

Κοινωνικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης: Όψεις και ζητήματα

Δημήτρης Χασάπης

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Α.Π.Θ.

Εισαγωγικές παρατηρήσεις

Με τον όρο «μαθηματική εκπαίδευση» εννοείται, πολύ γενικά, ένα σύνολο κοινωνικών πρακτικών, οι οποίες αναπτύσσονται σε τυπικά θεσμοθετημένα και άτυπα καθιερωμένα πλαίσια με στόχο τη μάθηση κάθε είδους μαθηματικών γνώσεων και τεχνικών και παράλληλα ένα πεδίο επιστημονικής πρακτικής, το οποίο μελετάει και με τα αποτελέσματα του προσανατολίζει τις πρακτικές αυτές. Ο ορισμός αυτός δεν υπονοεί σε καμία περίπτωση ότι η μαθηματική γνώση υπάρχει ανεξάρτητα από τον άνθρωπο και τις δραστηριότητες του. Μ' αυτή την ευρεία έννοια ως μαθηματική εκπαίδευση μπορεί να νοηθεί, όπως έχει διατυπωθεί από τον Dörfler (2000), η ανάπτυξη κάθε είδους σχέσης των ανθρώπων με τη μαθηματική δραστηριότητα και τα αποτελέσματά της. Τα μαθηματικά, ως γνώση και δραστηριότητα, και η διδακτική σχέση διδασκόντων και διδασκομένων αποτελούν, επομένως, συνιστώντα στοιχεία της μαθηματικής εκπαίδευσης (Valero, 1999).

Το ζητούμενο, επομένως, μιας συζήτησης για τις κοινωνικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι

- (α) η διερεύνηση και η ανάδειξη των θεμελιωδών όψεων των κοινωνικών πρακτικών, οι οποίες συγκροτούν τη μαθηματική γνώση και τη μαθηματική δραστηριότητα και διαμορφώνουν τη διδακτική σχέση διδασκόντων και διδασκομένων με τη μαθηματική γνώση και τη μαθηματική δραστηριότητα, κατ' αρχήν σε θεσμοθετημένα σχολικά περιβάλλοντα, και παράλληλα
- (β) ο προσδιορισμός των ουσιαστικών κοινωνικών επιπτώσεων της μαθηματικής εκπαίδευσης με το δεδομένο μαθηματικό περιεχόμενο και την καθιερωμένη διδακτική σχέση.

Με άλλα λόγια, κάθε συζήτηση για τις κοινωνικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης οφείλει να θέτει στο επίκεντρο της, ταυτόχρονα και αλληλένδετα, τους κοινωνικούς και αναπόφευκτα τους ιστορικούς και πολιτικούς παράγοντες, οι οποίοι διαμορφώνουν το περιεχόμενο των μαθηματικών και τη μορφή των σχέσεων μάθησης και διδασκαλίας των

μαθηματικών στη σχολική τάξη και γενικότερα στο εκπαιδευτικό σύστημα κάθε βαθμίδας, όπως επίσης και τις επιπτώσεις τους σε κοινωνικό και ατομικό επίπεδο, οι οποίες είναι ταυτόχρονα επιπτώσεις ιδεολογικές και κοινωνικές.

Μια τέτοιου τύπου προσέγγιση, η οποία έχει την αφετηρία της στο ιστορικο-κοινωνικό επίπεδο (στο μακρο-επίπεδο της φυλογένεσης) και αναγκαία την κατάληξη της στο ατομικό επίπεδο (στο μικρο-επίπεδο της οντογένεσης), περιλαμβάνει:

- Μια θεώρηση των ιστορικο-κοινωνικών παραγόντων της οργάνωσης της μαθηματικής πρακτικής και της παραγωγής της μαθηματικής γνώσης,
- Μια θεώρηση των κοινωνικο-πολιτισμικών πρακτικών και των όρων του διδακτικού μετασχηματισμού της μαθηματικής γνώσης σε σχολική γνώση,
- Μια θεώρηση των κοινωνικο-πολιτικού πλαισίου οργάνωσης και ανάπτυξης των δραστηριοτήτων της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών και
- Μια θεώρηση των διαδικασιών της ατομικής συγκρότησης της ιστορικά αναπτυγμένης και κοινωνικά καθορισμένης μαθηματικής γνώσης και πρακτικής μέσα από τη συμμετοχή των ατόμων στις τυπικά θεσμοθετημένες και άτυπα καθιερωμένες δραστηριότητες της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Η θεώρηση των διαστάσεων αυτών της μαθηματικής εκπαίδευσης περιλαμβάνει αλληλένδετα, όπως προαναφέρθηκε, τόσο τους όρους και τις διαδικασίες διαμόρφωσης τους, όσο και τις αμοιβαίες επιδράσεις τους, καθώς και τις επιπτώσεις τους στο ευρύτερο κοινωνικό πλαίσιο στο οποίο η μαθηματική εκπαίδευση εντάσσεται.

Είναι σαφές, ότι μια θεώρηση της μαθηματικής εκπαίδευσης, η οποία προτάσσει το κοινωνικό επί του ατομικού υποχρεώνει στην επιλογή μιας νοητικής παράστασης της κοινωνίας. Αν και σχηματικά απλοποιημένα, οι παραστάσεις της κοινωνίας μπορούν να διακριθούν σε δυο βασικές κατηγορίες. Στις παραστάσεις της πρώτης κατηγορίας, οι οποίες εκφράζονται από τον Parsons και τις λειτουργικές προσεγγίσεις στις διάφορες εκδοχές τους, η κοινωνία αποτελεί μια λειτουργική ολότητα που συγκροτεί ένα αυτορυθμιζόμενο σύστημα. Στο σχήμα αυτό, η λειτουργίες της κοινωνικής αυτορύθμισης καθορίζονται από τη μεγιστοποίηση της αποτελεσματικότητας. Στις παραστάσεις της δεύτερης κατηγορίας, οι οποίες εκφράζονται από τον Marx και τα αντίστοιχα ρεύματα σε όλες τις εκδοχές τους, η κοινωνία διαιρείται σε δύο αντίπαλα σύνολα, τάξεις, που διαπλέκονται διαλεκτικά σε μια κοινωνική ενότητα. Στο σχήμα αυτό, βάση της κοινωνικής διαπλοκής αποτελεί η κοινωνική αντιπαλότητα για την προώθηση υλικών συμφερόντων. Η δεύτερη αυτή οπτική υιοθετείται και διέπει την παρούσα ανάλυση, η οποία θα περιοριστεί για πρακτικούς λόγους στην

ανάλυση των δύο πρώτων από τις προαναφερθείσες κοινωνικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης .

