Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών (επιμ.), (2009), Αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσ/νίκη, σ. 139-159

ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΚΕΙΜΕΝΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΣΧΟΛΙΚΗ ΤΑΞΗ

Δημήτρης Χασάπης

Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κείμενα – Αντικείμενα διδασκαλίας των μαθηματικών

Η εισαγωγή και η χρήση στη διδασκαλία των μαθηματικών χαρακτηριστικών αποσπασμάτων πρωτότυπων μαθηματικών κειμένων, χαρακτηριστικών διαφόρων περιόδων της ιστορίας των μαθηματικών, η οποία προτείνεται στην παρούσα εισήγηση δεν είναι καινούργια.. Τα τελευταία χρόνια η χρήση πρωτότυπων μαθηματικών κειμένων στη διδασκαλία των μαθηματικών έχει υποστηριχτεί από πολλές οπτικές, με διαφορετικό σκεπτικό και ποικίλους στόχους και σε κάποιο βαθμό έχει δοκιμαστεί με θετικά αποτελέσματα (Arcavi 1987, Barnett et al. 2008, Dunham 1986, Fauvel 1990, Jahnke et al. 2000, Laubenbacher & Pengelley, 1992, 1996, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach Reports, 2006, Nouet, 1996).

Στόχος, να καταδειχτεί η συνάρτηση της ανάπτυξης των μαθηματικών με τους ιστορικά καθορισμένους όρους της εποχής τους. Να προβληθεί, δηλαδή, μια οπτική της μαθηματικής δραστηριότητας ως κοινωνικής πρακτικής, η οποία υπόκειται στα ιστορικά καθορισμένα κοινωνικά και πολιτισμικά πλαίσια του σταδίου ανάπτυξης της και κατά συνέπεια η μαθηματική γνώση ως παράγωγο της υπόκειται σε διαψεύσεις και αναθεωρήσεις και δεν αποτελεί ένα τελεσίδικα περατωμένο σώμα γνώσης, εκφρασμένο οριστικά από ένα κλειστό σύστημα προτάσεων και από μια σειρά διαδικασιών τεκμηρίωσης της αλήθειας των προτάσεων αυτών.

Η πρόταση που διατυπώνεται εδώ θα αιτιολογηθεί με πέντε θέσεις, κατά μια έννοια αξιωματικά διατυπωμένες, οι οποίες δεν ταυτίζονται απολύτως με τις αιτιολογήσεις των ήδη διατυπωμένων συναφών προτάσεων για τη χρήση ιστορικών κειμένων στη διδασκαλία των μαθηματικών. Θέσεις αναγκαίες ακριβώς επειδή κάθε πρόταση και κάθε εγχείρημα χρήσης πρωτότυπων μαθηματικών κειμένων ή εισαγωγής ιστορικών τεκμηρίων στη διδασκαλία των μαθηματικών εκκινά από διαφορετικές αφετηρίες και επιδιώκει διάφορους στόχους. Όπως κάθε διδακτική πρόταση, δηλαδή, δεν είναι επιστημολογικά ουδέτερη και οι επιστημολογικές και εντέλει ιδεολογικές (με την ευρεία έννοια του όρου) επιλογές της καθορίζουν, πέρα από το περιεχόμενο, και τους όρους υλοποίησης της.

Θέση 1η : *Για τη σχέση της μαθηματικής εκπαίδευσης με τις παραδοχές για τη μαθηματική γνώση*

Τα κυρίαρχα χαρακτηριστικά του περιεχομένου και των πρακτικών της μαθηματικής εκπαίδευσης ενσωματώνουν και υλοποιούν παραδοχές για τη φύση και το χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης. Γιατί κάθε προσέγγιση της μαθηματικής εκπαίδευσης εμπεριέχει αναγκαστικά μια προσέγγιση του φαινομένου της μάθησης βασισμένη σε αντίστοιχες παραδοχές για τη φύση και το χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης και αντίστροφα (Chasssapis, 2007). Και αντίστροφα κάθε φιλοσοφική - επιστημολογική θεώρηση της μαθηματικής γνώσης εμπεριέχει και υποβάλλει αντίστοιχες προσεγγίσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Όπως χαρακτηριστικά έχει διατυπωθεί από τον H.-G. Steiner:

> «Έννοιες της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών – αλλά και ειδικότερα οι σκοποί και οι στόχοι (ταξινομίες) της διδασκαλίας τους, η δομή και το περιεχόμενο των

αναλυτικών προγραμμάτων, τα σχολικά βιβλία, οι διδακτικές αρχές και οι μεθοδολογίες, οι θεωρίες μάθησης των μαθηματικών, οι ερευνητικές προσεγγίσεις της διδακτικής των μαθηματικών (υποδείγματα, μοντέλα, θεωρίες κλπ), όπως και οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών, αλλά και των μαθητών, για τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους – μεταβιβάζουν ή και εδράζονται (συχνά με ένα όχι ρητό τρόπο) σε συγκεκριμένες φιλοσοφικές και επιστημολογικές απόψεις για τα μαθηματικά» (Steiner, 1987, σ. 8).

Η φιλοσοφική και στο πλαίσιο της η ιστορική διάσταση της ανάπτυξης των μαθηματικών αποτελεί, επομένως, ρητά ή υπόρητα και σε κάθε περίπτωση από μια συγκεκριμένη οπτική, συστατικό στοιχείο της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Η ενσωμάτωση, όμως, τεκμηρίων ιστορίας και γενικότερα ιστορικών διαστάσεων των μαθηματικών, ως συστατικού στοιχείου της διδασκαλίας τους στο σχολείο, προϋποθέτει την αναίρεση εκείνης της επιστημολογικής θεώρησης της μαθηματικής γνώσης, η οποία έχει καθιερωθεί στη συναφή βιβλιογραφία με τον όρο απολυτοκρατία (Ernest, 1991).

Αυτή η επιστημολογική θεώρηση της μαθηματικής γνώσης, απόλυτα κυρίαρχη από τις αρχές του προηγούμενου αιώνα μέχρι τις μέρες μας, οπότε αμφισβητείται σοβαρά, οικοδομείται σε παραδοχές μεταξύ των οποίων περιλαμβάνονται οι ακόλουθες, διατυπωμένες εντελώς συνοπτικά. (Χασάπης, 2005):

- Η μαθηματική γνώση συγκροτείται από ένα σύνολο προτάσεων (ορισμοί, αξιώματα, θεωρήματα) και μια σειρά αποδείξεων (διαδικασιών ελέγχου και τεκμηρίωσης) της αλήθειας των προτάσεων αυτών.
- Οι αποδείξεις της αλήθειας των μαθηματικών προτάσεων βασίζονται αποκλειστικά σε ένα σύνολο παραδοχών (αξιώματα και ορισμοί) και σε μια σειρά κανόνων λογικής συνεπαγωγής, που αποτελούν μέρος μιας παραδεκτής τυπικής-παραγωγικής λογικής.
- Αφού οι αποδείξεις της αλήθειας των μαθηματικών προτάσεων είναι αποκλειστικά λογικές, χωρίς καμία προσφυγή στην εμπειρική πραγματικότητα, η μαθηματική γνώση είναι κατά συνέπεια αδιάψευστη, αντικειμενική και απόλυτη, εξαρτημένη μόνο από τις παραδοχές της και τους κανόνες της τυπικής-παραγωγικής λογικής.
- Η μαθηματική γνώση, ως αδιάψευστη, αντικειμενική και απόλυτη γνώση - ουσιαστικά ως εξ ορισμού αληθής – υποκείμενη μόνο στη δική της εσωτερική λογική είναι επομένως ανεξάρτητη από κάθε χρονικό και κοινωνικό δεδομένο, ανεξάρτητη δηλαδή από κάθε ιστορική εξέλιξη και κοινωνική πρακτική. Υπονοούμενη παραδοχή της οπτικής αυτής είναι η ύπαρξη απόλυτα ορθών και τελεσίδικα ολοκληρωμένων μαθηματικών αληθειών, οι οποίες “ανακαλύπτονται” ή “μαθαίνονται” και η κατανόηση τους είναι κατά συνέπεια μια νοητική διαδικασία ανάλογη της βιολογικής διαδικασίας της “αφομοίωσης”.
- Η μαθηματική γνώση είναι κατά συνέπεια απαλλαγμένη πλήρως από τα εμπειρικά δεδομένα και τις αντιφάσεις της κοινωνικής πραγματικότητας, πλήρως ανεξάρτητη από τις κυρίαρχες κοινωνικές αξίες και άρα ιδεολογικά ουδέτερη.
- Η μαθηματική γνώση αναπτύσσεται συσσωρευτικά και αδιάλειπτα με την προσθήκη νέων μαθηματικών αληθειών, οι οποίες αποτελούν ένα τελεσίδικα περατωμένο και ολοκληρωμένο προϊόν της ανθρώπινης σκέψης.

Σε τελευταία ανάλυση, η μαθηματική γνώση υπάρχει, ως συστατικό στοιχείο της πραγματικότητας ή μιας πραγματικότητας ‘έξω’ από την ανθρώπινη ύπαρξη και ανακαλύπτεται’ από την ανθρώπινη δραστηριότητα.

Στο πλαίσιο του επιστημολογικού αυτού προτύπου η ιστορία δεν αποτελεί συστατικό στοιχείο της μαθηματικής γνώσης, αφού η μαθηματική γνώση δεν αποτελεί πρώτιστα ένα ιστορικό και κοινωνικό προϊόν. Κάτω από την κυριαρχία αυτής της θεώρησης της μαθηματικής γνώσης, η ενσωμάτωση ιστορικών δεδομένων στη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο είναι ουσιαστικά ανέφικτη και όπου επιχειρείται δεν μπορεί παρά να έχει αποσπασματικό και ευκαιριακό χαρακτήρα.

