: Unesco.
- Langrall C. & Mooney E. (2005) Characteristics of elementary school students' probabilistic reasoning. Στο G. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, New York: Springer, 95-119.
- Piaget J. & Inhelder B. (1975) *The origin of the idea of chance in children*, London: Routledge & Kegan Paul,
- San Martin E. (2006) Piaget's viewpoint on the teaching of probability: a breaking –off with the traditional notion of chance? Στο A. Rossman & B. Chance (eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference On Teaching Statistics (ICOTS-7)*, Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Sharma S. (2006) Personal experiences and beliefs in probabilistic reasoning: Implications for research, *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 1 (1), Διαθέσιμο στο δικτυακό τόπο www.iejme.com
- Vygotsky L. S. (1988) *Σκέψη και γλώσσα*, Αθήνα: Εκδόσεις Γνώση
- Χασάπης, Δ. (2011), *Υλικά και δραστηριότητες διδασκαλίας μαθηματικών*, Αθήνα: ΕΚΠΑ-ΤΕΑΠΗ.

Δημήτρης Χασάπης	dchasapis@ecd.uoa.gr
Γιάννα Νιαχοπέτρου	giapan2003@yahoo.gr

[λευκή σελίδα]

ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΤΙΚΟΥ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΥ

Απόστολος Παπανικολάου

*Καθηγητής Εθνικής Εστίας
Επιστημών*

Άρης Μαυρομαμάτης

*Καθηγητής Εθνικής Εστίας
Επιστημών*

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Με το παρόν κείμενο περιγράφουμε μια από τις διδακτικές διαδικασίες με τη βοήθεια παιχνιδιών και αλληλεπιδραστικών αντικειμένων (ΑΕ), που εφαρμόζουμε στα εκπαιδευτικά προγράμματα στην Εθνική Εστία Επιστημών και αφορά στην εισαγωγή στην έννοια της πιθανότητας. Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να εφαρμοσθεί και στην οποιαδήποτε σχολική τάξη, διότι το αλληλεπιδραστικό αντικείμενο – παιχνίδι το οποίο χρησιμοποιείται, είναι απλό στη κατασκευή και χρήση του.

A. Θεωρητικό υπόβαθρο

Η προτεινόμενη δραστηριότητα αφορά την εισαγωγή στην έννοια της πιθανότητας ως ορίου της σχετικής συχνότητας, για τυχαία φαινόμενα με πεπερασμένο δειγματικό χώρο και ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Ουσιαστικά για την κατανόηση του νόμου των μεγάλων αριθμών. Ο νόμος των μεγάλων αριθμών και η βασιζόμενη σε αυτόν θεμελίωση της έννοιας της πιθανότητας, θεωρούμε ότι είναι μια από τις καταλληλότερες έννοιες που μπορούν να εισαχθούν μέσω παιγνιώδους δραστηριότητας και όχι απλής πληροφορίας.

B. Διδακτικό υπόβαθρο

Σχετικά με το ρόλο των παιχνιδιών και των εκθεμάτων ως *προκλήσεων* στη διδασκαλία των Μαθηματικών μέσα κι έξω από την τάξη γίνεται αναφορά στο : Challenging Mathematics in and beyond the classroom, Icmi Study 16: (2009).

Θεωρούμε σκόπιμο να αναφερθούμε στο διδακτικό περιβάλλον, τις διδακτικές καταστάσεις και τις βασικές διαφοροποιήσεις των παραμέτρων της όλης διδακτικής «νοόσφαιρας» που θα πρέπει να έχει κατά νου ο διδάσκων, όταν χρησιμοποιεί για τη διδασκαλία του παιχνίδια και αλληλεπιδραστικά εκθέματα (ΑΕ), ώστε να έχει την ικανότητα και δυνατότητα παρέμβασης, διότι η όλη διαδικασία υπάρχει κίνδυνος να εκτραπεί σε ένα παιχνίδι χωρίς διδακτική χρησιμότητα και γενικά απώλεια του ελέγχου της τάξεως.

Επισημαίνουμε εν συντομία βασικές παραμέτρους οι οποίες επηρεάζονται σε μια τέτοια διαδικασία :

B1. Συνυπευθυνότητα

Η μεταβίβαση μεγάλου μέρους της υπευθυνότητας του δασκάλου στους μαθητές για την αναζήτηση της γνώσης σωστά έχει τονισθεί και είναι η αρχή για μια επιτυχημένη πορεία προς την αναζήτηση της γνώσης. Μια τέτοια μεταβίβαση από τον καθηγητή και αντίστοιχη αποδοχή της συνυπευθυνότητας από τους μαθητές είναι πιο εύκολη σε ένα περιβάλλον που χρησιμοποιεί παιγνιώδεις κατασκευές. Ο

καθηγητής καλεί τους μαθητές ουσιαστικά να παίξουν ένα παιχνίδι γνώσης.

B2. Διατύπωση αληθινά πραγματικού προβλήματος από τους ίδιους τους μαθητές και όχι ενασχόληση με πραγματικό πρόβλημα που αφηγείται ο καθηγητής στους μαθητές.

Η αξία της λύσης προβλημάτων και μάλιστα πραγματικών προβλημάτων (problem solving, and real problem solving) είναι πλέον πέραν πάσης αμφισβήτησης στη Διδακτική των Μαθηματικών. Οι μαθηματικές έννοιες προκύπτουν ως προϊόντα *ανάγκης* της ανθρώπινης σκέψης για την επίλυση προβλημάτων, τα οποία όμως διαμορφώνονται από την αλληλεπίδραση των ίδιων των μαθητών με «χειροπιαστά αντικείμενα» και όχι από τους διδάσκοντες καθηγητές όπως κατά κανόνα σε ένα παραδοσιακό μάθημα.

B3. Αβεβαιότητα (uncertainty)

Η χρησιμότητα της αβεβαιότητας ως δυναμικής διδακτικής κατάστασης αναγκαίας (αλλά όχι και ικανής) για την ανάπτυξη της σκέψης έχει επισημανθεί από τον Piazet, τον Dweey αλλά και την Zaslavsky (2005). Η κατάσταση που προκαλεί αμφιβολία, δισταγμό, κλονισμό της πίστης στις υπάρχουσες γνώσεις και κυρίως στις αισθήσεις είναι μια νοητική πρόκληση, μια ανισορροπία (disequilibrium, κατά τον Piazet) η οποία τείνει να αποκατασταθεί ακριβώς με την αναζήτηση της γνώσης εκείνης που θα επαναφέρει την ισορροπία. Η αβεβαιότητα στοχεύει πλην των άλλων στην συμμόρφωση και όχι στην αφομοίωση ασύνδετης συσσωρευμένης ύλης.

Το παιχνίδι με ένα ΑΕ ενεργεί ακριβώς έτσι. Μια άγνωστη κατασκευή, ένα παιχνίδι που προκαλεί κάποιον να παίζει μαζί του, τον οδηγεί να βιώσει αυτήν ακριβώς την αβεβαιότητα και να αισθανθεί την ανάγκη ελέγχου του, άρα τη γνώση του λόγου της ύπαρξης και κατασκευής του.

Όλα τα προηγούμενα έχουν και την αρνητική τους επίπτωση αν δεν χειρισθούν κατάλληλα με κυριότερο τον παράγοντα χρόνο. Είναι προφανές ότι τέτοιες διαδικασίες απαιτούν περισσότερο χρόνο από

μια παραδοσιακή διδασκαλία, και χρειάζεται μια συνεχής εγρήγορση και διαχείριση του χρόνου ώστε ούτε να εκπέσει σε μια παρουσίαση χωρίς ενεργό συμμετοχή των μαθητών αλλά ούτε και σε μια ατέμονα διαδικασία χωρίς κατάληξη στους επιθυμητούς διδακτικούς στόχους.

Γ. Περιγραφή του παιχνιδιού

Πρόκειται για ένα απλό «μπιμπερό» στο εσωτερικό του οποίου εισάγουμε πλαστικά σφαιρίδια – «χάντρες» ίδιας κατασκευής αλλά διαφορετικού χρώματος. Π.χ. 2 κίτρινα και 1 πράσινο. Το στόμιο είναι κατάλληλα διασκευασμένο ώστε κατά την αναστροφή του «μπιμπερό», να εμφανίζονται στο στόμιο, μόνο δύο από τα πλαστικά σφαιρίδια που έχουμε τοποθετήσει στο εσωτερικό του.



Το ζητούμενο από τους μαθητές είναι να προβλέψουν, τι ζεύγος πρόκειται να εμφανισθεί με μεγαλύτερη συχνότητα : Ζεύγος του ίδιου χρώματος (ΚΚ) η ζεύγος με διαφορετικό χρώμα (ΚΠ, ΠΚ). Η έννοια που υποκρύπτεται από την ερώτηση είναι φυσικά η έννοια της σχετικής συχνότητας.

Πριν την διεξαγωγή του παιχνιδιού εισάγεται ένας προβληματισμός (που αφορά και τη διερεύνηση των προυπαρχουσών αντιλήψεων) : Όλοι έχουν ακούσει ότι η «πιθανότητα» στη ρίψη νομίσματος είναι «ένα προς ένα» ή «πενήντα – πενήντα». Τι σημαίνει στην πράξη αυτό; Αν ρίξουμε ένα νόμισμα δυο φορές θα φέρει τη μια κορόνα και την άλλη γράμματα; Αντίστοιχα αν το ρίξουμε 100 φορές θα εμφανιστούν 50 φορές κορόνα και 50 γράμματα; Επίσης τι σημαίνει ότι ο άσσος έχει στο ζάρι «πιθανότητα» εμφάνισης 1 προς 6; Φυσικά δεν πρόκειται να υπάρξουν ορθές απαντήσεις, από μαθητές που δεν έχουν διδαχθεί και κατανοήσει το νόμο των μεγάλων αριθμών.

Στο σημείο αυτό είναι αρκετά χρήσιμο και ανάλογα με το νοητικό επίπεδο των μαθητών να συζητηθεί η διάκριση των φαινομένων σε αιτιοκρατικά (προβλέψιμα) και σε τυχαία (μη προβλέψιμα) και οι όροι *a priori* και *a posteriori*. Το ερώτημα που τίθεται αφορά στην εκ των προτέρων πρόβλεψη για ένα τυχαίο φαινόμενο. Μπορεί να προβλεφθεί κάτι για ένα τυχαίο φαινόμενο;

Οι συνήθεις, καταρχήν διαισθητικές απαντήσεις στηρίζονται σπάνια σε σωστούς συλλογισμούς. Και αυτό γιατί οι μαθητές, είτε έχουν είτε όχι διδαχθεί την έννοια του δειγματικού χώρου, δεν προσανατολίζουν τη σκέψη τους προς τα εκεί. Έτσι οι δύο συνηθέστερες απαντήσεις είναι :

α) *«Αφού έχουμε δυο κίτρινες χάντρες και μια πράσινη , σαφώς θα υπερτερήσουν οι κίτρινες, άρα θα έχουμε μεγαλύτερο ποσοστό (ΚΚ) και μάλλον 2 προς 1, δηλ. 2/3 εμφανίσεις του ίδιου χρώματος και 1/3 διαφορετικού».*

β) *«Σίγουρα θα εμφανισθεί μια κίτρινη, άρα μένουν μία πράσινη και μία κίτρινη, άρα θα έχουμε αναλογία εμφάνισης 1-1 ή ποσοστό 50 τοις εκατό εμφανίσεις του ίδιου χρώματος και 50 τοις εκατό διαφορετικού χρώματος».*

Στη συνέχεια καλούνται να παίξουν – πειραματισθούν, αναδεύοντας και αναποδογυρίζοντας το μπιμπερό από 30 έως 60 φορές και να καταγράψουν τα αποτελέσματα.

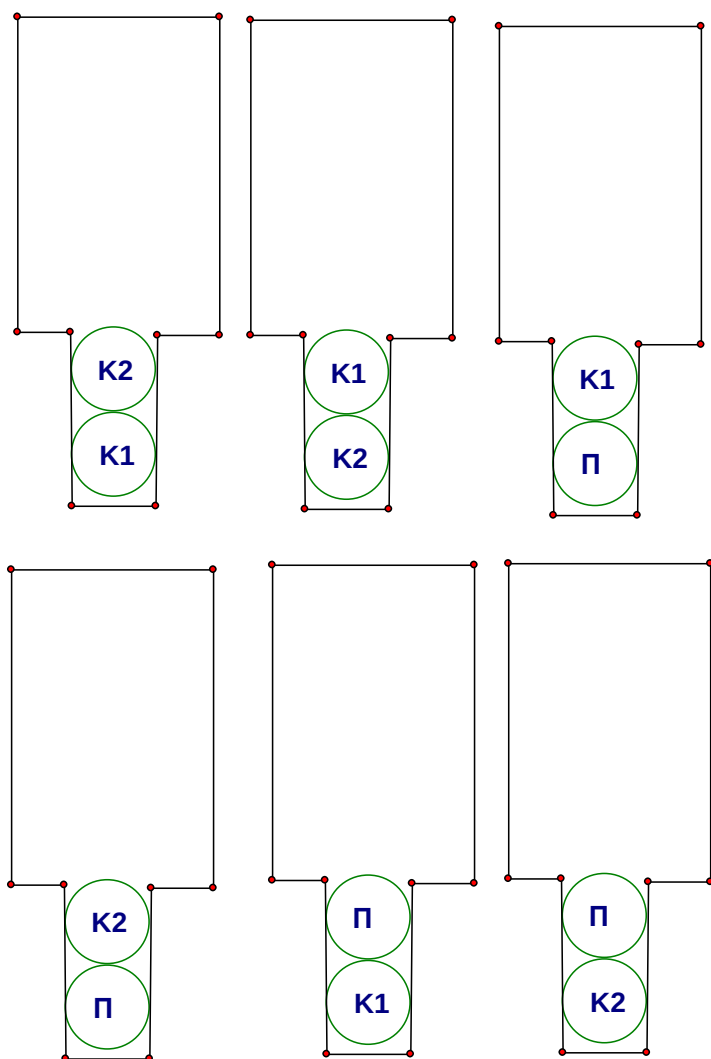
Ένας μαθητής καταγράφει σε ένα πίνακα με δυο στήλες τα αποτελέσματα της διαδοχικής εκτέλεσης του πειράματος από τους συμμαθητές του.

Ίδιο χρώμα	Διαφορετικό χρώμα
√√√√√√...	√√√√√√√√√√√√√√...