Η οργάνωση της μαθηματικής πρακτικής και η παραγωγή της μαθηματικής γνώσης

Μια θεώρηση των ιστορικο-κοινωνικών παραγόντων, οι οποίοι διαμορφώνουν την οργάνωση της μαθηματικής πρακτικής και την παραγωγή της μαθηματικής γνώσης, από την οπτική αυτή, έχει ως αφετηρία της την παραδοχή ότι η μαθηματική δραστηριότητα, ως μια κοινωνική πρακτική, αντανακλά την κοινωνική κατάσταση
.
. Η μαθηματική γνώση ως παράγωγο της είναι, αντίστοιχα, μια κοινωνική κατασκευή, υποκείμενη στα ιστορικά καθορισμένα κοινωνικά και πολιτισμικά πλαίσια του σταδίου ανάπτυξης της. Δεν αποτελεί, κατά συνέπεια, μια αδιάψευστη, αντικειμενική και απόλυτη γνώση, αυτόνομη και κατηγορικά διακριμένη από τις άλλες μορφές της ανθρώπινης γνώσης, απαλλαγμένη πλήρως από τα εμπειρικά δεδομένα και τις αντιφάσεις της κοινωνικής πραγματικότητας και καθορισμένη μόνο από τη λογική ή από μια υπερβατική πραγματικότητα (Kitcher 1983, Tymoczo 1986, Wittgenstein 1956).

Η μαθηματική γνώση, επομένως, όπως και κάθε επιστημονική γνώση, υπόκειται ως παράγωγο μιας κοινωνικής πρακτικής σε διαρκείς διαψεύσεις και αναθεωρήσεις και δεν αποτελεί ένα τελεσίδικα περατωμένο σώμα γνώσης, εκφρασμένο οριστικά από ένα κλειστό σύστημα προτάσεων και από μια σειρά διαδικασιών τεκμηρίωσης της αλήθειας των προτάσεων αυτών (Lakatos 1976/1996). Ως παράγωγο μιας κοινωνικής πρακτικής εντάσσεται σε ιστορικά καθορισμένα κοινωνικά και πολιτιστικά πλαίσια, που καθορίζουν το επίπεδο και προσδιορίζουν την κατεύθυνση ανάπτυξης της.

Παράλληλα και για τους ίδιους λόγους, η μαθηματική γνώση δεν μπορεί να θεωρηθεί ως απόλυτα αντικειμενική, ανεξάρτητη από τις κυρίαρχες κοινωνικές αξίες, υποκείμενη αποκλειστικά σε μια δική της αυτόνομη εσωτερική λογική. Αντίθετα, μέσα από την κοινωνική της προέλευση και την ιστορική της εξέλιξη η μαθηματική γνώση διαπλέκεται με το σύνολο της ανθρώπινης γνώσης και σφραγίζεται από τις κυρίαρχες ιδεολογίες, που οριοθετούν τα πλαίσια ανάπτυξης της (Wilder 1981).

Η αντικειμενικότητα της μαθηματικής γνώσης είναι ουσιαστικά μια μορφή κοινωνικής σύμβασης (Blöor, 1976). Μέσα από την εξέλιξη της μαθηματικής δραστηριότητας, έχουν επικυρωθεί από τις κοινότητες των μαθηματικών κανόνες και πεποιθήσεις για τους ορθούς τύπους εργασίας και για τις αποδεκτές μορφές παρουσίασης των μαθηματικών, οι οποίοι

προσομοιάζουν με τους κανόνες ενός παιχνιδιού. Χωρίς αμφιβολία, η υλική πραγματικότητα παρέχει ένα αρχικό πλαίσιο ανάπτυξης της μαθηματικής πρακτικής και ένα διαρκές πεδίο αναφοράς της, αλλά είναι οι μαθηματικές συμβάσεις οι οποίες αποδίδουν έναν χαρακτήρα αναγκαιότητας στη καθαυτή διαδικασία ανάπτυξης αυτής της πρακτικής και στα αποτελέσματά της. Το αντικείμενο, επομένως των μαθηματικών, έχει την αφετηρία και την αναφορά του στην υλική πραγματικότητα, αλλά συνίσταται από κοινωνικές κατασκευές και συμβατικούς κανόνες.

Σε μια τέτοια θεώρηση της μαθηματικής πρακτικής και της μαθηματικής γνώσης το κοινωνικό πλαίσιο, όπως και οι επαγγελματικές κοινότητες των ερευνητών μαθηματικών, διαδραματίζουν ένα κεντρικό ρόλο στην δημιουργία και στην επικύρωση της μαθηματικής γνώσης (Davis and Hersh, 1980; Kitcher, 1984; Latour, 1987). Η κοινωνική οργάνωση και δομή των κοινοτήτων των ερευνητών μαθηματικών, ειδικότερα, η οποία δεν έχει καθόλου ευκαιριακό και τυχαίο χαρακτήρα, διαμορφώνει τους μηχανισμούς δημιουργίας και επικύρωσης της μαθηματικής γνώσης, αποτελώντας ταυτόχρονα το πλαίσιο διαφύλαξης και το πεδίο εφαρμογής και μετάδοσης της άρρητης και άτυπης μαθηματικής γνώσης.

Τρεις χαρακτηριστικές όψεις του κοινωνικού πλαισίου οργάνωσης της μαθηματικής πρακτικής και παραγωγής της μαθηματικής γνώσης έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον:

(α) *Η επιλογή των κλάδων και των θεμάτων ανάπτυξης της μαθηματικής έρευνας.*

Η χρηματοδότηση και η διαθεσιμότητα των εφαρμογών, που προϋποθέτει και ταυτόχρονα οριοθετεί, καθορίζουν σε πολύ μεγάλο βαθμό την κατεύθυνση ανάπτυξης της μαθηματικής έρευνας και άρα την παραγωγή της μαθηματικής γνώσης, υπεραξιώνοντας ή απαξιώνοντας μαθηματικούς κλάδους και μαθηματικές γνώσεις. Χαρακτηριστικό παράδειγμα, η επιχειρησιακή έρευνα, η οποία συγκροτήθηκε και νομιμοποιήθηκε ως κλάδος των μαθηματικών μέσα από τις στρατιωτικές ανάγκες του Δευτέρου Παγκοσμίου Πολέμου και τα ενδιαφέροντα της οικονομικής οργάνωσης στη συνέχεια. Παρόμοια περίπτωση αποτελεί η ανάπτυξη των υπολογιστικών μαθηματικών, η οποία καθορίστηκε από τις ανάγκες της βιομηχανίας των υπολογιστών συμβάλλοντας ταυτόχρονα στην ανάπτυξη τους καθοριστικά (Hodgkin, 1976).

