

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΧΑΣΑΠΗΣ

**Théorème
de pythagore**
Pythagore's theorem

Dans un triangle rectangle, le carré
construit sur l'hypoténuse est égal à
la somme des carrés construits sur
les côtés de l'angle droit.

Pythagoras' theorem states that in a
right-angled triangle, the square of the
hypotenuse is equal to the sum of the
squares of the other two sides. This is
one of the most important theorems in
mathematics.

**ΚΕΙΜΕΝΑ
ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**

**Όψεις και ζητήματα μάθησης και
διδασκαλίας των μαθηματικών**

Αθήνα 2021

ΚΕΙΜΕΝΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Όψεις και ζητήματα μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΧΑΣΑΠΗΣ

ΑΘΗΝΑ 2021

© Δημήτρης Χασάπης

ISBN 978-618-00-3701-2



Το περιεχόμενο του βιβλίου αυτού διατίθεται με άδεια [Creative Commons](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.el) Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Όχι Παράγωγα Έργα [3.0 Ελλάδα](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.el).

Περισσότερες πληροφορίες

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.el>

Στην Ελένη

Περιεχόμενα

Πρόλογος	7
Ζητήματα μαθηματικής εκπαίδευσης	
Κοινωνικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης: Όψεις και ζητήματα	11
Κοινωνική ανισότητα και μαθηματική εκπαίδευση: Από την αναγνώριση μιας πραγματικότητας στην κατανόηση των όρων δημιουργίας της	31
Η οργάνωση του περιεχομένου ενός αναλυτικού προγράμματος μαθηματικών και οι υπονοούμενες αντιλήψεις για τη γνώση, την επιστήμη και την εκπαίδευση	45
Το επιχείρημα και η απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά: Το θέμα και το πλαίσιο μιας συζήτησης	57
Η γλώσσα των μαθηματικών, η γλώσσα των φυσικών επιστημών, η γλώσσα των εκπαιδευτικών πρακτικών	77
Μαθηματικά και λογοτεχνία: Μια αιτούμενη σύζευξη	89
Τα μαθηματικά στην προσχολική και στην πρώτη σχολική εκπαίδευση: Πραγματικότητες και προβληματισμοί	103

Μαθηματικά και τέχνες στην εκπαίδευση:
Αναζητώντας κοινούς τόπους 125

Διεθνείς συγκριτικές ερευνες μαθηματικής εκπαίδευσης:
Απο την ερευνητική πρακτική στην πολιτική διαχείριση 143

Ζητήματα μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών

Η διαμεσολάβηση των πολιτισμικών εργαλείων στη μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών: Μια επιλεκτική σκιαγράφηση ερευνητικών θεμάτων 169

Η διαθεματική προσέγγιση της διδασκαλίας των μαθηματικών:
Επιστημολογικά ζητήματα 197

Η μάθηση της γεωμετρίας ως οικειοποίηση της χρήσης γεωμετρικών οργάνων: Δυο μαθησιακά επεισόδια και μια διδακτική πρόταση 211

Σημειωτικές προσεγγίσεις της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών: Μια σκιαγράφηση του πεδίου 229

Το βιβλίο στη διδασκαλία των μαθηματικών:
Ένα πρόβλημα υπό διαρκή διερεύνηση 247

Η διαμεσολάβηση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών 261

Το παιχνίδι στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών 273

Εισάγοντας τα μαθηματικά στο νηπιαγωγείο ως αφήγηση 295

Η διδακτική των μαθηματικών ως επιστημονική δραστηριότητα

Το επιστημονικό αντικείμενο της διδακτικής των μαθηματικών:
Παραδοχές και ζητούμενα 311

Το ερευνητικό αντικείμενο της διδακτικής των μαθηματικών:
Χαρακτηριστικές επιλογές του κυριάρχου ρεύματος 323

Ιστορία των μαθηματικών – Ιστορίες των μαθηματικών:
Επιλεκτικά σχόλια για τα αναγκαία (μεταξύ άλλων)
στοιχεία μιας συζήτησης 337

Πρόλογος

Στην παρούσα συλλογή έχουν συγκεντρωθεί είκοσι κείμενα, τα οποία έχουν δημοσιευτεί ή παρουσιαστεί σε ομιλίες και συνέδρια, που συνδέονται θεματικά μεταξύ τους ή κάποια από αυτά επικαλύπτονται, αλλά όχι σε κομβικά τους σημεία. Δεν έχουν γραφεί και δεν παρουσιάζονται εδώ ως κεφάλαια ενός βιβλίου, αλλά ως αυτοτελείς προσεγγίσεις των πολύπλοκων όψεων της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών στο σχολείο.

Κάθε, όμως, προσέγγιση της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών, τόσο από την οπτική της διδακτικής, δηλαδή της θεωρίας, όσο και από τη σκοπιά της διδασκαλίας, δηλαδή της εφαρμογής της, προϋποθέτει και επιβάλλει μια σειρά αλληλένδετων παραδοχών για το χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης, για τις διεργασίες της μάθησης και για την κοινωνική δραστηριότητα της διδασκαλία της.

Όλα τα κείμενα αυτής της συλλογής αναλύουν και σχολιάζουν όψεις της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών με αφετηρία τους τις ακόλουθες παραδοχές.

Η μαθηματική γνώση, δηλαδή οι έννοιες, τα θεωρήματα και οι τεχνικές των μαθηματικών δεν είναι ένα σταθερό σύνολο καθιερωμένων συμπερασμάτων αλλά μια δυναμική διαδικασία διερεύνησης, κατά την οποία η λογική αναγκαιότητα, η νοητική αβεβαιότητα και η επιστημονική αντιπαράθεση παρέχουν κίνητρα σε όλες και όλους που ασχολούνται με τα μαθηματικά να συμμετέχουν σε μια συνεχή έρευνα διαρκώς βελτιούμενων κατανοήσεων των φαινομένων της φυσικής και κοινωνικής πραγματικότητας. Η μαθηματική γνώση, επομένως, δεν είναι απόλυτη και ιστορικά αμετάβλητη, αλλά όπως και κάθε άλλο παράγωγο της ανθρώπινης δραστηριότητας είναι μια κοινωνική κατασκευή. Ως τέτοια, υπόκειται σε σφάλματα, εμπλουτίζεται από τους σκοπούς και τα πλαίσια που υποκινούν την ανάπτυξη και τις εφαρμογές της και σε κάθε περίπτωση διαμορφώνεται από τις κυρίαρχες κατά εποχή κοινωνικές αξίες.

Η μάθηση των μαθηματικών, όπως και κάθε μάθηση, είναι μια γενεσιουργός διαδικασία κατασκευής νοημάτων, τα οποία συγκροτούνται από τον κάθε άνθρωπο προσωπικά. Μια διαδικασία που εμπλουτίζεται από τους στόχους και τα πλαίσια ανάπτυξης της και η οποία διαμορφώνεται καθοριστικά από την κοινωνική αλληλεπίδραση και το πολιτιστικό περιβάλλον κάθε ανθρώπου.

Η διδασκαλία των μαθηματικών, ως κοινωνικά οργανωμένη δραστηριότητα μάθησης, οφείλει να παρέχει την αναγκαία υποστήριξη στις προσωπικές διερευνήσεις των μαθητών και μαθητριών, δημιουργώντας πλούσια περιβάλλοντα μάθησης, τα οποία θα υποκινούν αμφιβολίες και θα παρέχουν εμπειρίες μάθησης.

Τα κείμενα αυτής της συλλογής αυτής, επομένως, δεν επιδιώκουν να δώσουν απαντήσεις στο πλήθος των ερωτημάτων που εγείρουν τα θέματα που θίγουν, αλλά να συμβάλουν στη διαμόρφωση ενός πλαισίου προβληματισμού και συζήτησης για τα θέματα αυτά, αλλά και όλα τα συναφή ζητήματα που σχετίζονται με τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο και εκτός του σχολείου.

Αν απαιτείται κάποια εξήγηση για τη συγκέντρωση και παρουσίαση αυτών των κειμένων θα πρέπει να αναζητηθεί στην υποκειμενική διαπίστωση ότι οι καιροί έχουν ωριμάσει για μια ουσιαστική συζήτηση για τη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο και μια ριζική αλλαγή στην προσέγγισή της. Έτσι ώστε, ξεπερνώντας τα σημερινά καταφανή αδιέξοδα να συμβάλλει όχι μόνο στη μάθηση μαθηματικών εννοιών και τεχνικών, αλλά και στην ανάπτυξη κριτικά σκεπτόμενων ατόμων, που θα μπορούν να διακρίνουν το λογικό επιχείρημα από την αυθαίρετη δήλωση και την τεκμηριωμένη αιτιολόγηση από τον ανορθολογικό λόγο.

Ζητήματα μαθηματικής εκπαίδευσης

Κοινωνικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης: Όψεις και ζητήματα

Εισαγωγικές παρατηρήσεις

Με τον όρο «μαθηματική εκπαίδευση» εννοείται, πολύ γενικά, ένα σύνολο κοινωνικών πρακτικών, οι οποίες αναπτύσσονται σε τυπικά θεσμοθετημένα και άτυπα καθιερωμένα πλαίσια με στόχο την ιδιοποίηση κάθε είδους μαθηματικών γνώσεων και τεχνικών και παράλληλα ένα πεδίο επιστημονικής πρακτικής, το οποίο μελετάει και με τα αποτελέσματα του προσανατολίζει τις πρακτικές αυτές. Ο ορισμός αυτός δεν υπονοεί σε καμία περίπτωση ότι η μαθηματική γνώση υπάρχει ανεξάρτητα από τον άνθρωπο και τις δραστηριότητες του. Μ' αυτή την ευρεία έννοια ως μαθηματική εκπαίδευση μπορεί να νοηθεί, όπως έχει διατυπωθεί από τον Dörfler (2000), η ανάπτυξη κάθε είδους σχέσης των ανθρώπων με τη μαθηματική δραστηριότητα και τα αποτελέσματά της. Τα μαθηματικά, ως γνώση και δραστηριότητα, και η διδακτική σχέση διδασκομένων και διδασκόντων αποτελούν, επομένως, συνιστώσα στοιχεία της μαθηματικής εκπαίδευσης (Valero, 1999).

Το ζητούμενο, επομένως, μιας συζήτησης για τις κοινωνικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι

- (α) η διερεύνηση και η ανάδειξη των θεμελιωδών όψεων των κοινωνικών πρακτικών, οι οποίες συγκροτούν τη μαθηματική γνώση και τη μαθηματική δραστηριότητα και διαμορφώνουν τη διδακτική σχέση διδασκόντων και διδασκομένων με τη μαθηματική γνώση και τη μαθηματική δραστηριότητα, κατ' αρχήν σε θεσμοθετημένα σχολικά περιβάλλοντα, και παράλληλα
- (β) ο προσδιορισμός των ουσιαστικών κοινωνικών επιπτώσεων της μαθηματικής εκπαίδευσης με το δεδομένο μαθηματικό περιεχόμενο και την καθιερωμένη διδακτική σχέση.

Με άλλα λόγια, κάθε συζήτηση για τις κοινωνικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης οφείλει να θέτει στο επίκεντρο της, ταυτόχρονα και αλληλένδετα, τους κοινωνικούς και αναπόφευκτα τους ιστορικούς και πολιτικούς παράγοντες, οι οποίοι διαμορφώνουν το περιεχόμενο των μαθηματικών και τη μορφή των σχέσεων μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών στη σχολική τάξη και γενικότερα στο εκπαιδευτικό σύστημα κάθε βαθμίδας, όπως επίσης και τις επιπτώσεις τους σε κοινωνικό και ατομικό επίπεδο, οι οποίες είναι ταυτόχρονα επιπτώσεις ιδεολογικές και κοινωνικές.

Μια τέτοιου τύπου προσέγγιση, η οποία έχει την αφετηρία της στο ιστορικο-κοινωνικό επίπεδο (στο μακρο-επίπεδο της φυλογένεσης) και αναγκαία την κατάληξη της στο ατομικό επίπεδο (στο μικρο-επίπεδο της οντογένεσης), περιλαμβάνει:

- Μια θεώρηση των ιστορικο-κοινωνικών παραγόντων της οργάνωσης της μαθηματικής πρακτικής και της παραγωγής της μαθηματικής γνώσης,
- Μια θεώρηση των κοινωνικο-πολιτισμικών πρακτικών και των όρων του διδακτικού μετασχηματισμού της μαθηματικής γνώσης σε σχολική γνώση,
- Μια θεώρηση των κοινωνικο-πολιτικού πλαισίου οργάνωσης και ανάπτυξης των δραστηριοτήτων της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών και
- Μια θεώρηση των διαδικασιών της ατομικής συγκρότησης της ιστορικά αναπτυγμένης και κοινωνικά καθορισμένης μαθηματικής γνώσης και πρακτικής μέσα από τη συμμετοχή των ατόμων στις τυπικά θεσμοθετημένες και άτυπα καθιερωμένες δραστηριότητες της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Η θεώρηση των διαστάσεων αυτών της μαθηματικής εκπαίδευσης περιλαμβάνει αλληλένδετα, όπως προαναφέρθηκε, τόσο τους όρους και τις διαδικασίες διαμόρφωσης τους, όσο και τις αμοιβαίες επιδράσεις τους, καθώς και τις επιπτώσεις τους στο ευρύτερο κοινωνικό πλαίσιο στο οποίο η μαθηματική εκπαίδευση εντάσσεται.

Είναι σαφές, ότι μια θεώρηση της μαθηματικής εκπαίδευσης, η οποία προτάσσει το κοινωνικό επί του ατομικού υποχρεώνει στην επιλογή μιας νοητικής παράστασης της κοινωνίας. Αν και σχηματικά απλοποιημένα, οι παραστάσεις της κοινωνίας μπορούν να διακριθούν σε δυο βασικές κατηγορίες. Στις παραστάσεις της πρώτης κατηγορίας, οι οποίες εκφράζονται από τον Parsons και τις λειτουργικές προσεγγίσεις στις διάφορες εκδοχές τους, η κοινωνία αποτελεί μια λειτουργική ολότητα που συγκροτεί ένα αυτορυθμιζόμενο σύστημα. Στο σχήμα αυτό, η λειτουργίες της κοινωνικής αυτορύθμισης καθορίζονται από τη μεγιστοποίηση της αποτελεσματικότητας. Στις παραστάσεις της δεύτερης κατηγορίας, οι οποίες εκφράζονται από τον Marx και τα αντίστοιχα ρεύματα σε όλες τις εκδοχές τους, η κοινωνία διαιρείται σε δύο αντίπαλα σύνολα, τάξεις, που διαπλέκονται διαλεκτικά σε μια κοινωνική ενότητα. Στο σχήμα αυτό, βάση της κοινωνικής διαπλοκής αποτελεί η κοινωνική αντιπαλότητα για την προώθηση υλικών συμφερόντων. Η δεύτερη αυτή οπτική υιοθετείται και διέπει την παρούσα ανάλυση, η οποία θα περιοριστεί για πρακτικούς λόγους στην ανάλυση των δύο πρώτων από τις προαναφερθείσες κοινωνικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης .

Η οργάνωση της μαθηματικής πρακτικής και η παραγωγή της μαθηματικής γνώσης

Μια θεώρηση των ιστορικο-κοινωνικών παραγόντων, οι οποίοι διαμορφώνουν την οργάνωση της μαθηματικής πρακτικής και την παραγωγή της μαθηματικής γνώσης, από την οπτική αυτή, έχει ως αφετηρία της την παραδοχή ότι η μαθηματική δραστηριότητα, ως μια κοινωνική πρακτική, αντανακλά την κοινωνική κατάσταση και υπόκειται στους ανταγωνισμούς των κοινωνικών συμφερόντων μιας καθορισμένης ιστορικής περιόδου. Η μαθηματική γνώση ως παράγωγο της είναι, αντίστοιχα, μια κοινωνική κατασκευή, υποκείμενη στα ιστορικά καθορισμένα κοινωνικά και πολιτισμικά πλαίσια του σταδίου ανάπτυξης της. Δεν αποτελεί, κατά συνέπεια, μια αδιάψευστη, αντικειμενική και απόλυτη γνώση, αυτόνομη και κατηγορικά διακριμένη από τις άλλες μορφές της ανθρώπινης γνώσης, απαλλαγμένη πλήρως από τα εμπειρικά δεδομένα και τις αντιφάσεις

της κοινωνικής πραγματικότητας και καθορισμένη μόνο από τη λογική ή από μια υπερβατική πραγματικότητα (Kitcher 1983, Tymoczo 1986, Wittgenstein 1956).

Η μαθηματική γνώση, επομένως, όπως και κάθε επιστημονική γνώση, υπόκειται ως παράγωγο μιας κοινωνικής πρακτικής σε διαρκείς διαψεύσεις και αναθεωρήσεις και δεν αποτελεί ένα τελεσίδικα περατωμένο σώμα γνώσης, εκφρασμένο οριστικά από ένα κλειστό σύστημα προτάσεων και από μια σειρά διαδικασιών τεκμηρίωσης της αλήθειας των προτάσεων αυτών (Lakatos 1976/1996). Ως παράγωγο μιας κοινωνικής πρακτικής εντάσσεται σε ιστορικά καθορισμένα κοινωνικά και πολιτιστικά πλαίσια, που καθορίζουν το επίπεδο και προσδιορίζουν την κατεύθυνση ανάπτυξης της.

Παράλληλα και για τους ίδιους λόγους, η μαθηματική γνώση δεν μπορεί να θεωρηθεί ως απόλυτα αντικειμενική, ανεξάρτητη από τις κυρίαρχες κοινωνικές αξίες, υποκείμενη αποκλειστικά σε μια δική της αυτόνομη εσωτερική λογική. Αντίθετα, μέσα από την κοινωνική της προέλευση και την ιστορική της εξέλιξη η μαθηματική γνώση διαπλέκεται με το σύνολο της ανθρώπινης γνώσης και σφραγίζεται από τις κυρίαρχες ιδεολογίες, που οριοθετούν τα πλαίσια ανάπτυξης της (Wilder 1981).

Η αντικειμενικότητα της μαθηματικής γνώσης είναι ουσιαστικά μια μορφή κοινωνικής σύμβασης (Bloor, 1976). Μέσα από την εξέλιξη της μαθηματικής δραστηριότητας, έχουν επικυρωθεί από τις κοινότητες των μαθηματικών κανόνες και πεποιθήσεις για τους ορθούς τύπους εργασίας και για τις αποδεκτές μορφές παρουσίασης των μαθηματικών, οι οποίοι προσομοιάζουν με τους κανόνες ενός παιχνιδιού. Χωρίς αμφιβολία, η υλική πραγματικότητα παρέχει ένα αρχικό πλαίσιο ανάπτυξης της μαθηματικής πρακτικής και ένα διαρκές πεδίο αναφοράς της, αλλά είναι οι μαθηματικές συμβάσεις οι οποίες αποδίδουν έναν χαρακτήρα αναγκαιότητας στη καθαυτή διαδικασία ανάπτυξης αυτής της πρακτικής και στα αποτελέσματά της. Το αντικείμενο, επομένως των μαθηματικών, έχει την αφετηρία και την αναφορά του στην υλική πραγματικότητα, αλλά συνίσταται από κοινωνικές κατασκευές και συμβατικούς κανόνες.

Σε μια τέτοια θεώρηση της μαθηματικής πρακτικής και της μαθηματικής γνώσης το κοινωνικό πλαίσιο, όπως και οι επαγγελματικές κοινότητες των ερευνητών μαθηματικών, διαδραματίζουν ένα κεντρικό ρόλο στην δημιουργία και στην επικύρωση της μαθηματικής γνώσης (Davis and Hersh, 1980; Kitcher, 1984; Latour, 1987). Η κοινωνική οργάνωση και δομή των κοινοτήτων των ερευνητών μαθηματικών, ειδικότερα, η οποία δεν έχει καθόλου ευκαιριακό και τυχαίο χαρακτήρα, διαμορφώνει τους μηχανισμούς δημιουργίας και επικύρωσης της μαθηματικής γνώσης, αποτελώντας ταυτόχρονα το πλαίσιο διαφύλαξης και το πεδίο εφαρμογής και μετάδοσης της άρρητης και άτυπης μαθηματικής γνώσης.

Τρεις χαρακτηριστικές όψεις του κοινωνικού πλαισίου οργάνωσης της μαθηματικής πρακτικής και παραγωγής της μαθηματικής γνώσης έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον:

(α) *Η επιλογή των κλάδων και των θεμάτων ανάπτυξης της μαθηματικής έρευνας.*

Η χρηματοδότηση και η διαθεσιμότητα των εφαρμογών, που προϋποθέτει και ταυτόχρονα οριοθετεί, καθορίζουν σε πολύ μεγάλο βαθμό την κατεύθυνση ανάπτυξης της μαθηματικής έρευνας και άρα την παραγωγή της μαθηματικής γνώσης, υπεραξιώνοντας ή απαξιώνοντας μαθηματικούς κλάδους και μαθηματικές γνώσεις. Χαρακτηριστικό παράδειγμα, η επιχειρησιακή έρευνα, η οποία συγκροτήθηκε και νομιμοποιήθηκε ως κλάδος των μαθηματικών μέσα από τις στρατιωτικές ανάγκες του Δευτέρου Παγκοσμίου Πολέμου και τα ενδιαφέροντα της οικονομικής οργάνωσης στη συνέχεια. Παρόμοια περίπτωση αποτελεί η ανάπτυξη των υπολογιστικών μαθηματικών, η οποία καθορίστηκε από τις ανάγκες της βιομηχανίας των υπολογιστών συμβάλλοντας ταυτόχρονα στην ανάπτυξη τους καθοριστικά (Hodgkin, 1976).

(β) *Η ερμηνευτική αναγωγή της μαθηματικής γνώσης.*

Κλάδοι και περιοχές της μαθηματικής γνώσης υπεραξιώνονται ή απαξιώνονται κοινωνικά με κριτήριο την επιθυμητή ή την προσφερόμενη φυσική ή κοινωνική ερμηνεία τους. Χαρακτηριστικό παράδειγμα, η θεωρία των διαφορικών εξισώσεων και η ανάπτυξη

της στην κατεύθυνση της δημιουργίας μιας «θεωρίας καταστροφών», η οποία για μεγάλο χρονικό διάστημα αποτέλεσε πεδίο εντατικής θεωρητικής έρευνας με στόχο την μαθηματοποίηση και την περιγραφή και κατανόηση κοινωνικών καταστάσεων μέσα από την οπτική αυτής της συγκεκριμένης μαθηματοποίησης τους. Αντίστοιχη, αν και εντελώς διαφορετικού περιεχομένου, περίπτωση αποτελεί η μαθηματοποίηση της κβαντικής θεωρίας στη διάρκεια του μεσοπολέμου υπό τους όρους της κυρίαρχης επιστημονικής θεώρησης της αιτιότητας και της απροσδιοριστίας των φαινομένων, η οποία έχει αναλυθεί από τον Forman (1971) και η οποία επέδρασε σημαντικά στον προσανατολισμό και στο περιεχόμενο της ανάπτυξης της μαθηματικής έρευνας.

(γ) *Ο τύπος οργάνωσης και η μορφή παρουσίασης της μαθηματικής γνώσης*

Η επιλογή των ορισμών και των αξιωμάτων, δηλαδή των μαθηματικών παραδοχών οι οποίες αποτελούν τη βάση κάθε μαθηματικής θεωρίας, οι τύποι των μαθηματικών θεωρημάτων, δηλαδή των μαθηματικών αληθειών οι οποίες συγκροτούν κάθε μαθηματική θεωρία, η μορφή των αποδείξεων της αλήθειας των μαθηματικών θεωρημάτων, όπως και κάθε πτυχή των μαθηματικών υπόκειται στην επίδραση ενός πλήθους κοινωνικών παραγόντων, όπως για παράδειγμα είναι οι κυρίαρχες ιδεολογικές απόψεις για το χαρακτήρα της κοινωνικής πραγματικότητας. Χαρακτηριστικό παράδειγμα, η θεωρία παιγνίων, μια μαθηματική θεωρία περιγραφής και ανάλυσης καταστάσεων ανταγωνισμού και σύγκρουσης η οποία αναπτύχθηκε αρχικά με αναφορά στη λειτουργία των οικονομικών συστημάτων (Martin, 1978). Βασικές έννοιες της θεωρίας αποτελούν οι «παίκτες», καθένας από τους οποίους έχει έναν αριθμό «επιλογών» οι οποίες συνεπάγονται «συνέπειες». Η μαθηματική θεωρία των παιγνίων διερευνά και καθορίζει τις άριστες στρατηγικές για κάθε επιλογή, ενώ το σύνολο των επιλογών και των συνεπειών τους είναι για κάθε παίκτη σταθερά δεδομένες και ποσοτικοποιήσιμες. Κατά συνέπεια, η θεωρία παιγνίων προϋποθέτει και ενισχύει τη λογική του ατομικού ανταγωνισμού, ενώ οι εφαρμογές της καλύπτουν με ένα επιστημονικό επίχρισμα αντικειμενικότητας και νομιμοποιούν

μαθηματικά τη λήψη επιθυμητών αποφάσεων. Το συγκεκριμένο παράδειγμα και πολλά άλλα (ενδεικτικά Bos & Mehrstens 1977, MacKenzie 1978, Mehrstens 1987 και για μια συνολική επισκόπηση και ανάλυση δεξ στο Restivo 1983) καταδεικνύουν την επίδραση του κοινωνικού πλαισίου και των επιμέρους συνιστωσών του, όπως είναι οι οικονομικές σχέσεις ή τα συστήματα αξιών, στον προσανατολισμό και στο περιεχόμενο της μαθηματικής πρακτικής και της μαθηματικής γνώσης.

Σε μια θεώρηση της μαθηματικής πρακτικής και της μαθηματικής γνώσης από την οπτική του κοινωνικού της πλαισίου ενδιαφέρει ιδιαίτερα η θεσμική οργάνωση και η λειτουργία της μαθηματικής δραστηριότητας. Οι μορφές επαγγελματικής απασχόλησης των ερευνητών μαθηματικών, οι τύποι και οι μηχανισμοί χρηματοδότησης της μαθηματικής έρευνας, οι μορφές και τα μέσα επικοινωνίας και δημοσιοποίησης των αποτελεσμάτων της μαθηματικής έρευνας (συνέδρια και περιοδικά), τα συστήματα εκπαίδευσης των ερευνητών μαθηματικών (προ-πτυχιακά και μεταπτυχιακά), οι ιεραρχίες και η εξουσία στις κοινότητες των μαθηματικών και τα συναφή.

Η επίδραση μερικών στοιχείων της οργάνωσης και της λειτουργίας της μαθηματικής πρακτικής στον προσανατολισμό και στο περιεχόμενο της ίδιας της πρακτικής, αλλά και των αποτελεσμάτων της είναι χαρακτηριστική. Εντελώς ενδεικτικά:

(α) Η υποστήριξη και η χρηματοδότηση της μαθηματικής έρευνας

Το μεγαλύτερο μέρος των πόρων της μαθηματικής έρευνας, η υλική υποδομή και η χρηματοδότηση της, προέρχεται από κυβερνητικούς οργανισμούς ή μεγάλες βιομηχανικές και εμπορικές εταιρείες.. Οι πηγές χρηματοδότησης άμεσα ή έμμεσα καθορίζουν το είδος των ερευνητικών προβλημάτων και τους τύπους των υπό διερεύνηση εφαρμογών. Οι μεγάλες βιομηχανικές εταιρείες, για παράδειγμα, ενδιαφέρονται για την εφαρμογή των μαθηματικών στην επίλυση προβλημάτων μείωσης του κόστους, ελέγχου της εργασίας ή βελτίωσης της τεχνολογίας της παραγωγής. Για παράδειγμα, τα μαθηματικά της μετάδοσης του φωτός σε οπτικές ίνες προήλθαν από τη μαθηματική διερεύνηση προβλημάτων των τηλεπικοινωνιών, η οποία τροφοδότησε τη θεωρητική ανάπτυξη αντίστοιχων

μαθηματικών θεωριών και την εφαρμογή τους στην επίλυση των συγκεκριμένων προβλημάτων. Ιδιαίτεροι τύποι, τώρα, παραβολικών μερικών διαφορικών εξισώσεων μελετήθηκαν εκτεταμένα, όχι επειδή είχαν θεωρητικό ενδιαφέρον ή σπουδαιότητα για τα μαθηματικά, αλλά εξαιτίας συγκεκριμένων πρακτικών εφαρμογών τους.

(β) *Οι ερευνητές των μαθηματικών*

Οι μαθηματικοί ερευνητές, οι επιστήμονες δηλαδή οι οποίοι ασχολούνται με την παραγωγή και την εφαρμογή της μαθηματικής γνώσης, απασχολούνται στο σύνολο τους σήμερα σε πανεπιστήμια, ερευνητικά ιδρύματα και κέντρα μελετών, δημόσια ή ιδιωτικά. Τα μαθηματικά, όπως και οι επιστήμες, έγιναν πεδίο επαγγελματικής απασχόλησης από τις αρχές του 19^{ου} αιώνα και ως συνέπεια η μαθηματική δραστηριότητα διαμόρφωσε σταδιακά χαρακτηριστικά γραφειοκρατικού τύπου. Αυτού του τύπου κοινωνική οργάνωση της μαθηματικής παραγωγής επηρέασε ουσιαστικά και πάντοτε επηρεάζει τον τρόπο και το περιεχόμενο της εργασίας των μαθηματικών (Collins and Restivo, 1983). Οι ερευνητικές επιλογές τους καθορίζονται πρωτίστως από τις ανάγκες βελτίωσης των αμοιβών και των συνθηκών εργασίας τους, τις επιδιώξεις αύξησης του γοήτρου και των επιρροών τους, τις επιθυμίες κοινωνικής ανόδου και παρόμοια συναφή.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα επίδρασης της κοινωνικής οργάνωσης της μαθηματικής δραστηριότητας στο περιεχόμενο των μαθηματικών, αποτελεί η εννοιολογική διάσταση και αλλαγή του περιεχομένου της μαθηματικής αλήθειας και της απόδειξης της μεταξύ των μαθηματικών του 18^{ου} και του 19^{ου} αιώνα. Όπως αναλύει Grabiner (1974), κατά τον 18^ο αιώνα κύριο στόχο των μαθηματικών αποτέλεσε η αποτελεσματικότητα των μεθόδων τους, ενώ αντίθετα τον 18^ο αιώνα η αυστηρότητα και η συνέπεια των αποδείξεων της αλήθειας τους. Μεταξύ των βασικών αιτιών αυτής της μεταστροφής περιλαμβάνεται η αλλαγή του επαγγελματικού καθεστώτος των μαθηματικών. Από τις αρχές του 18^{ου} αιώνα και εξής η πλειονότητα των ερευνητών μαθηματικών άρχισαν να απασχολούνται με τη διδασκαλία των μαθηματικών. Ως αποτέλεσμα ενδιαφέρθηκαν πρωτίστως, όχι για τις εφαρμογές των αποτελεσμάτων της μαθηματικής έρευνας, αλλά για τη

συστηματοποίηση μιας διδακτικής ύλης για τους σπουδαστές τους και παράλληλα για την περιχαράκωση του εκπαιδευτικού επαγγέλματος και τον αποκλεισμό από αυτό των ανταγωνιστών τους ερασιτεχνών μαθηματικών. Σ' αυτό το πλαίσιο αποκτούν ιδιαίτερη σημασία οι τυπικοί ορισμοί των εννοιών και οι αυστηρές αποδείξεις των μαθηματικών προτάσεων. Με αντίστοιχους όρους κοινωνικής οργάνωσης του επαγγέλματος των ερευνητών μαθηματικών περιγράφει ο Schubring (1981) τη δημιουργία της διάκρισης «καθαρών» και «εφαρμοσμένων» μαθηματικών στις αρχές του 19^{ου} αιώνα.

(γ) Η κατάτμηση και η εξειδίκευση της μαθηματικής γνώσης

Η κατάτμηση σε κλάδους και στη συνέχεια η εξειδίκευση της μαθηματικής γνώσης σε τομείς και επίπεδα, τα οποία δεν υπαγορεύονται από καμία επιστημολογική ανάγκη, και η αντίστοιχη ανάπτυξη ιδιαίτερων λεξιλογίων, αποτελεί ένα από τα μέσα με τα οποία η μαθηματική γνώση περιχαράκωνεται απέναντι στους μη-ειδικούς και αποκτά ένα ιδιότυπο κύρος, ως μια πολύ ειδική γνώση, την οποία μπορεί να κατανοήσουν, και άρα να αξιολογήσουν, μόνον οι κατά περίπτωση εξειδικευμένοι μαθηματικοί. Έτσι μια τέτοιου τύπου ανάπτυξη του περιεχομένου της μαθηματικής γνώσης εξασφαλίζει σε μικρές κοινότητες μαθηματικών την επαγγελματική εξειδίκευση και απασχόληση, ενώ σε μια διαλεκτική αμοιβαιότητα, αυτές οι κοινότητες των μαθηματικών συμβάλλουν με την ερευνητική τους δραστηριότητα και τα αποτελέσματα στην αντίστοιχα προσανατολισμένη ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης.

Ανακεφαλαιώνοντας, οι κοινωνικές διαστάσεις της μαθηματικής πρακτικής και των αποτελεσμάτων της συναρτώνται εκ προοιμίου με τις παραδοχές για τον χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης. Αν η μαθηματική γνώση θεωρηθεί ως υπάρχουσα ανεξάρτητα από την ανθρώπινη δραστηριότητα, τότε η κοινωνική της διάσταση περιορίζεται μόνο στη χρήση αυτής γνώσης στις ανθρώπινες δραστηριότητες και σε καμία περίπτωση στο καθαυτό περιεχόμενο της το οποίο είναι απόλυτο, αντικειμενικό, ανεξάρτητο από τις κυρίαρχες κοινωνικές αξίες και υποκείμενο αποκλειστικά στη δική του αυτόνομη εσωτερική λογική. Στην αντίθετη περίπτωση, τόσο η μαθηματική γνώση όσο και η

μαθηματική δραστηριότητα, όπως επίσης και η χρήση τους, ως στοιχεία μιας κοινωνικής πρακτικής, υπόκεινται στα ιστορικά καθορισμένα χαρακτηριστικά του κοινωνικού τους πλαισίου.

Με τις διατυπώσεις, μάλιστα, του Restivo (1993, σελ. 249):

Οι φαινομενικά πιο καθαρές έννοιες, οι λογικές έννοιες, εμφανίζονται ως αντικειμενικές και απρόσωπες έννοιες μόνο στο βαθμό που, και εξαιτίας του γεγονότος ότι, είναι δημοσιοποιήσιμες και δημοσιοποιημένες – δηλαδή μόνο, και εφόσον, αποτελούν συλλογικές αναπαραστάσεις. Όλες οι έννοιες είναι συλλογικές αναπαραστάσεις και συλλογικές επεξεργασίες, γιατί συλλαμβάνονται, αναπτύσσονται, επιβεβαιώνονται και τροποποιούνται μέσα από την κοινωνική εργασία σε κοινωνικά πλαίσια. Στην πραγματικότητα, όλα τα πλαίσια της ανθρώπινης σκέψης και δράσης είναι κοινωνικά. Το επόμενο διανοητικό βήμα είναι η αναγνώριση του γεγονότος, ότι «η εργασία», «το κοινωνικό πλαίσιο», «η σκέψη» και «η δράση» είναι ασεχωρήσιμα.. Οι έννοιες δεν είναι απλώς κοινωνικά προϊόντα είναι συστατικά κοινωνικές. Αυτός ο συλλογισμός οδηγεί στο ριζοσπαστικό συμπέρασμα, ότι είναι οι κοινωνικοί κόσμοι ή οι κοινότητες αυτές οι οποίες σκέπτονται και όχι τα άτομα. Με την κυριολεκτική έννοια του όρου, δεν σκέπτονται οι κοινότητες καθαυτές με κάποια υπερβατική έννοια.. Ακριβέστερα, τα άτομα είναι φορείς έκφρασης των σκέψεων των κοινοτήτων τους ή «συλλογικά σκεπτόμενα» άτομα. Ή με μια διαφορετική διατύπωση, ο νους είναι κοινωνική δομή.

Ο μετασχηματισμός της μαθηματικής γνώσης σε σχολική γνώση και η μαθηματική εκπαίδευση

Από την εμφάνιση του σύγχρονου σχολείου μέχρι σήμερα, τα μαθηματικά κατέχουν κεντρική και αδιαμφισβήτητη θέση στο σχολικό πρόγραμμα, τόσο της πρωτοβάθμιας όσο και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, με μια αιτιολόγηση η οποία, ανεξάρτητα από τις διατυπώσεις της, παραπέμπει άμεσα ή έμμεσα, στις μοναδικές ιδιότητες των μαθηματικών ως μιας γνώσης και μιας δραστηριότητας, οι οποίες έχουν τη δυνατότητα να «ασκούν» το μυαλό των παιδιών στις λογικές διεργασίες και στην ορθολογική σκέψη, όπως και να

αποτελούν το πεδίο ανάπτυξης μιας σειράς «ανώτερων» νοητικών ικανοτήτων, ανάλυσης, σύνθεσης, γενίκευσης κλπ .

Η παραδοχή αυτή όμως, όπως και κάθε παραδοχή για το ρόλο των μαθηματικών στο σχολείο, ενσωματώνει και υλοποιεί παραδοχές για τη φύση και το χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης και πρακτικής, και αντίστροφα κάθε φιλοσοφική - επιστημολογική θεώρηση της μαθηματικής γνώσης και πρακτικής εμπεριέχει και υποβάλλει αντίστοιχες προσεγγίσεις της μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών. Γιατί κάθε προσέγγιση της μαθηματικής εκπαίδευσης εμπεριέχει αναγκαστικά μια προσέγγιση του φαινομένου της ανθρώπινης μάθησης βασισμένη σε αντίστοιχες παραδοχές για τη φύση και το χαρακτήρα των μαθηματικών (Χασάπης, 1986).

Η παραδοχή, λοιπόν, ότι τα μαθηματικά ως σχολικό μάθημα αποτελούν προνομιακό πεδίο νοητικής άσκησης υπονοεί μια θεώρηση της μαθηματικής γνώσης ταυτισμένη με το επιστημολογικό πρότυπο της “απολυτοκρατίας” των μαθηματικών (Ernest, 1991). Θεωρεί τα μαθηματικά ως μια γνώση η οποία είναι αμετάβλητη, αδιάψευστη, αντικειμενική και απόλυτη, εξαρτημένη μόνο από τις μαθηματικές παραδοχές της και τους παραδεκτούς κανόνες της τυπικής-παραγωγικής λογικής, άρα ως μια γνώση η οποία είναι ουσιαστικά υπερ-ανθρώπινη, άρα α-κοινωνική και α-χρονική, άρα υπερ-ιστορική, και γι’ αυτό ανεξάρτητη των ηθικών και πολιτισμικών αξιών.

Αναπόφευκτη συνέπεια της παραδοχής αυτής είναι η κατάτμηση μιας σαφώς προκαθορισμένης μαθηματικής γνώσης, της λεγόμενης και «διδακτικής ύλης», σε απλουστευμένες και ιεραρχικά οργανωμένες από το απλό στο σύνθετο διδακτικές ενότητες, με κύριο περιεχόμενο απολύτως βασικές έννοιες, τυποποιημένους κανόνες, τεχνικές ασκήσεις και προβλήματα με μια και μοναδική λύση και η διδασκαλία της έτσι μετασηματισμένης μαθηματικής γνώσης με κύριο στόχο τη επισώρευση αναγκαίων γνώσεων, τη νοητική άσκηση και την ανάπτυξη συγκεκριμένων γνωστικών δεξιοτήτων.

Η διδασκαλία των μαθηματικών, στην περίπτωση αυτή, αποτελεί μια κλιμάκωση νοητικών εμπειριών, που στοχεύουν και υπηρετούν την άσκηση στις λογικές διεργασίες και στην ορθολογική σκέψη, διαταγμένων σε μια αλληλουχία ώστε κάθε εμπειρία να αποτελεί ενδυνάμωση και διεύρυνση της προηγούμενης, ενώ οι έννοιες της επανάληψης και του αυτοματισμού αποτελούν δομικό της στοιχείο.

Αντίστοιχα, η αναφορά αυτής της μαθηματικής γνώσης στην πραγματική ζωή των ανθρώπων γίνεται με δυο παράλληλους και ανεξάρτητους μεταξύ τους μονόδρομους. Από το ένα μέρος οι ορισμένες μαθηματικές έννοιες αναγνωρίζονται στον κόσμο της πραγματικότητας, αποσπώνται, απλοποιούνται και υπόκεινται σε μια νοητική επεξεργασία και από το άλλο οι απλοποιημένες και τυποποιημένες μαθηματικές έννοιες εφαρμόζονται στα πρότυπα τους, τα οποία επίσης ενυπάρχουν ήδη στην πραγματικότητα. Αυτή η διαδικασία «εφαρμογής» των μαθηματικών θεμελιώνεται αποκλειστικά στην παθητική παρατήρηση και αναπτύσσεται ως ένα νοητικό παιχνίδι αναδιοργάνωσης και συστηματοποίησης θεωρητικών εγγραφών, μαθηματικά δεδομένων.

Βασική, όμως, όψη αυτής της θεώρησης της μαθηματικής εκπαίδευσης, η οποία πρέπει εδώ να υπογραμμιστεί, είναι η σχέση την οποία επιβάλλει ανάμεσα στη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο και στη μαθηματική δραστηριότητα και γνώση που αποτελούν τυπικά το αντικείμενο της διδασκαλίας των μαθηματικών. Η σχέση αυτή είναι ουσιαστικά μια πρακτική σχέση χρησιμοποίησης της μαθηματικής γνώσης, η οποία έχει ως κυρίαρχη λειτουργία της, όχι τη γνώση των μαθηματικών, αλλά πρωτίστως τη γνώση κανόνων, προτύπων και πρακτικών που στοχεύουν στη συγκρότηση μιας ειδικής σχέσης των παιδιών με τα μαθηματικά. Αυτό ακριβώς σημαίνουν, εκτός των όσων προαναφέρθηκαν, οι παραδοχές και οι διακηρύξεις, οι οποίες θεωρούν ως πρωταρχικούς στόχους της διδασκαλίας των μαθηματικών στο σχολείο «τη μεθοδική άσκηση στην ορθολογική σκέψη, στην ανάλυση, στην αφαίρεση, στη γενίκευση, στην εφαρμογή, στη κριτική και στις λογικές διεργασίες καθώς και η μύηση στη μαθηματική αποδεικτική διαδικασία» ή «την ανάπτυξη της ικανότητας για ακριβή σύλληψη των εννοιών, των μεγεθών, των ιδιοτήτων και των σχέσεων μεταξύ τους και ιδιαίτερος εκείνων που

είναι απαραίτητες για την κατανόηση και επίλυση πραγματικών προβλημάτων της σύγχρονης ζωής και για την επαφή με τη σύγχρονη τεχνική, οικονομική και κοινωνική πραγματικότητα» και τα συναφή.

Μ' άλλα λόγια οι παραδοχές και οι διακηρύξεις αυτές, θεωρούν ως πρωταρχικό σκοπό της διδασκαλίας των μαθηματικών στο σχολείο την εκμάθηση κανόνων και χειρισμών κατάλληλης χρησιμοποίησης της μαθηματικής γνώσης και των αντικειμένων της. Μέσα από μια τέτοια σχέση της διδασκαλίας των μαθηματικών με το αντικείμενο της προσφέρεται μια γνώση, η οποία είναι πρωταρχικά μια πρακτική γνώση χρησιμοποίησης των μαθηματικών και δευτερευόντως μια γνώση των μαθηματικών καθαυτών. Αυτή άλλωστε μπορεί να θεωρηθεί και η ουσιαστική έννοια του όρου “μαθηματική παιδεία”. Μια μαθηματική γνώση επενδυμένη σε μια πρακτική γνώση χρησιμοποίησης της. Γι' αυτό το λόγο μεταξύ άλλων τα μαθηματικά αποτελούν παραδοσιακά μια βασική συνιστώσα της παιδαγωγικής, δηλαδή της πολιτιστικής χειραγώγησης. Ασκούν στη “σωστή” σκέψη, στη “σωστή” κρίση, στις “σωστές” διαδικασίες αποφάσεων.

Όμως, αυτή η πρακτική σχέση χρησιμοποίησης που συγκροτείται μεταξύ της διδασκαλίας των μαθηματικών και του αντικειμένου της είναι πρωταρχικά μια σχέση ιδεολογικής διαπαιδαγώγησης, που στη βάση ενός καθιερωμένου και καθολικά αποδεκτού γνωστικού αντικειμένου, όπως είναι τα μαθηματικά, εγχαράζει καθορισμένα πρότυπα αναφοράς και πρακτικής συμπεριφοράς απέναντι στη συγκεκριμένη γνώση και δραστηριότητα και γενικότερα απέναντι στις κοινωνικά κυρίαρχες αξίες. Από την οπτική αυτή, η διδασκαλία των μαθηματικών είναι φορέας μιας επιστημονικού χαρακτήρα μαθηματικής γνώσης και ταυτόχρονα μιας ιδεολογίας για την επιστήμη των μαθηματικών και των αποτελεσμάτων της. Μιας ιδεολογίας δηλαδή για την αντιμετώπιση της επιστημονικής γνώσης των μαθηματικών και των αποτελεσμάτων της, που βασίζεται σε μια ορισμένη θεώρηση της θέσης της μαθηματικής πρακτικής στην υπάρχουσα κοινωνική πραγματικότητα και κατά συνέπεια σε μια ορισμένη θεώρηση του ρόλου των ερευνητών μαθηματικών στην παραγωγή και στην αναπαραγωγή των μαθηματικών. Σε τελευταία ανάλυση σε μια ορισμένη θεώρηση του κοινωνικού καταμερισμού της

πνευματικής και χειρωνακτικής εργασίας, που είναι θεώρηση μιας κυρίαρχης ιδεολογίας.

Οι εναλλακτικές θεωρήσεις των μαθηματικών, ως σχολικού μαθήματος, αναδεικνύουν και αντιμετωπίζουν αφενός τη μαθηματική γνώση ως παράγωγο μιας κοινωνικής πρακτικής, η οποία υπόκειται στα, και καθορίζεται από τα, πολιτισμικά πλαίσια ιστορικά δεδομένων κοινωνιών και αφετέρου αναδεικνύουν και προτάσσουν τους μαθητές ως κοινωνικά υποκείμενα, τα οποία δραστηριοποιούνται σε κοινωνικά πλαίσια με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά, ιδιοποιούμενα μέσα από τη δραστηριότητα τους τη μαθηματική γνώση και τις μαθηματικές μορφές σκέψης. Στις θεωρήσεις αυτές, ο κοινωνικός χαρακτήρας της μαθηματικής γνώσης και οι κοινωνικές ορίζουσες της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι δεδομένες, ενώ οι μεταξύ τους διαφοροποιήσεις προκύπτουν πρωτίστως από διαφορετικές θεωρητικές προτεραιότητες και δευτερευόντως από διαφορετικές προσεγγίσεις του χαρακτήρα και των διαδικασιών της μάθησης ή και των στόχων και των πρακτικών της διδασκαλίας των μαθηματικών, οι οποίες βέβαια και στη μια και στην άλλη περίπτωση οδηγούν και σε διαφοροποιημένες ερευνητικές προτεραιότητες.

Οι κοινωνικο-πολιτισμικές προσεγγίσεις επικεντρώνονται στο φαινόμενο της μάθησης, ως διαδικασίας ατομικής ιδιοποίησης των ιστορικά διαμορφωμένων και πολιτισμικά καθορισμένων τύπων σκέψης, νοητικών εργαλείων και επιστημονικών γνώσεων μέσα από κοινωνικά ορισμένες μορφές δραστηριότητας. Από μια οπτική, δηλαδή, κοινωνικής ψυχογένεσης η οποία έχει τη θεωρητική της αφετηρία στις επεξεργασίες του Vygotsky και των επιγόνων του θεωρητικών της δραστηριότητας.

Από το άλλο μέρος, οι πολιτικο-κοινωνικές προσεγγίσεις επικεντρώνονται στη διδασκαλία των μαθηματικών, ως συστατικού στοιχείου των πολιτικών λειτουργιών του σχολείου, από την οπτική του ρόλου της εκπαίδευσης στις διαδικασίες της κοινωνικής αναπαραγωγής και της συμβολής των μαθηματικών στην νομιμοποίηση και αποδοχή ή στην κατανόηση και αμφισβήτηση της κοινωνικής ανισότητας και των επιπτώσεων της.

Γενικεύοντας και αναγκαστικά απλοποιώντας, η προσέγγιση της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών,

- πέρα, αλλά όχι ανεξάρτητα από, το άτομο στο σύνολο των κοινωνικών του σχέσεων,
- πέρα, αλλά όχι ανεξάρτητα από, τις διδακτικές πρακτικές στους κοινωνικούς και πολιτισμικούς παράγοντες διαμόρφωσης τους και
- πέρα, αλλά όχι ανεξάρτητα από, το σχολείο στο κοινωνικό και πολιτικό του πλαίσιο,

αποτελεί την κοινή αφετηρία όλων των εναλλακτικών θεωρήσεων της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Ένα τελικό σχόλιο

Το κοινωνικο-πολιτικό πλαίσιο οργάνωσης και ανάπτυξης των δραστηριοτήτων της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών (το αναλυτικό πρόγραμμα, τα σχολικά βιβλία, το περιεχόμενο και οι μορφές αξιολόγησης, η εκπαίδευση των εκπαιδευτικών κ.α.), όπως και οι διαδικασίες της ατομικής συγκρότησης της ιστορικά αναπτυγμένης και κοινωνικά καθορισμένης μαθηματικής γνώσης και πρακτικής μέσα από τη συμμετοχή των ατόμων στις τυπικά θεσμοθετημένες και άτυπα καθιερωμένες δραστηριότητες της διδασκαλίας των μαθηματικών, αποτελούν θεμελιώδεις διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης με άμεσες και πολύ σημαντικές κοινωνικές συνέπειες, τόσο στο επίπεδο της ζωής των ατόμων όσο και στο επίπεδο της κοινωνίας. Για πρακτικούς, όμως, λόγους η ανάλυση τους δεν μπορεί να συμπεριληφθεί στην παρούσα εισήγηση.

Σε κάθε περίπτωση, ο ρόλος της εκπαίδευσης και κατά συνέπεια και της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι πρωτίστως πολιτικός, αφού αποτελεί συστατικό παράγοντα της διαδικασίας παραγωγής ατόμων για την κάλυψη των αναγκών του κοινωνικού καταμερισμού εργασίας και παράλληλα μηχανισμό αναπαραγωγής και κυρίαρχης ιδεολογίας.

Όλα τα σχολικά μαθήματα συντελούν, το καθένα σε διαφορετικό πεδίο και βαθμό, στην προώθηση των δύο αυτών λειτουργιών της εκπαίδευσης, με το περιεχόμενο, την κατανομή, την οργάνωση, την

παρουσίαση, την αξιολόγηση της αντίστοιχης σχολικής γνώσης και τις διδακτικές πρακτικές που υποβάλλουν.

Αναπτύσσουν δηλαδή στους μαθητές, κάποιες δεξιότητες απαραίτητες για ν' ανταποκριθούν στις απαιτήσεις του υπάρχοντος κοινωνικού καταμερισμού εργασίας και ταυτόχρονα νομιμοποιούν και συγκαλύπτουν αυτόν τον καταμερισμό με επιβολή αντίστοιχης ιδεολογίας. Τα μαθηματικά ως σχολικό μάθημα, όσο κι αν φαντάζουν ουδέτερα δεν εξαιρούνται, πέρα από δεξιότητες, συμβάλλουν στην αναπαραγωγή της κοινωνικής ανισότητας. και στην επιβολή εκείνης της ιδεολογίας, η οποία συγκαλύπτει και νομιμοποιεί την κοινωνικής ανισότητα.

Πρέπει τέλος να σημειωθεί, ότι απέναντι σ' αυτές τις κοινωνικές λειτουργίες της μαθηματικής εκπαίδευσης και στη λογική της έμπρακτης αμφισβήτησης τους έχουν αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια δύο διακριτές αντιδράσεις:

Η πρώτη αντίδραση είναι γνωστή ως «εθνομαθηματικά» και έχει την αφετηρία της στους προβληματισμούς, οι οποίοι αναπτύχθηκαν στη Βραζιλία αρχικά και σε χώρες της Αφρικής στη συνέχεια (D'Ambrosio, 1985, Gerdes, 1996). Αφορμή υπήρξαν οι αρνητικές επιπτώσεις που είχαν στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών, εισαχθέντα από Δυτικές χώρες αναλυτικά προγράμματα, διδακτικό υλικό και μέθοδοι διδασκαλίας τα οποία δεν είχαν καμία απολύτως αναφορά στα πολιτιστικά περιβάλλοντα και στα κοινωνικά δεδομένα των κοινωνιών της Λατινικής Αμερικής και της Αφρικής.

Στην συνέχεια εξελίχθηκαν σε μια εναλλακτική πρόταση μαθηματικής εκπαίδευσης, η οποία επιδιώκει να εντοπίσει και να ενσωματώσει στα σχολικά μαθηματικά ιδέες και πρακτικές αναπτυγμένες σε πολιτισμικές πρακτικές μη Δυτικών κοινοτήτων, όπως είναι η ταπητουργία, η ξυλουργική ή η καλάθοπλεκτική και οι οποίες, παρόλο που δεν έχουν τα τυπικά χαρακτηριστικά των θεσμοθετημένων «Δυτικών» μαθηματικών, είναι μαθηματικές ιδέες οι οποίες μπορεί να αποτελέσουν τη βάση για τη διδασκαλία και τη μάθηση τυπικών μαθηματικών εννοιών (Ζαχάρος & Χασάπης, 1999; Χρονάκη, 2005). Μια εθνομαθηματικού τύπου διδασκαλία βασισμένη σε μαθηματικές

ιδέες προερχόμενες από οικείες στους μαθητές δραστηριότητες, μπορεί να συμβάλλει θετικά όχι μόνο στη μάθηση των μαθηματικών αλλά και στην εθνοτική και πολιτική συνειδητοποίηση των παιδιών.

Ενώ η κίνηση των εθνομαθηματικών αποτελεί μια αντίδραση, η οποία αναπτύσσεται σε μη Δυτικές κοινωνίες ως κριτική στον ενσωματωμένο στην εκπαίδευση πολιτιστικό ιμπεριαλισμό και στην ιδεολογία που τον υποστηρίζει, μια δεύτερη προσέγγιση, γνωστή ως κριτική μαθηματική εκπαίδευση, διαμορφώνεται ως μια αντίδραση η οποία αναπτύσσεται στο εσωτερικό των τεχνολογικά εξελιγμένων Δυτικών κοινωνιών και αντιμετωπίζει κριτικά τις σχέσεις εξουσίας, η οποίες με τη χρήση των μαθηματικών διαμορφώνονται και εφαρμόζονται στην ατομική και κοινωνική καθημερινότητα των ανθρώπων (Frankenstein, 1983, 2005ς Χρονάκη, 2005).

Ως ακροτελεύτιο σχόλιο, μια επιγραμματικά διατυπωμένη θέση του Restivo (1993, σελ. 250):

Η απελευθέρωση μας από τις υπερβαικές, υπερφυσικές και ιδεαλιστικές θεωρήσεις και δυνάμεις αρχίζει όταν η απαίτηση της κοινωνιολογικής θεώρησης αποσπά τη θρησκεία από τους θεολόγους και τους πιστούς και αποκαλύπτει τον πραγματικό χαρακτήρα της. Γίνεται, δε, οριστική απελευθέρωση (για αυτό το στάδιο της ανθρώπινης ιστορίας) όταν η ίδια αυτή απαίτηση αφαιρεί τη νοημοσύνη και τη σκέψη από τα χέρια των φιλόσοφων και των ψυχολόγων. Είναι σ' αυτό το πλαίσιο αναζήτησης, στο οποίο το ευρύτερο ζήτημα της κοινωνιολογικής θεώρησης των μαθηματικών καθίσταται εμφανές.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

- Bloor, D. (1976) *Knowledge and Social Imagery*, Routledge and Kegan Paul, London
- Bos, H. J. M., and Mehrtens, H. (1977) The interactions of mathematics and society in history: some exploratory remarks, *Historia Mathematica*, 4, 7-30
- Collins, R., and Restivo, S. (1983) Robber barons and politicians in mathematics: a conflict model of science, *Canadian Journal of Sociology*, 8, 199-227.

- D'Ambrosio, U. (1985), Ethnomathematics and its Place in the History and Pedagogy of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 5, 44-48.
- Davis, P. J. and Hersh, R.: 1980, *The Mathematical Experience*, Birkhauser, Boston, Ελληνική έκδοση: *Η μαθηματική Εμπειρία*, Εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα.
- Dörfler, W. (2003) Mathematics and mathematics education: Content and people, relation and difference, *Educational Studies in Mathematics*, 54, 147-170.
- Ernst, P. (1991), *The Philosophy of Mathematics Education*, Falmer Press, London.
- Ernest, P. (1998), *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*, SUNY Press, Albany, New York.
- Forman, P. (1971) Weimar culture, casualty, and quantum theory, 1918-1927: adaptation of German physicists and mathematicians to a hostile intellectual environment, *Historical Studies in the Physical Sciences*, 3, 1-115.
- Frankenstein, M. (1983) Critical mathematics education: An application of Paulo Freire's Epistemology, *Journal of Education*, 165 (4), 315-340.
- Frankenstein, M. (2005), Μαθαίνοντας τον κόσμο με τα μαθηματικά: Σκοποί ενός αναλυτικού προγράμματος κριτικής μαθηματικής εκπαίδευσης, στον παρόντα τόμο.
- Gerdes, P. (1996), Ethnomathematics and Mathematics education. Στο A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and C. Laborde (eds.). 1996. *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, 909-944
- Grabiner, J. V. (1974) Is mathematical truth time-dependent?, *American Mathematical Monthly*, 81, 354-365.
- Hodgkin, L. (1976) Politics and physical sciences, *Radical Science Journal*, 4, 29-60.
- Kitcher, P. (1983), *The Nature of Mathematics Knowledge*, Oxford University Press, Oxford.
- Kuba, V. and McDonald, J.L., (1991), What is Mathematics to Children?, *Journal of Mathematical Behaviour*, 10, 105-113.
- Lakatos, I. (1976), *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, Cambridge.

- Ελληνική έκδοση: Lakatos, I. (1996), *Αποδείξεις και Ανασκευές*, Τροχαλία, Αθήνα.
- Latour, B.(1987), *Science in Action*, Harvard University Press, Cambridge, MA.
- MacKenzie, D. (1978) Statistical theory and social interests, *Social Studies of Science*, 8, 35-83.
- Martin, B. (1978) The selective usefulness of game theory, *Social Studies of Science*, 8, 85-110.
- Mehrtens, H. (1987) The social system of mathematics and National Socialism: a survey, *Sociological Inquiry*, 57, 159-182.
- Restivo, S. (1983) *The Social Relations of Physics, Mysticism, and Mathematics*, D. Reidel, Dordrecht.
- Restivo, S. (1992), *Mathematics in Society and History: Sociological Inquiries*, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands.
- Restivo, S. (1993), *The Social Life of Mathematics*. Στο Restivo, Sal, Van Bendegem, J.P. and Fischer, R, (Eds.), *Math Worlds - Philosophical and Social Studies of Mathematics and Mathematics Education*, Albany, State University of New York Press, 247 - 278.
- Roulet, G. (1992), *The Philosophy of Mathematics Education: "What does this mean for the children in the classroom?"*, *Philosophy of Mathematics Education Newsletter*, 6, 8-9.
- Schubring, G. (1981) The conception of pure mathematics as an instrument in the professionalization of mathematics, in: *Social History of Nineteenth Century Mathematics*, ed. H. Mehrtens, H. Bos and I. Schneider, Birkhauser, Boston, pp. 111-134.
- Tymoczko, T. (ed.), (1986), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Birkhauser, Boston.
- Valero, P. (1999). Deliberative mathematics education for social democratization in Latin America. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 99(1), 20-26.
- Wilder, R.L. (1981), *Mathematics as a Cultural System*, Pergamon, Oxford.
- Wittgenstein, L. (1956), *Remarks on the Foundations of Mathematics*, revised edition, MIT Press, Cambridge, 1978.