Τα τελευταία όμως χρόνια και έπειτα από δεκαετίες προβληματισμού και διαλόγου διευρύνεται - σύμφωνα με όλα τα δεδομένα που προκύπτουν από τη διεθνή βιβλιογραφία - η αμφισβήτηση του κυρίαρχου επιστημολογικού προτύπου της μαθηματικής γνώσης. Διάφορες εναλλακτικές εκδοχές που προτάσσουν τον ιστορικό και κοινωνικό χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης, από διαφορετικές βέβαια φιλοσοφικές αφετηρίες, προβάλλονται και κερδίζουν έδαφος στην επιστημονική και εκπαιδευτική κοινότητα (ενδεικτικά Kitcher 1983, Tymoczo 1986, Wittgenstein 1956).
Οι εκδοχές αυτές οικοδομούνται στη βάση της παραδοχής, ότι η μαθηματική γνώση - όπως και κάθε επιστημονική γνώση - είναι κοινωνική κατασκευή, υποκείμενη στα ιστορικά καθορισμένα κοινωνικά και πολιτισμικά πλαίσια του σταδίου ανάπτυξής της. Δεν αποτελεί κατά συνέπεια μια αδιάψευστη, αντικειμενική και απόλυτη γνώση, αυτόνομη και κατηγορικά διακριμένη από τις άλλες μορφές της ανθρώπινης γνώσης, απαλλαγμένη από τα εμπειρικά δεδομένα και τις αντιφάσεις της κοινωνικής πραγματικότητας. Αντίθετα - όπως και κάθε επιστημονική γνώση – είναι προϊόν κοινωνικής δραστηριότητας υποκείμενη σε διαρκείς διαψεύσεις και αναθεωρήσεις (Lakatos 1976/1996). Επομένως για τις εκδοχές αυτές, η μαθηματική γνώση δεν αποτελεί ένα τελεσίδικα περατωμένο προϊόν της ανθρώπινης δραστηριότητας, εκφρασμένο οριστικά από ένα κλειστό σύστημα προτάσεων (ορισμών, αξιωμάτων και θεωρημάτων) και μια σειρά δεδομένων τεκμηρίωσης και απόδειξης της αλήθειας των προτάσεων αυτών, αλλά ως προϊόν κοινωνικής δραστηριότητας εντάσσεται σε ιστορικά καθορισμένα κοινωνικά και πολιτιστικά πλαίσια, που καθορίζουν το επίπεδο και προσδιορίζουν την κατεύθυνση ανάπτυξης της. Η ιστορία δηλαδή, αποτελεί συστατικό στοιχείο των προτάσεων και των διαδικασιών ελέγχου και τεκμηρίωσης της αλήθειας των προτάσεων αυτών, που συγκροτούν τη μαθηματική γνώση.
Επομένως, μόνο στο πλαίσιο αυτών των εκδοχών θεώρησης της μαθηματικής γνώσης και υπό τον όρο της επικράτησης τους υπάρχουν οι προϋποθέσεις για την οργανική ένταξη της ιστορικής διάστασης ως συστατικού στοιχείου της διδασκαλίας των μαθηματικών στο σχολείο και κατά συνέπεια για την εισαγωγή ιστορικών τεκμηρίων στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Θέση 2η : Για τη μαθηματική γνώση και τη μαθηματική δραστηριότητα

Αντικείμενο της μαθηματικής δραστηριότητας είναι στο επίπεδο της επιστημονικής πρακτικής και στην πιο γενική του διατύπωση, η έρευνα των αφηρημένων δομών οι οποίες προέρχονται είτε από τις φυσικές και τις άλλες επιστήμες είτε από πεδία των ίδιων των μαθηματικών, αλλά και η έρευνα των μεθόδων και των μέσων έρευνας των δομών αυτών,
και στο επίπεδο της σχολικής εκπαίδευσης η μελέτη των δομών, των ποσοτήτων, των μεταβολών και του χώρου, τα οποία αποτελούν ειδικές και εν προκειμένου απλές ή απλοποιημένες περιπτώσεις των αφηρημένων δομών.
Η έρευνα στη μια και η μελέτη στην άλλη περίπτωση αναπτύσσεται με τη χρήση της παραγωγικής λογικής και μιας, αντίστοιχης κατά περίπτωση, μαθηματικής σημειολογίας.
Τα αποτελέσματα της μαθηματικής έρευνας οργανώνονται ως μαθηματική γνώση σε συστήματα εννοιών, παραδοχών (αξιωμάτων) και συμπερασμάτων (θεωρημάτων), καθώς και διαδικασιών ελέγχου και τεκμηρίωσης της αλήθειας των συμπερασμάτων αυτών (αποδείξεις). Από την οπτική αυτή, τα μαθηματικά αποτελούν μια μορφή επιστημονικής δραστηριότητας, θεωρητικής ή εφαρμοσμένης.
Μια διαφορετική από την επικρατούσα προσέγγιση των μαθηματικών ως επιστημονικής πρακτικής (και σχολικής γνώσης) προϋποθέτει την παραδοχή, ότι η μαθηματική γνώση, και κατά συνέπεια η γνώση γενικά, δεν είναι ένα σταθερό σύνολο καθιερωμένων συμπερασμάτων, αλλά μια δυναμική διαδικασία διερεύνησης, όπου η αναγκαιότητα, η

αβεβαιότητα και η αντιπαράθεση παρέχουν κίνητρα για μια συνεχή έρευνα διαρκώς βελτιούμενων κατανοήσεων της πραγματικότητας.

Επομένως στην οπτική αυτή, η μαθηματική γνώση δεν είναι απόλυτη και ιστορικά αμετάβλητη, άλλα όπως και κάθε άλλο παράγωγο της ανθρώπινης δραστηριότητας είναι μια κοινωνική κατασκευή, η οποία υπόκειται σε σφάλματα, εμπλουτίζεται από τους σκοπούς και τα πλαίσια που υποκινούν την ανάπτυξη της και τη χρήση της και διαμορφώνεται από τις κυρίαρχες κοινωνικές αξίες.

Από την προσέγγιση της σημειωτικής, μάλιστα, η μαθηματική γνώση είναι εντέλει ένα σύνολο καλά ορισμένων τύπων λόγου (discourse). Όπως αποτελούν έναν ειδικό τύπο λόγου τα σχολικά μαθηματικά, ο οποίος έχει ομοιότητες και διαφορές, τόσο με τους λόγους των ερευνητικών μαθηματικών όσο και με τους λόγους των εξω-σχολικών μαθηματικών (Sfard et al., 1998)

Ως κοινωνική κατασκευή, επομένως, η μαθηματική γνώση είναι προϊόν μιας δραστηριότητας, η οποία έχει ιστορίες, έχει φιλοσοφικές θεωρήσεις, έχει πρωταγωνιστές, έχει μεθόδους και διαδικασίες παραγωγής, έχει θεωρητικά και πρακτικά ερευνητικά προβλήματα, έχει χρήσεις και εφαρμογές σε άλλα πεδία της πνευματικής παραγωγής, έχει θεσμούς οργάνωσης και μέσα επικοινωνίας, έχει τυπικά θεσμοθετημένα και άτυπα καθιερωμένα πλαίσια ανάπτυξης, τα οποία υπόκεινται στην κοινωνική κατάσταση και αντανακλούν τόσο τα ουσιώδη στοιχεία του πνευματικού και τεχνικού πολιτισμού, όσο και τους ανταγωνισμούς των κοινωνικών συμφερόντων κάθε συγκεκριμένης ιστορικής περιόδου της ανάπτυξης της.

Όλα αυτά μαζί και αλληλένδετα είναι *μαθηματικά* και όλα αυτά μαζί και αλληλένδετα οφείλουν να εμπεριέχονται στη διδασκαλία των μαθηματικών. Με ανάλογες διαφοροποιήσεις αντίστοιχες του επιπέδου της σχολικής εκπαίδευσης. Αφού, όπως έχει αναλυθεί αλλού (Χασάπης, 1996), η διδασκαλία των μαθηματικών εμπεριέχει μια διπλή σχέση με το αντικείμενο της. Μια *επιστημονική σχέση,* η οποία στοχεύει στη γνώση *του* αντικειμένου των μαθηματικών και ταυτόχρονα μια *ιδεολογική σχέση,* η οποία στοχεύει στη πρακτική γνώση κανόνων, προτύπων και πρακτικών *για το* αντικείμενο των μαθηματικών, γνώση που ουσιαστικά είναι γνώση κανόνων συμπεριφοράς απέναντι στη θεωρητική και κοινωνική λειτουργία των μαθηματικών. Στη σύζευξη αυτή, άλλωστε, μπορεί να εντοπιστεί και η ουσιαστική έννοια του όρου "μαθηματική παιδεία". Μια μαθηματική γνώση επενδυμένη σε μια πρακτική γνώση για την θεωρητική και πρακτική λειτουργία της.

ΘΕΣΗ 3η Για την ανάγνωση κειμένων στη διδασκαλία των μαθηματικών

Η επικρατούσα, έξω από τους κύκλους των ειδικών, αντίληψη θεωρεί την ανάγνωση ως μια διαδικασία βασισμένη σε ένα σύνολο δεξιοτήτων δια των οποίων εντοπίζεται και εξάγεται άμεσα ή συνάγεται έμμεσα το νόημα ενός κειμένου. Η αντίληψη αυτή, εδραιωμένη στην ψυχολογία του συμπεριφορισμού, διαπερνά σε μεγάλο βαθμό τη διδασκαλία της ανάγνωσης στο σχολείο και βέβαια την αντιμετώπιση της ανάγνωσης κειμένων στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Η ανάγνωση κειμένων στη διδασκαλία των μαθηματικών έχει σήμερα περιθωριακή θέση και εξαντλείται κυρίως στην ανάγνωση των διδακτικών βιβλίων και των συναφών σχολικών βοηθημάτων με στόχο την εκμάθηση θεωρητικών μαθηματικών γνώσεων (ορισμών, θεωρημάτων, αποδείξεων) και τεχνικών επίλυσης ασκήσεων και προβλημάτων, σχεδόν αποκλειστικά σε ένα πλαίσιο αξιολόγησης. Τα όποια κείμενα αφηγηματικού λόγου περιλαμβάνονται στα σχολικά βιβλία, ως ιστορικά σημειώματα ή περιγραφές εφαρμογών των μαθηματικών, έχουν εντελώς περιθωριακό χαρακτήρα και συνήθως παραλείπονται από τις δραστηριότητες της διδασκαλίας των αντίστοιχων ενοτήτων.Τα σχολικά βιβλία μαθηματικών όλων των εκπαιδευτικών βαθμίδων δεν είναι γραμμένα για να διαβάζονται, αλλά για να «διδάσκονται», με ότι αυτό σημαίνει και αυτός ο τύπος σχολικών βιβλίων δεν είναι ένα αποκλειστικά Ελληνικό φαινόμενο.

Σε μια άλλη θεώρηση, όμως, η ανάγνωση κειμένων αντιμετωπίζεται ως μια δραστηριότητα κατασκευής νοημάτων στην οποία οι αναγνώστες δεν προσλαμβάνουν απλώς ερμηνείες του κειμένου, αλλά τις συγκροτούν υπό την επίδραση των προσωπικών τους εμπειριών και των περιστάσεων που βιώνουν κατά την ανάγνωση του.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα η συνηθισμένη ανάγνωση μιας εφημερίδας. Η ανάγνωση ενός κειμένου μιας εφημερίδας ουσιαστικά αρχίζει πριν ξεκινήσουμε να διαβάζουμε το συγκεκριμένο κείμενο. Διαβάζοντας τον τίτλο του και μόνο σχηματίζουμε ένα υπόβαθρο πρόσληψης του κειμένου βασισμένο στις γνώσεις μας για την εφημερίδα και στην εμπειρία μας από την ανάγνωση της – την πολιτική της στην προσέγγιση των γεγονότων, την οργάνωση και το περιεχόμενο της ύλης της, τη γλώσσα των κειμένων της – όπως επίσης στις προηγούμενες γνώσεις μας για το θέμα του κειμένου, αλλά και στα τρέχοντα ενδιαφέροντα μας. Στο υπόβαθρο αυτό, συγκροτούμε μια ερμηνεία του κειμένου, η οποία αντιστοιχεί κατά μοναδικό τρόπο στο συγκριμένο γεγονός της ανάγνωσης του. Η μοναδικότητα της ερμηνείας αυτής δημιουργείται από τον, και οφείλεται στον συνδυασμό της υποκειμενικότητας κάθε συγκεκριμένου αναγνώστη (με την ιδιαίτερη προσωπική του ιστορία, τις ιδιαίτερες κοινωνικο-οικονομικές του αναφορές, τις πεποιθήσεις του και τη συγκεκριμένη συναισθηματική του κατάσταση) με το συγκεκριμένο κείμενο (το περιεχόμενο, τις αναφορές και τη γλωσσική του οργάνωση) υπό τους όρους του συγκεκριμένου κοινωνικού πλαισίου μέσα στο οποίο αναπτύσσεται η δραστηριότητα της ανάγνωσης και το οποίο επιβάλλει, εκτός άλλων, και συγκεκριμένες σχέσεις αναγνώστη και κειμένου (Eco, 1979, Karey & Harste, 1985). Η ανάγνωση ενός κειμένου, δηλαδή, συνεπάγεται μια ερμηνεία του, η οποία εξαρτάται από τον αναγνώστη, το κείμενο και το πλαίσιο της ανάγνωσης του.