(β) *Η ερμηνευτική αναγωγή της μαθηματικής γνώσης.*

Κλάδοι και περιοχές της μαθηματικής γνώσης υπεραξιώνονται ή απαξιώνονται κοινωνικά με κριτήριο την επιθυμητή ή την προσφερόμενη φυσική ή κοινωνική ερμηνεία τους. Χαρακτηριστικό παράδειγμα, η θεωρία των διαφορικών εξισώσεων και η ανάπτυξη της στην κατεύθυνση της δημιουργίας μιας «θεωρίας καταστροφών», η οποία για μεγάλο

χρονικό διάστημα αποτέλεσε πεδίο εντατικής θεωρητικής έρευνας με στόχο την μαθηματοποίηση και την περιγραφή και κατανόηση κοινωνικών καταστάσεων μέσα από την οπτική αυτής της συγκεκριμένης μαθηματοποίησης τους. Αντίστοιχη, αν και εντελώς διαφορετικού περιεχομένου, περίπτωση αποτελεί η μαθηματοποίηση της κβαντικής θεωρίας στη διάρκεια του μεσοπολέμου υπό τους όρους της κυρίαρχης επιστημονικής θεώρησης της αιτιότητας και της απροσδιοριστίας των φαινομένων, η οποία έχει αναλυθεί από τον Forman (1971) και η οποία επέδρασε σημαντικά στον προσανατολισμό και στο περιεχόμενο της ανάπτυξης της μαθηματικής έρευνας.

(γ) *Ο τύπος οργάνωσης και η μορφή παρουσίασης της μαθηματικής γνώσης*

Η επιλογή των ορισμών και των αξιωμάτων, δηλαδή των μαθηματικών παραδοχών οι οποίες αποτελούν τη βάση κάθε μαθηματικής θεωρίας, οι τύποι των μαθηματικών θεωρημάτων, δηλαδή των μαθηματικών αληθειών οι οποίες συγκροτούν κάθε μαθηματική θεωρία, η μορφή των αποδείξεων της αλήθειας των μαθηματικών θεωρημάτων, όπως και κάθε πτυχή των μαθηματικών υπόκειται στην επίδραση ενός πλήθους κοινωνικών παραγόντων, όπως για παράδειγμα είναι οι κυρίαρχες ιδεολογικές απόψεις για το χαρακτήρα της κοινωνικής πραγματικότητας. Χαρακτηριστικό παράδειγμα, η θεωρία παιγνίων, μια μαθηματική θεωρία περιγραφής και ανάλυσης καταστάσεων ανταγωνισμού και σύγκρουσης η οποία αναπτύχθηκε αρχικά με αναφορά στη λειτουργία των οικονομικών συστημάτων (Martin, 1978). Βασικές έννοιες της θεωρίας αποτελούν οι «παίκτες», καθένας από τους οποίους έχει έναν αριθμό «επιλογών» οι οποίες συνεπάγονται «συνέπειες». Η μαθηματική θεωρία των παιγνίων διερευνά και καθορίζει τις άριστες στρατηγικές για κάθε επιλογή, ενώ το σύνολο των επιλογών και των συνεπειών τους είναι για κάθε παίκτη σταθερά δεδομένες και ποσοτικοποιήσιμες. Κατά συνέπεια, η θεωρία παιγνίων προϋποθέτει και ενισχύει τη λογική του ατομικού ανταγωνισμού, ενώ οι εφαρμογές της καλύπτουν με ένα επιστημονικό επίχρυσμα αντικειμενικότητας και νομιμοποιούν μαθηματικά τη λήψη επιθυμητών αποφάσεων. Το συγκεκριμένο παράδειγμα και πολλά άλλα (ενδεικτικά Bos & Mehtens 1977, MacKenzie 1978, Mehtens 1987 και για μια συνολική επισκόπηση και ανάλυση δεξ στο Restivo 1983) καταδεικνύουν την επίδραση του κοινωνικού πλαισίου και των επιμέρους συνιστωσών του, όπως είναι οι οικονομικές σχέσεις ή τα συστήματα αξιών, στον προσανατολισμό και στο περιεχόμενο της μαθηματικής πρακτικής και της μαθηματικής γνώσης.

Σε μια θεώρηση της μαθηματικής πρακτικής και της μαθηματικής γνώσης από την οπτική του κοινωνικού της πλαισίου ενδιαφέρει ιδιαίτερα η θεσμική οργάνωση και η λειτουργία της μαθηματικής δραστηριότητας. Οι μορφές επαγγελματικής απασχόλησης των ερευνητών μαθηματικών, οι τύποι και οι μηχανισμοί χρηματοδότησης της μαθηματικής έρευνας, οι μορφές και τα μέσα επικοινωνίας και δημοσιοποίησης των αποτελεσμάτων της μαθηματικής έρευνας (συνέδρια και περιοδικά), τα συστήματα εκπαίδευσης των ερευνητών μαθηματικών (προ-πτυχιακά και μεταπτυχιακά), οι ιεραρχίες και η εξουσία στις κοινότητες των μαθηματικών και τα συναφή.

Η επίδραση μερικών στοιχείων της οργάνωσης και της λειτουργίας της μαθηματικής πρακτικής στον προσανατολισμό και στο περιεχόμενο της ίδιας της πρακτικής, αλλά και των αποτελεσμάτων της είναι χαρακτηριστική. Εντελώς ενδεικτικά:

(α) Η υποστήριξη και η χρηματοδότηση της μαθηματικής έρευνας

Το μεγαλύτερο μέρος των πόρων της μαθηματικής έρευνας, η υλική υποδομή και η χρηματοδότηση της, προέρχεται από κυβερνητικούς οργανισμούς ή μεγάλες βιομηχανικές και εμπορικές εταιρείες. Οι πηγές χρηματοδότησης άμεσα ή έμμεσα καθορίζουν το είδος των ερευνητικών προβλημάτων και τους τύπους των υπό διερεύνηση εφαρμογών. Οι μεγάλες βιομηχανικές εταιρείες, για παράδειγμα, ενδιαφέρονται για την εφαρμογή των μαθηματικών στην επίλυση προβλημάτων μείωσης του κόστους, ελέγχου της εργασίας ή βελτίωσης της τεχνολογίας της παραγωγής. Για παράδειγμα, τα μαθηματικά της μετάδοσης του φωτός σε οπτικές ίνες προήλθαν από τη μαθηματική διερεύνηση προβλημάτων των τηλεπικοινωνιών, η οποία τροφοδότησε τη θεωρητική ανάπτυξη αντίστοιχων μαθηματικών θεωριών και την εφαρμογή τους στην επίλυση των συγκεκριμένων προβλημάτων. Ιδιαίτεροι τύποι, τώρα, παραβολικών μερικών διαφορικών εξισώσεων μελετήθηκαν εκτεταμένα, όχι επειδή είχαν θεωρητικό ενδιαφέρον ή σπουδαιότητα για τα μαθηματικά, αλλά εξαιτίας συγκεκριμένων πρακτικών εφαρμογών τους.