- Ζαχάρος, Κ. & Χασάπης, Δ. (1999), Εθνο-Μαθηματικά: Κριτική παρουσίαση της ερευνητικής και εκπαιδευτικής προσέγγισης των εθνομαθηματικών, *Αντιπεράδια της Εκπαίδευσης*, 53, 51-55
- Χασάπης, Δ., (1986), Η Οργάνωση του Περιεχομένου ενός Αναλυτικού Προγράμματος Μαθηματικών και οι Υπονοούμενες Αντιλήψεις για τη Γνώση, την Επιστήμη και την Εκπαίδευση, *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, 28, 28-35.
- Χρονάκη, Α. (2005), Η έννοια του κοινωνικού ως 'πολιτισμική-ιστορική' και ως 'πολιτική' στην σύγχρονη μελέτη της μαθηματικής εκπαίδευσης, στον παρόντα τόμο.

Κοινωνική ανισότητα και μαθηματική εκπαίδευση: Απο την αναγνώριση μιας πραγματικότητας στην κατανόηση των όρων δημιουργίας της

Η κληρονομιά του Πλάτωνα: Η μαθηματική εκπαίδευση ως μηχανισμός διάκρισης και στρωματοποίησης σχολικών πληθυσμών

[525b] Προσηκον δὴ τὸ μάθημα ἂν εἴη, ὦ Γλαῦκων, νομοθετῆσαι καὶ πείθειν τοὺς μέλλοντας ἐν τῇ πόλει τῶν μεγίστων [525γ] μεθέξειν ἐπὶ λογιστικὴν ἰέναι καὶ ἀνθάπτεσθαι αὐτῆς μὴ ἰδιωτικῶς, ἀλλ' ἕως ἂν ἐπὶ θέαν τῆς τῶν ἀριθμῶν φύσεως ἀφίκωνται τῇ νοήσει αὐτῇ, οὐκ ὠνῆς οὐδὲ πράσεως χάριν ὡς ἐμπόρους ἢ καπήλους μελετώντας, ἀλλ' ἕνεκα πολέμου τε καὶ αὐτῆς τῆς ψυχῆς ῥαστώνης μεταστροφῆς ἀπὸ γενέσεως ἐπ' ἀλήθειάν τε καὶ οὐσίαν.

«Ἔτσι η σπουδὴ αὐτὴ θα εἶναι κατάλληλη, Γλαῦκων, να την καθιερώσουμε με νόμο και να πείθουμε ὅσους μέλλει να αναλάβουν τα ανώτατα αξιώματα στην πόλη να στραφούν στη σπουδὴ των αριθμῶν και να καταπιαστούν με αὐτὴν ὄχι ερασιτεχνικά ἀλλὰ ἴσαμ' ἐκεῖ που θα φθάσουν – αποκλειστικά διαμέσου τῆς νόησης – στη θέαση τῆς φύσης των αριθμῶν, μελετώντας την ὄχι για να την χρησιμοποιήσουν σαν ἔμποροι και γυρολόγοι σε αγοροπωλησίες ἀλλὰ στον πόλεμο και, ἐπίσης, προς διευκόλυνση τῆς ἰδίας τῆς ψυχῆς να μεταστραφεί ἀπὸ το γίγνεσθαι στην ἀλήθεια και την οὐσία»

Σ' αὐτὸ το ἀπόσπασμα τῆς *Πολιτείας* (ἢ *Περὶ δικαίου*), ἓνα ἀπὸ τα γνωστότερα ἔργα του Πλάτωνα, το ὁποῖο χρονολογεῖται στις ἀρχές του 4^{ου} αἰῶνα πρὶν τὴν ἐποχὴ μας και ἔχει ἀσκήσει μεγάλη ἐπιρροή στη φιλοσοφία, ἀλλὰ και στην πολιτικὴ θεωρία, διατυπώνεται για πρώτη φορά στην ἱστορία μια θέση για τον κοινωνικὸ ρόλο των μαθηματικῶν, ἡ ὁποία υλοποιεῖται πολλοὺς αἰῶνες ἀργότερα, ὅταν στις ἀρχές του 18^{ου} αἰῶνα τῆς ἐποχῆς μας οργανώνονται τα πρῶτα σχολεῖα στη μορφή που ξέρουμε σήμερα.

Στα σχολεία αυτά, τα μαθηματικά καθιερώνονται ως ένα από τα βασικά μαθήματα και μαζί με τα λατινικά διαχωρίζουν και ιεραρχούν τους μαθητές σε κατηγορίες ως προς την σχολική τους επίδοση και σε ένα δεύτερο επίπεδο τα μαθηματικά ως προς τις νοητικές τους δυνατότητες και τα λατινικά ως προς το μορφωτικό τους επίπεδο.

Ο θείος Πλάτων είναι και στο σημείο αυτό πρωτοπόρος

[526b] Τί δέ; Τόδε ἤδη ἐπεσκέψω, ὡς οἱ τε φύσει λογιστικοὶ εἰς πάντα τὰ μαθήματα ὡς ἔπος εἰπεῖν ὄξεις φύονται, οἱ τε βραδεῖς, ἂν ἐν τούτῳ παιδευθῶσιν και γυμνάσωνται, κἄν μηδὲν ἄλλο οφελῆθῶσιν, ὁμως εἰς γε το ὄξύτεροι αυτοὶ αὐτῶν γίγνεσθαι πάντες ἐπιδιδόασιν

Και ἀκόμη' ἔχεις προσέξει και τούτο, ὅτι δηλαδή ὅσοι ἔχουν ταλέντο στους αριθμητικούς υπολογισμούς παρουσιάζουν μια φυσική ευχέρεια σχεδόν σε ὅλες τις μαθήσεις, επίσης ὅτι και ὅσοι ἔχουν ἀργοκίνητα μυαλά, ἀν εκπαιδευτοῦν και ἀσκηθοῦν σε αὐτό το πράγμα, ἔστω και ἀν δὲν ἀντλήσουν κανένα ἄλλο ὄφελος, πάντως ὅλοι τους πραγματοποιοῦν κάποια πρόοδο ὡστε τουλάχιστον να γίνεται πιο κοφτερό το μυαλό τους;

Σε κάθε περίπτωση, βέβαια, οι κατηγορίες στις οποίες τα μαθηματικά διαχωρίζουν και ιεραρχούν τους μαθητές αντιστοιχούν σε κοινωνικές διαστρωματώσεις της προέλευσης ἢ της μελλοντικής κοινωνικής ἔνταξης των παιδιῶν.

Μια παρένθεση για μια δεύτερη διάκριση, ἡ οποία διατρέχει και διαπλέκεται με τις κοινωνικές διακρίσεις που δημιουργοῦν ἢ ἀναπαράγουν τα μαθηματικά εἶναι ἐδῶ ἀναγκαία.

Παράλληλα με την ἀνάπτυξη του βιομηχανικοῦ καπιταλισμοῦ και ἐξαιτίας της σημειώνεται στην Ἐυρώπη ἀπὸ το 1750 μέχρι το 1850 μια ἔκρηξη ἀναγκῶν για γνώσεις και πρακτικές ἐφαρμογές των μαθηματικῶν και των φυσικῶν επιστημῶν (Rogers, 1998). Οι γνώσεις και οι ἐφαρμογές αὐτές, ριζικά διαφορετικές ἀπὸ τις θεωρητικοῦ χαρακτήρα μαθηματικές και επιστημονικές γνώσεις του μεσαιῶνα, εἶναι γνώσεις ἐφαρμοσίμες, ἀπόλυτα προσανατολισμένες στην ἐπίλυση τεχνικῶν προβλημάτων και στην κάλυψη των ἀμεσῶν ἀναγκῶν της βιομηχανικῆς ἀνάπτυξης. Δημιουργεῖται, ὡς συνέπεια, μια ζήτηση για γενίκευση της μαθηματικῆς ἐκπαίδευσης, ἡ οποία καλύπτεται ἀπὸ το ὀλοένα και ἀναπτυσσόμενο δημόσιο εκπαιδευτικό σύστημα, ἐνῶ τα

πανεπιστήμια τα οποία διαχρονικά αποτελούσαν τους θεματοφύλακες της μαθηματικής εκπαίδευσης για τους γόνους των ανώτερων τάξεων δεν ακολούθησαν στην πλειονότητα τους αυτή την αλλαγή στα περιεχόμενα των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών, ούτε απάλειψαν τον αριστοκρατικό χαρακτήρα στην πρόσβαση τους. Η διάκριση που δημιουργήθηκε εκείνη την εποχή ανάμεσα στα λεγόμενα θεωρητικά μαθηματικά των πανεπιστημίων και στα εφαρμοσμένα μαθηματικά των σχολείων και των πολυτεχνικών σχολών παρήγαγε μια αντίστοιχη ιεραρχική διάκριση ανάμεσα στα μαθηματικά για τους λίγους και στα μαθηματικά για τους πολλούς. Μια διάκριση, η οποία ενδημεί και στη μαθηματική εκπαίδευση εισάγοντας μια αντίστοιχη ιεραρχία, ανεξάρτητα από τους όρους περιγραφής της. Μαθηματικά για πανεπιστημιακές σπουδές και μαθηματικά για τις ανάγκες της επαγγελματικής πρακτικής.

Πολύ σύντομα ο ρόλος των μαθηματικών ως κοινωνικού φίλτρου νομιμοποιείται επιστημονικά συσχετιζόμενος με την ατομική νοημοσύνη και άλλες ψυχομετρικές κατασκευές και η ευχέρεια μάθησης των μαθηματικών, άρα και η αντίστοιχη σχολική επίδοση, αποδίδεται σε έμφυτες προδιαθέσεις ή νοητικές δυνατότητες. Τα μαθηματικά «τα παίρνεις ή δεν τα παίρνεις» και η σχολική σου επίδοση στα μαθηματικά συναρτάται με το αν «σου κόβει ή δεν σου κόβει». Αυτές και άλλες παρόμοιες μεταφορικές εκφράσεις στον καθημερινό λόγο δηλώνουν την κοινωνική αποδοχή αυτών των θεωριών για τη μάθηση των μαθηματικών και την αντίστοιχη σχολική επίδοση.

Οι απόψεις αυτές εξακολουθούν να υιοθετούνται, να αναπαράγονται και να εκφράζονται ακόμα και σήμερα από εκπαιδευτικούς, γονιούς και μαθητές, παρά τις θεωρητικές αναλύσεις και τις ερευνητικές διαπιστώσεις της κοινωνιολογίας της εκπαίδευσης, οι οποίες ήδη από τις αρχές της δεκαετίας του 1960 έχουν υπογραμμίσει το ρόλο των μαθηματικών στην παραγωγή και στην αναπαραγωγή κοινωνικών ανισοτήτων.

Ο Volmink (1994) σημειώνει ότι *«τα μαθηματικά περισσότερο από κάθε άλλο μάθημα έχουν αναλάβει το ρόλο του «αντικειμενικού» κριτή για να αποφασίζεται ποιος σε μια κοινωνία «μπορεί» και ποιος «δεν μπορεί».*

Λειτουργούν επομένως ως ο θυροφύλακας της συμμετοχής στις διαδικασίες λήψης αποφάσεων σε μια κοινωνία» (σ. 51).

Ή με τις διατυπώσεις του Μπουρντιέ, ο οποίος ασχολήθηκε ιδιαίτερα με τις λειτουργίες της κοινωνικής αναπαραγωγής του σχολείου και στο σχολείο:

Συχνά με μια ψυχολογική βία την οποία τίποτα δεν μπορεί να εξασθενήσει το σχολείο διατυπώνει τις τελικές του κρίσεις και ετυμηγορίες, απέναντι στις οποίες δεν υπάρχει καμία δυνατότητα προσφυγής, με τις οποίες όλοι οι μαθητές κατατάσσονται σε μια μοναδική ιεραρχία όλων των μορφών αριστείας, η οποία σήμερα κυριαρχείται από ένα μοναδικό μάθημα, τα μαθηματικά» (Bourdieu, 1989, σ. 28).

Με τις διαπιστώσεις αυτές δεδομένες πως αιτιολογείται η διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο;

Μερικοί από τους πολλούς λόγους για τους οποίους διδάσκονται τα μαθηματικά στα σχολεία από τις αρχές του 19^{ου} αιώνα μέχρι σήμερα και οι οποίοι διατυπώνονται συνήθως ως σκοποί και στόχοι των αναλυτικών προγραμμάτων στις διάφορες βαθμίδες της εκπαίδευσης συνοψίζονται από τον Davis (1993) ως εξής:

«τα μαθηματικά διδάσκονται γιατί πρέπει να διδάσκονται, γιατί είναι όμορφα, γιατί αποκαλύπτουν το θείο, γιατί μας βοηθούν να σκεφτόμαστε λογικά, γιατί είναι η γλώσσα των επιστημών και μας βοηθούν να κατανοούμε και να αποκαλύπτουμε τον κόσμο, γιατί μας βοηθούν να ασκήσουμε ένα επάγγελμα είτε άμεσα σε εκείνους τους κλάδους των κοινωνικών και φυσικών επιστημών που απαιτούν μαθηματικές γνώσεις είτε έμμεσα αφού τα μαθηματικά λειτουργούν ως κοινωνικό φίλτρο δημιουργώντας συγκεκριμένες επαγγελματικές προοπτικές σε εκείνους που μπορούν να μάθουν μαθηματικά. Τα μαθηματικά διδάσκονται, επίσης, για να αναπαράγουν τους μαθηματικούς ερευνητές και εκπαιδευτικούς» (σ. 190).

Η δεκαετία του '60: Η κοινωνιολογία της εκπαίδευσης και η α-κοινωνική εξέλιξη της μαθηματικής εκπαίδευσης

Η δεκαετία του 1960 χαρακτηρίστηκε από την άνοδο των ριζοσπαστικών κινημάτων, τα οποία έφεραν στο επίκεντρο της προβληματικής το ρόλο της εκπαίδευσης στην αναπαραγωγή των κοινωνικών ανισοτήτων, αναδεικνύοντας με ιδιαίτερη έμφαση, μεταξύ άλλων, το ζήτημα της ανισότητας των ευκαιριών τις οποίες το σχολικό σύστημα παρείχε σε διάφορες κοινωνικές, φυλετικές ή εθνοτικές ομάδες. Ως αποτέλεσμα θεωρητικών προβληματισμών και εμπειρικών διερευνήσεων συγκροτείται η κοινωνιολογία της εκπαίδευσης, ως διακριτός επιστημονικός κλάδος, η οποία εκείνη την εποχή στρέφει το ενδιαφέρον της επιστημονικής έρευνας στο φαινόμενο της σχολικής αποτυχίας που πλήττει ορισμένα τμήματα του μαθητικού δυναμικού. Μαζικά σε όλες τις χώρες οι έρευνες διαπιστώνουν πως η καλή βαθμολογία, η επιτυχία στις εξετάσεις, η επιλογή του γενικού δευτεροβάθμιου σχολείου, η κατάληψη θέσεων σπουδών που εξασφαλίζουν επαγγέλματα κύρους και υψηλών οικονομικών απολαβών χαρακτηρίζουν τη σχολική φοίτηση παιδιών με προέλευση από οικογένειες μεσοαστών και μορφωμένων, ενώ αντίθετα η χαμηλή επίδοση, η κακή βαθμολογία, η εγκατάλειψη του σχολείου, η απουσία ενδιαφέροντος για την εκπαίδευση, οι χαμηλές προσδοκίες για το σχολικό μέλλον χαρακτηρίζουν μαζικά χαρακτηρίζουν παιδιά με προέλευση από οικογένειες εργατών και αγροτών με αποτέλεσμα να μη φτάνουν στα πανεπιστήμια παρά σε ποσοστά στατιστικά μη σημαντικά (Φραγκουδάκη, 1985). Παράλληλα, τεκμηριώνεται η διαπίστωση ότι η τυπική προσφορά ίσων ευκαιριών εκπαίδευσης («δωρεάν παιδεία», παράκαμψη οικονομικών εμποδίων, προσφορά κτιρίων, υλικού, δασκάλων) δεν αίρει τις κοινωνικές ανισότητες του εκπαιδευτικού συστήματος.

Ενώ συμβαίνουν όλα αυτά, οι παράγοντες που διαμορφώνουν τη μαθηματική εκπαίδευση, φορείς και προσωπικότητες, διαπιστώνουν ότι το πρόβλημα σχολικών μαθηματικών εντοπίζεται στην αναντιστοιχία του περιεχομένου των αναλυτικών προγραμμάτων, αφενός με την ανάπτυξη των μαθηματικών, αφετέρου με τις ανάγκες της τεχνολογικής και οικονομικής εξέλιξης της εποχής. Στη λογική αυτή αναπτύσσεται το κίνημα των «νέων μαθηματικών» υπό την αιγίδα

του National Council of Teachers of Mathematics και άλλων φορέων και ομάδων των ΗΠΑ, το οποίο ενισχύεται και διαδίδεται σε πολλές χώρες της Ευρώπης και της Ασίας από τον ΟΟΣΑ, ως συμβολή στην οικονομική τους ανάπτυξη. Τα αναλυτικά προγράμματα μαθηματικών της εποχής δίνουν έμφαση στη διδασκαλία αφηρημένων μαθηματικών εννοιών ήδη από το Δημοτικό σχολείο στο οποίο εισάγονται στοιχεία της θεωρίας συνόλων σε μια λογική κατανόηση τυπικών μαθηματικών δομών, όπως είναι για παράδειγμα οι διμελείς σχέσεις, και μαθηματικών διαδικασιών, όπως για παράδειγμα η απόδειξη. Η ψυχολογική βάση για την προσέγγιση της μάθησης και αντίστοιχα της διδασκαλίας των μαθηματικών παρέχεται από τις θεωρίες του Πιαζέ και της σχολής της Γενεύης για τη νοητική συγκρότηση και τη γνωστική εξέλιξη του ατόμου, οι οποίες παραλληλίζουν τις δομές οργάνωσης των μαθηματικών με τις νοητικές δομές των ατόμων. Αποτέλεσμα, ένα ακόμα βήμα στην απόσπαση των σχολικών μαθηματικών από τον κόσμο της καθημερινής εμπειρίας των παιδιών και μια παρά πέρα διεύρυνση των ανισοτήτων πρόσβασης στη μαθηματική γνώση για τα παιδιά των ήδη μη ευνοημένων από το σχολείο κοινωνικών ομάδων.

Τα «νέα μαθηματικά» εισάγονται στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα με την εκπαιδευτική μεταρρύθμιση του 1964, η οποία ιδεολογικά ανάγει την εκπαίδευση σε κυρίαρχο παράγοντα της οικονομικής ανάπτυξης της χώρας και οργανωτικά διαμορφώνει ένα σχολικό δίκτυο κοινωνικής επιλογής και διαφοροποίησης του μαθητικού πληθυσμού, διακρίνοντας τη μέση εκπαίδευση σε δύο κύκλους (γυμνάσιο και λύκειο) με δύο προσανατολισμούς (γενικής παιδείας και τεχνικό – επαγγελματικής εκπαίδευσης).

Είναι μια κληρονομιά που σηματοδοτεί μέχρι σήμερα τους στόχους και καθορίζει το περιεχόμενο της σχολικής εκπαίδευσης στη χώρα μας.

Στις αρχές της επόμενης δεκαετίας του 1970, και ενώ έχουν ήδη εκδηλωθεί σοβαρές ενστάσεις, η μεταρρύθμιση των «νέων μαθηματικών» εγκαταλείπεται και στο επίκεντρο του προβληματισμού της μαθηματικής εκπαίδευσης τίθενται οι βασικές αριθμητικές και γεωμετρικές δεξιότητες (μια προσέγγιση που καταγράφηκε ως κίνηση «back to basics – πίσω στα βασικά») και ο προβληματισμός για τον

κοινωνικό ρόλο των μαθηματικών περιχαρακώνεται, τώρα, στην αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας των μαθηματικών από την οπτική, όχι των κοινωνικών ανισοτήτων, αλλά του εφοδιασμού των μαθητών και μαθητριών με τις κοινωνικά αναγκαίες μαθηματικές δεξιότητες, οι οποίες θεωρητικά αποτελούν αναγκαίες προϋποθέσεις για την ισότιμη συμμετοχή τους στην κοινωνική και πολιτική ζωή.

Όταν τα εκπαιδευτικά αδιέξοδα, αλλά και τα περιορισμένα θεωρητικά και ερευνητικά όρια, και αυτής της προσέγγισης στον κοινωνικό ρόλο των σχολικών μαθηματικών κατέστησαν εμφανή, στις αρχές της δεκαετίας του 1980, υποδείχθηκε ως λύση - πάλι με πρωτοβουλία του National Council of Teachers of Mathematics των ΗΠΑ - η οργάνωση της μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών με άξονα την «επίλυση προβλημάτων» συνδυασμένη με νέες εκπαιδευτικές μεθόδους βασισμένες στον ατομικό εποικοδομητισμό (constructivism) και την αξιοποίηση των τεχνολογιών της πληροφορικής. Η επίλυση προβλημάτων ως οργανωτική αρχή των σχολικών μαθηματικών, ήδη διατυπωμένη από τη δεκαετία του 1950 με το βιβλίο του Polya «Πώς να το λύσω» (1954), επανέρχεται και περιχαρακώνει για μια ακόμα φορά τον προβληματισμό για τους στόχους και το ρόλο των σχολικών μαθηματικών στην ανάπτυξη ατομικών δεξιοτήτων, οι οποίες έχουν αναμφίβολα κοινωνικό αντίκρισμα, αλλά δεν καθορίζουν τις εκπαιδευτικές και επαγγελματικές διαδρομές των μαθητών και των μαθητριών και τις θέσεις τους στην κοινωνική ιεραρχία.

Στη λογική αυτή αναπτύσσεται από το NCTM και δημοσιοποιείται το 1987 ένα λεπτομερές σύστημα μαθησιακών αποτελεσμάτων, τα οποία οφείλει να επιδιώκει η διδασκαλία των μαθηματικών στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση, υπό τον τίτλο «Κριτήρια Αναλυτικού Προγράμματος και Αξιολόγησης Σχολικών Μαθηματικών» (Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics). Τα κριτήρια αυτά αποτελούν περιγραφές μαθηματικών ικανοτήτων, τις οποίες θα πρέπει να έχουν αναπτύξει οι μαθητές και οι μαθήτριες σε καθορισμένες χρονικές στιγμές της σχολικής τους διαδρομής, ως αποτέλεσμα της διδασκαλίας των μαθηματικών, χωρίς όμως να προσδιορίζουν ταυτόχρονα το αντίστοιχο περιεχόμενο αυτής της διδασκαλίας. Με τον τρόπο αυτό εξατομικεύεται η ευθύνη, όχι μόνο της μάθησης, αλλά και της διδασκαλίας των μαθηματικών στο σχολείο.

Η «κοινωνιολογική στροφή» της μαθηματικής εκπαίδευσης και οι αντιφάσεις της: Η βελόνα και η αναζήτηση της

Στις αρχές της δεκαετίας του 2000 σημειώνεται μια «κοινωνική στροφή», όπως αποκλήθηκε χαρακτηριστικά από τον Lerman (2000), στη θεωρητική ανάλυση και στην εμπειρική διερεύνηση του ρόλου της διδασκαλίας των μαθηματικών και των επιπτώσεων της στην παραγωγή και αναπαραγωγή κοινωνικών διακρίσεων και ιεραρχιών, η οποία θέτει ως αφετηρία της προβληματικής τη θέση ότι οι ανθρώπινες λειτουργίες της νόησης και της παραγωγής νοημάτων είναι προϊόντα των κοινωνικών δραστηριοτήτων στις οποίες τα άτομα μετέχουν και δρουν. Κατά το Lerman, οι προβληματισμοί που οδήγησαν στην εξέλιξη αυτή προήλθαν από ερευνητικές διαπιστώσεις και προβληματισμούς, οι οποίοι αναπτύχθηκαν τα προηγούμενα χρόνια στην ανθρωπολογία (από την Lave για παράδειγμα), στην κοινωνιολογία (από την Walkerdine για παράδειγμα) και στην πολιτισμική ψυχολογία (από την Nunes για παράδειγμα), οι οποίες ανέδειξαν τον κυρίαρχο ρόλο που διαδραματίζουν συγκεκριμένες κοινωνικές πρακτικές στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης.

Η κοινωνική αυτή στροφή της μαθηματικής εκπαίδευσης διαμορφώθηκε από, και διαμόρφωσε δύο διακριτές θεωρητικές και ερευνητικές προσεγγίσεις στη σχέση της μαθηματικής εκπαίδευσης με τις κοινωνικές δομές και αντίστοιχα στο ρόλο των μαθηματικών στην παραγωγή και αναπαραγωγή κοινωνικών ιεραρχήσεων και ανισοτήτων.

Μια πρώτη προσέγγιση, η οποία φαίνεται να κυριαρχεί σήμερα και συνήθως χαρακτηρίζεται ως «κοινωνικο-πολιτισμική», αναγνωρίζει τη σχέση σχολικών μαθηματικών και κοινωνικών διακρίσεων και προτείνει μια πληρέστερη διερεύνηση και κατανόηση των διαδικασιών μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών μέσα από τις οποίες δημιουργούνται ή αναπαράγονται ανισότητες, οι οποίες ανάγονται σε ή προκαλούν κοινωνικές ή άλλου τύπου διαφοροποιήσεις των μαθητών και μαθητριών.

Για την προσέγγιση αυτή, ο κοινωνικός ρόλος των μαθηματικών καθορίζεται από τις διδακτικές πρακτικές και τα μέσα υλοποίησής τους, η σχέση των οποίων όμως με τις κοινωνικές δομές μέσα στις οποίες εντάσσονται και αναπτύσσονται οι εκπαιδευτικές λειτουργίες δεν αποτελεί αντικείμενο προβληματισμού. Ως αποτέλεσμα, παρά την κοινωνιολογική αφετηρία της, η προσέγγιση αυτή διαμορφώνει μια «τεχνική» οπτική, η οποία αντικαθιστά τις κοινωνικές διαδικασίες της εκπαίδευσης με τις ατομικές διεργασίες της μάθησης. Αφαιρώντας από το προσκήνιο του προβληματισμού τις κοινωνικές σχέσεις και μετατρέποντας τους μαθητές και τις μαθήτριες από κοινωνικά όντα σε μανθάνοντα υποκείμενα, των οποίων ενδιαφέρουν μόνον οι νοητικές διεργασίες μάθησης των μαθηματικών, ουδετεροποιεί τελικά τη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο και ανάγει τα προβλήματα της μαθηματικής εκπαίδευσης σε προβλήματα μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών, των οποίων η επίλυση έγκειται πρωτίστως στην ανάπτυξη αποτελεσματικών διδακτικών τεχνικών και μέσων (Valero, 2004). Πρόκειται για ένα φαινόμενο που έχει επιτυχώς αποκληθεί «μαθησιοποίηση» της εκπαίδευσης (Biesta, 2005) και αποτελεί αντανάκλαση μια γενικότερης κυρίαρχης τάσης να αναγνωρίζονται και να περιγράφονται τα κοινωνικά προβλήματα, αλλά να αντιμετωπίζονται ως προβλήματα τεχνικά ή διαχειριστικά.

Σε αντιδιαστολή με την προσέγγιση αυτή, μια δεύτερη προσέγγιση, η οποία χαρακτηρίζεται ως «κριτική», θέτει στο επίκεντρο της τη συμβολή των σχολικών μαθηματικών στην παραγωγή και αναπαραγωγή κοινωνικών διακρίσεων, αλλά θεωρεί ότι αποτελεί ένα από τα συμπτώματα της ταξικής κοινωνίας και των μηχανισμών αναπαραγωγής της, μεταξύ των οποίων το σχολείο κατέχει πρωταγωνιστικό ρόλο. Η αλλαγή του κοινωνικού ρόλου των μαθηματικών αποτελεί, επομένως, στοιχείο και συνέπεια μια ευρύτερης κοινωνικής αλλαγής, στην οποία μπορεί να συμβάλλει και η διδασκαλία των μαθηματικών ενδυναμώνοντας πολιτικά και ενισχύοντας την ανάπτυξη μιας «πολιτικής συνείδησης» των μαθητών και μαθητριών του σχολείου αξιοποιώντας τη μαθηματική γνώση, τις μαθηματικές διαδικασίες και τις εφαρμογές τους στην κατανόηση και ερμηνεία της κοινωνικής πραγματικότητας. Για τους τρόπους αξιοποίησης των μαθηματικών στην κατανόηση και ερμηνεία της πραγματικότητας έχουν αναπτυχθεί στο πλαίσιο της προσέγγισης

αυτής διάφορες θεωρητικές οπτικές και εκπαιδευτικές προτάσεις από τα βασισμένα στις αναλύσεις του Φρέιρε «κριτικά μαθηματικά» μέχρι τις βασισμένες στην κριτική φιλοσοφία προτάσεις της ενδυνάμωσης της ανθρώπινης σκέψης για την κατανόηση του κόσμου μέσα από τα μαθηματικά (Skovsmose & Valero, 2008).

Αποδίδοντας στη μαθηματική εκπαίδευση έναν πρωτίστως πολιτικό ρόλο, οι προσεγγίσεις αυτές είτε υποβαθμίζουν πλήρως τις ατομικές όψεις της μάθησης είτε εργαλειοποιούν τα μαθηματικά αναθέτοντας στη μαθηματική εκπαίδευση ένα ρόλο κριτικής κοινωνικοποίησης των παιδιών. Κυρίως, όμως, και παρά το γεγονός ότι αναδεικνύουν τον ρόλο των μαθηματικών στην παραγωγή και αναπαραγωγή των κοινωνικών ιεραρχήσεων, διακρίσεων και ανισοτήτων, όπως και στη νομιμοποίηση τους, εντοπίζουν τους γενεσιουργούς παράγοντες αυτού του ρόλου στις λειτουργίες που επιτελούν τα μαθηματικά στις σύγχρονες κοινωνίες οργανώνοντας τη διακυβέρνηση τους, χωρίς παράλληλα να εντοπίζουν τις διαδικασίες μέσα από τις οποίες τα άτομα αποδέχονται αυτό το ρόλο των μαθηματικών και συμμετέχουν στην επιτέλεση του.

Όπως αφηγείται ένα ανέκδοτο, ένας άνδρας ψάχνει εντατικά στο καθιστικό του σπιτιού του μια χαμένη βελόνα. Η γυναίκα του τον παρατηρεί ξαφνιασμένη για αρκετή ώρα και κάποια στιγμή τον ρωτάει «μα αφού είπες νωρίτερα ότι η βελόνα σου έπεσε από τα χέρια ενώ ήσουν κουζίνα γιατί ψάχνεις να την βρεις στο καθιστικό;» «Μα εδώ έχει φως, στην κουζίνα είναι σκοτεινά» ήταν η απάντηση του άνδρα.

Νομίζω ότι και η μια και η άλλη προσέγγιση αναζητούν τη χαμένη βελόνα του κοινωνικού ρόλου της μαθηματικής εκπαίδευσης εκεί που υπάρχει φως και όχι εκεί που χάθηκε η βελόνα.

Υπάρχουν, βέβαια, πάντα και οι οπτικές, οι οποίες δεν αντιμετωπίζουν τέτοια διλλήματα, αφού δεν αναγνωρίζουν κανένα συσχετισμό ανάμεσα στην επίδοση των μαθητών και των μαθητριών στα μαθηματικά του σχολείου και στις κοινωνικές ιεραρχήσεις και ανισότητες, τις οποίες θεωρούν ως φυσικό αποτέλεσμα των διαφορετικών ικανοτήτων και δυνατοτήτων, άρα της αξίας, των ατόμων. Στη βάση αυτή οι διακρίσεις και οι αποκλεισμοί που επιβάλλουν τα σχολικά μαθηματικά αντιμετωπίζονται ως μια νομοτελειακή διαδικασία «κοινωνικής

επιλογής». Οι οπτικές αυτές, όμως, παρόλο που εκδηλώνονται σε πολλές από τις καθημερινές πρακτικές των δασκάλων, αλλά και στις σχέσεις πολλών μαθητών και μαθητριών με τα μαθηματικά δεν ενδιαφέρουν την παρούσα συζήτηση.

Από την αναγνώριση μιας πραγματικότητας στην κατανόηση των όρων δημιουργίας της

Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι ο ρόλος των μαθηματικών στις σύγχρονες κοινωνίες είναι θεμελιωτικός, δεδομένου ότι αποτελούν τη βάση της επιστημονικής και τεχνολογικής τους υπερδομής. Όπως και δεν υπάρχει αμφιβολία ότι οι σύγχρονες κοινωνίες χαρακτηρίζονται από ιεραρχικές διακρίσεις και δομικές ανισότητες μεταξύ των ατόμων και των ομάδων που τις συγκροτούν. Η μαθηματική εκπαίδευση διαδραματίζει έναν καθοριστικό ρόλο στη διατήρηση και στην αναπαραγωγή των κοινωνικών διακρίσεων και ανισοτήτων, όπως και στην νομιμοποίηση τους, μέσα από τη εισαγωγή ή τον αποκλεισμό των παιδιών από τη μαθηματική πρακτική και τη μαθηματική γνώση. Το ζήτημα, επομένως, είναι να αναδείξουμε αυτές τις διαδικασίες αποκλεισμού και να οριοθετήσουμε το πεδίο της μαθηματικής εκπαίδευσης μέσα στο οποίο αναπτύσσονται, υποδεικνύοντας παράλληλα τα κοινωνικά υποκείμενα τα οποία εμπλέκονται ή υφίστανται αυτές τις διαδικασίες αποκλεισμού. Για το σκοπό αυτό απαιτείται μια προσέγγιση, η οποία θα συνδυάζει τη θεώρηση της κοινωνικής δομής στο μακρο-επίπεδο, με τις πρακτικές της μαθηματικής εκπαίδευσης και τις δράσεις των ατόμων στο μικρο-επίπεδο του σχολείου και μια τέτοια προσέγγιση μπορεί, κατά τη γνώμη μου, να εκκινά από τη θεωρία του Μπουρντιέ για την κοινωνική πρακτική και να οικοδομείται στις βασικές έννοιες της θεωρίας αυτής.

Για παράδειγμα και πολύ σχηματικά, η έννοια του *habitus* (η κατά λέξη ελληνική μετάφραση είναι «έξη», αλλά το νόημα της στη θεωρία του Μπουρντιέ είναι ευρύτερο και πρωτίστως κοινωνικό και όχι ψυχολογικό) ορίζει τον υποκειμενικό τομέα της κοινωνικής πραγματικότητας, ως σύνολο των προδιαθέσεων, οι οποίες καθοδηγούν τα άτομα στην καθημερινή τους ζωή, προσανατολίζουν τις πράξεις

τους, παρέχουν μια αίσθηση καταλληλότητας και την απαραίτητη αίσθηση πρακτικής. Οι προδιαθέσεις αυτές, οι οποίες αντανάκλουν τις κοινωνικές συνθήκες υπό τις οποίες αποκτήθηκαν, ενεργοποιούν πρακτικές, αντιλήψεις, στάσεις των ατόμων σε ένα πεδίο πρακτικής και γι' αυτό εμφανίζονται σχετικά ομοιογενείς σε συγκεκριμένες ομάδες ατόμων ή κοινωνικές τάξεις, καθορίζοντας αντίστοιχα και παρόμοιες συμπεριφορές. Η έξη, δηλαδή, είναι ένας τρόπος λειτουργίας των ατόμων, ο οποίος στην πράξη ακολουθεί κάποιους κανόνες, χωρίς όμως οι κανόνες αυτοί να είναι σαφώς ορισμένες αρχές λειτουργίας. Αποτελούν περισσότερο μια «αίσθηση πρακτικής», κατά την έκφραση του Μπουρντιέ, η οποία καθοδηγεί τις πράξεις των ατόμων σε συγκεκριμένες περιστάσεις, χωρίς να υπάρχει ανάγκη να αποτελεί θέμα σκέψης το τι πρέπει να γίνει ή το έγινε κάθε φορά (Bourdieu, 2006). Η έξη και η αίσθηση πρακτικής που εδώ μας ενδιαφέρουν αναφέρονται στους εκπαιδευτικούς, που διδάσκουν μαθηματικά στο σχολείο, αλλά και στους μαθητές και στις μαθήτριες τους, οι οποίοι εσωτερικοποιούν συγκεκριμένες πρακτικές και αναπτύσσουν συγκεκριμένες σχέσεις με τα μαθηματικά που διδάσκονται.

Η έξη δεν είναι μια αυθύπαρκτη κατάσταση, αλλά υπάρχει μέσα σε ένα «πεδίο», το οποίο αποτελεί περιοχή του κοινωνικού επιπέδου και μέσα στο οποίο η έξη δρα και επανα-διαμορφώνεται από τις εμπειρίες της δράσης. Σύμφωνα με τον Μπουρντιέ, το «πεδίο» είναι ένας οργανωμένος κοινωνικός χώρος, σχετικά αυτόνομος από την κοινωνική δομή εντός της οποίας υπάρχει, ένας χώρος με τους δικούς του κανόνες, τα δικά του σχήματα ιεραρχίας, τις δικές του τεχνικές άσκησης εξουσίας, τις δικές του νομιμοποιημένες απόψεις και τα λοιπά, μέσα στον οποίο τα άτομα που δραστηριοποιούνται αναπτύσσουν περίπλοκες κοινωνικές σχέσεις και αντιπαραθέσεις, έμμεσες και άμεσες. Στην περίπτωση μας το πεδίο είναι η διδασκαλία των μαθηματικών στο θεσμοθετημένο πλαίσιο του σχολείου.

Η έξη και το πεδίο υπάρχουν μόνο σε αλληλοσυσχέτιση και συναρτώνται στενά με μια άλλη έννοια του Μπουρντιέ, το *habitat* (σε ελληνική, αλλά μη κυριολεκτική, απόδοση το περιβάλλον), το οποίο αναφέρεται στο φυσικό και κοινωνικό χώρο μέσα στον οποίο

εντάσσονται και δρουν οι φορείς της έξης και στην περίπτωση μας οι μαθηματικοί-εκπαιδευτικοί.

Οι εκπαιδευτικοί και οι μαθητές και μαθήτριες τους, ενταγμένοι στο χώρο του σχολείου και δραστηριοποιούμενοι στο πεδίο της διδασκαλίας των μαθηματικών εναρμονίζουν τις προδιαθέσεις τους και προσαρμόζουν τις πρακτικές τους με τις κυρίαρχες στο περιβάλλον και στο πεδίο αυτό προδιαθέσεις και πρακτικές ή διαφοροποιούνται από αυτές, ανάλογα με τις κοινωνικές θέσεις των ατόμων που εμπλέκονται στη λειτουργία του σχολείου και στη διδασκαλία των μαθηματικών, καθώς και τις επικρατούσες στο περιβάλλον τους και στο πεδίο κοινωνικές σχέσεις και σχέσεις εξουσίας. Ως αποτέλεσμα, το πεδίο εντός του συγκεκριμένου περιβάλλοντος διαμορφώνει μια έξη, η οποία με τη σειρά της διαμορφώνει το πεδίο και σύμφωνα με τον Μπουρντιέ (Bourdieu, 1974, 1989), έξη, πεδίο και περιβάλλον είναι τα ουσιώδη στοιχεία συγκρότησης μιας σύνθετης διαδικασίας δια της οποίας το σχολικό σύστημα ρυθμίζει τη μεταβίβαση του πολιτιστικού κεφαλαίου από γενιά σε γενιά με τέτοιο τρόπο ώστε να ενισχύονται οι υπάρχουσες κοινωνικές ανισότητες και να διατηρούνται οι κοινωνικές ιεραρχίες.

Μέσα από μια προσέγγιση, η οποία θα έχει ως αφετηρία της ένα θεωρητικό πλαίσιο βασισμένο στη θεωρία της κοινωνικής πρακτικής και της αναπαραγωγής των κοινωνικών δομών, όπως αναπτύχθηκε από τον Μπουρντιέ, θα μπορέσουμε από την αναγνώριση μιας πραγματικότητας διακρίσεων, ιεραρχήσεων και ανισοτήτων, η οποία δημιουργείται και αναπαράγεται με την ενεργητική συμβολή της μαθηματικής εκπαίδευσης να οδηγηθούμε στην κατανόηση των όρων δημιουργίας και αναπαραγωγής τους. Η ανατροπή των όρων αυτών είναι, βέβαια, μια συζήτηση, με πολιτικούς όρους.

Βιβλιογραφικές αναφορές

- Biesta, G. (2005). Against learning. Reclaiming a language for education in an age of learning. *Nordisk Pædagogik*, 25(1), 54–55.
- Bourdieu, P. (2006), Η αίσθηση πρακτικής, μτφρ. Θ. Παραδέλλης, Αθήνα: Αλεξάνδρεια
- Bourdieu, P. (1990), *The Logic of Practice*. Cambridge: Polity Press.
- Bourdieu, P. (1989), How schools help reproduce the social order, *Current Contents: Social and Behavioural Science*, 21(8), 16.
- Bourdieu, P. (1977). *Outline of a Theory of Practice*, Trans. R. Nice, Cambridge MA: Cambridge University Press.
- Bourdieu, P. (1974), The School as a Conservative Force: Scholastic and Cultural Inequalities. Στο J. Eggleston (Ed.) *Contemporary Research in the Sociology of Education*. London: Methuen, 32-46.
- Davis, P. (1993). Applied Mathematics as Social Contract. Στο S. Restivo, J. P. V. Bendegum & R. Fischer (Eds.), *Math Worlds: Philosophical and Social Studies of Mathematics and Mathematics Education* New York: State University of New York Press, 182-194.
- Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. Στο J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning*, Westport: Ablex Publishing, 19-44.
- Rogers, L. (1998). *Society, Mathematics and the Cultural Divide: ideologies of policy and practice 1750-1900*. Mathematics Education and Society 1, Nottingham UK.
- Skovsmose, O., & Valero, P. (2008). Democratic access to powerful mathematical ideas. Στο L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education. Directions for the 21st century*. (2nd ed.) Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Volmink, J. (1994). Mathematics By All. Στο S. Lerman (Ed.), *Cultural Perspectives on the Mathematics Classroom* (Volume 14 ed.). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Πλάτων, Πολιτεία, Εισ. σημείωμα-μετάφραση- ερμ. Σημειώματα Ν.Μ. Σκουτερόπουλος, Αθήνα: Εκδόσεις Πόλις, 2002.
- Φραγκουδάκη, Α. (1985), Κοινωνιολογία της εκπαίδευσης, Αθήνα: Εκδόσεις Παπαζήση

Η οργάνωση του περιεχομένου ενός αναλυτικού προγράμματος μαθηματικών και οι υπονοούμενες αντιλήψεις για τη μαθηματική γνώση, τη μάθηση και τη διδασκαλία της

Εισαγωγικές διευκρινήσεις

Στα πλαίσια της θεώρησης που βλέπει την εκπαίδευση, τόσο σαν διαδικασία παραγωγής ατόμων για την κάλυψη των αναγκών του κοινωνικού καταμερισμού εργασίας, όσο και σαν μηχανισμό αναπαραγωγής και κυρίαρχης ιδεολογίας (Αλτουσερ, 1978), το άρθρο αυτό αντιμετωπίζει το αναλυτικό πρόγραμμα σαν φορέα και μέσο που στοχεύει στην προώθηση των δύο αυτών λειτουργιών της εκπαίδευσης, μέσα από το σύνθετο σώμα των σχολικών γνώσεων που το συγκροτεί και τις διδακτικές πρακτικές που υποβάλλει. Όλα τα μαθήματα του αναλυτικού προγράμματος, συντελούν, το καθένα σε διαφορετικό πεδίο και βαθμό, στη διαδικασία αυτή με το περιεχόμενο, την κατανομή, την οργάνωση, την παρουσίαση και την αξιολόγηση της αντίστοιχης σχολικής γνώσης. Αναπτύσσουν δηλαδή στους εκπαιδευόμενους, κάποιες δεξιότητες απαραίτητες για ν' ανταποκριθούν στις απαιτήσεις του υπάρχοντος κοινωνικού εργασίας και ταυτόχρονα νομιμοποιούν και συγκαλύπτουν αυτόν τον καταμερισμό με επιβολή αντίστοιχης ιδεολογίας. Και τα μαθηματικά ως σχολική γνώση, όσο κι αν φαντάζουν ουδέτερα, πέρα από δεξιότητες, συμβάλλουν στην επιβολή ιδεολογίας.

Πριν προχωρήσουμε όμως, είναι αναγκαίες δυο διευκρινήσεις, έστω και συνοπτικά διατυπωμένες.

Πρώτη διευκρίνιση: Ο όρος «αναλυτικό πρόγραμμα» , που αναφέρεται στο οργανωμένο περιεχόμενο των μαθημάτων που διδάσκονται στο σχολείο, έχει επικροτήσει να εξετάζεται αυτόνομα και να αντιδιαστέλλεται απ' τους όρους «ωρολόγιο πρόγραμμα» που κατανέμει το διδακτικό χρόνο, «οδηγίες διδασκαλίας» που καθορίζουν τις διδακτικές πρακτικές-δραστηριότητες και «αξιολόγηση-εξετάσεις» που επικυρώνουν το διδακτικό αποτέλεσμα. Αυτή η κατάτμηση και η μεμονωμένη θεώρηση εμποδίζει την κατανόηση, ανάλυση και

ερμηνεία μιας ουσιαστικά ενιαίας διαδικασίας. Γιατί και το περιεχόμενο και η δομή του και η χρονική κατανομή του και οι διδακτικές πρακτικές και οι εξετάσεις είναι συστατικά, αλληλένδετα και αλληλοκαθοριζόμενα στοιχεία του σχολικού προγράμματος, που αποτελεί ένα σχέδιο-πρόθεση και σε μεγάλο βαθμό μια πραγματικότητα της λειτουργίας του σχολείου. Ο περιορισμός του κειμένου στο αναλυτικό πρόγραμμα, θα πρέπει επόμενα να ιδωθεί, μέσα στα πλαίσια που προαναφέραμε. ως εξέταση μιας διάστασης του σχολικού προγράμματος, που αποτελεί ένα στοιχείο του σχολικού μηχανισμού.

Δεύτερη διευκρίνηση: Με τον όρο ιδεολογία, εννοούμε εδώ. σχηματισμούς από έννοιες, αναπαραστάσεις, εικόνες και δοξασίες, με βάση τις οποίες οι άνθρωποι αντιλαμβάνονται την πραγματικότητα και τα στοιχεία που τη συγκροτούν, τις σχέσεις τους μ' αυτά τα στοιχεία της πραγματικότητας και τις σχέσεις τους με τους άλλους ανθρώπους. Οι έννοιες και αναπαραστάσεις αυτές. λειτουργούν πρακτικά και καθορίζουν τη συμπεριφορά και τη στάση των ανθρώπων μέσα στην καθημερινή τους ζωή και ταυτόχρονα λειτουργούν θεωρητικά και αρθρώνονται με συστήματα ηθικών. θρησκευτικών, αισθητικών κλπ. ιδεών που ενυπάρχουν με αντιφατικό τρόπο μέσα στον κοινωνικό σχηματισμό, όπως και με φιλοσοφικά συστήματα που τις αμφισβητούν ή τις επιβεβαιώνουν. Οι σχηματισμοί αυτοί των εννοιών, παραστάσεων, δοξασιών κλπ. καθώς είναι ζυμωμένοι με την καθημερινή ζωή και στάση των ανθρώπων απέναντι στην πραγματικότητα, συγκροτούν κάποιες αντιλήψεις που υφαίνονται πάνω σ' ένα πλέγμα που το αποτελούν ορισμένες "προφάνεις" παραδοχές. Έτσι δημιουργούνται περιοχές που κάτω απ' το βάρος της προφάνειας είναι αδύνατο να αμφισβητηθούν και θεωρούνται αυτονόητες. Σχηματίζεται μ' αυτό τον τρόπο ένα πλέγμα από προκαταλήψεις, από ταυτολογικές διαπιστώσεις και διατυπώσεις. από «προφάνεις», που καθώς επικυρώνεται συνεχώς μέσα απ' την επανάληψη συμπεριφορών και στάσεων διαμορφώνει μια οπτική για την πραγματικότητα, που με ανελαστικό τρόπο διαχωρίζει το ορατό και το αόρατο. το νοητό και το αδιανόητο, το λογικό και το παράλογο.

Είναι αυτό το πλέγμα που διαμορφώνει το ιδεολογικό επίπεδο, το οποίο προσδιορίζει τα όρια της κοινωνικής δραστηριότητας και ρυθμίζει τη συμπεριφορά και τις στάσεις των ανθρώπων απέναντι στην πραγματικότητα και τα προβλήματα της (Μπαλτάς, 1981). Κοινό στοιχείο όλων των όψεων της εκπαιδευτικής διαδικασίας και ιδιαίτερα των σχολικών μαθημάτων, είναι η ανάδειξη και επιβολή υποτιθέμενων αιώνιων και γενικού κύρους αληθειών αφ' ενός και αφ' ετέρου η διαμόρφωση της σκέψης με τέτοιο τρόπο που να εγκλωβίζεται σε περιοχές αιώνιων αληθειών, όπου τίθενται προβλήματα και αντλούνται απαντήσεις αποκλειστικά στο εσωτερικό τους (Ραβάνης, 1984). Οτιδήποτε έξω από τις περιοχές αυτές είναι αδιανόητο ή ακατανόητο.

Το περιεχόμενο των σχολικών μαθηματικών

Μ' αυτή την έννοια λέμε ότι τα μαθηματικά με τον τρόπο που διδάσκονται συμβάλλουν στην επιβολή ιδεολογίας προβάλλοντας μια ορισμένη θεώρηση της πραγματικότητας μέσα από τη μελέτη γενικευμένων σχέσεων και δομών. Εξ αιτίας της ιδιαιτερότητας τους σαν επιστήμη, να μην αναφέρονται άμεσα στα στοιχεία της πραγματικότητας, αλλά να τα μελετούν σ' ένα επίπεδο αφαίρεσης, πού περιλαμβάνει τις σχέσεις και τις πράξεις πάνω σ' αυτά, συγκαλύπτουν την ιδεολογική τους λειτουργία ως σχολική γνώση. Ταυτόχρονα ή ιδιαιτερότητα αυτή αιτιολογεί και τη βασική θέση αυτού του κειμένου, πού μπορεί επιγραμματικά να διατυπωθεί ως εξής:

Σ' ότι αφορά στα μαθηματικά ως σχολική γνώση, ή δομή του περιεχομένου τους και τα στοιχεία πού το συγκροτούν αλληλοκαθορίζονται, με κυριαρχικό τη δομή, τον τρόπο δηλαδή οργάνωσης του περιεχομένου, πού αφ' ενός υποβάλλει επιλογές περιεχομένου, αφ' ετέρου λειτουργεί σαν ο βασικός ιδεολογικός συντελεστής του μαθήματος. Το πρόβλημα δηλαδή δεν είναι ένας θεματολογικός κατάλογος μαθηματικών γνώσεων, αλλά ή ιδιαίτερη δόμησή του κι αυτό το στοιχείο είναι πού διαφοροποιεί τα αναλυτικά προγράμματα μαθηματικών. Ένας δεύτερος περιορισμός του άρθρου αυτού, είναι ή διερεύνηση του τρόπου οργάνωσης του περιεχομένου ενός αναλυτικού προγράμματος μαθηματικών και μόνο, έτσι πού να αναδειχθεί ο καθοριστικός του χαρακτήρας.

Μπορούμε να κατατάξουμε σχηματικά και για λόγους ανάλυσης τους κυριότερους τρόπους οργάνωσης του περιεχομένου ενός αναλυτικού προγράμματος μαθηματικών σε τέσσερους βασικούς τύπους, διακρινόμενους για την διαφορετική δόμηση της σχολικής γνώσης πού καθένας προκρίνει, αλλά και για τη διαφορετική αντίληψη για την εκπαίδευση πού καθένας υπονοεί.

Με μια απαραίτητη και σημαντική διευκρίνηση. Κανένας τύπος δεν εμφανίζεται αμιγής και σε καθαρή μορφή σε κανένα αναλυτικό πρόγραμμα. Σε κάθε πρόγραμμα μαθηματικών κυριαρχεί ή μία η ή άλλη μορφή, αλλά ενυπάρχουν όλες σε μια ενότητα αντιφατική, πού είναι αποτέλεσμα συγκυρίας κατά τη στιγμή της διαμόρφωσής του.

Ο πρώτος τύπος οργάνωσης, πού θα μπορούσε να ονομασθεί ακαδημαϊκός-φορμαλιστικός, δομεί το περιεχόμενο του αναλυτικού! προγράμματος ως επιτομή της καθιερωμένης επιστήμης και στα πρότυπά της (King and Brownell, 1966, Phenix, 1962). Ο τύπος αυτός κυριαρχεί στα αναλυτικά προγράμματα μαθηματικών από την δεκαετία του '60 μέχρι σήμερα και είναι προϊόν της θετικιστικής αντίληψης για την επιστήμη, πού προβάλλει ή σύγχρονη αστική ιδεολογικά. Ένας δεύτερος τύπος προβάλλει τη δόμηση του περιεχομένου γύρω από καθορισμένους στόχους, πού διατυπώνονται με όρους αλλαγής συμπεριφοράς (Tyler, 1949). Επικαλείται ως πρωταρχική την κοινωνική χρησιμότητα της γνώσης, ορίζοντας τη χρησιμότητα αυτή σαν ανάπτυξη ικανοτήτων κοινωνικής συμμόρφωσης.

Συμπίπτει με τα αιτήματα του αστικού εκσυγχρονισμού της μεταδικτατορικής περιόδου και προβάλλεται συστηματικά σήμερα στις προτάσεις αλλαγής των αναλυτικών προγραμμάτων.

Ένας τρίτος τύπος, πού θα μπορούσα να ονομασθεί παιδοκεντρικός, προβάλλεται ως αντίθεση στους δύο προηγούμενους και προτείνει τη δόμηση του περιεχομένου του αναλυτικού προγράμματος στη βάση δραστηριοτήτων, πού ανταποκρίνονται στις ανάγκες και τα ενδιαφέροντα του παιδιού, στο οποίο και αναγνωρίζει μία ιδιαίτερη φύση. Για τη θεώρηση αυτή τα πορίσματα της ψυχολογίας για τη μάθηση και η ατομικότητα του παιδιού αποτελούν το μοναδικό οδηγό για τη διαμόρφωση ενός αναλυτικού προγράμματος. Η άποψη αυτή

πρωτοεμφανίζεται στα χρόνια του μεσοπολέμου με τους διάφορους τύπους των σχολείων εργασίας, που προβάλλονται από φιλελεύθερους παιδαγωγούς κι έχει μετεξελιχθεί σήμερα, υιοθετώντας τις «γνωστικές» θεωρίες για τη μάθηση και προβάλλοντας διάφορες παραλλαγές το «ελεύθερο» σχολείο.

Οι τρεις αυτοί τύποι δόμησης του περιεχομένου ενός αναλυτικού προγράμματος αποτελούν παιδαγωγικές εκφράσεις του ιδεαλιστικού φιλοσοφικού λόγου και αντιθετικές θεωρήσεις μέσα στα πλαίσια της κυρίαρχης ιδεολογίας, που μπορεί να αμφισβητούν σε κάποιο βαθμό τις μεθόδους επιβολής της (παιδοκεντρικός τύπος), αλλά όχι το περιεχόμενο της καθαυτό και τις λειτουργίες της.

Υπονοούμενες παραδοχές

Ας δούμε συνοπτικά τις υπονοούμενες γνωσιολογικές θέσεις και παιδαγωγικές αντιλήψεις κάθε μιας απ' τις θεωρήσεις που περιγράφηκαν προηγούμενα. Κοινή φιλοσοφική αφετηρία και των τριών απόψεων αποτελεί ή βασικά ιδεαλιστική θέση, ότι τα μαθηματικά αποτελούν ως επιστημονική πρακτική μια σταδιακή ανάδειξη και μελέτη μιας πιστής συμβολικής αναπαράστασης της πραγματικότητας.

Προϋποθέτουν δηλαδή την πραγματικότητα ήδη θεωρητικά οργανωμένη, οπότε τα μαθηματικά δεν κάνουν τίποτα άλλο απ' το να κατασκευάζουν και να επεξεργάζονται συστήματα συμβολισμών επιδεικτικά μιας τέτοιας αναπαράστασης (Raymond, 1975). Το αποτέλεσμα στα όρια του είναι σαφέστατο. Ο κόσμος είναι κατανοητός γιατί είναι ήδη θεωρητικός, μ' άλλα λόγια θεϊκός ή κάτι ανάλογο. Το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών του Γυμνασίου της χούντας για παράδειγμα, δεν κάνει καμιά προσπάθεια συγκάλυψης αυτής της ιδεολογίας και ορίζει ως κύριο σκοπό της διδασκαλίας των μαθηματικών την «διέγερση και συνειδητοποίηση του *a priori* γεωμετρικού εφοδίου του ανθρωπίνου πνεύματος με βάση τα εκ της εμπειρίας προβαλλόμενα... κλπ.» (Π.Δ. 723/69). Κάτι ανάλογο διατυπώνεται και στα προλεγόμενα του αναλυτικού προγράμματος μαθηματικών για το Γυμνάσιο, που προτείνει σήμερα (1984) η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία: « Η . Άλγεβρα... οδηγεί σε μία

εκλέπτυνση του πνεύματος, έτσι ώστε ο μαθητής να γίνει ικανός να ανακαλύπτει στα διάφορα φαινόμενα φυσικά, κοινωνικά κλπ. το μαθηματικό στοιχείο που περιέχουν...» (Ενημέρωση, Έκδοση Ε.Μ.Ε., τ. 22-23, 1984, σ. 61).

Επομένως για τις θεωρήσεις αυτές ή γνώση είναι διαδικασία και αποτέλεσμα ανακάλυψης και αναπαράστασης της πραγματικότητας και πρόβλεψη νέων ανακαλύψεων. Τα μαθηματικά ως επιστήμη συνθλίβονται προς όφελος ενός καθρέφτη της ουσίας. Το αποτέλεσμα είναι, ότι θεωρήσεις αυτές είτε δεν αντιμετωπίζουν μαθηματικά ως επιστήμη, με την έννοια ότι παρέχουν μια θεωρητική γνώση της πραγματικότητας, αλλά ως εργαλείο για τις άλλες επιστήμες, που διαμεσολαβούν ανάμεσα στα μαθηματικά και την πραγματικότητα, είτε θεωρούν τα μαθηματικά επιστήμη που παρέχει θεωρητική γνώση μιας συμβολικής πραγματικότητας από ιδεατά αντικείμενα, που καθρεφτίζουν μια υλική πραγματικότητα ήδη θεωρητική. Από εδώ προκύπτει και ο ανιστορικός χαρακτήρας που αποδίδουν στα μαθηματικά και η φορμαλιστική μορφή τους, που ανάγει τα μαθηματικά σ' ένα μόνο επίπεδο αποδεικτικής διαδικασίας ή η εργαλειακή μορφή τους, που τυποποιεί τα μαθηματικά σ' ένα σύνολο τεχνικών μεθόδων και εννοιολογικό εργαλείο άλλων επιστημών.