Μια συζήτηση για την ανάγνωση και ερμηνεία κειμένων και για παραγωγή νοημάτων, με τους όρους αυτούς, προϋποθέτει μια άλλη οργάνωση της διδασκαλίας των μαθηματικών, κυρίαρχο οργανωτικό στοιχείο της οποίας δεν μπορεί να είναι η αξιολόγηση.

Σε μια άλλη λογική, δηλαδή, η ανάγνωση μαθηματικών κειμένων, τεχνικών ή αφηγηματικών, θεωρούμενη ως δημιουργική δραστηριότητα παραγωγής νοημάτων μπορεί να αποτελεί συστατικό στοιχείο της διδασκαλίας και βέβαια της μάθησης των μαθηματικών. Αφού η παραγωγή νοημάτων ως δραστηριότητα εμπεριέχει, μεταξύ άλλων, διατύπωση υποθέσεων, δημιουργία συσχετίσεων, συγκρότηση αλληλουχιών, συναγωγή συμπερασμάτων, κριτική εκτίμηση, και άλλες νοητικές διεργασίες, οι οποίες αποτελούν και συστατικά στοιχεία της μαθηματικής δραστηριότητας.

Η ανάγνωση κειμένων, επομένως, μπορεί να είναι μια μαθηματική δραστηριότητα, όπως είναι η απόδειξη ενός θεωρήματος ή η επίλυση ενός προβλήματος, όπως είναι και μια δραστηριότητα ανάγνωσης, με την έννοια της ανάγνωσης που ορίστηκε προηγούμενα. Σε μια τέτοια βάση και ως μια ειδική μαθηματική δραστηριότητα, η ανάγνωση μαθηματικών κειμένων απαιτεί διδασκαλία, όπως ακριβώς απαιτεί διδασκαλία η μαθηματική απόδειξη ή η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (Brunner, 1976, Hubbard, R. 1990).

ΘΕΣΗ 4η Για τη διδασκαλία της ανάγνωσης μαθηματικών κειμένων

Κάθε μαθηματικό κείμενο μπορεί να ιδωθεί από (και εμπεριέχει) δύο όψεις. Μια μαθηματική και μια εκπαιδευτική ή ευρύτερα διαπαιδαγωγητική. Η μια όψη είναι το μαθηματικό περιεχομένου του κειμένου, ενώ η άλλη η σχέση με το μαθηματικό περιεχόμενο, την οποία προβάλλει το κείμενο. Είναι αυτή η δεύτερη όψη για την οποία, όπως προαναφέρθηκε, οφείλει να είναι η ανάγνωση κειμένων ουσιαστικό στοιχείο της διδασκαλίας των μαθηματικών. Δείτε και σκεφτείτε τη διαφορά ανάμεσα σε ένα κείμενο ασκήσεων και σε ένα μαθηματικό κείμενο άλλου τύπου, ανάμεσα στις σχέσεις που προβάλλουν και στις δραστηριότητες που υποβάλλουν τα δύο είδη κειμένων. Και βέβαια τελειώνοντας το σχολείο οι μαθητές σπάνια θα βρεθούν ξανά στην ανάγκη να επιλύσουν μια άσκηση ή να αποδείξουν μια ταυτότητα, ενώ αντίθετα θα αναγκαστούν πολλές φορές να διαβάσουν, να κατανοήσουν και να χρησιμοποιήσουν μαθηματικά κείμενα, διαφόρων τύπων, στις σπουδές ή στη δουλειά τους.

Πέρα από τη διπλή αυτή όψη των μαθηματικών κειμένων, υπάρχουν και έχουν αναλυθεί οι ουσιαστικές διαφορές ενός μαθηματικού κειμένου από κάθε άλλο τύπο μη μαθηματικού κειμένου και σε αυτές τις αναλύσεις στηρίζεται σε μεγάλο βαθμό η θέση ότι τα μαθηματικά αποτελούν έναν ή περισσότερους τύπους λόγου (discourses) (Brunner 1976, Hubbard 1990).

Εντελώς ενδεικτικά, γιατί πρόκειται για ένα άλλο θέμα συζήτησης:

- Στα μαθηματικά κείμενα οι λέξεις και τα σύμβολα εκφράζουν μαθηματικά ορισμένες έννοιες και όρους, πολλές φορές εντελώς διαφορετικούς από τις μη μαθηματικές έννοιες και όρους (ο κύκλος, ο κύκλος των χαμένων ποιητών, ο φαύλος κύκλος).
- Η δομή των μαθηματικών κείμενων είναι παραγωγική και κάθε νέα έννοια ορίζεται σε προηγούμενα ορισμένες έννοιες και κάθε νέο συμπέρασμα (θεώρημα ή λήμμα) χρησιμοποιεί και βασίζεται σε προηγούμενα συμπεράσματα κ.ο.κ. οπότε η ανάγνωση τους απαιτεί την ανάλογη αλληλουχία
- Η γραφή των μαθηματικών κείμενων είναι νοηματικά πυκνή, οπότε είναι αδύνατο να συναχθεί από τα συμφραζόμενα το νόημα άγνωστων στον αναγνώστη λέξεων. Η λιτότητα (κομψότητα την αποκαλούν οι μαθηματικοί) είναι στοιχείο της κυρίαρχης ιδεολογίας των μαθηματικών και εάν «έσσεσθε» ως αναγνώστες «αγεωμέτρητοι» τότε θα έχετε πρόβλημα..

Διάφορες έρευνες, πάντως έχουν εντοπίσει τις απαιτούμενες για ένα μαθηματικό κείμενο αναγνωστικές ικανότητες και έχουν τεκμηριώσει αντίστοιχες διδακτικές προτάσεις (εντελώς ενδεικτικά Turnau, 1983).

ΘΕΣΗ 5η Η διδασκαλία των μαθηματικών είναι και εισαγωγή σε έναν τύπο λόγου, το λόγο των μαθηματικών

Όπως κάθε διδασκαλία είναι εισαγωγή σε ορισμένες κοινωνικές και πολιτιστικές πρακτικές, σε ορισμένους τύπους σκέψης και δράσης μια ιστορικά ορισμένης κοινωνίας, έτσι και η διδασκαλία των μαθηματικών είναι εισαγωγή στη συγκεκριμένη κοινωνική πρακτική των μαθηματικών, συστατικό στοιχείο της οποίας αποτελεί η εισαγωγή στο λόγο των μαθηματικών (Durkin, 1991).

Οι μαθητές πρέπει να μάθουν δύο πράγματα, πέρα από το σώμα των επικυρωμένων μαθηματικών γνώσεων (εννοιών, συμπερασμάτων και τεχνικών): τα μέσα της (μαθηματικής) επικοινωνίας και τους κανόνες χρήσης των μέσων αυτών. Τα μέσα μαθηματικής επικοινωνίας διαμορφώνουν το περιεχόμενο του μαθηματικού λόγου, ενώ οι κανόνες χρήσης των μέσων αποτελούν στην ουσία στοιχεία αυτού που αποκαλούμε «μαθηματική σκέψη» είναι αυτό που ο Wittgenstein ονομάζει «γλωσσικά παιχνίδια», ο Goffman «πλαίσια» (*frames)*, ο Bruner «τύπους» (*formats) και ο* Bourdieu «έθος» (*habitus)*.

Τα μέσα και οι κανόνες χρήσης των μέσων μαθηματικής επικοινωνίας μπορούν καλύτερα να διδαχθούν με τη χρήση χαρακτηριστικών μαθηματικών κειμένων και για να καταδειχθεί ο ιστορικός τους χαρακτήρας, η εξάρτηση τους δηλαδή από το χρόνο και την κοινωνία, με τη χρήση μαθηματικών κειμένων, των οποίων η μορφή (η οργάνωση του λόγου, οι λεκτικές εκφράσεις κλπ) διαφοροποιείται ιστορικά.

Κείμενα – Ενθέματα διδασκαλίας των μαθηματικών

Για τους παραπάνω λόγους προτείνεται, όπως προαναφέρθηκε, έστω και ως απόπειρα, η εισαγωγή και η χρήση μαθηματικών κειμένων στη διδασκαλία των μαθηματικών. Μικρών σε έκταση αποσπασμάτων πρωτότυπων κειμένων, τα οποία κατά περίπτωση χαρακτηρίζουν

περιόδους της ιστορίας των μαθηματικών. Κάθε κείμενο διαβάζεται και συζητείται από μια συγκεκριμένη οπτική, ενώ έχει σημασία η, κατά το δυνατόν, ανάγνωση του στο πρωτότυπο.
Τα κείμενα αυτά μπορούν να οργανωθούν σε σειρές με άξονα μια έννοια, μια τεχνική ή μια όψη των μαθηματικών.
Παράδειγμα, ο ορισμός στα μαθηματικά και η ιστορική του εξέλιξη ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο και την αυστηρότητα της διατύπωσης του με ιδιαίτερη κατά περίπτωση αναφορά στον ορισμό της έννοιας του αριθμού (από τον Ευκλείδη στον Πεάνο και στον Ράσελ) ή στον ορισμό βασικών εννοιών της ανάλυσης (συνάρτηση, όριο, συνέχεια, παράγωγος συνάρτησης κλπ. από τον Νεύτωνα στον Βάϊερστρας), ο μαθηματικός συμβολισμός (από τον Διόφαντο στη σύγχρονη άλγεβρα), η μαθηματική απόδειξη και η εξέλιξη της δομής και του περιεχόμενου της (από τον Ευκλείδη στους Γουαϊτχεντ και Ράσελ), κλπ.
Ακολουθούν ενδεικτικά, και βέβαια όχι πλήρη ως προς τα περιεχόμενα, πρωτότυπα κείμενα, παραδείγματα της πρότασης η οποία υποστηρίχτηκε προηγούμενα.

Παράδειγμα 1: Ορισμοί του πληθικού αριθμού

Ευκλείδου, *Στοιχείων ζ΄* , περίπου 300 π.Χ.

Όροι
1. Μονάς ™στιν, καθ΄ Àν žκαστον των Ôντων žν λέγεται.
2. ἈριθμÕς δš τÕ ™κ μονάδων συγκείμενον πλÁθος.

Νικομάχου Γερασινού, Αριθμητικής Εισαγωγής,

ζ. ἈριθμÒς ™στι πλÁθος æρισμένον Ì μονάδων σύστημα É ποσότητος χύμα ™κ μοναδων συγκείμενον...

Simon Stevin de Bruges, *L' Arithmetique*, 1585.