Ένας δεύτερος μαθητής καταγράφει σε έναν άλλο πίνακα το πηλίκο του αριθμού των εμφανίσεων ζευγών ίδιου χρώματος προς το συνολικό αριθμό επαναλήψεων και το πηλίκο των εμφανίσεων των ζευγών διαφορετικού χρώματος προς το συνολικό εκάστοτε αριθμό επαναλήψεων :

Αριθμός επανάληψης	Ίδιο χρώμα/ σύνολο	Διαφορετικό χρώμα/ σύνολο
1		
2		
3		
4		
5		
...		
59	19/60	40/60
60	19/60	41/60

Μέχρι τις πρώτες 30 επαναλήψεις είναι φανερό η μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης σφαιριδίων με διαφορετικό χρώμα , παρά με το



Είναι φανερό ότι τα ζεύγη ιδίου χρώματος είναι 2 σε σύνολο 6, ενώ τα διαφορετικού χρώματος είναι 4 σε σύνολο 6. Οι δυνατότητες εμφάνισης είναι ισότιμες άρα και το φαινόμενο είναι φυσικό να εξελιχθεί προς αυτήν την κατεύθυνση.

Στο σημείο αυτό μπορούμε να εισάγουμε ένα επιπλέον πράσινο σφαιρίδιο ίδιας κατασκευής μετα προηγούμενα και να ζητήσουμε από τους μαθητές την *a priori* πρόβλεψη και ανάλογα με το διατιθέμενο χρόνο την πειραματική επαλήθευση για μια σειρά ενδεχόμενα.

Επίσης μπορούμε (σε σχέση με τους διδακτικούς στόχους για την ηλικία των μαθητών) να αφαιρέσουμε το ένα πράσινο σφαιρίδιο και να εισάγουμε άλλο επίσης πράσινο ίδου όγκου αλλά από βαρύτερο υλικό, π.χ. από μεταλλικό. Ο *a priori* υπολογισμός είναι αδύνατος φυσικά και μόνο *a posteriori*, μετά από ικανό αριθμό επαναλήψεων μπορούμε να οδηγηθούμε στην πιθανότητα ως όριο της σχετικής συχνότητας.

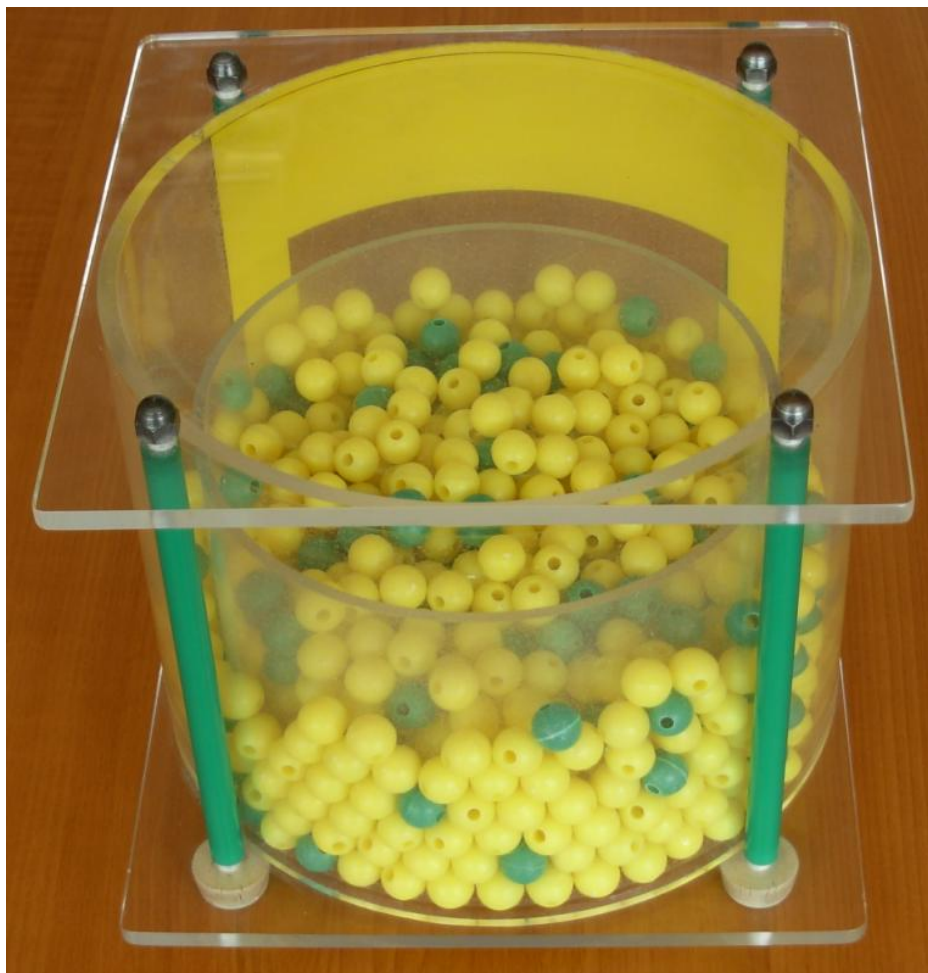
Οι έννοιες της σχετικής συχνότητας, του δειγματικού χώρου, των ενδεχομένων και της κλασικής πιθανότητας στην περίπτωση ισοπιθάνων ενδεχομένων, καθώς και της πιθανότητας ως ορίου της σχετικής συχνότητας προκύπτει έτσι αβίαστα και με ένα παιγνιώδη και ευχάριστο διδακτικό τρόπο.

Φυσικά θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και ένα νόμισμα ή ένα ζάρι. Και στις δυο περιπτώσεις όμως υπάρχουν τεχνικές δυσκολίες. Πολλά παιδιά, δεν ρίχνουν το νόμισμα αμερόληπτα, ενώ στην περίπτωση του ζαριού χρειάζεται μεγάλος αριθμός επαναλήψεων ώστε να αρχίσει να σταθεροποιείται η σχετική συχνότητα.

Συμπληρωματικά του παραπάνω παιχνιδιού διαθέτουμε και ένα ομοίωμα ρουλέτας, με το οποίο εκτός των άλλων οι μαθητές διακρίνουν τα απλά και σύνθετα ενδεχόμενα (ζυγά –μονά, μαύρο – κόκκινο κλπ).



Συναφής είναι και η δραστηριότητα εισαγωγής στις θεμελιώδεις έννοιες της Στατιστικής. Πληθυσμός, δείγμα, αξιοπιστία, αντιπροσωπευτικότητα, είναι οι έννοιες στις οποίες στοχεύουμε ζητώντας από τους μαθητές να εκτιμήσουν με ένα λογικό τρόπο πόσες είναι οι πράσινες και πόσες οι κίτρινες σφαίρες από ένα συνολικό πληθυσμό 1000 σφαιρών σε ένα διαφανές δοχείο με κατάλληλα «παράθυρα» δειγματοληψίας.



Δ. Συζήτηση

Οι ηλικίες στις οποίες έχουμε εφαρμόσει τη δραστηριότητα - παιχνίδι είναι 12-16 κυρίως ετών. Για την ηλικία αυτή δεν τίθεται κανένα θέμα ικανότητας ανάπτυξης της στοχαστικής σκέψης των παιδιών. Το θέμα αυτό ερευνάται για τις μικρότερες ηλικίες όπως φαίνεται από την παρατιθέμενη αρθρογραφία.

Συγκεκριμένα οι αρχικές μελέτες σχετικά με την ανάπτυξη της πιθανολογικής σκέψης από τα παιδιά ήταν μάλλον απαισιόδοξες όσον αφορά στις δυνατότητες παιδιών του νηπιαγωγείου και των πρώτων

τάξεων του δημοτικού (Piaget, & Inhelder, 1975). Μεταγενέστερες μελέτες (Falk & Levin 1980, Fischbein, & Schnarch, 1997, Jones et al, 1999) δείχνουν ότι υπάρχουν σημαντικά περιθώρια για την υλοποίηση μαθησιακών δραστηριοτήτων για τις πιθανότητες κατάλληλων για μικρά παιδιά και κυρίως ότι είναι σημαντική η εμπλοκή των νηπίων σε τέτοιες εμπειρίες ώστε να αναπτύξουν σταδιακά και ευκολότερα τυπική πιθανολογική σκέψη σε μεγαλύτερες ηλικίες. (Φεσάκη, Καφούση, Σκουμπουρδή, 2008).

Στο NCTM 200 θεωρείται χρήσιμη και αναγκαία η εισαγωγή των πιθανοτήτων από τις μικρές τάξεις του Δημοτικού, σε επίπεδο χρήσης πιθανολογικών εκφράσεων κάτι που ερευνούν σε σχετική τους εργασία οι Καλαβάσης και Σκουμπουρδή (2003).

Οι Γαγάτσης και Σταυροπούλου έχουν πειραματιστεί και καθώς αναφέρουν με επιτυχία σε μαθητές Δ Δημοτικού για την εισαγωγή των μαθητών στις πιθανότητες με το λογισμικό «*Probability Explorer*».

Το θέμα επομένως δεν είναι αν πρέπει να διδάσκονται οι πιθανότητες από το Δημοτικό σχολείο αλλά σε ποιο βάθος και με ποιον τρόπο. Η επισήμανση των Χατζηπαντελή, Γκάσταρη (1995) ότι οι μαθητές έχουν μια τάση να ανταποκρίνονται στα προβλήματα μαθηματικής φύσεως ανατρέχοντας σε τύπους και αλγοριθμικές διαδικασίες που έχουν συναντήσει σε παρόμοια προβλήματα προτού καν σχηματίσουν καθαρή εικόνα του προβλήματος, ενώ δεν ανταποκρίνονται σε προβλήματα στα οποία υπεισέρχονται νέες και κυρίως πραγματικές καταστάσεις νομίζουμε ότι είναι ακόμα επίκαιρη. Και οφείλεται στο ότι στις κλασικές φυσικομαθηματικές επιστήμες μελετούμε τα φαινόμενα αντικαθιστώντας τα με ένα θεωρητικό ντετερμινιστικό μοντέλο, δίνοντας έτσι όμως μια αποσπασματική άποψη της πραγματικότητας, αφού δεν υπάρχει στην ουσία φυσικό φαινόμενο το οποίο να μην επηρεάζεται από τυχαίες παραμέτρους.

Παρότι δεν έχουμε πειραματιστεί με την ηλικία των μαθητών Δημοτικού οι διδακτικές εφαρμογές σε μαθητές των πρώτων τάξεων του Γυμνασίου έδειξαν ένα έδαφος πρόσφορο για την εγγραφή σοβαρών υποθηκών για τη μετέπειτα στο Λύκειο ή το πανεπιστήμιο αυστηρή εισαγωγή στην έννοια της πιθανότητας. Μαθητές επίσης που διδάχτηκαν (πολύ σπάνια) σε στοιχειώδες επίπεδο από το Δημοτικό στο να διακρίνουν το προβλέψιμο από το τυχαίο, το βέβαιο από το

πιθανόν και άλλες πιθανολογικές εκφράσεις, δείχνουν μεγαλύτερη ωριμότητα στην εισαγωγή στην έννοια της πιθανότητας.

Στο ερωτηματολόγιο αξιολόγησης επισυνάπτουμε μεταξύ άλλων ερωτήματα εύρεσης δειγματικού χώρου σε πειράματα τύχης καθώς και ερωτήματα ταξινόμησης φαινομένων σε τυχαία και προκαθορισμένα. Οι επιτυχείς απαντήσεις κυμαίνονται σε ποσοστό άνω του 70%, ενώ οι ορθές απαντήσεις στο ίδιο ερωτηματολόγιο πριν τη διεξαγωγή της διδασκαλίας δεν υπερβαίνουν το 20% . Σύγκριση επίσης με κλασική διδασκαλία σε σχολική τάξη των ίδιων διδασκόντων χωρίς τη χρήση των ΑΕ δίνει ποσοστό ορθών απαντήσεων περίπου 50% , κάτι που αναδεικνύει τη δύναμη των ΑΕ ως μέσων διδασκαλίας.

Στην Ελλάδα η πρώτη πραγματική επαφή με την έννοια της πιθανότητας γινόταν τα τελευταία χρόνια στη Γ Λυκείου, ενώ από εφέτος άρχισε να διδάσκεται στην Α Λυκείου, παρότι στο αναλυτικό πλαίσιο σπουδών προβλέπεται μια στοιχειώδης εξοικείωση με την έννοια από το Δημοτικό και κατόπιν μια εισαγωγή στη Γ Γυμνασίου. Πεποίθησή μας είναι ότι μπορεί και πρέπει να διδάσκεται ενωρίτερα. Φυσικά η διδασκαλία των πιθανοτήτων παρουσιάζει ιδιαιτερότητες και δυσκολίες, αυτό όμως δεν είναι λόγος να μην έρχονται ενωρίς οι μαθητές σε επαφή με την έννοια της στοιχειώδους απλής πιθανότητας.

Βιβλιογραφία – Αναφορές

Barbeau, E. J. Taylor Peter J. (Eds.) (2009), *Challenging Mathematics in and beyond the classroom*, ICMI Study 16, Springer.

Zaslavsky Orit (2005), *Seizing the Opportunity to Create Uncertainty in Learning Mathematics*, *Educational Studies in Mathematics*, 60, 297-321

Polaki M. V., *Using Instruction to Identify Key Features of Basotho Elementary Students' Growth in Probabilistic Thinking* , *Mathematical Thinking and Learning*, 4:4, 285-313.

Pratt Dave: *Shaping the Experience of Young and Naïve Probabilists*, ICME 11, TSG 13, Monterrey, Mexico, 2008

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975) : The origin of the idea of chance in children. Routledge & Kegan Paul.

Papariotodemou Efi, Potari Despina, Pitta Demetra, Prospective teachers' awareness of young children's Stochastic activities, ICOTS-7, 2006

Φεσάκης, Καφούση, Σκουμπουρδή (2008) : Δημιουργώντας στοχαστικές εμπειρίες για την εξέλιξη των διαισθητικών αντιλήψεων νηπίων με τη βοήθεια διαδικτυακών μικρόκοσμων. 6ο Πανελλήνιο συνέδριο, οι ΤΠΕ στην εκπαίδευση, Κύπρος.

Καφούση, Σ. & Σκουμπουρδή, Χ. (2002) : Οι ικανότητες των παιδιών στην έννοια της πιθανότητας όταν έρχονται στο νηπιαγωγείο. 15ο Πανελλήνιο Συνέδριο Στατιστικής, Ιωάννινα, 339-346

Σκουμπουρδή, Χ. & Καλαβάσης, Φ. (2003): Η εξέλιξη της σκέψης των παιδιών του δημοτικού όσον αφορά στις πιθανολογικές εκφράσεις. 20ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας: Η διαδρομή του παιδιού στα Μαθηματικά από την προσχολική ηλικία μέχρι την ενηλικίωση, Βέροια, 509-518

Σκουμπουρδή, Χ. & Καλαβάσης, Φ. (2004): Το διδακτικό υλικό στο κεφάλαιο των πιθανοτήτων της Γ' τάξης του Δημοτικού: τρόπος κατανόησης και διαχείρισής του από μαθητές και δασκάλους. Στο Δ. Χασάπης (επιμ) Εικόνα, σχήμα και λόγος στη διδασκαλία των μαθηματικών 3ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών, Θεσσαλονίκη, ΑΠΘ, 105-116

Σταυροπούλου, Γαγάτσης : Στατικές και δυναμικές αναπαραστάσεις : η περίπτωση των πιθανοτήτων, 9ο Συνέδριο Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου.