Μ' αυτό το κοινό φιλοσοφικό υπόβαθρο για τα μαθηματικά ως επιστημονική πρακτική, οι θεωρήσεις που προαναφέραμε, διαφοροποιούνται ως προς τις παιδαγωγικές αντιλήψεις τους ανάλογα με το βάρος που αποδίδουν στην ιδεολογική λειτουργία της σχολικής γνώσης και τις μεθόδους εγχάραξης της. Κι' αυτή η διαφοροποίηση προκύπτει και υλοποιείται με μια διαφορετική δόμηση του περιεχομένου των μαθηματικών ως σχολικού μαθήματος. Έτσι η ακαδημαϊκή-φορμαλιστική θεώρηση, που δομεί το περιεχόμενο αξιωματικά-λογικά στα πρότυπα μιας επιστήμης στατικής και αυθυπόστατης, ορίζει τη μάθηση ως διαδικασία μετάδοσης γνώσεων και ανάπτυξης τυποποιημένης σκέψης. Η δομή του μαθήματος καθορίζει το περιεχόμενό του, ώστε να συμβάλλει στην πληρότητά της (Schwab, 1964) και η διδακτική μεθοδολογία υποβάλλεται αποκλειστικό απ' αυτή (Phenix, 1962). Το παιδί αντιμετωπίζεται ως παθητικό υποκείμενο μάθησης, που είναι αποτέλεσμα και μόνο της σχολικής διαδικασίας. Το μόνο που ενδιαφέρει είναι η μνήμη για την

αποθήκευση γνώσεων με τη μορφή ορισμών, θεωρημάτων ή αποδείξεων και η λογική για την εξάσκησή της και τον εγκλωβισμό της σε τυποποιημένες νοητικές πράξεις (Schiro, 1978).

Η αντιστοίχιση των μαθηματικών με την πραγματικότητα γίνεται με δυο παράλληλους και ανεξάρτητους μεταξύ τους μονόδρομους. Οι ορισμένες έννοιες αναγνωρίζονται στην πραγματικότητα, επεξεργάζονται νοητικό Και εφαρμόζονται στα πρότυπα τους, που επίσης ενυπάρχουν ήδη στην πραγματικότητα. Η διαδικασία μάθησης αυτή, θεμελιώνεται αποκλειστικά στην παθητική παρατήρηση και αναπτύσσεται σαν ένα νοητικό , παιχνίδι αναδιοργάνωσης και συστηματοποίησης θεωρητικών εγγραφών, μαθηματικά δεδομένων.

Τα συνακόλουθα είναι γνωστά και λογικά συνεπαγόμενα. Ο δάσκαλος και το επίσημο βιβλίο οι μοναδικοί και αυθεντικοί χειριστές της γνώσης, η ασκησιολογία και οι εξετάσεις, τα ιδανικά πεδία επικύρωσης και ελέγχου της, το θρανίο και η έδρα το φυσικό πλαίσιο ανάπτυξής της.

Η θεώρηση τώρα, που προβάλλει έναν τύπο οργάνωσης του περιεχομένου ενός αναλυτικού προγράμματος μαθηματικών με βάση διδακτικούς στόχους ανάπτυξης ικανοτήτων (Tyler, 1949), αντιμετωπίζει τη μάθηση ως διαδικασία διαμόρφωσης συμπεριφοράς, που προκύπτει από αντίστοιχη διαμόρφωση της νοητικής συγκρότησης. Στοχεύει στην ανάπτυξη Ικανοτήτων ενεργητικής απόκρισης σε ερεθίσματα, σύμφωνα με προδιαγραμμένους στόχους. Το αναλυτικό πρόγραμμα επόμενα, παίρνει τη μορφή ενός ιεραρχημένου, απ' το απλό στο σύνθετο, καταλόγου ερεθισμάτων και αποκρίσεων (Gagne, 1965). Δεν αποτελεί, παρά μια κλιμάκωση εμπειριών, που στοχεύουν και υπηρετούν την υλοποίηση των στόχων και διατάσσονται με τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε εμπειρία να αποτελεί ενδυνάμωση και διεύρυνση της προηγούμενης. Βασισμένη στις ψυχολογικές θεωρίες της συμπεριφοράς, αντιμετωπίζει η θεώρηση αυτή, το παιδί, ως ένα προϊόν υπό κατασκευή για την κάλυψη των αναγκών του κοινωνικού καταμερισμού εργασίας Και τη διαδικασία της μάθησης ως άσκηση παβλοφικού τύπου (Gagne, 1965, Holland et al., 1976). Ακρότατη συνέπεια αυτής της λογικής, οι διδακτικές μηχανές σε διάφορες παραλλαγές (Holland, 1960) μέχρι τα κομπιούτερς, που η εισαγωγή τους στα σχολεία προβάλλεται ως η

πρόοδος. Τα μαθηματικά ως σχολική γνώση, παίρνουν τελικά τη μορφή εργαλείου εκτέλεσης πράξεων και υπολογισμών (Gagne, 1963).

Ένας ιδιόμορφος συγκερασμός των δύο προηγούμενων θεωρήσεων για την οργάνωση του αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών, είναι για παράδειγμα το πρόγραμμα του Γυμνασίου που θεσμοθετήθηκε στα πλαίσια της μεταρρύθμισης του 1964 και δομείται σ' ένα πρώτο επίπεδο γύρω από πράξεις και σ' ένα δεύτερο επίπεδο αξιωματικά-φορμαλιστικά. Διακηρύσσει άλλωστε στα προλεγόμενα του, ότι σκοπός της διδασκαλίας των μαθηματικών στο Γυμνάσιο είναι «*να διδάξη και να ασκήση τους μαθητές εις την μέθοδο του μαθηματικού λογισμού και της μαθηματικής σκέψεως*» και μόνο (Π.Δ. 651/24.10.1964).

Η παιδοκεντρική θεώρηση δόμησης του αναλυτικού προγράμματος τώρα, έρχεται να καταγγείλει τις δύο προηγούμενες, αρνούμενη τον τεχνοκρατισμό που εισάγουν στην εκπαίδευση, χωρίς ωστόσο να αντιπαρατίθεται ριζικά και να ξεπερνά οριστικά το Ιδεολογικό τους πλαίσιο. Διευρύνει τα όρια του δεχόμενη, ότι τα μαθηματικά ως επιστημονική πρακτική αποτελούν πέρα απ' τη σταδιακή ανάδειξη και τη μελέτη μιας συμβολικής αναπαράστασης της πραγματικότητας και θεωρητικό πρόσθεμα, αλλά ή πραγματικότητα μας αποκαλύπτει τη δυναμική της να εντάσσεται στο πρόσθεμα αυτό.

Μ' αυτή τη φιλοσοφική αφετηρία αυτοπεριορίζεται και εγκλωβίζεται στην αποθέωση του άτομου και των ψυχο-νοητικών του αναγκών και ικανοτήτων (Rugg and Shumaker, 1928), αντιμετωπίζοντας την εκπαίδευση ως διαδικασία κάλυψης των αναγκών και ανάπτυξης των ατομικών ικανοτήτων. Για τη θεώρηση αυτή ή γνώση είναι προϊόν εμπειριών και ή μαθηματική σκέψη φυσική συνέπεια της δραστηριότητας του άτομου μέσα στο περιβάλλον και της προσαρμογής του σ' αυτό (Barth, 1972). 'Αφού επίκεντρο της εκπαιδευτικής διαδικασίας είναι το άτομο, το αναλυτικό πρόγραμμα δομείται γύρω από κέντρα ενδιαφέροντος του άτομου, αντίστοιχα της ηλικίας του (δραστηριότητες, κατασκευές, παιχνίδια κλπ.). Το παιδί για τη θεώρηση αυτή, έχει τη δική του Ιδιαίτερη φύση και το δικό του αποκλειστικό τρόπο μάθησης (Rathbone, 1971). Κατακτάει τις μαθηματικές έννοιες μέσα από σχεδιασμένες γι' αυτό το σκοπό πράξεις και δραστηριότητες (Dienes, 1973). Το σχολείο έχει ένα εντελώς ελεύθερο χαρακτήρα κι ο δάσκαλος ή η δασκάλα λειτουργεί

ως συντονιστής και οργανωτής δραστηριοτήτων. Η θεώρηση αυτή ξεκινώντας απ' τον εμπειρισμό του Ντιούι καταλήγει στα ανοικτά σχολεία τύπου Νηλ και στα αντί-σχολεία του Ίλιτς, Χόλι και λοιπών, αφομοιώνοντας παράλληλα γνωστικές και ψυχολογικές θεωρίες, πολλές φορές ετερόκλητες και αντιφατικές. Λειτουργώντας τελικά νομιμοποιητικά για την κυρίαρχη αστική ιδεολογία, ανάγει το πρόβλημα της εκπαίδευσης σε ατομικό ζήτημα και αποκρύπτει την κοινωνική λειτουργία του σχολείου.

Μια διαφορετική λογική

Αν το ζητούμενο όμως, είναι μια διδασκαλία των μαθηματικών που δεν θα στοχεύει άπλά στη δημιουργία νοητικών προϋποθέσεων για την κατανόηση, αλλά και την ερμηνεία και την αλλαγή της πραγματικότητας, θα πρέπει ο προβληματισμός μας να κινηθεί σε εντελώς διαφορετικά Ιδεολογικά πλαίσια, έξω απ' τις θεωρήσεις που σκιαγραφήσαμε προηγούμενα και να προσεγγίσει το πρόβλημα του αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών από μια εντελώς διαφορετική οπτική.

Ξεκινώντας απ' τη θέση, ότι η πραγματικότητα δεν είναι ούτε κατανοητή ούτε ακατανόητη αλλά κατανοήσιμη, θα πρέπει να δούμε τα μαθηματικά σαν μια διαδικασία οικοδόμησης της κατανοησιμότητας όψεων της πραγματικότητας. Να αποκαταστήσουμε δηλαδή, πρώτα απ' όλα ως επιστήμη, με την έννοια ότι παρέχουν θεωρητική γνώση του πραγματικού μέσα από μια εργασία εγγραφής (μαθηματοποίηση), όσο και μέσα από μια εργασία μελέτης αυτών καθαυτών των εγγραφών (θεωρητικά μαθηματικά). Εργασίες αλληλοκαθοριζόμενες σύμμετρα, ώστε η μια να αποτελεί την πειραματική διάσταση της άλλης, που θα ελέγχει και θα επικυρώνει ή θα διαψεύδει τις υποθέσεις και τα συμπεράσματα της, δηλαδή τη θεωρία της (Raymond, 1975).

Αντιμετωπίζοντας έτσι τα μαθηματικά σε δύο επίπεδα, ένα θεωρητικό και ένα πραγματικό, που δεν είναι καθορισμένα μια για πάντα, αλλά αποτελούν λειτουργίες που μετασχηματίζονται και εναλλάσσονται δυναμικά καθώς εξελίσσονται ιστορικά, θα πρέπει να απορρίψουμε το φορμαλισμό, που ανάγει τα μαθηματικά σε ένα μόνο επίπεδο

αποδεικτικής διαδικασίας (θεωρητικό). Ταυτόχρονα επειδή τα μαθηματικά δεν είναι αυθυπόστατα, αλλά χρησιμοποιούνται, μετασχηματίζονται, προκαλούνται από άλλες επιστήμες που συναρτώνται με την υλική πραγματικότητα, αναπτύσσουν μια θεμελιώδη σχέση χρησιμοποίησης (και όχι εφαρμογής), η οποία μας επιτρέπει να απορρίψουμε την άλλη όψη του φορμαλισμού, δηλαδή τον εμπειρισμό ο οποίος ανάγει επίσης τα μαθηματικά σε ένα μόνο επίπεδο εργαλειακής μορφής (Raymond, 1975).

Ως ενότητα θεωρίας και πράξης με τους όρους που προηγούμενα εκτέθηκαν, δηλαδή ως επιστημονική διαδικασία, τα μαθηματικά αποτελούν μια ιδιόμορφη κοινωνική πρακτική, που δεν μπορεί και δεν πρέπει να νοηθεί έξω από το πλέγμα των κοινωνικών σχέσεων και της ιστορικής εξέλιξης.

Ένα αναλυτικό πρόγραμμα μαθηματικών τώρα με μια τέτοια θεώρηση, θα πρέπει να δομείται με πολλαπλά επίκεντρα, τα οποία θα αποτελούνται από μαθηματικά προβλήματα μέσα στο ιστορικό και κοινωνικό τους πλαίσιο, εξελικτικά διαταγμένα, με στόχους την κατάδειξη του χαρακτήρα των μαθηματικών ως ιστορικά διαμορφωμένης και ιστορικά επικαθορισμένης επιστημονικής δραστηριότητας και την ανάπτυξη νοητικών προϋποθέσεων για την κατανόηση και ερμηνεία της πραγματικότητας ταυτόχρονα με την παρέμβαση σ' αυτήν.

Μια τέτοια δόμηση του περιεχομένου του αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών θα επιτρέψει την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης και θα ενθαρρύνει την οικοδόμηση μιας ιδεολογίας αμφισβήτησης της προφάνειας και του αυτονόητου, της χρονικής στατικότητας και της ιστορικής ουδετερότητας, του απόλυτου και αιώνιου, της κατεστημένης λογικής.

Αντιμετωπίζοντας την επιστημονική πρακτική ως διαδικασία γνώσης της δομής της πραγματικότητας, τόσο στο γενικό της περίγραμμα όσο και στις πολυπλοκότητες και λεπτομέρειες, στη λειτουργία της, που επιδιώκει να υπερβεί την άμεση εμπειρία εξηγώντας την, που αντιστοιχεί τις θεωρητικές κατασκευές με τα στοιχεία του αισθητού κόσμου.

Θεωρώντας τη γνώση ένα ιστορικό-δυναμικό γίνεσθαι, που προσεγγίζει πολύμορφα την πραγματικότητα και πηγάζει από μια δυναμική αλληλεπίδραση ανθρώπου - κοινωνίας - φύσης μέσα από την πράξη της παραγωγικής διαδικασίας (υλικής ή νοητικής), η θεώρηση που υποστηρίζουμε συμβάλλει στη διαμόρφωση μιας ιδεολογίας και στην οικοδόμηση μιας επιστημονικής σκέψης, που δεν θα αφαιρεί τουλάχιστον το δικαίωμα στην ονειροπόληση ανατροπής του αδύνατου.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

- Αλιουσερ, Λ., 1978, Ιδεολογία και Ιδεολογικοί Μηχανισμοί του Κράτους. Στο *Θέσεις*, Θεμέλιο, Αθήνα.
- Μπαλτάς, Α. 1981, Φυσικές Επιστήμες και Ιδεολογία, *Πολίτης*, 41, 27-28.
- Ραβάνης, Κ., 1984, Έκθεση (και αυτολογκρισία Ιδεών), *Αντιθέσεις*, 19, 54.
- Barth, R. S., 1972, Open Education and the American School, Schocken Books and Agathon Press, New York.
- Dienes, Z., 1973, Lets Play Maths, Penguin Books.
- Gagne, R., 1963, Learning and Proficiency in Mathematics, *The Mathematics Teacher*, LVI, 8, 622.
- Gagne, R., 1965, The Conditions of Learning, Holt, Rinehart and Winston, New York.
- Holland, J.G., 1960, Teaching Machines: An Application of Principles from Laboratory, *Journal of Experimental Analysis of Behavior*, 3, 278.
- Holland J.G., Solomon, C., Doram, J., Frezza, D.A., 1976, The Analysis of Behaviour in Planning Instruction, Addison-Wesley, Reading Mass.
- King, A. R. and Brownell, J. A., 1966, The Curriculum and the Disciplines of Knowledge, John Wiley, New York.
- Phenix, P. H., 1962, The Disciplines as Curriculum Content. Στο Passow, A.H. (Ed.) Curriculum Crossroads, Teachers College Press, New York.
- Rathbone, C. H., 1971, The Implicit Rationale of the Open Education Classroom. Στο Rathbone, C.H. (Ed.), Open Education: The

- Informal Classroom, Citation Press, New York.
- Raymond. P., 1975, *L' Histoire et les Sciences*, F. Maspero, Paris και Για την Επιστημολογία και την Ιστορία των Μαθηματικών (μεταφρ. Α. Μπαλτάς), *Πολίτης*, 1979, 30, 36-39
- Rugg, H. and Shumaker, A., 1928, *The Child-Centered School*, World Book, New York.
- Schiro, M., 1978, *Curriculum for Better Schools*, Educational Technology Publications, Englewoods Cliffs, N.J.
- Schwab, J. 1966, *Problems, Topics and Issues*. Στο Stanley E.(Ed.), *Education and the Structure of Knowledge*, . Rand McNally, Chicago.
- Tyler, R.W., 1949, *Basic Principles of Curriculum and Instruction*, Univ. Of Chicago Press, Chicago.

Επιχείρημα και απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά:

Το θέμα και το πλαίσιο μιας συζήτησης

Η γενέθλια πράξη των μαθηματικών, ως παραγωγικής επιστήμης, τοποθετείται από τους ιστορικούς στην εμφάνιση των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, περίπου το 300 π.Χ. Από τότε μέχρι τις μέρες μας, η απόδειξη ως μέθοδος παραγωγής και εξακρίβωσης συμπερασματικών προτάσεων (θεωρημάτων και πορισμάτων) περιλαμβάνονταν, κατά κοινή παραδοχή, στα συστατικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών. Για πολλούς μάλιστα η απόδειξη αποτελούσε την ουσία των μαθηματικών, αφού η άποψη που διακήρυξε ο C.S. Peirce στα μέσα του 19^{ου} αιώνα, ότι «τα μαθηματικά είναι η επιστήμη της δημιουργίας αναγκαίων συμπερασμάτων» ήταν ιδιαίτερα διαδομένη.

Η απόδειξη κατά συνέπεια, ως η χαρακτηριστική μέθοδος παραγωγής και εξακρίβωσης μαθηματικών προτάσεων και άρα ως πρότυπο ανάπτυξης και διατύπωσης λογικών συλλογισμών, αποτέλεσε στοιχείο του περιεχομένου της μαθηματικής εκπαίδευσης με προνομιακό πεδίο εφαρμογής της τη στοιχειώδη γεωμετρία.

Όμως, εδώ και μια ή δυο δεκαετίες ο ρόλος της απόδειξης στα μαθηματικά και συνακόλουθα στη μαθηματική εκπαίδευση έχει τεθεί υπό συζήτηση, η οποία μάλιστα προξενεί το ολοένα και μεγαλύτερο ενδιαφέρον της μαθηματικής εκπαιδευτικής κοινότητας. Η Gila Hanna (2000) υπολογίζει ότι στη δεκαετία 1990 – 1999 πάνω από εκατό ερευνητικά άρθρα για τη μάθηση και τη διδασκαλία της απόδειξης έχουν δημοσιευθεί στα σημαντικότερα διεθνή περιοδικά της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Φαίνεται ότι μερικές σημαντικές εξελίξεις στην πρακτική των μαθηματικών, αλλά και στη φιλοσοφία και την κοινωνιολογία των μαθηματικών, έχουν θέσει σε αμφισβήτηση, όχι μόνο το ρόλο, αλλά και το καθεστώς της μαθηματικής απόδειξης. Οι εξελίξεις αυτές σε συνδυασμό με ανάλογες εξελίξεις στις κυρίαρχες θεωρήσεις της συγκρότησης και ανάπτυξης των μαθηματικών εννοιών στα παιδιά έχουν προκαλέσει ανάλογους προβληματισμούς για το ρόλο και τη θέση της απόδειξης, αλλά και γενικότερα της επιχειρηματολογίας, στη

διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών στην πρωτοβάθμια και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Μια συνοπτική έκθεση των κύριων στοιχείων των εξελίξεων αυτών είναι αναγκαία για τη σχετική συζήτηση και ακολουθεί.

Εξελίξεις στην επιστημονική πρακτική των μαθηματικών

Οι κύριες εξελίξεις στην πρακτική δημιουργίας και επικύρωσης της μαθηματικής γνώσης προέρχονται από την εισαγωγή και την διαρκώς διευρυνόμενη χρήση των υπολογιστών στη μαθηματική έρευνα. Στις άμεσες και διαπιστωμένες συνέπειες του γεγονότος αυτού περιλαμβάνονται:

- η χρήση υπολογιστών για τον έλεγχο και την απόδειξη μαθηματικών προτάσεων,
- η ανάπτυξη νέων μορφών απόδειξης, ριζικά διαφορετικών και ως προς το περιεχόμενο και ως προς την μορφή από την κλασική παραγωγική απόδειξη και
- η αποδοχή του πειραματισμού ως αποδεκτής μαθηματικής πρακτικής.

Η χρήση των υπολογιστών για τον έλεγχο και την απόδειξη μαθηματικών προτάσεων, που απαιτούν ιδιαίτερα εκτεταμένους και πολύπλοκους υπολογισμούς, ουσιαστικά πέρα από τις ανθρώπινες δυνατότητες της ατομική ύπαρξης, νομιμοποιήθηκε στη μαθηματική πρακτική μετά από την απόδειξη του θεωρήματος των τεσσάρων χρωμάτων, μέρος της οποίας εκτελέστηκε από υπολογιστή (Appel και Haken, 1989).

Η αλήθεια όμως των αποδειγμένων με τη χρήση των υπολογιστών μαθηματικών προτάσεων είναι ουσιαστικά υπό αίρεση, αφού δεν μπορεί ποτέ να διασφαλιστεί ότι οι υπολογιστές και τα συναφή, αλγοριθμικού χαρακτήρα, προγράμματα τους δεν υπόκεινται σε σφάλματα. Κατά συνέπεια, οι προτάσεις αυτές εντασσόμενες στη μαθηματική γνώση, όπως συμβαίνει, τροποποιούν τα χαρακτηριστικά της, διαφοροποιώντας τα κριτήρια εγκυρότητας της μαθηματικής απόδειξης.

Η ανάπτυξη νέων μορφών απόδειξης, ριζικά διαφορετικών και ως προς το περιεχόμενο και ως προς την μορφή από την κλασσική παραγωγική απόδειξη αποτελεί τη δεύτερη συνέπεια της χρήσης των υπολογιστών στη μαθηματική έρευνα.

Μια τέτοια μορφή απόδειξης αποτελεί, για παράδειγμα, η ολογραφική απόδειξη (Babai, 1994). Η ολογραφική απόδειξη απαιτεί την καταγραφή μιας μαθηματικής απόδειξης στη λογική ενός προγράμματος υπολογιστών, με έναν ιδιαίτερα λεπτομερειακό τρόπο και με τη χρήση μιας τυπικής γλώσσας. Εξαιτίας του τρόπου της καταγραφής αυτής, εάν υπάρχει ένα σφάλμα σε οποιοδήποτε γραμμή της απόδειξης τότε το σφάλμα αυτό αναπαράγεται και διαδίδεται ομοιόμορφα σε κάθε γραμμή της. Με τον έλεγχο, επομένως, τυχαία επιλεγμένων γραμμών και όχι του συνόλου των γραμμών που καταγράφουν την απόδειξη είναι δυνατός ο έλεγχος της ορθότητας μιας απόδειξης. Ελέγχοντας όμως τυχαία επιλεγμένα σημεία και όχι το σύνολο μιας απόδειξης, όσο και αν ο αριθμός των σημείων αυτών μπορεί να διευρυνθεί με τη βοήθεια των υπολογιστών, η επικύρωση της αντίστοιχης μαθηματικής πρότασης υπόκειται σε μια πιθανότητα σφάλματος, η οποία μπορεί μεν να ελαχιστοποιηθεί αλλά όχι και να μηδενιστεί. Ο ενδεχομενικός χαρακτήρας των αποδείξεων αυτών βρίσκεται σε απόλυτη αντίθεση με την απαίτηση της βεβαιότητας, που εμπεριέχεται στην κλασσική έννοια της μαθηματικής απόδειξης.

Παρά τον καινοτομικό χαρακτήρα τους όμως στον πυρήνα των προαναφερθέντων διαδικασιών και μορφών μαθηματικής απόδειξης παραμένει η λογική της αναλυτικής απόδειξης, όπου ένα μαθηματικό συμπέρασμα προκύπτει ως αληθές από δεδομένες παραδοχές ή αλήθειες με τη χρήση παραγωγικών συλλογισμών.

Υπό την επίδραση όμως της χρήσης των υπολογιστών διευρύνεται συνεχώς η αποδοχή του πειραματισμού ως αποδεκτής πρακτικής στη μαθηματική έρευνα, ιδιαίτερα για την εύρεση, τη διερεύνηση ή την επιβεβαίωση ιδιοτήτων μαθηματικών αντικειμένων, όπως είναι τα διαφόρων διαστάσεων μαθηματικά σχήματα και μορφές, αλλά και για την δημιουργία, τη διατύπωση ή και τον έλεγχο μαθηματικών εικασιών. Η κυκλοφορία του περιοδικού *Πειραματικά Μαθηματικά* (*Experimental Mathematics*) το 1992, αφιερωμένου στις «πειραματικές όψεις της μαθηματικής πρακτικής», στα περιεχόμενα του οποίου

περιλαμβάνονται σχεδόν αποκλειστικά διερευνήσεις μαθηματικών προτάσεων με τη χρήση υπολογιστών, σηματοδοτεί χαρακτηριστικά αυτή την εξέλιξη. Στο επίπεδο της πρακτικής, τα τελευταία χρόνια πολλαπλασιάζονται συνεχώς τα ερευνητικά κέντρα πανεπιστημίων και ιδρυμάτων με αποκλειστική δραστηριότητα τους τα πειραματικά μαθηματικά και κύριο χρηματοδότη τους εταιρείες υλικού και λογισμικού υπολογιστών.

Πρέπει βέβαια να σημειωθεί, ότι οι συζητήσεις για τα ζητήματα των νέων μορφών δημιουργίας και επικύρωσης της μαθηματικής γνώσης που έχουν προκαλέσει οι προαναφερθείσες εξελίξεις, όπως συνάγεται από δημοσιεύσεις σε συναφή περιοδικά, οδηγούν σε αντιθετικές διαπιστώσεις και αναδεικνύουν μια διχογνωμία ιδιαίτερα για το καθεστώς της μαθηματικής απόδειξης (ενδεικτικά, Horgan, 1993, Jaffe & Quinn 1993, Thurston, 1994 και Van Bendegem 2003).

Εξελίξεις στη φιλοσοφία και την κοινωνιολογία των μαθηματικών

Σημαντικότερες ίσως από τις προηγούμενες, τουλάχιστον ως προς τις άμεσες επιδράσεις τους στους προβληματισμούς για το ρόλο και τη σημασία της μαθηματικής απόδειξης, φαίνεται να είναι οι εξελίξεις στη φιλοσοφική θεώρηση της μαθηματικής γνώσης, όπως και στην κοινωνιολογία της μαθηματικής πρακτικής. Οι εξελίξεις αυτές χαρακτηρίζονται από την ευρεία αποδοχή απόψεων, οι οποίες διατυπώνουν μια συνολική αμφισβήτηση του κυρίαρχου για αιώνες προτύπου της μαθηματικής γνώσης και πρακτικής, πυρήνα του οποίου αποτέλεσε η μαθηματική απόδειξη, ως προϊόν και διαδικασία.

Ένα φάσμα απόψεων στη φιλοσοφία των μαθηματικών, οι οποίες έχουν αποκληθεί “απολυτοκρατικές” (Ernst 1991), διαμορφώθηκαν ιστορικά και κυριάρχησαν στις μαθηματικές κοινότητες υπό την επίδραση ποικίλων φιλοσοφικών, πολιτιστικών και κοινωνικών παραγόντων. Οι απόψεις αυτές θεωρούν τα μαθηματικά, ως ένα αντικειμενικό, απόλυτο, αναμφισβήτητο και μη επιδεκόμενο διορθώσεων σώμα γνώσεων, το οποίο θεμελιώνεται στην ακλόνητη βάση της παραγωγικής λογικής. Αυτό το σώμα των μαθηματικών γνώσεων συγκροτείται με πυρήνα ένα σύνολο προτάσεων (θεωρημάτων) και των

αποδείξεων της αλήθειας τους. Οι αποδείξεις της αλήθειας των μαθηματικών θεωρημάτων βασίζονται αποκλειστικά σε ένα σύνολο προκαθορισμένων παραδοχών (αξιωμάτων και ορισμών) και σε μια σειρά κανόνων λογικής συνεπαγωγής, οι οποίοι διασφαλίζουν τη μεταβίβαση της αλήθειας από τις προκαθορισμένες παραδοχές στις παράγωγες συμπερασματικές προτάσεις. Κατά συνέπεια, αφού οι αποδείξεις της αλήθειας των μαθηματικών προτάσεων είναι αποκλειστικά λογικές, χωρίς καμία προσφυγή στην εμπειρική πραγματικότητα, η μαθηματική γνώση είναι αδιάψευστη, αντικειμενική και απόλυτη, εξαρτημένη μόνο από τις μαθηματικές παραδοχές της και τους παραδεκτούς κανόνες της τυπικής-παραγωγικής λογικής.

Ουσιαστικά, οι απολυτοκρατικές απόψεις δεν περιγράφουν τη μαθηματική γνώση, ούτε τις διαδικασίες δημιουργίας και ανάπτυξης της, αλλά επικεντρώνονται στην τεκμηρίωση της αλήθειας της μαθηματικής γνώσης. Δηλαδή στη “θεμελίωση” της μαθηματικής γνώσης, στη βάση μιας λογικής-παραγωγικής δομής, με συστατικά στοιχεία της τα αξιώματα, τους ορισμούς και τους παραδεκτούς κανόνες της λογικής συνεπαγωγής. Είναι προφανές, ότι στο πλαίσιο αυτό η απόδειξη, ως προϊόν και διαδικασία, αποτελεί το κυρίαρχο χαρακτηριστικό της μαθηματικής γνώσης και πρακτικής.

Επομένως, για τις απολυτοκρατικές απόψεις, η μαθηματική γνώση είναι α-χρονική, παρόλο που μπορεί να ανακαλύπτονται και να προστίθενται νέες γνώσεις, είναι υπερ-ανθρώπινη και α-ιστορική, αφού οι δραστηριότητες των ερευνητών-μαθηματικών και η ιστορία των μαθηματικών δεν συναρτάται με τη φύση και την αιτιολόγηση της μαθηματικής γνώσης, είναι μια «καθαρή», άκρως ορθολογική γνώση, η οποία συμβαίνει να είναι χρήσιμη εξαιτίας της καθολικής εγκυρότητας της. Για τους λόγους αυτούς είναι απαλλαγμένη ηθικών και πολιτισμικών αξιών (Ernest, 1998).

Το βιβλίο του Lakatos (1976) «*Αποδείξεις και ανασκευές*» πυροδότησε τα τελευταία χρόνια μια αμφισβήτηση πολλών παραδοχών του κυρίαρχου αυτού προτύπου της μαθηματικής γνώσης, αναδεικνύοντας την ανθρώπινη όψη στην πρακτική της μαθηματικής δραστηριότητας και υπογραμμίζοντας τον κοινωνικό και ιστορικό χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης. Ο Lakatos υποστήριξε ότι το πρόβλημα της

διασφάλισης της αλήθειας της μαθηματικής γνώσης οδηγεί σε ένα φαύλο κύκλο. Κάθε μαθηματική θεωρία εξαρτάται από ένα σύνολο παραδοχών, οι οποίες αφού είναι υποθέσεις δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελούν βέβαιη και ασφαλή γνώση. Κάθε προσπάθεια να διασφαλιστεί η βεβαιότητα τους οδηγεί σε μια επ' άπειρον παλινδρόμηση και επαναγωγή: η απόδειξη τους προϋποθέτει ή ένα νέο σύνολο παραδοχών ή ένα σύνολο ήδη αποδειγμένα αληθών προτάσεων, η απόδειξη των οποίων όμως βασίζεται επίσης σε ένα σύνολο υποθέσεων. Τελικά, η μαθηματική αλήθεια, εξαρτάται από ένα σύνολο υποθέσεων, οι οποίες υιοθετούνται χωρίς απόδειξη και επομένως είναι αδύνατον να διασφαλιστεί η απόλυτη αλήθεια της μαθηματικής γνώσης. Η θέση αυτή αποτελεί το βασικό επιχείρημα εναντίον της δυνατότητας για απόλυτη, και αδιάψευστη μαθηματική γνώση και έρχεται σε άμεση αντίθεση με τη λογική των απολυτοκρατικών απόψεων.

Στη βάση της αντίθεσης αυτής διατυπώθηκαν μια σειρά νέων φιλοσοφικών απόψεων για τη μαθηματική γνώση και πρακτική. Οι απόψεις αυτές έχουν ως αφετηρία τους την παραδοχή, ότι η μαθηματική γνώση είναι προϊόν κοινωνικών διαδικασιών και ως τέτοιο δεν αποτελεί μια αδιάψευστη, αντικειμενική και απόλυτη γνώση, αυτόνομη και κατηγορικά διακριμένη από τις άλλες μορφές της ανθρώπινης γνώσης, απαλλαγμένη πλήρως από τα εμπειρικά δεδομένα και τις αντιφάσεις της κοινωνικής πραγματικότητας (Kitcher 1984, Tymoczo 1986, Wittgenstein 1956). Αντίθετα, όπως και κάθε επιστημονική γνώση, υπόκειται σε διαρκείς διαψεύσεις και αναθεωρήσεις (Lakatos 1976). Η θέση αυτή σηματοδοτεί τις απόψεις αυτές, οι οποίες στη διεθνή βιβλιογραφία αποκαλούνται πλέον «διαψευσιοκρατικές».

Δύο στοιχεία των απόψεων αυτών, που ενδιαφέρουν εδώ, πρέπει να υπογραμμιστούν. Πρώτο, οι απόψεις αυτές εισάγουν μια εννοιολογική αναθεώρηση της φύσης των μαθηματικών. Τα μαθηματικά δεν θεωρούνται ως ένα σώμα καθαρής και αφηρημένης γνώσης, που υπάρχει σε μια υπερ-ανθρώπινη, αντικειμενική σφαίρα ιδεών και εκφράζεται τελεσιδικα από ένα κλειστό σύστημα προτάσεων και από μια σειρά διαδικασιών τεκμηρίωσης της αλήθειας των προτάσεων αυτών. Αντίθετα, τα μαθηματικά, ως γνώση, σχετίζονται με σύνολα

κοινωνικών πρακτικών, που το καθένα έχει την ιστορία του, τα πρόσωπα, τους θεσμούς και τις κοινωνικές του οριοθετήσεις, τις συμβολικές του μορφές, τις επιδιώξεις και τις σχέσεις εξουσίας (Tympoczko 1986).

Στο πλαίσιο αυτό, η μαθηματική απόδειξη ως διαδικασία επικύρωσης των μαθηματικών αληθειών παύει να αποτελεί τον πυρήνα της μαθηματικής γνώσης και αποκτά έναν εντελώς διαφορετικό ρόλο. Όπως έχει αναλυθεί από τον Lakatos (1976), η μαθηματική γνώση οργανώνεται ως ένα υποθετικό-παραγωγικό σύστημα, του οποίου όμως κυρίαρχο στοιχείο δεν αποτελεί η μαθηματική απόδειξη, ως διαδικασία με την οποία μεταβιβάζεται η αλήθεια από μια σειρά παραδοχών που έχουν υποτεθεί αληθείς σε ένα συμπέρασμα, όπως δέχονται οι απολυτοκρατικές απόψεις για τα μαθηματικά. Αντίθετα, κυρίαρχο στοιχείο της μαθηματικής γνώσης αποτελούν οι διαδικασίες με τις οποίες και μέσα από τις οποίες δημιουργείται και συγκροτείται η γνώση αυτή. Οι διαδικασίες αυτές, αρθρώνονται με επίκεντρο τη διατύπωση υποθέσεων και εικασιών για την επίλυση προβλημάτων, την επιβεβαίωση ή τη διάψευση και αναδιατύπωση των αρχικών υποθέσεων και εικασιών, τη διατύπωση νέων υποθέσεων, εικασιών και προβλημάτων που προκύπτουν στα πλαίσια των δραστηριοτήτων αυτών κ.ο.κ. Στις διαδικασίες αυτές, η απόδειξη αποτελεί «... ένα νοητικό πείραμα – ή σχεδόν πείραμα – το οποίο αναλύει την αρχική εικασία σε υποεικασίες ή λήμματα, ενθέτοντας έτσι αυτή την εικασία σε ένα εντελώς διαφορετικό σώμα γνώσεων» (Lakatos, 1976, σ. 29 ελληνικής έκδοσης). Κύριος ρόλος της απόδειξης, λοιπόν, δεν είναι η τεκμηρίωση της αλήθειας των μαθηματικών προτάσεων, αλλά η ανάλυση, η διευκρίνιση και η δικαιολόγηση της υπό διερεύνηση εικασίας, ώστε να καταστεί δυνατή η αποδοχή ή η απόρριψή της.

Δεύτερο, οι απόψεις της διαψευσιμότητας της μαθηματικής γνώσης αποδέχονται και υπερασπίζονται ως θεμιτά φιλοσοφικά αντικείμενα, τις πρακτικές των ανθρώπων που ασκούν μαθηματικές δραστηριότητες, την ιστορία και τις εφαρμογές των μαθηματικών, τη θέση των μαθηματικών στον ανθρώπινο πολιτισμό και άλλα συναφή. Αποδέχονται, δηλαδή, πλήρως το ανθρώπινο πρόσωπο και το ανθρώπινο συστατικό των μαθηματικών (Davis and Hersh 1980). Άρα, η μαθηματική γνώση δεν μπορεί να θεωρείται ως απόλυτα

αντικειμενική, ανεξάρτητη από τις κυρίαρχες κοινωνικές αξίες, υποκείμενη αποκλειστικά σε μια δικιά της αυτόνομη εσωτερική λογική. Αντίθετα, μέσα από την κοινωνική της προέλευση και την ιστορική της εξέλιξη η μαθηματική γνώση διαπλέκεται με το σύνολο της ανθρώπινης γνώσης και σφραγίζεται από τις κυρίαρχες ιδεολογίες, που οριοθετούν τα πλαίσια ανάπτυξης της (Wilder 1981).

Στενά συνυφασμένη με τις θεωρήσεις της διαψευσιμότητας της μαθηματική γνώσης και άμεση συνέπεια τους είναι μία επίσης νέα προσέγγιση στην κοινωνιολογία της μαθηματικής πρακτικής. Για την προσέγγιση αυτή, το κοινωνικό πλαίσιο και οι επαγγελματικές κοινότητες των ερευνητών μαθηματικών διαδραματίζουν ένα κεντρικό ρόλο στην δημιουργία και επικύρωση της μαθηματικής γνώσης (Davis and Hersh, 1980; Kitcher, 1984; Latour, 1987). Η κοινωνική οργάνωση και δομή των κοινοτήτων αυτών, η οποία δεν έχει καθόλου ευκαιριακό και τυχαίο χαρακτήρα, διαμορφώνει τους μηχανισμούς δημιουργίας και επικύρωσης της μαθηματικής γνώσης, αποτελώντας ταυτόχρονα το πλαίσιο διαφύλαξης και το πεδίο εφαρμογής και μετάδοσης της άρρητης και άτυπης μαθηματικής γνώσης.

Από την οπτική αυτή και σε συνδυασμό με τα προαναφερθέντα, η αποδοχή ή όχι μιας μαθηματικής απόδειξης, άρα και της μαθηματικής αλήθειας που η απόδειξη αυτή τεκμηριώνει, είναι ουσιαστικά μια κοινωνική πράξη, η οποία δευτερευόντως συναρτάται με την αυστηρή τήρηση των κανόνων της παραγωγικής λογικής (Kitcher 1984, Lakatos, 1976, Tymoczko 1986, Wilder 1981). «Μια απόδειξη γίνεται απόδειξη μετά την κοινωνική πράξη της ‘αποδοχής της ως απόδειξης’» (Manin, 1977, σ. 48).

Η δομή επομένως και το περιεχόμενο μιας μαθηματικής απόδειξης, ως τεκμηρίου του αποτελέσματος μιας διαδικασίας, στοχεύει στην παροχή πειστικών επιχειρημάτων και εγγυήσεων στη μαθηματική κοινότητα για την αποδοχή της αλήθειας μιας μαθηματικής πρότασης. Κατά συνέπεια, για την επιτυχία του στόχου αυτού μια μαθηματική απόδειξη ανταποκρίνεται πρώτιστα στα κριτήρια επάρκειας της μαθηματικής απόδειξης, τα οποία ασπάζεται η κυρίαρχη μαθηματική κοινότητα μιας ορισμένης εποχής. Τα κριτήρια αυτά όμως, όπως έχει ιστορικά διαπιστωθεί, είναι κυρίως άτυπα και άρρητα, καθιερωμένα μέσα από την επικρατούσα μαθηματική πρακτική. Επομένως, στη

δημιουργία και επικύρωση της μαθηματικής γνώσης οι αποδεκτές πρακτικές απόδειξης και τα πρότυπα γραπτής έκφρασης της είναι καθοριστικά (Davis and Hersh 1980, Ernest 1991, 1997, Lakatos, 1976, Restivo, 1992, Tymoczko 1986).

Εξελίξεις στα σχολικά μαθηματικά

Ποιες είναι οι επιπτώσεις στα σχολικά μαθηματικά των εξελίξεων που σκιαγραφήθηκαν προηγούμενα;

Στην παρούσα ανάλυση θεωρείται δεδομένο, ότι το περιεχόμενο και οι πρακτικές των σχολικών μαθηματικών δεν καθορίζονται μονοδιάστατα από τις κυρίαρχες απόψεις για τη μαθηματική γνώση και το χαρακτήρα της, αλλά από έναν ιδιότυπο συνδυασμό των απόψεων αυτών με τις επικρατούσες θεωρήσεις για τη μάθηση και τη διδασκαλία της μαθηματικής γνώσης. Η σχέση μάλιστα της επίδρασης των δυο αυτών παραγόντων στη διαμόρφωση των σχολικών μαθηματικών φαίνεται να μεταβάλλεται κατά εκπαιδευτική βαθμίδα, σε συνάρτηση με το ρόλο που οι κυρίαρχες κοινωνικές δυνάμεις αποδίδουν στο σχολείο ή στα σχολεία κάθε βαθμίδας. Έτσι στο Δημοτικό σχολείο είναι οι κυρίαρχες θεωρήσεις για τη μάθηση και τη διδασκαλία της μαθηματικής γνώσης, ενώ στο Λύκειο οι κυρίαρχες απόψεις για τη μαθηματική γνώση και το χαρακτήρα της ο πρωταρχικός παράγοντας, που επιβάλλει το πλαίσιο διαμόρφωσης του περιεχομένου και των πρακτικών της διδασκαλίας των μαθηματικών. Στο Γυμνάσιο εντοπίζεται μια ισόρροπη, σε γενικές γραμμές, επίδραση, η οποία σε συνδυασμό με το ρόλο που κατά εποχή του αποδίδεται αποκλίνει υπέρ του ενός ή του άλλου παράγοντα.

Σε συνάρτηση με το συνδυασμό των κυρίαρχων απόψεων για τη μαθηματική γνώση με τις επικρατούσες θεωρήσεις για τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών, ένας τρίτος, εξίσου καθοριστικός, παράγοντας παρεμβαίνει στη διαμόρφωση του περιεχομένου και των πρακτικών των σχολικών μαθηματικών.

Όπως έχει αλλού αναλυθεί (Χασάπης, 1996), τα σχολικά μαθηματικά εκτός από φορέας στοιχείων της μαθηματικής γνώσης είναι και φορέας μιας κοινωνικής ιδεολογίας για τη μαθηματική γνώση. Διδάσκουν δηλαδή παράλληλα, κανόνες και πρακτικές κατάλληλης

χρησιμοποίησης της μαθηματικής γνώσης και των αντικειμένων της, που στοχεύουν στη συγκρότηση μιας ειδικής σχέσης των παιδιών με το αντικείμενο των μαθηματικών. Με άλλα λόγια, διδάσκουν κανόνες συμπεριφοράς απέναντι στη θεωρητική και κοινωνική λειτουργία της μαθηματικής γνώσης. Τα στοιχεία που διαμορφώνουν το πλαίσιο της ιδεολογικής αυτής λειτουργίας των σχολικών μαθηματικών αξιοποιούν οπτικές των κυρίαρχων απόψεων για το χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης, απορρέουν όμως πρωταρχικά από δομικά στοιχεία της κυρίαρχης ιδεολογίας.

Πρέπει βέβαια να σημειωθεί, ότι οι επιδράσεις του πλέγματος των παραγόντων που προαναφέρθηκαν στη διαμόρφωση των σχολικών μαθηματικών δεν έχει σε καμία περίπτωση τη μορφή μιας άμεσης λογικής συνεπαγωγής. Ένα πλήθος κοινωνικών, πολιτιστικών και πολιτικών παραγόντων παρεμβαίνουν σε διάφορα επίπεδα και βαθμούς διαθλώντας, πολλές φορές καθοριστικά, την επίδραση των στοιχείων που προαναφέρθηκαν στη διαμόρφωση των σχολικών μαθηματικών. Η ανάλυση του Ernest (1991) για τις ιδεολογίες των αναλυτικών προγραμμάτων των σχολικών μαθηματικών είναι από την οπτική αυτή ιδιαίτερα χρήσιμη και διαφωτιστική.

Κατά τη δεκαετία του 1960 συντελέστηκαν οι μεγαλύτερες σε έκταση και βάθος μεταρρυθμίσεις των σχολικών μαθηματικών σε όλες σχεδόν τις χώρες του κόσμου. Για τα χαρακτηριστικά, τους στόχους, τους φορείς και τις ευρύτερες επιπτώσεις των μεταρρυθμίσεων αυτών έχουν γραφεί πολλά (ενδεικτικά, Θωμαΐδης, 1991, Τουμάσης, 1987). Στη Ελλάδα οι μεταρρυθμίσεις αυτές ξεκίνησαν το 1961 και μέσα από ποικίλες παλινδρομήσεις ολοκληρώθηκαν μετά από μια εικοσαετία. Μέσα από τις μεταρρυθμίσεις αυτές αποτυπώθηκαν στα σχολικά μαθηματικά, που τότε αποκλήθηκαν «νέα» ή «μοντέρνα» μαθηματικά, ουσιαστικά στοιχεία μιας από τις κυρίαρχες απολυτοκρατικές απόψεις για τη μαθηματική γνώση, υπό τους όρους των Πιαζετιανών θεωρήσεων για τη νοητική ανάπτυξη του ατόμου και τη μάθηση των μαθηματικών.

Σε πολύ γενικές γραμμές, η άποψη για τη μαθηματική γνώση (προϊόν επεξεργασιών μιας ομάδας Γάλλων μαθηματικών που έμεινε γνωστή ως ομάδα Bourbaki) πρόβαλλε την επαναδιατύπωση των μαθηματικών με τη γλώσσα της θεωρίας των συνόλων, την αυστηρά λογική θεμελίωση τους και την απόλυτα αξιωματική-παραγωγική οργάνωση τους με βάση

μια σειρά θεμελιωδών μαθηματικών δομών (διατακτικές, αλγεβρικές και τοπολογικές δομές). Σε μια τέτοια οπτική, η «μύηση» και η «εξοικείωση» με τη «διαδικασία της μαθηματικής απόδειξης» αποτελεί ουσιαστικό στοιχείο του περιεχομένου και των πρακτικών της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Βασική θέση, όμως, των θεωρήσεων του Πιαζέ και των συνεργατών του αποτελεί η διάκριση της νοητικής συγκρότησης και ανάπτυξης του ατόμου σε στάδια και περιόδους, απόλυτα συναρτημένα με τη βιολογική του εξέλιξη και την προοδευτική κοινωνικοποίηση της σκέψης του. Σε κάθε στάδιο και περίοδο ανάπτυξης, η νοητική συγκρότηση του ατόμου χαρακτηρίζεται από συγκεκριμένες ιδιότητες, οι οποίες του προσδίδουν και αντίστοιχες δυνατότητες μάθησης και λογικών λειτουργιών (δες ενδεικτικά, Piaget, 1967).

Η ευχέρεια διατύπωσης κρίσεων με τη μορφή λογικών προτάσεων, που η αλήθεια τους ελέγχεται με βάση όχι το εμπειρικό τους περιεχόμενο αλλά τη λογική τους δομή και η σύνθεση συλλογισμών, η δυνατότητα επομένως ανάπτυξης υποθετικο-παραγωγικής λογικής σκέψης, καθίσταται εφικτή από την ηλικία των 12 ετών περίπου και μετέπειτα, κατά την περίοδο δηλαδή των τυπικών λογικών πράξεων όπως ορίζεται στις θεωρήσεις του Πιαζέ, η οποία συμπίπτει με τη σχολική περίοδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Αντίθετα, κατά την προηγούμενη περίοδο της νοητικής ανάπτυξης του ατόμου, που διαρκεί από την ηλικία των 7 μέχρι την ηλικία των 11 ετών περίπου, την περίοδο των συγκεκριμένων λογικών πράξεων, η οποία συμπίπτει με τη σχολική περίοδο της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, η νοητική ευχέρεια περιορίζεται σε λογικές πράξεις, οι οποίες περιλαμβάνουν ομαδοποιήσεις και διακρίσεις τάξεων, συνθέσεις και αντιστοιχίσεις τάξεων καθώς και ταξινομήσεις και διατάξεις τάξεων με βάση τις διαφορές τους, σε άμεση όμως αντιστοιχία με φυσικές πράξεις και χειρισμούς. Η σκέψη του ατόμου κατά την περίοδο αυτή χαρακτηρίζεται επομένως από τη δυνατότητα διατύπωσης λογικών συνδυασμών, αλλά την αδυναμία διατύπωσης λογικών προτάσεων και τον έλεγχο υποθέσεων.

Στη βάση αυτή, η μαθηματική απόδειξη περιορίζεται αποκλειστικά στα αναλυτικά προγράμματα, στα σχολικά βιβλία και στη διδασκαλία των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, τα οποία κατά περιόδους αποκτούν ιδιαίτερα φεραμαλιστικό περιεχόμενο, ενώ τα μαθηματικά του Δημοτικού σχολείου διατυπώνονται απλώς στη γλώσσα των συνόλων, χωρίς να περιλαμβάνουν καμία μορφή επιχειρηματολογίας για τη δικαιολόγηση συμπερασμάτων, αφού οριοθετούνται από «τις δυνατότητες της διανοητικής αναπτύξεως» του παιδιού σύμφωνα με το αντίστοιχο αναλυτικό πρόγραμμα (Π.Δ. 1034/1977).

Από τις αρχές της δεκαετίας του 1980, κάτω από το βάρος της διαπιστωμένης αποτυχίας των μεταρρυθμίσεων αυτών και υπό την επίδραση των προαναφερθέντων εξελίξεων στην πρακτική και στη φιλοσοφία των μαθηματικών άρχισε να προβάλλεται, αρχικά από μεμονωμένους ερευνητές και στη συνέχεια από συλλογικούς φορείς και οργανισμούς, η ανάγκη ριζικής τροποποίησης του περιεχομένου και των πρακτικών των σχολικών μαθηματικών.

Έκτοτε, προβάλλονται, αναπτύσσονται και κατά περίπτωση υλοποιούνται δύο εντελώς διαφορετικές εκδοχές σχολικών μαθηματικών. Κοινό στοιχείο των εκδοχών αυτών αποτελεί η αντίθεση τους σε κάθε απολυτοκρατική θεώρηση της μαθηματικής γνώσης, αλλά και η μονομερής ανάγνωση, ερμηνεία και προβολή στο επίπεδο των σχολικών μαθηματικών, ουσιαστών χαρακτηριστικών της μαθηματικής δραστηριότητας, όπως είναι για παράδειγμα η επίλυση προβλημάτων, τα οποία αναδείχτηκαν από τις νέες φιλοσοφικές απόψεις για το χαρακτήρα και το περιεχόμενο της μαθηματικής πρακτικής. Στοιχείο που διαφοροποιεί τις δύο εκδοχές των σχολικών μαθηματικών αποτελεί η υιοθέτηση δύο ουσιαστικά αντιθετικών θεωρήσεων για τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών. Κύρια στοιχεία των δύο αυτών θεωρήσεων σκιαγραφούνται στη συνέχεια, χωρίς διεκδίκηση πληρότητας.

Η μια εκδοχή υιοθετεί και επαναφέρει στο προσκήνιο θεωρήσεις που αντιμετωπίζουν τη μάθηση ως μια διεργασία ερεθισμάτων και αποκρίσεων, τα οποία έχουν ως αποτέλεσμα μια μόνιμη τροποποίηση της συμπεριφοράς του ανθρώπου. Σε αντιστοιχία με τα προτάγματα των θεωρήσεων αυτών, η εκδοχή αυτή προβάλλει την επιλογή και τη

δόμηση του περιεχομένου και των πρακτικών των σχολικών μαθηματικών γύρω από καθορισμένους στόχους, οι οποίοι διατυπώνονται με παρατηρήσιμους όρους αναμενόμενης συμπεριφοράς και αφορούν γνώσεις, δεξιότητες και στάσεις που συναρτώνται πρώτιστα με το χειρισμό και τη χρήση της μαθηματικής γνώσης (δες ενδεικτικά, Κολέζα, Μακρής & Σούρλας, 1993).

Ως αποτέλεσμα, η εκδοχή αυτή διαφοροποιεί πλήρως τα σχολικά μαθηματικά από τα μαθηματικά ως επιστημονική πρακτική, οπότε και παραβλέπει κάθε στοιχείο δημιουργίας, επικύρωσης και οργάνωσης της μαθηματικής γνώσης. Ανάγει, κατά συνέπεια, τα σχολικά μαθηματικά σε ένα μόνο επίπεδο εργαλειακής μορφής και τα τυποποιεί σ' ένα σύνολο εννοιών και τεχνικών επίλυσης προβλημάτων «της καθημερινής ζωής». Στην οπτική αυτή η μαθηματική απόδειξη αντιμετωπίζεται ως μια από τις στρατηγικές επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων. Η εκδοχή αυτή, επικαλείται ως πρωταρχική την κοινωνική χρησιμότητα της μαθηματικής γνώσης και σήμερα προβάλλεται συστηματικά κυρίως από επιχειρηματικούς φορείς και οικονομικούς οργανισμούς. Το πρόγραμμα PISA – Διεθνούς αξιολόγησης της επίδοσης των μαθητών σε διάφορες χώρες του ΟΟΣΑ (2000) υποβάλλει έμμεσα αυτή την εκδοχή ως αναγκαία για τα σχολικά μαθηματικά.

Η δεύτερη εκδοχή για τα σχολικά μαθηματικά υιοθετεί σύγχρονες μετεξελιξείς των Πιαζετιανών θεωρήσεων για τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών, οι οποίες στη σύγχρονη διεθνή βιβλιογραφία έχουν καταγραφεί με επιμέρους προσδιορισμούς ως κονστρουκτιβιστικές ή κατασκευασιοκρατικές και στην ελληνική ως εποικοδομιστικές.

Η έκθεση των βασικών θέσεων των θεωρήσεων αυτών είναι αδύνατη στα πλαίσια του παρόντος κειμένου, εξαιτίας της ποικιλίας και των ιδιαίτερα λεπτών σε πολλές περιπτώσεις διαφορών τους, οι οποίες προέρχονται από διαφορετικές και ενίοτε αντιθετικές φιλοσοφικές ή επιστημολογικές παραδοχές. Σε γενικές όμως γραμμές, οι θεωρήσεις αυτές, με παραλλαγές ως προς τον ατομικό ή κοινωνικό χαρακτήρα της μάθησης και το ρόλο αντίστοιχα συναφών παραγόντων (δες ενδεικτικά, Rogoff, 1990, Steffe & Cobb 1988, von Glasersfeld, 1995), αντιμετωπίζουν τη μάθηση ως μια ενεργητική διαδικασία κατασκευής

εννοιών και απόδοσης νοημάτων, η οποία χαρακτηρίζεται από την προσαρμογή του ατόμου στον κόσμο των εμπειριών του, η ερμηνεία των οποίων αποτελεί και τη μοναδική υπάρχουσα πραγματικότητα. Η γνώση είναι επομένως μια ατομική και ταυτόχρονα κοινωνική κατασκευή, διαφεύσιμη και σε καμία περίπτωση απόλυτη. Το περιεχόμενο και οι πρακτικές των σχολικών μαθηματικών επιλέγονται και δομούνται για τις θεωρήσεις αυτές γύρω από κατάλληλες δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων, μέσα από τις οποίες παρέχονται ευκαιρίες κατασκευής μαθηματικών εννοιών και απόδοσης μαθηματικών νοημάτων στις αντίστοιχες εμπειρίες. Στα πλαίσια των δραστηριοτήτων αυτών, η διατύπωση και διερεύνηση υποθέσεων, η ανάπτυξη συλλογισμών, η επιχειρηματολογία και ο διάλογος αποτελούν πρωταρχικές μορφές διαπραγμάτευσης και απόδοσης νοημάτων στις ατομικές εμπειρίες, άρα θεμελιώδεις μηχανισμοί κατασκευής της μαθηματικής γνώσης.

Το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών Μαθηματικών (2001) αποτυπώνει χαρακτηριστικά τις δύο εκδοχές, που σκιαγραφήθηκαν προηγούμενα και απεικονίζει την αντιφατικότητα του μεταβατικού παρόντος για τα σχολικά μαθηματικά. Με αναφορά στο ίδιο περιεχόμενο, εκθέτει ως «μεθοδολογικές προσεγγίσεις κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών» τις δύο εκδοχές προτείνοντας τελικά στους εκπαιδευτικούς τη σύνθεση τους με το σκεπτικό ότι «τόσο η πρώτη όσο και η δεύτερη προσέγγιση είναι από μόνες τους ατελείς. Η πρώτη είναι αρκετά περιοριστική στη διατύπωση των στόχων ενώ στη δεύτερη, η δραστηριότητα από μόνη της δεν αντανακλά τον πλούτο της μαθησιακής εμπειρίας» (σ. 247).

Τέλος ...

Η θέση και ο ρόλος της απόδειξης στα σχολικά μαθηματικά αποτελούν σήμερα αντικείμενο μιας συζήτησης σε εξέλιξη, στοιχεία της οποίας αξιοποιούνται, άμεσα ή έμμεσα, για την υποστήριξη επιλογών, οι οποίες διαμορφώνουν καθοριστικά το περιεχόμενο και τις πρακτικές της διδασκαλίας των μαθηματικών στην πρωτοβάθμια και στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση, σε πολλές χώρες του κόσμου και σε κάποιο βαθμό στην Ελλάδα.

Συμπερασματικά των όσων εκτέθηκαν προηγουμένα, τα ακόλουθα τρία ζητήματα, ενδεχομένως μεταξύ άλλων, θα πρέπει, κατά τη γνώμη μου, να περιλαμβάνονται στις οριζουσες του πλαισίου αυτής της συζήτησης:

1. Η υπεράσπιση του επιστημονικού χαρακτήρα της μαθηματικής πρακτικής, συστατικό στοιχείο της οποίας αποτελεί η απόδειξη, ως μέσο παραγωγής και επικύρωσης της μαθηματικής γνώσης, από την οπτική και με τους όρους της ανάλυσης που εκθέτει ο Α. Μπαλτάς στον παρόντα τόμο.
2. Η ανάδειξη των πολλαπλών ρόλων της απόδειξης στην πρακτική της δημιουργίας και επικύρωσης της μαθηματικής γνώσης. Κατά συνέπεια η ανάδειξη της αναγκαιότητας συμπερίληψης όλων των όψεων της αποδεικτικής διαδικασίας στο περιεχόμενο και στις πρακτικές των σχολικών μαθηματικών.