Definition II.
Nombre est cela, par lequel s'explique la quantité de cette chose.

Αριθμός είναι αυτό που εκφράζει την ποσότητα κάθε πράγματος

Newton Isaac, *Arithmetica Universalis*, 1707.

Per Numerum non tam multitudinem unitatum quam abstractam quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitem quae pro unitate habetur rationem intelligimus.

Ως Αριθμό εννοούμε όχι τόσο μια πολλαπλότητα μονάδων, όσο τον αφηρημένο λόγο οιασδήποτε ποσότητας προς μια άλλη ποσότητα του ίδιου είδους την οποία παίρνουμε ως μονάδα.

Cantor Georg, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, 1895.

Unter einer «Menge» verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten *m* unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die 'Elemente' von *M* genannt werden) zu einem Ganzen. In Zeichen drucken wir dies so aus: *M* = {m}.
……………………………………………………………………………………………

Ως «σύνολο» (Menge) εννοούμε κάθε συλλογή σε ένα όλο (Zusammenfassungzu einem Ganzen) M καλά ορισμένων και διακριτών μεταξύ τους αντικειμένων m της εμπειρία ή της σκέψης μας (τα αντικείμενα αυτά ονομάζονται «στοιχεία» του M).
Συμβολικά αυτό εκφράζεται ως: $M = \{m\}$.
…………………………………………………………………………………………………..

"Mächtigkeit" oder "Kardinalzahl" von M nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hilfe unseres aktiven Denkvermögens dadurch aus der Menge M hervorgeht, das von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahiert wird. ………………………………………………………………………………………………….. Da aus jedem einzelnen Elemente *m*, wenn man von seiner Beschaffenheit absieht, eine "Eins" wird, so ist die Kardinalzahl … selbst eine bestimmte aus lauter Einsen zusammengesetzte Menge, die als intellektuelles Abbild oder Projektion der gegebenen Menge *M* in unserm Geiste Existenz hat.

Ως «Δύναμη» ή «Πληθικό αριθμό» του M εννοούμε τη γενική έννοια, η οποία προέρχεται από το σύνολο M με τη βοήθεια της νοητικής μας δραστηριότητας με την οποία αφαιρούμε τη φύση των συγκεκριμένων στοιχείων του M και τη σειρά με την οποία παρουσιάζονται.
…………………………………………………………………………………………………..
Αφού καθένα στοιχείο m (του M) αν αφαιρέσουμε τη φύση του γίνεται μια «μονάδα», ο πληθικός αριθμός … (του M) ένα καθορισμένο σύνολο συγκροτημένο από μονάδες και αυτός ο αριθμός υπάρχει στο νου μας ως μια νοητική εικόνα ή ως μια προβολή του δεδομένου συνόλου.

Peano Giuseppe, *Formulaire de mathematiques*, 1895/1908.

Assioma zero. I numeri formano una classe.	
Assioma I.	Lo zero è un numero.
Assioma II.	Se α è un numero, il suo successivo α+ è un numero.
Assioma III.	Se *s* è una classe contenente lo zero e, per ogni a se α appartiene a *s*,: allora ogni numero naturale è in *s*
Assioma IV.	Se α e b sono due numeri e se i loro successivi α+ , b+ sono uguali allora α e b sono uguali.
Assioma V.	Se α è un numero, il suo successivo α+ non è zero.

Αξίωμα μηδέν.	*Οι αριθμοί σχηματίζουν μια κλάση.*
Αξίωμα I.	*Το μηδέν είναι ένας αριθμός*
Αξίωμα II.	*Εάν α είναι ένας αριθμός και ο επόμενος του α+ είναι ένας αριθμός.*
Αξίωμα III.	*Εάν s είναι μια κλάση η οποία περιέχει το μηδέν, και για κάθε α που περιέχεται στην s ο επόμενος του περιέχεται στην s , τότε κάθε φυσικός αριθμός περιέχεται στην s.*
Αξίωμα IV.	*Εάν α και β είναι δύο αριθμοί των οποίων οι επόμενοι α+ και β+ είναι ίσοι, τότε και οι α και β είναι ίσοι .*
Αξίωμα IV.	*Εάν α είναι ένας αριθμός, ο επόμενος του δεν είναι το μηδέν.*

Russel Bertrand, *Introduction to Mathematical Philosophy*, 1919

The number of a class is the class of all those classes that are similar to it. Thus the number of a couple will be the class of all couples. In fact, the class of all couples will *be* the number 2, according to or definition.

At the expense of a little oddity, this definition secures definiteness and indubitableness; and it is not difficult to prove that numbers so defined have al the properties that we expect numbers to have.
We may now go on to define numbers in general as any one of the bundles into which similarity collects classes. A number will be a set of classes such that any two are similar to each other, and none outside the set are similar to inside the set. In other words, a number (in general) is any collection which is the number of one of its members; or, more simply still:
A number is anything, which is the number of some class.

Αριθμός μιας κλάσης είναι η κλάση όλων εκείνων των κλάσεων, οι οποίες είναι όμοιες με αυτήν.
Έτσι ο αριθμός ενός ζευγαριού θα είναι η κλάση όλων των ζευγαριών. Πραγματικά η κλάση όλων των ζευγαριών θα είναι ο αριθμός 2, σύμφωνα με τον ορισμό μας.
Παρά την κάποια παραξενιά του, αυτός ο ορισμός διασφαλίζει σαφήνεια και βεβαιότητα· και δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι οι αριθμοί, ορισμένοι με αυτό τον τρόπο έχουν όλες τις ιδιότητες τις οποίες αναμένουμε να έχουν οι αριθμοί.
Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στον ορισμό των αριθμών γενικά, ως οιαδήποτε συλλογή στην οποία η ομοιότητα ομαδοποιεί τις κλάσεις. Ένας αριθμός θα είναι ένα σύνολο κλάσεων τέτοιο ώστε οποιεσδήποτε δύο κλάσεις είναι όμοιες μεταξύ τους και καμία κλάση εκτός του συνόλου αυτού δεν είναι όμοια με μια του συνόλου. Με άλλα λόγια, ο αριθμός (γενικά) είναι οιαδήποτε συλλογή η οποία είναι ο αριθμός ενός των μελών της· ή ακόμα πιο απλά:
Αριθμός είναι οτιδήποτε είναι ο αριθμός κάποιας κλάσης.

Παράδειγμα 2: Ορισμοί της συνάρτησης

Bernoulli Johann ***Remarques sur ce qu'on a donni jusqu'ici de solutions des probl~mes sur les isopdrimitres,*** **1718**

On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité compose de quelque maniere que ce soit de cette grandeur variable et de constantes.

Ονομάζεται συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας μια ποσότητα συντιθέμενη με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι αυτή η ποσότητα μεταβλητή και σταθερή.

Euler, Leonhard, **Introductio in Analysin Infinitorum,** ***1748***

Quantitas variabilis est quantitas indeterminata seu universalis, quae omnes omnino valores determinatos in se complectitur.

Μια μεταβλητή ποσότητα είναι μια απροσδιόριστη ή καθολική ποσότητα, η οποία συνίσταται από απολύτως καθορισμένες τιμές.

……………………………………………………………………………………………………..

Functio quantitatis variabilis, est expressio analytica quomodocunque complesita ex illa quantitate variabili, et numeris seu quantitatibus constantibus.

Συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας, είναι μια αναλυτική έκφραση η οποία συντίθεται με οιονδήποτε τρόπο από την μεταβλητή ποσότητα & αριθμούς ή σταθερές ποσότητες.

Euler Leonard, *Institutiones calculi differentialis,* 1755

Quae autem quantitates hoc modo ab aliis pendent, ut his mutatis etiam ipsae mutationes subeant, eae harum functiones appellari solem; quae denominatio latissime pater atque omnes modos, quibus una quantitas per alias determinari potest, in se complectitur. Si igitur x denotet quantitatem variabilem, omnes quantitates, quae utcunque ab x pendent seu per earn determinantur, eius functiones vocantur.

Εάν κάποιες ποσότητες εξαρτώνται από άλλες ποσότητες με τρόπο ώστε εάν αλλάξουν οι δεύτερες αλλάζουν και οι πρώτες, τότε οι πρώτες ποσότητες ονομάζονται συναρτήσεις των δεύτερων΄ αυτός ο καθορισμός έχει την πιο γενική έννοια και συμπεριλαμβάνει κάθε μέθοδο δια της οποίας μια ποσότητα μπορεί να προσδιορίζεται από άλλες ποσότητες. Αν, επομένως, x δηλώνει μια μεταβλητή ποσότητα τότε όλες οι ποσότητες οι οποίες εξαρτώνται από την x με οιονδήποτε τρόπο ή καθορίζονται από αυτή ονομάζονται συναρτήσεις της.

D'Alembert, Jean le Rond, *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers, Tome 7:50,* 1751-1765

FONCTION. (Algèbre) les anciens géomètres, ou plutôt les anciens analystes ont appellé fonctions d'une quantité quelconque x les différentes puissances de cette quantité; mais aujourd'hui on appelle fonction de x, ou en général d'une quantité quelconque, une quantité algébrique composée de tant de termes qu'on voudra, et dans laquelle x se trouve d'une maniere quelconque, mêlée, ou non, avec des constantes;

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ. (Άλγεβρα) οι παλιοί γεωμέτρες ή μάλλον οι παλιοί αναλύστες, ονόμασαν συναρτήσεις μιας οποιασδήποτε ποσότητας χ τις διαφορετικές δυνάμεις αυτής της ποσότητας. Αλλά σήμερα ονομάζουμε συνάρτηση του χ η γενικότερα μιας οποιασδήποτε ποσότητας, μια ποσότητα αλγεβρική που αποτελείται από όσα στοιχεία θέλουμε και μέσα στην οποία η χ βρίσκεται με ένα οποιοδήποτε τρόπο, ανακατεμένη , με κάποιες σταθερές.

Lagrange J.L., *Théorie des fonctions analytiques, 1797*

On appelle *fonction* d'une ou de plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une maniere quelconque, mêlées ou non d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi, dans les fonctions on ne considére que les quantités qu'on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées.

Ονομάζουμε συνάρτηση μιας ή περισσότερων ποσοτήτων κάθε έκφραση υπολογισμού στην οποία αυτές οι ποσότητες εισέρχονται με ένα οποιοδήποτε τρόπο αναμεμιγμένες ή όχι με άλλες ποσότητες που θεωρούμε ως εάν να έχουν δεδομένες και αμετάβλητες τιμές, ενώ οι ποσότητες της συνάρτησης μπορούν να δεχθούν όλες τις δυνατές τιμές. Έτσι, μέσα στις συναρτήσεις δεν λαμβάνουμε υπόψη παρά τις ποσότητες τις οποίες υποθέτουμε μεταβλητές, αγνοώντας τις σταθερές οι οποίες μπορεί και να εμπλέκονται με στις συναρτήσεις.

Fourier J.B., *Theorie analytique de la chaleur,* 1821.

En général, la fonction f(x) représente une suite de valeurs ou ordonnées, dont chacune est arbitraire.

Γενικά, η συνάρτηση f(x) αντιπροσωπεύει μια διαδοχή τιμών ή τεταγμένων καθεμιά από τις οποίες είναι αυθαίρετη.