Χαϊζηπαντελής Θ. και Γκάσταρης, Π. (1995): Εννοιολογικές δυσκολίες και εσφαλμένες αντιλήψεις στις Πιθανότητες και στη Στατιστική, *Ευκλείδης Γ'*, 43, 35-68.

Απόστολος Παπανικολάου
apapani@math.uoa.gr

Άρης Μαυρομάτης
amavromatis@rhodes.aegean.gr

ΤΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΕΥΡΩ-ΑΞΙΟΠΟΛΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ, ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ- ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΩΝ ΑΞΙΩΝ ΚΑΙ ΑΕΙΦΟΡΟΥ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

**Μ. Μοσκοφόγλου-Χιονίδου, Γ. Λιαράκου Γ, Ε. Βαστή Ε,
Γ. Γιακουμάκης, Σ. Δουκάκης, Δ. Ζυμπίδης, Γ. Κετικίδου,
Ε. Κουβαρά, Δ. Κουμπιάς, Χ. Κωσταντίνου, Ε. Λαζάρου Ε,
Β. Μαραγκού, Π. Παπαϊωάννου & Α. Τσιάβου**

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής εκπαίδευσης

Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται ορισμένες από τις διαδικασίες μέσα από τις οποίες φοιτητές/τριες του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Αιγαίου κατασκεύασαν το παιχνίδι Ευρω-Αξιοπολη με σκοπό αυτό ν' αποτελέσει διδακτικό υλικό. Χρησιμοποιούνται, στην προκειμένη περίπτωση, εκτός από θεωρητικές αρχές της Διδακτικής των Μαθηματικών και όροι σχετικοί με την οικονομική κρίση και την αειφόρο ανάπτυξη με έμφαση στις κοινωνικο-πολιτισμικές αξίες.

Ένας από τους στόχους της Ευρω-Αξιοπόλης είναι όχι μόνο η αμφισβήτηση της επικρατούσας λειτουργίας των Μαθηματικών ως μέσο αναπαραγωγής της κυρίαρχης ιδεολογίας και της οικονομίας της αγοράς αλλά και η ανάδειξη της συμβολής τους στην κοινωνική χειραφέτηση των μαθητών/τριών.

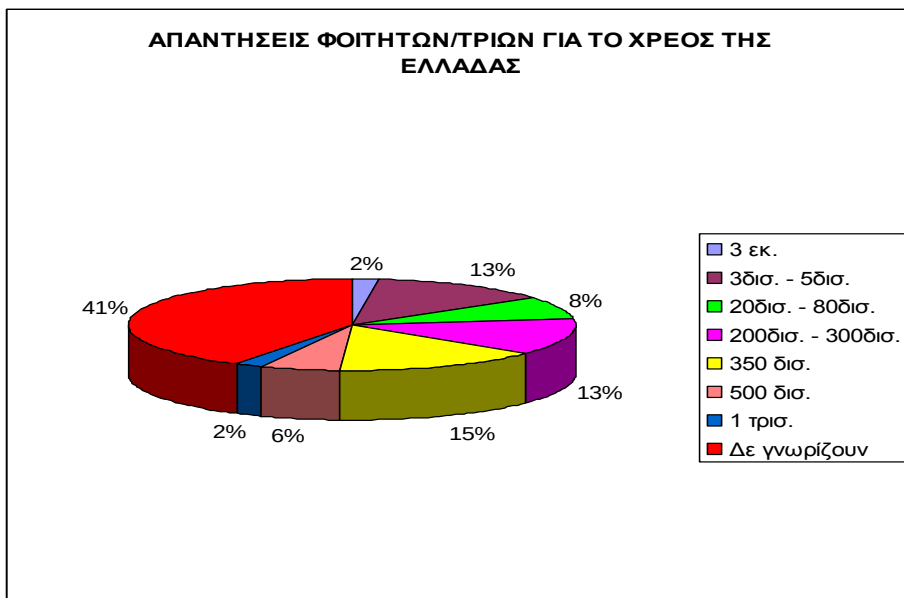
*Στο παιδί μου δεν άρεσαν ποτέ τα παραμύθια
Και του μιλούσανε για Δράκους και για το πιστό σκυλί
Για τα ταξίδια της Πεντάμορφης και για τον άγριο λύκο
Μα στο παιδί μου δεν άρεσαν ποτέ τα παραμύθια
Τώρα, τα βράδια, κάθομαι και του μιλώ
Λέω το σκύλο σκύλο, το λύκο λύκο, το σκοτάδι σκοτάδι,
Του δείχνω με το χέρι τους κακούς ...
Α, φτάνει πια! Πρέπει να λέμε την αλήθεια στα παιδιά.*

Μ. Αναγνωστάκης, Τα ποιήματα, Πλειάς

Εισαγωγή

Τον Δεκέμβριο του 2011 τελειόφοιτοι φοιτητές/τριες του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Αιγαίου κλήθηκαν να καταγράψουν το ελληνικό χρέος με κάθε μορφή αριθμητικής αναπαράστασης, στοχεύοντας στο να αναδειχθεί ότι η αναπαράσταση με δύναμη του 10 δεν προτιμάται στην καθημερινότητα. Διαπιστώθηκε ότι υπήρξε φοιτητής/τρια που ανέφερε ότι το χρέος ήταν μόνο 3 εκ. ευρώ, ενώ το 41% των φοιτητών/τριών απάντησε ότι δεν γνώριζε το ποσό του χρέους. Στο γράφημα 1 απεικονίζονται ποσοτικά οι απαντήσεις που δόθηκαν από τους 53 φοιτητές/τριες, στις οποίες αποτυπώνεται το γεγονός ότι μόλις το 15 % γνώριζε το ακριβές ποσό.

Τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής αποτέλεσαν το έναυσμα για την ενεργοποίηση των φοιτητών/τριων σχετικά με την οικονομική κρίση και γενικότερα τη σύγχρονη οικονομική ανάπτυξη. Αναγνώστηκαν και μελετήθηκαν άρθρα του ημερήσιου τύπου, όπως: *Ο Τρίτος δρόμος για την Οικονομία, Ισχυρό μήνυμα με 75% υπέρ του ευρώ, Μετρούν τις επιπτώσεις από το κούρεμα του χρέους τα επιτελεία των τραπεζών* (αντίστοιχα εφημ. ΤΑ ΝΕΑ, εφημ. Καθημερινή, εφημ. Καθημερινή 22-2-2012), και έγιναν προτάσεις για την αντιμετώπιση του ελληνικού χρέους, οι οποίες εμπεριείχαν βασικές έννοιες Μαθηματικών, απλούς και σύνθετους οικονομικούς όρους αλλά και γενικότερους προβληματισμούς γύρω από την αιφόρο ανάπτυξη.



Γράφημα 1. Απαντήσεις φοιτητών/τριών για το χρέος της Ελλάδας.

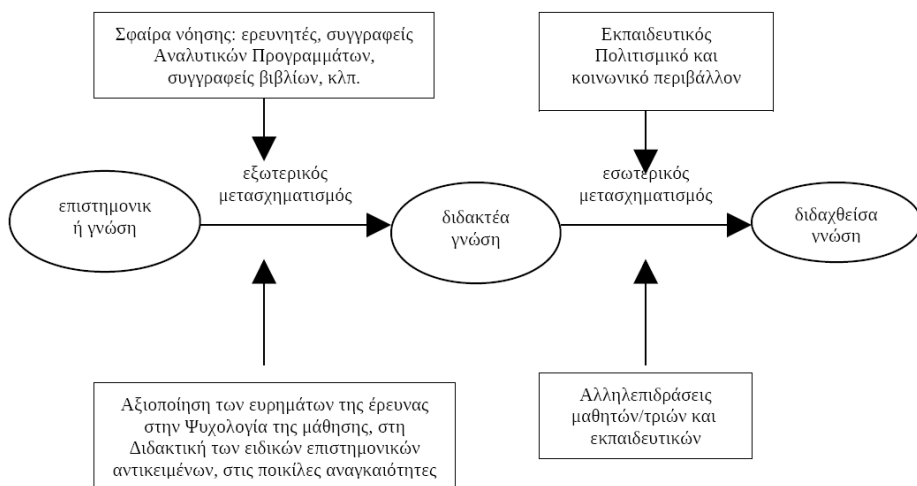
Οι παραπάνω διαδικασίες αποτέλεσαν την αφορμή για μια προσπάθεια να κατασκευαστεί το επιτραπέζιο παιχνίδι Ευρω-Αξιόπολη, προκειμένου να χρησιμοποιηθεί ως διδακτικό υλικό για τη μάθηση των ποσοστών και των επιτοκίων, με τη χρήση θεμάτων και όρων της αειφόρου ανάπτυξης. Σκοπός είναι οι μαθητές/τριες (αλλά και οι φοιτητές/τριες) μέσα από παιγνιώδη τρόπο να έρθουν σε επαφή αφενός με μαθηματικές έννοιες και αφετέρου με οικονομικά και κοινωνικοπολιτισμικά δεδομένα της εποχής μας. Γι' αυτό το λόγο, κρίθηκε απαραίτητη η δημιουργία κατάλληλων δραστηριοτήτων που να προκαλούν το ενδιαφέρον των μαθητών/τριών ενώ παράλληλα να παρέχουν τις ευκαιρίες εκείνες που θα οδηγήσουν στην εξοικείωσή τους με τα σύγχρονα δεδομένα.

Θεωρητικές Προσεγγίσεις

Τα τελευταία περίπου 30 χρόνια η θετικιστική αντίληψη περί αξιακά ελεύθερης επιστήμης δέχεται κριτικές, όπως επίσης και η μαθηματική εκπαίδευση έχει αμφισβητηθεί ως προς την αξιακή της ουδετερότητα, αλλά και για τη φύση της γνώσης στα Μαθηματικά (Lakatos 1976, Davis και Hersh 1981, Ernest 1990, Bloor 1991). Υπό αυτήν την αντιπλατωνική και αντιθετικιστική επιστημολογική οπτική γωνία, η ερευνήτρια Leone Burton (2004) προτείνει τις παρακάτω πέντε περιοχές, σε συνάρτηση με τις οποίες είναι καλό να διερευνάται η μαθηματική γνώση:

1. Το πρόσωπο και η κοινωνικο/πολιτιστική του συνάφεια.
2. Η αισθητική της μαθηματικής σκέψης την οποία το πρόσωπο επικαλείται.
3. Η καλλιέργεια της ενόρασης και της διόρασης του προσώπου.
4. Η αναγνώριση και η προώθηση διαφορετικών προσεγγίσεων και μορφών (μαθηματικής) σκέψης του προσώπου.
5. Η σφαιρικότητα των εφαρμογών (της μαθηματικής γνώσης) του προσώπου (Burton 2004).

Επιπλέον, η μαθηματική γνώση ως μια πολυεπίπεδη κατάκτηση, προϋποθέτει διαδικασίες τεχνολογικά πλαισιωμένες και παιδαγωγικά προσανατολισμένες που βασίζονται σε ολόπλευρη, διαθεματική και ρεαλιστική προσέγγιση. Αυτό προϋποθέτει την αντιστοίχιση των μαθηματικών εννοιών σε καταστάσεις της πραγματικότητας που αποδίδει ένα πρόσθετο μη μαθηματικό νόημα στις μαθηματικές έννοιες και παράλληλα καθορίζει ένα πλαίσιο αναφοράς τους στην πραγματικότητα (Χασάπης, 1996). Στην περίπτωση μας ποσοστά και επιτόκια –ένα μέρος της πραγματικότητας της οικονομικής κρίσης– ‘μετασχηματίστηκαν’ (Σκούρτου, 2010, Σοφός, 2010) σε διδακτικό επιτραπέζιο παιχνίδι, την Ευρω-Αξιόπολη. Ο μετασχηματισμός αυτός έχει βάσεις στη θεωρία του Chevallard (Ραβάνης, 2009), σύμφωνα με την οποία αναπτύσσονται δύο φάσεις, όπως αποτυπώνονται στο σχήμα που ακολουθεί:



Σχήμα 1. Οι φάσεις του διδακτικού μετασχηματισμού

Κατά την πρώτη φάση του «εξωτερικού διδακτικού μετασχηματισμού», πραγματοποιείται η μετατροπή επιλεγμένων θεμάτων από επιστημονική γνώση σε αναλυτικό πρόγραμμα, σε διδακτικά εγχειρίδια, σε βιβλία για τους/τις εκπαιδευτικούς, σε επίσημα κείμενα οδηγιών αλλά και σε παιχνίδια, όπως το επιτραπέζιο παιχνίδι Ευρω-Αξιοποίηση. Η εργασία αυτή γίνεται συνήθως από ομάδες ερευνητών και εκπαιδευτικών με εξειδικευμένη γνώση, μακριά από τη σχολική τάξη και τις διεργασίες της, ενώ λαμβάνονται υπόψη οι κοινωνικές, πολιτισμικές και εκπαιδευτικές αναγκαιότητες, η γνωστική ετοιμότητα των παιδιών, οι υλικές συνθήκες της εκπαίδευσης καθώς και η ετοιμότητα των εκπαιδευτικών παραγόντων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση το πλαίσιο του εξωτερικού διδακτικού μετασχηματισμού ήταν ένα πανεπιστημιακό μάθημα.

Στη δεύτερη φάση του «εσωτερικού διδακτικού μετασχηματισμού», εκπαιδευτικοί, αλλά και μαθητές/τριες, χρησιμοποιούν το κάθε είδους υλικό που έχει παραχθεί στην πρώτη φάση, προσαρμόζοντάς το στις ιδιαίτερες συνθήκες εργασίας και επικοινωνίας τους. Επίσης, από το υλικό του εξωτερικού διδακτικού μετασχηματισμού γίνονται επιλογές, αναθεωρήσεις, απορρίψεις και προσαρμογές στις ιδιαίτερες συνθήκες της κάθε σχολικής πραγματικότητας. Οι διαδικασίες του διδακτικού μετασχηματισμού και στις δύο φάσεις του, εγκαταλείπουν

τις προτεραιότητες και τις κύριες επιλογές των επιστημών αναφοράς και αναδεικνύουν άλλες επιλογές στενά συναρτημένες με τους εκπαιδευτικούς στόχους. Στην περίπτωση μας αναδείχτηκαν κοινωνικο-πολιτισμικοί στόχοι σχετικοί με θέματα αειφορίας και με διδακτικές διαδικασίες.

Η εργασία αυτή εστιάζει στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων της πρώτης φάσης, του «εξωτερικού διδακτικού μετασχηματισμού», στην οποία επιχειρείται η παραγωγή διδακτικού υλικού, η οποία στηρίχθηκε στις παραπάνω θεωρητικές προσεγγίσεις. Η δεύτερη φάση άρχισε με την πιλοτική εφαρμογή του υλικού σε Δημοτικό Σχολείο της Ρόδου, στο οποίο διδάσκει ένας από τους συγγραφείς, και τα αποτελέσματά της θα αποτελέσουν αντικείμενο άλλης εργασίας.