(β) Οι ερευνητές των μαθηματικών

Οι μαθηματικοί ερευνητές, οι επιστήμονες δηλαδή οι οποίοι ασχολούνται με την παραγωγή και την εφαρμογή της μαθηματικής γνώσης, απασχολούνται στο σύνολο τους σήμερα σε πανεπιστήμια, ερευνητικά ιδρύματα και κέντρα μελετών, δημόσια ή ιδιωτικά. Τα μαθηματικά, όπως και οι επιστήμες, έγιναν πεδίο επαγγελματικής απασχόλησης από τις αρχές του 19^{ου} αιώνα και ως συνέπεια η μαθηματική δραστηριότητα διαμόρφωσε σταδιακά χαρακτηριστικά γραφειοκρατικού τύπου. Αυτού του τύπου κοινωνική

οργάνωση της μαθηματικής παραγωγής επηρέασε ουσιαστικά και πάντοτε επηρεάζει τον τρόπο και το περιεχόμενο της εργασίας των μαθηματικών (Collins and Restivo, 1983). Οι ερευνητικές επιλογές τους καθορίζονται πρωτίστως από τις ανάγκες βελτίωσης των αμοιβών και των συνθηκών εργασίας τους, τις επιδιώξεις αύξησης του γοήτρου και των επιρροών τους, τις επιθυμίες κοινωνικής ανόδου και παρόμοια συναφή.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα επίδρασης της κοινωνικής οργάνωσης της μαθηματικής δραστηριότητας στο περιεχόμενο των μαθηματικών, αποτελεί η εννοιολογική διάσταση και αλλαγή του περιεχομένου της μαθηματικής αλήθειας και της απόδειξης της μεταξύ των μαθηματικών του 18^{ου} και του 19^{ου} αιώνα. Όπως αναλύει Grabiner (1974), κατά τον 18^ο αιώνα κύριο στόχο των μαθηματικών αποτέλεσε η αποτελεσματικότητα των μεθόδων τους, ενώ αντίθετα τον 18^ο αιώνα η αυστηρότητα και η συνέπεια των αποδείξεων της αλήθειας τους. Μεταξύ των βασικών αιτίων αυτής της μεταστροφής περιλαμβάνεται η αλλαγή του επαγγελματικού καθεστώτος των μαθηματικών. Από τις αρχές του 18^{ου} αιώνα και εξής η πλειονότητα των ερευνητών μαθηματικών άρχισαν να απασχολούνται με τη διδασκαλία των μαθηματικών. Ως αποτέλεσμα ενδιαφέρθηκαν πρωτίστως, όχι για τις εφαρμογές των αποτελεσμάτων της μαθηματικής έρευνας, αλλά για τη συστηματοποίηση μιας διδακτικής ύλης για τους σπουδαστές τους και παράλληλα για την περιχαράκωση του εκπαιδευτικού επαγγέλματος και τον αποκλεισμό από αυτό των ανταγωνιστών τους ερασιτεχνών μαθηματικών. Σ' αυτό το πλαίσιο αποκτούν ιδιαίτερη σημασία οι τυπικοί ορισμοί των εννοιών και οι αυστηρές αποδείξεις των μαθηματικών προτάσεων. Με αντίστοιχους όρους κοινωνικής οργάνωσης του επαγγέλματος των ερευνητών μαθηματικών περιγράφει ο Schubring (1981) τη δημιουργία της διάκρισης «καθαρών» και «εφαρμοσμένων» μαθηματικών στις αρχές του 19^{ου} αιώνα.

(γ) Η κατάτμηση και η εξειδίκευση της μαθηματικής γνώσης

Η κατάτμηση σε κλάδους και στη συνέχεια η εξειδίκευση της μαθηματικής γνώσης σε τομείς και επίπεδα, τα οποία δεν υπαγορεύονται από καμία επιστημολογική ανάγκη, και η αντίστοιχη ανάπτυξη ιδιαίτερων λεξιλογίων, αποτελεί ένα από τα μέσα με τα οποία η μαθηματική γνώση περιχαράκωνεται απέναντι στους μη-ειδικούς και αποκτά ένα ιδιότυπο κύρος, ως μια πολύ ειδική γνώση, την οποία μπορεί να κατανοήσουν, και άρα να αξιολογήσουν, μόνον οι κατά περίπτωση εξειδικευμένοι μαθηματικοί. Έτσι μια τέτοιου τύπου ανάπτυξη του περιεχομένου της μαθηματικής γνώσης εξασφαλίζει σε μικρές κοινότητες μαθηματικών την επαγγελματική εξειδίκευση και απασχόληση, ενώ

σε μια διαλεκτική αμοιβαιότητα, αυτές οι κοινότητες των μαθηματικών συμβάλλουν με την ερευνητική τους δραστηριότητα και τα αποτελέσματα στην αντίστοιχα προσανατολισμένη ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης.

Ανακεφαλαιώνοντας, οι κοινωνικές διαστάσεις της μαθηματικής πρακτικής και των αποτελεσμάτων της συναρτώνται εκ προοιμίου με τις παραδοχές για τον χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης. Αν η μαθηματική γνώση θεωρηθεί ως υπάρχουσα ανεξάρτητα από την ανθρώπινη δραστηριότητα, τότε η κοινωνική της διάσταση περιορίζεται μόνο στη χρήση αυτής γνώσης στις ανθρώπινες δραστηριότητες και σε καμία περίπτωση στο καθαυτό περιεχόμενο της το οποίο είναι απόλυτο, αντικειμενικό, ανεξάρτητο από τις κυρίαρχες κοινωνικές αξίες και υποκείμενο αποκλειστικά στη δική του αυτόνομη εσωτερική λογική. Στην αντίθετη περίπτωση, τόσο η μαθηματική γνώση όσο και η μαθηματική δραστηριότητα, όπως επίσης και η χρήση τους, ως στοιχεία μιας κοινωνικής πρακτικής, υπόκεινται στα ιστορικά καθορισμένα χαρακτηριστικά του κοινωνικού τους πλαισίου.