Lobatchevsky, Για την εξαφάνιση (σύγκλιση) των τριγωνομετρικών σειρών), 1834.

Об исчезании тригонометрических строк

Общее понятие требует, чтобы функцией от x называть число, которое дается для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием, которое подает средство испытывать все числа и выбирать одно из них; или наконец зависимость может существовать и оставаться неизвестной.

Η γενική θεώρηση απαιτεί να ονομαστεί συνάρτηση του x ένας αριθμός ο οποίος δίνεται για κάθε x και ο οποίος αλλάζει βαθμιαία μαζί με το x. Η τιμή της συνάρτησης μπορεί να δίνεται ή από μια αναλυτική έκφραση είτε από μια συνθήκη η οποία παρέχει ένα μέσο ελέγχου όλων των αριθμών και επιλογής ενός εξ αυτών ή τέλος η εξάρτηση μπορεί να υπάρχει αλλά να παραμένει άγνωστη.

Cournot, Theorie des fonctions, 1841.

Nous concevons qu'une grandeur peut dépendre d'une autre, sans que cette dépendance soit de nature de pouvoir etre exprimée par une combinaison des signes de l'algèbre.

Αντιλαμβανόμαστε, ότι ένα μέγεθος μπορεί να εξαρτάται από ένα άλλο χωρίς αυτή η εξάρτηση να είναι τέτοιας φύσης ώστε, να μπορεί να εκφράζεται με ένα συνδυασμό πρόσημων της άλγεβρας.

Bourbaki N., ***Les structures fondamentales de l'analyse, Theorie des ensembles,*** **1939.**

Soient E et F deux ensembles, distincts ou non. Une relation entre une variable x de E et une variable y de F est dite relation fonctionnelle en y, on relation fonctionnelle de E vers F, si, quelque soit xεE, il existe un élément y de F, et un seul, qui soit dans la relation considérée avec x.
On donne le nom de fonction a l' opération qui associe ainsi a tout élément xεE l' élément yeF qui se trouve dans la relation donnée avec x; on dit que y
est la valeur de la fonction pour l' élément x, et que la fonction est déterminée par la relation fonctionnelle considérée.

Έστω E και F δύο σύνολα, διακριτά ή όχι. Μια σχέση μεταξύ μιας μεταβλητής x του E και μιας μεταβλητής y του F ονομάζεται συναρτησιακή σχέση στο y ή συναρτησιακή σχέση του E προς το F, εάν για οιοδήποτε xεE, υπάρχει ένα και μόνο ένα στοιχείο y του F, το οποίο είναι μέσα στη δεδομένη σχέση με το χ.
Δίνεται το όνομα της συνάρτησης σε μια πράξη η οποία συνδέει έτσι σε κάθε στοιχείο xεE το στοιχείο yεF, το οποίο βρίσκεται μέσα στη σχέση με το χ. Λέμε ότι το y είναι η τιμή της συνάρτησης για το στοιχείο χ και ότι η συνάρτηση είναι ορισμένη από μια δεδομένη συναρτησιακή σχέση.

Παράδειγμα 3: Η εξίσωση

Διοφάντου Αλεξανδρέως Αριθμητικών, Βιβλίον Α', 3ο αιώνας μ.Χ.

kz.
EØre‹n dÚo ¢riqmoÝj Ópwj ¹ sÚnqesij aÙtîn kaˆ Ð pollaplasiasmÕj poiÍ doqšntaj ¢riqmoÚj. De‹ d¾ tîn eØriskomšnwn tÕn ¢pÕ toà ¹m…seoj toà sunamfotšrou tetr£gwnon toà Øp' aÙtîn Øperšcein tetragènJ. œsti d toàto plasmatikÒn.

Να βρεθούν δύο αριθμοί των οποίων το άθροισμα και το γινόμενο να είναι ίσα προς δοθέντες αριθμούς.
Πρέπει δε το τετράγωνο του ημιαθροίσματος των δύο αριθμών να υπερέχει του γινομένου τους κατά τετράγωνο. Αυτό είναι τυπικό.

'Epitet£cqw d¾ t¾n m nsÚnqesin aÙtîn poie‹n Mo k, tÕn d pollaplasiasmÕn poie‹n Mo %$. Tet£cqw ¹ Øperoc¾ aÙtîn b. kaˆ ™peˆ tÕ sÚnqema aÙtîn ™sti Mo k, ™¦n toàto tšmw d…ca, œstai ˜k£teroj tîn ™k tÁj diairšsewj, toà sunqšmatoj, Mo i. KΏn tÕ ¼misu tÁj ØperocÁj, toutšstin a,
˜nˆ m ntîn ™k tÁj diairšsewj prosqî, toà d loipoà ¢fšlw, mšnei p£lin tÕ sÚnqema Mo k, ¹ d Øperoc¾ b. tet£cqw oân Ð me…zwn a kaˆ Mo i tîn ¹m…sewn toà sunqšmatoj· Ð ¥ra ™l£sswn œstai Mo i a. kaˆ mšnei tÕ m nsÚnqema Mo k, ¹ d Øperoc¾ b. loipÒn ™sti kaˆ tÕn Øp' aÙtîn poie‹n Mo %$· ¢ll' Ð Øp' aÙtîn ™sti Mo r DU a· taàta ‡sa Mo %$· kaˆ g…netai Ð Mo b. œstai ¥ra Ð m nme…zwn Mo ib, Ð d ™l£sswn Mo h. kaˆ poioàsi t¦ tÁj prot£sewj.

Θεωρείται ότι το άθροισμα είναι 20 και το γινόμενο 96. Έστω ότι ο ένας από τους ζητούμενος είναι 10-x, τότε ο δεύτερος θα είναι 10+x, ώστε το άθροισμα τους να είναι 20. Θα είναι επίσης
$(10-X)(10+X) = 96$
$(^{20}/_{2})^2 - 96 = x^2$
Οπότε $100 - 96 = x^2$ $\quad x^2 = 4 \quad x=2$
Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι $10+x = 12$ *και* $10-x = 8$
$12+8 = 20$ *και* $12 \times 8 = 96$

h.
TÕn ™pitacqšnta tetr£gwnon diele‹n e„j dÚo tetragènouj.

Να αναλυθεί ένας δεδομένος τετράγωνος αριθμός σε δύο τετράγωνους.

Εικασία του Φερμά (Fermat):

Στο αντίγραφο της λατινικής μετάφρασης των Αριθμητικών ο Φερμά έγραψε στο περιθώριο το ακόλουθο σχόλιο:

> Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duas ejusdem nominis fas est dividere : cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

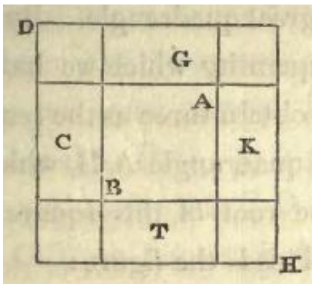
Η ανάλυση ενός κύβου σε δύο κύβους, μιας τέταρτης ή γενικά οποιασδήποτε δύναμης σε δύο δυνάμεις που να έχουν τον ίδιο εκθέτη, μεγαλύτερο του δύο, είναι αδύνατη και έχω βρει μια οπωσδήποτε θαυμάσια απόδειξη γι' αυτό, αλλά το περιθώριο του βιβλίου είναι πολύ στενό για να τη χωρέσει.

al-Khwârizmî Abu Abd-Allah ibn Musa, *Al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa'l-muqabala,* 825 μ.Χ

Απόδειξη της περίπτωσης «ένα τετράγωνο και δέκα ρίζες είναι ίσα με τριάντα εννέα ντίρεμς.

Το σχήμα που εξηγεί αυτό είναι ένα τετράπλευρο, οι πλευρές του οποίου είναι άγνωστες. Αντιπροσωπεύει το τετράγωνο, το οποίο ή τη ρίζα του οποίου θέλουμε να μάθουμε. Αυτό είναι το σχήμα AB, καθεμιά πλευρά του οποίου μπορεί να θεωρηθεί ως μια από τις ρίζες του και αν πολλαπλασιάσουμε μια από αυτές τις πλευρές με έναν οποιονδήποτε αριθμό, τότε το αυτός ο αριθμός μπορεί να ιδωθεί ως ο αριθμός των ριζών ο οποίος προστέθηκε στο τετράπλευρο. Καθεμία πλευρά του τετραπλεύρου αντιπροσωπεύει τη ρίζα του τετραγώνου (της εξίσωσης) και, όπως στην προκειμένη περίπτωση, οι ρίζες συνδέονται με το τετράγωνο, οπότε μπορούμε να πάρουμε ένα-τέταρτο του δέκα, δηλαδή δύο και μισό, και να το προσθέσουμε σε καθεμία από τις τέσσερες πλευρές του σχήματος. Έτσι τέσσερα νέα παραλληλόγραμμα συνδυάζονται με το αρχικό τετράπλευρο AB, καθένα των οποίων έχει ως μήκος του την πλευρά του τετραπλεύρου και ως πλάτος του τον αριθμό δύο και μισό. Είναι τα παραλληλόγραμμα C, G, T και K.

Έχουμε τώρα ένα τετράπλευρο με ίσες, αν και άγνωστες πλευρές. Σε κάθε μια από τις τέσσερες γωνίες του, όμως, σχηματίζεται ένα τετράγωνο με διαστάσεις δύο και μισό επί δύο και μισό. Για να συμπληρωθεί το τετράπλευρο πρέπει να προσθέσουμε (στο τετράγωνο που ήδη έχουμε) γνωστό) τέσσερες φορές το τετράγωνο του δύο και μισό, δηλαδή είκοσι πέντε. Ξέρουμε (από τα δεδομένα) ότι το πρώτο σχήμα, δηλαδή το τετράπλευρο το οποίο αντιπροσωπεύει το τετράγωνο (της εξίσωσης), μαζί με τα τέσσερα παραλληλόγραμμα τα οποία αντιπροσωπεύουν τις δέκα *ρίζες ισούται με τον αριθμό τριάντα-εννέα. Εάν σε αυτό προσθέσουμε το είκοσι-πέντε το οποίο ισοδυναμεί με τα τέσσερα τετράπλευρα τα οποία βρίσκονται στις γωνίες του σχήματος AB και με τα οποία συμπληρώνεται το μεγαλύτερο σχήμα DH, τότε ξέρουμε ότι όλα μαζί ισούνται με εξήντα-τέσσερα. Μία πλευρά αυτού του μεγαλύτερου τετραπλεύρου είναι η ρίζα του, δηλαδή οκτώ. Εάν αφαιρέσουμε δύο φορές το ένα-τέταρτο του δέκα, δηλαδή πέντε, από το οκτώ, όπως από τα δύο άκρα της πλευράς του μεγαλύτερου τετραπλεύρου DH, τότε το υπόλοιπο της πλευράς θα είναι τρία και αυτό είναι η ρίζα του τετραγώνου ή η πλευρά του αρχικού σχήματος AB. Πρέπει να σημειωθεί ότι διαιρέσαμε δια δύο τον αριθμό των ριζών και προσθέσαμε το γινόμενο του μισού πολλαπλασιασμένο με τον εαυτό του στον αριθμό τριάντα-εννέα ώστε να συμπληρωθεί το μεγαλύτερο σχήμα στις τέσσερες γωνίες του. Αφού το ένα-τέταρτο κάθε αριθμού πολλαπλασιασμένο με τον εαυτό του και μετά επί τέσσερα ισούται με το μισό του αριθμού πολλαπλασιασμένο με τον εαυτό του*[2]*. Αντίστοιχα πολλαπλασιάσαμε μόνο το μισό των ριζών με τον εαυτό του, αντί να πολλαπλασιάσουμε το ένα-τέταρτο τους με τον εαυτό του και μετά επί τέσσερα. Αυτό είναι το σχήμα:*



Λεξιλόγιο: τετράγωνο: x^2, ντίρεμ: μονάδα , ρίζα: ρίζα x της εξίσωσης

1. ($x^2+10x=39$)

2. $4\ (\beta/4)^2 = (\beta/2)^2$

Bhaskara Acharya, *Vi'ja-Gan'ita*, 1150 μ.Χ.