Η έρευνά μας

Αφορμή για την ανάπτυξη της Ευρω-Αξιοποίησης αποτέλεσε η μελέτη τριών άρθρων από τον ημερήσιο ελληνικό Τύπο -που αναφέρθηκαν στην εισαγωγή- τα οποία δόθηκαν κατά τη διάρκεια των προπτυχιακών μαθημάτων της Εφαρμοσμένης Διδακτικής των Μαθηματικών (Πρακτικές Ασκήσεις Γ' Φάσης). Κύριος άξονας του περιεχομένου των άρθρων αυτών ήταν η οικονομική κρίση. Στηριζόμενοι στο συγκεκριμένο περιεχόμενο και τους συναφείς οικονομικούς όρους και ύστερα από προτροπή της διδάσκουσας στους φοιτητές/τριες για την κατασκευή ενός επιτραπέζιου παιχνιδιού που να συμφωνεί με τις αρχές της Διδακτικής των Μαθηματικών, επιλέχθηκε το *κεφάλαιο* 52: «Μετρώ την αξία με χρήματα, όσο – όσο», του σχολικού εγχειριδίου της ΣΤ' Δημοτικού. Οι μαθηματικοί στόχοι (ποσοστά και επιτόκια, προβλήματα με χρήματα) θεωρήθηκαν κατάλληλοι για την αντιστοίχιση των δραστηριοτήτων του βιβλίου με τους κανόνες του υπό κατασκευή παιχνιδιού.

Το παιχνίδι αναπτύχθηκε από μια ομάδα 10 φοιτητών/τριών. Ωστόσο, θα πρέπει να επισημανθεί ότι η τελική μορφή του παιχνιδιού προέκυψε μέσα από τη συνεχή ανατροφοδότηση και τις σχέσεις αλληλεπίδρασης με τη διδάσκουσα, εξωτερικούς συνεργάτες και τους υπόλοιπους φοιτητές/τριες που συμμετείχαν στο μάθημα. Επίσης, από τον αρχικό έως τον τελικό σχεδιασμό του παιχνιδιού

πραγματοποιήθηκαν διαδοχικές μορφοποιήσεις, προκειμένου να ληφθούν υπόψη οι ακόλουθοι παράγοντες:

- α) Η διατύπωση του περιεχομένου των εντολών - επιλογών να είναι σαφής και, ταυτόχρονα, να συμπεριλαμβάνονται οι αντίστοιχοι όροι της οικονομικής κρίσης και απλές μαθηματικές δραστηριότητες (ανοιχτά-κλειστά προβλήματα).
- β) Οι αριθμοί που χρησιμοποιούνται αφενός να ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα και αφετέρου οι μαθητές/τριες να είναι σε θέση να τους διαχειριστούν κατά την εφαρμογή του παιχνιδιού.
- γ) Να υπάρχει εξοικείωση των μαθητών/τριών με «ρεαλιστικές» καταστάσεις.
- δ) Να προαχθούν τα Μαθηματικά ως ένα κοινωνικο-πολιτισμικό προϊόν μέσα από θέματα και όρους της αειφόρου ανάπτυξης

Τέλος, θα πρέπει να σημειωθεί ότι κατά τη διάρκεια της κατασκευής του παιχνιδιού Ευρω-Αξιόπολη, έντονος υπήρξε ο προβληματισμός της ομάδας των φοιτητών/τριών για το αν θα ήταν συνετό να παρουσιαστούν στους μαθητές/τριες τα δεδομένα της οικονομικής κρίσης ή αν αυτοί θα έπρεπε να παραμείνουν αποστασιοποιημένοι από τη συγκεκριμένη δύσκολη οικονομική και κοινωνική κατάσταση. Ωστόσο, ως ομάδα εμείναμε στην άποψή μας, ότι δηλαδή οφείλουμε να προωθούμε την εμπλοκή των μαθητών/τριών σε επίκαιρα και τρέχοντα θέματα που επηρεάζουν άμεσα τη ζωή τους, δεδομένου ότι ακόμη και διεθνείς οργανισμοί (π.χ. WHO 2009, Council of Europe 2003, UNESCO με το διεθνές πρόγραμμα 'Μεγαλώνοντας στις πόλεις') και μη Κυβερνητικές Οργανώσεις (π.χ. Save the Children) προωθούν τη συμμετοχή των παιδιών στις δημοκρατικές αποφάσεις τόσο στις εθνικές όσο και στις τοπικές κοινότητες (Λιαράκου 2012).

Έτσι λοιπόν μέσα από τις διαδικασίες που αναφέρθηκαν ήδη πιο πάνω πραγματοποιήθηκε η κατασκευή του παιχνιδιού Ευρω-Αξιόπολη ως διδακτικού-υποστηρικτικού εργαλείου για τη διδασκαλία του 52^{ου} Κεφαλαίου από το βιβλίο των Μαθηματικών της Στ' Τάξης. Το παιχνίδι άρχισε να κατασκευάζεται τον Φεβρουάριο του 2012 και η πρώτη του μορφή ολοκληρώθηκε τον Μάιο του ίδιου έτους. Μετά από πολύωρες συναντήσεις της ομάδας για την κατασκευή των μαθηματικών δραστηριοτήτων, δημιουργήσαμε δραστηριότητες που

σχετίζονται με ποσοστά και επιτόκια, τα οποία ενσωματώθηκαν τόσο στο ταμπλό όσο και στις κάρτες επιλογή. Στις επόμενες σελίδες παρουσιάζονται το ταμπλό, οι κανόνες αλλά και οι καρτέλες της Ευρω-αξιοποίησης που ανέπτυξε η ομάδα των φοιτητών/τριών που ανήκει στους εισηγητές/ριες της εργασίας αυτής.

Στη συνέχεια το παιχνίδι δόθηκε σε 40 τελειόφοιτους συμφοιτητές/τριες (3 άνδρες και 37 γυναίκες) του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Αιγαίου, οι οποίοι είναι και αυτοί εγγεγραμμένοι στο μάθημα «Εφαρμοσμένη Διδακτική των Μαθηματικών-Πρακτικών Ασκήσεων Γ' Φάσης», με στόχο να ερευνηθούν οι διαφορές ανάμεσα στην κλασική Μονόπολη και την Ευρω-αξιοποίηση αλλά και οι βασικές μαθηματικές θεωρητικές προσεγγίσεις που διατρέχουν το παιχνίδι.

Ως ερευνητική προσέγγιση ακολουθήθηκε η ποιοτική έρευνα. Η συλλογή των δεδομένων έγινε με τη χρήση γραπτού ερωτηματολογίου που συμπλήρωσαν οι φοιτητές/τριες στη διάρκεια του μαθήματος. Το ερωτηματολόγιο περιελάμβανε τις εξής τρεις ερωτήσεις ανοικτού τύπου:

1. Γράψτε τουλάχιστον 5 πέντε λέξεις που κατά τη γνώμη σας χαρακτηρίζουν το παιχνίδι Μονόπολη στην κλασική του μορφή.
2. Γράψτε τουλάχιστον 5 πέντε λέξεις που κατά τη γνώμη σας χαρακτηρίζουν το παιχνίδι Ευρω-Αξιοποίηση.
3. Παίζοντας Ευρω-Αξιοποίηση ποιες θεωρητικές προσεγγίσεις εντοπίζετε από τη βιβλιογραφία που έχετε μελετήσει κατά τη διάρκεια των Πρακτικών Ασκήσεων στα δύο τελευταία εξάμηνα;

Οι δυο πρώτες ερωτήσεις χρησιμοποιήθηκαν προκειμένου να αναδυθούν οι εννοιολογικοί συσχετισμοί που κάνουν οι φοιτητές/τριες τόσο σχετικά με την κλασική Μονόπολη όσο και με την Ευρω-αξιοποίηση. Όπως έχουμε ήδη επισημάνει, αυτοί οι φοιτητές/τριες δεν ανήκαν στην ομάδα κατασκευής του παιχνιδιού και έρχονταν για πρώτη φορά σε επαφή με το παιχνίδι. Έτσι απάντησαν αυθόρμητα, χωρίς να επηρεαστούν από προκαθορισμένες έννοιες των ερευνητών ή να καθοδηγηθούν σε συγκεκριμένες απαντήσεις. Στην τελευταία ερώτηση οι φοιτητές/τριες κλήθηκαν να ανακαλέσουν και να καταγράψουν τις θεωρητικές προσεγγίσεις που εντόπισαν στο παιχνίδι

Ευρω-Αξιόπολη και αντιστοιχούσαν στη βιβλιογραφία που είχαν μελετήσει κατά τη διάρκεια των Πρακτικών Ασκήσεων.

Τα ερευνητικά δεδομένα που συγκεντρώθηκαν από τις παραπάνω τρεις ερωτήσεις βασίστηκαν στις γραπτές απαντήσεις των συμμετεχόντων φοιτητών/τριών και οργανώθηκαν σε θεματικούς άξονες βάσει των οποίων πραγματοποιήθηκε η κατάταξη των απαντήσεων. Εν συνεχεία μετασχηματίστηκαν σε ποσοτικά δεδομένα.

Αποτελέσματα

Στις δυο πρώτες ερωτήσεις, στις οποίες οι φοιτητές/τριες κλήθηκαν να καταγράψουν τις λέξεις-κλειδιά που χαρακτηρίζουν το παιχνίδι Μονόπολη, στην κλασική του μορφή, και το παιχνίδι Ευρω-αξιόπολη που κατασκεύασαν συμφοιτητές τους καταγράφηκαν 69 και 80 αναφορές αντίστοιχα. Όλες οι απαντήσεις ομαδοποιήθηκαν σε κατηγορίες με κριτήριο το σημασιολογικό τους περιεχόμενο. Διαμορφώθηκαν συνολικά τέσσερις κατηγορίες που καλύπτουν το σύνολο των λέξεων που καταγράφηκαν (Πίνακας 1), οι οποίες είναι οι εξής: α) οικονομικοί όροι β) στοιχεία του παιχνιδιού γ) αξίες και δ) μαθηματικές έννοιες. Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να σημειώσουμε ότι αν και οι κατηγορίες που προέκυψαν είχαν σαφή όρια μεταξύ τους, ωστόσο υπάρχει το ενδεχόμενο ορισμένες λέξεις που αναφέρθηκαν από τους φοιτητές/τριες να ενέχουν κάποιο βαθμό ασάφειας και κατ' επέκταση θα μπορούσαν αυτές να ενταχθούν σε περισσότερες από μια κατηγορίες.

Όσον αφορά τις λέξεις κλειδιά που χαρακτηρίζουν την κλασική Μονόπολη, η κατηγορία με τη μεγαλύτερη συχνότητα στις απαντήσεις των φοιτητών/τριών αφορά οικονομικούς όρους. Η κατηγορία αυτή συγκέντρωσε συνολικά 51 αναφορές ενώ καταγράφηκαν 12 διαφορετικές λέξεις. Τις περισσότερες αναφορές συγκέντρωσαν οι ακόλουθοι όροι: αγοροπωλησίες (15) που σημείωσε τις περισσότερες αναφορές σε αυτή την ερώτηση, χρήματα (10), επενδύσεις (5) επιχειρήσεις (4), φόροι (4), ενοίκιο (4), τράπεζα (3) και μετοχές (2). Η δεύτερη κατηγορία, με 12 συνολικά αναφορές, σχετίζεται με στοιχεία του παιχνιδιού της κλασικής Μονόπολης. Ο όρος με τις περισσότερες αναφορές σε αυτή την κατηγορία είναι η φυλακή (5) στην οποία

πρέπει να πάει ο παίκτης όταν λάβει την αντίστοιχη εντολή και ακολουθούν οι αποφάσεις (2) που πρέπει να πάρει σχετικά με τις αγοροπωλησίες. Η τρίτη κατηγορία περιλαμβάνει δυο αξίες, τον ανταγωνισμό (2) και τον ατομισμό (2) καθώς και μια αναφορά του ίδιου του όρου «αξία». Και οι δυο αξίες που καταγράφηκαν σχετίζονται με το καπιταλιστικό οικονομικό μοντέλο, στο οποίο άλλωστε στηρίζεται το παιχνίδι. Εντυπωσιακό είναι το χαμηλό ποσοστό που συγκέντρωσε η τέταρτη κατηγορία λέξεων «μαθηματικές έννοιες» καθώς έγινε μόνο 1 αναφορά από φοιτητή.

Στη δεύτερη ερώτηση, στην οποία οι φοιτητές/τριες κλήθηκαν να καταγράψουν τις λέξεις που χαρακτηρίζουν το παιχνίδι Ευρω-αξιοποίηση, η εικόνα είναι διαφορετική. Η κατηγορία που συγκέντρωσε τις περισσότερες αναφορές (41) είναι αυτή των αξιών. Αναφέρθηκαν συνολικά 9 διαφορετικές αξίες με την ισονομία (21) να καταλαμβάνει την πρώτη θέση. Άλλες αξίες που καταγράφηκαν είναι η αλληλεγγύη (4), η φιλανθρωπία (2), ο σεβασμός (2), η ενεργή συμμετοχή (2) και ο συνάνθρωπος (2), ενώ η δικαιοσύνη και ο αλτρουισμός είχαν από μια αναφορά. Στη δεύτερη θέση βρίσκεται η κατηγορία των οικονομικών όρων με 19 αναφορές. Σε αντίθεση με την αντίστοιχη κατηγορία της κλασικής Μονόπολης όπου κυριαρχούσε ο όρος αγοροπωλησίες, εδώ τις περισσότερες αναφορές συγκέντρωσε η οικονομική κρίση (6), ενώ οι υπόλοιποι όροι είναι σε γενικές γραμμές κοινοί (χρήματα, επένδυση κλπ). Πολύ κοντά ως προς τις αναφορές (17) βρίσκεται και η τρίτη κατηγορία με τα στοιχεία του παιχνιδιού. Η ανάγκη συνεργασίας (6) ανάμεσα στις ομάδες που παίζουν την Ευρω-αξιοποίηση αλλά και τα ηθικά διλήμματα (5) στα οποία καλούνται οι παίκτες να δώσουν απαντήσεις, αποτελούν τα στοιχεία που ξεχώρισαν οι φοιτητές/τριες. Επίσης οι ευρωπαϊκές χώρες (4) αλλά και η αειφορία (3) αναδείχτηκαν ως συστατικά στοιχεία της Ευρω-αξιοποίησης. Τέλος και σε αυτή την ερώτηση η κατηγορία 'Μαθηματικές έννοιες' συγκέντρωσε ελάχιστες αναφορές καθώς μόνο δυο φοιτητές/τριες αναφέρθηκαν στις μαθηματικές πράξεις των ποσοστών και των επιτοκίων που απαιτούνται να κάνουν οι παίκτες στη διάρκεια του παιχνιδιού.

Πίνακας 1. Οι εννοιολογικοί συσχετισμοί της Ευρω-Αξιόπολης και της Μονόπολης στην κλασσική της μορφή με βάση τις απαντήσεις των 40 φοιτητών/τριών.