Με τις διατυπώσεις, μάλιστα, του Restivo (1993, σελ. 249):

Οι φαινομενικά πιο καθαρές έννοιες, οι λογικές έννοιες, εμφανίζονται ως αντικειμενικές και απρόσωπες έννοιες μόνο στο βαθμό που, και εξαιτίας του γεγονότος ότι, είναι δημοσιοποιήσιμες και δημοσιοποιημένες – δηλαδή μόνο, και εφόσον, αποτελούν συλλογικές αναπαραστάσεις. Όλες οι έννοιες είναι συλλογικές αναπαραστάσεις και συλλογικές επεξεργασίες, γιατί συλλαμβάνονται, αναπτύσσονται, επιβεβαιώνονται και τροποποιούνται μέσα από την κοινωνική *εργασία* σε κοινωνικά πλαίσια. Στην πραγματικότητα, όλα τα πλαίσια της ανθρώπινης σκέψης και δράσης είναι κοινωνικά. Το επόμενο διανοητικό βήμα είναι η αναγνώριση του γεγονότος, ότι «η εργασία», «το κοινωνικό πλαίσιο», «η σκέψη» και «η δράση» είναι αζεχώριστα.. Οι έννοιες δεν είναι απλώς κοινωνικά προϊόντα είναι συστατικά κοινωνικές. Αυτός ο συλλογισμός οδηγεί στο ριζοσπαστικό συμπέρασμα, ότι είναι οι κοινωνικοί κόσμοι ή οι κοινότητες αυτές οι οποίες σκέπτονται και όχι τα άτομα. Με την κυριολεκτική έννοια του όρου, δεν σκέπτονται οι κοινότητες καθαυτές με κάποια υπερβατική έννοια.. Ακριβέστερα, τα άτομα είναι φορείς έκφρασης των σκέψεων των κοινοτήτων τους ή «συλλογικά σκεπτόμενα» άτομα. Ή με μια διαφορετική διατύπωση, *ο νους είναι κοινωνική δομή*.

Ο μετασχηματισμός της μαθηματικής γνώσης σε σχολική γνώση και η μαθηματική εκπαίδευση

Από την εμφάνιση του σύγχρονου σχολείου μέχρι σήμερα, τα μαθηματικά κατέχουν κεντρική και αδιαμφισβήτητη θέση στο σχολικό πρόγραμμα, τόσο της πρωτοβάθμιας όσο και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, με μια αιτιολόγηση η οποία, ανεξάρτητα από τις διατυπώσεις της, παραπέμπει άμεσα ή έμμεσα, στις μοναδικές ιδιότητες των μαθηματικών ως μιας γνώσης και μιας δραστηριότητας, οι οποίες έχουν τη δυνατότητα να «ασκούν» το μυαλό των παιδιών στις λογικές διεργασίες και στην ορθολογική σκέψη, όπως και να αποτελούν το πεδίο ανάπτυξης μιας σειράς «ανώτερων» νοητικών ικανοτήτων, ανάλυσης, σύνθεσης, γενίκευσης κλπ.

Η παραδοχή αυτή όμως, όπως και κάθε παραδοχή για το ρόλο των μαθηματικών στο σχολείο, ενσωματώνει και υλοποιεί παραδοχές για τη φύση και το χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης και πρακτικής, και αντίστροφα κάθε φιλοσοφική - επιστημολογική θεώρηση της μαθηματικής γνώσης και πρακτικής εμπεριέχει και υποβάλλει αντίστοιχες προσεγγίσεις της μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών. Γιατί κάθε προσέγγιση της μαθηματικής εκπαίδευσης εμπεριέχει αναγκαστικά μια προσέγγιση του φαινομένου της ανθρώπινης μάθησης βασισμένη σε αντίστοιχες παραδοχές για τη φύση και το χαρακτήρα των μαθηματικών (Χασάπης, 1986).

Η παραδοχή, λοιπόν, ότι τα μαθηματικά ως σχολικό μάθημα αποτελούν προνομιακό πεδίο νοητικής άσκησης υπονοεί μια θεώρηση της μαθηματικής γνώσης ταυτισμένη με το επιστημολογικό πρότυπο της “απολυτοκρατίας” των μαθηματικών (Ernest, 1991). Θεωρεί τα μαθηματικά ως μια γνώση η οποία είναι αμετάβλητη, αδιάψευστη, αντικειμενική και απόλυτη, εξαρτημένη μόνο από τις μαθηματικές παραδοχές της και τους παραδεκτούς κανόνες της τυπικής-παραγωγικής λογικής, άρα ως μια γνώση η οποία είναι ουσιαστικά υπερ-ανθρώπινη, άρα α-κοινωνική και α-χρονική, άρα υπερ-ιστορική, και γι’ αυτό ανεξάρτητη των ηθικών και πολιτισμικών αξιών.

Αναπόφευκτη συνέπεια της παραδοχής αυτής είναι η κατάτμηση μιας σαφώς προκαθορισμένης μαθηματικής γνώσης, της λεγόμενης και «διδακτικής ύλης», σε απλουστευμένες και ιεραρχικά οργανωμένες από το απλό στο σύνθετο διδακτικές ενότητες, με κύριο περιεχόμενο απολύτως βασικές έννοιες, τυποποιημένους κανόνες, τεχνικές ασκήσεις και προβλήματα με μια και μοναδική λύση και η διδασκαλία της έτσι μετασχηματισμένης μαθηματικής γνώσης με κύριο στόχο τη επισώρευση αναγκαίων γνώσεων, τη νοητική άσκηση και την ανάπτυξη συγκεκριμένων γνωστικών δεξιοτήτων.

Η διδασκαλία των μαθηματικών, στην περίπτωση αυτή, αποτελεί μια κλιμάκωση νοητικών εμπειριών, που στοχεύουν και υπηρετούν την άσκηση στις λογικές διεργασίες και στην ορθολογική σκέψη, διαταγμένων σε μια αλληλουχία ώστε κάθε εμπειρία να αποτελεί ενδυνάμωση και διεύρυνση της προηγούμενης, ενώ οι έννοιες της επανάληψης και του αυτοματισμού αποτελούν δομικό της στοιχείο.

Αντίστοιχα, η αναφορά αυτής της μαθηματικής γνώσης στην πραγματική ζωή των ανθρώπων γίνεται με δυο παράλληλους και ανεξάρτητους μεταξύ τους μονόδρομους. Από το ένα μέρος οι ορισμένες μαθηματικές έννοιες αναγνωρίζονται στον κόσμο της πραγματικότητας, αποσπώνται, απλοποιούνται και υπόκεινται σε μια νοητική επεξεργασία και από το άλλο οι απλοποιημένες και τυποποιημένες μαθηματικές έννοιες εφαρμόζονται στα πρότυπα τους, τα οποία επίσης ενυπάρχουν ήδη στην πραγματικότητα. Αυτή η διαδικασία «εφαρμογής» των μαθηματικών θεμελιώνεται αποκλειστικά στην παθητική παρατήρηση και αναπτύσσεται ως ένα νοητικό παιχνίδι αναδιοργάνωσης και συστηματοποίησης θεωρητικών εγγραφών, μαθηματικά δεδομένων.