Υπερβαίνοντας τον περιοριστικό ρόλο του αποκλειστικού μέσου επικύρωσης της μαθηματικής αλήθειας, που απέδωσαν στην απόδειξη οι απολυτοκρατικές θεωρήσεις της μαθηματικής γνώσης, θα πρέπει να αναδειχθούν στα σχολικά μαθηματικά και οι ακόλουθες όψεις της μαθηματικής απόδειξης, οι οποίες επίσης αποτελούν ουσιαστικά στοιχεία της επιστημονικής πρακτικής των μαθηματικών (de Villiers 1990):

- Η απόδειξη ως μέσο εξήγησης των λόγων για τους οποίους αποδεχόμαστε την αλήθεια μιας μαθηματικής πρότασης σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο.
- Η απόδειξη ως μέσο συστηματοποίησης μιας σειράς μαθηματικών δεδομένων με την οργάνωση τους σε ένα ενιαίο σύστημα αλληλένδετων παραδοχών, ορισμών και συμπερασμάτων.
- Η απόδειξη ως μέσο επινόησης ή δημιουργίας νέων μαθηματικών δεδομένων, τα οποία προκύπτουν ως λογική αναγκαιότητα από την ανάλυση και τη διερεύνηση ήδη γνωστών μαθηματικών προτάσεων.
- Η απόδειξη ως μέσο συνοπτικής και συνεκτικής παρουσίασης και δημοσιοποίησης της μαθηματικής γνώσης.

- Η απόδειξη ως μέσο συγκρότησης μιας εμπειρικής θεωρίας μέσα από τη διατύπωση και τον έλεγχο εικασιών.
 - Η απόδειξη ως μέσο διερεύνησης του νοήματος ενός ορισμού ή των λογικών συνεπειών μιας παραδοχής.
 - Η απόδειξη ως μέσο μιας νέας ερμηνείας ενός ήδη γνωστού μαθηματικού συμπεράσματος ενταγμένου σε ένα νέο διαφορετικό πλαίσιο.
3. Η ανάδειξη του σημαντικού ρόλου του επιχειρήματος στην πρακτική της δημιουργίας και επικύρωσης της μαθηματικής γνώσης, με τους όρους βέβαια που συμπεριλαμβάνονται στη ανάλυση του Γ. Φουρτιούνη στον παρόντα τόμο. Κατά συνέπεια η αποδοχή της αναγκαιότητας εισαγωγής του επιχειρήματος, τόσο με την παραγωγική όσο και με την ρητορική του έννοια, στις πρακτικές των σχολικών μαθηματικών. Η απόδειξη, στην οπτική αυτή, αντιμετωπίζεται ως μια κατηγορία επιχειρήματος, ως μια δηλαδή λογικά συνεκτική αλληλουχία δηλώσεων, με προκείμενες τις παραδοχές ενός συγκεκριμένου μαθηματικού συστήματος, η οποία στο πλαίσιο του συστήματος αυτού επιτελεί έναν ή περισσότερους από τους ρόλους που προαναφέρθηκαν.

Τέλος, οποιαδήποτε συζήτηση για τη θέση και το ρόλο του επιχειρήματος και της απόδειξης στα σχολικά μαθηματικά, δεν μπορεί να παραβλέπει το γεγονός ότι τα σχολικά μαθηματικά, όπως έχει υπογραμμιστεί, εκτός από φορέας στοιχείων της μαθηματικής γνώσης είναι και φορέας κανόνων και πρακτικών κατάλληλης χρησιμοποίησης της μαθηματικής γνώσης και των αντικειμένων της, που στοχεύουν στη συγκρότηση μιας ειδικής σχέσης των παιδιών με τα μαθηματικά.

Βιβλιογραφικές αναφορές

- Appel, K. & Haken W (1989). Every Planar Map is Four Colorable, *Contemporary Mathematics*, vol. 98, AMS, Providence.
- Babai, L. (1994). Probably True Theorems, Cry Wolf? *Notices of the American Mathematical Society*, 41(5), 453-454.
- Davis, P. J. and Hersh, R.: 1980, *The Mathematical Experience*, Birkhauser, Boston, Ελληνική έκδοση: *Η μαθηματική Εμπειρία*, Εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα.
- de Villiers, M.: 1990, 'The role and function of proof in mathematics', *Pythagoras* 24, 17-24.
- Ernst, P. (1991), *The Philosophy of Mathematics Education*, Falmer Press, London.
- Ernest, P. (1998), *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*, SUNY Press, Albany, New York.
- Hanna, G. (2000), Proof, explanation and exploration: an overview, *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23.
- Horgan, J. (1993). The Death of Proof., *Scientific American*, 269(4), 93-103
- Jaffe, A. & Quinn, F. (1993). Theoretical Mathematics : Towards a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 29(1), 1-13.
- Kitcher, P. (1984), *The Nature of Mathematics Knowledge*, Oxford University Press, Oxford.
- Lakatos, I. (1976), *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, Cambridge.
Ελληνική έκδοση: Lakatos, I. (1996), *Αποδείξεις και Ανασκευές*, Τροχαλία, Αθήνα.
- Latour, B.: 1987, *Science in Action*, Harvard University Press, Cambridge, MA.
- OECD (2000) *Measuring Student Knowledge and Skills: The PISA 2000 Assessment of Reading, Mathematical and Scientific Literacy*, OECD, Paris.

- Piaget, J.(1967), *The Psychology of Intelligence*, Routledge and Kegan Paul, London (ελληνική έκδοση: *Η Ψυχολογία της Νοημοσύνης*, Καστανιώτης, Αθήνα , 1986)
- Restivo, S.: 1992, *Mathematics in Society and History*, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands.
- Rogoff, B. (1990) *Apprenticeship in Thinking: cognitive development in a social context*, Oxford University Press, New York.
- Roulet, G. (1992), The Philosophy of Mathematics Education: “What does this mean for the children in the classromm?”, *Philosophy of Mathematics Education Newsletter*, no. 6, 8-9.
- Steffe, L. & Cobb, P. (1988), *Construction of Arithmetical Meanings and Strategies*, Springer-Verlag, New York.
- Thurston, W. P. (1994). On Proof and Progress in Mathematics, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30(2), 161-177.
- Tymoczko, T. (ed.), (1986), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Birkhauser, Boston.
- van Bendegem J. P. (2003), Η δημιουργική ανάπτυξη των μαθηματικών. Στο Δ.Χασάπης (επιμ.) *Επιχείρημα και απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά*, ΠΤΔΕ ΑΠΘ, Θεσσαλονίκη.
- von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. The Falmer Press, Washington, D. C.
- Wilder, R.L. (1981), *Mathematics as a Cultural System*, Pergamon, Oxford.
- Wittgenstein, L. (1956), *Remarks on the Foundations of Mathematics*, revised edition, MIT Press, Cambridge, 1978.
- Θωμαΐδης, Γ. (1991), Οι συντεταγμένες της σχολικής γεωμετρίας στην Ελλάδα (1960-1990), *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, 61, 27-38.
- Κολέζα, Ε. Γ., Μακρής, Κ. Ν. & Σούρλας, Κ.Β. (1993), *Θέματα διδακτικής των μαθηματικών*, Gutenberg, Αθήνα.

- Μπαλτάς Α. (2003), Το επιστημονικό καθεστώς των μαθηματικών ή συνιστούν τα μαθηματικά «επιστημονική ήπειρο»; Στο Δ.Χασάπης (επιμ.) Επιχείρημα και απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά, ΠΤΔΕ ΑΠΘ, Θεσσαλονίκη.
- Τουμάσης, Χ. (1987), Μια ανασκόπηση του παγκόσμιου σκηνικού της δευτεροβάθμιας μαθηματικής εκπαίδευσης τα τελευταία 200 χρόνια, *Ευκλείδης Γ*, ΕΜΕ, 17-60.
- ΥΠΕΠΘ, *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών Μαθηματικών*, ΦΕΚ 1366/Β/18-10- 2001.
- Φουρτούνης Γ. (2003), Για τη διπλή σημασία της *παραγωγής*: η αποδεικτική επιστήμη ως κοινωνική πρακτική, *στον παρόντα τόμο*.
- Χασάπης Δ. (1996), Τα πλαίσια αναφοράς των μαθηματικών εννοιών κατά τη διδασκαλία τους στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση και οι ιδεολογικοί τους προσανατολισμοί, *Τα Μαθηματικά στην Εκπαίδευση και την Κοινωνία, Πρακτικά 1ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, Αθήνα, σελ. 113 - 123

Η γλώσσα των μαθηματικών, η γλώσσα των φυσικών επιστημών, η γλώσσα των εκπαιδευτικών πρακτικών

Εισαγωγή

Υπό το βάρος μιας παράδοσης, η οποία σηματοδοτείται από την περίφημη ρήση του Γαλιλαίου ότι το βιβλίο της φύσης «είναι γραμμένο στη γλώσσα των μαθηματικών, και οι χαρακτήρες του είναι τρίγωνα, κύκλοι, και άλλα γεωμετρικά σχήματα, χωρίς τα οποία είναι ανθρωπίνως αδύνατο να καταλάβουμε έστω και μια λέξη από αυτό. χωρίς αυτά περιφέρεται κανείς σε έναν σκοτεινό λαβύρινθο» (Γαλιλαίος, *Il Saggiatore*, 1632) ένα μεγάλο μέρος των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών, αλλά και των αντίστοιχων εκπαιδευτικών, θεωρεί τα μαθηματικά ως «τη γλώσσα» των φυσικών επιστημών. Στη λογική της πεποίθησης αυτής η ανάγνωση του «βιβλίου της φύσης» προϋποθέτει την εκμάθηση της μαθηματικής γλώσσας, χωρίς να απαιτεί μια συγκεκριμένη επιστημολογική οπτική για τις φυσικές επιστήμες, παράλληλα όμως τίθενται πολλά και ουσιώδη ερωτηματικά για τον επιστημονικό χαρακτήρα των μαθηματικών και την εγκυρότητα της μαθηματικής γνώσης.

Αν θεωρήσουμε, όμως, τα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες ως συστήματα παραγωγής νοημάτων για τον υλικό και κοινωνικό κόσμο, την οργάνωση και τη λειτουργία του τότε, παρά τα διαφορετικά αντικείμενα τους και τις διακριτές πρακτικές έρευνας και τεκμηρίωσης των συμπερασμάτων τους, τα δύο αυτά διαφορετικά συστήματα κατανοήσεων της πραγματικότητας μοιράζονται μια κοινή, υβριδική, γλώσσα, η οποία αποτελεί σύνθεση των λεγόμενων φυσικών γλωσσών (όπως ορίζονται στη γλωσσολογία) με διάφορους κώδικες συμβόλων και κανόνων ερμηνείας τους, πλαισιωμένων από γραφικές και εικονικές παραστάσεις διαφόρων τύπων, όλων αυτών ενταγμένων σε σημειωτικά συστήματα τα οποία παρέχονται από τα τεχνολογικά περιβάλλοντα εντός των οποίων ασκούνται οι μαθηματικές και οι επιστημονικές δραστηριότητες (Lemke, 2004).

Η ιδιοποίηση της υβριδικής αυτής γλώσσας και η εξοικείωση με τη χρήση της για την δημιουργία μαθηματικών και επιστημονικών νοημάτων βρίσκεται (από την οπτική της κοινωνικής σημειωτικής η οποία υιοθετείται εδώ), στον πυρήνα της μάθησης των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών και, επομένως, στην προτεραιότητα της θεσμικά οργανωμένης διδασκαλίας τους στο σχολείο.

Για το ζήτημα αυτό έπονται επιλεκτικά και αναπόφευκτα αποσπασματικά σχόλια, τα οποία αιτιολογούν μια διδακτική πρόταση για τα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες του σχολικού προγράμματος.

Η δημιουργία νοήματος

Η δημιουργία νοήματος είναι μια υλική διαδικασία και παράλληλα μια κοινωνική σημειωτική πρακτική (Lemke, 1995), η οποία εκτός από τη γλώσσα συνδυάζει - με κριτήρια λειτουργικά - όλα τα πολιτισμικά αναπτυγμένα και κοινωνικά καθιερωμένα, διαθέσιμα, σημειωτικά συστήματα: γλωσσικά, συμβολικά, εικονογραφικά, κινητικά, ηχητικά και γενικότερα πραξιακά. Η δημιουργία μαθηματικών νοημάτων και νοημάτων των φυσικών επιστημών δεν μπορεί, επομένως, να κατανοηθεί μόνο μέσα από τη χρήση της γλώσσας με τη μορφή γραπτών κειμένων ή και προφορικής ομιλίας, ιδιαίτερα μάλιστα σε συνθήκες μάθησης και διδασκαλίας.

Η γλώσσα δεν είναι ανεξάρτητη από τις υλοποιημένες κοινωνικές πρακτικές της χρήσης της, από τη γραφή και την ομιλία, καθώς και από τα κοινωνικο-πολιτισμικά πλαίσια μέσα στα οποία προσδιορίζονται τα νοήματα της γραφής και της ομιλίας. Από τις παρα-γλωσσικές πράξεις που συνοδεύουν τη γραφή (γραφικοί χαρακτήρες, μορφές γραφής, τυπογραφικά σημάδια) και την ομιλία (φωνήματα, μορφασμοί, χειρονομίες, κινήσεις του σώματος), οι οποίες και τροποποιούν το νόημα μιας λέξης ή μιας ολόκληρης γλωσσικής έκφρασης. Η υλική και κοινωνική πραγματικότητα, επομένως, τόσο σε ατομικό όσο και σε συλλογικό επίπεδο, δεν νοηματοδοτείται μόνο και αποκλειστικά από τη γλώσσα.

Οι πράξεις δημιουργίας νοήματος από τον συνδυασμό γλώσσας, εικόνων, σχεδίων, διαγραμμάτων και συμβόλων προέρχονται από την κοινή υλική βάση των σημειωτικών αυτών μέσων και την αλληλένδετη ανάπτυξη τους μέσα από τη χρήση τους στις ανθρώπινες δραστηριότητες, ενώ σύμφωνα με τον Lemke (1990, 1995) οργανώνονται με επίκεντρο τρεις σημειωτικές λειτουργίες:

1. Μια λειτουργία «παρουσίασης» μιας κατάστασης (ανα-παραστατική στο επίπεδο της γλωσσικής λειτουργίας κατά τον Halliday), η οποία ορίζει την οπτική μιας προσέγγισης, κατασκευάζει ένα θέμα, εκθέτει σχόλια και διατυπώνει αποφάνσεις. Χρησιμοποιεί τα μέσα της γλώσσας, το λεξιλόγιο και τη γραμματική της, για να προσδιορίσει σχέσεις και διαδικασίες, για να ορίσει τους συμμετέχοντες σ' αυτές τις σχέσεις και τις διαδικασίες και για να περιγράψει περιστάσεις (πότε, που, πως, γιατί) εντός των οποίων εμφανίζονται ή εξελίσσονται. Στις εικονογραφικές παραστάσεις αυτή είναι αναπαραστατική λειτουργία τους, η οποία παρουσιάζει τη συνολική εικόνα μιας κατάστασης, με τα επιμέρους στοιχεία της συναρτημένα σε ένα όλο, το οποίο απεικονίζει ένα «συμβάν» ή μια ερμηνεία του.
2. Μια λειτουργία «προσανατολισμού» (δια-προσωπική στο επίπεδο της γλωσσικής λειτουργίας κατά τον Halliday), η οποία ταυτόχρονα με την «παρουσίαση» συγκροτεί μια «θέση» απέναντι στην παρουσιαζόμενη κατάσταση. Θέση, η οποία δηλώνει ερμηνείες, αποδίδει αξιολογικά χαρακτηριστικά, εκθέτει προθέσεις αποδοχής ή απόρριψης, κατασκευάζει μια πραγματική ή ιδεατή σχέση δημιουργού και (πραγματικού ή φανταστικού) ερμηνευτή του νοήματος και γενικότερα τοποθετεί τον δημιουργό του νοήματος και το «κείμενο» (με την έννοια της υλικής πραγμάτωσης του λόγου) στον κοινωνικά προσδιορισμένο χώρο όλων των ενδεχόμενων απόψεων και λόγων για την συγκεκριμένη κατάσταση. Στο επίπεδο της γλώσσας ο «προσανατολισμός» κατασκευάζει τη «λεκτική πράξη» η οποία επιτελείται (πληροφόρηση, ερώτηση, προσταγή) και την κοινωνική σχέση την οποία συνάπτει ο ομιλών με τον (πραγματικό ή φανταστικό) ακροατή του. Η λειτουργία αυτή επιτελείται στο πλαίσιο των ευρύτερων κοινωνικών σχέσεων, οι οποίες υπερβαίνουν κάθε συγκεκριμένο επικοινωνιακό γεγονός ή «κείμενο» σε συνάφεια

με άλλες διατυπωμένες απόψεις ή θέσεις. Στις εικονογραφικές παραστάσεις η λειτουργία αυτή τοποθετεί τον παρατηρητή σε μια οπτική θέση και διαμορφώνει έτσι μια σχέση του με την απεικονιζόμενη κατάσταση.

3. Μια «οργανωτική» λειτουργία στη δημιουργία νοήματος (κειμενική στο επίπεδο της γλωσσικής λειτουργίας κατά τον Halliday), η οποία ορίζει το όλο και τα μέρη του στο χώρο της υλικής πραγμάτωσης του λόγου καθώς και στο χώρο της ίδιας της πράξης της δημιουργίας νοήματος. Στο επίπεδο της γλώσσας σημαίνει το συνδυασμό λέξεων για τη διατύπωση φράσεων, το συνδυασμό φράσεων για τη διατύπωση προτάσεων, την αλληλουκία προτάσεων για την διατύπωση ευρύτερων κειμενικών δομών. Στις εικονογραφικές παραστάσεις αυτή είναι συνθετική λειτουργία τους, η οποία οργανώνει την απεικόνιση των μερών σε ένα όλο, χρησιμοποιώντας διάφορες τεχνικές, όπως το χρώμα, την προοπτική, ή το φόντο.

Στη δημιουργία μαθηματικών και επιστημονικών νοημάτων συμπλέκονται και οι τρεις αυτές λειτουργίες για κάθε μια από τις οποίες επιστρατεύονται και χρησιμοποιούνται διάφορα σημειωτικά μέσα το καθένα σε διαφορετικούς, κατά περίπτωση, βαθμούς. Οι διαφορετικοί συνδυασμοί νοημάτων οι οποίοι προκύπτουν από τις διαφορετικές αυτές λειτουργίες συγκροτούν τις «μορφές λόγου» (register) της επιστημονικής κοινότητας των μαθηματικών και των επιστημόνων των διαφόρων κλάδων των φυσικών επιστημών. Με την επισήμανση του Martin (1992) κατά νου, ότι συγκεκριμένοι συνδυασμοί νοημάτων, άρα και συγκεκριμένες μορφές λόγου έχουν αναπτυχθεί ιστορικά και καθιερωθεί πολιτισμικά από διάφορες κοινότητες πρακτικής.

Τα προηγούμενα σημαίνουν ότι το νόημα κάθε «κειμένου», ως υλικής πραγμάτωσης του λόγου, είναι προϊόν ενός δημιουργικού και ταυτόχρονα ενός συμβατικού συνδυασμού των λειτουργιών της παρουσίασης, του προσανατολισμού και της οργάνωσης κατά τη δημιουργία του. Στην περίπτωση των μαθηματικών και των επιστημονικών «κειμένων» εμπλέκονται καθοριστικά στο δημιουργικό και ταυτόχρονα στο συμβατικό αυτό συνδυασμό και τα γλωσσικά, συμβολικά, εικονογραφικά, τεχνικά σημειωτικά μέσα.

Η υβριδική γλώσσα των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών

Τα μαθηματικά είναι πρωτίστως, αλλά όχι αποκλειστικά, ένας λόγος για τις νοητικές κατασκευές της ανθρώπινης σκέψης, ενώ οι φυσικές επιστήμες ένας λόγος για τις υλικότητες του κόσμου. Η ανθρώπινη σκέψη και οι υλικότητες του κόσμου, παρά τη διάκριση τους (προϊόν της Καρτεσιανής μας κληρονομιάς) είναι οργανικά συναρτημένες και αμοιβαία αναπτυσσόμενες, ενώ τα μαθηματικά και οι φυσικές επιστήμες ως λόγος, ο οποίος ενοποιεί κοινωνικές σημειωτικές πρακτικές και δραστηριότητες διαφόρων μορφών και τύπων, συσχετίζει τα πολιτισμικά καθιερωμένα αναλυτικά συστήματα δημιουργίας νοημάτων με τις υποκείμενες υλικές διαδικασίες δια των οποίων οι άνθρωποι εντάσσονται και δρουν στο φυσικό και κοινωνικό τους περιβάλλον

Όπως αναλύει ο Lemke (1995), η γλώσσα και όλα τα σημειωτικά συστήματα δημιουργούν νοήματα συνδυάζοντας διαφορές και διατυπώνοντας αναλυτικο-κατηγορικές διακρίσεις, ενώ οι υλικότητες των φυσικών διαδικασιών δημιουργούν νοήματα μέσα από την αλληλόδραση των ανθρώπων με τον κόσμο και τη συμμετοχή τους στην οργάνωση, στη διαχείριση και στον μετασχηματισμό του κόσμου τους. Οι υλικότητες, επομένως, υπερβαίνουν τις αναλυτικές κατηγοριοποιήσεις της γλώσσας, γι' αυτό ο λόγος των φυσικών επιστημών δεν μπορεί να βασιστεί και δεν βασιζείται αποκλειστικά στη γλώσσα. Αξιοποιεί συνδυαστικά όλα τα διαθέσιμα σημειωτικά συστήματα για να εκφράσει όχι μόνο το διακριτό, αλλά και το συνεχές, την ποιότητα αλλά και την ποσότητα, το είδος αλλά και το βαθμό χαρακτηριστικών γνωρισμάτων και μετασχηματισμών των υλικών διαδικασιών, κατασκευάζοντας αντίστοιχα συστήματα δημιουργίας νοημάτων. Αυτή τη σύζευξη ποιοτικών και ποσοτικών νοημάτων, νοημάτων είδους και βαθμού, επιτυγχάνει ο λόγος των μαθηματικών, ο οποίος βασίζεται σε μια ίδια με εκείνη των φυσικών επιστημών υβριδική γλώσσα. Για να ανταποκριθούν σε κάθε αναγκαιότητα, όχι μόνο αναπαράστασης αλλά κυρίως ανάλυσης των αναπαραστάσεων υλικών διαδικασιών, οι οποίες τέθηκαν στο επίκεντρο του ανθρώπινου ενδιαφέροντος, τα μαθηματικά επέκτειναν τις σημασιολογικές τους δυνατότητες εισάγοντας στο λόγο τους νέες κατηγορίες ποιοτήτων και

ποσοτήτων (ρητοί αριθμοί, μεταβλητές, συναρτήσεις, όρια, παράγωγοι, τοπολογίες κλπ) οι οποίες καθιστούσαν εφικτή τη δημιουργία νέων μαθηματικών νοημάτων.

Τα μαθηματικά και οι φυσικές επιστήμες αναδύθηκαν από την ανθρώπινη πρακτική δραστηριότητα και στην εξέλιξη τους οργανώθηκαν συστηματικά ως πεδία γνωστικής δραστηριότητας. Η επίλυση πρακτικών προβλημάτων απαιτήσε τη δημιουργία και τη χρήση νοημάτων ποιότητας και ποσότητας μέσα από συνδυασμούς γλωσσικά διατυπωμένων εννοιών και σχέσεων, οργάνων μέτρησης και σχεδιασμού καθώς και των πρακτικών χρήσης τους, τεχνικών μέτρησης και υπολογισμών, σχεδίων, διαγραμμάτων και εικόνων, πινάκων και συστημάτων οργάνωσης δεδομένων, ακόμα και χειρονομιών. Μέχρι και τις αρχές του 20ου αιώνα τα μαθηματικά και οι φυσικές επιστήμες αναπτύχθηκαν σε απόλυτη συνάφεια και ανέπτυξαν από κοινού τον υβριδικό τους λόγο. Όλα τα επιστημονικά κείμενα από τις αρχές της επιστημονικής επανάστασης και εξής περιλαμβάνουν διαγράμματα και σχέδια, τα οποία συνδυάζουν γεωμετρικές μορφές και ζωγραφικές παραστάσεις, εξισώσεις οι οποίες περιλαμβάνουν σύμβολα και λεκτικές εκφράσεις, πίνακες οι οποίοι συνδυάζουν αριθμητικά δεδομένα και υπολογιστικούς τύπους, αναλύσεις οι οποίες βασίζονται σε έννοιες, περιγραφές και γλωσσικές μεταφορές.

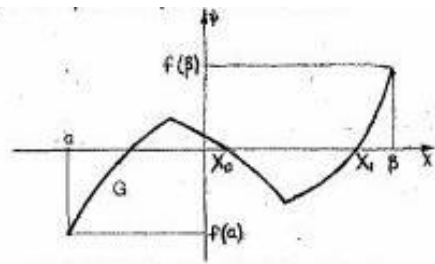
Τα μαθηματικά και οι φυσικές επιστήμες δεν συγκροτούνται, άρα και δεν αναπαράγονται, μόνο δια της γλώσσας. Οι έννοιες και οι πρακτικές τους είναι από σημειωτική οπτική υβριδικές, είναι ταυτόχρονα γλωσσικές, συμβολικές, εικονογραφικές, πραξιακές. Τα κειμενικά είδη των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών αποτελούν συνθέσεις γλωσσικών εκφράσεων, συμβολικών παραστάσεων, πινάκων, γραφημάτων, σχεδίων, εικόνων, φωτογραφιών και σε κάποιες περιπτώσεις μοναδικά ιδιότυπων απεικονίσεων δια των οποίων οργανώνονται τα λογικά επιχειρήματα, αναλύονται οι πληροφορίες και εκτίθενται τα συμπεράσματα. Η μαθηματική γνώση και η γνώση των φυσικών επιστημών δεν είναι μόνο γνώση εννοιών, μεθόδων και συμπερασμάτων, αλλά ευχέρεια δημιουργίας νοημάτων μέσα από τον συνδυασμό λεκτικά διατυπωμένων εννοιών, μαθηματικών σχέσεων, οπτικών παραστάσεων και χειρο-τεχνικών πράξεων (Lemke, 2004).

Μια ματιά σε ένα τυπικό μαθηματικό άρθρο, στα κείμενα ενός ερευνητικού περιοδικού φυσικών επιστημών, σε ένα σχολικό βιβλίο μαθηματικών, φυσικής, βιολογίας ή χημείας ή σε μια δικτυακή ιστοσελίδα με μαθηματικό ή επιστημονικό περιεχόμενο πιστοποιεί τον ισχυρισμό αυτό.

α. Όπως είδαμε προηγουμένως, στο (ε) σκέλος των δρόμων, για τη συνάρτηση f έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.
 Γεννᾶται λοιπόν το ερώτημα: Ὑπάρχουν συναρτήσεις f τέτοιες ώστε $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$;
 Ἄν θυμηθούμε την $f(x) = x^2$, για την οποία βρήκαμε ότι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$, παρατηρούμε ότι $f(2) = 4$, συνεπώς:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2).$$

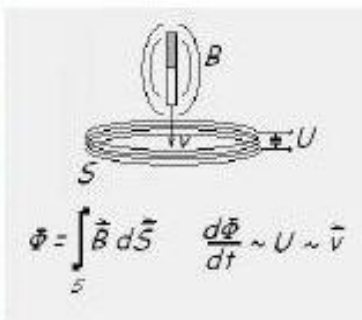
 Ἡ f καλεῖται συνεχής στο σημείο 2.
 β. Ἐστω ἡ συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
 Γιὰ νὰ ἔχει νόημα τὸ $f(a)$ πρέπει τὸ $a \in \mathcal{D}(f) \rightsquigarrow$ πρέπει ἡ f νὰ ὀρίζεται στὸ $a \rightsquigarrow$ ἡ συνέχεια ἔχει νόημα μόνο σὲ σημεία (μεμονωμένα ἢ συσσωρευτικά) τοῦ πεδίου ὀρισμοῦ.
 Ἐξ ἄλλου γιὰ τὴ συνάρτηση $g(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ ἔχουμε



Ἄν G εἶναι τὸ γράφημα τῆς f , τότε τὸ x_0 εἶναι σημείο στο ὁποῖο τὸ γράφημα συνεννᾷ τὸν ἄξονα τῶν τεταμένων.
 Ὅμως παρατηροῦμε ότι καὶ τὸ x_1 ἔχει τὴν ἴδια ιδιότητα. Συνεπῶς μπορεῖ νὰ ὑπάρχουν καὶ περισσοτέρη τοῦ ἑνὸς σημεία τομῆς τοῦ γραφήματος μετὰ τὸν ἄξονα τεταμένων.

Ἀπόσπασμα σχολικοῦ βιβλίου μαθηματικῶν

Η επαγωγική τάση \mathcal{U}_i που αναπτύσσεται σε κάθε πηνίο είναι ανάλογη της μεταβολής της μαγνητικής ροής Φ , του αριθμού των περιελίξεων του N και του εμβαδού της επιφάνειάς του S . Η πρώτη έχει να κάνει τόσο με την ένταση του μαγνητικού πεδίου B που αναπτύσσεται γύρω του, δηλαδή την μαγνήτιση του μαγνήτη που αφήνει κανείς ελεύθερο να πέσει, όσο επίσης (η μέγιστη τιμή U_{max}) με την ταχύτητα του, ενώ οι υπόλοιποι συντελεστές χαρακτηρίζουν το ίδιο το κάθε πηνίο. (Βλέπε το video)

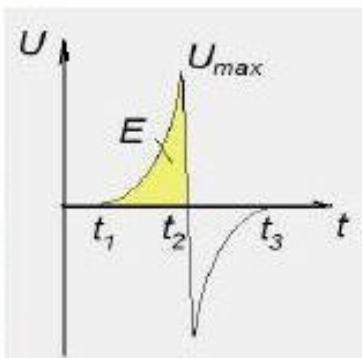


$$U_i = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt} \quad (3)$$

ενώ

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (4)$$

Ως μαγνητική ροή Φ ορίζεται το γινόμενο της μαγνητικής επαγωγής B (ή έντασης του μαγνητικού πεδίου) επί το εμβαδόν της επιφάνειας S , ήτοι διαφορετικά ορίζεται επίσης ως το σύνολο του αριθμού των δυναμικών, μαγνητικών γραμμών που διέρχονται μέσα από το



Απόσπασμα σχολικού βιβλίου φυσικής

Μια σημειωτική οπτική στη διδασκαλία των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών

Παρατηρώντας ένα μάθημα μαθηματικών, φυσικής, χημείας ή βιολογίας σε μια σχολική τάξη μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ο δάσκαλος ή η δασκάλα χρησιμοποιούν ταυτόχρονα ή διαδοχικά όλο το πλήθος των διαθέσιμων και κατάλληλων για την κάθε περίπτωση σημειωτικών μέσων. Μιλούν στους μαθητές και στις μαθήτριες της τάξης, χρησιμοποιούν κινήσεις του σώματος τους, χειρονομίες και μορφασμούς για να παρουσιάσουν ή να εξηγήσουν έννοιες και πληροφορίες, γράφουν στον πίνακα λέξεις, σύμβολα, γραφήματα και σχέδια, παραπέμπουν σε συγκεκριμένες σελίδες του ανοικτού

μπροστά στους μαθητές και στις μαθήτριες σχολικού βιβλίου, ζητούν την καταγραφή σημειώσεων ή την εκτέλεση πράξεων στα τετράδια των μαθητών και μαθητριών, οι οποίοι οφείλουν να συνδυάσουν και να ερμηνεύσουν όλα αυτά ταυτόχρονα ή διαδοχικά αλλά σε ελάχιστα χρονικά διαστήματα, και παράλληλα να συνδυάσουν όλα αυτά με τις απαντήσεις των συμμαθητών τους στις ερωτήσεις του δασκάλου ή της δασκάλας και ερμηνεύσουν τα συνήθως χαμηλόφωνα σχόλια του διπλανού συμμαθητή τους.

Η μάθηση σε σχολικά περιβάλλοντα προϋποθέτει, επομένως, τη διαθεσιμότητα και την ευχέρεια σύνθεσης ενός πλήθους διαφορετικών εκφραστικών μέσων και σημειωτικών συστημάτων και τη «μετάφραση» δεδομένων από έναν τρόπο έκφρασης τους σε έναν άλλο: αριθμητικές εκφράσεις σε αλγεβρικές, αλγεβρικές σε γραφικές, γραφικές σε λεκτικές, λεκτικές σε κινητικές κ.ο.κ. Σύνθεση και μετάφραση σημειωτικών τρόπων οι οποίοι οδηγούν στη δημιουργία νοημάτων (Wells, 2000). Χωρίς, βέβαια, να ξεχνούμε ή να παραγνωρίζουμε τις απαιτούμενες τεχνικές δεξιότητες, όπως εκείνες της ανάγνωσης και γραφής ή του χειρισμού οργάνων, αλλά και τις κοινωνικές δεξιότητες, όπως για παράδειγμα της υποβολής ή της απάντησης ερωτήσεων κατά τη διάρκεια ενός σχολικού μαθήματος.

Από μια σημειωτική οπτική, επομένως, η διδασκαλία και η μάθηση των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών στο σχολείο οφείλει να εκκινά από αυτό που σήμερα αποκαλείται μαθηματικός και επιστημονικός γραμματισμός. Την ανάπτυξη, δηλαδή, ικανοτήτων ανάγνωσης και γραφής μαθηματικών και επιστημονικών – πολύ-τροπικών – κειμένων μέσα από την κατανόηση των συμβάσεων, οι οποίες διέπουν τον συνδυασμό λεκτικών διατυπώσεων, συμβολικών εκφράσεων και εικονικών παραστάσεων κάθε τύπου, ώστε προοπτικά να δημιουργούνται οι προϋποθέσεις δημιουργίας των επιδιωκόμενων μαθηματικών και επιστημονικών νοημάτων.

Η διδασκαλία και η μάθηση των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών στο σχολείο οφείλει να ενσωματώνει ως αναπόσπαστο, συστατικό, της στοιχείο, όχι μόνο την ομιλία και τη γραφή, αλλά όλο το εύρος των εκφραστικών στοιχείων και των οπτικών τεχνολογιών, από την παντομίμα και τα κινούμενα σχέδια μέχρι τις εικονικές προσομοιώσεις. Οφείλει, δηλαδή, να προσομοιάζει τις καθιερωμένες

«μορφές λόγου» (register) της επιστημονικής κοινότητας των μαθηματικών και των επιστημόνων των διαφόρων κλάδων των φυσικών επιστημών.

Συστατικά στοιχεία μιας τέτοιου τύπου διδασκαλίας μπορεί, ενδεικτικά, να είναι:

- Η «μετάφραση» μαθηματικών και επιστημονικών εκφράσεων από ένα σημειωτικό σύστημα σε ένα άλλο (γλωσσικό, συμβολικό, εικονογραφικό, κινητικό) και η ανάδειξη των δυνατοτήτων τις οποίες προσφέρει, αλλά και των περιορισμών τις οποίες επιβάλλει κάθε τέτοια «μετάφραση».
- Η ένταξη των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών στο πλαίσιο των προβλημάτων και των εφαρμογών, τα οποία ιστορικά υποκίνησαν την ανάπτυξη τους καθώς και σε τυπικά πεδία χρήσης τους στις μέρες μας.
- Η παρουσίαση δραστηριοτήτων σε πραγματικά περιβάλλοντα στις οποίες χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά και οι φυσικές επιστήμες για την επίλυση θεωρητικών και πρακτικών προβλημάτων, η συμμετοχή σε απλές πράξεις των δραστηριοτήτων αυτών και η παρατήρηση χαρακτηριστικών μέσων και προϊόντων των δραστηριοτήτων αυτών (όργανα, συσκευές και μηχανές, βιβλία, περιοδικά και άρθρα κ.α.).

Τα προηγούμενα προϋποθέτουν διαφορετικές από τις καθιερωμένες απαντήσεις στο ερώτημα των στόχων της διδασκαλίας των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών στο σχολείο, διαφορετικές από τις επικρατούσες προσεγγίσεις στη μάθηση και διαφορετικές επιστημολογικές θεωρήσεις των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών.

Διαφορετικές απαντήσεις, προσεγγίσεις και θεωρήσεις σημαίνει:

- Ότι βασικός στόχος της διδασκαλίας των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών στο σχολείο είναι η εισαγωγή των μαθητών και των μαθητριών στις μαθηματικές και επιστημονικές πρακτικές, με τα μέσα και τις τεχνικές που οι πρακτικές αυτές ασκούνται από τους μαθηματικούς και τους επιστήμονες για την επίλυση θεωρητικών και πρακτικών προβλημάτων, η εξοικείωση των

μαθητών και των μαθητριών με τον μαθηματικό και τον επιστημονικό λόγο και η διδασκαλία μέσω των τρόπων νοηματοδότησης των φυσικών και των τεχνολογικών φαινομένων, αλλά και των αναπαραστάσεων τους.

- Ότι η προσέγγιση του φαινομένου της μάθησης είναι απαλλαγμένη από την κυριαρχία της νοησιαρχικής λογικής, η οποία θεωρώντας τις έννοιες ως νοητικά αντικείμενα και την κατανόηση τους ως μια απολύτως νοητική διεργασία ανάγει τη μάθηση τους σε μια καθαρά ατομική ψυχολογική λειτουργία, αγνοώντας τα κοινωνικά και πολιτισμικά χαρακτηριστικά της. Μια διαφορετική προσέγγιση βασισμένη στις κοινωνικο-πολιτισμικές θεωρίες του Vygotsky (1997) ή του ύστερου Bruner (1977) για την ανθρώπινη μάθηση επικεντρώνεται στις διαδικασίες νοηματοδότησης του κόσμου μέσα από τη οικειοποίηση πολιτισμικών εργαλείων και πρακτικών και μέσα από τη συμμετοχή σε συγκεκριμένες μορφές ατομικών και κοινωνικών δραστηριοτήτων.
- Ότι οι επιστημολογικές θεωρήσεις των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών είναι απαλλαγμένες από το κυρίαρχο πρότυπο των μαθηματικών ως πεδίων απόλυτης ορθολογικότητας και των φυσικών επιστημών ως μέσων και μεθόδων υπαγορευμένων αποκλειστικά από τις ανάγκες αποκάλυψης των «μυστικών» της φύσης. Σημαίνει κατ' αρχήν θεωρήσεις των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών ως κοινωνικών πρακτικών, οι οποίες υποκείμενες στην ιστορία, στην κοινωνία και στον πολιτισμό του καιρού τους παράγουν θεωρίες για την πρόσληψη και την ερμηνεία φαινομένων, καθώς και για τα μέσα και τις διαδικασίες πρόσληψης και ερμηνείας των φαινομένων. Με ότι αυτές οι θεωρήσεις συνεπάγονται για το καθεστώς των επιστημονικών γνώσεων.

Τα προηγούμενα, βέβαια, συνεπάγονται ένα διαφορετικό από τον καθιερωμένο ρόλο του εκπαιδευτικού, ο οποίος προβάλλοντας τις πρακτικές των μαθηματικών και των επιστημών, τα μέσα και τις μεθόδους των πρακτικών αυτών, το λόγο και τη γραφή των επιστημών, εισάγει τους μαθητές και τις μαθήτριες τους στα μέσα και στους τρόπους δημιουργίας μαθηματικών και επιστημονικών νοημάτων.

Η υιοθέτηση διαφορετικών από τους καθιερωμένους στόχων διδασκαλίας των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών στο σχολείο, διαφορετικών από τις επικρατούσες προσεγγίσεις στη μάθηση και διαφορετικών επιστημολογικών θεωρήσεων των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών φαντάζει υπό τις παρούσες συνθήκες ανέφικτη. Μπορεί, όμως, να προβάλλεται και στο μέτρο του δυνατού να διεκδικείται.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Bruner J. (1997), *Πράξεις Νοήματος*, Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα.

Halliday, M.A.K. (1978), *Language as Social Semiotic*, Edward Arnold London.

Lemke, J.L. (1990), *Talking science: Language, learning and values*, Ablex Publishing, Norwood, NJ.

Lemke, J.L. (1995), *Textual Politics: Discourse and Social Theory*, Taylor and Francis, London.

Lemke, J.L. (2004), The literacies of science. Στο E. Wendy Saul (Ed.), *Crossing borders in literacy and science instruction: Perspectives on theory and practice*, International Reading Association, Newark, DE, 33-47.

Martin, J.R. (1992). *English Text*, John Benjamins. Philadelphia.

Vygotsky (1997), *Νους στην κοινωνία*, Gutenberg, Αθήνα.

Wells, G. (2000), Modes of meaning in a science activity, *Linguistics and Education*, 10(3), 307-334.

Μαθηματικά και λογοτεχνία: Μια αιτούμενη σύζευξη

Μαθηματικά και λογοτεχνία

Τα μαθηματικά και η λογοτεχνία αποτελούν δύο διακριτά διαφορετικές μορφές ανθρώπινης δραστηριότητας, οι οποίες αναπτύσσονται υπό διαφορετικούς όρους και για διαφορετικές ανάγκες, κοινωνικές και ατομικές. Κάθε μια από τις δραστηριότητες αυτές έχει αναπτύξει και χρησιμοποιεί τα δικά της μέσα παραγωγής και έκφρασης, τα οποία όχι μόνο απεικονίζουν αλλά και τονίζουν τις διαφορές τους.

Αντικείμενο της μαθηματικής δραστηριότητας είναι στο επίπεδο της επιστημονικής πρακτικής η έρευνα των αξιωματικά θεμελιωμένων αφηρημένων δομών οι οποίες προέρχονται είτε από τις φυσικές επιστήμες είτε από πεδία των ίδιων των μαθηματικών και στο επίπεδο της σχολικής εκπαίδευσης η μελέτη των ποσοτήτων, των δομών, των μεταβολών και του χώρου. Η μελέτη αυτή αναπτύσσεται και στη μια και στην άλλη περίπτωση με τη χρήση της παραγωγικής λογικής και μιας, αντίστοιχης κατά περίπτωση, μαθηματικής σημειολογίας, ενώ τα αποτελέσματα της οργανώνονται, ως μαθηματική γνώση σε συστήματα εννοιών, παραδοχών (αξιωμάτων) και συμπερασμάτων (θεωρημάτων), καθώς και διαδικασιών ελέγχου και τεκμηρίωσης της αλήθειας των συμπερασμάτων αυτών (αποδείξεις). Από την οπτική αυτή, τα μαθηματικά αποτελούν μια μορφή επιστημονικής δραστηριότητας, θεωρητικής ή εφαρμοσμένης.

Η λογοτεχνία, τώρα, συγκροτείται από τα γραπτά και προφορικά προϊόντα του έντεχνου λόγου. Με κριτήριο μια μάλλον ασαφώς ορισμένη και ιστορικά μεταβαλλόμενη έννοια της "λογοτεχνικότητας" δεν περιλαμβάνει, όμως, το σύνολο των κειμένων ενός πολιτισμού, μιας κοινωνίας, μιας ιστορικής περιόδου. Χωρίς πρόθεση μιας πλήρους επισκόπησης των προσεγγίσεων της έννοιας της λογοτεχνικότητας (η οποία αποτελεί αντικείμενο της θεωρίας της λογοτεχνίας) μπορεί να διακριθούν σε ένα πρώτο επίπεδο δύο κατηγορίες. Στη μια κατηγορία εντάσσονται εκείνες οι προσεγγίσεις οι οποίες, υιοθετώντας οντολογικές οπτικές, ορίζουν τη λογοτεχνικότητα με κριτήριο ειδοποιά χαρακτηριστικά του λογοτεχνικού λόγου, οπότε

και τη λογοτεχνία ως "μυθοπλαστική γραφή" (Eagleton 1989, σ. 21), δηλαδή ως σύνθεση μύθων επινοημένων από τους συγγραφείς, με φαντασιακά στοιχεία, ως "μια ιδιαίτερη χρήση της γλώσσας, αποκλίνουσα από τη συμβατική" (ο.π., σ. 25), οπότε στην περίπτωση αυτή η λογοτεχνικότητα είναι μια ιδιαίτερη οργάνωση της γλώσσας ή απλά εκείνο το χαρακτηριστικό των κειμένων το οποίο προκαλεί κατά την ανάγνωση τους μια αισθητική απόλαυση. Στη δεύτερη κατηγορία εντάσσονται εκείνες οι προσεγγίσεις της λογοτεχνικότητας, οι οποίες υιοθετώντας ιστορικά κριτήρια θεωρούν τα χαρακτηριστικά της μεταβαλλόμενα και συναρτημένα με το χρόνο και το χώρο. Μέχρι τον 18^ο αιώνα ως λογοτεχνία θεωρείτο κάθε ρητορική αναπαράσταση της πραγματικότητας, «μίμηση», σύμφωνα με τα κριτήρια που ορίζονται στην Ποιητική του Αριστοτέλη. Από τις αρχές του 19^{ου} αιώνα και υπό την επίδραση του ρομαντισμού η λογοτεχνία ορίζεται ως έκφραση, και όχι ως μίμηση, της πραγματικότητας, αντικειμενικής ή και υποκειμενικής, δια της οποίας δημιουργείται μια άλλη φαντασιακή πραγματικότητα. Από τις αρχές του 20^{ου} αιώνα ως κριτήριο της λογοτεχνικότητας κυριάρχησε εκείνο της λογοτεχνικής γλώσσας με έμφαση στην ιστορικότητα της (Βελουδής 1992).

Με τις πραγματικά θεμελιώδεις αυτές διαφορές δεδομένες, το ερώτημα είναι: ποια σχέση μαθηματικών και η λογοτεχνίας διεκδικούμε για λογαριασμό της μαθηματικής εκπαίδευσης και βέβαια για ποιο λόγο.

Η απάντηση στο δεύτερο ερώτημα είναι μάλλον εύκολη. Η μαθηματική εκπαίδευση, δηλαδή το σύνολο των δραστηριοτήτων διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών εννοιών και τεχνικών που αναπτύσσεται στα σχολεία όλων των βαθμίδων του εκπαιδευτικού συστήματος, καθώς και οι σχέσεις που καλλιεργούνται με τη συγκεκριμένη επιστημονική πρακτική, βρίσκεται, κατά τα φαινόμενα, υπό μια διαρκή κρίση. Αυτό πιστοποιούν οι αλληπάλληλες τροποποιήσεις των αναλυτικών προγραμμάτων, οι αλλαγές των σχολικών βιβλίων, το διαρκές αίτημα επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών, οι διαπιστώσεις ερευνών για την επίδοση και τις σχέσεις των μαθητών με τα μαθηματικά που δημοσιοποιούνται κατά καιρούς, το πλήθος των κειμένων κριτικής που δημοσιεύεται σε περιοδικά και ανακοινώνεται σε συνέδρια και άλλα συναφή. Στις κάθε μορφής και περιεχομένου αλληπάλληλες αλλαγές και τροποποιήσεις,

όμως, κατά κανόνα δεν περιλαμβάνονται απόπειρες τροποποιήσεων των διδακτικών μεθόδων ή πιο δραστικές προσπάθειες ανάπτυξης και εφαρμογής νέων προσεγγίσεων στη διδασκαλία των μαθηματικών. Με εξαίρεση τις μεγάλες μεταρρυθμίσεις της δεκαετίας του 1960 και τις ανατροπές τους κατά τη δεκαετία του 1980, οι οποίες όμως αφορούσαν πρωτίστως στο περιεχόμενο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Το ζήτημα μιας άλλης προσέγγισης στη διδασκαλία των μαθηματικών τροφοδοτεί, μεταξύ άλλων, και τη συζήτηση για τη σύζευξη των μαθηματικών με τη λογοτεχνική παραγωγή.

Το ερώτημα, όμως, της αιτούμενης σύζευξης μαθηματικών και λογοτεχνίας δεν επιδέχεται εύκολα μια απάντηση, με την έννοια ότι πρόκειται για μια σχέση σύνθετη και από μία άποψη αμφιλεγόμενη. Οι θεωρητικές αναλύσεις, οι εκπαιδευτικές παρεμβάσεις και οι ερευνητικές διαπιστώσεις, που εκτίθενται στον παρόντα τόμο υποστηρίζουν, άμεσα ή έμμεσα, τη διαπίστωση αυτή.

Σε κάθε περίπτωση, όμως, επιδέχεται απαντήσεων στο πλαίσιο άλλης προσέγγισης της διδασκαλίας των μαθηματικών, της οποίας προϋποθέσεις αποτελούν, κατά τη γνώμη μου,:

- μια διαφορετική από την κυρίαρχη σήμερα θεώρηση της μάθησης, στην οποία οι συναισθηματικές λειτουργίες θα αντιμετωπίζονται όχι μόνο ως ισότιμες, αλλά ως προϋπόθεση της ανάπτυξης των γνωστικών λειτουργιών,
- μια διαφορετική από την επικρατούσα προσέγγιση των μαθηματικών ως επιστημονικής πρακτικής και σχολικής γνώσης και
- μια διαφορετική από την εδραιωμένη στη διδασκαλία των μαθηματικών αντιμετώπιση της ανάγνωσης κειμένων και κατά συνέπεια του ρόλου της στη μάθηση των μαθηματικών.

Τους όρους αυτούς θα επιχειρήσω να σκιαγραφήσω σε όσα ακολουθούν, υποστηρίζοντας την αναγκαιότητα της διερεύνησης ενός τύπου διδασκαλίας των μαθηματικών, ο οποίος θα ενσωματώνει ως συστατικό του στοιχείο αφηγηματικά κείμενα.

Προϋπόθεση πρώτη: Μια διαφορετική θεώρηση της μάθησης

Με αφετηρία την παραδοχή ότι μάθηση γενικά και κατά συνέπεια η μάθηση των μαθηματικών είναι μια γενεσιουργός διαδικασία κατασκευής νοημάτων τα οποία συγκροτούνται από τον κάθε άνθρωπο προσωπικά, αιτείται μια διαφορετική από την κυρίαρχη σήμερα θεώρηση της μάθησης, στην οποία οι ανθρώπινες συναισθηματικές λειτουργίες θεωρούνται, όχι μόνο ισότιμες, αλλά συστατικές της ανάπτυξης κάθε γνωστικής λειτουργίας. Μια θεώρηση της μάθησης, δηλαδή, η οποία οφείλει να ξεπερνάει το δυϊσμό νόησης και συναισθήματος και παράλληλα να αντιμετωπίζει τη φαντασία ως συστατική λειτουργία της νόησης.

Στην κυρίαρχη σήμερα θεώρηση της μάθησης, το συναίσθημα και οι λειτουργίες του θεωρούνται αντιθετικά της λογικής και των λογικών διεργασιών στη βάση, ουσιαστικά αυθαίρετων, φιλοσοφικών και ψυχολογικών παραδοχών. Ο Πλάτωνας στο *Φαίδρο* με μια μεταφορική εικόνα αποτυπώνει μια θεώρηση των σχέσεων λογικής και συναισθήματος, η οποία είναι μέχρι σήμερα κυρίαρχη. Παρουσιάζει τη λογική ως ηνίοχο ο οποίος πασχίζει να δαμάσει και να θέσει υπό τον έλεγχο του τα συναισθήματα τα οποία έχουν τη μορφή άγριων αλόγων. Τρία στοιχεία αυτής της μεταφοράς είναι δηλωτικά, και συμπυκνώνουν την ουσία, της επικρατούσας θεώρησης. Πρώτον, υπάρχει ένας δυϊσμός λογικής και συναισθήματος στις ανθρώπινες λειτουργίες. Η λογική και το συναίσθημα είναι δύο διαφορετικές και αντιθετικές νοητικές λειτουργίες, δύο διαφορετικά και αντιθετικά φαινόμενα του ανθρώπινου ψυχισμού. Δεύτερον, το συναίσθημα είναι μια κατώτερη και ουσιαστικά πρωτόγονη ψυχολογική λειτουργία, πρωτίστως ανορθολογική και νοητικά διαλυτική, έξω από τον έλεγχο της ανθρώπινης θέλησης. Τρίτον, το συναίσθημα πρέπει να τίθεται, σε κάθε περίπτωση σκέψης και πράξης, υπό τον έλεγχο της λογικής.

Αυτή η θεώρηση, όμως, έχει αρχίσει να αμφισβητείται τις δύο τελευταίες δεκαετίες, αρχικά στην νευροβιολογία και ακολούθως στην ψυχολογία, αλλά στην φιλοσοφία (ενδεικτικά, Ben-Ze'ev, 2000, Damasio, 1994 & 1996, De Sousa, 1987, Elster, 1999, Frank, 1988, Greenspan, 1988, Lazarus & Lazarus, 1994 Turski, 1994), οπότε και δημιουργούνται πλέον οι όροι της ανατροπής της. Μια εναλλακτική θεώρηση αντιμετωπίζει τις συναισθηματικές λειτουργίες ως

αλληλένδετες των λογικών διεργασιών και αμοιβαία ενισχυτικές σε κάθε ανθρώπινη νοητική ή πρακτική δραστηριότητα. Παρά το γεγονός ότι το συναίσθημα δεν υπόκειται σε ορθολογικές νοητικές διεργασίες δεν είναι και δεν μπορεί να θεωρείται αναγκαία ανορθολογικό ή παράλογο. Όπως και το γεγονός ότι αποτελεί διακριτή από τη λογική ψυχολογική διεργασία δεν μπορεί να είναι λόγος αντίθεσης τους και αγνόησης της καθοριστικής σημασίας του στις ανθρώπινες λειτουργίες. Αποδεικνύεται, ότι ως ψυχολογική λειτουργία παρέχει στην ανθρώπινη νόηση ένα αξιολογικό πλαίσιο για τη ρύθμιση της συμπεριφοράς και ένα ολοκληρωμένο σύστημα απόκρισης και λήψης αποφάσεων σε προκλήσεις, ατομικές ή κοινωνικές, για σκέψη και δράση (Damasio, 1994). Παράλληλα, η λειτουργία του συναισθήματος ως παράγοντα δραστηριοποίησης της σκέψης και υποκίνησης της δράσης είναι αποδειγμένα καθοριστική (Ben-Ze'ev, 2000). Η συμβολή, επομένως, του συναισθήματος στη μάθηση είναι ουσιαστικά και πολλαπλά υποστηρικτική και προαπαιτούμενη, αφού το «*το θετικό και αρμονικά αναπτυγμένο συναίσθημα είναι αναγκαία προϋπόθεση για την καλή λειτουργία του οικοδομήματος της λογικής σκέψης*» (Damasio, 2000, σ. 14).

Μια παραδοχή, η οποία ως δεδομένη οφείλει να χαρακτηρίζει τις δραστηριότητες της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών. Σε συνδυασμό με το αιτούμενο αυτό, είναι υπό διερεύνηση τα μέσα και οι τρόποι και στην κατεύθυνση αυτή η σύζευξη των μαθηματικών με τη λογοτεχνία φαίνεται να αποτελεί μια αποτελεσματική επιλογή. Γιατί ; Γιατί τα ανθρώπινα συναισθήματα εκδηλώνονται μόνο μέσα από την αφήγηση και η αφήγηση αποτελεί το μόνο μέσο έκφρασης των συναισθημάτων. Γιατί ως ανθρώπινα όντα «*ονειρευόμαστε στην αφήγηση, ονειροπολούμε στην αφήγηση, θυμόμαστε, προσδοκούμε, ελπίζουμε, απογοητευόμαστε, πιστεύουμε, αμφιβάλλουμε, σχεδιάζουμε, αναθεωρούμε, κρίνουμε, δημιουργούμε, φλυαρούμε, μαθαίνουμε, μισούμε και ζούμε δια της αφήγησης*» (Hardy, 1968, σ. 5) και έστω μεταφορικά μπορούμε εύλογα να ισχυριστούμε ότι ο «*ανθρώπινος νους είναι ... ένα ζήτημα αφήγησης*» (Sutton-Smith, 1988, σ. 22). Το θεμελιώδη ρόλο της αφήγησης στη νοηματοδότηση των ανθρώπινων εμπειριών και κατά συνέπεια την ενεργό συμπλοκή της στις νοητικές λειτουργίες έχει χαρακτηριστικά αναδείξει ο Bruner (1986)

επισημαίνοντας παράλληλα τη σημασία της στις εκπαιδευτικές δραστηριότητες.

Η παραδοχή αυτή, βέβαια, για το ρόλο της αφήγησης στη νόηση αποδίδει και στη φαντασία έναν εξίσου, αν και σε άλλο επίπεδο, βασικό ρόλο στις νοητικές λειτουργίες και στις δραστηριότητες μάθησης. Η παραγνώριση της φαντασίας υπήρξε «παράπλευρη απώλεια» της υποτίμησης του συναισθήματος σε σχέση με τη λογική, αφού η φαντασία συνδέθηκε αποκλειστικά με τις συναισθηματικές λειτουργίες. Η φαντασία, όμως, είναι η ανθρώπινη ικανότητα και η διαδικασία παραγωγής και αναπαραγωγής νοητικών εικόνων και ιδεών, η οποία σε κάποιο βαθμό είναι ανεξάρτητη από τους περιοριστικούς όρους της πραγματικότητας και γι' αυτό ένα πεδίο υποθετικών δράσεων, άρα ένα πεδίο προνομιακό για τη μαθηματική σκέψη. Σύμφωνα με τις αναλύσεις του Vygotsky, στις οποίες αναδεικνύεται ο θεμελιώδης ρόλος της φαντασίας στην ανθρώπινη νόηση, η ανάπτυξη της φαντασίας και η ανάπτυξη της εννοιολογικής σκέψης του ανθρώπου, δύο ανεξάρτητες διαδικασίες κατά την παιδική ηλικία, συγκλίνουν σταδιακά και ταυτίζονται κατά την εφηβεία, εξελισσόμενες στη συνέχεια αλληλένδετα ως δημιουργική σκέψη (1987).

Προϋπόθεση δεύτερη: Μια διαφορετική προσέγγιση των μαθηματικών

Μια διαφορετική από την επικρατούσα προσέγγιση των μαθηματικών ως επιστημονικής πρακτικής και σχολικής γνώσης προϋποθέτει την παραδοχή, ότι η γνώση γενικά και κατά συνέπεια η μαθηματική γνώση δεν είναι ένα σταθερό σύνολο καθιερωμένων συμπερασμάτων, αλλά μια δυναμική διαδικασία διερεύνησης, όπου η αναγκαιότητα, η αβεβαιότητα και η αντιπαράθεση παρέχουν κίνητρα για μια συνεχή έρευνα διαρκώς βελτιούμενων κατανοήσεων της πραγματικότητας. Επομένως στην οπτική αυτή, η μαθηματική γνώση δεν είναι απόλυτη και ιστορικά αμετάβλητη, άλλα όπως και κάθε άλλο παράγωγο της ανθρώπινης δραστηριότητας είναι μια κοινωνική κατασκευή, η οποία υπόκειται σε σφάλματα, εμπλουτίζεται από τους σκοπούς και τα

πλαίσια που υποκινούν την ανάπτυξη και τη χρήση της και διαμορφώνεται από τις κυρίαρχες κοινωνικές αξίες.