<u>Μονόπολη στην κλασσική της μορφή</u>	<u>Ευρω-Αξιόπολη</u>
1. Οικονομικοί όροι	1. Οικονομικοί όροι
Σύνολο αναφορών 51	Σύνολο λέξεων: 19
Σύνολο διαφορετικών λέξεων: 12	Σύνολο διαφορετικών λέξεων: 7
Αγοροπωλησίες (15/40)	Οικονομική κρίση (6/40)
Χρήματα (10/40)	Χρήματα (5/40)
Επένδυση (5/40)	Επένδυση (3/40)
Φόροι (4/40)	Οικονομική συναλλαγή (2/40)
Επιχειρήσεις (4/40)	Ομόλογα (1/40)
Ενοίκιο (4/40)	Μετοχές (1/40)
Τράπεζα (3/40)	Διαχείριση (1/40)
Μετοχές (2/40)	
Μονοπώλιο (1/40)	
Ιδιοκτησία (1/40)	
Κέρδος (1/40)	
Οικονομία (1/40)	

2. Στοιχεία του παιχνιδιού	2. Στοιχεία του παιχνιδιού
Σύνολο αναφορών: 12	Σύνολο αναφορών: 17
Σύνολο διαφορετικών λέξεων: 6	Σύνολο διαφορετικών λέξεων: 4
Φυλακή (5/40) Αποφάσεις ((2/40) Παιχνίδι (2/40) Εντολές (1/40) Κάρτες (1/40) Ψυχαγωγία (1/40)	Συνεργασία σε ομάδες (6/40) Ηθικά διλήμματα (5/40) Ευρωπαϊκές χώρες (4/40) Αειφορία (3/40)
3. Αξίες	3. Αξίες
Σύνολο αναφορών: 5	Σύνολο αναφορών: 41
Σύνολο διαφορετικών λέξεων : 3	Σύνολο διαφορετικών λέξεων: 9
Ανταγωνισμός (2/40) Ατομισμός (2/40) Αξίες (1/40)	Ισονομία (21/40) Αξίες (9/40) Αλληλεγγύη (4/40) Φιλανθρωπία (2/40) Σεβασμός (2/40) Ενεργή Συμμετοχή (2/40) Συνάνθρωπος (2/40) Δικαιοσύνη (1/40) Αλτρουϊσμός (1/40)
4. Μαθηματικές έννοιες	4. Μαθηματικές έννοιες
Σύνολο αναφορών: 1	Σύνολο αναφορών: 2
Σύνολο διαφορετικών λέξεων: 1	Σύνολο διαφορετικών λέξεων: 1
Μαθηματικές Πράξεις (1/40)	Μαθηματικές πράξεις (2/40)

Στην τρίτη ερώτηση ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες φοιτητές/τριες, αφού έπαιξαν την Ευρω-Αξιόπολη μέσα στην πανεπιστημιακή τάξη, να καταγράψουν τις θεωρητικές προσεγγίσεις που εντόπισαν στο παιχνίδι και να τις αντιστοιχίσουν στη βιβλιογραφία που είχαν μελετήσει στα δύο τελευταία εξάμηνα. Οι απαντήσεις τους ομαδοποιήθηκαν και κατηγοριοποιήθηκαν στους παρακάτω άξονες: α) στο περιεχόμενο ή πλαίσιο των συμφραζομένων (context) των δραστηριοτήτων, β) σε διδακτικές στρατηγικές και τη μάθηση, γ) στην τεχνολογική παιδαγωγική διάσταση στα Μαθηματικά, δ) σε επιστημολογικά θέματα και ε) στην έννοια δραστηριότητα. Μετά την κατηγοριοποίηση αυτή οι φοιτητές/τριες που ανήκουν στην ερευνητική-συγγραφική ομάδα παρέπεμψαν σε αντίστοιχα χωρία από τις θεωρητικές προσεγγίσεις τις οποίες είχαν μελετήσει στα δύο τελευταία εξάμηνα.

Παρακάτω αναφέρουμε ενδεικτικά χωρία από τις παραπάνω κατηγορίες.

α) Περιεχόμενο ή πλαίσιο των συμφραζομένων (context) των δραστηριοτήτων:

Για το πλαίσιο των δραστηριοτήτων οι φοιτητές/τριες αναφέρθηκαν στις ρεαλιστικές δραστηριότητες από τα άρθρα των Σόνιας Καφούση, Τάτση Κων/νου και Χρυσάνθης Σκουμπουρδή ενώ για τα πλαίσια αναφοράς των μαθηματικών εννοιών στον Δημήτρη Χασάπη, συγκεκριμένα στο χωρίο:

«Με βάση την έρευνα τα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών στο δημοτικό αναφέρονται κυρίως σε εμπορικές δραστηριότητες. Παράλληλα προβάλλεται έμμεσα ως κυρίαρχη μορφή της ανθρώπινης δραστηριότητας η εμπορευματική αγορά και οι συναλλαγές της, ενώ αντίστοιχα η παραγωγή προϊόντων και η προσφορά υπηρεσιών παρουσιάζονται αφηρημένα ως απρόσωπες και κοινωνικά απροσδιόριστες, δηλαδή ως τεχνικές και κατά συνέπεια ως κοινωνικά ουδέτερες δραστηριότητες» (Χασάπης, 2010).

β) Διδακτικές στρατηγικές- Μάθηση:

Η διδακτική παρέμβαση που προτάθηκε μέσω του παιχνιδιού περιλαμβάνει τη λήψη κοινών αποφάσεων και στρατηγικών για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων οικονομικής φύσης, δίνοντας πρόσφορο έδαφος για την αξιοποίηση του ομαδοσυνεργατικού μοντέλου διδασκαλίας (βλ κανόνες παιχνιδιού). Στόχοι της εκπαιδευτικής δράσης ήταν οι μαθητές να αναλάβουν ρόλους, να διατυπώσουν τις απόψεις τους, να μάθουν να ακούν τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας, να οικοδομήσουν σχέσεις συνεργασίας και αλληλοβοήθειας. Παρακάτω παρατίθενται ενδεικτικά τα σχετικά χωρία από τη θεωρητική υποστήριξη:

«Σύμφωνα με τη Συνειρμική/Βασισμένη σε συσχετίσεις (associative) διδακτική στρατηγική η ομαδοποίηση των μαθητών/τριών έχει σαν στόχο να διευκολυνθούν στην νοητική, συναισθηματική και κοινωνική ανάπτυξή τους» (Beck, 1998 βλ. παράρτημα).

«Πιστεύουμε ότι το να κάνεις μαθηματικά σε σχολικό πλαίσιο είναι πρώτα απ' όλα μια κοινωνική δραστηριότητα και όχι μόνο ατομική. Η συλλογική μάθηση είναι εκ φύσεως συστημική με την έννοια ότι πρόκειται για μια αλληλεπιδραστική διαδικασία». (Νικολαντωνάκης, 2010)

Επίσης στη τελική φάση του παιχνιδιού χρησιμοποιήθηκε (βλ. παράρτημα) η διδακτική τεχνική του debate (Beck, 1998 στο Πιπίνος, Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, 2010 στο Παράρτημα) κατά την οποία οι μαθητές επιχειρηματολογούν, διατυπώνουν τις απόψεις τους και αναλαμβάνουν ενεργό ρόλο για την ανάδειξη της νικήτριας ομάδας. Πιο αναλυτικά οι μαθητές/τριες καθ' όλη τη διαδικασία του παιχνιδιού έχουν διττό σκοπό: να συγκεντρώσουν αφενός χρήματα και αφετέρου πόντους ανάλογα με το κοινωνικό έργο που έχουν επιτελέσει για τη χώρα τους.

Ακόμη, η ανάδειξη και καλλιέργεια των κοινωνικοπολιτισμικών αξιών των μαθητών πραγματοποιήθηκε κάτω από το πρίσμα του κονστρουκτιβιστικού μοντέλου μάθησης (Driver και Oldham 1986 στο Πιπίνος, Χιονίδου-Μοσκοφόγλου 2010, στο Παράρτημα). Η εποικοδομητική προσέγγιση έχει ως βασικό άξονα την ενεργό συμμετοχή του υποκειμένου στην οικοδόμηση της γνώσης. Η γνώση

κατασκευάζεται από το ίδιο το υποκείμενο κατά την αλληλεπίδρασή του με τον κόσμο. Αυτή η κατασκευή αποκτά έναν υποκειμενικό χαρακτήρα, αφού θεμελιώνεται στα προγενέστερα νοητικά σχήματα του μαθητή, η οποία είναι άμεσα συνυφασμένη με το κοινωνικό γίνεσθαι και καθορίζει τον τρόπο αξιοποίησης την νέας γνώσης.

Τέλος για θέματα μάθησης οι ερευνητές φοιτητές/τριες αναφέρθηκαν στα:

«Μαθαίνουμε δρώντας. Διαμέσου των εμπειριών μας κατασκευάζουμε τη γνώση και οι εμπειρίες μας επηρεάζονται από τις γνωστικές μας κεραίες....Η μάθηση συμβαίνει μέσα σε ένα κοινωνικό πλαίσιο. Η δημιουργία λεκτικής διαμάχης μεταξύ μαθητών και μαθητριών μπορεί να διευκολύνει την απόκτηση της γνώσης. Μιλάμε εδώ για διαμάχες κοινωνικογνωστικές: κοινωνικές γιατί σε κάθε αντίθεση υπάρχει ένα κοινωνικό μέρος, γνωστικές γιατί αυτή η αντίθεση αναφέρεται σε γνώσεις. Η ομαδοσυνεργατική διδασκαλία ενισχύει τη μάθηση, αφού μπορεί να καλλιεργήσει όχι μόνο κοινωνικά χαρακτηριστικά συνεργατικότητας και όχι ανταγωνιστικού περιβάλλοντος, αλλά μπορεί και να συμβάλει σε μεγάλο βαθμό στην προσωπική αναστοχαστική διαδικασία της μάθησης των μαθηματικών, στην επιχειρηματολογία των μαθητών/τριών, στη χρήση της μαθηματικής γλώσσας και στον πλουραλισμό των διαφορετικών λύσεων των προβλημάτων».(Χιονίδου, 1999, Matsagouras & Hertz-Lazarowitz, 1999).

γ) Τεχνολογική και παιδαγωγική διάσταση του παιχνιδιού στα Μαθηματικά

Οι φοιτητές/τριες ανέφεραν ότι η Ευρω-Αξιόπολη είναι καλό να γίνει και ηλεκτρονικά (έγινε από άλλη ομάδα φοιτητών/τριών και δοκιμάστηκε στην τάξη) και οι ερευνητές φοιτητές/τριες παρέπεμψαν στο:

«Η καρδιά της καλής διδασκαλίας με τη χρήση της τεχνολογίας περιλαμβάνει τρία ουσιαστικά στοιχεία: το περιεχόμενο (ύλη διδασκαλίας), την παιδαγωγική και την τεχνολογία». (Koebler και Mishra, στο Δουκάκης, Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Ζυμπίδης, 2010: 268)

δ) Επιστημολογικά θέματα.

Μία φοιτήτρια η Γεωργία ανέφερε ότι η Ευρω-Αξιόπολη ανταποκρίνεται στο μοντέλο Επιστημολογικών Προκλήσεων της Leone Burton (2005) και συγκεκριμένα στην πρώτη διάσταση από την *Αντικειμενικότητα στα Μαθηματικά ως ένα κοινωνικοπολιτισμικό προϊόν*, γράφοντας η ίδια:

Αρχικά, τα Μαθηματικά ήταν θετικιστικά, αντικειμενικά, χωρίς αξίες και μάλιστα μακριά από τον άνθρωπο. Τώρα είναι εδώ μαζί με κοινωνικοπολιτιστικές αξίες...

ε) Έννοια δραστηριότητα

Τέλος οι ερευνητές φοιτητές/τριες ανακάλεσαν τη θεωρία Δραστηριότητας και παρέπεμψαν στο χωρίο :

«σε οποιαδήποτε ανθρώπινη δραστηριότητα (enterprise) η οποία ενέχει κίνητρο και είναι προσανατολισμένη προς ένα αντικείμενο, που έχει τις ρίζες της στην πολιτιστική ιστορία και που εξαρτάται για την υλοποίησή της από συγκεκριμένες ενέργειες κατευθυνόμενες από στόχους (Jaworski & Potari, 2009: 7).

Αντί επιλόγου

Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται μερικές από τις διαδικασίες, μέσω των οποίων οδηγηθήκαμε στην κατασκευή ενός επιτραπέζιου παιχνιδιού για μαθητές/τριες της έκτης δημοτικού, της Ευρω-Αξιόπολης. Σκοπός του εν λόγω παιχνιδιού είναι από τη μία να χρησιμοποιηθεί ως διδακτικό υλικό για τη μάθηση ποσοστών και επιτοκίων και παράλληλα να ανατρέψει την επικρατούσα λειτουργία των Μαθηματικών ως μέσο αναπαραγωγής της κυρίαρχης ιδεολογίας. Το τελευταίο επιτυγχάνεται εφόσον οι παίκτες έρχονται αντιμέτωποι με κοινωνικο-πολιτισμικές αξίες και γενικότερα με θέματα και όρους της Αειφόρου Ανάπτυξης. Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί ότι κατά τη διάρκεια του σχεδιασμού επιδιώξαμε να συμπεριλάβουμε στις καρτέλες (εντολές ή επιλογές) απλά και ρεαλιστικά μαθηματικά προβλήματα όλων των κατηγοριών (ανοικτά-κλειστά) που σχετίζονται

με ζητήματα της αειφόρου ανάπτυξης, όπως η χρήση ανανεώσιμων πηγών ενέργειας και η βιολογική γεωργία.

Τα αποτελέσματα της πιλοτικής έρευνας που πραγματοποιήθηκε σε φοιτητές/τριες είναι ενθαρρυντικά. Αν και το ίδιο το παιχνίδι βρίσκεται στο στάδιο της αξιολόγησης και συνεπώς είναι ακόμα υπό διαμόρφωση, ωστόσο φαίνεται ότι μπορεί να επιτύχει τους στόχους του. Είναι ενδεικτικοί προς αυτή την κατεύθυνση οι όροι που χρησιμοποίησαν οι φοιτητές για να χαρακτηρίσουν αρχικά την κλασική Μονόπολη και στη συνέχεια την Ευρω-Αξιόπολη. Ενώ στην πρώτη περίπτωση κυριαρχούν οι οικονομικοί όροι και οι αξίες που αναφέρονται στο κυρίαρχο οικονομικό μοντέλο, στην περίπτωση της Ευρω-Αξιόπολης έχουμε ανατροπή του σκηνηκού. Εδώ κυριαρχούν πλέον αξίες όπως η ισονομία και η αλληλεγγύη που συνδέονται με την αειφόρο ανάπτυξη και μάλιστα με τη ριζοσπαστική ερμηνεία της έννοιας αυτής. Οι οικονομικοί όροι συνεχίζουν να χαρακτηρίζουν το παιχνίδι, με την οικονομική κρίση να κατέχει πλέον τη σημαντικότερη θέση. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν και οι λέξεις-κλειδιά που χρησιμοποίησαν οι φοιτητές για να περιγράψουν τα συστατικά στοιχεία του παιχνιδιού. Ενώ για τη Μονόπολη αναφέρουν κυρίως όρους που περιγράφουν το παιχνίδι (π.χ. φυλακή, εντολή), στην Ευρω-Αξιόπολη αναδεικνύονται ποιοτικά χαρακτηριστικά που σχετίζονται με τις ικανότητες τις οποίες αναπτύσσουν οι παίκτες, όπως η επίλυση ηθικών διλημμάτων και η συνεργασία ανάμεσα στα άτομα και τις ομάδες που λαμβάνουν μέρος στο παιχνίδι.