Βασική, όμως, όψη αυτής της θεώρησης της μαθηματικής εκπαίδευσης, η οποία πρέπει εδώ να υπογραμμιστεί, είναι η σχέση την οποία επιβάλλει ανάμεσα στη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο και στη μαθηματική δραστηριότητα και γνώση που αποτελούν τυπικά το αντικείμενο της διδασκαλίας των μαθηματικών. Η σχέση αυτή είναι ουσιαστικά μια πρακτική σχέση χρησιμοποίησης της μαθηματικής γνώσης, η οποία έχει ως κυρίαρχη λειτουργία της, όχι τη γνώση των μαθηματικών, αλλά πρωτίστως τη γνώση κανόνων, προτύπων και πρακτικών που στοχεύουν στη συγκρότηση μιας ειδικής σχέσης των παιδιών με τα μαθηματικά. Αυτό ακριβώς σημαίνουν, εκτός των όσων προαναφέρθηκαν, οι παραδοχές και οι διακηρύξεις, οι οποίες θεωρούν ως πρωταρχικούς στόχους της διδασκαλίας των μαθηματικών στο σχολείο «τη μεθοδική άσκηση στην ορθολογική σκέψη, στην ανάλυση, στην αφαίρεση, στη γενίκευση, στην εφαρμογή, στη κριτική και στις λογικές διεργασίες καθώς και η μύηση στη μαθηματική αποδεικτική διαδικασία» ή «την ανάπτυξη της ικανότητας για ακριβή σύλληψη των εννοιών, των μεγεθών, των ιδιοτήτων και των σχέσεων μεταξύ τους και ιδιαιτέρως εκείνων που είναι απαραίτητες για την κατανόηση και επίλυση πραγματικών προβλημάτων της σύγχρονης ζωής και για την επαφή με τη σύγχρονη τεχνική, οικονομική και κοινωνική πραγματικότητα» και τα συναφή.

Μ' άλλα λόγια οι παραδοχές και οι διακηρύξεις αυτές, θεωρούν ως πρωταρχικό σκοπό της διδασκαλίας των μαθηματικών στο σχολείο την εκμάθηση κανόνων και χειρισμών κατάλληλης χρησιμοποίησης της μαθηματικής γνώσης και των αντικειμένων της. Μέσα από μια τέτοια σχέση της διδασκαλίας των μαθηματικών με το αντικείμενο της προσφέρεται μια

γνώση, η οποία είναι πρωταρχικά μια πρακτική γνώση χρησιμοποίησης των μαθηματικών και δευτερευόντως μια γνώση των μαθηματικών καθ'αυτών. Αυτή άλλωστε μπορεί να θεωρηθεί και η ουσιαστική έννοια του όρου “μαθηματική παιδεία”. Μια μαθηματική γνώση επενδυμένη σε μια πρακτική γνώση χρησιμοποίησης της. Γι’ αυτό το λόγο μεταξύ άλλων τα μαθηματικά αποτελούν παραδοσιακά μια βασική συνιστώσα της παιδαγωγικής, δηλαδή της πολιτιστικής χειραγώγησης. Ασκούν στη “σωστή” σκέψη, στη “σωστή” κρίση, στις “σωστές” διαδικασίες αποφάσεων.

Όμως, αυτή η πρακτική σχέση χρησιμοποίησης που συγκροτείται μεταξύ της διδασκαλίας των μαθηματικών και του αντικειμένου της είναι πρωταρχικά μια σχέση ιδεολογικής διαπαιδαγώγησης, που στη βάση ενός καθιερωμένου και καθολικά αποδεκτού γνωστικού αντικειμένου, όπως είναι τα μαθηματικά, εγχαράζει καθορισμένα πρότυπα αναφοράς και πρακτικής συμπεριφοράς απέναντι στη συγκεκριμένη γνώση και δραστηριότητα και γενικότερα απέναντι στις κοινωνικά κυρίαρχες αξίες. Από την οπτική αυτή, η διδασκαλία των μαθηματικών είναι φορέας μιας επιστημονικού χαρακτήρα μαθηματικής γνώσης και ταυτόχρονα μιας ιδεολογίας για την επιστήμη των μαθηματικών και των αποτελεσμάτων της. Μιας ιδεολογίας δηλαδή για την αντιμετώπιση της επιστημονικής γνώσης των μαθηματικών και των αποτελεσμάτων της, που βασίζεται σε μια ορισμένη θεώρηση της θέσης της μαθηματικής πρακτικής στην υπάρχουσα κοινωνική πραγματικότητα και κατά συνέπεια σε μια ορισμένη θεώρηση του ρόλου των ερευνητών μαθηματικών στην παραγωγή και στην αναπαραγωγή των μαθηματικών. Σε τελευταία ανάλυση σε μια ορισμένη θεώρηση του κοινωνικού καταμερισμού της πνευματικής και χειρωνακτικής εργασίας, που είναι θεώρηση μιας κυρίαρχης ιδεολογίας.

Οι εναλλακτικές θεωρήσεις των μαθηματικών, ως σχολικού μαθήματος, αναδεικνύουν και αντιμετωπίζουν αφενός τη μαθηματική γνώση ως παράγωγο μιας κοινωνικής πρακτικής, η οποία υπόκειται στα, και καθορίζεται από τα, πολιτισμικά πλαίσια ιστορικά δεδομένων κοινωνιών και αφετέρου αναδεικνύουν και προτάσσουν τους μαθητές ως κοινωνικά υποκείμενα, τα οποία δραστηριοποιούνται σε κοινωνικά πλαίσια με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά, ιδιοποιούμενα μέσα από τη δραστηριότητα τους τη μαθηματική γνώση και τις μαθηματικές μορφές σκέψης. Στις θεωρήσεις αυτές, ο κοινωνικός χαρακτήρας της μαθηματικής γνώσης και οι κοινωνικές ορίζουσες της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι δεδομένες, ενώ οι μεταξύ τους διαφοροποιήσεις προκύπτουν πρωτίστως από διαφορετικές θεωρητικές προτεραιότητες και δευτερευόντως από διαφορετικές προσεγγίσεις του χαρακτήρα και των διαδικασιών της μάθησης ή και των στόχων και των πρακτικών της

διδασκαλίας των μαθηματικών, οι οποίες βέβαια και στη μια και στην άλλη περίπτωση οδηγούν και σε διαφοροποιημένες ερευνητικές προτεραιότητες.

Οι κοινωνικο-πολιτισμικές προσεγγίσεις επικεντρώνονται στο φαινόμενο της μάθησης, ως διαδικασίας ατομικής ιδιοποίησης των ιστορικά διαμορφωμένων και πολιτισμικά καθορισμένων τύπων σκέψης, νοητικών εργαλείων και επιστημονικών γνώσεων μέσα από κοινωνικά ορισμένες μορφές δραστηριότητας. Από μια οπτική, δηλαδή, κοινωνικής ψυχογένεσης η οποία έχει τη θεωρητική της αφετηρία στις επεξεργασίες του Vygotsky και των επιγόνων του θεωρητικών της δραστηριότητας.