Ως κοινωνική κατασκευή, επομένως, η μαθηματική γνώση είναι προϊόν μιας δραστηριότητας, η οποία έχει ιστορίες, έχει φιλοσοφικές θεωρήσεις, έχει πρωταγωνιστές, έχει μεθόδους και διαδικασίες παραγωγής, έχει θεωρητικά και πρακτικά ερευνητικά προβλήματα, έχει χρήσεις και εφαρμογές σε άλλα πεδία της πνευματικής παραγωγής, έχει θεσμούς οργάνωσης και μέσα επικοινωνίας, έχει τυπικά θεσμοθετημένα και άτυπα καθιερωμένα πλαίσια ανάπτυξης, τα οποία υπόκεινται στην κοινωνική κατάσταση και αντανακλούν τόσο τα ουσιαστικά στοιχεία του πνευματικού και τεχνικού πολιτισμού, όσο και τους ανταγωνισμούς των κοινωνικών συμφερόντων κάθε συγκεκριμένης ιστορικής περιόδου της ανάπτυξης της.

Όλα αυτά μαζί και αλληλένδετα είναι *μαθηματικά* και η αφήγηση τους είναι ουσιαστική συνιστώσα της διδασκαλίας τους. Αφού, όπως και αλλού έχει αναλυθεί (Χασάπης, 1996), η διδασκαλία των μαθηματικών εμπεριέχει μια διπλή σχέση με το αντικείμενο της. Μια επιστημονική σχέση, η οποία στοχεύει στη γνώση *του* αντικειμένου των μαθηματικών και ταυτόχρονα μια ιδεολογική σχέση, η οποία στοχεύει στη πρακτική γνώση κανόνων, προτύπων και πρακτικών *για το* αντικείμενο των μαθηματικών, γνώση που ουσιαστικά είναι γνώση κανόνων συμπεριφοράς απέναντι στη θεωρητική και κοινωνική λειτουργία των μαθηματικών. Στη σύζευξη αυτή, άλλωστε, μπορεί να εντοπιστεί και η ουσιαστική έννοια του όρου “μαθηματική παιδεία”. Μια μαθηματική γνώση επενδυμένη σε μια πρακτική γνώση για την θεωρητική και πρακτική λειτουργία της.

Προϋπόθεση τρίτη: Μια διαφορετική αντιμετώπιση της ανάγνωσης κειμένων

Η επικρατούσα, έξω από τους κύκλους των ειδικών, αντίληψη θεωρεί την ανάγνωση ως μια διαδικασία βασισμένη σε ένα σύνολο δεξιοτήτων δια των οποίων εντοπίζεται και εξάγεται άμεσα ή συνάγεται έμμεσα το νόημα ενός κειμένου. Η αντίληψη αυτή, εδραιωμένη στην ψυχολογία του συμπεριφορισμού, διαπερνά σε μεγάλο βαθμό τη διδασκαλία της ανάγνωσης στο σχολείο και την αντιμετώπιση της ανάγνωσης κειμένων

στη διδασκαλία των μαθηματικών. Σε μια άλλη θεώρηση, όμως, η ανάγνωση αντιμετωπίζεται ως μια δραστηριότητα κατασκευής νοημάτων στην οποία οι αναγνώστες δεν προσλαμβάνουν απλώς ερμηνείες του κειμένου, αλλά τις συγκροτούν υπό την επίδραση των προσωπικών τους εμπειριών και των περιστάσεων που βιώνουν κατά την ανάγνωση του.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα η συνηθισμένη ανάγνωση μιας εφημερίδας. Η ανάγνωση ενός κειμένου μιας εφημερίδας ουσιαστικά αρχίζει πριν ξεκινήσουμε να διαβάζουμε το συγκεκριμένο κείμενο. Διαβάζοντας τον τίτλο του και μόνο σχηματίζουμε ένα υπόβαθρο πρόσληψης του κειμένου βασισμένο στις γνώσεις μας για την εφημερίδα και στην εμπειρία μας από την ανάγνωση της – την πολιτική της στην προσέγγιση των γεγονότων, την οργάνωση και το περιεχόμενο της ύλης της, τη γλώσσα των κειμένων της – όπως επίσης στις προηγούμενες γνώσεις μας για το θέμα του κειμένου, αλλά και στα τρέχοντα ενδιαφέροντα μας. Στο υπόβαθρο αυτό, συγκροτούμε μια ερμηνεία του κειμένου, η οποία αντιστοιχεί κατά μοναδικό τρόπο στο συγκεκριμένο γεγονός της ανάγνωσης του. Η μοναδικότητα της ερμηνείας αυτής δημιουργείται από τον, και οφείλεται στον συνδυασμό της υποκειμενικότητας κάθε συγκεκριμένου αναγνώστη (με την ιδιαίτερη προσωπική του ιστορία, τις ιδιαίτερες κοινωνικο-οικονομικές του αναφορές, τις πεποιθήσεις του και τη συγκεκριμένη συναισθηματική του κατάσταση) με το συγκεκριμένο κείμενο (το περιεχόμενο, τις αναφορές και τη γλωσσική του οργάνωση) υπό τους όρους του συγκεκριμένου κοινωνικού πλαισίου μέσα στο οποίο αναπτύσσεται η δραστηριότητα της ανάγνωσης και το οποίο επιβάλλει, εκτός άλλων, και συγκεκριμένες σχέσεις αναγνώστη και κειμένου (Eco, 1979, Karel & Harste, 1985). Η ανάγνωση ενός κειμένου, δηλαδή, συνεπάγεται μια ερμηνεία του, η οποία εξαρτάται από τον αναγνώστη, το κείμενο και το πλαίσιο της ανάγνωσης του.

Η ανάγνωση κειμένων στη διδασκαλία των μαθηματικών έχει σήμερα περιθωριακή θέση και εξαντλείται κυρίως στην ανάγνωση των διδακτικών βιβλίων και των συναφών σχολικών βοηθημάτων με στόχο την εκμάθηση θεωρητικών μαθηματικών γνώσεων (ορισμών, θεωρημάτων, αποδείξεων) και τεχνικών επίλυσης ασκήσεων και προβλημάτων, σχεδόν αποκλειστικά σε ένα πλαίσιο αξιολόγησης. Τα

όποια κείμενα αφηγηματικού λόγου περιλαμβάνονται στα σχολικά βιβλία, ως ιστορικά σημειώματα ή περιγραφές εφαρμογών των μαθηματικών, έχουν εντελώς περιθωριακό χαρακτήρα και συνήθως παραλείπονται από τις δραστηριότητες της διδασκαλίας των αντίστοιχων ενοτήτων.

Με τους όρους αυτούς, είναι χωρίς αντίκρισμα κάθε συζήτηση για ανάγνωση και ερμηνεία κειμένων και για παραγωγή νοημάτων, ενώ η ριζική τροποποίηση τους προϋποθέτει μια άλλη οργάνωση της διδασκαλίας των μαθηματικών, κυρίαρχο οργανωτικό στοιχείο της οποίας δεν μπορεί να είναι η αξιολόγηση. Σε μια άλλη λογική, δηλαδή, η ανάγνωση μαθηματικών κειμένων, τεχνικών ή αφηγηματικών, θεωρούμενη ως δημιουργική δραστηριότητα παραγωγής νοημάτων μπορεί να αποτελεί συστατικό στοιχείο της διδασκαλίας και βέβαια της μάθησης των μαθηματικών. Αφού η παραγωγή νοημάτων ως δραστηριότητα εμπεριέχει, μεταξύ άλλων, διατύπωση υποθέσεων, δημιουργία συσχετίσεων, συγκρότηση αλληλουχιών, συναγωγή συμπερασμάτων, κριτική εκτίμηση, και άλλες νοητικές διεργασίες, οι οποίες αποτελούν και συστατικά στοιχεία της μαθηματικής δραστηριότητας. Η ανάγνωση κειμένων, επομένως, μπορεί να είναι μια μαθηματική δραστηριότητα, όπως και μια μαθηματική δραστηριότητα, όπως είναι η απόδειξη ενός θεωρήματος ή η επίλυση ενός προβλήματος μπορεί να είναι μια δραστηριότητα ανάγνωσης, με την έννοια της ανάγνωσης που ορίστηκε προηγουμένα.

Η αφήγηση στη διδασκαλία των μαθηματικών

Η διδασκαλία των μαθηματικών, ως κοινωνικά οργανωμένη δραστηριότητα μάθησης, οφείλει πρώτα απ' όλα να παρέχει την αναγκαία υποστήριξη στις προσωπικές διερευνήσεις των μαθητών και μαθητριών, δημιουργώντας πλούσια περιβάλλοντα μάθησης που υποκινούν αμφιβολίες και παρέχουν εμπειρίες μάθησης. Στη βάση αυτή και μόνο η αφήγηση, ως κείμενο και προφορικός λόγος, μπορεί να αποτελέσει συνιστώσα της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Μερικές αναγκαίες επισημάνσεις για την αφήγηση ως γένος του λόγου (Πολίτης, 2006). Κάθε αφήγηση αποτελεί «*μια εξιστόρηση, με μια ορισμένη σειρά, συμβάντων που μεταβάλλουν μια αρχική κατάσταση*

πραγμάτων ή ενεργειών, πράξεων που σκόπιμα διαπράττονται από τους "ήρωες" μιας ιστορίας» (ο.π.), ενώ ως κύριες μορφές της καταγράφονται η μυθοπλαστική, η ιστορική και η ρεαλιστική αφήγηση.

Η *μυθοπλαστική αφήγηση* δεν αφηγείται το πραγματικό. Οικοδομεί ένα σύνολο καταστάσεων και ένα πλήθος προσώπων, ενδεχομένως αληθοφανή, αλλά στην ουσία απολύτως φανταστικά. Τυπικές περιπτώσεις μυθοπλασίας αποτελούν τα λαϊκά παραμύθια, προϊόντα συλλογικής επεξεργασίας και οι αφηγήσεις της ατομικής, δημιουργικής λογοτεχνίας.

Η *ιστορική αφήγηση* βασίζεται στην εξιστόρηση πραγματικών γεγονότων του παρελθόντος. Τυπική περίπτωση ιστορικής αφήγησης αποτελεί η ιστοριογραφία, η οποία χρησιμοποιεί την αφήγηση για να ανασυστήσει επιλεκτικά όψεις και στοιχεία του παρελθόντος.

Η *ρεαλιστική αφήγηση* διαφέρει από την ιστορική ως προς τον χρόνο των συμβάντων και την τεκμηρίωσή τους. Εξιστορεί γεγονότα σύγχρονα του αφηγητή τα οποία τεκμηριώνει κατά περίπτωση σε εμπειρικά δεδομένα. Η ειδησεογραφία των μέσων μαζικής ενημέρωσης, όπως και το πλήθος των μικρών και μεγάλων "ιστοριών" που καθημερινά ανταλλάσσουν μεταξύ τους οι άνθρωποι σε κάθε ευκαιρία αποτελούν τις πλέον τυπικές περιπτώσεις ρεαλιστικής αφήγησης.

Δομικό στοιχείο της αφήγησης, σε κάθε μορφή της, είναι οι ποικίλες σχέσεις αιτιότητας, δηλαδή οι τρόποι με τους οποίους μια κατάσταση ή ένα συμβάν επηρεάζει τους όρους εμφάνισης μιας άλλης κατάστασης ή ενός άλλου συμβάντος. Παράλληλα όμως με τις σχέσεις αιτιότητας, τα συμβάντα και οι καταστάσεις μιας αφήγησης μπορεί να συνδέονται μεταξύ τους και με χρονικές σχέσεις, οι οποίες μπορεί να είναι περίπλοκες, όπως στην περίπτωση παράλληλων ή διασταυρούμενων εξελίξεων συμβάντων ή καταστάσεων.

Σε κάθε περίπτωση η αφήγηση αποτελεί, όπως προαναφέρθηκε, συστατικό στοιχείο της ανθρώπινης νοητικής λειτουργίας, λογικής και συναισθηματικής σε συνδυασμό. Ως άνθρωποι σκεφτόμαστε με όρους αφήγησης, αποδίδουμε νοήματα στις εμπειρίες μας και κατανοούμε τον κόσμο με μορφές αφήγησης, ορίζουμε τις υποκειμενικότητες μας μέσα από τις αφηγήσεις, τις δικές μας και των άλλων και με μία

έννοια ζούμε σε έναν κόσμο συγκροτημένο με τους κανόνες και τους μηχανισμούς της αφήγησης (Bruner, 1990/1997).

Η αφήγηση, με άλλα λόγια, είναι ένα συμβολικό σύστημα το οποίο οι άνθρωποι χρησιμοποιούν σε κάθε περίπτωση για να κατανοούν γεγονότα και προβλήματα της ζωής τους και να αναπαριστούν αυτά τα γεγονότα και τα προβλήματα με μια ποικιλία τρόπων. Η ποικιλία των αναπαραστάσεων η οποία ενσωματώνεται στην αφήγηση, η πολυτροπικότητα της αφήγησης δηλαδή, συνίσταται στο εγγενές χαρακτηριστικό της να συνθέτει σε ένα όλο την πολλαπλότητα και την διαφορετικότητα της ανθρώπινης εμπειρίας παρουσιάζοντας ταυτόχρονα αισθήματα, συναισθήματα και νοήματα μέσα από λεκτικές παραστάσεις και μεταφορές. Ενσωματώνοντας τη συνθετικότητα της εμπειρίας, η αφήγηση παρέχει δυνατότητες μιας αντίστοιχα σύνθετης κατανόησης των αντικειμένων, αλλά και της ίδιας, της ανθρώπινης δραστηριότητας, εμπεριέχοντας παράλληλα μια λογική εσωτερικού ελέγχου της εγκυρότητας αυτής της κατανόησης. Μεταφορικά, εμπεριέχοντας μια διαδικασία «απόδειξης» της εγκυρότητας των αναπαραστάσεων και των ερμηνειών που η ίδια κατασκευάζει, αφού κάθε αφήγηση συνέχεται υποχρεωτικά από μια δικής της και ιδιαίτερη κατά περίπτωση «λογική», η οποία δημιουργεί νοήματα και προσφέρει ευχαρίστηση και στον «αφηγητή» και στον «ακροατή» ή «αναγνώστη» της ιστορίας (Gadanidis & Hoogland, 2003).

Δεν μπορεί, επομένως, να αγνοείται η αφήγηση, ως μέσο μάθησης, στη διδασκαλία των μαθηματικών. Υπό τους όρους που προδιαγράφηκαν και για τους λόγους που επιλεκτικά και συνοπτικά εκτέθηκαν προηγούμενα, κάθε μορφή αφήγησης, με τη μορφή κειμένων ή προφορικού λόγου, μπορεί να εισαχθεί στη διδασκαλία των μαθηματικών, μετασχηματίζοντας ενδεχομένως και τα ίδια τα σχολικά μαθηματικά σε μορφές αφήγησης. Για να διδάξουν έννοιες και τεχνικές των μαθηματικών, για να απεικονίσουν χαρακτηριστικά των μαθηματικών και να αναδείξουν το ιστορικό και πολιτισμικό πλαίσιο της ανάπτυξης τους ή για να οργανώσουν την ίδια τη διδασκαλία των μαθηματικών προσφέροντας μέσα για την κατανόηση της μαθηματικής δραστηριότητας και των αντικειμένων της.

Σε κάθε περίπτωση, μια διδασκαλία των μαθηματικών με συστατικό στοιχείο της την αφήγηση οργανώνεται με βάση τις ακόλουθες θέσεις και βέβαια σε πλήρη ρήξη με τις ακόμα και σήμερα επικρατούσες στην εκπαίδευση αρχές του συμπεριφορισμού (Egan, 1989):

- στη σκέψη των παιδιών το συγκεκριμένο και το αφηρημένο συνυπάρχουν αλληλένδετα,
- στη σκέψη των παιδιών οι συναισθηματικές λειτουργίες είναι συνυφασμένες με τις λογικές διεργασίες,
- στη σκέψη των παιδιών οι λεκτικές διατυπώσεις μετασχηματίζονται άμεσα σε νοητικές εικόνες,
- τα παιδιά διατυπώνουν και κατανοούν λεκτικές μεταφορές,
- τα παιδιά κατανοούν και ιδιοποιούνται γνωστικά περιεχόμενα τα οποία οργανώνονται ως αφηγήσεις,
- τα παιδιά μαθαίνουν ευκολότερα ξεκινώντας από διχοτομίες και αντιθέσεις εννοιών και βέβαια
- τα παιδιά μαθαίνουν ευκολότερα όταν ο αφηγηματικός λόγος έχει ρυθμό και ομοιοκαταληξία.

Η τελευταία θέση για να μην αποκλείουμε την ποίηση από μια οργανωμένη με άξονα την αφήγηση διδασκαλία των μαθηματικών στο πλαίσιο της διεκδίκησης για λογαριασμό της μαθηματικής εκπαίδευσης μιας σχέσης σύζευξης λογοτεχνίας και μαθηματικών.

Βιβλιογραφικές αναφορές

- Βελουδής, Γ. (1992), Ψηφίδες για μια θεωρία της λογοτεχνίας, Γνώση, Αθήνα.
- Ben-Ze'ev, A. (2000), *The subtlety of emotions*, MIT Press, Cambridge, MA.
- Bruner, J. S., (1986), *Actual minds, possible worlds*, Cambridge University Press, Cambridge, MA.
- Bruner, J.S. (1990), *Acts of Meaning*, Harvard University Press, Cambridge, MA. Ελληνική έκδοση (1997) *Πράξεις Νοήματος, Ελληνικά Γράμματα*, Αθήνα.
- Damasio, A.R. (1994), *Descartes' error: emotion, reason, and the human brain*, Putnam's Sons, New York.
- Damasio, A.R. (1999), *The feeling of what happens: body and emotion in the making of consciousness*, Harcourt Brace, New York.
- Damasio, A.R. (2000), *A second chance for emotion*. Στο R.D. Lane & L. Nadel (Eds) *Cognitive neuroscience of emotion*, Oxford University Press, New York and Oxford.
- De Sousa, R. (1987), *The rationality of emotion*, MIT Press, Cambridge, MA.
- Eagleton, T. (1989), *Εισαγωγή στη θεωρία της λογοτεχνίας*, Οδυσσέας, Αθήνα
- Eco, U. (1979), *The role of the reader* Indiana University Press, Bloomington IN.
- Egan, K. (1989), *Teaching as story telling*, University of Chicago Press, Chicago.
- Elster, J. (1999), *Alchemies of the mind: rationality and the emotions*, Cambridge University Press, Cambridge, MA.
- Frank, R.H. (1988), *Passions within reason: the strategic role of the emotions*, Norton, New York & London.
- Gadanidis, G. & Hoogland, C. (2003), *The aesthetic in mathematics as story*, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Educatio,n* 3(4), 487-498.
- Greenspan, P.S. (1988), *Emotions and reasons: an inquiry into emotional justification*, Routledge, New York & London.

- Hardy, B. (1968), Towards a poetics of fiction: an approach through narrative, *Novel*, 2, 5-14.
- Karey, R. & Harste, J. (1985), Comprehension as context: Toward reconsideration of a transactional theory of reading. Στο R. Tierney (Ed) *Understanding reader's understanding*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ.
- Lazarus, R.S. & Lazarus, B.N. (1994), *Passions and reason: making sense of our emotions*, Oxford University Press, New York & Oxford.
- Πολίτης Π., (2006), Αφήγηση, Ομάδα Εργασίας του Κέντρου Ελληνικής Γλώσσας για τη Θεωρία και Ιστορία της Ελληνικής Γλώσσας, στο http://www.greek-language.gr/greekLang/studies/discourse/2_1_3/index.html (Ιαν. 2007)
- Sutton-Smith, B. (1988), In search of imagination. Στο K.Egan & D. Nidaer (Eds) *Imagination and education*, Open University Press, Milton Keynes.
- Turski, W.G. (1994), *Toward a rationality of emotions*, Ohio University Press, Athens OH.
- Χασάπης, Δ. (1996), Τα πλαίσια αναφοράς των μαθηματικών εννοιών κατά τη διδασκαλία τους στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση και οι ιδεολογικοί τους προσανατολισμοί, *Πρακτικά 1ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, ΠΤΔΕ Πανεπιστημίου Αθηνών & Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., Αθήνα, 113 - 123.
- Vygotsky, L.S. (1987), *The Collected Works of L. S. Vygotsky*, R.W. Reiber & A.S. Carton (Eds), Plenum, New York (Vol. 4: *The history of the development of higher mental functions*).

Τα μαθηματικά στην προσχολική και στην πρώτη σχολική εκπαίδευση: Πραγματικότητες και προβληματισμοί

Εισαγωγή

Είναι πλέον και ερευνητικά τεκμηριωμένο, ότι η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης αρχίζει από τη νηπιακή ηλικία των ανθρώπων. Τα μικρά παιδιά όλων των κοινωνικο-οικονομικών στρωμάτων και όλων των πολιτισμικών κατηγοριών από τη στιγμή που αντιλαμβάνονται τον κόσμο που τα περιβάλλει εισάγονται και στον κόσμο των μαθηματικών, στον κόσμο των μεγεθών, των σχέσεων και των μορφών, όπως ο κόσμος αυτός διαμορφώνεται και αξιοποιείται στα διάφορα κοινωνικά, οικονομικά και πολιτισμικά περιβάλλοντα.

Από τις αρχές της δεκαετίας του 1980 μέχρι σήμερα, οι δυνατότητες απόκτησης μαθηματικών γνώσεων και ανάπτυξης μαθηματικών δεξιοτήτων από τα παιδιά της προσχολικής και της πρώτης σχολικής ηλικίας, το πλαίσιο ανάπτυξης και εκδήλωσης των δυνατοτήτων αυτών, καθώς και τα χαρακτηριστικά των μαθηματικών εννοιών που μπορούν να οικειοποιηθούν τα παιδιά αποτελούν αντικείμενα ερευνών και αναλύσεων, μερικές από τις οποίες έχουν τη μορφή και την έκταση ολοκληρωμένων ερευνητικών προγραμμάτων (ενδεικτικά, Bobis 1996, Clarke et al. 2002, Steffe et al. 1983, Steffe 1982, Young-Loveridge 2008).

Από τις έρευνες αυτές τεκμηριώνονται οι δυνατότητες των παιδιών να οικειοποιούνται ένα εντυπωσιακό εύρος μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων, από το χειρισμό αριθμών και την επίλυση απλών προβλημάτων μέχρι τις μετρήσεις οικείων μεγεθών και την κατανόηση γεωμετρικών εννοιών (ενδεικτικά, Diezmann & Yelland, 2000, Ginsburg & Golbeck, 2004, Hughes, 1986, Kilpatrick et al, 2001, Mulligan et al 2006, Peters, 1992, Perry & Dockett, 2002, Sophian 2004, Zur & Gelman, 2004).

Στην πράξη, όμως, οι αναζητήσεις και οι προβληματισμοί για τις μορφές υποστήριξης της μαθηματικής ανάπτυξης των παιδιών στο νηπιαγωγείο και στις πρώτες τάξεις του πρωτοβάθμιου σχολείου δεν έχουν οδηγήσει σε σαφή συμπεράσματα.

Με αποτέλεσμα, ενώ ξέρουμε τις δυνατότητες των παιδιών να αγνοούμε μέσα από ποια περιεχόμενα, με ποιους τρόπους και μέσα από ποιες εκπαιδευτικές δραστηριότητες μπορούμε να υποστηρίξουμε την ανάπτυξη των δυνατοτήτων αυτών, ή όπως επιγραμματικά σημειώνει ο Gifford (2004, σ. 100) σε μια επισκόπηση της παιδαγωγικής των μαθηματικών στην προσχολική ηλικία *«δεν ξέρουμε πολλά, ώστε να υποστηρίξουμε με συστηματικό τρόπο τα παιδιά να μάθουν»* μαθηματικά.

Παράλληλα, ενώ αναγνωρίζεται ο καθοριστικός ρόλος της αποτελεσματικής διδασκαλίας των μαθηματικών σχολείο, στις εκπαιδευτικές διαδρομές και στον πολλαπλασιασμό των ευκαιριών που παρέχονται στα παιδιά, η αναγνώριση αυτή δεν έχει αντίστοιχες επιπτώσεις στο περιεχόμενο και στις πρακτικές μάθησης των μαθηματικών του νηπιαγωγείου.

Τα μαθηματικά στην προσχολική εκπαίδευση: Μια ιστορική επισκόπηση

Η ένταξη μαθηματικών υλικών και η ανάπτυξη αντίστοιχων δραστηριοτήτων στην προσχολική εκπαίδευση αποτελεί στοιχείο του νηπιαγωγείου από την πρώτη περίοδο της ίδρυσης και λειτουργίας του, ως ίδρυμα προσχολικής εκπαίδευσης και έκτοτε, με διάφορους μετασχηματισμούς στους στόχους, στα περιεχόμενα και στις πρακτικές των μαθηματικών δραστηριοτήτων, συνοδεύει την εξέλιξη της προσχολικής εκπαίδευσης σε όλες τις φάσεις ανάπτυξης της. Σε κάθε ιστορική περίοδο, τα δομικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών δραστηριοτήτων στο νηπιαγωγείο διαμορφώνονται από δύο κατηγορίες παραγόντων. Αφενός, από τις κυρίαρχες σε κάθε εποχή παιδαγωγικές θεωρίες και τις αρχές οργάνωσης του μαθησιακού περιβάλλοντος στα νηπιαγωγεία, τις οποίες οι θεωρίες αυτές υπαγορεύουν και αφετέρου από τα προτάγματα της μαθηματικής εκπαίδευσης, όπως διαμορφώνονται από τις έρευνες και τις συναφείς αναλύσεις για τις δυνατότητες απόκτησης μαθηματικών γνώσεων και ανάπτυξης μαθηματικών δεξιοτήτων των παιδιών της προσχολικής και της πρώτης σχολικής ηλικίας.

Τα βασικά στοιχεία των κυριάρχων απόψεων και της πραγματικότητας που διαμόρφωσαν με την ένταξη μαθηματικών υλικών και την ανάπτυξη αντίστοιχων δραστηριοτήτων στην προσχολική εκπαίδευση σκιαγραφούνται στα επόμενα, μέσα από μια διάκριση ιστορικών περιόδων βασισμένη στα χαρακτηριστικά αυτά, την οποία υιοθετούμε από μια συναφή ανάλυση των Newton & Alexander (2013).

Το νηπιαγωγείο του Φρέμπελ ή τα μαθηματικά υλικά ως μέσο ανάπτυξης της σκέψης (1900–1920)

Στο τέλος του 20^{ου} και στις αρχές του 21^{ου} αιώνα είχε ολοκληρωθεί ο βιομηχανικός μετασχηματισμός της Ευρώπης και της Βόρειας Αμερικής και, ως απόρροια του, διαμορφώθηκαν νέες κοινωνικές συνθήκες και πρότυπα ζωής στο πλαίσιο των οποίων προέκυψε το ζήτημα της σωματικής και νοητικής ανάπτυξης των παιδιών. Ιδρύθηκαν με διάφορες μορφές και λειτούργησαν διαφόρων τύπων ιδρύματα προσχολικής αγωγής, στα οποία εφαρμόστηκαν παιδαγωγικές πρακτικές βασισμένες ουσιαστικά στα πρότυπα οργάνωσης και λειτουργίας των «νηπιακών κήπων» (kindergarten) και των παιδαγωγικών αρχών του Φρέμπελ (Froebel), παρά τις όποιες παραλλαγές τους σε διάφορες περιόδους και χώρες. Με βάση την παραδοχή ότι τα έξι πρώτα χρόνια της ζωής είναι τα θεμέλια πάνω στα οποία στηρίζεται η σωματική και πνευματική ανάπτυξη κάθε παιδιού, ο Φρέμπελ ανέπτυξε ένα σύστημα αγωγής βασισμένο στις ανάγκες των παιδιών, όπως ο ίδιος εντόπιζε και ανέλυε, στο οποίο το παιχνίδι και η χειροτεχνική δραστηριότητα κατείχαν κυρίαρχες θέσεις.

Στο παιδαγωγικό σύστημα του Φρέμπελ, τα μαθηματικά θεωρήθηκαν ως ένα αποτελεσματικό μέσο ανάπτυξης της σκέψης και ταυτόχρονα ως ένα προνομιακό πεδίο άσκησης των λογικών διεργασιών και για το σκοπό αυτό αναπτύχθηκε μια σειρά εκπαιδευτικών υλικών, τα οποία «ενσωμάτωναν» μαθηματικές αρχές και έννοιες, κυρίως γεωμετρίας. Τα υλικά αυτά, τα οποία ο ίδιος ονόμασε «δώρα» και προδιέγραψε αναλυτικά τη χρήση τους, αποτελούσαν τα μέσα για την ανάπτυξη ποικίλων εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων με στόχο την αξιοποίηση της εποπτείας και της αυτενέργειας, για την ανάπτυξη πρωτίστως της

λογικής σκέψης και ως παράγωγη συνέπεια τη μάθηση κάποιων μαθηματικών εννοιών. Ιδωμένα από μια παιδαγωγική οπτική, τα μαθηματικά υλικά του Φρέμπελ διαμόρφωναν απολύτως δομημένες μαθησιακές δραστηριότητες, οι οποίες είχαν πολλά χαρακτηριστικά τυπικής διδασκαλίας, παρά τον φαινομενικά παιγνιώδη χαρακτήρα τους και παρά την παραδοχή του ίδιου για την ανεκτίμητη συμβολή του παιχνιδιού στη μάθηση.

Ο Φρέμπελ, όμως, όπως και η Μοντεσσόρι (Montessori), η οποία ενσωμάτωσε πολλά στοιχεία της παιδαγωγικής του στη δικιά της δουλειά, προσλάμβαναν με έναν ιδιαίτερο τρόπο το ρόλο του παιχνιδιού και των δραστηριοτήτων στην ανάπτυξη της σκέψης και της συμπεριφοράς των παιδιών και σε αυτή την οπτική τους τα μαθηματικά ενταγμένα σε ένα παιχνίδι ή σε μια δραστηριότητα δεν ήταν ο «σκοπός», αλλά το «μέσο» για την ανάπτυξη της σκέψης. Ταυτίζοντας, βέβαια, τη σκέψη αποκλειστικά με την υποθετικο-παραγωγική σκέψη.

Το νηπιαγωγείο του Ντιούι ή η μάθηση των μαθηματικών μέσα από τις εμπειρίες (1920–1940)

Στην αμέσως επόμενη χρονικά περίοδο, επικρατούν πιο παιδοκεντρικές απόψεις, οι οποίες υποστηρίζουν τις λιγότερο δομημένες και περισσότερο ελεύθερες δραστηριότητες μάθησης στην προσχολική εκπαίδευση (Balfanz 1999). Στο πλαίσιο των δραστηριοτήτων αυτών, τα παιδιά αξιοποιούν μαθηματικά δομημένα υλικά με τα οποία αναπτύσσουν δραστηριότητες εξερεύνησης μαθηματικών εννοιών, χωρίς όμως οι έννοιες αυτές να αποτελούν καθαυτές αντικείμενα μάθησης. Οι μαθηματικές εμπειρίες που προσφέρουν τα εκπαιδευτικά υλικά είναι άτυπες και ενσωματωμένες στις διερευνητικές δραστηριότητες των παιδιών, οι οποίες και καθοδηγούν τη μάθηση. Όπως έχει επιγραμματικά διατυπωθεί, η μάθηση των μαθηματικών είναι συμπτωματική και όχι εμπρόθετη, είναι μάθηση *μέσα* από τις εμπειρίες και όχι μάθηση *από* τις εμπειρίες (Saracho and Spodek 2009). Παρόλα αυτά, η αποδοχή ότι η μάθηση των μαθηματικών αποτελεί έναν από τους στόχους της προσχολικής αγωγής αντικαθιστά τη θεώρηση τους ως μέσου ανάπτυξης της σκέψης

των παιδιών και εντάσσεται σε μια λογική «προετοιμασίας» των παιδιών για τα επόμενα σχολικά τους χρόνια. Παράλληλα, όμως, αυτό που αποκαλείται «μαθηματικά» στην προσχολική και στην πρώτη σχολική εκπαίδευση της εποχής περιορίζεται σε πολύ βασικές έννοιες της αρίθμησης και στα βασικά γεωμετρικά σχήματα. Υπό την επήρεια των κυρίαρχων θεωρητικών απόψεων της εποχής, με κύριο υποστηρικτή τον Θορνταϊκ (Thorndike, 1913), έναν από τους θεμελιωτές της ψυχολογίας της συμπεριφοράς, οι οποίες υποστήριζαν ότι οι δυνατότητες των μικρών παιδιών να κατανοήσουν μαθηματικές έννοιες, πέρα από τις βασικές έννοιες των αριθμών και των απλών γεωμετρικών σχημάτων, ήταν περιορισμένες και ότι κάθε απόπειρα διδασκαλίας τους θα είχε μάλλον αρνητικές επιπτώσεις στην ανάπτυξη της σκέψης των παιδιών (Balfanz 1999).

Το νηπιαγωγείο του Πιαζέ ή τα μαθηματικά ως θεμέλιο της λογικής σκέψης (1940–1960)

Η εικοσαετία 1940-1960 σηματοδοτήθηκε από τον 2^ο Παγκόσμιο Πόλεμο και τις δραματικές και ταυτόχρονα δραστικές επιπτώσεις του, όχι μόνο στη ζωή αλλά και στη σκέψη των ανθρώπων. Στην εκπαίδευση κυριάρχησε η θεωρία του «ανθρώπινου κεφαλαίου», σύμφωνα με την οποία η απόκτηση γνώσεων και δεξιοτήτων αυξάνει την παραγωγικότητα των ατόμων και αποτελεί πηγή πλούτου, συμβάλλει στην οικονομική ανάπτυξη των κοινωνιών και υποκινεί την επινόηση και διάχυση νέων τεχνολογιών. Στη βάση αυτή, τα μαθηματικά αποτελούν μια παραγωγική γνώση, την οποία τα σχολεία όλων των βαθμίδων και τύπων οφείλουν να παρέχουν με τους πιο αποτελεσματικούς διδακτικά τρόπους σε όλα τα παιδιά και τους νέους.

Στην προσχολική εκπαίδευση, η θέση και ο ρόλος των μαθηματικών καθορίζεται αποφασιστικά από τις έρευνες και τις θεωρίες του Πιαζέ για τη γνωστική ανάπτυξη των ατόμων (ενδεικτικά, Piaget, 1952, 1955). Για τον Πιαζέ η νόηση συνίσταται από λογικά οργανωμένες δομές, που παρέχουν αναπαραστάσεις των στοιχείων της πραγματικότητας στα οποία οι δομές αυτές αναφέρονται. Μέσα από τις δομές αυτές και με βάση τις λειτουργίες τους ο άνθρωπος, ως δρών υποκείμενο, κατανοεί, χειρίζεται και μετασχηματίζει την

πραγματικότητα. Με αυτή την έννοια, οι νοητικές δομές, οι οποίες έχουν εννοιολογικό, αλλά και ταυτόχρονα γνωστικό περιεχόμενο, προσδιορίζουν τη νοητική συμπεριφορά του ατόμου και όταν ενεργοποιούνται για την επίλυση ενός προβλήματος, εκδηλώνονται ως ένα σύνολο νοητικών ικανοτήτων.

Στην πρώτη περίοδο της νοητικής ανάπτυξης του ατόμου, την οποία ο Πιαζέ αποκαλεί «περίοδο της αισθησιο-κινητικής νοημοσύνης», η νοητική λειτουργία βασίζεται αποκλειστικά στα άμεσα δεδομένα των αισθήσεων και στις κινητικές αντιδράσεις. Έχει, επομένως, πραξιακό-εμπειρικό χαρακτήρα χωρίς να εμφανίζει κανένα στοιχείο λογικής συγκρότησης.

Στην αμέσως επόμενη περίοδο της ανάπτυξης του ατόμου, κατά τον Πιαζέ περίοδο της προ-συλλογιστικής σκέψης η οποία στις σύγχρονες κοινωνίες συμπίπτει με την προσχολική περίοδο, διαμορφώνεται και αναπτύσσεται η συμβολική νοητική λειτουργία του ατόμου. Η συμβολική λειτουργία χαρακτηρίζεται από τη δημιουργία συμβολικών αναπαραστάσεων (νοητικών εικόνων, λέξεων και αριθμητικών παραστάσεων) οι οποίες αναπαριστούν στοιχεία της πραγματικότητας - δεδομένα ή μη στις αισθήσεις - και παράλληλα από τη διαφοροποίηση των συμβολικών αυτών αναπαραστάσεων από τα συγκεκριμένα στοιχεία της πραγματικότητας που αναπαριστούν. Η συμβολική λειτουργία εκδηλώνεται στη χρήση της γλώσσας, στην επίλυση προβλημάτων και στο παιχνίδι (Piaget 1955).

Ακολουθεί στη νοητική ανάπτυξη του ατόμου, η περίοδος των συγκεκριμένων λογικών ενεργειών, που στις σύγχρονες κοινωνίες συμπίπτει με την πρώτη σχολική περίοδο, ενεργειών οι οποίες χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα της αντιστρεψιμότητας και την οργάνωση τους σε δομημένα σύνολα. Οι αντιστρέψιμες λογικές ενέργειες καθιστούν δυνατή τη συστηματική σκέψη με όρους εννοιών και σχέσεων μεταξύ των εννοιών. Οι λογικοί συλλογισμοί κατά την περίοδο αυτή, βασίζονται σε ομαδοποιήσεις και διακρίσεις εννοιών, καθώς και σε ταξινομήσεις και διατάξεις των διαφορών τους. Έπεται η περίοδος των τυπικών λογικών ενεργειών, στη οποία ολοκληρώνεται η ανάπτυξη της νοητικής συγκρότησης κάθε ατόμου.

Ο Πιαζέ υποστήριξε ότι η λογική σκέψη αναπτύσσεται μέσα από τις δραστηριότητες των παιδιών (Beatty 2009) και στη βάση αυτή θεωρήθηκε ότι ο χειρισμός υλικών αντικειμένων συμβάλλει τελικά στην συγκρότηση άτυπων μαθηματικών εννοιών, οι οποίες σε ένα επόμενο στάδιο εκπαίδευσης θα μπορούσαν μέσα από τη διδασκαλία να μετασχηματιστούν σε τυπικές μαθηματικές έννοιες (Lambdin & Walcott 2007). Τα υλικά αντικείμενα των δραστηριοτήτων, όμως, για να αποτελέσουν κίνητρα μαθηματικής γνώσης δεν απαιτείται να έχουν εγγενείς μαθηματικές ιδιότητες ή να προβάλλουν μέσα από τα χαρακτηριστικά τους μαθηματικές σχέσεις, όπως τα εκπαιδευτικά υλικά του Φρέμπελ. Αντίθετα, στην Πιαζετιανή οπτική το περιεχόμενο και η οργάνωση των δραστηριοτήτων είναι οι υποβολείς των μαθηματικών εννοιών και σχέσεων και τα υλικά αντικείμενα απλώς υποστηρικτικά μέσα για την ανάπτυξη των δραστηριοτήτων. Οπότε οι δραστηριότητες για την υποστήριξη της μαθηματικής γνώσης μπορεί να είναι και απλά αντικείμενα της καθημερινότητας, όπως κουτιά ή μπουκάλια. Παρόλα αυτά, στα γραπτά του Πιαζέ σκιαγραφείτε η άποψη, ότι τα μικρά παιδιά δεν είναι σε θέση να συγκροτήσουν παρά μόνο άτυπες έννοιες του αριθμού, όμως, κατανοούν, δείχνουν ενδιαφέρον και μπορούν να διερευνούν ποικίλες κανονικότητες (Piaget, 1965).

Ενώ, λοιπόν, ο Πιαζέ απέδωσε στα μαθηματικά μια κυρίαρχη θέση στην προσχολική και στην πρώτη σχολική εκπαίδευση καθιστώντας τα επίκεντρο και κριτήριο της ανάπτυξης της λογικής σκέψης, οι θεωρίες του και τα πειραματικά δεδομένα που αυτές περιείχαν ερμηνεύτηκαν και «αξιοποιήθηκαν» διδακτικά με πολλούς τρόπους, κάποιοι από τους οποίους είχαν αρνητικές επιπτώσεις στη μάθηση των μαθηματικών. Το γεγονός, για παράδειγμα, ότι ο Πιαζέ περιέγραψε και θεωρητικοποίησε στις «περιόδους νοητικής ανάπτυξης του ατόμου» τις αναμενόμενες νοητικές συμπεριφορές μιας συγκεκριμένης κοινωνικά και πολιτισμικά πλειονότητας παιδιών, οδήγησε σε μια γενίκευση, η οποία αγνοούσε κάθε ατομική ιδιαιτερότητα στους τρόπους μάθησης των μαθηματικών, στους τύπους σκέψης των παιδιών ή στους ρυθμούς ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης κάθε παιδιού. Τα παιδιά εντάσσονταν με κύριο κριτήριο την ηλικία τους διαζευκτικά στην περίοδο της προ-συλλογιστικής σκέψης ή των συγκεκριμένων ή των τυπικών λογικών ενεργειών, χωρίς ενδιάμεσες καταστάσεις. Αντίστοιχα,

στις μαθηματικές δραστηριότητες των νηπιαγωγείων και των σχολείων εντάσσονταν ή αποκλείονταν δραστηριότητες με κριτήριο τις ηλικίες των παιδιών και τις προδιαγραφές των νοητικών δυνατοτήτων ή των αδυναμιών τους, όπως περιγράφονταν σε κάθε στάδιο ανάπτυξης από τη θεωρία του Πιαζέ (White and Alexander, 1986).

Το νηπιαγωγείο των χρήσιμων μαθηματικών γνώσεων και της κοινωνιολογικής οπτικής (1960–1980)

Με αφετηρία τις θεωρίες του Πιαζέ και την αμφισβήτηση πολλών παραδοχών και συμπερασμάτων τους, αναπτύχθηκε κατά τη δεκαετία του 1960 ένας πλούσιος προβληματισμός κριτικών προσεγγίσεων στις καθολικές θεωρίες, οι οποίες περιέγραφαν τη νοητική ανάπτυξη και τη λογική συγκρότηση των ατόμων. Σε ένα τέτοιο πλαίσιο, τέθηκε στο επίκεντρο του προβληματισμού η προτεραιότητα στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και σχέσεων που συνεπάγονταν η αποδοχή των πορισμάτων του Πιαζέ ή η ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων εκτέλεσης πράξεων και επίλυσης προβλημάτων, τις οποίες απαιτούσε η χρήση των μαθηματικών στην καθημερινότητα των ανθρώπων, όπως απαιτούσε ένα ρεύμα θεωρητικών και ερευνητών της μαθηματικής εκπαίδευσης (Baroody 2000).

Στην εμπνευσμένη από τις Πιαζετιανές θεωρίες κίνηση των «νέων μαθηματικών» αντιπαρατέθηκε η τάση «πίσω στα βασικά» των μαθηματικών, η οποία προέβαλε την ανάγκη εκμάθησης «χρήσιμων» γνώσεων αρίθμησης και ανάπτυξης βασικών δεξιοτήτων εκτέλεσης αριθμητικών πράξεων και υπολογισμών, επιβάλλοντας στις μαθηματικές δραστηριότητες του νηπιαγωγείου την ανάγκη να ενσωματώσουν κάποια από τα τυπικά χαρακτηριστικά της διδασκαλίας των μαθηματικών στο σχολείο, σε αντίθεση με το παιχνίδι και την ελεύθερη διερεύνηση.

Την ίδια περίοδο, όμως, αναπτύχθηκε ένα έντονο ενδιαφέρον για τις κοινωνικές ανισότητες και τις επιπτώσεις τους στη σχολική πορεία και στη ζωή των παιδιών και κατά συνέπεια στη μάθηση των γνώσεων, όπως οργανώνονταν από τα νηπιαγωγεία και τα σχολεία. Το ενδιαφέρον αυτό εκδηλώθηκε με πλήθος ερευνών και θεωρητικών αναλύσεων, αλλά παράλληλα και με πλήθος αντισταθμιστικών προγραμμάτων για τα

παιδιά που βίωναν συνθήκες φτώχειας και κοινωνικής υποβάθμισης. Ως αποτέλεσμα πολλαπλασιάστηκαν τα νηπιαγωγεία και τα σχολεία πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και αναπτύχθηκαν διαφοροποιημένα προγράμματα εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων, πολλά από τα οποία ενσωμάτωναν ενδιαφέροντα στοιχεία εισαγωγής των παιδιών στα μαθηματικά, πάντα βέβαια στη λογική της προετοιμασίας των παιδιών για μια μελλοντική ομαλή σχολική εξέλιξη.

Το νηπιαγωγείο των αντιθέσεων (1980–2000)

Παρά το γεγονός, ότι σε κάθε εποχή η μάθηση των μαθηματικών αντιπαρατάσσονταν στη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο, η αντιπαράθεση αυτή πήρε νέες διαστάσεις κατά τη δεκαετία του 1980. Μια σειρά νέων και ριζικά διαφορετικών μεταξύ τους θεωριών για την ανθρώπινη μάθηση, οι οποίες διατυπώθηκαν και δημοσιοποιήθηκαν την εποχή αυτή (από τις γνωσιακές θεωρίες μέχρι τις θεωρίες εποικοδόμησης της γνώσης), συνέβαλαν στη διαμόρφωση και στη διάδοση ενός πλήθους προσεγγίσεων στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών. Όμως, η μάθηση και η διδασκαλία των μαθηματικών στο νηπιαγωγείο και στο σχολείο οργανώνονταν, από τους θεσμικά υπεύθυνους για αυτό φορείς, παραβλέποντας όλα αυτά τα θεωρητικά και ερευνητικά δεδομένα. Για παράδειγμα, στην κοινότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης σχηματοποιήθηκαν την εποχή αυτή δύο απολύτως αντιθετικές προσεγγίσεις στη μάθηση των μαθηματικών με αντίστοιχες συνεπαγωγές στη διδασκαλία τους. Η προσέγγιση για την οποία προτεραιότητα είχε η ατομικότητα της μάθησης (εποικοδομιστικές οπτικές) και η προσέγγιση, η οποία αναδεικνύει τον πρωταγωνιστικό ρόλο του κοινωνικο-πολιτισμικού πλαισίου στη μάθηση (κοινωνικο-δομιστικές οπτικές) ή όπως εύστοχα έχουν χαρακτηριστεί από τη Sfard (1998) η προσέγγιση της μάθησης ως απόκτησης γνώσεων έναντι της προσέγγισης της μάθησης ως συμμετοχής στις πολιτισμικά και ιστορικά αναπτυγμένες γνώσεις μιας κοινωνίας. Τα αναλυτικά προγράμματα και οι πρακτικές οργάνωσης της διδασκαλίας των μαθηματικών, όμως, προσπερνούν την αντιπαράθεση αυτή και υλοποιούν επιλογές, οι οποίες προκύπτουν μερικώς από τη μια, μερικώς από την άλλη και μερικώς από καμία θεωρητική προσέγγιση. Έτσι βλέπουμε σε ορισμένες χώρες να επικρατεί μια απολύτως

διδασκική οπτική στη μάθηση των μαθηματικών στο νηπιαγωγείο και στο πρωτοβάθμιο σχολείο και σε άλλες μια οπτική βασισμένη στο παιχνίδι και στη διερεύνηση, γεγονός το οποίο ωθεί μερικούς ερευνητές να υποστηρίξουν την άποψη ότι και η διδασκαλία είναι μια πολιτισμική δραστηριότητα, η οποία δεν επιδέχεται έναν καθολικό ορισμό (Stigler and Hiebert 1999).

Μια δεύτερη διάσταση της αντιπαράθεσης μεταξύ μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών στο σχολείο αναδείχθηκε την ίδια εποχή από ένα πλήθος ερευνών, οι οποίες κατέδειξαν τον καθοριστικό ρόλο των εκτός του σχολείου δραστηριοτήτων στην άτυπη μάθηση των μαθηματικών και στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των παιδιών. Οι μελέτες των λεγόμενων εθνομαθηματικών, των μαθηματικών δηλαδή γνώσεων που αναπτύσσονται και εφαρμόζονται σε συγκεκριμένες πολιτισμικές πρακτικές, όπως το πλέξιμο καλάθιων ή σε συγκεκριμένες μη σχολικές δραστηριότητες, όπως η πώληση προϊόντων σε λαϊκές αγορές, απέδειξαν ότι η μαθηματική γνώση και σκέψη είναι πλαισιωμένη σε κοινωνικές και πολιτισμικές πρακτικές (Sophian 1999), ένα δεδομένο που δεν μπορεί να αγνοεί το τυπικό σχολείο.

Μια άλλη σειρά ερευνών και αναλύσεων ανέδειξε το ρόλο των οικογενειακών δραστηριοτήτων και των κοινωνικών και εθνοτικών διαφοροποιήσεων τους στην μαθηματική ανάπτυξη των παιδιών (ενδεικτικά, Blevins-Knabe & Musun-Miller, 1996).

Το νηπιαγωγείο του σήμερα (2000-σήμερα)

Είναι αυτονόητη η δυσκολία να συνοψιστούν τα κύρια χαρακτηριστικά των δραστηριοτήτων, οι οποίες επιδιώκουν τη μαθηματική ανάπτυξη των παιδιών στο νηπιαγωγείο και στο πρωτοβάθμιο σχολείο σήμερα και για το λόγο αυτό μόνο κάποιες ενδείξεις μπορεί να εκτεθούν και αυτές εντελώς σχηματικά.

Το δίλλημα της νοητικής ετοιμότητας ή μη των μικρών παιδιών να οικειοποιηθούν μαθηματικές έννοιες και σχέσεις δεν τίθεται πια και ένα πλήθος ερευνών διαπιστώνει ότι τα παιδιά από μικρές ηλικίες προσελκύονται από δραστηριότητες με μαθηματικό περιεχόμενο μέσα από τις οποίες συγκροτούν άτυπες μαθηματικές γνώσεις για τους

αριθμούς, τις αριθμητικές σχέσεις και πολλές γεωμετρικές έννοιες, οι οποίες σε ένα επόμενο ηλικιακό και εκπαιδευτικό στάδιο συμβάλλουν καθοριστικά στην ιδιοποίηση των αντίστοιχων τυπικών μαθηματικών εννοιών (Duncan et al. 2007).

Οι επικρατούσες σήμερα θεωρητικές οπτικές για τη μάθηση των μαθηματικών και οι αντίστοιχες εφαρμογές τους στις εκπαιδευτικές δραστηριότητες φαίνεται να διαμορφώνονται από ένα μείγμα θεωρητικών προσεγγίσεων, οι οποίες διατυπώθηκαν στο πρόσφατο παρελθόν και οι οποίες κατά περίπτωση προτάσσουν ψυχολογικές, κοινωνικές, πολιτισμικές και πρόσφατα νευροψυχικές όψεις της ανθρώπινης νοητικής λειτουργίας. Ο δυϊσμός νόησης/σώματος, ο οποίος χαρακτήρισε για αιώνες την παιδαγωγική σκέψη, φαίνεται να αμφισβητείται πλέον σε μια οπτική η οποία δέχεται ότι η ανθρώπινη νόηση δεν μπορεί να διακριθεί από το σώμα και τις λειτουργίες του και παράλληλα ότι η ανθρώπινη σκέψη σε ατομικό επίπεδο αποτελεί μέρος μιας συλλογικής, κοινωνικο-πολιτισμικά διαμορφωμένης, σκέψης.

Το ζητούμενο, επομένως, είναι η διαμόρφωση ενός εκπαιδευτικού περιβάλλοντος και η ανάπτυξη μαθησιακών δραστηριοτήτων, οι οποίες θα υποστηρίξουν την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης και σκέψης των παιδιών από την οπτική που προαναφέρθηκε. Στη βάση αυτή, τα όρια ελεύθερων, διερευνητικών και παιγνιωδών δραστηριοτήτων και δραστηριοτήτων οργανωμένων με μια διδακτική λογική είναι και σήμερα ρευστά και υπό διαρκή διαπραγμάτευση μεταξύ αντιθετικών οπτικών.

Μια διαρκής αντιπαράθεση και μια προτεινόμενη λύση

Από τη σκιαγράφηση της θέσης και του ρόλου των μαθηματικών υλικών και δραστηριοτήτων στην προσχολική εκπαίδευση, που προηγήθηκε, καθίσταται σαφής μια αντίθεση - άλλοτε διακηρυγμένη και άλλοτε υπονοούμενη - ανάμεσα σε οπτικές οι οποίες επικεντρώνονται στις μαθηματικές γνώσεις και προβάλλουν τη μάθηση τους με μεθόδους που υιοθετούν πολλά χαρακτηριστικά της τυπικής διδασκαλίας και σε προσεγγίσεις οι οποίες επικεντρώνονται στις ιδιαιτερότητες της παιδικής ηλικίας και υποστηρίζουν την οικειοποίηση των μαθηματικών γνώσεων μέσα από δραστηριότητες, οι

οποίες έχουν κυρίως χαρακτηριστικά παιχνιδιού και ελεύθερης διερεύνησης. Αυτή η αντίθεση διατρέχει, άλλωστε, και πολλές άλλες όψεις της εκπαίδευσης των παιδιών διακρίνοντας ήδη από τις αρχές του προηγούμενου αιώνα τις εκπαιδευτικές πρακτικές σε γνωσιο-κεντρικές και παιδο-κεντρικές. Ο Ντιούι (Dewey) σχολιάζοντας την αντίθεση αυτή, υποστήριξε ότι και η μια οπτική και η άλλη έχουν θετικά στοιχεία και καμία από τις δύο δεν επαρκεί από μόνη της για τη διαμόρφωση μιας ολοκληρωμένης προσέγγισης στην εκπαίδευση των παιδιών.

Αντίθετα απαιτούνται συνθέσεις των πιο παραγωγικών διαστάσεων και της μιας και της άλλης οπτικής για την υποστήριξη της μάθησης και της νοητικής ανάπτυξης των παιδιών (Dewey, 1966, 1980, Egan, 1988) και σε μια τέτοια λογική διατυπώνεται η πρόταση που σκιαγραφείται στα επόμενα, η οποία βασίζεται σε θεμελιώδεις παραδοχές και προτάσεις της ιστορικο-κοινωνικής θεωρίας του Βυγκότσκι για τη νοητική αναπτύξη και τη γνωστική συγκρότηση του ατόμου (Vygotsky, 1993, 1997).

Σε μια τέτοια θεωρητική βάση, μια συνθετική διέξοδος από την αντιπαράθεση των γνωσιο-κεντρικών και παιδο-κεντρικών απόψεων και πρακτικών των μαθηματικών δραστηριοτήτων στο νηπιαγωγείο και στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού σχολείου:

- (α) στοχεύει στην ανάδειξη και στην ανάπτυξη των γνώσεων και ικανοτήτων που ήδη κατέχουν τα παιδιά και στη διεύρυνση των γνώσεων και ικανοτήτων αυτών μέσα από την επέκταση των γνωστικών τους δυνατοτήτων. Η ζώνη της εγγύτερης ανάπτυξης αποτελεί το θεωρητικό πλαίσιο επίτευξης ενός τέτοιου στόχου.
- (β) αποδίδει ιδιαίτερη σημασία και οργανώνει τις μαθησιακές πρακτικές με αφετηρία τις κυρίαρχες δραστηριότητες κάθε περιόδου της νοητικής ανάπτυξης του ατόμου. Σύμφωνα με τον Βυγκότσκι, μια κυρίαρχη δραστηριότητα είναι ένας ιδιαίτερος τύπος αλληλεπίδρασης του παιδιού με το φυσικό και κοινωνικό περιβάλλον του, η οποία παρέχει το πλαίσιο και ευνοεί τη γνωστική του ανάπτυξη. Η κυρίαρχη δραστηριότητα των παιδιών από την ηλικία των 3 μέχρι την ηλικία των 7 ετών περίπου είναι το παιχνίδι, στο πλαίσιο του οποίου συγκροτούνται και

αναπτύσσονται οι συμβολικές λειτουργίες και η δημιουργική φαντασία του, παράλληλα με τις ικανότητες κατανόησης των κοινωνικών σχέσεων. Αντίστοιχα, η κυρίαρχη δραστηριότητα των παιδιών από την ηλικία των 7 μέχρι την ηλικία των 11 ετών περίπου είναι η μάθηση στο πλαίσιο της οποίας συγκροτούνται στοιχειώδεις θεωρητικές απόψεις για τα στοιχεία της περιβάλλουσας πραγματικότητας και παράλληλα δημιουργούνται οι προϋποθέσεις για την ανάπτυξη της αφηρημένης θεωρητικής σκέψης των παιδιών (σκοπίμες νοητικές πράξεις, νοητικά σχήματα επίλυσης προβλημάτων και δυνατότητες στοχασμού). Είναι προφανές, ότι για τη μετάβαση από τη μια δραστηριότητα και περίοδο ανάπτυξης στην άλλη πρέπει να δημιουργούνται στα παιδιά κίνητρα μάθησης μέσα από το παιχνίδι (Vygotsky, 1974).

(γ) οργανώνει κοινωνικές και πολιτιστικές δραστηριότητες οι οποίες έχουν νόημα για τα παιδιά και προκαλούν το ενδιαφέρον τους.

Τα μαθηματικά, τώρα, είναι ένας τρόπος να βλέπουμε τον κόσμο, ένας τρόπος να οργανώνουμε τις δραστηριότητες μας μέσα στον κόσμο και ένας τρόπος να μιλάμε για τον κόσμο και τις δραστηριότητες μας μέσα από μια τέτοια θέαση, χρησιμοποιώντας τη γλώσσα, τα σύμβολα, τα σχήματα και γενικότερα τις γλωσσικές, συμβολικές και γραφικές παραστάσεις των μαθηματικών. Παράλληλα, βέβαια, είναι και μια γνώση οργανωμένη με συγκεκριμένες αρχές και διατυπωμένη καθιερωμένους τρόπους. Στην προσχολική και στην πρώτη σχολική εκπαίδευση, όμως, δεν (θα πρέπει να) μας ενδιαφέρουν τα μαθηματικά ως μια οργανωμένη γνώση, αλλά πρωτίστως ως μια οπτική του κόσμου και ως ένας τρόπος αναπαράστασης του κόσμου.

Αυτό που αποκαλούμε «μαθηματική σκέψη», επομένως, δεν είναι παρά ένας τρόπος θέασης του κόσμου, ο οποίος περιλαμβάνει ως συστατικό του στοιχείο τη χρήση γλωσσικών, συμβολικών και γραφικών παραστάσεων μέσα από τις οποίες κατασκευάζεται και αποδίδεται ένα νόημα στα στοιχεία του κόσμου και των δραστηριοτήτων μας. Απαιτεί, επομένως, πρώτα από όλα μια ευχέρεια συσχέτισης νοημάτων και γλωσσικών, συμβολικών και γραφικών παραστάσεων ή με μια λέξη σημείων.

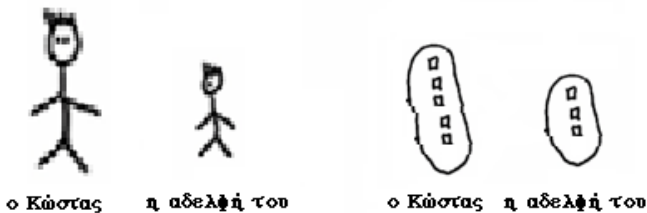
Από μια τέτοια οπτική, η μαθηματική σκέψη μπορεί να θεωρηθεί και ως μια μορφή σημειωτικής δραστηριότητας και μια πρώτη σημειωτική δραστηριότητα μπορούμε να εντοπίσουμε στα ικνογραφήματα, στα σχεδιάσματα και γενικότερα στις σχηματικές απεικονίσεις που κατασκευάζουν τα μικρά παιδιά όταν «ζωγραφίζουν».