Επίσης ζητήθηκε από τους φοιτητές/τριες να καταγράψουν τις θεωρητικές προσεγγίσεις που εντόπισαν στην Ευρω-αξιόπολη και να τις αντιστοιχίσουν στη βιβλιογραφία που είχαν μελετήσει στα δύο τελευταία εξάμηνα. Οι απαντήσεις τους κατηγοριοποιήθηκαν στους άξονες: α) περικείμενο ή πλαίσιο των συμφραζομένων (context) των δραστηριοτήτων β) διδακτικές στρατηγικές και μάθηση γ) τεχνολογική παιδαγωγική διάσταση στα Μαθηματικά δ) επιστημολογικά θέματα και ε) στην έννοια «δραστηριότητα» και αφορούσαν βασικά θέματα διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών αλλά και επιστημολογίας των Μαθηματικών.

Ένα σημαντικό εύρημα άξιο συζήτησης και μελλοντικής έρευνας είναι το γεγονός ότι οι φοιτητές/τριες μόνο όταν τους ζητήθηκε ρητά να συσχετίσουν το παιχνίδι με τη θεωρητική υποστήριξη η οποία τους δόθηκε από τα πανεπιστημιακά μαθήματα, έδωσαν απαντήσεις που όπως φάνηκε εντάσσονται σε ένα κοινωνικό κονστρουκτιβιστικό πλαίσιο. Αντίθετα στη μεγάλη τους πλειοψηφία οι φοιτητές/τριες δεν ανακάλεσαν μαθηματικές έννοιες (μόνο μία φοιτήτρια απόφοιτη μαθηματικού Τμήματος και μία ακόμη φοιτήτρια ανέφεραν μαθηματικούς υπολογισμούς) όταν κατέγραψαν αυθόρμητα λέξεις-κλειδιά που χαρακτηρίζουν τα δυο παιχνίδια, αν και η ώρα που απαντούσαν στην ερώτηση ήταν ώρα της Διδακτικής των Μαθηματικών και η διδάσκουσα ήταν παρούσα και γινόταν μαθηματική συζήτηση πριν και μετά. Το ερώτημα που περιμένει ερευνητικές ερμηνίες είναι γιατί τα Μαθηματικά μπορεί να είναι μία αόρατη κουλούρα σε ένα επιτραπέζιο παιχνίδι; (Chionidou-Moskofoglou, Vitsilaki, Vasiliadis 2006)

Κλείνοντας θα λέγαμε η κατασκευή και πιλοτική εφαρμογή της Ευρω-αξιόπολης συνεχίζεται και *χαρακτηρίζεται από διαρκή μετασχηματισμό και αλλαγή, κατευθύνεται από κίνητρα, και είναι ένας συλλογικός και συστημικός σχηματισμός* (Jaworski & Potari, 2009) και ότι οι εμπειρίες που αποκτήθηκαν αποτυπώνονται στη θεωρητική υποστήριξη των Despina Potari & Barbara Jaworski (2002):

Μέσω του project οι δάσκαλοι (φοιτητές/τριες) έμαθαν να αναπτύσσουν τον σχεδιασμό των έργων τους και τις αλληλεπιδράσεις τους στην τάξη, ενώ οι πανεπιστημιακοί έμαθαν να θεωρητικοποιούν την αναπτυξιακή διαδικασία.

..... ΑΞΕΤΗΡΙΑ

Ξεκινάς με 1.000.000.000€
Κάθε φορά που περνά η χώρα σου
την αφετηρία παίρνει 100.000.000
€

Η χώρα σου εισέπραξε
200.000.000 \$ από τον τουρισμό.
Από αυτά το 20% μένει στο
κράτος σου ως φορολογία.
Αν η ισοτιμία είναι 1€ = 1,3\$,
πόσα ευρώ εισπράττει η χώρα
σου;

ΕΣΥ ΑΠΟΦΑΣΙΖΕΙΣ

Μην αφήσεις τη χώρα σου να μείνει
πίσω σε επενδύσεις φωτοβολταϊκών.
Θέλει η χώρα σου να αγοράσει
1.500.000 τ.μ. αξίας 1000 €/τ.μ.;
Αν ναι, κάθε άλλη διερχόμενη
χώρα θα πληρώσει για αγορά
ρεύματος το 20% του παραπάνω
ποσού.

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΡΙΣΗ!

Λόγω κουρέματος του
χρέους από το ΔΝΤ, τα
κρατικά έσοδα της
χώρας σου μειώνονται
κατά 20%.

ΕΣΥ
ΑΠΟΦΑΣΙΖΕΙΣ

Ενδιαφέρει τη χώρα σου η αγορά 10.000 οικολογικών
κατοικιών για άνεργες οικογένειες;
αξία 100.000 € η μία,
Αν ναι τότε κάθε άλλη διερχόμενη χώρα από τις
κατοικίες αυτές θα πληρώνει ενοίκιο 20% της
συνολικής αγοράς των κατοικιών.

ΕΣΥ
ΑΠΟΦΑΣΙΖΕΙ

Η χώρα σου πρέπει να πληρώσει
δάνειο 10.000.000.000 € σε γειτονική
χώρα με επιτόκιο 5%. Πλήρωσε τους
τόκους του δανείου στην Ευρωπαϊκή
Κεντρική Τράπεζα του παιχνιδιού.



Ενδιαφέρει τη χώρα σου η
αγορά εκτάσεων βιολογικής
γεωργίας;
αξία 200.000.000€
Αν ναι κάθε άλλη
διερχόμενη χώρα θα
πληρώνει στη χώρα σου το
20% του παραπάνω ποσού.

ΕΣΥ

Οι μετοχές της χώρας σου
σημείωσαν άνοδο. Τα κέρδη
ανέρχονται στο 10% του ποσού
του ταμείου σου.

Ενδιαφέρει τη χώρα σου η κατασκευή
πολιτιστικού πολυχώρου ύψους
500.000.000 για εκπαιδευτικούς σκοπούς;
Αν ναι κάθε άλλη διερχόμενη χώρα θα
πληρώνει 25% του παραπάνω ποσού.

Η χώρα σου πήρε
επιδοτήσεις από την
Ε.Ε. για αναπτυξιακά
έργα σε ποσό
150.000.000 €

ΕΣΥ
ΑΠΟΦΑΣΙΖΕΙΣ

Η Τρόικα επέβαλε στη χώρα
σου σκληρά μέτρα λιτότητας,
όποτε χάνεις τη σειρά σου για 1
γύρο.

ΚΑΝΟΝΕΣ ΕΥΡΩ-ΑΞΙΟΠΟΛΗΣ

Χωριστείτε σε 5 ομάδες των τεσσάρων ατόμων. Στη συνέχεια η κάθε ομάδα ορίζει τον εκπρόσωπό της. Με κλήρωση η ομάδα σου θα εκπροσωπεί μια χώρα.

Κανόνες:

Στο παιχνίδι συμμετέχουν οι 29 χώρες της Ευρωπαϊκής Ένωσης οι οποίες έχουν οικονομικές συναλλαγές με την Ευρωπαϊκή Κεντρική Τράπεζα (Ε.Κ.Τ.).

Κάθε ομάδα ρίχνει από μια φορά το ζάρι και ξεκινάει να παίζει πρώτη η ομάδα που έφερε τον μεγαλύτερο αριθμό. Όλες οι ομάδες ξεκινούν από την ΑΦΕΤΗΡΙΑ έχοντας στο ταμείο τους 1 δις. ευρώ.

Κάθε ομάδα που παίζει ρίχνει το ζάρι και, ανάλογα με τον αριθμό που φέρνει, τοποθετεί το πιόνι της πάνω στο αντίστοιχο πλαίσιο και αποφασίζει για τις ενέργειές της, σύμφωνα με τις επιλογές που δίνονται στο πλαίσιο αυτό.

Στα μπλε πλαίσια με την ένδειξη «ΕΣΥ ΑΠΟΦΑΣΙΖΕΙΣ», η ομάδα παίρνει μια κάρτα και αποφασίζει τις ενέργειές της ανάλογα με τις επιλογές που δίνονται εκεί.

Νικητής θα είναι η χώρα που *θα έχει κάνει τις καλύτερες επιλογές* κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού.

Διάρκεια παιχνιδιού: 40 λεπτά

Ανάδειξη νικήτριας χώρας

A) Κάθε χώρα υπολογίζει το **χρηματικό ποσό** που έχει στο ταμείο της.

B) Σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα αθροίστε πόσα **A** και πόσα **B** έχετε συνολικά.

Εγκατάσταση συστημάτων βιολογικού καθαρισμού	A	Πώληση επικίνδυνων ηλεκτρονικών αποβλήτων	B
Οικονομική Ενίσχυση στο Χαμόγελο του Παιδιού	A	Πώληση κρατικών εκτάσεων	B
Ανέγερση Οίκων Ευγηρίας	A	Μείωση συντάξεων	B
Κατασκευή αθλητικών κέντρων	A	Μη συμμετοχή στους Ολυμπιακούς Αγώνες	B
Συντήρηση και αξιοποίηση μνημείων και αρχαιολογικών χώρων	A	Πώληση έργων τέχνης	B
Οικονομική Ενίσχυση Γιατρών Χωρίς Σύνορα	A	Περικοπές στα ασφαλιστικά ταμεία για την υγεία των πολιτών	B
Σύνολο	;;;		;;;

Νικήτρια ομάδα αναδεικνύεται εκείνη η οποία έχει επιλέξει και συγκεντρώνει τις περισσότερες κάρτες με την ένδειξη «A», καθώς επίσης έχει συλλέξει και το μεγαλύτερο χρηματικό ποσό. *Ωστόσο η εξέλιξη του παιχνιδιού είναι εκείνη που θα καθορίσει και ενδεχομένως θα αναδείξει περισσότερες από μια νικήτριες ομάδες.*

Σε αυτή την περίπτωση οφείλουμε να ορίσουμε νικητή της Ευρώπολης και νικητή της Αξιοπόλης. Έτσι, η ομάδα που συγκεντρώνει το **μεγαλύτερο χρηματικό ποσό** αναδεικνύεται **νικήτρια της Ευρώπολης** ενώ η ομάδα που συγκεντρώνει τις **περισσότερες κάρτες με την ένδειξη «A»** αναδεικνύεται **νικήτρια της Αξιοπόλης**. Εν κατακλείδι οι νικήτριες ομάδες βρίσκονται

αντιμέτωπες σε μια διαδικασία Διαλογικής Επιχειρηματολογίας, με σκοπό η κάθε μια από τη μεριά της να πείσει για την ορθότητα των επιλογών της. Τελικός κριτής είναι οι άλλες ομάδες, οι οποίες αποφασίζουν μετά από συζήτηση τον μοναδικό νικητή. Γίνεται ψηφοφορία και αποφασίζεται ο τελικός νικητής της Ευρω – Αξιόπολης.

ΜΗ ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ ΣΤΟΥΣ ΟΛΥΜΠΙΑΚΟΥΣ ΑΓΩΝΕΣ



ΟΙΚΟΙ ΕΥΓΗΡΙΑΣ



ΜΕΙΩΣΗ ΣΥΝΤΑΞΕΩΝ



ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΑΘΛΗΤΙΚΩΝ ΚΕΝΤΡΩΝ



**ΣΥΝΤΗΡΗΣΗ ΜΝΗΜΕΙΩΝ &
ΑΡΧΑΙΟΛΟΓΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ**



**ΠΕΡΙΚΟΠΕΣ ΣΕ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΑ
ΤΑΜΕΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΥΓΕΙΑ**



**ΠΡΟΣΦΟΡΑ ΣΤΟ ΧΑΜΟΓΕΛΟ ΤΟΥ
ΠΑΙΔΙΟΥ**



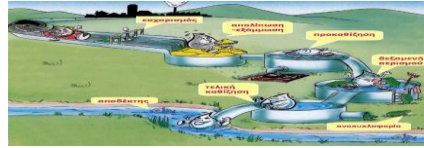
ΠΩΛΗΣΗ ΚΡΑΤΙΚΩΝ ΕΚΤΑΣΕΩΝ



**ΠΡΟΣΦΟΡΑ ΣΤΟΥΣ ΓΙΑΤΡΟΥΣ ΧΩΡΙΣ
ΣΥΝΟΡΑ**



ΕΓΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΒΙΟΛΟΓΙΚΟΥ ΚΑΘΑΡΙΣΜΟΥ



ΠΩΛΗΣΗ ΕΡΓΩΝ ΤΕΧΝΗΣ



ΠΩΛΗΣΗ ΕΠΙΚΙΝΔΥΝΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΑΠΟΒΛΗΤΩΝ



ΚΑΡΤΕΣ ΕΠΙΛΟΓΩΝ

ΕΣΥ ΑΠΟΦΑΣΙΖΕΙΣ

Τι επιλέγει η χώρα σου;

**-Να πληρώσει 170 εκατ. € στους Γιατρούς χωρίς
σύνορα (Α) ή**

**-Να εισπράξει για το ταμείο της 170 εκατ. €
κάνοντας περικοπές στα ασφαλιστικά ταμεία για
την υγεία των πολιτών της (Β)**

ΕΣΥ ΑΠΟΦΑΣΙΖΕΙΣ

Τι επιλέγει η χώρα σου;

**-Να πληρώσει 180 εκατ. € για κατασκευή
αθλητικών κέντρων (Α) ή**

**-Να εξασφαλίσει 180 εκατ. μη συμμετέχοντας
στους Ολυμπιακούς Αγώνες (Β)**

ΕΣΥ ΑΠΟΦΑΣΙΖΕΙΣ

Τι επιλέγει η χώρα σου;

**-Να πληρώσει 100 εκατ. € στο Χαμόγελο του
Παιδιού (Α) ή**

**-Να εισπράξει για το ταμείο της 100 εκατ. €
πουλώνοντας κρατικές εκτάσεις (Β)**

ΕΣΥ ΑΠΟΦΑΣΙΖΕΙΣ

Τι επιλέγει η χώρα σου;

**-Να πληρώσει 300 εκατ. € για συστήματα
βιολογικού καθαρισμού (Α) ή**

**-Να εισπράξει για το ταμείο της 300 εκατ. € από
την πώληση επικίνδυνων ηλεκτρονικών
αποβλήτων (Β)**

ΕΣΥ ΑΠΟΦΑΣΙΖΕΙΣ

Τι επιλέγει η χώρα σου;

**-Να πληρώσει 310 εκατ. € για τη συντήρηση
αρχαιολογικών χώρων και μνημείων (Α) ή**

**-Να εισπράξει για το ταμείο της 310 εκατ. €
πουλώντας έργα τέχνης (Β)**

ΕΣΥ ΑΠΟΦΑΣΙΖΕΙΣ

Τι επιλέγει η χώρα σου;

**-Να πληρώσει 350 εκατ. € για την ανέγερση οίκων
ευγηρίας (Α) ή**

**-Να εισπράξει για το ταμείο της 350 εκατ. €
μειώνοντας τις συντάξεις (Β)**

Στον Πίνακα 3 παρατίθενται ενδεικτικά παραδείγματα μετασχηματισμού δραστηριοτήτων από το σχολικό εγχειρίδιο στο επιτραπέζιο παιχνίδι. Στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται οι συσχετισμοί μεταξύ της Μονόπολης και της Ευρω-Αξιοποίησης.