Από το άλλο μέρος, οι πολιτικο-κοινωνικές προσεγγίσεις επικεντρώνονται στη διδασκαλία των μαθηματικών, ως συστατικού στοιχείου των πολιτικών λειτουργιών του σχολείου, από την οπτική του ρόλου της εκπαίδευσης στις διαδικασίες της κοινωνικής αναπαραγωγής και της συμβολής των μαθηματικών στην νομιμοποίηση και αποδοχή ή στην κατανόηση και αμφισβήτηση της κοινωνικής ανισότητας και των επιπτώσεων της.

Γενικεύοντας και αναγκαστικά απλοποιώντας, η προσέγγιση της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών,

- πέρα, αλλά όχι ανεξάρτητα από, το άτομο στο σύνολο των κοινωνικών του σχέσεων,
- πέρα, αλλά όχι ανεξάρτητα από, τις διδακτικές πρακτικές στους κοινωνικούς και πολιτισμικούς παράγοντες διαμόρφωσης τους και
- πέρα, αλλά όχι ανεξάρτητα από, το σχολείο στο κοινωνικό και πολιτικό του πλαίσιο, αποτελεί την κοινή αφετηρία όλων των εναλλακτικών θεωρήσεων της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Ένα τελικό σχόλιο

Το κοινωνικο-πολιτικό πλαίσιο οργάνωσης και ανάπτυξης των δραστηριοτήτων της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών (το αναλυτικό πρόγραμμα, τα σχολικά βιβλία, το περιεχόμενο και οι μορφές αξιολόγησης, η εκπαίδευση των εκπαιδευτικών κ.α.), όπως και οι διαδικασίες της ατομικής συγκρότησης της ιστορικά αναπτυγμένης και κοινωνικά καθορισμένης μαθηματικής γνώσης και πρακτικής μέσα από τη συμμετοχή των ατόμων στις τυπικά θεσμοθετημένες και άτυπα καθιερωμένες δραστηριότητες της διδασκαλίας των μαθηματικών, αποτελούν θεμελιώδεις διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης με άμεσες και πολύ σημαντικές κοινωνικές συνέπειες, τόσο στο επίπεδο της ζωής των ατόμων όσο και στο επίπεδο της κοινωνίας. Για πρακτικούς, όμως, λόγους η ανάλυσή τους δεν μπορεί να συμπεριληφθεί στην παρούσα εισήγηση.

Σε κάθε περίπτωση, ο ρόλος της εκπαίδευσης και κατά συνέπεια και της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι πρωτίστως πολιτικός, αφού αποτελεί συστατικό παράγοντα της διαδικασίας παραγωγής ατόμων για την κάλυψη των αναγκών του κοινωνικού καταμερισμού εργασίας και παράλληλα μηχανισμό αναπαραγωγής και κυρίαρχης ιδεολογίας.

Όλα τα σχολικά μαθήματα συντελούν, το καθένα σε διαφορετικό πεδίο και βαθμό, στην προώθηση των δύο αυτών λειτουργιών της εκπαίδευσης, με το περιεχόμενο, την κατανομή, την οργάνωση, την παρουσίαση, την αξιολόγηση της αντίστοιχης σχολικής γνώσης και τις διδακτικές πρακτικές που υποβάλλουν. Αναπτύσσουν δηλαδή στους μαθητές, κάποιες δεξιότητες απαραίτητες για ν' ανταποκριθούν στις απαιτήσεις του υπάρχοντος κοινωνικού καταμερισμού εργασίας και ταυτόχρονο νομιμοποιούν και συγκαλύπτουν αυτόν τον καταμερισμό με επιβολή αντίστοιχης ιδεολογίας. Τα μαθηματικά ως σχολικό μάθημα, όσο κι αν φαντάζουν ουδέτερα δεν εξαιρούνται, πέρα από δεξιότητες, συμβάλλουν στην αναπαραγωγή της κοινωνικής ανισότητας. και στην επιβολή εκείνης της ιδεολογίας, η οποία συγκαλύπτει και νομιμοποιεί την κοινωνικής ανισότητα.

Πρέπει τέλος να σημειωθεί, ότι απέναντι σ' αυτές τις κοινωνικές λειτουργίες της μαθηματικής εκπαίδευσης και στη λογική της έμπρακτης αμφισβήτησης τους έχουν αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια δύο διακριτές αντιδράσεις:

Η πρώτη αντίδραση είναι γνωστή ως « εθνομαθηματικά» και έχει την αφετηρία της στους προβληματισμούς, οι οποίοι αναπτύχθηκαν στη Βραζιλία αρχικά και σε χώρες της Αφρικής στη συνέχεια (D'Ambrosio, 1985, Gerdes, 1996). Αφορμή υπήρξαν οι αρνητικές επιπτώσεις που είχαν στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών, εισαχθέντα από Δυτικές χώρες αναλυτικά προγράμματα, διδακτικό υλικό και μέθοδοι διδασκαλίας τα οποία δεν είχαν καμία απολύτως αναφορά στα πολιτιστικά περιβάλλοντα και στα κοινωνικά δεδομένα των κοινωνιών της Λατινικής Αμερικής και της Αφρικής.

Στην συνέχεια εξελίχθηκαν σε μια εναλλακτική πρόταση μαθηματικής εκπαίδευσης, η οποία επιδιώκει να εντοπίσει και να ενσωματώσει στα σχολικά μαθηματικά ιδέες και πρακτικές αναπτυγμένες σε πολιτισμικές πρακτικές μη Δυτικών κοινοτήτων, όπως είναι η ταπητουργία, η ξυλουργική ή η καλαθοπλεκτική και οι οποίες, παρόλο που δεν έχουν τα τυπικά χαρακτηριστικά των θεσμοθετημένων «Δυτικών» μαθηματικών, είναι μαθηματικές ιδέες οι οποίες μπορεί να αποτελέσουν τη βάση για τη διδασκαλία και τη μάθηση τυπικών μαθηματικών εννοιών (Ζαχάρος & Χασάπης, 1999; Χρονάκη, 2005). Μια εθνομαθηματικού τύπου διδασκαλία βασισμένη σε μαθηματικές ιδέες προερχόμενες από οικείες στους μαθητές

δραστηριότητες, μπορεί να συμβάλλει θετικά όχι μόνο στη μάθηση των μαθηματικών αλλά και στην εθνοτική και πολιτική συνειδητοποίηση των παιδιών.

Ενώ η κίνηση των εθνομαθηματικών αποτελεί μια αντίδραση, η οποία αναπτύσσεται σε μη Δυτικές κοινωνίες ως κριτική στον ενσωματωμένο στην εκπαίδευση πολιτιστικό ιμπεριαλισμό και στην ιδεολογία που τον υποστηρίζει, μια δεύτερη αντίδραση υπό τον όρο «κριτική μαθηματική εκπαίδευση» αποτελεί μια κίνηση, πολιτικού πρωτίστως χαρακτήρα, η οποία αναπτύσσεται στο εσωτερικό των τεχνολογικά εξελιγμένων Δυτικών κοινωνιών και αντιμετωπίζει κριτικά τις σχέσεις εξουσίας, η οποίες με τη χρήση των μαθηματικών διαμορφώνονται και εφαρμόζονται στην ατομική και κοινωνική καθημερινότητα των ανθρώπων (Frankenstein, 1983, 2005; Χρονάκη, 2005).