Κανόνας: Έστω «τόσο όσο» (γάvat-tάvat) η τιμή της άγνωστης ποσότητας. Κάνοντας αυτό το οποίο προτείνεται κατά περίπτωση συμπληρώνουμε προσεκτικά δύο ίσα μέλη, προσθέτοντας ή αφαιρώντας, πολλαπλασιάζοντας ή διαιρώντας, όπως απαιτεί η περίσταση.

Παράδειγμα: Ένας άνθρωπος έχει ένα γνωστό ποσό τριακοσίων μονάδων και έξη άλογα. Ένας άλλος έχει δέκα άλογα ίσης αξίας, αλλά και χρέος ένα γνωστό ποσό εκατό μονάδων. Είναι και οι δύο εξίσου πλούσιοι. Ποια είναι η τιμή του ενός αλόγου;

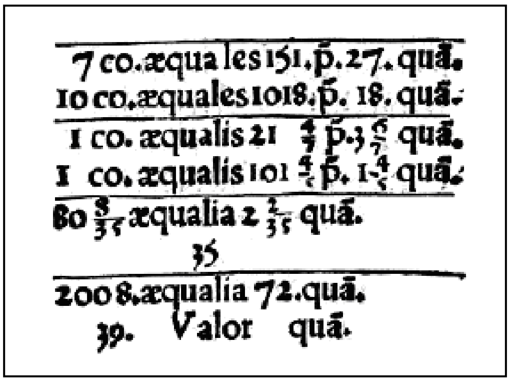
Εδώ είναι άγνωστη η τιμή του ενός αλόγου. Τίθεται ένα «τόσο όσο» (γάvat-tάvat) γα 1 και από τον κανόνα των τριών «αν η τιμή του ενός αλόγου είναι ένα γάvat-tάvat ποια είναι η τιμή των έξι;». Είναι 1 | γα 1 | 6 | . Το δεδομένο πολλαπλασιασμένο με το ζητούμενο και διαιρεμένο με την τιμή 1 δίνει την τιμή των έξι αλόγων γα 6. Προσθέτοντας και το γνωστό ποσό των τριακοσίων μονάδων, έχουμε την περιουσία του πρώτου ανθρώπου ίση με γα 6 ru 300. Με την ίδια λογική η τιμή των δέκα αλόγων είναι γα 10. Σ' αυτή προσθέτοντας το γνωστό ποσό των εκατό αρνητικών μονάδων, η περιουσία του δεύτερου ανθρώπου είναι γα 10 ru 100. Αυτοί οι δύο άνθρωποι είναι εξίσου πλούσιοι. Τα δύο μέλη (της εξίσωσης) επομένως γίνονται ίσα.

Γράφονται γα 6 ru 300
γα 10 ru 100.

Σύμφωνα με τον κανόνα ο άγνωστος όρος του πρώτου μέλους αφαιρείται από τον άγνωστο όρο του δεύτερου μέλους και το υπόλοιπο είναι γα 4, και οι γνωστοί αριθμοί του δεύτερου μέλους αφαιρούνται από τους γνωστούς αριθμούς του πρώτου μέλους και το υπόλοιπο είναι 400. Το υπόλοιπο του γνωστού αριθμού 400 διαιρείται με το υπόλοιπο του αγνώστου γα 4 και το πηλίκο είναι η τιμή ενός «τόσου όσου» (γάνat-tάνat), ήτοι 100. «Εάν αυτή είναι η τιμή ενός αλόγου τότε ποια είναι η τιμή των έξι;» Από αυτή την αναλογία η τιμή των έξι αλόγων είναι 600, στην οποία προσθέτοντας το γνωστό ποσό των τριακοσίων μονάδων βρίσκουμε την περιουσία του πρώτου ανθρώπου 900. Με τον ίδιο τρόπο η περιουσία του δεύτερου είναι επίσης 900.

Παράδειγμα: Η τετραγωνική ρίζα του μισού αριθμού ενός σμήνους μελισσών πηγαίνει σε ένα θάμνο γιασεμιών, όπως και τα οκτώ ένατα του σμήνους. Μια μέλισσα βουίζει γύρω από μια άλλη η οποία έχει παγιδευτεί μέσα στο άνθος ενός λωτού μεθυσμένη από τη νυχτερινή του ευωδιά. Πες μου αξιαγάπητη γυναίκα τον αριθμό των μελισσών.

Cardano Girolamo, Practica arithmetica & mensurandi singularis, 1539


7 co.æqua les 151.p̃.27.quã.
10 co.æquales 1018.p̃. 18.quã.
1 co. æqualis 21 4/7 p̃.3 6/7 quã.
1 co. æqualis 101 4/5 p̃. 1 4/5 quã.
80 8/35 æqualia 2 2/35 quã.
35
2008.æqualia 72.quã.
39. Valor quã.

Συμβολισμοί: co.:Πρώτος άγνωστος όρος, qua: Δεύτερος άγνωστος όρος, aequales: ισούται. p.: +

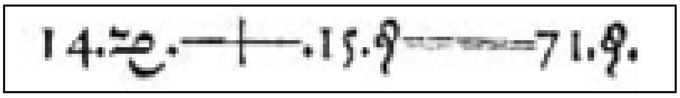
7 co. aequales 151 p. 27 qua. *7 x = 151 + 27 y*
<u>10 co. aequales 1018 p 18 qua</u> *<u>10 x =1018 +18 y</u>*
Μετασχηματίζει ως προς x διαιρώντας αντίστοιχα με 7 και 10
1 co. aequalis 21 4/7 p. 3 6/7 qua. *x = (151 + 27 y)/7*
1 co. aequalis 101 4/5 p. 1 4/5 qua. *x =(1018 +18 y)/10*
Εξισώνει
80 8/35 aequalis 2 2 /35 qua. *80 8/35 = 2 2 /35 y*
Πολλαπλασιάζει επί 35
2008 aequali 72qua. *2008 = 72y (γράφεται 2008 αντί του ορθού 2808)*
39 valor qua. *39 είναι η τιμή του y*

Robert Recorde, *The Whetstone of Witte,* 1557

..to avoide the tediouse repetition of these woordes : is equalle to : I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: =, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle.

Σημείωση: Gemowe σημαίνει δίδυμος από την λατινική λέξη gemini.

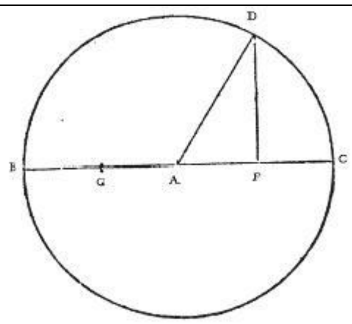
Και για να αποφύγω την κουραστική επανάληψη των λέξεων «είναι ίσο με» θα θέτω, όπως συνηθίζω συχνά στην εργασία μου, ένα ζεύγος παράλληλων ή δίδυμων γραμμών ίδιου μήκους, γιατί δεν υπάρχουν δύο πιο ίσα πράγματα από αυτό.



14 x + 15 = 71

Viète, François, *Effectionum geometricarum canonica recensio, 1593*

Si fuerint tres lineae rectae proportionales: quadratum minoris extremae adjunctum rectangulo sub differentia extremarum & ipsa minore extrema, aequatur mediae quadrato.
Dico quadratum ex CF adjunctum rectangulo sub *C*F, *F*G, aequari quadrato ex *D*F.
A quadratum, plus B in A, aequari D quadrato.



Υποθέστε τρεις ευθείες γραμμές σε αναλογία: το τετράγωνο της ελάχιστης πλευράς προστιθέμενο στο γινόμενο της διαφοράς της ελάχιστης από τη μέγιστη πλευρά ισούται με το τετράγωνο της μεσαίας πλευράς.
Λεω ότι το τετράγωνο της CF προστιθέμενο στο γινόμενο της CF με την FG ισούται με το τετράγωνο της DF.
A τετράγωνο συν B επί A ισούται με D τετράγωνο.
Συμβολισμοί: O Viete χρησιμοποιεί φωνήεντα για τις μεταβλητές και σύμφωνα για τους σταθερούς όρους των εξισώσεων. Εδώ A=x, B, Γ= σταθεροί όροι, οπότε είναι $x^2+ax = b$

Euler, Leonhard, *Vollständige Anleitung zur Algebra*, 1770

Da nun $xx + px + \frac{1}{4}pp$ ein wirkliches Quadrat ist, wovon die Wurzel $x + \frac{1}{2}p$, so dürfen wir nur bey unserer Gleichung zu $xx + px = q$ beyderseits $\frac{1}{4}pp$ addiren und da bekommen wir $xx + px + \frac{1}{4}pp = q + \frac{1}{4}pp$, wo auf der ersten Seite ein wirkliches Quadrat, auf der andern aber bloß bekannte Zahlen befindlich sind. Wenn wir daher beyderseits die Quadratwurzel nehmen, so erhalten wir $x + \frac{1}{2}p = \sqrt{(\frac{1}{4}pp + q)}$; subtrahirt man nun $\frac{1}{2}p$, so erhält man $x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}pp + q)}$; und da eine jede Quadratwurzel so wohl Positiv als Negativ genommen werden kann, so findet man für x zwey Werthe, welche also durch diese Form ausgedrückt zu werden pflegen:
$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}pp + q)}$.

In dieser Formel ist nun die Regel enthalten, nach welcher alle Quadratgleichungen aufgelöset werden können, und damit man nicht immer nöthig habe, die obige Operation von neuem anzustellen, so ist genug, daß man den Inhalt dieser Formel dem Gedächtnisse wohl einpräge.

Τώρα, έστω η xx+px+¼pp ένα πραγματικό τετράγωνο που έχει για ρίζα του το x+½p. Εάν επαναδιατυπώσουμε την εξίσωση μας ως xx+px=q, έχουμε μόνο να προσθέσουμε ¼pp και στα δύο μέρη, το οποίο μας δίνει xx+px+¼pp =q+ ¼pp. Το πρώτο μέρος είναι πραγματικά ένα τετράγωνο και το δεύτερο περιλαμβάνει μόνο γνωστές ποσότητες.
Εάν επομένως εξάγουμε την τετραγωνική ρίζα και των δύο μερών βρίσκουμε x+½p=√(¼pp+q). Αφαιρώντας ½p παίρνουμε x= - ½p +√(¼pp+q) και όπως κάθε τετραγωνική ρίζα μπορεί να είναι θετική ή αρνητική θα έχουμε για το x δύο τιμές εκφρασμένες ως εξής:
x= - ½p ±√(¼pp+q).
Αυτός ο τύπος αποτελεί τον κανόνα με τον οποίον μπορεί να επιλυθούν όλες οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις και πρέπει να απομνημονευτεί ώστε να μην επαναλαμβάνεται κάθε φορά όλη η διαδικασία την οποία εκθέσαμε.