Πίνακας 3. Δραστηριότητες του σχολικού εγχειρίδιου και της Ευρω-Αξιοποίησης.

Σχολικό Εγχειρίδιο Στ' Τάξης Κεφάλαιο 52	Ευρω-Αξιοποίηση
	Η χώρα σου εισέπραξε 200.000.000 \$ από τον τουρισμό. Από αυτά το 20% μένει στο κράτος σου ως φορολογία. Αν η ισοτιμία είναι $1\text{€} = 1,3\\$ πόσα ευρώ εισπράττει η χώρα σου;

Δραστηριότητα 2η

Οι τράπεζες είναι ιδρύματα που διαχειρίζονται χρήματα.

Όταν μας δανείζει χρήματα η τράπεζα, πληρώνουμε ένα ποσό (τόκος), το οποίο είναι ένα ποσοστό του χρηματικού ποσού που δανειστήκαμε. Η τράπεζα το υπολογίζει σύμφωνα με ένα ποσοστό στα 100 (επιτόκιο) που έχει ορίσει για αμοιβή. Αντίθετα, όταν εμείς καταθέτουμε χρήματα στην τράπεζα, τότε η τράπεζα πληρώνει τόκο σε εμάς (που τον υπολογίζει πάλι σύμφωνα με κάποιο επιτόκιο).

Θυμάσαι τα ποσοστά; Για να βρεις τον τόκο που θα πληρώσεις ή θα πάρεις θα εργαστείς όπως στα προβλήματα με ποσοστά.

- Η Τράπεζα προσφέρει επιτόκιο 2% το χρόνο για τις καταθέσεις. Πόσο τόκο θα πάρεις σε ένα χρόνο αν καταθέσεις 1.000 €;

Εξήγησε τον τρόπο με τον οποίο το υπολόγισες:

- Η Τράπεζα ζητάει επιτόκιο 8% το χρόνο για τα δάνεια! Πόσο τόκο θα πληρώσεις σε ένα χρόνο αν δανειστείς 1.000 €;

Εξήγησε τον τρόπο με τον οποίο το υπολόγισες:



Η χώρα σου
πρέπει να
πληρώσει
δάνειο
10.000.000.00
0 € σε
γειτονική χώρα
με επιτόκιο
3%. Πλήρωσε
τους τόκους του
δανείου στην
Ευρωπαϊκή
Κεντρική
Τράπεζα του
παιχνιδιού.

Πίνακας 2. Συσχέτιση Μονόπολης και Ευρω-Αξιοποίησης.

ΤΟΜΕΙΣ	ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΟΝΟΠΟΛΗ	ΕΥΡΩ-ΑΞΙΟΠΟΛΗ
Παίχτες Παιχνιδιού	Μεμονωμένος παίκτης. εκπροσωπεί τον εαυτό του.	Ομάδες 4-5 μαθητών εκπροσωπούν μια χώρα της Ε.Ε.
Πλαίσιο δράσης παιχνιδιού	Εθνικό επίπεδο	Ευρωπαϊκό
Τρόπος διεξαγωγής παιχνιδιού	Παρέχονται έτοιμοι οι αριθμοί και τα ποσά	Οι μαθητές υπολογίζουν με ποσοστά επιτόκια και δυνάμεις τα ποσά που διαχειρίζονται
Απόκτηση περιουσιακών στοιχείων - επενδύσεις	Κοινωφελείς οργανισμοί	Αειφορία
Ανάδειξη νικητή του παιχνιδιού	Αποκλειστικά οικονομικά κριτήρια Προκαθορισμένη και μονομερή	Συνδυασμός οικονομικών και κοινωνικοπολιτισμικών κριτηρίων Οι μαθητές κριτικά σκεπτόμενοι αναδεικνύουν τον νικητή

Βιβλιογραφία

- Beck, C.R. (1998): A Taxonomy for Identifying, Classifying, and Interrelating Teaching Strategies. *Journal of General Education*, 47(1), 37-62.
- Bloor, D. (1991): *Knowledge and Social Imagery*. London: University of Chicago Press.
- Burton, L. (2004) *Mathematicians as Enquirers. Learning about Learning Mathematics Series: Mathematics Education Library*
- Chionidou-Moskofoglou, M. Chrisi Vitsilaki, Anastasios Vasiliadis (2006), Workplace Mathematics as an invisible culture. Entrepreneurs' Views of Basic Numeracy Skills. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education* Vol. 5, 1, 67-75
- Davis, P., Hersh, R. (1983): *The Mathematical Experience*. Hamondsworth: Penguin.
- Διαθεματικό ενιαίο πλαίσιο Σπουδών Μαθηματικών. Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Ανακτήθηκε στις από <http://www.pi-schools.gr/programs/depps>
- Δουκάκης, Σ., Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Μ., Ζυμπίδης, Δ. (2010): *Παιδαγωγική κατάρτιση εκπαιδευτικών στη χρήση ψηφιακών εργαλείων*. Το παράδειγμα δύο ερευνών., Πρακτικά 27ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας «Ο Δάσκαλος των Μαθηματικών στην Εκπαίδευση, στην έρευνα, στην κοινωνία», 19-21 Νοεμβρίου 2010, Χαλκίδα, σελ. 266 - 275.
- Driver, R., Oldham, V. (1986): A Constructivist Approach to Curriculum Development in Science. *Studies in Science Education*, 13(1), 105-122.
- Ernest, P. (1991): *The Philosophy of Mathematics Education*. Basingstoke: Falmer Press.

- Ευκλείδη, Α. (1992): *Γνωστική Ψυχολογία..* Θεσσαλονίκη: Art of Text.
- Καμπουροπούλου, Μ., Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Μ., Φώκιαλη, Π. (2004): Μαθηματικά, Τέχνη και Οικονομία: Μια διαθεματική διδακτική προσέγγιση. Στο Χρ. Γκόβαρης, κ.α. (Επιμ.): *Επιστήμη και Τέχνη*. Αθήνα: Ατραπός, σελ. 255-280.
- Lakatos, I. (1976): *Proofs and Refutations*. Cambridge: University Press.
- Λιαράκου, Γ. (2012) Προσεγγίζοντας τη συμμετοχή των παιδιών στο σχολείο: οι αντιλήψεις των φοιτητών – μελλοντικών εκπαιδευτικών στο *Επετηρίδα ΠΤΔΕ Πανεπιστημίου Αιγαίου – υπό έκδοση*
- Matsagouras, E., Hertz-Lazarwitz, R. (1999): *The cooperative classroom as a context for development*. Invited symposium at the IX European conference on Developmental Psychology. Spetses, Greece, Sept. 1-5. Στο : Ματσαγγούρας, Η., Πρακτικά επιστημονικού συμποσίου: "Η εφαρμογή της ομαδοκεντρικής διδασκαλίας-Τάσεις και εφαρμογές", Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2000.
- Νικολαντωνάκης, Κ. (2009) Η εφαρμογή της δραστηριότητας «Η Κούρσα για το 20» σε μαθητές Γ' Τάξης Δημοτικού Σχολείου στο Νομό Πέλλας.
- Πιλοτικό Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης (2011). Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Ανακτήθηκε στις από <http://digitalschool.minedu.gov.gr/info/newps.php>
- Πιπίνος Γ., Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Μ. (2010): Διδακτικές Προσεγγίσεις σε Τάξεις Μαθηματικών του Δημοτικού Σχολείου πριν από τα Νέα Σχολικά Εγχειρίδια: Συστηματική καταγραφή τους από φοιτητές/τριες Παιδαγωγικού Τμήματος. *Περιοδικό Ένωσης της Διδακτικής των Μαθηματικών* σελ.
- Πλατσίδου Μ., Ζαγόρα Χ. (2006): Το μαθησιακό στίλ και οι στρατηγικές επίλυσης γνωστικών έργων. *Παιδαγωγική Επιθεώρηση*. 42, 160-177.

- Potari D., Jaworski, B. (2002): Tackling complexity in mathematics teaching development: using the teaching triad as tool for reflection and analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 351-380.
- Potari D., Jaworski, B. (2009): Bridging the macro- and micro-divide: using an activity theory model to capture sociocultural complexity in mathematics teaching and its development. *Educational Studies in Mathematics*, 72, 219-236.
- Ραβάνης, Κ. (eds.). Ο διδακτικός μετασχηματισμός: από τα επιστημονικά αντικείμενα στις σχολικές πρακτικές, στο Πρακτικά του Διεθνούς Συνεδρίου «Η Ελληνική γλώσσα στη Λατινική Αμερική». Montevideo, 16-18 Οκτωβρίου 2009.
- Schoenfeld, A. H. (1987): What's all the fuss about metacognition? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189-215). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Σοφός, Α. (2010): Μεθοδολογία Σχεδιασμού για την Αξιοποίηση των νέων Μέσων σε Παιδαγωγικές και Εκπαιδευτικές Δράσεις. *Παιδαγωγικά Ρεύματα στο Αιγαίο*, 2011/5, (85-96). Διαθέσιμο στο <http://www.rhodes.aegean.gr/ptde/revmata/issue5/SOFO S.pdf>
- Σκούρτου, Ε. (2010): Μετασχηματισμός: ένα κεντρικό ζήτημα στη μάθηση και στη διδασκαλία. *Παιδαγωγικά Ρεύματα στο Αιγαίο*, 2011/5, (98-99). Διαθέσιμο στο <http://www.rhodes.aegean.gr/ptde/revmata/new-issue.html>
- Καφούση Σ, Σκουμπουρδή Χ., Τάτσης, Κ. Αναλύοντας ένα σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών: Η περίπτωση της Α' Δημοτικού
- Τάτσης, Κ., Σκουμπουρδή, Χ. (2009): *Μελέτη του πλαισίου των δραστηριοτήτων του σχολικού εγχειριδίου των μαθηματικών της Α' Δημοτικού*. Στα Πρακτικά 3ου Συνεδρίου ΕΝΕΔΙΜ: Μαθηματική Εκπαίδευση και Οικογενειακές Πρακτικές, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 383-392.

- Thompson, I. (1999): Written methods of calculation, in I. Thompson (ed.), *Issues in Teaching Numeracy in Primary Schools*. Open University Press, Buckingham, pp. 169-183.
- Χασάπης, Δ. (1996): *Τα πλαίσια αναφοράς των μαθηματικών εννοιών κατά τη διδασκαλία τους στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση και οι ιδεολογικοί τους προσανατολισμοί*. Τα Μαθηματικά στην εκπαίδευση και την κοινωνία. Πρακτικά 1ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Αθήνα, σελ. 113 – 123.
- Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Μ. (1999): Επιμόρφωση των Εκπαιδευτικών στο Κονστрукτιβιστικό Μοντέλο Διδασκαλίας και Μάθησης των Μαθηματικών με Χρήση Ανοιχτών Προβλημάτων (open-ended) και Ομαδο-συνεργατικής Διδασκαλίας. *Ερευνητική Διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών*, 3-4, 3-36.
- Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Μ. (1999β): *Τι γνωρίζουν οι δάσκαλοι και οι δασκάλες για τα Προβλήματα Πρόσθεσης και Αφαίρεσης*. Στο: A. Gagatsis, et. al (Ed.) *Proceedings of the 2nd Mediterranean Conference on Mathematics Education* (pp. 305-307). Nicosia Cyprus.

Μ. Μοσκοφόγλου-Χιονίδου

mchionidou@rhodes.aegean.gr

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΤΥΠΩΣΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΝ ΣΕ ΤΑΞΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πίνακας 1: Συχνότητες αποδιδόμενων τιμών αναφορικά με τα στοιχεία του κonstrουκτιβιστικού μοντέλου Driver & Oldham

Φάσεις κonstrουκτιβιστικής διδασκαλίας		καθόλου (1)	λίγο (2)	πολύ (3)	M	SD
1 ^η φάση	Η φάση του προσανατολισμού (<i>orientation</i>) αποσκοπεί στο να δώσει στους μαθητές/τριες την ευκαιρία να αναπτύξουν συνείδηση του σκοπού και κίνητρα που θα τους εμπλέξουν στη διαδικασία εκμάθησης. Η ευκαιρία αυτή θα πρέπει να προέρχεται από πραγματικές, βιωματικές δραστηριότητες.	f 61 rf 49.2 crf 49.2	26 21.0 70.2	37 29.8 100.0	1.80	.87
2 ^η φάση	Στη φάση της εκμάτευσης (<i>elicitation</i>) οι μαθητές/τριες παροτρύνονται να εξωτερικεύσουν τις ιδέες τους και γίνονται συνειδητοί γνώστες και πρωταγωνιστές της όλης διαδικασίας. Η φάση αυτή είναι καλό να γίνεται με ομαδοσυνεργατική διδασκαλία.	f 55 rf 44.4 crf 44.4	31 25.0 69.4	38 30.6 100.0	1.86	.86
3 ^η φάση	Κατά τη φάση της αναδόμησης (<i>restructuring</i>) πραγματοποιείται ανταλλαγή απόψεων και διευκρινίζονται τα νοήματα. Από το σημείο αυτό οι μαθητές/τριες μεταπηδούν στην αξιολόγηση των εναλλακτικών ιδεών. Η φάση αυτή είναι καλό να γίνεται με ομαδοσυνεργατική διδασκαλία.	f 69 rf 55.6 crf 55.6	25 20.2 75.8	30 24.2 100.0	1.69	.84
4 ^η φάση	Κατά φάση της εφαρμογής (<i>application</i>) οι μαθητές/τριες θέτουν σε εφαρμογή τις ιδέες τους σε οικείες και άγνωστες καταστάσεις (επίλυση κλειστών και ανοιχτών προβλημάτων, σχηματισμός προβλημάτων, ερευνητικές και συνθετικές εργασίες), με στόχο να ενισχυθούν και να παγιωθούν οι νέες ιδέες.	f 32 rf 25.8 crf 25.8	30 24.2 50.0	62 50.0 100.0	2.25	.84
5 ^η φάση	Στη φάση της αναθεώρησης (<i>review</i>) οι μαθητές/τριες αναστοχάζονται και προσπαθούν να συνειδητοποιήσουν με ποιον τρόπο άλλαξαν οι αντιλήψεις τους, ενώ ταυτόχρονα ενθαρρύνονται (από τον/την εκπαιδευτικό) να αναπτύξουν τις μεταγνωστικές τους στρατηγικές.	f 100 rf 80.6 crf 80.6	19 15.3 96.0	5 4.0 100.0	1.23	.51