Ως σημειωτική δραστηριότητα εννοείται κάθε νοητική δραστηριότητα η οποία στοχεύει στην κατασκευή ή στη διασκευή συμβολικών αναπαραστάσεων επιλεγμένων στοιχείων της φυσικής και κοινωνικοπολιτιστικής μας πραγματικότητας (Van Oers, 1994) και η δραστηριότητα αυτή περιλαμβάνει τη δημιουργία εικόνων, σχεδίων, διαγραμμάτων, γραφημάτων, μοντέλων, ιστοριών και άλλων απλών μορφών λεκτικών ή συμβολικών απεικονίσεων.

Η συμβολή κάθε σημειωτικής δραστηριότητας στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης έχει τεκμηριωθεί σε μια σειρά αναλύσεων και ερευνών (ενδεικτικά Dijk et al. 2004, Worthington & Carruthers, 2003), όπως έχει τεκμηριωθεί και η συμβολή δραστηριοτήτων εικονογραφικής και σχηματικής αναπαράστασης μαθηματικών καταστάσεων και προβλημάτων (Dijk et. al., 2004). Οι δραστηριότητες αυτές οικοδομούν νοητικές γέφυρες ανάμεσα στο συγκεκριμένο και στη συμβολική (ανα)παράσταση του και κατά μακροπρόθεσμα ανάμεσα στη συγκεκριμένη, πρακτική σκέψη και στη συμβολική, μαθηματική σκέψη των παιδιών.

Ενδεικτικά μιας τέτοιας (ανα)παράστασης ενός απλού μαθηματικού προβλήματος είναι τα ακόλουθα σχέδια παιδιών προσχολικής ηλικίας, τα οποία αποτελούν ένα πρώτο βήμα προς την τυπική μαθηματική του έκφραση ($5-2=3$).

Ο Κώστας είναι 5 χρονών και η αδελφή του είναι 2 χρόνια μικρότερη του.
Πόσων χρόνων είναι η αδελφή του Κώστα;



ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΧΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

Προτείνεται, λοιπόν, η ανάπτυξη δραστηριοτήτων εικονογραφικής και σχηματικής αναπαράστασης μαθηματικών καταστάσεων και προβλημάτων ως πυρήνας της εισαγωγής των παιδιών της προσχολικής και της πρώτης σχολικής ηλικίας στα μαθηματικά.

Σε ποιο πλαίσιο, όμως, ώστε να συνδυάζονται τα θετικά χαρακτηριστικά της τυπικής διδασκαλίας με τις νοητικές προκλήσεις που προσφέρουν στο παιδί οι δραστηριότητες του παιχνιδιού και της ελεύθερης διερεύνησης;

Εντελώς συνοπτικά και αναπόφευκτα αποσπασματικά, σε ένα πλαίσιο το οποίο διαμορφώνεται από το παιχνίδι ή την αφήγηση ιστοριών και κατά προτίμηση από το συνδυασμό τους. Τόσο τα παιχνίδια, όμως, όσο και οι ιστορίες θα πρέπει να περιλαμβάνουν στην δομή και στην εξέλιξη τους «μαθηματικά γεγονότα», δηλαδή μαθηματικές έννοιες, σχέσεις και προβλήματα

Για το ρόλο του παιχνιδιού στη νοητική και ψυχολογική ανάπτυξη του παιδιού έχουν γραφεί πολλά και στο ζήτημα αυτό οι αναλύσεις τόσο του Πιαζέ (Piaget, 1962) όσο και του Βυγκότσκι (Vygotsky, 1997) είναι διαφωτιστικές. Όπως έχει αναλύσει ο Βυγκότσκι, τα παιδιά αποδίδουν νοήματα σε όψεις και καταστάσεις της πραγματικότητας μέσα από την αναπαράστασή τους κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού, οπότε το παιχνίδι *διαμεσολαβεί* τη μαθησιακή δραστηριότητα των παιδιών. Τα παιδιά παίζοντας μιμούνται τις συμπεριφορές και αναπαράγουν τις σκέψεις των ενηλίκων, όχι αντιγράφοντας ακριβώς, αλλά ανακατασκευάζοντας με το δικό τους τρόπο και παράγοντας τις δικιές τους εκδοχές αυτών των συμπεριφορών και των σκέψεων (Van Oers, 1999). Μέσα από αυτές τις δραστηριότητες τα παιδιά διαμορφώνουν μια «ζώνη εγγύτερης ανάπτυξης» στο πλαίσιο της οποίας αναπτύσσουν τη μαθησιακή τους δραστηριότητα. Σε αυτή τη βάση, μπορούν να αναπτυχθούν διάφορες καταστάσεις παιχνιδιού, οι οποίες θα παρέχουν ευκαιρίες εισαγωγής των παιδιών στα μαθηματικά, χωρίς φυσικά να καταστρέφεται το παιχνίδι μέσα από τις ένθετες διδακτικές δραστηριότητες.

Μέσα από το παιχνίδι, τα παιδιά μπορούν να εισαχθούν σε ένα πλήθος μαθηματικών εννοιών και σχέσεων, από τη σύγκριση και την ταξινόμηση, την απαρίθμηση και τη μέτρηση μέχρι την κατανόηση εννοιών του χώρου και τη μάθηση γεωμετρικών σχημάτων.

Όπως, όμως, σχολιάζει ο Clements (2001, σ. 272) *«από το παιχνίδι και τα ενδιαφέροντα των παιδιών προέρχονται οι πρώτες μαθηματικές τους εμπειρίες. Εμπειρίες οι οποίες, όμως, γίνονται μαθηματικές στο βαθμό που τα παιδιά τις αναπαριστούν και τις συλλογίζονται»*

Το παιχνίδι, το οποίο στοχεύει στη δημιουργία καταστάσεων εισαγωγής των παιδιών στα μαθηματικά, προσφέροντας ευκαιρίες δραστηριοτήτων εικονογραφικής και σχηματικής αναπαράστασης, θα πρέπει οργανώνεται με αφετηρία και στην εξέλιξη μιας αφήγησης, η οποία περιλαμβάνει «μαθηματικά γεγονότα», δηλαδή μαθηματικές έννοιες, σχέσεις και προβλήματα.

Παράλληλα, ένα πλήθος θεωρητικών αναλύσεων και ερευνητικών διαπιστώσεων υποστηρίζει την άποψη ότι η αφήγηση ιστοριών προσφέρει στα παιδιά αυθεντικές ευκαιρίες εισαγωγής στα μαθηματικά και προτείνουν διάφορους τρόπους αξιοποίησης τους στη μάθηση μαθηματικών εννοιών και στην υποστήριξη της ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης των παιδιών (ενδεικτικά, Χασάπης 2010, Schiro 1997, Whitin and Whitin 2004), αφού τα μαθηματικά, όπως προαναφέρθηκε, είναι και ένας τρόπος να μιλάμε για τον κόσμο και τις δραστηριότητες μας, χρησιμοποιώντας τις γλωσσικές, συμβολικές και γραφικές παραστάσεις των μαθηματικών.

Με την παρατήρηση, όμως, που υπογραμμίζει η Moyer (2000, σ. 249), ότι μια ιστορία που αφηγούμαστε ή διαβάζουμε στα παιδιά «είναι πιο πειστική όταν τα μαθηματικά εμφανίζονται με φυσικό τρόπο ως μέρος της υπόθεσης της, σε αντίθεση με τις περιπτώσεις στις οποίες τα μαθηματικά προέχουν της υπόθεσης μιας ιστορίας»

Συνοψίζοντας, προτείνεται μια συνθετική διέξοδος στην αντιπαράθεση των γνωσιο-κεντρικών και παιδο-κεντρικών απόψεων και πρακτικών για την εισαγωγή των παιδιών της προσχολικής και της πρώτης σχολικής ηλικίας στα μαθηματικά μέσα από την ανάπτυξη δραστηριοτήτων, οι οποίες θα έχουν ως πυρήνα τους την υποκίνηση των παιδιών να δημιουργούν εικονογραφικές και σχηματικές

αναπαραστάσεις «μαθηματικών γεγονότων», δηλαδή μαθηματικών εννοιών, σχέσεων και προβλημάτων.

Δραστηριότητες, όμως, οι οποίες δεν θα αναπτύσσονται με τη μορφή των καθιερωμένων στο σχολείο δραστηριοτήτων ζωγραφικής ή σχεδίασης, αλλά θα αξιοποιούν κάθε φορά ένα πλαίσιο που θα διαμορφώνεται από ένα παιχνίδι ή την αφήγηση μιας ιστορίας και κατά προτίμηση από το συνδυασμό τους.

Βιβλιογραφικές αναφορές

- Balfanz, R. (1999). Why do we teach children so little mathematics? Some historical considerations. Στο J. V. Copley (Ed.), *Mathematics in the early years* (σελ. 3–10), Reston: National Council of Teachers of Mathematics,
- Baroody, A. (2000). Does mathematics instruction for 3–5 year olds make sense? *Young Children*, 55(4), 61–67.
- Beatty, B. (2009). Transitory connections: the reception and rejection of Jean Piaget's psychology in the nursery school movement in the 1902s and 1930s. *History of Education Quarterly*, 49(4), 442–464.
- Blevins-Knabe, B., & Musun-Miller, L. (1996). Number use at home by children and their parents and its relationship to early mathematical performance. *Early Development and Parenting*, 5, 35–45.
- Bobis, J. (1996). Visualisation and the development of number sense with kindergarten children. Στο Mulligan, J. & Mitchelmore, M. (Eds.) *Children's Number Learning : A Research Monograph of MERGA/AAMT* (σελ. 17–34), Adelaide: Australian Association of Mathematics Teachers.
- Clarke, D., Cheeseman, J., Clarke, B., Gervasoni, A., Gronn, D., Horne, M., McDonough, A., Montgomery, P., Roche, A., Rowley, G., & Sullivan, P. (2002). *Early numeracy research project, final report*. Melbourne: Australian Catholic University, Monash University.
- Clements, D. (2001), Mathematics in the preschool. *Teaching Children Mathematics* 7 (4): 270-275.

- Dewey, J. (1966/1916) *Democracy and Education: An Introduction to the Philosophy of Education* New York: The Free Press.
- Dewey, J. (1980/1938) Εμπειρία και εκπαίδευση: δοκίμιο μτφ. Λ. Πολενάκης Αθήνα: Γλάρος.
- Diezmann, C. & Yelland, N. (2000) Developing Mathematical Literacy in the Early Childhood Years. Στο N. Yelland (Ed.) *Promoting Meaningful Learning: innovations in educating early childhood professionals*, (σελ. 47-58). Washington, DC: National Association for the Education of Young Children.
- Dijk E.F., van Oers B. & Terwel J. (2004) Schematising in early childhood mathematics education: Why, when and how?, *European Early Childhood Education Research Journal*, 12:1, 71-83
- Duncan, G. J., Dowsett, C. J., Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A. C., Lebanov, P., Pagani, L. S., Feinstein, L., Engel, M., Brooks-Gunn, J., Sexton, H., Duckworth, K., & Japel, C. (2007). School readiness and later achievement. *Developmental Psychology*, 43(6), 1428–1446.
- Egan, K. (1988) *Primary Understanding*, New York: Routledge.
- Gifford, S. (2004). A new mathematics pedagogy for the early years: In search of principles for practice, *International Journal of Early Years Education*, 12 (2), 99-115.
- Ginsburg, H. & Golbeck, S. (2004) Thoughts on the Future of Research on Mathematics and Science Learning and Education, *Early Childhood Research Quarterly*, 19(1), 190-200.
- Hughes, M. (1986) *Children and Number: difficulties in learning mathematics*. Oxford: Blackwell.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Eds) (2001) *Adding It Up: helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Lambdin, D. V., & Walcott, C. (2007) Connections between psychological learning theories and the elementary school curriculum. In G. Martin & M. Strutchens (Eds.), *The sixty-ninth annual yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

- Moyer, P. (2000), Communicating mathematically: Children's literature as a natural connection, *The Reading Teacher*, 54 (3), 246 -55.
- Mulligan, J., Mitchelmore, M. & Prescott, A. (2006), Integrating Concepts and Processes in Early Mathematics: the Australian Pattern and Structure Mathematics Awareness Project (PASMAT). Στο J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka & N. Stehlikova (Eds) *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, (σελ. 209-216), Prague: International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Newton K. J. and Alexander P. A. (2013), Early Mathematics Learning in Perspective: Eras and Forces of Change. Στο L.D. English, J.T. Mulligan (eds.), *Reconceptualizing Early Mathematics Learning*, Advances in Mathematics Education, Dordrecht: Springer.
- Peters, S. (1992). Spatial ability: An investigation into the spatial ability and play preferences of four year old children. Στο B. Bell, A. Begg, F. Biddulph, M. Carr, J. McChesney, & J. Young-Loveridge (Eds.), *SAMEpapers 1992* (σελ. 117-129). Auckland: Longman Paul.
- Perry, B. & Dockett, S. (2002) Young Children's Access to Powerful Mathematical Ideas, in L. English (Ed.) *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 81-111. London: Lawrence Erlbaum Associates.
- Piaget, J. (1952). *The origins of intelligence in children*. trans. M. Cook New York: Norton.
- Piaget, J. (1955). *The language and thought of the child*. trans.M. Gabain New York: Noonday Press.
- Piaget J. (1965), *The Child's Conception of Number*, Routledge and London: Kegan Paul.
- Piaget J. (1962), *Play, Dreams and Imitation in Childhood*, New York: Norton.
- Saracho, O. N., & Spodek, B. (2009). Educating the young mathematician: the twentieth century and beyond. *Early Childhood Education Journal*, 36, 305-3 12.
- Schiro, Michael. 1997. *Integrating children's literature and mathematics in the classroom: children as meaning makers, problem solvers, and literary critics* New York: Teacher College.

- Sfard, A. (1998). On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher*, 27(2), 4–13.
- Sophian, C. (1999). Children's ways of knowing: lessons from cognitive development research. Στο J. V. Copley (Ed.), *Mathematics in the early years* (σελ. 11–20). Reston: NCTM.
- Sophian, C. (2004) Mathematics for the Future: developing a Head Start curriculum to support mathematics learning, *Early Childhood Research Quarterly*, 19(1), 59-81
- Steffe, L. P. (1982). Learning stages in the construction of the number sequence. In J. Bideau, C. Meljac, & J. Fischer (Eds.), *Pathways to number* (σελ. 83–98). Hillsdale: Erlbaum.
- Steffe, L. P., von Glasersfeld, E., Richards, J., & Cobb, P. (1983). *Children's counting types: philosophy, theory and applications*. New York: Praeger.
- Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap*. New York: Free Press.
- Thorndike, E. L. (1913). *Educational psychology*. New York: The Mason-Henry Press.
- Van Oers, B. (1994), Semiotic activity of young children in play: The construction and use of schematic representations, *European Early Childhood Education Research Journal*, 2 (1), 19-33.
- Van Oers, B. (1999), Education for the improvement of cultural participation. Στο Brougre, G., & Rayna, S. (Eds.) *Culture, Childhood and Preschool Education* (σελ. 217-238, Paris: Unesco.
- Vygotsky, L.(1974), The problem of age-periodization of child development, *Human Development*, 17, 24-40
- Vygotsky, L.(1997). *Νους στην κοινωνία. Η ανάπτυξη των ανώτερων Ψυχολογικών διαδικασιών*, μτφ. Α. Μπίμπου & Σ. Βοσνάδου, Αθήνα: Gutenberg.
- Βιγκότσκι Λεβ, (1988/1934), *Σκέψη και Γλώσσα*, μτφ. Αντζελίνα Ρόδη, Αθήνα: Γνώση.
- White, C. S., & Alexander, P. A. (1986). Effects of training on four-year-olds' ability to solve geometric analogy problems. *Cognition and Instruction*, 3, 261–268.

- Whitin, P. and Whitin, D. (2002), Promoting communication the mathematics classroom, *Teaching Children Mathematics* 9 (4), 205-211.
- Worthington M. & Carruthers, E. (2003), *Children's Mathematics: Making Marks, Making Meaning*, London: Paul Chapman Publishing.
- Young-Loveridge, J. (2008). Development of children's mathematics thinking in early school years. In O. N. Saracho & B. Spodek (Eds.), *Contemporary perspectives on mathematics in early childhood education* (σελ. 133–156). Charlotte: Information Age Publishing.
- Zur, O. & Gelman, R. (2004) Young Children Can Add and Subtract by Predicting and Checking, *Early Childhood Research Quarterly*, 19(1), 121-137.
- Χασάπης Δ. (2010), Εισάγοντας τα μαθηματικά στο νηπιαγωγείο ως αφήγηση, *Νέα Παιδεία*, 36, 75-84.

Μαθηματικά και τέχνες στην εκπαίδευση: Αναζητώντας κοινούς τόπους

Μαθηματικά και τέχνες

Μια επισκόπηση της συναφούς βιβλιογραφίας αναδεικνύει τρεις διαφορετικές οπτικές στις σχέσεις μαθηματικών και τεχνών:

Οπτική πρώτη, αυτή που σχηματικά θα ονομάζονταν η τέχνη των μαθηματικών. Τα μαθηματικά είναι μια μορφή τέχνης, η διατύπωση και η απόδειξη ενός μαθηματικού θεωρήματος, η επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος, η ανάπτυξη μια μαθηματικής θεωρίας είναι δραστηριότητες με χαρακτηριστικά ενός ιδιαίτερου τύπου τέχνης.

Οπτική δεύτερη, η μαθηματική ανάγνωση των έργων της τέχνης. Μαθηματικές έννοιες, σχέσεις και θεωρήματα αναγνωρίζονται σε έργα τέχνης υποδηλώνοντας τη στενή συνάφεια μαθηματικών και τέχνης, ως κοινωνικών πρακτικών.

Οπτική τρίτη, αυτή που αναδεικνύει τα μαθηματικά στοιχεία καλλιτεχνικών έργων και τονίζει το ρόλο των μαθηματικών εννοιών, σχέσεων και θεωριών στη δημιουργία τους.

Καθεμιά από τις οπτικές αυτές - στο εσωτερικό των οποίων εντοπίζονται και επιμέρους διαφοροποιήσεις - επιλέγει και αναδεικνύει διαφορετικές όψεις και (υπερ)τονίζει διαφορετικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών ή και των τεχνών, ως κοινωνικών πρακτικών, ιστορικά αναπτυγμένων και πολιτισμικά καθορισμένων και καθεμιά από τις οπτικές αυτές υποστηρίζεται από πολλές και ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες, ως προς το περιεχόμενό τους, έρευνες και αναλύσεις.

Θα επιχειρηθεί στη συνέχεια μια συνοπτική έκθεση των τριών αυτών οπτικών στις σχέσεις μαθηματικών και τεχνών, μέσα από μια επιλεκτική παρουσίαση των βασικών παραδοχών και των κύριων επιχειρημάτων τους.

Η τέχνη των μαθηματικών

Η οπτική αυτή, όπως προαναφέρθηκε, αποδίδει στη μαθηματική δραστηριότητα και στα παράγωγά της (έννοιες και σχέσεις, θεωρήματα και αποδείξεις, προβλήματα και μέθοδοι επίλυσης τους) χαρακτηριστικά της καλλιτεχνικής δημιουργίας. Περιορίζοντας, βέβαια, τη μαθηματική δραστηριότητα στο καθαρά θεωρητικό επίπεδο παραγωγής μαθηματικής γνώσης. Τα χαρακτηριστικά της καλλιτεχνικής δημιουργίας αποδίδονται στα μαθηματικά μέσα από δύο προσεγγίσεις.

Η μια προσέγγιση θεωρεί τα μαθηματικά ως μια μορφή τέχνης, ισχυριζόμενη ότι η μαθηματική δημιουργία προκαλεί στον ερευνητή μαθηματικό, τα ίδια συναισθήματα με εκείνα που προκαλεί ένα έργο τέχνης στον καλλιτέχνη δημιουργό του. Ο Πουανκαρέ – πατριάρχης της άποψης αυτής – γράφει ότι *«ένας επιστήμονας άξιος του ονόματος, και πάνω απ' όλα ένας μαθηματικός, έχει τα ίδια συναισθήματα στη δουλειά του με έναν καλλιτέχνη. Η ευχαρίστηση του είναι το ίδιο έντονη και της ίδιας φύσης»* (Poincare, 1890, σ. 143). Στην ίδια γραμμή σκέψης ο Ράσελ, υποστηρίζει ότι στη μαθηματική εμπειρία ενέχονται αισθητικές απολαύσεις ανάλογες της γλυπτικής, τη ζωγραφικής, της μουσικής ή της ποίησης (Russel, 1919, σ. 60).

Ο Hardy υπερβάλλοντας την υποκειμενική εμπειρία της μαθηματικής δραστηριότητας ταυτίζει τους μαθηματικούς με τους καλλιτέχνες, αποδίδοντας, μάλιστα, στα μαθηματικά δημιουργήματα υπέρτερη αξία των καλλιτεχνικών έργων. Στο αυτοβιογραφικό έργο του «Η απολογία ενός μαθηματικού» δηλώνει χωρίς καμία επιφύλαξη ότι *«Ο μαθηματικός, όπως ένας ζωγράφος ή ένας ποιητής είναι ένας σχεδιαστής. Αν τα σχεδιάσματά του είναι περισσότερο διαχρονικά από εκείνων, αυτό οφείλεται στο ότι είναι φτιαγμένα από ιδέες»* (Hardy, 1991, σ. 62).

Στο ίδιο βιβλίο, ο Hardy, υιοθετεί και προβάλλει τη δεύτερη – συμπληρωματική της πρώτης – προσέγγιση των μαθηματικών ως τέχνης, αποδίδοντας στα παράγωγα της μαθηματικής δραστηριότητας, και κυρίως στα μαθηματικά θεωρήματα ή και στις αποδείξεις τους, χαρακτηριστικά καλλιτεχνικών έργων. *«Τα μαθηματικά σχεδιάσματα, όπως και εκείνα ενός ζωγράφου ή ποιητή πρέπει να είναι όμορφα. Οι*

ιδέες, όπως τα χρώματα ή οι λέξεις πρέπει να ταυριάζουν μεταξύ τους με αρμονικό τρόπο. Η ομορφιά είναι το πρώτο κριτήριο: δεν υπάρχει μόνιμη θέση στον κόσμο για άσχημα Μαθηματικά» (ο.π. σ. 63).

Αυτή η δεύτερη προσέγγιση, η οποία τονίζει επιλεγμένα, αλλά αντικειμενικά, χαρακτηριστικά της μαθηματικής γνώσης, σε αντίθεση με την πρώτη, η οποία προβάλλει την υποκειμενική αίσθηση που προκαλεί η μαθηματική δραστηριότητα, φαίνεται να κυριαρχεί στη οπτική των μαθηματικών ως μιας ιδιότυπης μορφής τέχνης.

Εκφράσεις, όπως ένα «καλαίσθητο» ή ένα «όμορφο» θεώρημα, μια «καλαίσθητη» ή μια «κομψή» απόδειξη ή μια «όμορφη» λύση ενός μαθηματικού προβλήματος είναι συστατικές του λεξιλογίου της οπτικής αυτής και έχουν, ανάλογα με το πλαίσιο τους, διαφορετικά σημαινόμενα.

Ως ένα τυπικά «όμορφο» μαθηματικό θεώρημα θεωρείται η ταυτότητα του Euler:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Η ταυτότητα του Euler κατοχυρώνει την ομορφιά της στο λιτό συνδυασμό των σημαντικότερων για τα μαθηματικά αριθμών και πράξεων:

- του αριθμού e , ο οποίος είναι η βάση των φυσικών λογαρίθμων ($e = 2.718281828\dots$) και χρησιμοποιείται ευρύτατα σε μαθηματικούς και επιστημονικούς υπολογισμούς.
- του i , ο οποίος είναι η φανταστική μονάδα των μιγαδικών αριθμών ($i^2 = -1$), μιας αριθμητικής δομής η οποία περιλαμβάνει τις ρίζες όλων των πολυωνύμων.
- του αριθμού π ($\pi = 3.14159265\dots$), ο οποίος εκφράζει την τόσο σημαντική για τη γεωμετρία σχέση του μήκους της περιφέρειας με το μήκος της διαμέτρου ενός κύκλου.
- των αριθμών 0 και 1 και
- των πράξεων της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού και της ύψωσης σε δύναμη.

Ως μια τυπικά «καλαιόθητη» απόδειξη θεωρείται η απόδειξη της πρότασης 20 του 9ου Βιβλίου των Στοιχείων του Ευκλείδη για την ύπαρξη άπειρων πρώτων αριθμών (αριθμών οι οποίοι δεν έχουν κανένα άλλο διαιρέτη εκτός του 1 και του εαυτού τους), απόδειξη η οποία εφαρμόζει τη μέθοδο της «απαγωγής στο άτοπο».

Ευκλείδου Στοιχεία, Βιβλίο ΙΧ, Πρόταση 20

Οί πρώτοι αριθμοί πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν.

Ἐστῶσαν οἱ προτεθέντες πρώτοι ἀριθμοὶ οἱ A, B, Γ : λέγω, ὅτι τῶν A, B, Γ πλείους εἰσὶ πρώτοι ἀριθμοί. Ἐλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν A, B, Γ ἐλάχιστος μετρούμενος καὶ ἔστω ὁ ΔE , καὶ προσκεῖσθω τῷ ΔE μονὰς ἢ ΔZ . ὁ δὴ EZ ἦτοι πρώτος ἐστὶν ἢ οὐ. ἔστω πρότερον πρώτος: εὐρημένοι ἄρα εἰσὶ πρώτοι ἀριθμοὶ οἱ A, B, Γ, EZ πλείους τῶν A, B, Γ . Ἄλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ EZ πρώτος: ὑπὸ πρώτου ἄρα τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. μετρεῖσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ H : λέγω, ὅτι ὁ H οὐδενὶ τῶν A, B, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω. οἱ δὲ A, B, Γ τὸν ΔE μετροῦσιν: καὶ ὁ H ἄρα τὸν ΔE μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν EZ : καὶ λοιπὴν τὴν ΔZ μονάδα μετρήσει ὁ H ἀριθμὸς ὧν: ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ H ἐνὶ τῶν A, B, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. καὶ ὑπόκειται πρώτος. εὐρημένοι ἄρα εἰσὶ πρώτοι ἀριθμοὶ πλείους τοῦ προτεθέντος πλήθους τῶν A, B, Γ οἱ A, B, Γ, H : ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Σε σύγχρονη γλώσσα και μαθηματική γραφή

Οἱ πρώτοι ἀριθμοὶ εἶναι περισσότεροι ἀπὸ οἰοιοδήποτε προκαθορισμένο πλήθος πρώτων ἀριθμῶν.

Ἐστω $p_1=2, p_2=3, p_3=5, \dots, p_n$. οἱ πεπερασμένοι πλήθους πρώτοι ἀριθμοὶ και ἔστω P ἓνα κοινὸ πολλαπλάσιο τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν συν ἓνα, δηλαδή $P = p_1 p_2 \dots p_n + 1$. Ο ἀριθμὸς P ἢ εἶναι ἢ δεν εἶναι πρώτος. Ἄν ο P εἶναι πρώτος ἀριθμὸς τότε εἶναι ἓνας ἀριθμὸς ο οἰοῖος δεν περιλαμβάνεται στο πεπερασμένο πλήθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν $p_1 \dots p_n$. Ἄν ο P δεν εἶναι πρώτος ἀριθμὸς τότε εἶναι σύνθετος, οἰότε διαιρεῖται με κάποιον ἀπὸ τῶν πρώτους ἀριθμοὺς, ἔστω τῶν p . Ἀφοῦ, ὁμως, κανένας ἀπὸ τῶν πρώτους ἀριθμοὺς p_1, p_2, \dots, p_n δεν διαιρεῖ τῶν P γιατί αφήνει υπόλοιπο 1, τότε ο p εἶναι ἓνας

νέος πρώτος αριθμός που δεν περιλαμβάνεται στο πλήθος των πρώτων αριθμών $p_1, \dots, p_2, \dots, p_n$. Σε κάθε περίπτωση το αρχικό πεπερασμένο πλήθος των πρώτων αριθμών δεν περιλαμβάνει όλους τους πρώτους αριθμούς.

Με ποια κριτήρια η απόδειξη αυτή θεωρείται «όμορφη»; Και γενικότερα, με ποια κριτήρια ένα θεώρημα, μια απόδειξη, μια μέθοδος, μια λύση ενός προβλήματος ή μια μαθηματική θεωρία θεωρείται όμορφη ή άσχημη, καλαισθητή ή άκομψη;

Το ερώτημα των αισθητικών κριτηρίων της «τέχνης των μαθηματικών» αποτελεί ένα ερώτημα στο οποίο έχουν δοθεί και δίνονται διαφορετικές απαντήσεις. Στο ένα άκρο, η αμφισβήτηση του ερωτήματος καθαυτού, αφού η απάντηση του έχει, κατά τον Erdos, μια «ανείπωτη» προφάνεια. «Είναι σαν να ρωτάμε γιατί είναι ωραία η 9^η συμφωνία του Μπετόβεν. Εάν δεν μπορείτε να το διαπιστώσετε μόνοι σας δεν μπορεί να σας το πει κανένας» (Devlin, 2002, σ. 140). Στο άλλο άκρο η παράθεση αισθητικών κριτηρίων, τα οποία κατά γενική αναγνώριση, δεν μπορεί να είναι αποκλειστικά και συναρτώνται άμεσα με το ιστορικό πλαίσιο της μαθηματικής δραστηριότητας (Hofstadter, 1979). Ενδιάμεσα, απόψεις όπως εκείνες του Rota (1977), οι οποίες επιχειρούν να ορίσουν την έννοια των αισθητικών κριτηρίων με διαφορετικό τρόπο για τα μαθηματικά από εκείνους της καλλιτεχνικής δημιουργίας.

Η μαθηματική δομή, η οποία αποτελεί απόρροια μιας σύνθεσης με πρωτότυπο και ασυνήθιστο τρόπο μιας σειράς φαινομενικά άσχετων μεταξύ τους μαθηματικών δεδομένων, ώστε να αποτελέσουν ένα ενιαίο, συνιστά σύμφωνα με πολλές αναλύσεις ένα αισθητικό κριτήριο, το οποίο προσδιορίζει την ομορφιά των μαθηματικών. Πρόκειται για ένα κριτήριο, του οποίου η καταγωγή έλκεται από την Πυθαγόρεια κοσμοθεωρία, η οποία απέδιδε στα μαθηματικά τις οργανωτικές αρχές της αρμονίας του κόσμου. Οι Ντέιβις και Χερς αιτιολογούν το κριτήριο αυτό θεωρώντας ότι «*Μια αίσθηση ισχυρής προσωπικής αισθητικής ευχαρίστησης πηγάζει από το φαινόμενο ότι μπορεί να οριστεί τάξη μέσα στο χάος. Σε ένα βαθμό, ο αντικειμενικός στόχος των μαθηματικών είναι να δημιουργηθεί τάξη εκεί όπου πρώτα φαινόταν ότι*

κυβερνούσε το χάος να πάρουμε δομή και σταθερότητα μέσα από την αποδιοργάνωση και την αναταραχή» (Davis & Hersch, 1981, σ. 176).

Το σχετικά ασαφές κριτήριο της αρμονικής σύνθεσης μιας μαθηματικής δομής, συμπληρώνεται σε διάφορες αναλύσεις με το επίσης ασαφές κριτήριο της απλότητας, της συντομίας ή της λιτότητας ενός ορισμού, ενός επιχειρήματος, μιας απόδειξης ή μιας λύσης, στοιχεία τα οποία εξασφαλίζονται με την υιοθέτηση των ελάχιστων δυνατών παραδοχών ή και την επίκληση των ελάχιστων δυνατών πρότερα γνωστών μαθηματικών δεδομένων. Όπως σημειώνει η Μπρίνκμαν, ο συνδυασμός της πολυπλοκότητας με την απλότητα φαίνεται να δημιουργεί μια αισθητική απόλαυση (Brinkmann, 2009) και με βάση την αίσθηση αυτή αποδίδονται στα μαθηματικά χαρακτηριστικά καλλιτεχνικής δημιουργίας.

Παράλληλα, διατυπώνονται κριτήρια τα οποία αναφέρονται στην ευρηματικότητα και στην πρωτοτυπία, στην ευκολία της εφαρμογής και της γενικευσιμότητας, στην απλότητα της διατύπωσης και άλλα χαρακτηριστικά του περιεχομένου και της παρουσίασης της μαθηματικής γνώσης (Brinkmann, 2009, Dreyfus and Eisenberg, 1986, Whitcombe, 1988)

Συμπερασματικά, η συμπερίληψη των μαθηματικών στις τέχνες είναι απόρροια του ακόλουθου συλλογισμού: Οι τέχνες δημιουργούν αξιοποιώντας ένα μέσο και απευθύνονται στις ανθρώπινες αισθήσεις. Η ζωγραφική αξιοποιεί τα χρώματα και τις υλικές επιφάνειες απευθυνόμενη στην όραση, η μουσική αξιοποιεί τον ήχο και απευθύνεται στην ακοή και τα λοιπά ανάλογα για κάθε μορφή τέχνης. Τα μαθηματικά αξιοποιούν τη λογική και απευθύνονται στη σκέψη. Η μαθηματική δημιουργία και τα έργα της προκαλούν αισθητικές απολαύσεις αντίστοιχες των άλλων μορφών τέχνης, με αισθητικά κριτήρια, βέβαια, τα οποία προσιδιάζουν στην μαθηματική πρακτική.

Πέρα από συμφωνίες ή διαφωνίες, η προσέγγιση των μαθηματικών με αισθητικά κριτήρια έχει συμβάλει δημιουργικά στην ανάπτυξη της μαθηματικής δραστηριότητας και γνώσης υποβάλλοντας την αναζήτηση νέων μορφών τεκμηρίωσης, διατύπωσης και παρουσίασης μαθηματικών ορισμών, θεωρημάτων, αποδείξεων και τεχνικών επίλυσης προβλημάτων.

Είναι χαρακτηριστικό το γεγονός ότι σε αναζήτηση μιας «καλαίσθητης» απόδειξης, έχουν καταγραφεί περισσότερες από 370 αποδείξεις του Πυθαγορείου Θεωρήματος (Loomis, 1968).

Η μαθηματική οπτική των έργων της τέχνης

Οπτική δεύτερη, η μαθηματική ανάγνωση των έργων της τέχνης. Μαθηματικές έννοιες, σχέσεις και θεωρήματα αναγνωρίζονται σε έργα τέχνης υποδηλώνοντας τη στενή συνάφεια μαθηματικών και τέχνης, ως κοινωνικών πρακτικών. Η οπτική αυτή υιοθετεί μια μαθηματική ανάγνωση των έργων τέχνης, αναδεικνύει τις κανονικότητες στα δομικά στοιχεία ενός έργου τέχνης και τις αποδίδει σε εκούσιες ή ακούσιες εφαρμογές μαθηματικών εννοιών, σχέσεων και τεχνικών. Βάση της οπτικής αυτής μπορεί να θεωρηθεί μια υπονοούμενη παραδοχή ότι τα μαθηματικά και οι τέχνες έχουν ως κοινωνικές πρακτικές κοινούς τρόπους σκέψης και συναφείς αναφορές στα υλικά στοιχεία της πραγματικότητας.

Κύριες μαθηματικές έννοιες «ανάγνωσης» των έργων τέχνης από την οπτική αυτή είναι οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί, ιδίως η συμμετρία στους διάφορους τύπους της και η ομοιότητα, ιδίως η αποκαλούμενη στα μαθηματικά «αυτό-ομοιότητα», στην οποία ένα όλο είναι όμοιο με τα μέρη που το αποτελούν. Να θυμίσουμε ότι στα μαθηματικά όμοια είναι τα σχήματα τα οποία έχουν ανάλογες πλευρές και ίσες τις αντίστοιχες γωνίες τους.



Αυτό-ομοιότητα στο φύλλο μιας φτέρης

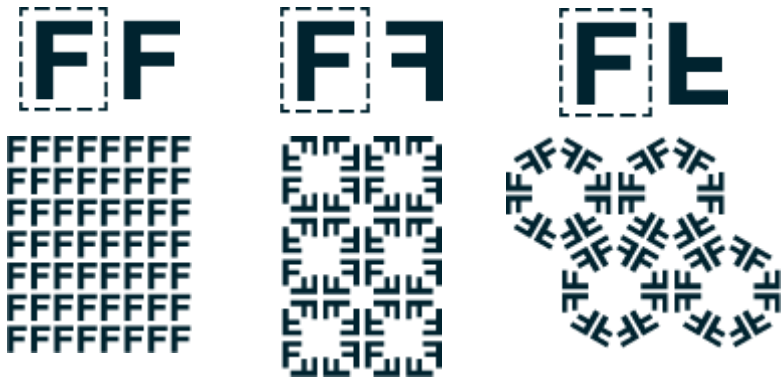


Αυτό-ομοιότητα σε κρητικό κέντημα



Αυτό-ομοιότητα σε διακοσμητικό στοιχείο

Η συμμετρία και η αυτό-ομοιότητα βασίζονται σε ένα απλό συνήθως σχέδιο, το οποίο αποτελεί την μοναδιαία ενότητα ενός πληρέστερου σχεδίου που δημιουργείται από την οργανωμένη επανάληψη του μοναδιαίου σχεδίου.



Με κριτήριο τις συμμετρίες ή και τις ομοιότητες των παραστάσεων ή των δομικών τους στοιχείων, σχέδια λαϊκών υφαντών, κεντημάτων και σταμπωτών, ζωγραφικές παραστάσεις, γλυπτά, αρχιτεκτονικά στοιχεία, μουσικά μέρη και ποιητικές συνθέσεις αντιμετωπίζονται και ως μαθηματικά έργα.

Τα έργα τέχνης ως παράγωγα των μαθηματικών η τα μαθηματικά ως παραγωγός καλλιτεχνικών έργων.

Η άμεση εφαρμογή, η αξιοποίηση ή απλά η επίδραση των μαθηματικών στην καλλιτεχνική δημιουργία είναι ένα γεγονός, το οποίο δεν μπορεί να αμφισβητηθεί, αλλά και δεν μπορεί η αξιολόγηση του να υπερβαίνει τις πραγματικές του διαστάσεις. Σε διάφορες ιστορικές εποχές, σε διάφορους τύπους καλλιτεχνικής δημιουργίας και σε διάφορους βαθμούς, μαθηματικές, και ιδίως γεωμετρικές έννοιες, σχέσεις, τεχνικές και θεωρίες επηρέασαν τη διαμόρφωση αισθητικών κριτηρίων ή και επέδρασαν στην καλλιτεχνική παραγωγή, αλλά και αντίστροφα.

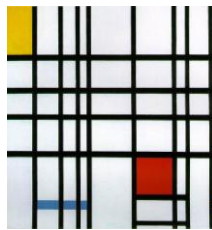
Η έννοια της αναλογίας και οι κανονικότητες που προκύπτουν από τις εφαρμογές τους επέδρασαν καταλυτικά στη διαμόρφωση αισθητικών κριτηρίων σε διάφορες ιστορικές περιόδους ανάπτυξης του πολιτισμού, από την ελληνική και ρωμαϊκή αρχαιότητα μέχρι την Αναγέννηση και τους νεώτερους χρόνους. Η επίδραση αυτή, όμως, αν και εκκινά από μια μαθηματική οπτική την υπερβαίνει και ανάγεται σε μια φιλοσοφική θεώρηση, οπότε δεν μπορεί να αντιμετωπίζεται απλουστευτικά ως μια «εφαρμογή» ή μια «αξιοποίηση» των μαθηματικών στις τέχνες.

Αντίστοιχα, οι περιπτώσεις εφαρμογής ή αξιοποίησης των μαθηματικών στην καλλιτεχνική δημιουργία είναι πολλές, αλλά αποτελούν και πρέπει να αντιμετωπίζονται ως περιπτώσεις.

Η εφαρμογή γεωμετρικών εννοιών και τεχνικών στην αρχιτεκτονική και στη διακόσμηση ναών και ανακτόρων συνέβαλε – μαζί με το χρώμα – στη δημιουργία των περίφημων αραβουργημάτων της ισλαμικής τέχνης και των γοθικών διακοσμητικών σχεδίων, αξιοποιήθηκε στη ζωγραφική από συγκεκριμένα καλλιτεχνικά ρεύματα, σε ένα από τα οποία εντάσσονται οι χαρακτηριστικά «γεωμετρικοί» πίνακες του Μοντριάν, καθοδήγησε χαρακτές, όπως τον Έσσερ, ενέπνευσε γλύπτες ή σήμερα συμπράττει εξίσου με τον καλλιτέχνη και τις ψηφιακές τεχνολογίες στη δημιουργία έργων της λεγόμενης «οπτικής τέχνης».



*Πλακάκια σε τοίχο,
Φεζ, Μαρόκο, 1325*



*Piet Mondrian,
Σύνθεση με κίτρινο,
μπλε και κόκκινο,
1937*



*M. C. Escher
Όριο κύκλου V,
1960*

Παράλληλα, βέβαια, στην περίοδο της Αναγέννησης η μελέτη της προοπτικής στη ζωγραφική και η συγκρότηση της προβολικής γεωμετρίας στα μαθηματικά αναπτύχθηκαν σε αμοιβαία αλληλόδραση. Αλλά και αυτό δεν αποτελεί παρά ένα γεγονός μιας συγκεκριμένης ιστορικής περιόδου, στη διάρκεια της οποίας κυριάρχησε στην τέχνη μια συγκεκριμένη φιλοσοφική οπτική, η οποία υπέβαλλε και τα αισθητικά της κριτήρια.

Με λίγα λόγια, ο ισχυρισμός του Μόρις Κλάιν ότι *«τα μαθηματικά ... έχουν διαμορφώσει σημαντικότητες ζωγραφικές, μουσικές, αρχιτεκτονικές και λογοτεχνικές τεχνοτροπίες...»* (Kline, 1977, σ. 15). δεν μπορεί στη γενικότητα της διατύπωσης του να μην προκαλεί ενστάσεις. Μια επίδραση των μαθηματικών σε κάθε πτυχή του ανθρώπινου πολιτισμού μπορεί να τεκμηριωθεί με ιστορικά γεγονότα και παραδειγματικές περιπτώσεις. Η επίδραση αυτή, όμως, δεν είναι ούτε αποκλειστική ούτε άμεση. Στη γενικότητα της είναι μια επίδραση, η οποία οφείλεται σε μια συγκεκριμένη ορθολογικότητα, βασισμένη βέβαια στη μαθηματική θεώρηση της υλικής και κοινωνικής πραγματικότητας, θεμελιωτής της οποίας υπήρξε ο Καρτέσιος και παράλληλα είναι μια επίδραση, η οποία διαμεσολαβείται από άλλες επιστήμες, τεχνικές ή κοινωνικές πρακτικές.

Με την παραδοχή αυτή δεδομένη το ερώτημα του εντοπισμού των εκπαιδευτικά αξιοποιήσιμων κοινών τόπων των μαθηματικών με τις τέχνες παραμένει αναπάντητο.

Μαθηματικά και τέχνες στην εκπαίδευση

Μια ανάγνωση του θεσμοθετημένου σήμερα Διαθεματικού Ενιαίου Πλαισίου Προγραμμάτων Σπουδών καταδεικνύει ότι οι στόχοι της διδασκαλίας των μαθηματικών και των τεχνών στο σχολείο δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, ενώ οι καθιερωμένες διδακτικές πρακτικές τους, όπως αποτυπώνονται σε σχετικές έρευνες και αναλύσεις, είναι μάλλον ασύμβατες.

Το μάθημα των μαθηματικών επιδιώκει πρωτίστως την αγωγή των μαθητών και μαθητριών στις λογικές διεργασίες και στη μεθοδική σκέψη, το μάθημα των εικαστικών (sic) να γνωρίσουν τις εικαστικές τέχνες μέσα από δραστηριότητες έρευνας και δημιουργίας έργων, το

μάθημα της μουσικής στοχεύει στην ανάπτυξη και καλλιέργεια της ικανότητας των μαθητών και μαθητριών για αισθητική απόλαυση κατά την ακρόαση, εκτέλεση και δημιουργία μουσικής, ενώ το μάθημα του Θεάτρου προτάσσει της εκπαίδευσης την αγωγή των μαθητών και μαθητριών μέσα από την «ανάπτυξη ικανοτήτων και κλίσεων για να μπορέσουν να λειτουργήσουν αρμονικά τόσο ως αυτόνομες προσωπικότητες όσο και μέσα στην ομάδα».

Επομένως, δεν υπάρχει καμία δυνατότητα να διδαχθούν τα μαθηματικά ως μορφή τέχνης και βέβαια αποκλείεται η διδασκαλία των τεχνών ως εφαρμογών των μαθηματικών, ακόμη και εάν τροποποιούνταν πλήρως ενσωματώνοντας μια τέτοια κατεύθυνση τα εκπαιδευτικά προγράμματα. Παράλληλα, η μαθηματική ανάγνωση έργων τέχνης ή η παραγωγή καλλιτεχνικών έργων μέσα από εφαρμογές μαθηματικών εννοιών, σχέσεων και τεχνικών στο πλαίσιο διαθεματικών προσεγγίσεων δεν μπορεί να υπερβεί τις παγιωμένες οριοθετήσεις των μαθηματικών με τις τέχνες, άρα και των αντίστοιχων μαθημάτων, παρά μόνο εάν ενταχθεί σε ένα ευρύτερο πλαίσιο, το οποίο θα διαμορφώνεται στους κοινούς τόπους μαθηματικών και τεχνών και το οποίο θα διαμορφώνει με τη σειρά του εκπαιδευτικές πρακτικές, ικανές να εντάξουν και τα μαθηματικά και τις τέχνες σε κοινούς εκπαιδευτικούς τόπους. Άρα τους όποιους κοινούς τόπους μαθηματικών και τεχνών στην εκπαίδευση διεκδικούμε οφείλουμε κατ' αρχήν να τους (ανα)κατασκευάσουμε.

Στην οπτική αυτή, μπορεί να αποτελέσουν αφετηρία ενός προβληματισμού οι απόψεις τις οποίες διατυπώνει ο Ντιούι στο έργο του «Η τέχνη ως εμπειρία» (Dewey, 1934/2008) στο οποίο αναλύει την καλλιτεχνική εμπειρία και διατυπώνει μια αισθητική θεωρία. Αφετηρία της ανάλυσης του Ντιούι αποτελεί η θέση της αδιάσπαστης ενότητας του καλλιτεχνικού έργου με την εμπειρία της δημιουργίας ή της αίσθησης του. Άρα τέχνη είναι μια διαδικασία και το αποτέλεσμα της.

Διερευνώντας την «κοινή ουσία των τεχνών», όπως χαρακτηριστικά επιγράφει το 9^ο κεφάλαιο του έργου αυτού, ο Ντιούι ισχυρίζεται ότι κάθε μορφή καλλιτεχνικής δημιουργίας ενέχει το χειρισμό ενός μέσου και το χειρισμό του χώρου και του χρόνου, του χωρο-χρόνου.

Το μέσο είναι ένα υλικό το οποίο «χρησιμοποιείται για να εκφράσει ένα νόημα, διαφορετικό από το νόημα που έχει εξαιτίας της φυσικής του ύπαρξης: ένα νόημα όχι του τι είναι ως φυσικό υλικό, αλλά του τι εκφράζει» ως στοιχείο του καλλιτεχνικού έργου (ο.π. σ. 209). Ταυτόχρονα, όμως, «πέρα από κάποια ειδικά ενδιαφέροντα, κάθε καλλιτεχνικό δημιούργημα είναι ύλη και μόνο ύλη, έτσι ώστε η αντίθεση δεν είναι μεταξύ ύλης και μορφής, αλλά μεταξύ ύλης σχετικά άμορφης και ύλης επαρκώς μορφοποιημένης» (ο.π. σ. 198).

Επομένως, «κάθε τέχνη χρησιμοποιεί το ουσιάδες μέσο της για να αποδώσει πολυπλοκότητα των μερών στην ενότητα των δημιουργημάτων της» (ο.π. σ. 210), οπότε τα αισθητικά χαρακτηριστικά ενός καλλιτεχνικού έργου προκύπτουν όχι μόνον από το μέσο που αξιοποιεί μια τέχνη, αλλά ιδίως από τη δόμηση των μερών αυτού του μέσου σε ένα συνεκτικό όλο.

Οι παραδοχές αυτές σημαίνουν, ότι κάθε καλλιτεχνικό δημιούργημα είναι προϊόν ενός ιδιότυπου συνδυασμού μορφής και οργάνωσης της μορφής αυτής σε μια δομή και κατά συνέπεια κάθε αισθητική απόλαυση προέρχεται από την εμπειρία αυτής της δομημένης μορφής ενός μέσου (Mack, 2006).

Αν δεχτούμε ότι και τα μαθηματικά αποτελούν μια δραστηριότητα της οποίας το κύριο αντικείμενο είναι η κατασκευή και η μελέτη δομών και κανονικοτήτων (Resnick, 1977, Sapiro, 1977) με την αξιοποίηση, όμως, ενός μέσου, το οποίο σε αντίθεση με την υλικότητα του μέσου των τεχνών, είναι η αφηρημένη σκέψη, τότε μπορούμε να ορίσουμε τη μορφή και την οργάνωση της μορφής, τη δομή δηλαδή, ως κοινό τόπο των μαθηματικών με τις τέχνες. Ως κοινό τόπο με την καθοριστική διάκριση, όμως, των μέσων, τα οποία αξιοποιούν οι τέχνες και είναι μέσα υλικά και των μέσων, τα οποία χειρίζονται τα μαθηματικά και είναι μέσα άϋλα, όπως έννοιες, σχέσεις και λογικά επιχειρήματα.

Η άλλη όψη μιας καλλιτεχνικής δημιουργίας είναι, σύμφωνα με την ανάλυση του Ντιούι, ο χειρισμός του χώρου και του χρόνου. Ο χώρος και ο χρόνος, αλληλένδετα, συνιστούν αισθητά δεδομένα κάθε βιωμένης εμπειρίας και επομένως συνιστούν ιδιότητες κάθε είδους υλικού, το οποίο αποτελεί αντικείμενο καλλιτεχνικής δημιουργίας ή πηγή αισθητικής απόλαυσης.

Ο χειρισμός του χώρου και του χρόνου, όμως, αποτελεί ένα θεμελιώδες στοιχείο διάκρισης των μαθηματικών από τις τέχνες. Ενώ για τις τέχνες ο χωρο-χρόνος υπόκειται στους περιορισμούς της φυσικής πραγματικότητας, για τα μαθηματικά μπορεί να έχει άπειρες διαστάσεις. Επομένως, οι ποιοτικές διακρίσεις, του καλλιτεχνικού χωρο-χρόνου μπορούν άμεσα να αντιστοιχηθούν σε μορφές της υλικής-φυσικής πραγματικότητας, όπως για παράδειγμα, ο χώρος στη ζωγραφική ή ο χρόνος στη μουσική ή ο χωρο-χρόνος στο χορό. Αντίθετα, πολλές μορφές μαθηματικών δομών υπάρχουν μόνο ως εννοιολογικές κατασκευές σε έναν απολύτως φανταστικό χώρο και χρόνο πολλών διαστάσεων και αν ένας τέτοιος χώρος δεν προϋπάρχει, μπορεί να κατασκευαστεί, χωρίς κανένα περιορισμό διαστάσεων, αρκεί να είναι καλά ορισμένος με τα κριτήρια των μαθηματικών.

Στο επίπεδο του αντικειμένου, επομένως, η μορφή και η δόμηση ενός μέσου μπορεί να αποτελέσει έναν κοινό τόπο συνάντησης των μαθηματικών με τις τέχνες, αλλά τα αισθητά χαρακτηριστικά των καλλιτεχνικών και των μαθηματικών δημιουργημάτων, τοποθετούνται σε ριζικά διαφορετικούς χωρο-χρόνους, εξαιτίας κυρίως της διαφορετικότητας των μέσων που αξιοποιούν και επομένως προσφέρουν εντελώς διαφορετικούς τύπους εμπειριών και στη δημιουργία και στην απόλαυση τους.

Στο επίπεδο της πρακτικής, τώρα, η φαντασία σε συνδυασμό με τη δημιουργικότητα αποτελεί, κατά τον Ντιούϊ, την χαρακτηριστική κινητήρια δύναμη της καλλιτεχνικής δραστηριότητας. Η τέχνη ενσωματώνει στα δημιουργήματα της μια φανταστική συνάθροιση νοημάτων και ως εκ τούτου προκαλεί μια αντίστοιχη φανταστική συνάθροιση νοημάτων (ο.π. σ. 218).

Η φαντασία *«αναφέρεται σε μια ποιότητα η οποία κινητοποιεί και διαποτίζει όλες τις διαδικασίες δημιουργίας και παρατήρησης. Είναι ένας 'τρόπος' να βλέπεις και να αισθάνεσαι τα πράγματα καθώς συνθέτουν ένα ολοκληρωμένο όλο»* (ο.π. σ. 278), ενώ ως νοητική λειτουργία ενσωματώνει ιδέες σε συγκεκριμένες εικόνες.

Η δημιουργική φαντασία αποτελεί την ανώτερη μορφή φαντασίας, η οποία αναδεικνύει και εκφράζει τα κρυμμένα νοήματα των αντικειμένων της, μέσα από ένα είδος ανακατασκευής τους.

Αποδίδει ένα νόημα στις σχέσεις των μερών με την ανάπτυξη του όλου και αναδεικνύει τις λεπτομέρειες στο επίπεδο του καθολικού. Υπό την επιρροή των ιδεών του Καντ, ο Ντιούϊ θεωρεί ότι βασική λειτουργία της δημιουργικής φαντασίας είναι η κατασκευή νοημάτων και η ενσωμάτωση τους σε αισθητές μορφές, εκφράζοντας την ελευθερία δράσης της ανθρώπινης υποκειμενικότητας.

Όλα όσα αποδίδει ο Ντιούϊ στη δημιουργική φαντασία και στο ρόλο της στην καλλιτεχνική δραστηριότητα μπορούν επίσης να αποδοθούν και στην μαθηματική δραστηριότητα, ιδίως την ερευνητική και σε μικρότερο βαθμό την εκπαιδευτική. Η επινόηση των μη-ευκλείδειων γεωμετριών αποτελεί το πιο χαρακτηριστικό, ίσως, παράδειγμα δημιουργικής φαντασίας στην ανάπτυξη των μαθηματικών.

Ενώ, όμως, η δημιουργική φαντασία της καλλιτεχνικής δραστηριότητας είναι χωρίς όρους και χωρίς όρια, η φαντασία της μαθηματικής δραστηριότητας υπόκειται στους περιορισμούς που επιβάλλουν αφενός οι κανόνες της παραγωγικής λογικής και αφετέρου τα ίδια τα μαθηματικά ως αποκρυσταλλωμένα και οργανωμένα σε αξιωματικά συστήματα γνώση

Με τα δεδομένα αυτά, η δημιουργική φαντασία θα μπορούσε να θεωρηθεί ένας κοινός τόπος των μαθηματικών και των καλλιτεχνικών δραστηριοτήτων στην εκπαίδευση, αν και η υπόθεση αυτή έχει συναντήσει σοβαρές ενστάσεις, αφού η όποια δημιουργικότητα των παιδιών στα σχολικά μαθηματικά οφείλει να αναπτυχθεί μέσα σε ένα πλαίσιο (αριθμητικής, γεωμετρίας, άλγεβρας, κλπ), το οποίο επιβάλλει κανόνες και περιορισμούς δεσμευτικούς και της φαντασίας και της δημιουργικότητας (Huckstep & Rowland, 2000

Τελικά, φαίνεται ότι οι διαφορές των περιεχομένων, αλλά και των καθιερωμένων πρακτικών, της μαθηματικής και της καλλιτεχνικής δραστηριότητας καθιστούν προβληματικό τον εντοπισμό κοινών τόπων και αμφιλεγόμενες τις δυνατότητες παιδαγωγικής αξιοποίησης των διαπιστωμένων σχέσεων μαθηματικών και τεχνών.

Μια ανταλλαγή, όμως, περιεχομένων και διδακτικών πρακτικών θα είχε σημαντικές παιδαγωγικές και εντέλει κοινωνικές θετικές επιπτώσεις, τουλάχιστον από την οπτική της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Υιοθετώντας στη διδακτική πρακτική των μαθηματικών παιδαγωγικές αρχές της διδακτικής των τεχνών (της ζωγραφικής, του θεάτρου, της λογοτεχνίας, της μουσικής, του χορού) και αντίστοιχα εισάγοντας και αναδεικνύοντας στα καλλιτεχνικά μαθήματα προσιδιάζοντα μαθηματικά περιεχόμενα (αριθμητικές σχέσεις, γεωμετρικές κατασκευές, αλγεβρικές κανονικότητες) θα μπορούσαμε να εισάγουμε στη μαθηματική εκπαίδευση, έμμεσα αλλά μάλλον αποτελεσματικά, σημαντικές «επιστημολογικές» αλήθειες, οι οποίες έχουν απαλειφθεί από τις κατεστημένα εκπαιδευτικά περιεχόμενα και τις καθιερωμένες διδακτικές πρακτικές.

Παράδειγμα 1^ο :

Η μορφή και το περιεχόμενο είναι αλληλένδετα και στα μαθηματικά, όπως και στις τέχνες, με κάποιες εξαιρέσεις δεδομένες. Η μορφή μιας μαθηματικής διατύπωσης καθορίζεται από το περιεχόμενο της και αντίστροφα. Ο αριθμός 6 μπορεί να εκφραστεί σε πολλές και ποικίλες μορφές: // // // //, έξι, 6, VI, 2×3 , 7-1, 777-771 κ.ο.κ. Το αποτέλεσμα, όμως, της αριθμητικής πράξης της πρόσθεσης διατυπωμένης ως $3+3$ επιβάλλεται από τους κανόνες της πρόσθεσης να εκφραστεί ως $= 6$. Άρα και στα μαθηματικά ενδιαφέρει το πώς γράφεται μια μαθηματική αλήθεια, όπως ενδιαφέρει το πώς γράφεται μια ή η ιστορία, το πώς μιλάμε ή αφηγούμαστε κλπ.

Παράδειγμα 2^ο :

Τα όρια της γνώσης και οι δυνατότητες γλωσσικής έκφρασης αυτής της γνώσης δεν ταυτίζονται. Ή με άλλα λόγια δεν ξέρουμε μόνο ότι μπορούμε να διατυπώσουμε γλωσσικά και ότι μπορούμε να διατυπώσουμε γλωσσικά δεν εκφράζει όλα όσα ξέρουμε. Άρα είναι μια όψη της γνώσης το «ξέρω κάτι και μπορώ να το εκφράσω» και μια άλλη όψη «το ξέρω πώς να κάνω κάτι αλλά δεν μπορώ να το εκφράσω». Το ζήτημα αυτό ως διχοτομία «άρρητης» και «ρητής» γνώσης (tacit - explicit knowledge) έχει αναδειχθεί και αναλυθεί εκτενώς και από φιλοσοφική (Polanyi, 1966) και από εκπαιδευτική οπτική, στο πλαίσιο ενός ευρύτερου προβληματισμού για τις λεγόμενες «κοινότητες πρακτικής».