III. Frage: Suche eine Zahl wenn ich ihre Hälfte mit ihrem Drittel multiplicire und zum Product $\frac{1}{2}$ der gefundenen Zahl addire, daß 30 kommen?

Es sey diese Zahl x, deren Hälfte mit ihrem Drittel multiplicirt $\frac{1}{6}xx$ giebt; also soll $\frac{1}{6}xx + \frac{1}{2}x = 30$ seyn; mit 6 multiplicirt, wird $xx + 3x = 180$, oder $xx = -3x + 180$, woraus man findet
$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{9}{4} + 180)} = -\frac{3}{2} \pm \frac{27}{2}$
Daher ist entweder $x = 12$ oder $x = -15$.

III. Ερώτηση: Να βρεθεί αριθμός τέτοιος ώστε αν πολλαπλασιάσουμε το μισό του επί το ένα τρίτο του και στο γινόμενο προσθέσουμε το μισό του ζητούμενου αριθμού το αποτέλεσμα θα είναι 30.
Έστω ότι ο αριθμός είναι x. Το μισό του πολλαπλασιασμένο επί το ένα τρίτο του θα είναι $^{1}/_{6c}$xx, οπότε $^{1}/_{6}$xx + $^{1}/_{2}$x = 30: και πολλαπλασιάζοντας επί 6, έχουμε xx + 3x = 180: το οποίο δίδει x= - $^{3}/_{2}$ ± √ ($^{9}/_{4}$ + 180) = - $^{3}/_{2}$ ± $^{27}/_{2}$.
Κατά συνέπεια είτε x = 12 ή x = -15.

Carl Friedrich Gauss 1799, *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*

Quaelibet aequatio algebraica determinata reduci potest ad formam $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+$ etc. +M=0, ita vt m sit numerus integer positiuus. Si partem primam huius aequationis per X denotamus, aequationique X=0 per plures valores inaequales ipsius x satisfieri supponimus, puta ponendo x=α, x=β, x=γ etc. functio X per productum e factoribus x-α, x-β, x-γ etc. diuisibilis erit. Vice versa, si productum e pluribus factoribus simplicibus x-α, x-β, x-γ etc. functionem X metitur: aequationi X=0 satisfiet, aequando ipsam x cuicunque quantitatum α, β, γ etc. Denique si X producto ex m factoribus talibus simplicibus aequalis est (siue omnes diuersi sint, siue quidam ex ipsis identici): alii factores simplices praeter hos functionem X metiri non poterunt. Quamobrem aequatio m^{ti} gradus plures quam m radices habere nequit; simul vero patet, aequationem mti gradus pauciores radices habere posse, etsi X in m factores simplices resolubilis sit: si enim inter hos factores aliqui sunt identici, multitudo modorum diuersorum aequationi satisfaciendi necessario minor erit quam m.

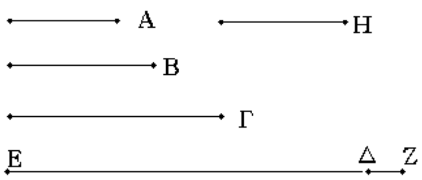
Κάθε ορισμένη αλγεβρική εξίσωση μπορεί να μετασχηματιστεί στη μορφή $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+$ etc. +M=0, όπου m είναι ένας θετικός ακέραιος. Συμβολίζοντας το πρώτο μέρος αυτής της εξίσωσης με X και υποθέτοντας ότι η εξίσωση X=0 ικανοποιείται από διαφορετικές τιμές του x, ας πούμε θέτοντας x=α, x=β, x=γ κλπ., τότε η συνάρτηση X θα είναι διαιρετή από το γινόμενο των παραγόντων x-α, x-β, x-γ κλπ. Αντίστροφα, όταν το γινόμενο διαφορετικών απλών παραγόντων x-α, x-β, x-γ κλπ. είναι διαιρέτης της συνάρτησης X, τότε η εξίσωση X=0 επαληθεύεται εάν αυτό το x τεθεί ίσο με καθεμία από τις τιμές α,β,γ, κλπ. Τέλος, εάν το X είναι ίσο με το γινόμενο m τέτοιων απλών παραγόντων (οι οποίοι μπορεί να είναι όλοι διαφορετικοί ή και κάποιοι ίσοι μεταξύ τους), τότε δεν μπορεί να διαιρούν τη συνάρτηση X άλλοι απλοί παράγοντες πέραν αυτών. Γι' αυτό το λόγο μια εξίσωση m βαθμού δεν μπορεί να έχει περισσότερες από m ρίζες. Την ίδια στιγμή είναι πράγματι σαφές ότι μια εξίσωση m βαθμού μπορεί να έχει λιγότερες ρίζες, ακόμα και αν η X μπορεί να αναλυθεί σε m απλούς παράγοντες: συγκεκριμένα εάν μεταξύ αυτών των παραγόντων κάποιοι είναι ίσοι μεταξύ τους, τότε ο αριθμός των διαφορετικών μεταξύ τους παραγόντων οι οποίοι επαληθεύουν την εξίσωση θα είναι αναγκαστικά μικρότερος του m.

(Προλεγόμενα σχόλια στη διατύπωση και απόδειξη του Θεμελιώδους θεωρήματος της άλγεβρας: Κάθε πολυωνυμική εξίσωση n βαθμού με συντελεστές μιγαδικούς αριθμούς έχει n λύσεις)

Παράδειγμα 4: Η απόδειξη

Ευκλείδου, *Στοιχείων θ΄*, περίπου 300 π.Χ.

Πρότασις κ΄
Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν.



Ἔστωσαν οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ· λέγω, ὅτι τῶν Α, Β, Γ πλείους εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοί.
Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ ἐλάχιστος μετρούμενος καὶ ἔστω ὁ ΔΕ, καὶ προσκείσθω τῷ ΔΕ μονὰς ἡ ΔΖ. ὁ δὴ ΕΖ ἤτοι πρῶτός ἐστιν ἢ οὔ. ἔστω πρότερον πρῶτος· εὑρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, ΕΖ πλείους τῶν Α, Β, Γ.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ ΕΖ πρῶτος· ὑπὸ πρώτου ἄρα τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. μετρείσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ Η· λέγω, ὅτι ὁ Η οὐδενὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστιν ὁ αὐτός. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. οἱ δὲ Α, Β, Γ τὸν ΔΕ μετροῦσιν· καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΔΕ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΕΖ· καὶ λοιπὴν τὴν ΔΖ μονάδα μετρήσει ὁ Η ἀριθμὸς ὤν· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ Η ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστιν ὁ αὐτός. καὶ ὑπόκειται πρῶτος. εὑρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους τοῦ προτεθέντος πλήθους τῶν Α, Β, Γ οἱ Α, Β, Γ, Η· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρόταση 20

Οι πρώτοι αριθμοί είναι περισσότεροι από κάθε δεδομένο σύνολο πρώτων αριθμών.
Έστω οι δεδομένοι πρώτοι αριθμοί Α, Β, Γ· λέγω, ότι εκτός από τούς Α, Β, Γ υπάρχουν και άλλοι πρώτοι αριθμοί.
Λαμβάνω τον αριθμό ΔΕ, το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των δεδομένων πρώτων αριθμών Α,Β,Γ, και προσθέτω σε αυτόν τη μονάδα ΔΖ. Ο νέος αριθμός ΕΖ είτε είναι πρώτος είτε όχι.
Έστω ότι είναι πρώτος· τότε έχουμε πρώτους αριθμούς τούς Α, Β, Γ και ΕΖ οι οποίοι είναι περισσότεροι των Α, Β, Γ.
Εάν ὁ ΕΖ δεν είναι πρώτος· τότε θα διαιρείται από κάποιον πρώτον αριθμό. Έστω από τον Η· θα δείξουμε ότι ὁ Η είναι αδύνατον να είναι ένας από τούς πρώτους Α, Β, Γ. Έστω άτι είναι ένας από αυτούς. Τότε ὁ ΔΕ αφού είναι πολλαπλάσιος των Α, Β, Γ · θα είναι και πολλαπλάσιος τού Η. Και ὁ ΕΖ όμως είναι πολλαπλάσιος τού Η· άρα και ἡ διαφορά τους θα είναι πολλαπλάσια τού Η, δηλαδή ἡ μονάδα· όπερ άτοπον. Άρα ο Η δεν είναι ένας εκ των Α, Β, Γ. και είναι και πρώτος. Βρήκαμε επομένως περισσότερους πρώτους αριθμούς από τούς δεδομένους Α, Β, Γ τούς Α, Β, Γ, Η· όπερ έδει δείξαι.

九章算術 ***Chiu chang suan shu*** *(εννέα κεφάλαια μαθηματικής τέχνης), 206-210 π.Χ.*

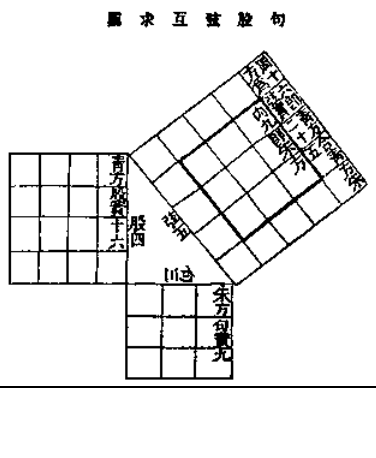
9. Kou ku (βάση και ύψος)

Πρόβλημα 1

Δοθέντων: kou (το μήκος της μικρότερης κάθετης πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου) = 3 尺 (chi), ku (το μήκος της μεγαλύτερηςκάθετης πλευράς) = 4 尺 (chi). Ποιο είναι το μήκος της hsien (υποτείνουσας);

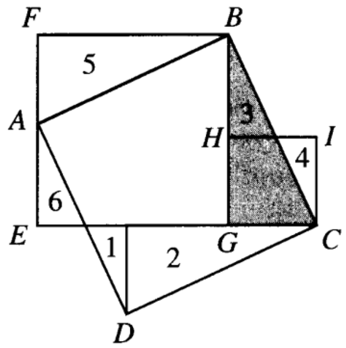
Απάντηση: hsien = 5 chi.

Μέθοδος
Πρόσθεσε το τετράγωνο της kou και ku. Η τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος είναι ίση με την hsien.



Απόδειξη του Liu Hui (263 μ.Χ.) στα σχόλια του στο Chiu chang suan shu

Ξεκινήστε με το τετράγωνο ABCD του οποίου η πλευρά είναι γ και το εμβαδόν γ^2. Μετακινήστε και περιστρέψτε τα μέρη 1, 2, και 3 ώστε να σχηματίσουν αντίστοιχα τα μέρη 4, 5 και 6. Το αρχικό τετράγωνο έχει τώρα μετασχηματιστεί σε δύο νέα τετράγωνα : (1) τετράγωνο EFBG πλευράς β και εμβαδού β^2. (2) τετράγωνο GHIC πλευράς α και εμβαδού α^2.
Γράφουμε: Εμβαδόν (GHIC) + Εμβαδόν (EFBG) = Εμβαδόν (ABCD) ή $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$.