N=124

Πίνακας 3: Συχνότητες αποδιδόμενων τιμών αναφορικά με τα ερωτήματα για μια σύγχρονη τάξη Μαθηματικών

Ερωτήματα για μια σύγχρονη τάξη Μαθηματικών		καθόλου (1)	λίγο (2)	πολύ (3)	M	SD
Δραστηριότητες	Γίνονται διαθεματικές προσεγγίσεις;	f 119	4	1	1.05	.25
		rf 96.0	3.2	0.8		
	Χρησιμοποιούνται θέματα που ενδιαφέρουν και προκαλούν τα παιδιά;	f 87	19	18	1.44	.73
		rf 70.2	15.3	14.5		
	Επιτρέπεται στα παιδιά να εργαστούν με τους δικούς τους ρυθμούς;	f 75	27	22	1.57	.78
		rf 60.5	21.8	17.7		
	Ενθαρρύνονται τα παιδιά να γράφουν τη δουλειά τους με διαφορετικούς τρόπους;	f 88	18	18	1.43	.74
		rf 71.0	14.5	14.5		
	Επιλύονται ανοιχτά-κλειστά προβλήματα;	f 111	6	7	1.17	.51
		rf 89.5	4.8	5.6		
Επικοινωνία	Εφαρμόζονται στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων;	f 61	25	38	1.81	.88
		rf 49.2	20.2	30.6		
	Αξιοποιείται το λάθος-εμπόδιο ως διδακτικό μέσο;	f 88	7	29	1.53	.85
		rf 71.0	5.6	23.4		
	Γίνεται εκτίμηση του αποτελέσματος και έλεγχος της λογικότητας της απάντησης;	f 56	26	42	1.88	.89
		rf 45.2	21.0	33.9		
	Χρησιμοποιούνται διαφορετικές διδακτικές προσεγγίσεις από τη δασκαλοκεντρική;	f 88	16	20	1.45	.76
		rf 71.0	12.9	16.1		
	Γίνεται αποδεκτή από τον εκπαιδευτικό η διαίσθηση των παιδιών;	f 113	7	4	1.12	.42
		rf 91.1	5.6	3.2		
Αξιολόγηση	Δίνεται ιδιαίτερη προσοχή στην ορθή χρήση της μαθηματικής γλώσσας;	f 22	34	68	2.38	.77
		rf 17.7	27.4	54.8		
	Γίνεται η επικοινωνία με χρήση προφορικού μαθηματικού λόγου;	f 5	17	102	2.78	.51
		rf 4.0	13.7	82.3		
	Γίνεται η επικοινωνία με χρήση γραπτού μαθηματικού λόγου;	f 14	12	98	2.67	.68
		rf 11.3	9.7	79.0		
	Παρέχεται ενθάρρυνση-παρότρυνση-κίνητρα;	f 17	28	79	2.50	.73
		rf 13.7	22.6	63.7		
Αξιολόγηση	Γίνεται αξιολόγηση των μαθητών με ατομικά διαγωνίσματα (λύση κλειστών προβλημάτων, ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής-αντιστοίχισης-συμπλήρωσης);	f 17	11	96	2.64	.71
		rf 13.7	8.9	77.4		
	Πραγματοποιείται αυθεντική αξιολόγηση των μαθητών (λύση πραγματικών προβλημάτων, φάκελος εργασιών, εξελικτική αξιολόγηση);	f 100	20	4	1.23	.50
		rf 80.6	16.1	3.2		
N=124						

N=124

ΧΡΗΜΑΤΑ – ΠΙΟΝΙΑ ΠΑΙΧΝΙΔΙΟΥ ΕΥΡΩ-ΑΞΙΟΠΟΛΗ

200.000.000 €



$200 \times 10^6 \text{ €}$

100.000.000 €



$100 \times 10^6 \text{ €}$

500.000.000 €



$500 \times 10^6 \text{ €}$

50.000.000 €



$50 \times 10^6 \text{ €}$

20.000.000 €



$20 \times 10^6 \text{ €}$

10.000.000 €



$10 \times 10^6 \text{ €}$

1.000.000 €

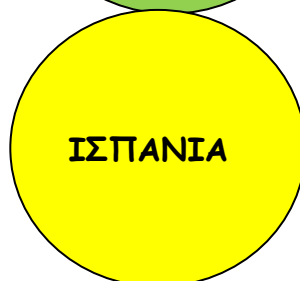
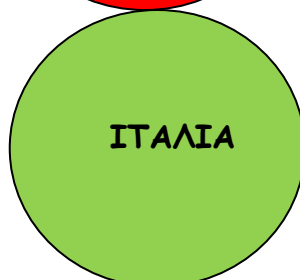
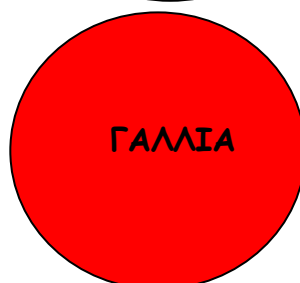
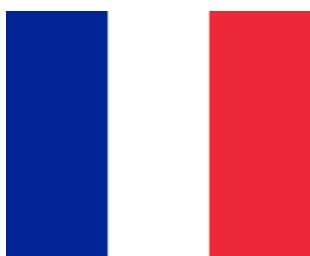
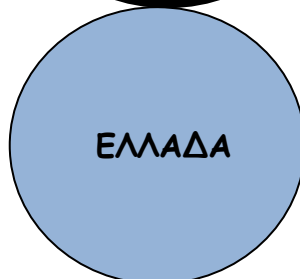


10^6 €

5.000.000 €



$5 \times 10^6 \text{ €}$



ΜΕΤΡΩ, ΔΙΑΙΡΩ, ΥΠΟΛΟΓΙΖΩ ΚΑΙ ΦΤΙΑΧΝΩ ΜΟΥΣΙΚΑ ΟΡΓΑΝΑ: ΕΝΑ ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ

Νικόλας Τσαφταρίδης

Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η κατασκευή των μουσικών οργάνων από τα ίδια τα παιδιά είναι ένα παιχνίδι υπολογισμού και χειρωνακτικής εργασίας. Με απλά και ανακυκλώσιμα υλικά το παιδί εφαρμόζει μια σειρά από μαθηματικές δεξιότητες για να κατασκευάσει διάφορα μουσικά όργανα. Αν και το τελικό προϊόν ανήκει στο ευρύτερο πεδίο της Μουσικής Αγωγής, η διαδικασία εμπεριέχει την πρακτική εφαρμογή (λιγότερο ή περισσότερο συνειδητή) μιας σειράς μαθηματικών πράξεων και υπολογισμών. Η διαδικασία αυτή μπορεί να αρχίζει από την εφαρμογή απλών προμαθηματικών εννοιών μέχρι και την εφαρμογή σύνθετων αριθμητικών πράξεων.

Ένα παιχνίδι υπολογισμών και κατασκευής μουσικών οργάνων με απλά υλικά από τις φοιτήτριες του ΤΕΑΠΗ υπό την εποπτεία του διδάσκοντα Νικόλα Τσαφταρίδη.

Η δραστηριότητα της κατασκευής μουσικών οργάνων αναπτύχθηκε στο Αίθριο του Πανεπιστημίου έξω από την είσοδο της αίθουσας του συνεδρίου.

Το κάθε όργανο ανήκει σε αυτόν/ήν που το κατασκεύασε.

ΤΟ ΜΟΥΣΙΚΟ ΟΡΓΑΝΟ: ΝΟΥΝΟΥΡΑ (KAZOO)



Η νουνούρα είναι ένα από τα πνευστά μεμβρανόφωνα, όργανα των οποίων ο ήχος παράγεται όταν πάλλεται μια μεμβράνη με το φύσημα του αέρα. Η μεμβράνη είναι πολύ λεπτή, συνθετική (νάιλον σακούλες) ή και χαρτί (λεπτό ριζόχαρτο ή τριγαρόχαρτο).

Η νουνούρα συναντιέται σε όλη σχεδόν την Ελλάδα με διαφορετικά ονόματα.

Ακούστε τρία παραδείγματα

- <http://www.youtube.com/watch?v=LXaR2hkD4bQ> (Ημερος Ύπνος, Θ. Παπακωνσταντίνου, η Νουνούρα ακούγεται στην εισαγωγή)
- <http://www.youtube.com/watch?v=5cGmZ0IyQFU&feature=related> (Billie Jean, Michael Jackson, όλο το κομμάτι παίζεται από kazoo, e-drums και ένα ηλεκτρικό μπάσο)
- http://www.youtube.com/watch?v=XoGf7-Wh_vE&feature=related (LATTE E I SUOI DERIVATI - IL KAZOO, ένα τραγούδι για το Kazoo!)

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

Χρειαζόμαστε:

1. Ένα κομμάτι καλάμι ανάμεσα από δυο κόμπους του καλάμιού με μήκος μεγαλύτερο ή ίσο των 15 εκ. και μικρότερο ή ίσο των 18 εκ.

Με μαθηματική γραφή ένα καλάμι μήκους X εκατοστών, όπου $15 \leq X \leq 18$

2. Κάνουμε στη μέση του κομματιού μια τρύπα όση περίπου και η διάμετρος του καλαμιού.

Με μαθηματική γραφή μια τρύπα με διάμετρο $Y = Z$, όπου Z είναι η διάμετρος του καλαμιού

3. Κόβουμε ένα τετραγώνάκι με πλευρά 5 εκατοστά από μια νάιλον σακούλα και το στερεώνουμε με ένα λαστιχάκι στη μια άκρη του καλαμιού, προσέχοντας να μην είναι ούτε πολύ χαλαρή, ούτε πολύ τεντωμένη.

Με μαθηματική γραφή τετράγωνο πλευράς $a = 5$ εκατ. ή διαστάσεων 5×5 εκατοστών.

ΠΑΙΞΙΜΟ

Για να βγάλει ήχο η νουνούρα δεν φυσάμε απλώς, αλλά «τραγουδάμε» ή μουρμουράμε κάποιο τραγούδι στη μεσαία τρύπα του οργάνου.

Έτσι πάλλεται η μεμβράνη και παραμορφώνει τον ήχο.

Βιβλιογραφία

Τσαφταρίδης, Ν. (1995) Αυτοσχέδια μουσικά όργανα, Αθήνα:
Νικολαΐδης Μ. - Edition Orpheus

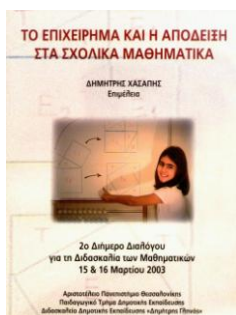
Νικόλας Τσαφταρίδης

nikotsaf@ecd.uoa.gr



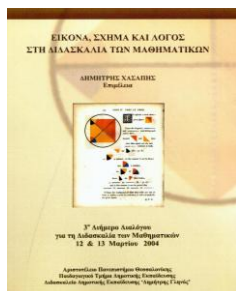
Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΩΣ ΜΕΣΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ ΚΑΙ ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Πρακτικά 1ου Δημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών
Θεσσαλονίκη, 2002
Σχήμα 17x24, σελ. 175
ISBN 960-312-085-5



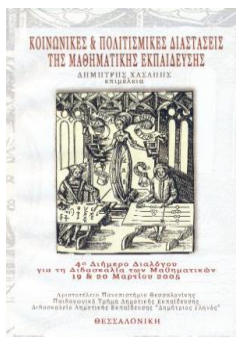
ΤΟ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑ ΚΑΙ Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Πρακτικά 2ου Δημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών
Θεσσαλονίκη, 2003,
Σχήμα 17x24, σελ. 250
ISBN 960-312-115-0



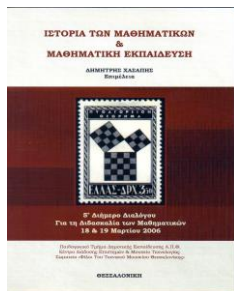
ΕΙΚΟΝΑ, ΣΧΗΜΑ ΚΑΙ ΛΟΓΟΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πρακτικά 3ου Δημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών
Θεσσαλονίκη, 2004
Σχήμα 17x24, σελ. 185
ISBN 960-87530-8-2



ΚΟΙΝΩΝΙΚΕΣ & ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΕΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

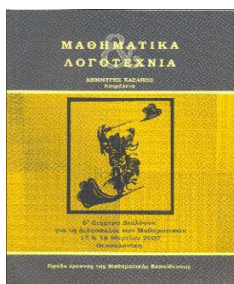
Πρακτικά 4ου Δημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών
Θεσσαλονίκη, 2005
Σχήμα 16x24.5, σελ. 208
ISBN 960-88333-5-3



ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Πρακτικά 5ου Δημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Θεσσαλονίκη, 2006
Σχήμα 17x24, σελ. 220



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΛΟΓΟΤΕΧΝΙΑ

Πρακτικά 6ου Δημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών

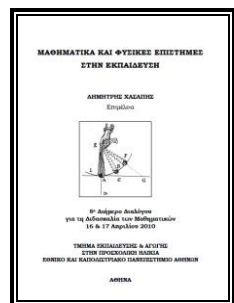
Θεσσαλονίκη, 2007
Σχήμα 17x24, σελ. 315



ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πρακτικά 7ου Δημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών

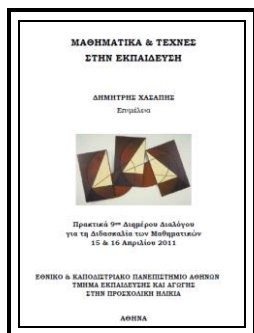
Θεσσαλονίκη, 2008
Σχήμα 17x24, σελ. 367



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Πρακτικά 8ου Δημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Αθήνα, 2010
Έκδοση CD-ROM
Σχήμα 17x24, σελ. 256
ISBN



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΤΕΧΝΕΣ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Πρακτικά 9ου Διημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Αθήνα, 2011

Έκδοση CD-ROM

Σχήμα 17x24, σελ. 386

ISBN978-960-87577-7-6

ΤΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΣΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΚΑΙ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΧΑΣΑΠΗΣ (Επιμέλεια)

Τμήμα Εκπαίδευσης & Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία

Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Ναυαρίνου 13^α, 106 80 Αθήνα

ΑΘΗΝΑ 2012

ISBN 978-960-87577-8-3