Παράδειγμα 3^ο :

Η σκέψη διαμορφώνεται από τα τεχνικά και τα συμβολικά μέσα, τα οποία υιοθετεί και τα οποία διαμεσολαβούν τις δραστηριότητες με τα αντικείμενα των δραστηριοτήτων αυτών. Οι αναλύσεις του Βυγκότσι και των επιγόνων του στα ζητήματα αυτά είναι γνωστές. Άλλες νοητικές διεργασίες υποκινούν οι αριθμητικές πράξεις με χαρτί και μολύβι και άλλες με τη χρήση υπολογιστικών μηχανών.

Τέλος, μια ανταλλαγή περιεχομένων και διδακτικών πρακτικών μεταξύ μαθηματικών και τεχνών θα συνέβαλε αποφασιστικά στην αναγνώριση της φαντασίας ως μορφής σκέψης και στην απόδοση ενός ισότιμου ρόλου στη φαντασία με το ρόλο τον οποίο η εκπαίδευση αποδίδει στη λογικο-μαθηματική σκέψη και στην ανάπτυξη της. Η φαντασία, ταυτισμένη με την απροσδιοριστία, την υποκειμενικότητα, την ιδιοσυγκρασία, το συναίσθημα, σε αντίθεση με τη σαφήνεια, την αντικειμενικότητα, την εγκυρότητα, τη μεθοδικότητα της λογικής σκέψης είναι απολύτως υποβαθμισμένη σε μια εκπαίδευση προσανατολισμένη μονοδιάστατα στην απόκτηση γνώσης και στην ανάπτυξη νοητικών δεξιοτήτων. Ακόμα και η διδασκαλία των τεχνών στο σχολείο ουσιαστικά επικεντρώνεται και επιδιώκει πρωτίστως την απόκτηση γνώσεων για τις τέχνες και τις τεχνικές τους.

Αν, όμως, η μάθηση είναι μια γενεσιουργός διαδικασία κατασκευής συνεκτικών νοημάτων, τα οποία συγκροτούνται από κάθε άνθρωπο προσωπικά μέσα από την ανακατασκευή των εμπειριών του, ιδίως εκείνων που προέρχονται από την αντιμετώπιση προβληματικών καταστάσεων, τότε ο ρόλος της φαντασίας στην ανακατασκευή αυτών των εμπειριών είναι καθοριστικός. Αφού η φαντασία επιτρέπει την υπέρβαση της βιωμένης εμπειρίας και καθιστά δυνατή την νοητική κατασκευή εναλλακτικών εκδοχών της, στις οποίες μια κατακερματισμένη και ελλιπής κατάσταση ανασυγκροτείται σε ένα συνεκτικό όλο (Dewey, 1916/2004).

Από την οπτική αυτή, η φαντασία είναι μια μορφή αναστοχαστικής σκέψης, η οποία επιτρέπει τη κατασκευή παραδοχών, υποθέσεων, εικασιών, προτάσεων και απαντήσεων, άρα παίρνοντας υπόψη τα παρόντα δεδομένα συνάγει τα απόντα ενδεχόμενα. Αλλά αυτός είναι ο

πυρήνας κάθε συλλογισμού, όπως υπογραμμίζει ο Ντιούϊ (Dewey, 1922/1991).

Συμπερασματικά, η φαντασία και η ανάπτυξη της μπορεί να αποτελέσει το θεμέλιο στην οικοδόμηση ενός κοινού τόπου των μαθηματικών με τις τέχνες στην εκπαιδευτική πρακτική και αυτό προϋποθέτει την απόδοση ενός ισότιμου ρόλου στη φαντασία με εκείνο της λογικο-παραγωγικής σκέψης τόσο στα μαθηματικά όσο και στα καλλιτεχνικά μαθήματα του σχολείου.

Βιβλιογραφικές αναφορές

- Brinkmann, A. (2009), Mathematical Beauty and its Characteristics - A Study on the Students' Points of View, *The Montana Mathematics Enthusiast*, 6 (3), 365- 380.
- Davis P.J. & Hersch R. (1981), Η μαθηματική εμπειρία, Αθήνα: Τροχαλία.
- Devlin, Keith (2000), Do Mathematicians Have Different Brains?, *The Math Gene: How Mathematical Thinking Evolved And Why Numbers Are Like Gossip*. New York, NY: Basic Books, 111-144.
- Dewey, J. (1922/1991), An Analysis of Reflective Thought. Στο J. A. Boydston (ed.), John Dewey: The Later Works, Vol. 13, Carbondale: Southern Illinois University Press.
- Dewey, J. (1934/2005), *Art as experience*, New York: The Berkley Publishing Group (πρώτη έκδοση).
- Dewey, J. (1916/ 2004), *Democracy and Education*, New York: Dover Publications.
- Dreyfus, T.; Eisenberg, T. (1986), On the Aesthetics of Mathematical Thought. *For the Learning of Mathematics - An International Journal of Mathematics Education*, 6 (1), 2-10.
- Hardy, G.H. (1991), Η απολογία ενός μαθηματικού, μτφ. Δ. Καραγαννάκης & Μ. Λάμπρου, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Hofstadter, D. R. (1979), *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid*. New York, NY: Basic Books.
- Huckstep P. & Rowland, T. (2000), Creative Mathematics: Real or hetoric?, *Educational Studies in Mathematics*, 42 (1), 81-100.

- Kline, M. (1977), *Mathematics in Western Culture*, London: Penguin Books.
- Mack A. (2006), A Deweyan Perspective on Aesthetic in Mathematics Education, *Philosophy of Mathematics Education Journal* (online), 19, <http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome19/> [15-3-2011]
- Polanyi, M. (1966), *The Tacit Dimension*, London: Routledge.
- Poincaré, H. (1890), Notice sur Halphen, *Journal de l'École Polytechnique*, 60ème cahier, Paris
- Rota, Gian-Carlo (1977), The phenomenology of mathematical beauty, *Synthese* 111 (2): 171–182
- Resnick, M. (1997), *Mathematics as a science of patterns*, Oxford: Clarendon Press.
- Russell, B. (1919), *The Study of Mathematics, Mysticism and Logic: And Other Essays*. Longman.
- Shapiro, S. (1997), *Philosophy of mathematics: Structure and ontology*, Oxford: Oxford University Press.
- Whitcombe, A. (1988), Creativity, Imagination, Beauty. *Mathematics in School*, 17 (2), 13–15.

Διεθνείς συγκριτικές έρευνες μαθηματικής εκπαίδευσης: Απο την ερευνητική πρακτική στην πολιτική διαχείριση

Εισαγωγικά σχόλια

Η μαθηματική εκπαίδευση, τόσο στο επίπεδο της θεωρίας ως διδακτική των μαθηματικών, όσο και στο επίπεδο της πράξης ως διδασκαλία των μαθηματικών, είναι ένα από τα πιο διεθνοποιημένα και σε βάθος χρόνου και σε έκταση πεδία των επιστημών της εκπαίδευσης. Το γεγονός αυτό πιστοποιούν μια σειρά διεθνών οργανισμών, οι οποίοι δραστηριοποιούνται στην οργάνωση συνεδρίων και στην έκδοση περιοδικών και βιβλίων με αντικείμενο την ενημέρωση μιας διεθνούς πια κοινότητας για κάθε πτυχή της έρευνας και της διδασκαλίας των μαθηματικών. Ήδη το 1908 ιδρύεται και λειτουργεί αδιάλειπτα μέχρι σήμερα η Διεθνής Επιτροπή για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών (ICMI), το 1976 η Διεθνής Ομάδα για την Ψυχολογία των Μαθηματικών (PME) και το 1998 η ομάδα για τη Μαθηματική Εκπαίδευση και την Κοινωνία (MES).

Μια από τις πολύπλευρες όψεις της διεθνοποίησης αυτής, στενά συνυφασμένη με τον κυρίαρχο ρόλο των μαθηματικών στην επιστημονική ανάπτυξη και στην τεχνολογική εξέλιξη, άρα στην οικονομία και στην κοινωνία, είναι και οι διεθνείς συγκριτικές έρευνες της διδασκαλίας των μαθηματικών και των αποτελεσμάτων της.

Κυρίαρχη θέση στις έρευνες αυτές κατέχουν δύο μεγάλης εμβέλειας ερευνητικά προγράμματα:

- Οι Διεθνείς Μελέτες Μαθηματικών της International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA) και
- Το πρόγραμμα Διεθνούς Αποτίμησης της Επίδοσης των Μαθητών/Μαθητριών (PISA-OECD).

Παράλληλα, διεξάγονται κατά καιρούς από ερευνητικά ή και εκπαιδευτικά ιδρύματα μεγάλης έκτασης διεθνείς έρευνες επιλεγμένων διαστάσεων της μαθηματικής εκπαίδευσης, όπως συγκριτικές έρευνες της αποτελεσματικότητας της διδασκαλίας των μαθηματικών, των διδακτικών βιβλίων των μαθηματικών, της εκπαίδευσης και επιμόρφωσης των μαθηματικών-εκπαιδευτικών, κ.α.

Οι ομοιότητες και οι διαφορές ανάμεσα στα εκπαιδευτικά συστήματα των διαφόρων χωρών, στα περιεχόμενα των αναλυτικών προγραμμάτων και των διδακτικών βιβλίων, αλλά και στις πρακτικές της διδασκαλίας μαθηματικών θέτουν σειρά ερωτημάτων και για τη μεθοδολογία, αλλά και για την ερμηνεία των ευρημάτων, όλων αυτών των διεθνών συγκριτικών μελετών της μαθηματικής εκπαίδευσης. Για παράδειγμα, μια ανάλυση των αναλυτικών προγραμμάτων 50 χωρών που συμμετείχαν στην Τρίτη Διεθνή Μελέτη Μαθηματικών και Φυσικών επιστημών (Third International Mathematics and Science Study - TIMSS) ανέδειξε σημαντικές διαφορές στην οργάνωση του περιεχομένου, όχι μόνο μεταξύ χωρών, αλλά και μεταξύ περιοχών μιας χώρας, στις οποίες υπάρχει η δυνατότητα διαφοροποίησης των αναλυτικών προγραμμάτων (Schmidt et. al., 1997α, Schmidt et. al., 1997β). Παράλληλα, όμωσ, σημείωσε και ομοιότητες ως προς τις μαθηματικές έννοιες και τεχνικές που περιλαμβάνονταν στο περιεχόμενο των αναλυτικών προγραμμάτων, όπως και αντιστοιχίες στην κατανομή τους κατά σχολική τάξη, αν και η έκταση η οποία αφιερώνονταν στην κάλυψη των ίδιων μαθηματικών θεμάτων ανά σχολική τάξη διέφερε σε κάποιες περιπτώσεις σημαντικά. Στην ίδια ανάλυση σημειώνονται σημαντικές διαφορές στην έμφαση που κάθε αναλυτικό πρόγραμμα αποδίδει σε διαφορετικές μαθηματικές διεργασίες, ιδίως στο επίπεδο του δευτεροβάθμιου σχολείου. Άλλα αναλυτικά προγράμματα προτάσσουν την μαθηματοποίηση καταστάσεων, άλλα την διατύπωση επιχειρημάτων και αποδείξεων, ενώ άλλα απλώς την εκμάθηση μαθηματικών εννοιών και τεχνικών.

Τα ευρήματα και οι διαπιστώσεις των μεγάλης εμβέλειας ερευνητικών προγραμμάτων μελέτης της μαθηματικής εκπαίδευσης ή και των αποτελεσμάτων, όπως αυτά της IEA και του OECD / PISA διαμορφώνουν σε σημαντικό βαθμό τους σχετικούς προβληματισμούς και τις συναφείς αποφάσεις των εθνικών εκπαιδευτικών αρχών

(Crossley, 2002), μέσα από την έμμεση προβολή «καλών» και «καλών» συστημάτων εκπαίδευσης ή την υπόδειξη προβλημάτων και λύσεων. Αντίστοιχα, τα μέσα ενημέρωσης πολλών χωρών δημοσιοποιούν επιλεκτικά τις διαπιστώσεις των ερευνών αυτών, ενισχύοντας ή υπονομεύοντας πολιτικές αποφάσεις για αλλαγές στην εκπαίδευση σε μια λογική ότι υπάρχουν «διεθνώς καταξιωμένα» πρότυπα, των οποίων η αντιγραφή αποτελεί μονόδρομο στην επίλυση των όποιων διαπιστωμένων εκπαιδευτικών προβλημάτων. Το παράδειγμα της Φινλανδίας με κριτήριο τα ευρήματα της έρευνας PISA είναι τυπικό. Όπως έχει χαρακτηριστικά διατυπωθεί «η διάχυση εννοιών για την 'αποτελεσματικότητα' (*efficiency*), τη 'λογοδοσία' (*accountability*) και τον 'έλεγχο ποιότητας' (*quality control*) του σχολείου – ουσιαστικά Αγγλο-Αμερικανικές κατασκευές – μετατρέπουν τα σχολεία σε όλο τον κόσμο σε κακές απομιμήσεις μιας ρομαντικής οπτικής των ιδιωτικών επιχειρήσεων» (Stromquist 2000, σ. 262).

Σε ένα τέτοιο πλαίσιο πραγματικότητας και δεδομένου του γεγονότος, ότι όπως προκύπτει από συναφείς αναλύσεις, οι όποιες ομοιότητες και διαφορές στα περιεχόμενα των αναλυτικών προγραμμάτων, των διδακτικών βιβλίων ή και των διδακτικών πρακτικών των μαθηματικών στα πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια σχολεία είναι μεταξύ τους αλληλένδετες (ενδεικτικά, LeTendre et al., 2001), αναδεικνύονται μια σειρά ερωτημάτων και αντίστοιχων θεμάτων προβληματισμού για τις διεθνείς συγκριτικές έρευνες της μαθηματικής εκπαίδευσης και των αποτελεσμάτων της, μεταξύ των οποίων περιλαμβάνονται τα ακόλουθα:

- Ποιοι είναι οι στόχοι των μεγάλης έκτασης διεθνών συγκριτικών ερευνών;
- Ποιο είναι το αντικείμενο των μελετών αυτών και πως σχετίζεται το αντικείμενο αυτό με τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών;
- Ποιες είναι οι μέθοδοι συλλογής και ανάλυσης στοιχείων που οι έρευνες αυτές αναπτύσσουν και υλοποιούν και ποια είναι η μεθοδολογική τους εγκυρότητα και αξιοπιστία στην αποτύπωση της διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών, αλλά ιδίως στη αλληλο-συσχέτιση τους;

Στα επόμενα θα επιχειρηθεί μια απάντηση στα ερωτήματα αυτά, αναπόφευκτα αποσπασματική στα όρια που επιβάλλει μια εισήγηση, παράλληλα με μια συνοπτική περιγραφή των δύο μεγάλων συγκριτικών ερευνών της IEA και του OECD/PISA.

Οι διεθνείς συγκριτικές έρευνες μαθηματικής εκπαίδευσης

Οι έρευνες της IEA¹

Οι πρώτες μεγάλες συγκριτικές έρευνες της μαθηματικής εκπαίδευσης και των αποτελεσμάτων της, καθώς και των παραγόντων που διαμορφώνουν τα αποτελέσματα αυτά, σχεδιάζονται και υλοποιούνται από τη Διεθνή Ένωση για την Αξιολόγηση της Εκπαιδευτικής Επίδοσης (IEA), μια διεθνή σύμπραξη εθνικών ερευνητικών κέντρων και ακαδημαϊκών ιδρυμάτων, η οποία συγκροτήθηκε το 1958 και έκτοτε, εκτός των μαθηματικών, διεξάγει συγκριτικές έρευνες σε διάφορα αντικείμενα της εκπαίδευσης, όπως γλώσσα, πολιτειότητα, υπολογιστές κ.α.

Η πρώτη μεγάλη έρευνα της IEA έγινε το 1964 (First International Mathematics Study - FIMS) με τη συμμετοχή 12 χωρών, σε μαθητικούς πληθυσμούς που φοιτούσαν στο τελευταίο έτος της πρωτοβάθμιας (13 ετών) και στο τελευταίο έτος της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Husén, 1967; Postlethwaite, 1967). Οι μαθητές και μαθήτριες του Ισραήλ, της Ιαπωνίας και του Βελγίου είχαν τις καλλίτερες επιδόσεις και των ΗΠΑ τις χειρότερες μεταξύ εκείνων που φοιτούσαν στο τελευταίο έτος της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, ενώ του Ισραήλ, της Ιαπωνίας και της Αγγλίας μεταξύ των μαθητών και μαθητριών που φοιτούσαν στο τελευταίο έτος της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, με πάλι τους μαθητές και μαθήτριες των ΗΠΑ να έχουν τις χειρότερες επιδόσεις. Η κριτική που διατυπώθηκε επικεντρώθηκε στα διαφορετικά αναλυτικά προγράμματα και στη μεθοδολογία της έρευνας που δεν συνεκτιμούσε αυτή τη δεδομένη διαφορετικότητα.

Η έρευνα επαναλήφθηκε κατά τη διετία 1980-1982 (Second International Mathematics Study- SIMS) και, επειδή στη μεθοδολογία της ενσωματώθηκε εκτός της συγχρονικής και μια διαχρονική μελέτη της διδασκαλίας των μαθηματικών, τα

αποτελέσματα της δημοσιοποιήθηκαν σχεδόν δέκα χρόνια αργότερα (Westbury & Travers, 1990).

Συμμετείχαν 20 χώρες με ίδιες ομάδες μαθητικών πληθυσμών. Για να απαντηθεί το πρόβλημα της διαφορετικότητας των αναλυτικών προγραμμάτων, εισάχθηκε στην έρευνα και η μελέτη τους με τη διάκριση κάθε αναλυτικού προγράμματος σε εγκεκριμένο πρόγραμμα, πρόγραμμα που εφαρμόστηκε και πρόγραμμα που ολοκλήρωσε τις επιδιώξεις του (intended curriculum, implemented curriculum, and attained curriculum) (Pelgrum, Eggen, & Plomp, 1986).

Το μαθηματικό περιεχόμενο αυτής, αλλά και των επόμενων ερευνών, επιλέχθηκε με βάση το κοινό περιεχόμενο των αναλυτικών προγραμμάτων των διαφόρων χωρών και περιελάμβανε τις ακόλουθες μαθηματικές περιοχές: αριθμοί και κλάσματα, άλγεβρα, μετρήσεις, γεωμετρία, χειρισμό δεδομένων και πιθανότητες καθώς και αναλογίες. Παράλληλα, το μαθηματικό αυτό περιεχόμενο κατανεμήθηκε στα ακόλουθα επίπεδα μαθηματικής ευχέρειας: ανάκληση γνώσεων, ευχέρεια εκτέλεσης απλών υπολογισμών και τεχνικών, ευχέρεια εκτέλεσης σύνθετων υπολογισμών και τεχνικών και επίλυση προβλημάτων (Robitaille & Garden, 1989; Travers & Westbury, 1989).

Το ακόλουθο είναι ένα παράδειγμα ερώτησης για την αξιολόγηση της ευχέρειας εκτέλεσης απλών υπολογισμών στην άλγεβρα των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης:

Ο Μπραντ θέλει να βρει τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς των οποίων το άθροισμα είναι 81. Για να τους βρει έγραψε την εξίσωση $(n-1)+n+(n+1)=81$. Τι συμβολίζει με το n ;

α. τον μικρότερο των τριών διαδοχικών αριθμών

β. τον μεσαίο των τριών διαδοχικών αριθμών

γ. τον μεγαλύτερο των τριών διαδοχικών αριθμών

δ. τη διαφορά του μεγαλύτερου από τον μικρότερο των τριών διαδοχικών αριθμών

Η τρίτη έρευνα της IEA (Third International Mathematics and Science Study - TIMSS), πραγματοποιήθηκε το 1995 με τη συμμετοχή περισσότερων από 40 χωρών μεταξύ των οποίων και η χώρα μας για πρώτη και μοναδική φορά (Mullis et.al., 1998). Στους μαθητικούς πληθυσμούς προστέθηκε και μια τρίτη ομάδα 9-χρονων μαθητών και μαθητριών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, ενώ παράλληλα με τις επιδόσεις των μαθητών και μαθητριών συλλέχθηκαν στοιχεία για το σχολικό περιβάλλον και τις διδακτικές πρακτικές από τα παιδιά, τους εκπαιδευτικούς και τους διευθυντές των σχολείων (Beaton et. al. 1996, Martin et.al, 1999).

Για να ανταποκριθεί στις κριτικές που διατυπώθηκαν στις προηγούμενες έρευνες, η έρευνα αυτή συνοδεύθηκε από τρεις συμπληρωματικές μελέτες:

- Μια μελέτη των διδακτικών πρακτικών στη σχολική τάξη, βασισμένη σε βιντεοσκοπημένες διδασκαλίες μαθηματικών σε τάξεις της Ιαπωνίας, της Γερμανίας και των ΗΠΑ (Stigler, 1999).
- Μια σε βάθος μελέτη των εκπαιδευτικών συστημάτων της Ιαπωνίας, της Γερμανίας και των ΗΠΑ
- Μια ανάλυση των αναλυτικών προγραμμάτων και των διδακτικών βιβλίων μαθηματικών πολλών χωρών (Howson, 1995).

Η έρευνα αυτή επαναλήφθηκε το 1999 στην ομάδα των 9-χρονων μαθητών και μαθητριών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης από τις χώρες που έλαβαν μέρος στην έρευνα του 1995 (Mullis et al. 2000), το 2003 σε ομάδες μαθητών που φοιτούσαν στην 4^η και την 8^η τάξη σχολείων υποχρεωτικής εκπαίδευσης χωρών που έλαβαν μέρος στις έρευνες του 1995 και 1999 (Mullis et al. 2004) και το 2007 και 2011 στους ίδιους πληθυσμούς μαθητών (Mullis et al. 2008, Mullis et al. 2011) εφαρμόζοντας τις ίδιες μεθόδους και τεχνικές σε μια προσπάθεια να δημιουργηθούν χρονικές σειρές μαθηματικών επιδόσεων μαθητών και μαθητριών της υποχρεωτικής εκπαίδευσης.

Από τα αποτελέσματα του συνόλου των ερευνών της IEA δεν έχουν προκύψει ξεκάθαρες συσχετίσεις ανάμεσα στην επίδοση των μαθητών και μαθητριών και σε μια σειρά μεταβλητών οι οποίες συνδέονται με το επίπεδο οικονομικής ή εκπαιδευτικής ανάπτυξης των χωρών τους, όπως π.χ. το ΑΕΠ, όπως και με μεταβλητές που σχετίζονται με τον

χρόνο και τους τρόπους διδασκαλίας των μαθηματικών στις διάφορες χώρες. Από τις έρευνες διαπιστώνεται για παράδειγμα, ότι οι κυρίαρχοι μέθοδοι διδασκαλίας των μαθηματικών σε όλες τις συμμετέχουσες στις έρευνες χώρες είναι η διάλεξη των καθηγητών σε όλη την τάξη και η καθοδηγούμενη άσκηση των μαθητών, ατομική ή σε μικρές ομάδες.

Πιο εντυπωσιακό είναι, όμως, το γεγονός ότι από τα ευρήματα των ερευνών αυτών δεν προκύπτει καμία εξήγηση, όχι μόνο για τις διαφορές μεταξύ των χωρών, αλλά και για το εύρος των διαφορών αυτών στην επίδοση των μαθητών. Η διαφορά στις επιδόσεις των μαθητών μεταξύ των χωρών ξεπερνάει τις τρεις τυπικές αποκλίσεις μιας κανονικής κατανομής των επιδόσεων κι' αυτό δεν είναι ερμηνεύσιμο από τα δεδομένα της έρευνας. Ακόμη και μεταβλητές οι οποίες ερμηνεύουν τα αποτελέσματα των επιδόσεων των μαθητών μέσα σε μια χώρα, όπως π.χ. το οικογενειακό εισόδημα, δεν μπορούν να ερμηνεύσουν τις διαφορές μεταξύ διαφόρων χωρών.

Το πρόβλημα αυτό, μπορεί να αποδοθεί όπως υποστηρίζουν πολλοί ερευνητές, σε μεθοδολογικές ανεπάρκειες των ερευνών αυτών και κυρίως στις ερωτήσεις απόψεων για τα μαθηματικά, αλλά και στα μαθηματικά προβλήματα που περιλαμβάνονται στα ερωτηματολόγια αξιολόγησης της επίδοσης των μαθητών, που φαίνεται ότι ερμηνεύονται με διαφορετικούς τρόπους από τους μαθητές που διδάσκονται και μαθαίνουν μαθηματικά σε διαφορετικά πολιτισμικά και εκπαιδευτικά περιβάλλοντα. Προβλήματα αυτού του τύπου χαρακτηρίζουν, κατά την άποψη μου, όλες τις συγκριτικές έρευνες των αποτελεσμάτων της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Οι έρευνες του ΟΟΣΑ²

Οι έρευνες με τον τίτλο «Διεθνές Πρόγραμμα για την Αξιολόγηση των Μαθητών (Programme for International Student Assessment - PISA)» σχεδιάζονται και υλοποιούνται από τις χώρες μέλη του ΟΟΣΑ(OECD) με άμεσο στόχο την αξιολόγηση της εγγραμματοσύνης (literacy) στα μαθηματικά και στις φυσικές επιστήμες των 15-χρονων μαθητών που ολοκληρώνουν την υποχρεωτική εκπαίδευση (Stanat et al. 2002).

Εδώ ο όρος «μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες» που συνήθως χρησιμοποιείται στις συναφείς έρευνες έχει αντικατασταθεί από τον όρο «εγγραμματοσύνη», όπως μπορεί να αποδοθεί στα ελληνικά η έννοια του literacy, η οποία αναφέρεται στη δυνατότητα ενός ατόμου να λειτουργεί αποτελεσματικά σε διάφορα περιβάλλοντα και καταστάσεις επικοινωνίας χρησιμοποιώντας μαθηματικές έννοιες και παραστάσεις (σχήματα, διαγράμματα, εικόνες κλπ). Η απάντηση, βέβαια, στο ερώτημα ποιες γνώσεις και δεξιότητες συνθέτουν αυτή την δυνατότητα δεν είναι απλή και σε κάθε περίπτωση σχετίζεται άμεσα με την κάθε συγκεκριμένη κοινωνική πραγματικότητα. Η ουσία, όμως, της αντικατάστασης αυτής έγκειται στο γεγονός ότι το επίκεντρο της ανθρώπινης νοητικής λειτουργίας μετατίθεται από τη σκέψη στην επικοινωνία, ως δυνατότητα και ευχέρεια έκφρασης της σκέψης.

Σε κάθε περίπτωση, η αξιολόγηση αυτή αντί να εστιάζεται στη διερεύνηση των γνώσεων και δεξιοτήτων τις οποίες οι μαθητές έχουν κατακτήσει παρακολουθώντας ένα συγκεκριμένο αναλυτικό πρόγραμμα, εξετάζει τις ικανότητες τους να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις και δεξιότητές τους για να αντιμετωπίσουν πραγματικές προκλήσεις της σύγχρονης κοινωνίας.

Για τις έρευνες του προγράμματος PISA, «ο εγγραμματοσιμός στα Μαθηματικά ορίζεται ως η ικανότητα του ατόμου να προσδιορίζει και να κατανοεί τον ρόλο των Μαθηματικών στην καθημερινότητα, να αναπτύσσει τεκμηριωμένες κρίσεις και να χρησιμοποιεί τη μαθηματική γνώση και τις δεξιότητες που σχετίζονται με αυτή, για να αντιμετωπίζει τις ανάγκες της καθημερινής ζωής του ως σκεπτόμενος, δημιουργικός και ενεργός πολίτης. Το πλαίσιο στο οποίο εντάσσονται τα προβλήματα αναφέρεται σε προσωπικές, εκπαιδευτικές, επαγγελματικές, κοινωνικές και επιστημονικές καταστάσεις. Το μαθηματικό περιεχόμενο το οποίο απαιτείται για τη λύση ενός προβλήματος καθορίζεται από τέσσερις δεσπόζουσες κατηγορίες μαθηματικών εννοιών: χώρος και σχήμα, μεταβολή και σχέσεις, ποσότητα και αβεβαιότητα. Οι νοητικές διαδικασίες που συνδέονται με τις μαθηματικές ικανότητες έχουν ομαδοποιηθεί σε τρεις δέσμες: τη δέσμη αναπαραγωγής, τη δέσμη συνδέσεων και τη δέσμη αναστοχασμού» (ΙΕΠ/PISA).

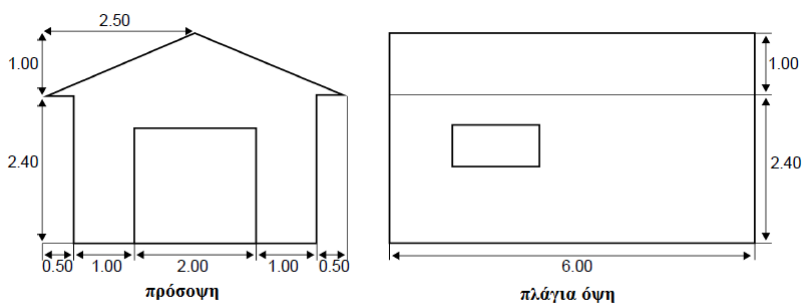
Η δέση αναπαραγωγής περιλαμβάνει τη γνώση εννοιών, σχέσεων, ιδιοτήτων και κανόνων, την εκτέλεση πράξεων και την εφαρμογή αλγορίθμων, το χειρισμό συμβολικών παραστάσεων, τη μαθηματική διατύπωση απλών προβλημάτων, με δύο λόγια τις συνηθισμένες ερωτήσεις, ασκήσεις και προβλήματα μιας τυπικής σχολικής αξιολόγησης.

Η δέση συνδέσεων περιλαμβάνει προβλήματα τα οποία απαιτούν συσχετίσεις ανάμεσα σε διαφορετικές έννοιες και αξιοποίηση των συσχετίσεων αυτών στην επίλυση τυπικών μαθηματικών προβλημάτων, την ανάπτυξη σχεδίων και την επιλογή των κατάλληλων τεχνικών επίλυσης προβλημάτων καθώς και την αξιολόγηση και ερμηνεία των λύσεων ενός προβλήματος.

Η δέση αναστοχασμού, τέλος, περιλαμβάνει όλες τις παραπάνω γνώσεις και δεξιότητες, αλλά με αναφορά σε μη τειριμμένα προβλήματα μαθηματικών, καθώς και την ευχέρεια διατύπωσης επιχειρημάτων, αποδείξεων και γενικεύσεων.

Το ακόλουθο είναι ένα παράδειγμα ερώτησης για την αξιολόγηση της ευχέρειας χειρισμού εννοιών χώρου και ιδιοτήτων σχημάτων στο επίπεδο της αναπαραγωγής/εφαρμογής των γνώσεων και δεξιοτήτων αυτών σε προσωπικές καταστάσεις της καθημερινότητας:

Τα δύο παρακάτω σχέδια δείχνουν τις διαστάσεις σε μέτρα του γκαράζ που κατασκεύασε ο Γιώργος.



Σημείωση: Οι διαστάσεις δεν είναι υπό κλίμακα

Η οροφή έχει κατασκευαστεί από δύο ίσες ορθογώνιες επιφάνειες. Υπολογίστε το συνολικό εμβαδόν της οροφής και δείξτε μας πως εργαστήκατε.

(Οδηγία διόρθωσης: κάθε λύση που προσδιορίζει το εμβαδόν από 31 – 33 τ.μ. και δείχνει ότι για τον υπολογισμό του εφαρμόστηκε το Πυθαγόρειο θεώρημα θεωρείται σωστή)

Οι έρευνες του PISA ξεκίνησαν το 2000 και επαναλαμβάνονται κάθε τρία χρόνια με διαδοχική κατά χρόνο εστίαση στη γλώσσα, στα μαθηματικά και στις φυσικές επιστήμες. Στο PISA 2000 συμμετείχαν 43 χώρες (εκ των οποίων 28 χώρες μέλη του ΟΟΣΑ), ενώ στην έρευνα του 2012 συμμετείχαν 67 χώρες (εκ των οποίων 34 χώρες μέλη του ΟΟΣΑ) και η έρευνα επικεντρώθηκε σε μαθηματικές έννοιες μεταβολής και σχέσεων, καθώς και έννοιες χώρου και σχημάτων. Φορέας υλοποίησης του PISA 2000 στην Ελλάδα στην οποία πήραν μέρος 175 σχολεία από όλη την Ελλάδα με 5.425 μαθητές, ήταν το Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας και σήμερα το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Απώτερος σκοπός των ερευνών αυτών είναι κατά τους οργανωτές τους «η παρακολούθηση της αποτελεσματικότητας των εκπαιδευτικών συστημάτων των συμμετεχουσών χωρών με όρους επίδοσης των μαθητών..... (ώστε) ... Στη βάση ενός από κοινού διαμορφωμένου και διεθνώς αποδεκτού πλαισίου εργασίας, οι συμμετέχουσες χώρες μπορούν να συγκρίνουν τις επιδόσεις των μαθητών τους με τις επιδόσεις των μαθητών άλλων χωρών. Με αυτόν τον τρόπο το PISA βοηθά κάθε χώρα όχι μόνο να κατανοεί αλλά και να ενισχύει την αποτελεσματικότητα του εκπαιδευτικού της συστήματος και να μαθαίνει από τις πρακτικές άλλων χωρών» (ΙΕΠ/PISA).

Αυτός ακριβώς ο διακηρυγμένος σκοπός των ερευνών PISA πυροδότησε συζητήσεις και προβληματισμούς σχετικά με την αποτελεσματικότητα των εκπαιδευτικών συστημάτων, στις οποίες ο ρόλος των ΜΜΕ υπήρξε καθοριστικός, όπως άλλωστε σε όλες τις πολιτικές συζητήσεις. Σε πολλές περιπτώσεις, μάλιστα, τα αποτελέσματα των ερευνών αυτών προβλήθηκαν ως το κριτήριο της επιτυχίας ή αποτυχίας των εκπαιδευτικών συστημάτων. Αυτό οφείλεται, κατά ένα μέρος, στην ερμηνεία των πινάκων στους οποίους οι επιδόσεις των μαθητών συγκρίνονται κατά χώρα και οι χώρες κατατάσσονται σύμφωνα με το μέσο όρο των αποτελεσμάτων που

καθεμιά παρουσίασε, το οποίο αποτελεί μια από τις επιπτώσεις της επιλογής του PISA να εκφράζει με ποσοτικά στοιχεία μια σειρά ποιοτικών χαρακτηριστικών της επίδοσης των μαθητών, επιλογή η οποία αμφισβητείται από πολλούς ερευνητές.

Οι μαθητές από τη Φινλανδία, δεν πρώτευσαν στα μαθηματικά, αλλά εμφάνισαν επιτυχίες σε όλα τα επίπεδα και τις κλίμακες των ερευνών του PISA και όπως είναι πια γνωστό το Φινλανδικό εκπαιδευτικό σύστημα προβάλλεται ως το πιο επιτυχημένο εκπαιδευτικό πρότυπο και παράδειγμα για μίμηση. Μόνο που ένας τέτοιος ισχυρισμός δεν μπορεί να τεκμηριωθεί για πολλούς λόγους, κυρίως μεθοδολογικούς. Οι κλίμακες και τα κριτήρια μέτρησης του PISA αναφέρονται στη μαθηματική εγγραματοσύνη, όπως ορίζεται από τους σχεδιαστές των ερευνών αυτών, και δεν αποτιμούν την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας των μαθηματικών σε κάθε χώρα. Οπότε είναι σχετικά αυθαίρετη η διατύπωση μιας αιτιώδους σχέσης ανάμεσα στην ποιότητα του Φινλανδικού εκπαιδευτικού συστήματος και στις επιδόσεις των μαθητών στις δοκιμασίες του PISA.

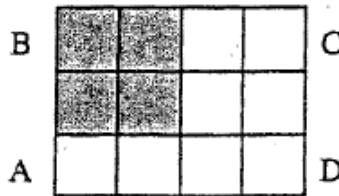
Παράλληλα πρέπει να σημειωθεί ότι τα αποτελέσματα των ερευνών του PISA δεν συμπίπτουν με τα αποτελέσματα των ερευνών της IEA, αλλά και άλλων διεθνών συγκριτικών ερευνών μικρότερης έκτασης, ενώ κάποιες από τις διαπιστώσεις των ερευνών αυτών εμφανίζουν αντιφάσεις. Για παράδειγμα, ενώ η αξιολόγηση της μαθηματικής εγγραματοσύνης των μαθητών εστιάζεται στις ικανότητες τους να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις και τις δεξιότητές τους για να αντιμετωπίζουν πραγματικές καταστάσεις της σύγχρονης ζωής, διαπιστώνεται παράλληλα ότι η μόνη μεταβλητή η οποία μπορεί να ερμηνεύσει διαφοροποιήσεις των μαθητών μεταξύ των χωρών είναι ο δείκτης της PISA που αναφέρεται στον *«προσανατολισμό της διδασκαλίας στην επίτευξη γνωστικών στόχων»*, γεγονός που υπονοεί ότι οι πλέον αποτελεσματικές εκπαιδευτικά χώρες είναι αυτές που τα σχολεία τους κατευθύνουν τους μαθητές τους στην ακαδημαϊκή επιτυχία. Δύσκολα μπορούν, επίσης, να ερμηνευτούν οι μεγάλες διαφορές στις κατατάξεις των χωρών από τη μια έρευνα του PISA στην άλλη, ενώ δεν έχουν υπάρξει σημαντικές αλλαγές στο περιεχόμενο η στις τεχνικές διδασκαλίας των μαθηματικών στις αντίστοιχες χώρες. Η Ελλάδα, για παράδειγμα, κατατάχθηκε με βάση τις επιδόσεις στα

μαθηματικά στην 30^η θέση με επίδοση 466 μονάδες (μέση επίδοση χωρών του ΟΟΣΑ 496 μονάδες) στην έρευνα του 2009, ενώ στην έρευνα του 2012 κατατάχθηκε στην 42^η θέση με επίδοση 453 (μέση επίδοση 494 μονάδες).

Διεθνείς Έρευνες Μεγάλης Έκτασης: Η Διεθνής Αξιολόγηση της Εκπαιδευτικής Προόδου στα Μαθηματικά ως παράδειγμα

Η Διεθνής Αξιολόγηση της Εκπαιδευτικής Προόδου στα Μαθηματικά (International Assessment of Educational Progress - Mathematics - IAEP-M) αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα των σχετικά μεγάλης έκτασης διεθνών συγκριτικών ερευνών της μαθηματικής εκπαίδευσης. Πραγματοποιήθηκε αρχικά το 1988 σε μαθητές και μαθήτριες 13 χρόνων με τη συμμετοχή 6 χωρών (Lapointe, Mead, & Phillips, 1989) και επαναλήφθηκε το 1991 με τη συμμετοχή 21 χωρών σε μαθητές και μαθήτριες 9 και 13 χρόνων (Lapointe, Mead, & Askew, 1992). Κύριος στόχος της έρευνας, στην οργάνωση και διεξαγωγή της οποίας πρωτοστάτησε η Υπηρεσία Εκπαιδευτικής Αξιολόγησης των ΗΠΑ (USA Educational Testing Service), ήταν η συλλογή και ανάλυση στοιχείων για τις γνώσεις και τις δεξιότητες των μαθητών και μαθητριών σε δύο φάσεις της σχολικής τους φοίτησης και η συσχέτιση τους με επιλεγμένες εκπαιδευτικές και πολιτισμικές μεταβλητές καθώς και με τις στάσεις των μαθητών και μαθητριών απέναντι στα μαθηματικά. Η αξιολόγηση εντοπίστηκε σε γνώσεις και δεξιότητες για τους αριθμούς και τις πράξεις, τις σχέσεις, τις συναρτήσεις και τις αλγεβρικές εκφράσεις, τις βασικές έννοιες της γεωμετρίας, τις μετρήσεις και την οργάνωση δεδομένων και τη δυνατότητα διατύπωσης λογικών συλλογισμών και επίλυσης προβλημάτων. Το περιεχόμενο των ερωτήσεων κατά θέμα επιλέχθηκε ώστε να καλύπτει τις συναφείς έννοιες και τεχνικές που περιέχονται στα αναλυτικά προγράμματα μαθηματικών των χωρών που συμμετείχαν στην έρευνα.

Το ακόλουθο είναι ένα παράδειγμα ερώτησης για την αξιολόγηση της κατανόησης των εννοιών του κλάσματος από 9-χρονους μαθητές και μαθήτριες:



Ποιο κλάσμα του ορθογωνίου σχήματος είναι ζωγραφισμένο;

(a) $1/6$ (b) $1/5$ (c) $1/4$ (d) $1/3$ (e) $1/2$

Στην έρευνα αυτή καταλογίστηκαν πολλά μεθοδολογικά προβλήματα, όπως για παράδειγμα τα μικρά δείγματα των πληθυσμών από κάθε χώρα, το περιεχόμενο και ο τρόπος διατύπωσης των ερωτήσεων, η μετάφραση μαθηματικών εκφράσεων, ιδίως στη διατύπωση των προβλημάτων, στις γλώσσες των μη αγγλόφωνων χωρών, αλλά και προβλήματα ανάλυσης των στοιχείων τα οποία προέκυψαν από την κατασκευή διαφόρων κλιμάκων και δεικτών για τον ποσοτικό χειρισμό των δεδομένων. Επιφυλάξεις διατυπώθηκαν επίσης για την ερμηνεία των δεδομένων της έρευνας, η οποία γενικεύοντας τις διαπιστώσεις της σε διεθνές επίπεδο αγνοούσε αναγκαστικά τις ιδιαίτερες εκπαιδευτικές και κοινωνικές συνθήκες της σχολικής φοίτησης σε κάθε συγκεκριμένη χώρα (Nagy, 1996).

Μια κριτική προσέγγιση των διεθνών ερευνών

Προσεγγίζοντας κριτικά τις μεθοδολογίες και τα ευρήματα των μεγάλης έκτασης διεθνών συγκριτικών ερευνών της μαθηματικής εκπαίδευσης και των αποτελεσμάτων τους, όπως είναι οι έρευνες της IEA και του ΟΟΣΑ/PISA, άλλα και μικρότερης έκτασης έρευνες όπως είναι η ΙΑΕΡ-Μ, διακρίνουμε τις κριτικές που έχουν διατυπωθεί σε δύο επίπεδα. Στο επίπεδο της μεθοδολογίας τους στο οποίο διατυπώνονται ερωτηματικά για την εγκυρότητα των στοιχείων και την αξιοπιστία των συμπερασμάτων τους και στο επίπεδο της ερμηνείας ευρημάτων των ερευνών αυτών από την οπτική της πολιτικής αξιοποίησης τους.

Η εγκυρότητα των στοιχείων και η αξιοπιστία των συμπερασμάτων

Η εγκυρότητα των στοιχείων και η αξιοπιστία των συμπερασμάτων των ερευνών αυτών αμφισβητείται με επιχειρήματα, τα οποία προβάλλουν τη διαφορετικότητα των αναλυτικών προγραμμάτων και γενικότερα της οργάνωσης της μαθηματικής εκπαίδευσης των χωρών που συμμετέχουν στις έρευνες και την αδυναμία των ερευνητικών σχεδίων και επιλογών των ερευνών αυτών να ενσωματώσουν και να συνεκτιμήσουν βασικά στοιχεία των διαφορών αυτών (δες ενδεικτικά Prais, 2003). Στην περίπτωση, μάλιστα, των ερευνών του PISA τα αναλυτικά προγράμματα δεν αποτελούν καν μεταβλητές του μεθοδολογικού τους προτύπου.

Μια δεύτερη σειρά επιχειρημάτων, τα οποία θέτουν ζητήματα εγκυρότητας των στοιχείων και αξιοπιστίας των συμπερασμάτων των διεθνών συγκριτικών ερευνών, προέρχεται από το τεκμηριωμένο γεγονός ότι ενώ ορισμένες μεταβλητές των ερευνών αυτών συσχετίζονται θετικά με τις επιδόσεις των μαθητών και μαθητριών σε κάποιες χώρες, δεν εμφανίζουν καμία σημαντική συσχέτιση σε άλλες (Reynolds et al., 2002). Αυτό σημαίνει ότι κάποιοι παράγοντες που επηρεάζουν τη μάθηση των μαθηματικών φαίνεται να διαφοροποιούνται κατά χώρα, ενώ κάποιοι άλλοι όχι, διαπίστωση η οποία δεν επιτρέπει αξιόπιστες συγκρίσεις μεταξύ χωρών και αποδυναμώνει την αξία των συγκριτικών ερευνών αυτού του τύπου.

Αξιοποιώντας και γενικεύοντας τις κριτικές, οι οποίες από διάφορες οπτικές και ποικίλες αφετηρίες έχουν διατυπωθεί για τις διεθνείς συγκριτικές έρευνες της μαθηματικής εκπαίδευσης νομίζω ότι η αδυναμία τους να συλλάβουν την πραγματικότητα των αποτελεσμάτων της διδασκαλίας των μαθηματικών μπορεί να αποδοθεί σε τρία μεθοδολογικά μειονεκτήματα τους:

- (1) Η συλλογή των δεδομένων της μαθηματικής εκπαίδευσης γίνεται στις έρευνες αυτές με βάση τη χώρα-έθνος και η ανάλυση των στοιχείων βασίζεται πρωτίστως στις συγκρίσεις μεταξύ των χωρών-εθνών. Η επιλογή αυτή ταυτίζει κάθε χώρα με μια και μοναδική κοινωνία, οπότε η σύγκριση χωρών συνεπάγεται τη σύγκριση κοινωνιών οι οποίες όμως υποτίθενται με ομογενοποιημένα

οικονομικά, κοινωνικά και πολιτισμικά χαρακτηριστικά. Η επιλογή της χώρας- έθνους ως αναλυτικής κατηγορίας και η αναγωγή της σε ένα ενιαίο πολιτισμικό πλαίσιο καταλήγει σε κατηγοριοποιήσεις, όπως Κορεάτες ή Αμερικάνοι, παραβλέποντας σημαντικές διαφοροποιήσεις στο εσωτερικό των κοινωνιών αυτών. Η ερευνητική αυτή επιλογή αποτελεί ένα είδος μεθοδολογικού εθνικισμού.

- (2) Η προσέγγιση των υπό μελέτη φαινομένων της μαθηματικής εκπαίδευσης περιχαρακώνεται στις κρατικές ρυθμίσεις, οι οποίες ορίζουν το περιεχόμενο του αναλυτικού προγράμματος, τις ώρες διδασκαλίας των μαθηματικών, τους κανόνες αξιολόγησης της μαθηματικής γνώσης, αλλά και τους όρους εργασίας των εκπαιδευτικών-μαθηματικών. Η οπτική του κράτους-ρυθμιστή της μαθηματικής εκπαίδευσης υποθέτει ότι οι κρατικές δομές όλων των χωρών είναι ομοιόμορφες. Δηλαδή, ότι όλα τα πολιτικά συστήματα οργανώνουν το κράτος και τη λειτουργία του με τον ίδιο τρόπο, μέσα από πανομοιότυπους θεσμούς, για το χειρισμό παρόμοιων προβλημάτων διοίκησης των πολιτών και διαχείρισης των πόρων τους. Από την οπτική αυτή, οι όποιες κρατικές ρυθμίσεις αντιμετωπίζονται ως ρυθμίσεις ανεξάρτητες από πολιτικές ιδιοτέλειες, κοινωνικές δεσμεύσεις ή τεχνικές διευθετήσεις και χρησιμοποιούνται ως ερμηνευτικοί παράγοντες των αποτελεσμάτων της οργάνωσης και της διδασκαλίας των μαθηματικών στα σχολεία, ενώ μάλλον το ζητούμενο θα πρέπει να είναι ο εντοπισμός των παραγόντων που υποβάλλουν συγκεκριμένες κρατικές ρυθμίσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης σε κάθε χώρα. Αντίθετα από τον υπονοούμενο κρατισμό, η «διακυβέρνηση» της εκπαίδευσης πραγματοποιείται μέσα από έναν συνδυασμό δραστηριοτήτων χρηματοδότησης, προσφοράς εκπαιδευτικών ευκαιριών, διαχείρισης υποδομών και λειτουργιών και ρυθμίσεων μεταξύ δημόσιων και ιδιωτικών φορέων και παραγόντων, οι οποίοι άμεσα ή έμμεσα, με διάφορους τρόπους και σε διάφορα επίπεδα εμπλέκονται στην οργάνωση και υλοποίηση των εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων στα σχολεία.

(3) Η αναγωγή της μάθησης και των αποτελεσμάτων της διδασκαλίας των μαθηματικών στα χαρακτηριστικά του εκπαιδευτικού συστήματος. Χωρίς αμφιβολία, το εκπαιδευτικό σύστημα αποτέλεσε κεντρικό θεσμό των σύγχρονων κοινωνιών από τις αρχές του 19^{ου} αιώνα μέχρι σήμερα και το βασικό δομικό πλέγμα στο οποίο στηρίχθηκε η οργάνωση και η λειτουργία των σχολείων. Τα εκπαιδευτικά συστήματα των διαφόρων χωρών, όμως, ακριβώς επειδή θεσμοθετήθηκαν και οργανώθηκαν σε διαφορετικές ιστορικές περιόδους και ακολούθησαν διαφορετικούς ρυθμούς ανάπτυξης έχουν πολλές και σε κάποιες περιπτώσεις ουσιώδεις διαφορές μεταξύ τους. Παρόλα αυτά, στις διεθνείς συγκριτικές έρευνες τα εκπαιδευτικά συστήματα των διαφόρων χωρών υποτίθενται ισόμορφα στη δομή τους και σταθερά στο χρόνο, χωρίς βέβαια αυτή η παραδοχή να ορίζεται με σαφήνεια,. Από αυτή την ταύτιση μάθησης, διδασκαλίας και εκπαιδευτικού συστήματος προκύπτει μια υπονοούμενη εξίσωση της εκπαίδευσης με το σχολείο και τη σχολική φοίτηση, η οποία αγνοεί όλους τους άλλους παράγοντες που επιδρούν στη μάθηση μαθηματικών εννοιών και στην ανάπτυξη δεξιοτήτων, όπως είναι η οικογένεια, το φροντιστήριο, η παρέα των παιδιών. Από μια τέτοια οπτική, τα εκπαιδευτικά συστήματα, όχι μόνο δεν μπορούν να ερμηνεύσουν τα αποτελέσματα της μάθησης των μαθηματικών η οποία οργανώνεται στο πλαίσιο τους, αλλά είναι το ίδιο το εκπαιδευτικό σύστημα και το πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης που αυτό διαμορφώνει, το οποίο απαιτεί μια ερμηνεία (δες σχετικό προβληματισμό στο Dale 1994).

Τα μεθοδολογικά αυτά μειονεκτήματα αγνοούν τις επιπτώσεις που έχουν στην εκπαίδευση και στη μάθηση, εντός και εκτός σχολείου, πολλές διαστάσεις της παγκοσμιοποίησης, οι οποίες σήμερα επηρεάζουν σε πολύ σημαντικό βαθμό ένα από τα πιο παλιά διεθνοποιημένα πεδία, όπως είναι η μαθηματική εκπαίδευση. Σήμερα είναι γενικά αποδεκτό, ότι η παγκοσμιοποίηση είναι μια ιστορική διαδικασία, η οποία περιλαμβάνει έναν ραγδαίο, μη ομαλό, μετασχηματισμό των πολιτικών, οικονομικών και πολιτισμικών δομών, πρακτικών και κοινωνικών σχέσεων (Hobsbawm, 1999; Scholte, 2005), με κύρια χαρακτηριστικά την απο-εθνικοποίηση των κρατών και τον μετασχηματισμό των πολιτικών και οικονομικών δράσεων,

αλλά και των ανθρώπινων υποκειμενικοτήτων, των αστικών χώρων και των χρονικών πλαισίων της ζωής των ανθρώπων (Sassen, 2006). Από τους μετασχηματισμούς αυτούς δεν εξαιρείται η εκπαίδευση στην οποία μέσα από αυτή τη διαδικασία επιβάλλονται νέοι στόχοι, νέοι τύποι οργάνωσης και νέες μορφές λειτουργίας. Επομένως σε ότι αφορά τις διεθνείς συγκριτικές έρευνες της μαθηματικής εκπαίδευσης, απαιτούνται νέες θεωρητικές προσεγγίσεις και νέες μεθοδολογικές οπτικές, οι οποίες θα επιτρέπουν την καταγραφή και τη μελέτη των επιρροών υπερ-εθνικών οργανισμών στο περιεχόμενο και στις πρακτικές της μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών και των διαφορών οι οποίες χαρακτηρίζουν τη σχέση κοινωνικών και πολιτισμικών ομάδων με τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους στα σχολεία, ανεξάρτητα από έθνη, κράτη ή εκπαιδευτικά συστήματα, ενώ θα συνεκτιμούν παράλληλα το ρόλο της ιστορικής εξέλιξης στην οποία υπόκεινται και οι θεωρίες μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών.

Η πολιτική αξιοποίηση των ευρημάτων

Κάθε φορά που δημοσιοποιούνται ευρήματα διεθνών συγκριτικών ερευνών ακολουθεί σειρά δημοσιευμάτων στον συμβατικό και ηλεκτρονικό τύπο με θρήνους, θριαμβολογίες ή κριτικές κυβερνητικών παραγόντων, εκπαιδευτικών, θεωρητικών της εκπαίδευσης, επιστημόνων διαφόρων κλάδων, δημοσιογράφων και άλλων σχετικών και μη, φαινόμενο που δεν είναι μόνο Ελληνικό. Πρόσφατο παράδειγμα αποτελούν τα αποτελέσματα των ερευνών του PISA 2012, οι οποίες άλλωστε επιδιώκουν σύμφωνα με τους διακηρυγμένους στόχους τους να επιδράσουν στη διαμόρφωση των εκπαιδευτικών πολιτικών εκείνων των χωρών οι οποίες δεν συμβαδίζουν με τις επιδιώξεις του ΟΟΣΑ για την οικονομική οργάνωση και λειτουργία του κόσμου.

Από τον «εκπαιδευτικό λόγο» που διαμορφώνεται και διατυπώνεται με αναφορά στα ευρήματα και στις διαπιστώσεις των διεθνών ερευνών αυτών είναι σαφής η προσπάθεια «αξιοποίησης» των ευρημάτων τους για την νομιμοποίηση εκπαιδευτικών πολιτικών στη βάση «διεθνών προτύπων», μέσα από τα οποία αναγορεύονται συγκεκριμένες λύσεις στα εκπαιδευτικά προβλήματα ως «προφανείς» και «αυτονόητες»,

«αποδεκτές από πολλές άλλες χώρες» (Grek, 2009), τις οποίες αρνούνται μόνο όσοι δεν επιθυμούν τον εκσυγχρονισμό και την πρόοδο της δικιάς τους εκπαιδευτικής πραγματικότητας. Η οπτική αυτή ενέχει, βέβαια, μια μορφή αντίφασης αφού επιστρατεύει μια «ανάγνωση διεθνών δεδομένων» σε μια «εθνική θεώρηση», θεωρώντας ότι το πεδίο της εκπαιδευτικής πολιτικής είναι ένα σχετικά αυτόνομο πεδίο εθνικής κυριαρχίας, το οποίο όμως θα πρέπει ταυτόχρονα να υπόκειται στα «αναπόφευκτα» διεθνών επιλογών.

Το κύριο πρόβλημα, όμως, της πολιτικής αξιοποίησης των ευρημάτων των διεθνών συγκριτικών ερευνών είναι η κατασκευή και η διαρκής ανακατασκευή «σημαινόντων» καθολικής ισχύος με τη μορφή κριτηρίων για την ποιότητα και την αποτελεσματικότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης, κριτηρίων τα οποία βασιζονται άμεσα μεν σε διεθνείς αξιολογήσεις, έμμεσα όμως σε πολιτικές επιλογές. Έτσι καθιερώνεται σταδιακά ένας «τρόπος σκέψης» και οικοδομείται βαθμιαία μια μοναδική οπτική για την εκπαίδευση, η οποία όντας «επιστημονικά» τεκμηριωμένη απονομιμοποιεί όλες τις άλλες εκδοχές και προτάσεις (Pereyra et al., 2011).

Σ' αυτή τη διαρκή διαδικασία κατασκευής και ανακατασκευής «διεθνών» προτύπων αναδεικνύονται ερωτήματα για τις πολιτισμικές, κοινωνικές, αλλά και γενικότερα πολιτικές, επιπτώσεις τους, τα οποία, όμως, επιδέχονται πρωτίστως πολιτικές και δευτερευόντως επιστημονικές απαντήσεις. Έτσι η συζήτηση για τις μεθοδολογίες συλλογής και ανάλυσης στοιχείων και για τις ερμηνείες των ευρημάτων των διεθνών συγκριτικών ερευνών της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών μετατρέπεται αναγκαστικά σε μια ταυτόχρονα επιστημονική και πολιτική συζήτηση, με ότι αυτό συνεπάγεται στην ανάπτυξη αντίστοιχων θεωρητικών οπτικών και ερευνητικών σχεδίων, αλλά και εντέλει πολιτικών προτάσεων.

Επιλεγόμενα

Τι κάνουμε, επομένως, με τις διεθνείς συγκριτικές έρευνες της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών και τα ευρήματά τους; Όπως ισχύει για όλες τις έρευνες, οι στόχοι τους ποικίλουν και διαμορφώνονται υπό την επίδραση εκπαιδευτικών θεωριών ή πολιτικών

προθέσεων, οι οποίες κατά περίπτωση κυριαρχούν στους οργανισμούς που σχεδιάζουν και υλοποιούν ή στους φορείς που χρηματοδοτούν τις έρευνες αυτές, ενώ παράλληλα οι στόχοι αυτοί προσλαμβάνονται, ερμηνεύονται κι αξιολογούνται διαφορετικά από τους αποδέκτες των ευρημάτων και των διαπιστώσεων τους ανάλογα με τις συγκυριακές ή παγιωμένες οπτικές τους, τις προθέσεις και τα συμφέροντα τους. Γενικά και ανεξάρτητα από τις επιμέρους διατυπώσεις τους οι στόχοι των μεγάλης έκτασης διεθνών συγκριτικών ερευνών επιδιώκουν να συμβάλλουν (και εδώ δανείζομαι την ιδέα των Novoa & Yariv-Mashal, 2003):

- Στη γνώση των «άλλων» συστημάτων εκπαίδευσης, των «άλλων» αναλυτικών προγραμμάτων, τεχνικών διδασκαλίας κλπ. με στόχο την αξιοποίηση των θετικών και την αποφυγή των αρνητικών τους στοιχείων, ιδιαίτερα όταν πρόκειται για «νέες» προσεγγίσεις σε όψεις οργάνωσης ή και λειτουργίας εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων. Οι στόχοι αυτοί αναδείχθηκαν και κυριάρχησαν στις έρευνες κατά το τέλος του 19^{ου} αιώνα.
- Στην κατανόηση των «άλλων», ώστε να αναπτυχθούν αμοιβαίες συνεργασίες ανάπτυξης εκπαιδευτικών εγχειρημάτων. Οι στόχοι αυτοί επικράτησαν στις συγκριτικές έρευνες στις από τις αρχές του 20^{ου} αιώνα και οι έρευνες της IEA μπορεί να θεωρηθούν τυπικές περιπτώσεις.
- Στην κατασκευή των «άλλων», όταν πρόκειται για νέες κρατικές οντότητες οι οποίες οικοδομούν τα εκπαιδευτικά τους συστήματα επιδιώκοντας να οικοδομήσουν ή να υποστηρίξουν την εθνική ή και κοινωνική τους συνοχή. Οι στόχοι αυτοί κυριάρχησαν στις συγκριτικές έρευνες κατά τη δεκαετία του 1960, όταν αναδύθηκαν νέα κρατη από τη διάλυση των αποικιών των Ευρωπαϊκών αυτοκρατοριών, αλλά και του 1990 όταν παρουσιάστηκαν ανάλογα φαινόμενα μετά την κατάρρευση της ΕΣΣΔ.
- Στη μέτρηση των «άλλων», μέσα σε ένα περιβάλλον διεθνούς ρευστότητας και ανταγωνισμού, στο οποίο η εκπαίδευση εκλαμβάνεται ως παράγοντας της οικονομικής δραστηριότητας και παράλληλα ως προϊόν δεκτικό οικονομικής αξιοποίησης. Οι στόχοι αυτοί αναδείχθηκαν στις έρευνες, με κύριο παράδειγμα τις έρευνες

του PISA, μετά το 2000 και αποσκοπούν στη δημιουργία τεχνικών και κριτηρίων για τη «μέτρηση» της «αποτελεσματικότητας» και της «ποιότητας» βασικών όψεων της εκπαίδευσης σε ένα πλαίσιο οικονομικού ανταγωνισμού.