Viète, François *Isagoge in Artem Analyticem* 1591

Propositio I.
Antithesi aequalitaem non immutari.
Proponantur A quadratum minus D plano aequari G quadrato minus B in A. Dico A quadratum plus B in A equari G quadratum plus D plano, neque per istam transpofitionem fub contraria adfectionis nota equalitarem immutari. Quoniam enim A quadratum minus D plano equatur G quadrato minus B in A addatur utrobique D planum plus B in A. Ergo ex communi notione A quadratum minus D plano plus D plano plus B in A equatur G quadrato, minus B in A plus D plano: plus B in A. Iam adfectio negata in eadem equationis parre elidate adfirmatam: illic evanefcet adfetio D plani, hicadfectio B in A, et fuperirit A quadratum plus B in A equale G quadrato plus D plano.

Πρόταση Ι
Μια εξίσωση δεν αλλάζει από μεταφορά (των όρων της).
Έστω ότι A στο τετράγωνο μείον D στην p ισούται με (equari) G στο τετράγωνο μείον B επί A. Λέω ότι A στο τετράγωνο συν B επί A ισούται με G στο τετράγωνο συν D στην p και ότι η εξίσωση δεν αλλάζει από αυτή την μεταφορά με αντίθετα πρόσημα. Διότι αφού A στο τετράγωνο μείον D στην p εξισούται με (equar) με G στο τετράγωνο μείον B επί A, προσθέστε (addatur) στα δύο μέρη D στην p συν B επί A. Τότε κατά κοινή αποδοχή είναι A στο τετράγωνο μείον D στην p συν D στην p συν B επί A ίσον με G στο τετράγωνο μείον B επί A συν D στην p συν B επί A. Το αρνητικό πρόσημο (adfectio negate) στο κάθε μέρος της εξίσωσης ακυρώνει το θετικό: στην μία πλευρά ο όρος D στην p απαλείφεται και στην άλλη ο όρος B επί A και αυτό αφήνει A στο τετράγωνο συν B επί A ισον με G στο τετράγωνο συν D στην p.

Newton Isaac, Philosophiae Naturalis *Principia Mathematica, 1726*

DE MOTU CORPORUM LIBER PRIMUS.

SECTIO I.
De methodo rationum primarum & ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur.

LEMMA I.
Quantitates, ut et quantitatum rationes, quae ad aequalitatem tempore quovis finito constanter tendunt, et ante finem temporis illius propius ad invicem accedunt quam pro data quavis diffentia, fiunt ultimo aequales.

Si negas; fiant ultimo inaequales, et sit earum ultima differentia D. Ergo nequeunt propius ad aequalitatem accedere quam pro data differentia D: contra hypothesin.

ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΙΝΗΣΗ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΤΜΗΜΑ 1
Περί μεθόδου του πρώτου και τελευταίου λόγου των ποσοτήτων με τη βοήθεια των οποίων αποδεικνύουμε τις προτάσεις που ακολουθούν.

ΛΗΜΜΑ 1
Ποσότητες και λόγοι ποσοτήτων, οι οποίοι σε κάθε πεπερασμένο χρόνο συγκλίνουν συνεχώς στην ισότητα και πριν το τέλος του δεδομένου χρόνου προσεγγίζουν η μια την άλλη πλησιέστερα κάθε δοσμένης διαφοράς τελικά εξισώνονται.

Εάν το αρνείστε αυτό; υποθέστε ότι τελικά παραμένουν άνισα και έστω D η τελική τους διαφορά. Επομένως δεν μπορούν να προσεγγίσουν πλησιέστερα στην ισότητα από αυτή τη δεδομένη διαφορά D; Το οποίο είναι αντίθετο με την υπόθεση.

Whitehead A.N. & Russel B., *Principia Mathematica,* 1910-1913

***54·43.** $\vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$$\vdash . *54\cdot26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$$
$$[*51\cdot231] \qquad \equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$$
$$[*13\cdot12] \qquad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$$
$$\vdash . (1) . *11\cdot11\cdot35 . \supset$$
$$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$$
$$\vdash . (2) . *11\cdot54 . *52\cdot1 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

<u>Συμβολισμοί:</u> Οι τελείες σημαίνουν παρενθέσεις, τα σύμβολα: $\vdash$ Έστω ότι ισχύει, $\supset$ Συνεπάγεται, $\equiv$ ισοδυναμία (αν και μόνο αν), Λ κενό σύνολο (σήμερα $\emptyset$), $\cap$ & $\cup$ τομή & ένωση συνόλων, $\in$ ανήκει, α και β είναι σύνολα, 1 είναι το σύνολο όλων των συνόλων τα οποία έχουν ακριβώς ένα στοιχείο { x: υπάρχει a τέτοιο ώστε x = {a} }, 2 είναι το σύνολο όλων των συνόλων τα οποία έχουν ακριβώς δύο στοιχεία.

* 54.43 *Εάν υποτεθεί ότι καθένα από τα σύνολα α και β έχει ακριβώς ένα στοιχείο, τότε είναι ξένα μεταξύ τους (δεν έχουν κοινά στοιχεία) αν και μόνο αν η ένωση τους έχει ακριβώς δύο στοιχεία.*

Dem. (demonstration)

*Από το θεώρημα *54.26 συνεπάγεται ότι αν α = {x} και β = {y}, τότε α∪β έχει 2 στοιχεία αν και μόνο αν το x είναι διάφορο του y*

*Σύμφωνα με το θεώρημα *51.231 το x είναι διάφορο του y αν και μόνο αν {x} και {y} είναι ξένα μεταξύ τους*

*και σύμφωνα με το θεώρημα *13.12 τα {x} και {y} είναι ξένα μεταξύ τους αν και μόνο αν τα α και β είναι ξένα μεταξύ τους (1)*

Άρα, αν α = {x} and *β = {y} τότε α ∪ β ∈ 2 αν και μόνο αν α ∩ β = Λ (1)*

*Από το συμπέρασμα (1) και τα θεωρήματα *11.11 και *11.35 συνεπάγεται ότι, αν υπάρχει x και y τέτοιο ώστε το α να είναι {x} και το β να είναι {y}, τότε α ∪ β ∈ 2 αν και μόνο αν τα α και β είναι ξένα μεταξύ τους (2)*

*Από το συμπέρασμα (2) και τα θεωρήματα *11.54* and **52.1 συνεπάγεται η αλήθεια του θεωρήματος.*

Από το θεώρημα αυτό έπεται, όταν οριστεί η πρόσθεση αριθμών ότι 1 + 1 = 2

Βιβλιογραφικές αναφορές

Arcavi, A. (1987) Using Historical Materials in the Mathematics Classroom, *Arithmetic Teacher*, 35 (4) 13-16

Barnett J., Bezhanishvili G., Leung H., Lodder J., Pengelley D., Ranjan D. (2008), Historical Projects in Discrete Mathematics and Computer Science, International Congress on Mathematical Education (ICME), 2008, Monterey Mexico, *http://tsg.icme11.org/document/get/756* [26-3-2008]

Brunner, R. B. (1976), Reading mathematical exposition, *Educational Research*, 18(3), 208-213,

Calinger R. (ed.) (1996), *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching*, Mathematical Association of America: Washington, D.C.,

Chassapis D. (2007), Integrating the philosophy of mathematics in teacher training courses. A Greek case as an example. Στο François Karen. & Bendegem Jean Paul Van (eds.) *Philosophical Dimensions in Mathematical Education*, (61-79), Springer: New York.

Durkin, K. (1991) Language in Mathematics Education: an introduction. Στο K. Durkin & B. Shire (Eds) *Language in Mathematical Education, Research and Practic*e (3-16), Philadelphia: Open University Press.

Dunham W. (1986), A "Great Theorems" Course in Mathematics, *American Mathematical Monthly*, 93, 808-811.

Dunham William (1990) *Journey Through Genius: Great Theorems of Mathematics*, Wiley.

Ernest, P. (1991), The Philosophy of Mathematics Education, Falmer Press: London.

Fauvel J. (ed.) (1990), History in the Mathematics Classroom: the IREM Papers, Mathematical Association: London,

Hubbard, R. 1990, Teaching mathematics reading and study skills, *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 21 (2), 265-269.

Jahnke H. N. et all. (2000) The use of original sources in the mathematics classroom. Στο Fauvel, J.& Van Maanen, J. (eds.), *History in Mathematics Education (*291-328), Kluwer: Boston.

Kitcher, P. (1983), The Nature of Mathematicsl Knowledge, Oxford University Press: Oxford.

Lakatos, I. (1976), Proofs and Refutations, Cambridge Univerity Press, Cambridge. Ελληνική έκδοση: Lakatos, I. (1996), Αποδείξεις και Ανασκευές, Τροχαλία, Αθήνα.

Laubenbacher, R. and Pengelley, D. (1992), Great Problems of Mathematics: A Course Based on Original Sources, *American Mathematical Monthly,* 99, 313-317.

Laubenbacher, R.& Pengelley, D., (1996), Mathematical masterpieces: teaching with original sources. Στο Calinger R. (ed.) *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching*, (257-260), Mathematical Association of America: Washington, D.C.

Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach Reports (2006), *Mini-Workshop: Studying Original Sources in Mathematics Education*, Organized by: Fulvia Furinghetti, Hans Niels Jahnke and Jan A. van Maanen, , Vol. 3 (2), 1285–1318

Nouet, M. (1996), Using historical texts in the lycee. Στο E. Barnine & R. Douady (Eds.), *Teaching mathematics: The relation between Knowledge, curriculum and practice* (125-138),Topiques Editions: Metz.

Sfard, A., Nesher, P., Streefland, L., Cobb, P., Mason, J. (1998), Learning Mathematics through Conversation: Is it as Good as They Say?, *For the Learning of Mathematics* 18 (1), 41- 51.

Steiner, H.-G. (1987) Philosophical and epistemological aspects of mathematics and their interaction with theory and practice in mathematics education, *For the Learning of Mathematics* 7 (1), 7–13.

Turnau, S. (1983), The mathematical textbook - a problem of mathematics education, *ZDM Zentralbltt furDidaktik der Mathematik,* 15 (4), 168-173.

Tymoczo, T. (ed.), (1986), New Directions in the Philosophy of Mathematics, Birkhauser, Boston.

Wittgenstein, L. (1956), Remarks on the Foundations of Mathematics, revised edition, MIT Press, Cambridge, 1978.

Χασάπης, Δ. (1996), Τα πλαίσια αναφοράς των μαθηματικών εννοιών κατά τη διδασκαλία τους στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση και οι ιδεολογικοί τους προσανατολισμοί, *Πρακτικά 1ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, ΠΤΔΕ Πανεπιστημίου Αθηνών & Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., Αθήνα, 113 – 123.

Χασάπης, Δ. (2005), Κοινωνικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης: Όψεις και ζητήματα. Στο Δ. Χασάπης, (Επιμ.), *Κοινωνικές & πολιτισμικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης (*9 – 23), *Πρακτικά 4ου Διήμερου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών,* Α.Π.Θ., Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης: Θεσσαλονίκη,