Ως ακροτελεύτιο σχόλιο, μια επιγραμματικά διατυπωμένη θέση του Restivo (1993, σελ. 250):

Η απελευθέρωση μας από τις υπερβατικές, υπερφυσικές και ιδεαλιστικές θεωρήσεις και δυνάμεις αρχίζει όταν η απαίτηση της κοινωνιολογικής θεώρησης αποσπά τη θρησκεία από τους θεολόγους και τους πιστούς και αποκαλύπτει τον πραγματικό χαρακτήρα της. Γίνεται, δε, οριστική απελευθέρωση (για αυτό το στάδιο της ανθρώπινης ιστορίας) όταν η ίδια αυτή απαίτηση αφαιρεί τη νοημοσύνη και τη σκέψη από τα χέρια των φιλόσοφων και των ψυχολόγων. Είναι σ' αυτό το πλαίσιο αναζήτησης, στο οποίο το ευρύτερο ζήτημα της κοινωνιολογικής θεώρησης των μαθηματικών καθίσταται εμφανές.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

- Bloor, D. (1976) *Knowledge and Social Imagery*, Routledge and Kegan Paul, London
- Bos, H. J. M., and Mehrtens, H. (1977) The interactions of mathematics and society in history: some exploratory remarks, *Historia Mathematica*, 4, 7-30
- Collins, R., and Restivo, S. (1983) Robber barons and politicians in mathematics: a conflict model of science, *Canadian Journal of Sociology*, 8, 199-227.
- D'Ambrosio, U. (1985), Ethnomathematics and its Place in the History and Pedagogy of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 5, 44-48.
- Davis, P. J. and Hersh, R.: 1980, *The Mathematical Experience*, Birkhauser, Boston, Ελληνική έκδοση: *Η μαθηματική Εμπειρία*, Εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα.
- Dörfler, W. (2003) Mathematics and mathematics education: Content and people, relation and difference, *Educational Studies in Mathematics*, 54, 147–170.

- Ernst, P. (1991), *The Philosophy of Mathematics Education*, Falmer Press, London.
- Ernest, P. (1998), *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*, SUNY Press, Albany, New York.
- Forman, P. (1971) Weimar culture, casualty, and quantum theory, 1918-1927: adaptation of German physicists and mathematicians to a hostile intellectual environment, *Historical Studies in the Physical Sciences*, 3, 1-115.
- Frankenstein, M. (1983) Critical mathematics education: An application of Paulo Freire's Epistemology, *Journal of Education*, 165 (4), 315-340.
- Frankenstein, M. (2005), Μαθαίνοντας τον κόσμο με τα μαθηματικά: Σκοποί ενός αναλυτικού προγράμματος κριτικής μαθηματικής εκπαίδευσης, στον παρόντα τόμο.
- Gerdes, P. (1996), Ethnomathematics and Mathematics education. Στο A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and C. Laborde (eds.). 1996. *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, 909-944
- Grabiner, J. V. (1974) Is mathematical truth time-dependent?, *American Mathematical Monthly*, 81, 354-365.
- Hodgkin, L. (1976) Politics and physical sciences, *Radical Science Journal*, 4, 29-60.
- Kitcher, P. (1983), *The Nature of Mathematics Knowledge*, Oxford University Press, Oxford.
- Kuba, V. and McDonald, J.L., (1991), What is Mathematics to Children?, *Journal of Mathematical Behaviour*, 10, 105-113.
- Lakatos, I. (1976), *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, Cambridge.
Ελληνική έκδοση: Lakatos, I. (1996), *Αποδείξεις και Ανασκευές*, Τροχαλία, Αθήνα.
- Latour, B.(1987), *Science in Action*, Harvard University Press, Cambridge, MA.
- MacKenzie, D. (1978) Statistical theory and social interests, *Social Studies of Science*, 8, 35-83.
- Martin, B. (1978) The selective usefulness of game theory, *Social Studies of Science*, 8, 85-110.
- Mehrtens, H. (1987) The social system of mathematics and National Socialism: a survey, *Sociological Inquiry*, 57, 159-182.
- Restivo, S. (1983) *The Social Relations of Physics, Mysticism, and Mathematics*, D. Reidel, Dordrecht.
- Restivo, S. (1992), *Mathematics in Society and History: Sociological Inquiries*, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands.

- Restivo, S. (1993), *The Social Life of Mathematics*. Στο Restivo, Sal, Van Bendegem, J.P. and Fischer, R, (Eds.), *Math Worlds - Philosophical and Social Studies of Mathematics and Mathematics Education*, Albany, State University of New York Press, 247 - 278.
- Roulet, G. (1992), *The Philosophy of Mathematics Education: "What does this mean for the children in the classroom?"*, *Philosophy of Mathematics Education Newsletter*, 6, 8-9.
- Schubring, G. (1981) *The conception of pure mathematics as an instrument in the professionalization of mathematics*, in: *Social History of Nineteenth Century Mathematics*, ed. H. Mehrtens, H. Bos and I. Schneider, Birkhauser, Boston, pp. 111-134.
- Tymoczko, T. (ed.), (1986), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Birkhauser, Boston.
- Valero, P. (1999). *Deliberative mathematics education for social democratization in Latin America*. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 99(1), 20-26.
- Wilder, R.L. (1981), *Mathematics as a Cultural System*, Pergamon, Oxford.
- Wittgenstein, L. (1956), *Remarks on the Foundations of Mathematics*, revised edition, MIT Press, Cambridge, 1978.
- Ζαχάρος, Κ. & Χασάπης, Δ.. (1999), *Εθνο-Μαθηματικά: Κριτική παρουσίαση της ερευνητικής και εκπαιδευτικής προσέγγισης των εθνομαθηματικών*, *Αντιτετράδια της Εκπαίδευσης*, 53, 51-55
- Χασάπης, Δ., (1986), *Η Οργάνωση του Περιεχομένου ενός Αναλυτικού Προγράμματος Μαθηματικών και οι Υπονοούμενες Αντιλήψεις για τη Γνώση, την Επιστήμη και την Εκπαίδευση*, *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, 28, 28-35.
- Χρονάκη, Α. (2005), *Η έννοια του κοινωνικού ως 'πολιτισμική-ιστορική' και ως 'πολιτική' στην σύγχρονη μελέτη της μαθηματικής εκπαίδευσης*, στον παρόντα τόμο.