Οι επιλογές που προσφέρουν οι παραπάνω διακρίσεις μας επιτρέπουν να οικοδομήσουμε μια προσωπική οπτική στις μεθοδολογίες, στα ευρήματα και στις διαπιστώσεις των διεθνών ερευνών της μαθηματικής εκπαίδευσης και στη βάση της οπτικής αυτής να αναζητήσουμε ερμηνείες αξιοποιώντας, ατομικά ή και συλλογικά, την επιστημονική και παιδαγωγική μας γνώση και εμπειρία.

Σημειώσεις

1. Όλες οι εκδόσεις για τις Διεθνείς Μελέτες Μαθηματικών της International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA) μερικές από τις οποίες παρέχονται δωρεάν βρίσκονται στην ιστοσελίδα της Ένωσης <http://www.iea.nl/home.html>
2. Όλες οι εκδόσεις του Προγράμματος Διεθνούς Αποτίμησης της Επίδοσης των Μαθητών/Μαθητριών (PISA-OECD μερικές από τις οποίες παρέχονται δωρεάν βρίσκονται στην ιστοσελίδα του προγράμματος <http://www.iep.edu.gr/pisa/>

Βιβλιογραφικές αναφορές

- Beaton, A.E., Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Gonzalez, E.J., Kelly, D.L., & Smith, T.A. (1996), *Mathematics achievement in the middle school years: IEA's Third International Mathematics and Science Study*. Chestnut Hill, MA: Boston College.
- Crossley, M (2002). Comparative and International education: Contemporary challenges, reconceptualization and new directions for the field, *CICE online journal*, 4(2) .
- Dale, R. (1999). Specifying globalization effects on national policy: A focus on the mechanisms, *Journal of Educational policy*, 14(1), 1-17.
- Grek, S. (2009). Governing by numbers: The PISA effect in Europe. *Journal of Education Policy*, 24(1), 23-37.
- Hobsbawm, E. (1999), *The New Century*, London: Abacus.

- Howson, G. (1995). *Mathematics textbooks: A comparative study of Grade 8 texts. TIMSS monograph no. 3.* Vancouver, Canada: Pacific Educational Press.
- Husén, T. (1967). *International study of achievement in mathematics: A comparison of twelve countries*, Vols. 1 & 2, New York: Wiley.
- IEP/PISA (x.x.), Εγγραμματοσιμός στα Μαθηματικά,
<http://www.iep.edu.gr/pisa/index.php/> 2012-03-13-10-37-01/2012-03-13-10-37-51 (ανακτήθηκε 25/9/2014)
- Lapointe, A. E., Mead, N. A., & Askew, J. M. (1992). *Learning mathematics.* Princeton, NJ: Educational Testing Service.
- Lapointe, A. E., Mead, N. A., & Phillips, G. W. (1989). *A world of differences: An international assessment of mathematics and science.* Princeton, NJ: Educational Testing Service.
- LeTendre, G., Baker, D., Akiba, M., Goesling, B., & Wiseman, A. (2001). Teachers' Work: Institutional Isomorphism and Cultural Variation in the US, Germany, and Japan. *Educational Researcher* 30(6), 3-15.
- Martin, M.O., Mullis, I.V.S., Gonzalez, E.J., Smith, T.A., & Kelly, D.L. (1999). *School contexts for learning and instruction: IEA's Third International Mathematics and Science Study.* Chestnut Hill, MA: Boston College.
- Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Beaton, A.E., Gonzalez, E.J., Kelly, D.L., & Smith, T.A. (1998). *Mathematics and science achievement in the final year of secondary school: IEA's Third International Mathematics and Science Study.* Chestnut Hill, MA: Boston College.
- Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Gonzalez, E.J., Gregory, K.D., Garden, R.A., O'Connor, K.M., Chrostowski, S.J., & Smith, T.A. (2000). *TIMSS 1999 international mathematics report: Findings from IEA's repeat of the Third International Mathematics and Science Study at the eighth grade.* Chestnut Hill, MA: Boston College.
- Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Gonzalez, E.J., & Chrostowski, S.J. (2004). *TIMSS 2003 international mathematics report: Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the fourth and eighth grades.* Chestnut Hill, MA: Boston College.
- Mullis, I.V.S., Martin, M.O., & Foy, P. (2008). *TIMSS 2007 international mathematics report: Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the fourth and eighth grades.*

Chestnut Hill, MA: Boston College.

- Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Foy, P., & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 international results in mathematics*. Chestnut Hill, MA: Boston College.
- Nagy, P. (1996), International Comparisons of Student Achievement in Mathematics and Science: A Canadian Perspective, *Canadian Journal of Education*, 21 (4), 396–413.
- Novoa, A. and Yariv-Mashal (2003) ‘Comparative research in education: a mode of governance or a historical journey?’ *Comparative Education*, 39 (4), 423-438
- Pelgrum, W.J., Eggen, T., & Plomp, T. (1986). *Second International Mathematics Study: The implemented and attained mathematics curriculum—a comparison of eighteen countries*. Washington, DC: Center for Education Statistics.
- Pereyra M A. et al. (eds.), (2011) *PISA Under Examination: Changing Knowledge, Changing Tests, and Changing Schools*, Rotterdam: Sense Publishers
- Postlethwaite, N. (1967). *School organization and student achievement: A study based on achievement in mathematics in twelve countries*. Stockholm: Almqvist & Wiksell.
- Prais S. J. (2003), Cautions on OECD’S Recent Educational Survey (PISA) *Oxford Review of Education*, Vol. 29, No. 2, 139-163
- Reynolds, D., Creemers, B., Stringfield, S., Teddlie, C. & Schaffer, G. (eds.) (2002). *World Class Schools*. London: Routledge Falmer.
- Robitaille, D.F., & Garden, R.A. (Eds.). (1989). *The IEA Study of Mathematics II: Contexts and outcomes of school mathematics*. Oxford: Pergamon Press.
- Sassen, S. (2006) *Territory, Authority, Rights: From Medieval to Global Assemblages*, Princeton: Princeton University Press.
- Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Valverde, G. A, Houang, R. T., & Wiley, D. E. (1997a). *Many Visions, Many Aims Volume 1: A Cross-National Investigation of Curricular Intentions in School Mathematics*. Dordrecht: Kluwer.
- Schmidt, W.H., Raizen, S.A., Britton, E.D., Bianchi, L.J., & Wolfe, R.G. (1997β). *Many visions, many aims, Volume 2: A cross-national*

- investigation of curricular intentions in school science*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Scholte, J-A., (2005) *Globalization: A Critical Introduction*, Basingstoke: Palgrave
- Stanat, P., Artelt, C., Baumert, J., Klieme, E., Neubrand, M., Prenzel, M., Schiefele, U., Schneider, W., Schumer, G., Tillmann, K.-J. & Weiss, M. (Eds.). (2002). *PISA 2000: Overview of the Study. Design, Method and Results*, Berlin: Max Planck Institute for Human Development
- Stigler, J.W. Gonzales, P., Kawanaka, T Knoll, S. & Serrano A. (1999), *The TIMSS Videotape Classroom Study. Methods and findings from an exploratory research project on eighth-grade mathematics instruction in Germany, Japan, and the United States*. Washington, DC: NCES.
- Stromquist, N. (2000). Editorial, *Compare*, 30 (3), 261-264.
- Travers, K.J., & Westbury, I. (1989). *The IEA Study of Mathematics I: Analysis of mathematics curricula*. Oxford: Pergamon Press.
- Westbury, I., & Travers, K. (1990). *Second International Mathematics Study: Studies*. Urbana, IL: University of Illinois.

**Ζητήματα μάθησης και διδασκαλίας
των μαθηματικών**

**Η διαμεσολάβηση των πολιτισμικών εργαλείων στη
μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών:
Μια επιλεκτική σκιαγράφηση ερευνητικών θεμάτων**

Εισαγωγή

Στα επόμενα σκιαγραφούνται επιλεκτικά βασικές όψεις ενός ερευνητικού πεδίου, το οποίο έχει αναδυθεί στο πλαίσιο μιας πολιτισμικής-ιστορικής προσέγγισης της ανθρώπινης νοητικής λειτουργίας: η διαμεσολάβηση των πολιτισμικών εργαλείων στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών. Η σκιαγράφηση είναι επιλεκτική, στο βαθμό που υπογραμμίζει θέματα προερχόμενα από τα ιδιαίτερα ερευνητικά ενδιαφέροντα του συγγραφέα.

Στο πρώτο μέρος παρουσιάζονται βασικές έννοιες της πολιτισμικής-ιστορικής προσέγγισης της ανθρώπινης νόησης, όπως θεμελιώθηκε από τον Βυγκότσκι, οι οποίες σχετίζονται άμεσα και φωτίζουν ουσιαστικές πλευρές του ρόλου που παίζουν τα πολιτισμικά εργαλεία στην ανθρώπινη νόηση και δραστηριότητα, ενώ στο δεύτερο μέρος σχολιάζονται τα πολιτισμικά εργαλεία και η λειτουργία τους. Στο τρίτο και τέταρτο μέρος, αντίστοιχα, περιγράφονται και σχολιάζονται ερευνητικά θέματα του πεδίου.

Κατευθυντήρια αρχή της πολιτισμικής-ιστορικής προσέγγισης είναι η ακόλουθη, επιγραμματικά διατυπωμένη. Η ανθρώπινη νοητική λειτουργία σε όλες τις όψεις της αναπτύσσεται και διαμορφώνεται μέσα από τις δραστηριότητες στις οποίες οι άνθρωποι μετέχουν, δραστηριότητες οι οποίες είναι κοινωνικές στη φύση τους και έχουν ιστορικά αναπτύξει εργαλεία, δομές και περιβάλλοντα. Οι άνθρωποι στις καθημερινές τους πράξεις, δράσεις και δραστηριότητες (οι διακρίσεις αυτές θα διευκρινιστούν στη συνέχεια) ενσωματώνουν την πολιτισμική-ιστορική κληρονομιά των προγόνων τους, οπότε δεν μπορεί να γίνεται λόγος και για νοητική λειτουργία ανεξάρτητη από το κοινωνικο-πολιτισμικό της πλαίσιο.

Στο πλαίσιο αυτό, η μάθηση και η διδασκαλία των μαθηματικών είναι κοινωνικο-πολιτισμικά διαμεσολαβημένες δραστηριότητες και με βάση την παραδοχή αυτή είναι αδύνατον να κατανοηθούν εστιάζοντας μεμονωμένα είτε στον μαθητή ατομικά είτε στην άμεση αλληλεπίδραση του μεμονωμένου μαθητή με ατομικούς φορείς κοινωνικών ρόλων, όπως είναι οι δάσκαλοι ή οι γονείς. Η μάθηση και η διδασκαλία των μαθηματικών πρέπει να εντάσσονται και επομένως να διερευνώνται μέσα σε ιστορικά, κοινωνικά, πολιτισμικά, και πολιτικά περιβάλλοντα και πρακτικές.

Τα πολιτισμικά εργαλεία ως διαμεσολαβητές της κοινωνικής στην ατομική ανθρώπινη γνώση

Λυδία λίθος της πολιτισμικής-ιστορικής προσέγγισης της ανθρώπινης νόησης στη λογική του Βυγκότσκι είναι η παραδοχή ότι προϋπόθεση για την κατανόηση των μοναδικών χαρακτηριστικών της ανθρώπινης νόησης είναι η θεώρηση δύο παραγόντων.

Ο πρώτος είναι *‘ο ιστορικός χαρακτήρας της ανθρώπινης συμπεριφοράς και μάθησης’* (Kozulin, 1990, σ. 81), που σημαίνει ότι οι άνθρωποι ως άτομα δε χρησιμοποιούν μόνο την φυσική εμπειρία για να νοηματοδοτήσουν τον κόσμο τους, αλλά και την ιστορική και πολιτισμική εμπειρία τους. Ο δεύτερος παράγοντας είναι *‘η κοινωνική φύση της ανθρώπινης εμπειρίας’* (ο.π., σ. 81), που σημαίνει ότι η ατομική εμπειρία είναι μόνο ένα μέρος του συνόλου των εμπειριών που διαθέτει μια συγκεκριμένη κοινωνία. Επομένως, από μία πολιτισμική-ιστορική οπτική, αυτό που είναι μοναδικό στην ανθρώπινη νόηση πηγάζει από την ανάγκη και την ικανότητα των ανθρώπινων όντων να διαμεσολαβούν τις πράξεις, τις δράσεις και τις δραστηριότητες τους με πολιτισμικά εργαλεία, τα οποία μεταβιβάζονται από γενιά σε γενιά στην πορεία της ιστορίας (Vygotsky, 1978).

Αναλύοντας το ρόλο των πολιτισμικών εργαλείων στην ανθρώπινη νόηση και δραστηριότητα ο Βυγκότσκι περιγράφει δύο τύπους νοητικών λειτουργιών, τις κατώτερες και τις ανώτερες νοητικές λειτουργίες. Οι κατώτερες νοητικές λειτουργίες κληρονομούνται γενετικά και επιτρέπουν μόνο μία άμεση, ενστικτώδη και παρορμητική αντίδραση

στα δεδομένα του περιβάλλοντος. Αντίθετα, οι ανώτερες νοητικές λειτουργίες είναι *‘έξ ορισμού πολιτισμικά διαμεσολαβημένες. Δεν περιλαμβάνουν «άμεσες», αλλά έμμεσες αντιδράσεις προς τον κόσμο’* (Cole & Wertsch, x.x.). Ο Βυγκότσι υποστήριξε ότι οι ανώτερες νοητικές λειτουργίες δεν είναι απλά μία επέκταση των κατώτερων νοητικών λειτουργιών, αλλά μάλλον *‘λειτουργίες μιας κοινωνικά νοηματοδοτημένης δραστηριότητας’* (Kozulin, 1990, σ. 113). Έτσι σύμφωνα με το γνωστό στη βιβλιογραφία ως «γενετικό νόμο της πολιτισμικής ανάπτυξης» *‘κάθε νοητική λειτουργία εμφανίζεται δύο φορές στην πολιτισμική ανάπτυξη του παιδιού : πρώτα στο κοινωνικό επίπεδο και αργότερα στο ατομικό επίπεδο. Πρώτα μεταξύ των ανθρώπων (διαψυχολογικά) και ύστερα μέσα στο παιδί (ενδοψυχολογικά)... Όλες οι ανώτερες νοητικές λειτουργίες εκκινούν από τις πραγματικές σχέσεις μεταξύ των ανθρώπων’* (Vygotsky, 1978 σ. 57). Με άλλα λόγια, *‘κάθε ανώτερη νοητική λειτουργία ήταν εξωτερική επειδή σε κάποιο βαθμό ήταν κοινωνική, προτού γίνει μία εσωτερική, αληθινά νοητική λειτουργία’* (Vygotsky, 1981, σ.162).

Κατά συνέπεια, αυτό που μαθαίνουν οι άνθρωποι κατά την πορεία της νοητικής τους ανάπτυξης εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τις ανώτερες νοητικές λειτουργίες που είναι διαθέσιμες σε ένα δεδομένο πολιτιστικό περιβάλλον.

Αυτή η παραδοχή συνιστά, κατά την άποψή μου, ένα σημείο εκκίνησης γόνιμων ερευνητικών εγχειρημάτων για τα ζητήματα της μάθησης των μαθηματικών. Για παράδειγμα, μπορεί να αποτελέσει αφετηρία διερεύνησης διαφορετικών πολιτισμικά ομάδων οι οποίες χρησιμοποιούν διαφορετικές εννοιολογικές δομές, διαφορετικά συμβολικά συστήματα και υπολογιστικά εργαλεία ή διαφορετικές προσεγγίσεις στην επίλυση προβλημάτων ή διαφορών μέσα σε κοινότητες ανθρώπων του ίδιου πολιτισμού ή ακόμη και διαφορών μεταξύ των ίδιων ατόμων σε διαφορετικές καταστάσεις ή δραστηριότητες (δες μια σχετική συζήτηση στο Nunes, 1992a).

Όμως εκτός από τον κοινωνικό τους χαρακτήρα οι ανώτερες νοητικές λειτουργίες είναι πάντοτε διαδικασίες διαμεσολαβημένες (Vygotsky 1987, σ. 126).

Υποκείμενο → Εργαλείο → Αντικείμενο

Τα μέσα αυτής της διαμεσολάβησης είναι διάφορων τύπων: υλικά εργαλεία, συμβολικά συστήματα, εννοιολογικές δομές ή ακόμα και συμπεριφορές άλλων ανθρώπινων όντων. Κατά την διατύπωση του Βυγκότσκι (1981, σελ. 137) στα μέσα διαμεσολάβησης της ανθρώπινης νόησης συμπεριλαμβάνονται: *‘η γλώσσα, διάφορα συστήματα αρίθμησης, μνημονικές τεχνικές, αλγεβρικά συμβολικά συστήματα, έργα τέχνης, γραφή, σχήματα, διαγράμματα, κάρτες και σχέδια. Όλα τα είδη των συμβατικών σημείων’*.

Σε κάθε περίπτωση η διαμεσολάβηση των ανώτερων ανθρώπινων νοητικών λειτουργιών είναι μία διαμεσολάβηση κοινωνικο-πολιτισμική, γεγονός που οδήγησε τον Βυγκότσκι να θεωρήσει τη διαμεσολάβηση ως *‘το κεντρικό γεγονός της ψυχολογίας μας’* (Nicholl 1998).

Για παράδειγμα, όταν γράφουμε χρησιμοποιούμε ένα στυλό, ένα μολύβι ή έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή (υλικά εργαλεία), αλλά ταυτόχρονα με αυτή την υλική διαμεσολάβηση, όταν γράφουμε χρησιμοποιούμε ένα συμβολικό εργαλείο, τη γλώσσα (το εργαλείο των εργαλείων, σύμφωνα με το Luría, 1929). Οι περισσότερες, αν όχι όλες, οι ανθρώπινες δραστηριότητες – φυσικές και πνευματικές – διαμεσολαβούνται από κάποιον τύπο πολιτισμικών εργαλείων.

Η ικανότητα, επομένως, να λειτουργούν στο επίπεδο των διαμεσολαβημένων ανώτερων νοητικών λειτουργιών με εργαλεία τα οποία αναπτύσσονται πολιτισμικά και μεταβιβάζονται ιστορικά είναι αυτή που διακρίνει τα ανθρώπινα όντα από όλα τα άλλα ζώα.

Στη βάση αυτή, ο Zichenko (1985) υποστηρίζει ότι μία διαμεσολαβημένη από εργαλεία πράξη πρέπει να θεωρηθεί ως η κατάλληλη αρχική μονάδα ανάλυσης για μία Βυγκοτσκιανή προσέγγιση της ανθρώπινης νοητικής λειτουργίας. Γιατί μία

στοχοθετημένη, διαμεσολαβημένη από εργαλεία πράξη, συμπεριλαμβάνει απαραίτητα και συνοψίζει σε μία μοναδιαία ενότητα τις διάφορες αλληλο-συσχετιζόμενες ενδοψυχολογικές και διαψυχολογικές λειτουργίες.

Με βάση τα παραπάνω, οι παρακάτω (επιλεκτικά και συντομογραφικά διατυπωμένες) θέσεις έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

- Κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα επιτελείται με τη χρήση πολιτισμικών εργαλείων, τα οποία είναι κοινωνικές κατασκευές, διαμεσολαβούν τις ανθρώπινες πράξεις και μετασχηματίζουν και αναδομούν την ανθρώπινη 'φύση' κατά την διαδικασία της χρήσης τους.

Για παράδειγμα, η κατοχή της γλώσσας αλλάζει τον τρόπο με τον οποίο προσλαμβάνουμε την πραγματικότητα, εφόσον οι λέξεις και περισσότερο οι γενικές κατηγορίες που χρησιμοποιούνται μεταξύ των ανθρώπων σε πρακτικές λόγου για την περιγραφή της πραγματικότητάς επεκτείνουν τη συνείδησή μας, αλλά ταυτόχρονα την οριοθετούν, καθώς μπορούμε να βιώσουμε πλήρως και να κατανοήσουμε μόνο εκείνες τις όψεις της πραγματικότητας για τις οποίες διαθέτουμε λέξεις ως εργαλεία σκέψης γι' αυτές (Saljo 1996).

- Τα πολιτισμικά εργαλεία δεν διευκολύνουν απλώς τις νοητικές λειτουργίες των ανθρώπων, αλλά την ίδια στιγμή τις διαμορφώνουν και τις μετασχηματίζουν.
- Όλες οι ψυχολογικές λειτουργίες εκκινούν και σε ένα μεγάλο βαθμό παραμένουν πολιτισμικά, ιστορικά και θεσμικά οριοθετημένες και καθορισμένες από συγκεκριμένα πλαίσια (Cole & Wertsch, x.x.).
- Η νόηση είναι κατανεμημένη, δεν είναι αποκλειστικά στα κεφάλια των ανθρώπων μας αλλά και στα πολιτισμικά εργαλεία που διαμεσολαβούν τις πράξεις τους. Οι ανώτερες νοητικές λειτουργίες περιλαμβάνουν το βιολογικό άτομο, τα πολιτισμικά διαμεσολαβητικά εργαλεία και το κοινωνικο- πολιτισμικό περιβάλλον (Bateson, 1972, σ. 318-320).

- Και τελικά η ορθολογική αρχή ‘από τη σκέψη στην πράξη’ στην πραγματικότητα επαναδιατυπώνεται ως ‘από την πράξη στην σκέψη’.

Επιγραμματικά το θέμα της διαμεσολάβησης όπως τέθηκε από το Vygotsky παρέχει ‘τη σύνδεση ή τη γέφυρα μεταξύ των συγκεκριμένων πράξεων που εκτελούνται από άτομα και ομάδες από το ένα μέρος και των πολιτισμικών, θεσμικών και ιστορικών καταστάσεων από το άλλο’ (Wertsch, del Rio & Alvarez, 1995, σ. 21) ή απλούστερα μεταξύ του ατόμου και κοινωνίας. Επομένως, η διαμεσολάβηση παίζει έναν πρωτεύοντα ρόλο στις κοινωνικο-πολιτισμικές προσεγγίσεις της ανθρώπινης γνώσης.

Από μια Βυγκοτσκιανή οπτική οι ανώτερες νοητικές λειτουργίες είναι, όπως αναφέρθηκε, πάντοτε κοινωνικές, διαμεσολαβημένες, δραστηριότητες οι οποίες γίνονται ατομικές.

Η διαδικασία μέσω της οποίας επιτυγχάνεται η σύνδεση αυτών των δύο επιπέδων ή μέσω της οποίας επιτελείται ‘η εσωτερική αναδόμηση μιας εξωτερικής δράσης’ (Vygotsky, 1978, σ. 56) έχει αποκληθεί *εσωτερίκευση* (internalisation).

Η έννοια της εσωτερίκευσης είναι από πολλές απόψεις αμφιλεγόμενη, ιδιαίτερα όταν ιδωθεί από την οπτική της διχοτομικής σκέψης η οποία κυριαρχεί στη γνωστική ψυχολογία σε ‘εντός’ και ‘εκτός’ του ατόμου, μία θεώρηση προερχόμενη από την οντολογική θέση η οποία αναφέρεται συχνά ως Καρτεσιανός Δυϊσμός. Ο Καρτεσιανός Δυϊσμός, ως μία οντολογική θέση, θεωρεί τον κόσμο των υλικών σωμάτων και τον κόσμο της πνευματικής λειτουργίας ως συγκροτούμενες από ριζικά διαφορετικές ουσίες, απόλυτα ανεξάρτητες μεταξύ τους και η έννοια της εσωτερίκευσης φαίνεται να θεμελιώνεται σε έναν παρόμοιο δυϊσμό, προϋποθέτοντας ότι το κοινωνικό και το ψυχολογικό επίπεδο είναι διακριτά μεταξύ τους ή ότι ανάμεσα στο άτομο και στο κοινωνικό πλαίσιο υπάρχει ένα σύνορο (για μια σχετική συζήτηση δεξ, Rogoff 1990, Matusov, 1998).

Όμως στην προσέγγιση που σκιαγραφείται εδώ η έννοια της εσωτερίκευσης θεωρείται ως «*ταυτόχρονα κοινωνική και ατομική διαδικασία*» (John-Steiner & Mahn, 1996, σ. 10), σε μία λογική η οποία δεν προϋποθέτει μία αυστηρή διάκριση μεταξύ νοητικής λειτουργίας και περιβάλλοντος. Σε μία τέτοια λογική η διαδικασία της εσωτερίκευσης θεωρείται πρώτα και κύρια ως επιβεβαίωση της θέσης ότι η ανθρώπινη σκέψη είναι πρωτίστως και σε μεγάλο βαθμό μια κοινωνική διαδικασία. Σε κάθε περίπτωση η διαδικασία της εσωτερίκευσης δεν μπορεί να κατανοηθεί πλήρως χωρίς αναφορά σε μία αμοιβαία διαδικασία εξωτερικοποίησης, αφού *‘(εσωτερικές) νοητικές διαδικασίες εκδηλώνονται στις εξωτερικές πράξεις που εκτελεί ένα άτομο και έτσι μπορούν να επιβεβαιωθούν και να διορθωθούν αν χρειαστεί’* (Kartelinin, 1996, σ. 109).

Σε μία έτσι θεωρούμενη διαδικασία εσωτερίκευσης ο ρόλος των πολιτισμικών εργαλείων είναι σημαντικός. Σύμφωνα με το Βυγκότσκι, το κοινωνικό συντίθεται από πολιτισμικά εργαλεία, τα οποία όντας συστατικό μέρος του πλαισίου διαμορφώνουν τις ατομικές ψυχολογικές διαδικασίες. Έτσι κάθε ανθρώπινη δράση (συμπεριλαμβανόμενης και της σκέψης) εκτελείται δια της χρήσης πολιτισμικών εργαλείων. Τα πολιτισμικά εργαλεία διαμεσολαβούν τόσο την κοινωνική όσο και την ατομική δράση και σκέψη. Για μια ακόμα φορά, το κοινωνικό υπερέχει έναντι του ατομικού, εφόσον, εάν μία συγκεκριμένη κουλτούρα στην οποία ανατρέφεται ένα άτομο δεν κατέχει ορισμένα εργαλεία το άτομο δεν θα μπορεί να τα χρησιμοποιήσει ή δεν θα μπορεί να αναπτύξει τις ανώτερες νοητικές λειτουργίες τις οποίες τα εργαλεία αυτά διευκολύνουν.

Έτσι ο κοινωνικός χαρακτήρας των ανώτερων νοητικών λειτουργιών και η διαμεσολάβησή τους από πολιτισμικά εργαλεία δεν μπορούν να διαχωριστούν. Είναι και τα δύο, σε μία σχέση αλληλοσυσχέτισης, συνιστώντα στοιχεία της σκέψης και η μελέτη του ενός συνεπάγεται απαραίτητα τη μελέτη του άλλου.

Ανακεφαλαιώνοντας, η Βυγκοτσκιανή προσέγγιση της ανθρώπινης νόησης θεμελιώνεται σε τέσσερις θεωρητικές έννοιες και στις συγκεκριμένες σχέσεις τους: ανώτερες νοητικές λειτουργίες, διαμεσολάβηση, πολιτισμικά εργαλεία και εσωτερίκευση.

Οι ανώτερες νοητικές λειτουργίες επιτρέπουν στα ανθρώπινα όντα να τοποθετούνται σε απόσταση από τον κόσμο και να δρουν εργαλειακά πάνω σ' αυτόν. Επειδή είναι κοινωνικά νοηματοδοτημένες διαδικασίες – επομένως εξωτερικές σε κάθε άτομο – οι ανώτερες νοητικές λειτουργίες είναι πάντοτε διαμεσολαβημένες. Αυτή η διαμεσολάβηση γίνεται με τα εργαλεία, τα οποία έχουν αναπτυχθεί σε έναν πολιτισμό και έχουν γίνει αναπόσπαστο τμήμα της ανθρώπινης δραστηριότητας. Οι ανώτερες νοητικές λειτουργίες όταν κατακτούνται από τα άτομα εσωτερικοποιούνται και μέσα από αυτή τη διαδικασία το κοινωνικό καθίσταται διαθέσιμο ως ένα ατομικό εργαλείο. Η διαδικασία της εσωτερίκευσης περιλαμβάνει όχι μόνο το μετασχηματισμό του αντικειμένου που εσωτερικοποιείται, αλλά την ίδια τη στιγμή και την αλλαγή της φύσης του ατόμου από την επίδραση των ιδιοτήτων του αντικειμένου καθώς και των διαδικασιών της ίδιας της εσωτερικοποίησης. (Kozulin, 1990, σ. 115).

Η διαμεσολάβηση των πολιτισμικών εργαλείων στη σκέψη

Εργαλεία, υλικά, συμβολικά, εννοιολογικά ή συμπεριφορικά καθώς και οι χρήσεις τους έχουν αναπτυχθεί σε έναν πολιτισμό στη διάρκεια μεγάλων χρονικών περιόδων και έχουν γίνει ένα αναπόσπαστο τμήμα της ανθρώπινης δραστηριότητας, λειτουργώντας ως «μεταφορείς» κοινωνικο-πολιτισμικών προτύπων και γνώσης. Δρώντας ως διαμεσολαβητές, δομούν την ανθρώπινη πρακτική δραστηριότητα και φέρνουν στο προσκήνιο διαφορετικές πνευματικές διαδικασίες οι οποίες με τη σειρά τους ρυθμίζουν και μετασχηματίζουν ποιοτικά την πρακτική δραστηριότητα.

Σύμφωνα με τη διατύπωση του Βυγκότσκι (Vygotsky 1981, σ. 139-140), *‘η συμπερίληψη ενός εργαλείου στην ανθρώπινη συμπεριφορά (α) εισάγει πολλές νέες λειτουργίες, οι οποίες συνδέονται με τη χρήση του δεδομένου εργαλείου και τον έλεγχο του (β) καταργεί και καθιστά περιττές πολλές φυσικές διαδικασίες, των οποίων η εργασία εκτελείται από το εργαλείο και αλλάζει την πορεία και τα χαρακτηριστικά (την ένταση, τη διάρκεια, την ακολουθία κ.λπ.) όλων των νοητικών διαδικασιών, οι οποίες συμμετέχουν στη σύνθεση της εργαλειακής πράξης, αντικαθιστώντας μερικές λειτουργίες με άλλες, (δηλαδή*

επαναδημιουργεί και αναδιοργανώνει όλη τη δομή της συμπεριφοράς, ακριβώς όπως ένα τεχνικό εργαλείο επαναδημιουργεί όλη τη δομή των πράξεων μιας εργασίας)'.

Μέσα διαμεσολάβησης, διαδικασίες σκέψης και ανθρώπινες πρακτικές δραστηριότητες διαπλέκονται λειτουργικά κατά την ανάπτυξή τους, διαμορφώνοντας το ένα το άλλο σε μία διαλεκτική αλληλεξάρτηση.

Για παράδειγμα, για τη διεξαγωγή μίας αριθμητικής πράξης πρόσθεσης η χρήση ενός άβακα παράγει διαφορετικές νοητικές διαδικασίες από τη χρήση χαρτιού και μολυβιού. Οι αρχές οι οποίες καθορίζουν την πρόσθεση των αριθμών με τη χρήση του άβακα ή με τη χρήση χαρτιού και μολυβιού είναι φυσικά ίδιες και τα δύο μέσα βασισμένα στην αξιακή θέση των ψηφίων έχουν ιστορικά αναπτυχθεί σε μία αλληλεξάρτηση. Μία πρόσθεση αριθμών και στα δύο εργαλεία εκτελείται με την ανάλυση των αριθμών σε μέρη αντίστοιχων με το δεκαδικό σύστημα (μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, κ.ο.κ.) και την πρόσθεση των τμημάτων αυτών. Όμως η λειτουργική οργάνωση της εκτέλεσης μιας πρόσθεσης αριθμών διαφέρει σημαντικά στις δύο περιπτώσεις. Όταν χρησιμοποιούμε έναν άβακα, αυτή η διαδικασία πρόσθεσης αριθμών επιβάλλεται άμεσα από την υλική δομή του εργαλείου. Κατά τη χρήση χαρτιού και του μολυβιού, όμως, η διαδικασία αυτή είναι απλά ένας τεχνικός κανόνας, ο οποίος πρέπει να τηρείται. Με άλλα λόγια η χρήση διαφορετικών μέσων δομεί το έργο της εκτέλεσης μιας πρόσθεσης αριθμών με ποιοτικά διαφορετικούς τρόπους, προκαλώντας έτσι διαφορετικές νοητικές διαδικασίες για την εκπλήρωσή του και έχοντας διαφορετικές επιπτώσεις στο σχηματισμό και την ανάπτυξη των συναφών εννοιών (Χασάπης 1999).

Σ' αυτό το πλαίσιο δύο σημαντικές διακρίσεις χρειάζονται μια περαιτέρω διευκρίνιση.

Η πρώτη αφορά τη διάκριση μεταξύ των υλικών εργαλείων από τη μια και των εννοιολογικών και συμβολικών εργαλείων από την άλλη, ενώ η δεύτερη αναφέρεται στο διπλό χαρακτήρα των εργαλείων ως διαμεσολαβητικών μέσων από τη μια και ως αντικειμένων της ανθρώπινης δραστηριότητας από την άλλη.

Σχετικά με την πρώτη διάκριση μεταξύ των υλικών εργαλείων και των εννοιολογικών και συμβολικών εργαλείων (τα οποία μπορούν γενικά

να αναφέρονται και ως σημεία), θα πρέπει να σημειωθεί ότι παρά την σε γενικές γραμμές ομοιότητά τους τα δύο αυτά είδη πολιτιστικών εργαλείων δεν μπορούν να θεωρηθούν ισομορφικά, ως προς τις λειτουργίες που επιτελούν ως μέσα διαμεσολάβησης της ανθρώπινης δράσης και σκέψης. Όπως θέτει το ζήτημα ο Vygotsky (1978, σ. 55) *‘η πιο ουσιώδης διαφορά μεταξύ σημείου και εργαλείου, και η βάση για την πραγματική απόκλιση των δύο γραμμών (της διαμεσολαβημένης δραστηριότητας) είναι οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους κατευθύνουν την ανθρώπινη συμπεριφορά. Η λειτουργία του εργαλείου κατευθύνει την ανθρώπινη επίδραση στο αντικείμενο της δραστηριότητας του. Είναι εξωτερικά προσανατολισμένη και πρέπει να οδηγεί σε αλλαγή των αντικειμένων. Είναι ένα μέσο με το οποίο η εξωτερική ανθρώπινη δραστηριότητα στοχεύει στην κυριαρχία και στον θρίαμβο πάνω στη φύση. Το σημείο από την άλλη, δεν αλλάζει τίποτε στο αντικείμενο μιας ψυχολογικής λειτουργίας. Είναι ένα μέσο εσωτερικής δραστηριότητας και στοχεύει στην κυριαρχία του εαυτού. Αυτές οι δραστηριότητες είναι τόσο διαφορετικές μεταξύ τους, ώστε η φύση των μέσων που χρησιμοποιούν δεν μπορεί να είναι η ίδια και στις δύο περιπτώσεις’.*

Με άλλα λόγια, αν και υπεραπλουστευμένα, η χρήση των υλικών εργαλείων επηρεάζει πρωταρχικά τα αντικείμενα της ανθρώπινης δραστηριότητας, ενώ η χρήση συμβολικών ή εννοιολογικών εργαλείων επηρεάζει πρωταρχικά τους χρήστες τους.

Όμως η λειτουργία των υλικών εργαλείων και η λειτουργία των συμβολικών και εννοιολογικών εργαλείων, άσχετα με το πόσο αντιθετικές μπορεί να εμφανίζονται, είναι διαλεκτικά αλληλεξαρτώμενες και σε πολλές ανθρώπινες δραστηριότητες τα όριά τους είναι τόσο ευμετάβλητα που γίνονται δυσδιάκριτα.

Ο Μπρούνερ (Bruner 1962, σ. vii) εκφράζοντας αυτό το γεγονός, γράφει ότι *«ο άνθρωπος διαμορφώνεται από τα εργαλεία και τα όργανα που χρησιμοποιεί, και ούτε η σκέψη ούτε το χέρι από μόνα τους σημαίνουν κάτι...και εάν ούτε μόνο το χέρι ούτε μόνο η νόηση κυριαρχεί, τα εργαλεία και τα βοηθήματα που κυριαρχούν αποτελούν τα αναπτυξιακά ρεύματα της εσωτερικευμένης γλώσσας και της εννοιακής σκέψης που μερικές φορές κινούνται παράλληλα και άλλες φορές συγχωνεύονται, επηρεάζοντας η μία την άλλη».*

Αυτός ο λειτουργικός δυϊσμός γίνεται περισσότερο εμφανής, όπως οι δύο πλευρές του ίδιου νομίσματος, στις ανθρώπινες πρακτικές δραστηριότητες που διαμεσολαβούνται από υλικά εργαλεία, τα οποία στηρίζονται κυρίως σε μη γλωσσικά σημειακά συστήματα, όπως για παράδειγμα, διαγράμματα, χάρτες, σχέδια, ζωγραφιές ή πίνακες. Σ' αυτές τις περιπτώσεις η μία ή η άλλη πλευρά είναι περισσότερο εμφανής. εξαρτώμενη από τα χαρακτηριστικά των εργαλείων που χρησιμοποιούνται, τη φύση της δραστηριότητας και τις συνθήκες της ανάπτυξής της (Χασάπης 1999).

Η δεύτερη διάκριση αναφέρεται στο διπλό χαρακτήρα των χρησιμοποιούμενων εργαλείων από τη μια ως μέσων διαμεσολάβησης της ανθρώπινης δραστηριότητας και σκέψης και από την άλλη ως ίδιων αντικειμένων της ανθρώπινης δραστηριότητας, πάνω στα οποία μπορούμε να στοχαστούμε. Χρησιμοποιούμε εννοιολογικά εργαλεία, όπως το Πυθαγόρειο Θεώρημα για τον υπολογισμό ενός μήκους, ή υλικά εργαλεία, όπως ο χάρακας, για τη μέτρηση ενός μήκους. Και στη μια περίπτωση η σχέση ανάμεσα στα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου (τύπος) και στην άλλη περίπτωση το αριθμητικό σύστημα και ο χάρακας δεν είναι αντικείμενα της δραστηριότητάς μας, η οποία είναι η μέτρηση ενός μήκους. Σε κανονικές συνθήκες, η χρήση των εργαλείων γίνεται μέσα από εφαρμογές και κατά κανόνα δεν είναι συνειδητή στο χρήστη. Όμως χρησιμοποιούμε τα ίδια τα εργαλεία ως αντικείμενα της σκέψης μας, όταν εγείρονται προβλήματα σχετικά με τη χρήση ή την αποτελεσματικότητά τους κατά την διεξαγωγή μιας πράξης μέτρησης. Αλλά ακόμη και σε τέτοιες περιπτώσεις που παρουσιάζονται δυσκολίες με τη χρήση των εργαλείων, οι άνθρωποι προσπαθούν και σε πολλές περιπτώσεις καταφέρνουν να αναπτύξουν «νέες» λειτουργίες, οι οποίες ξεπερνούν τα συγκεκριμένα προβλήματα, έτσι ώστε να μπορούν να ολοκληρωθούν οι σχετικές δραστηριότητες. Ως εκ τούτου, τα εργαλεία ως μέσα διαμεσολάβησης και η χρήση τους και τα εργαλεία τα ίδια μπορούν να θεωρηθούν, σε μεγαλύτερη ή μικρότερη έκταση ανάλογα με την περίπτωση, ως αμοιβαία διαμορφούμενα τόσο στο κοινωνικο-πολιτισμικό επίπεδο της ανάπτυξής τους όσο και στο ατομικό επίπεδο οικειοποίησής τους.

Από μια τέτοια οπτική, τα εργαλεία και η χρήση τους θεωρούνται ως ιστορικά αποκρυσταλλωμένη γνώση, τόσο εννοιολογική όσο και διαδικαστική, η οποία αντανακλά την κατάσταση της πράξης σ' έναν πολιτισμό μέχρι τη στιγμή της ανάπτυξης τους, πράξη η οποία με τη σειρά της διαμορφώνεται από τα χρησιμοποιούμενα εργαλεία κ.ο.κ. Η μελέτη των εργαλείων εν χρήσει σε συγκεκριμένες δραστηριότητες, επομένως, είναι το προαπαιτούμενο κάθε συναφούς ερευνητικής προσπάθειας.

Ο διαμεσολαβητικός ρόλος των εργαλείων στη μάθηση και στη χρήση των μαθηματικών

Τα μαθηματικά ως επιστήμη και ως σχολικό μάθημα ενσωματώνουν ένα μεγάλο πλήθος εργαλείων διάφορων μορφών. Από την οπτική που σκιαγραφείται εδώ μπορεί να θεωρηθούν ως εργαλεία:

Θεμελιώδεις έννοιες και θεωρήματα (π.χ. Πυθαγόρειο θεώρημα), μέθοδοι (π.χ. μέθοδοι απόδειξης, αλγόριθμοι), συμβολικά συστήματα (π.χ. δεκαδικό σύστημα αρίθμησης) ή υλικά αντικείμενα (χάρακας, κανόνας, διαβήτη, υπολογιστές). Στα σχολικά μαθηματικά αυτά τα εργαλεία εντάσσονται με ιδιαίτερους τρόπους σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο, το οποίο διαμορφώνεται και από τα μαθηματικά ως επιστημονική πρακτική με ορισμένη θέση σε έναν πολιτισμό και από το ιδιαίτερο σχολικό περιβάλλον αφού μαθαίνονται από μαθητές και χρησιμοποιούνται στις δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων. Οι μαθητές συμμετέχουν στη μαθηματική μαθησιακή δραστηριότητα ιδιοποιούμενοι τη χρήση και χρησιμοποιώντας τα κατάλληλα για μια συγκεκριμένη δραστηριότητα μαθηματικά εργαλεία. Το Πυθαγόρειο θεώρημα, για παράδειγμα, μπορεί να θεωρηθεί ως ένα εργαλείο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε καταστάσεις επίλυσης προβλημάτων (να βρεθεί η απόσταση δύο σημείων) ή ως ένα σημαντικό συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουμε μέσα από μία διαδικασία έρευνας (ποια σχέση έχουν τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου).

Ένας σημαντικός αριθμός εμπειρικών ερευνών επικεντρώνεται στο διαμεσολαβητικό ρόλο των πολιτισμικών εργαλείων στη μάθηση και στη χρήση των μαθηματικών. Από μία επισκόπηση των ερευνών αυτών

αναδεικνύονται ως ερευνητικά πεδία τέσσερις ενδιαφέρουσες όψεις του ζητήματος αυτού (Abreu 2000):

- (1) υλική δομή ή/και λογική οργάνωση των διάφορων μαθηματικών εργαλείων,
- (2) επίδραση συγκεκριμένων εργαλείων στον περιορισμό ή στη διευκόλυνση της εκπλήρωσης ενός μαθηματικού έργου,
- (3) περιορισμοί στη χρήση συγκεκριμένων εργαλείων, οι οποίοι επιβάλλονται, πραγματικά ή δυνητικά, από συγκεκριμένες κοινωνικές πρακτικές
- (4) χρήση 'παλιών' εργαλείων σε ένα νέο πλαίσιο.

Ακολουθεί μία σύντομη παρουσίαση του καθενός από τα ερευνητικά πεδία διευκρινισμένα με επιλεγμένα παραδείγματα.

(1) Υλική δομή ή /και λογική οργάνωση των διάφορων εργαλείων

Η κατανόηση της υλικής δομής ή/και της λογικής οργάνωσης των μαθηματικών εργαλείων είναι μία απαίτηση που συνάγεται από τη θέση ότι η λογική της μαθηματικής σκέψης δεν βρίσκεται στη νόηση, αλλά στους τρόπους με τους οποίους έχουν εφευρεθεί και οργανωθεί κοινωνικο-πολιτισμικά συγκεκριμένα μαθηματικά εργαλεία. Τα χαρακτηριστικά των συγκεκριμένων μαθηματικών εργαλείων, η λογική οργάνωση ή/και η υλική δομή αυτών των χαρακτηριστικών, οι σχέσεις μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών εργαλείων καθώς και η επίδραση των χαρακτηριστικών της οργάνωσης των συγκεκριμένων εργαλείων στις στρατηγικές που χρησιμοποιεί ένα πρόσωπο για να σκεφτεί και να επιλύσει ένα μαθηματικό πρόβλημα τοποθετούνται στα πιο κοινά ζητήματα αυτής της ερευνητικής περιοχής.

Παράδειγμα: Η χρήση διάφορων οργάνων για τη χάραξη κύκλων

Ο Χασάπης (1999) διερεύνησε τη νοητική διαδικασία συγκρότησης της μαθηματικής έννοιας του κύκλου σε συνάρτηση με τη χρήση διάφορων οργάνων για τη χάραξη κύκλων στο πλαίσιο μιας στοχοθετημένης σχεδιαστικής δραστηριότητας.

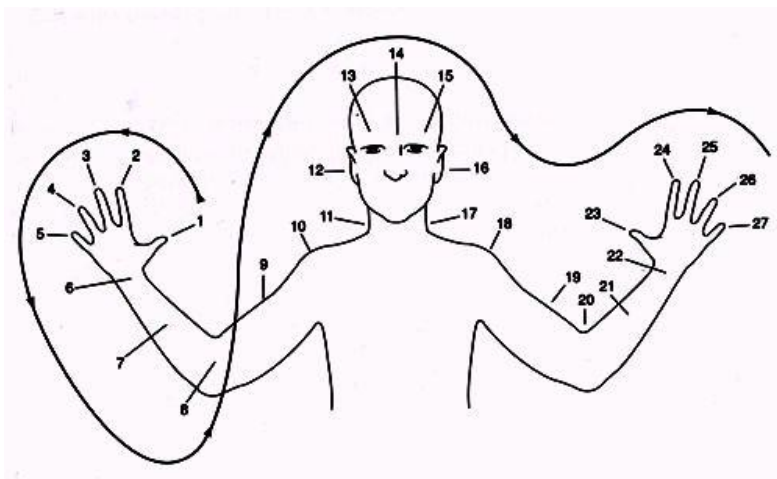
Η διερεύνηση εντοπίστηκε στην υλική δομή διάφορων οργάνων που χρησιμοποιούνται για να χαραχθούν κύκλοι και στη βασική διαφορά του διαβήτη από τα άλλα όργανα χάραξης κύκλων (tracers and templates/στενσιλς). Ο διαβήτης σε αντίθεση με τα άλλα όργανα υποβάλλει εξαιτίας των χαρακτηριστικών της κατασκευής του και των χειρισμών της χρήσης του τα γενεσιουργά στοιχεία της τυπικά οριζόμενης μαθηματικής έννοιας του κύκλου, δηλαδή του κέντρου και της ακτίνας, σε αντίθεση με τα άλλα όργανα από τα οποία προκύπτει μια έννοια του κύκλου βασισμένη στη σταθερή καμπυλότητα μιας τροχιάς.

Από την πειραματική διερεύνηση διαπιστώθηκε, ότι η χρήση του διαβήτη σε αντίθεση με τη χρήση των άλλων οργάνων, η οποία δεν διαφέρει ποιοτικά από τη χάραξη κύκλων με ελεύθερο χέρι, δομεί εντελώς διαφορετικά τη δραστηριότητα χάραξης κύκλων και ενεργοποιεί μια στενά συναρτημένη με τη δραστηριότητα πρακτική σκέψη, η οποία και υποβάλλει αναλυτικές θεωρήσεις ανάλογες με την τυπικά οριζόμενη μαθηματική έννοια του κύκλου συμβάλλοντας θετικά στη συγκρότηση της.

Παράδειγμα: Τα αριθμητικά συστήματα

Οι Σαξ και Πόσνερ (Saxe & Posner 1983) ταξινόμησαν τα αριθμητικά συστήματα των Παπούα της Νέας Γουϊνέας σύμφωνα με τα μέσα που χρησιμοποιούσαν για να σηματοδοτήσουν αριθμητικές σχέσεις (φυσικές ή λεκτικές αναπαραστάσεις) και τη βασική οργανωτική δομή του συστήματος (δομή με ή χωρίς βάση). Στη βάση αυτή ταξινόμησαν περίπου 200 διαφορετικά συστήματα αρίθμησης σε τέσσερις κατηγορίες: Χωρική αναπαράσταση χωρίς βάση, χωρική αναπαράσταση με βάση, μη χωρική αναπαράσταση χωρίς βάση και μη χωρική αναπαράσταση με βάση. Ανάλογα με αριθμητικό σύστημα το οποίο είναι διαθέσιμο και χρησιμοποιείται από ένα άτομο, η πράξη

της αρίθμησης μπορεί να είναι μία δύσκολη ή μία απλή εργασία, ιδιαίτερα δε η μέτρηση με χιλιάδες (Nunes & Bryant, 1996). Ειδικά για τους χρήστες συστημάτων αρίθμησης τα οποία χρησιμοποιούν αντιστοιχίσεις με μέρη του σώματος η αρίθμηση με χιλιάδες μπορεί να είναι μάλλον μια δύσκολη εργασία (Bishop, 1998, Lancy, 1978). Τα συστήματα αυτά βασίζονται σε αντιστοιχίσεις μερών του σώματος με αριθμούς, οι οποίοι κυμαίνονται από 12 ως 68, δεν έχουν μία βάση και είναι πεπερασμένα (Nunes & Bryant, 1996, Saxe & Posner 1983).



Το αριθμητικό σύστημα αντιστοιχίσεις αριθμών και μερών του σώματος των Oksapmin Παπούα της Νέας Γουϊνέας

Επιπρόσθετα, έχει διαπιστωθεί ότι τα γλωσσικά χαρακτηριστικά των αριθμητικών συστημάτων επηρεάζουν δραστικά την ικανότητα ενός προσώπου να κατανοεί την αξιακή θέση και τη δεκαδική δομή, την αρίθμηση καθώς και τις υπολογιστικές δεξιότητες (Miyura 1987, Miyura et al., 1994). Επίκεντρο των ερευνών αυτών αποτέλεσε το δεκαδικό αριθμητικό σύστημα ως εργαλείο αρίθμησης και εκτέλεσης αριθμητικών πράξεων, με βασική ερευνητική στρατηγική την αντιστοίχιση γραμμένων σε κάρτες διψήφιων και τριψήφιων αριθμών με τα στέρεα της αριθμητικής του Dienes (base-10 blocks) και τη

λεκτική τους έκφραση στην Αγγλική, Κινέζικη, Ιαπωνική και Κορεάτικη γλώσσα. Από τα ευρημάτα των ερευνών αυτών διαπιστώνεται, μεταξύ άλλων, ότι οι ασιατικές γλώσσες παρουσιάζουν μια μεγαλύτερη ευελιξία στην έκφραση των αριθμητικών λέξεων η οποία διευκολύνει την από μνήμης εκτέλεση αριθμητικών πράξεων (Miura et al., 1988, σ. 1445).

Παράδειγμα: Στρατηγικές που συνδέονται με την προφορική και γραπτή αριθμητική

Η Νούνες (Nunes 1992a, 1992b) ανέλυσε τις αρχές των προφορικών και γραπτών στρατηγικών κατά την επίλυση διάφορων αριθμητικών προβλημάτων και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι με γενικούς όρους βασίζονται στις ίδιες λογικές ιδιότητες. Για παράδειγμα, η στρατηγική της διάσπασης του αριθμού για τη λύση προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης στηρίζεται και στην προφορική και στη γραπτή αριθμητική στην προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης. Παρατήρησε, όμως, και διαφορές που θα μπορούσαν να επηρεάσουν τη λειτουργική οργάνωση της δραστηριότητας ενός προσώπου κατά την εκτέλεση συγκεκριμένων αριθμητικών υπολογισμών. Για παράδειγμα οι υπολογισμοί στην προφορική αριθμητική ακολουθούν τη σειρά με την οποία μιλούν οι άνθρωποι (από του μεγάλους στους μικρούς αριθμούς), ενώ στη γραπτή αριθμητική ακολουθούν την αντίθετη κατεύθυνση.

Ανακεφαλαιώνοντας, η ανάλυση των ιδιαίτερων τύπων των μαθηματικών εργαλείων στοχεύει να μας παράσχει μια γνώση των επιδράσεων της λογικής οργάνωσης ή/και της υλικής δομής τους στη μαθηματική σκέψη ενός προσώπου. Οι έρευνες αυτού του είδους εντοπίζουν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα συγκεκριμένων εργαλείων στην ενδυνάμωση της μαθηματικής σκέψης για την επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων και τους τρόπους με τους οποίους κάποια εργαλεία, ενώ εμπεριέχουν την ίδια λογική με άλλα, μπορεί να είναι ευκολότερα και στην ιδιοποίηση και στη χρήση τους (Nunes & Bryant, 1996).

(2) Επίδραση συγκεκριμένων εργαλείων στον περιορισμό ή στη διευκόλυνση της εκπλήρωσης ενός μαθηματικού έργου

Υλικά εργαλεία για την εκτέλεση φυσικών ή εννοιολογικών εργασιών ενσωματώνουν στη φυσική δομή τους μία συγκεκριμένη λογική οργάνωση. Ένας χάρακας, για παράδειγμα, ως όργανο μέτρησης του μήκους ενσωματώνει μία τυπική μονάδα μέτρησης μήκους, την επανάληψη της μονάδας αυτής χωρίς κενά και την υποδιαίρεση της μονάδας σε μικρότερες μονάδες. Τα ρολόγια και τα ημερολόγια ενσωματώνουν μονάδες μέτρησης του χρόνου. Οι υπολογιστές περιέχουν πληροφορίες για τους αριθμούς και τις πράξεις αριθμών.

Μπορεί να υποστηριχθεί ότι η δυνατότητα ενός προσώπου να εκτελεί μία μαθηματική εργασία μπορεί να επηρεαστεί από εργαλεία που είναι διαθέσιμα στο περιβάλλον του καθώς και από τις κοινωνικο-πολιτισμικά καθιερωμένες χρήσεις αυτών των εργαλείων.

Παράδειγμα: η χρήση του χάρακα για τη χάραξη ευθειών

Οι Ιοπουρλίδου & Χασάπης (υπό κρίση 2007) διερεύνησαν τους νοητικούς και πρακτικούς χειρισμούς, τους οποίους ανέπτυξαν μαθητές και μαθήτριες της πρώτης σχολικής ηλικίας αξιοποιώντας το χάρακα ως εργαλείο για τη χάραξη ευθειών. Όπως διαπιστώθηκε μια ομάδα παιδιών (κυρίως της Α' τάξης του Δημοτικού σχολείου) χρησιμοποιώντας το χάρακα για την χάραξη μιας ευθείας γραμμής, αναπτύσσει συλλογισμούς οι οποίοι αναπαράγουν κοινωνικά καθιερωμένες πρακτικές χρήσης του χάρακα. Σε μια άλλη, όμως, ομάδα παιδιών (κυρίως Β' τάξης του Δημοτικού σχολείου), διακρίνονται στοιχεία ανάπτυξης μιας εννοιολογικής σκέψης, τα οποία υποκινούνται από τη διαμεσολάβηση του χάρακα στη χάραξη της ευθείας γραμμής. Μέσα από την πρακτική, δηλαδή, δραστηριότητα χρήσης του χάρακα για τη χάραξη ευθειών υποκινείται μια διαδικασία συγκρότησης μιας τυπικής, Ευκλείδειας, έννοιας της ευθείας γραμμής. Την έναρξη μιας τέτοιας διαδικασίας σηματοδοτούν λειτουργίες σύγκρισης, διάκρισης και γενίκευσης του χαρακτηριστικού της ευθειότητας.

Συμπερασματικά διαπιστώνεται ότι η κοινωνική γνώση για το ρόλο του χάρακα, ως πολιτισμικά καθιερωμένου εργαλείου χάραξης ευθειών, κυριαρχεί στη σκέψη των παιδιών, άλλοτε αναστέλλοντας και άλλοτε ενισχύοντας τη συγκρότηση μιας τυπικής, Ευκλείδειας, έννοιας της ευθείας γραμμής.

Παράδειγμα: Η χρήση του ημερολογίου

Ο Σάλιο (Saljo, 1996a) έδειξε ότι η χρήση ενός εργαλείου, όπως το ημερολόγιο, μπορεί να απλοποιήσει ένα έργο υπολογισμού του χρόνου. Η μέτρηση των ημερών που περιλαμβάνονται μεταξύ δύο δοσμένων ημερομηνιών, π.χ. από 24 Μαρτίου ως 18 Ιουνίου, γίνεται εύκολα εάν χρησιμοποιήσουμε ένα ημερολόγιο σε αντίθεση με τους υπολογισμούς με μολύβι και χαρτί. Το λάθος που συνήθως γίνεται οφείλεται στην ερμηνεία του προβλήματος σε ένα μαθηματικό πλαίσιο και στην εκτέλεση της αφαίρεσης 24 (του Μάρτη) από 31 (του Μάρτη). Στην απευθείας αφαίρεση $31-24=7$, ενώ το αποτέλεσμα με την απαρίθμηση των ημερών στο ημερολόγιο από 24 ως 31 είναι 7. Η χρήση ενός ημερολογίου που ενσωματώνει την πληθική δομή του αριθμού βοήθησε τα παιδιά να ξεπεράσουν τη δυσκολία, μετρώντας τις πραγματικές μέρες ενός χρονικού διαστήματος.

Παράδειγμα: Εργασίες μέτρησης μήκους

Οι Νούνες, Λάϊτ και Μέϊζον (Nunes, Light & Mason, 1993) ερεύνησαν την έκταση κατά την οποία η εκτέλεση εργασιών μέτρησης ενός μήκους από παιδιά επηρεάζονταν από τα εργαλεία που χρησιμοποιούσαν. Η χρήση ενός συνηθισμένου χάρακα με διαιρέσεις σε εκατοστά και μισά εκατοστά, δηλαδή ενός εργαλείου που ενσωματώνει μία ορισμένη μαθηματική δομή και η χρήση ενός κορδονιού, δηλαδή ενός μη τυπικού εργαλείου μέτρησης, συγκρίθηκαν και αναλύθηκαν οι διαφορετικές στρατηγικές που εφαρμόστηκαν στις δύο περιπτώσεις.

Το πειραματικό σχέδιο περιλάμβανε μια τηλεφωνική επικοινωνία μεταξύ παιδιών κατά την οποία παίζοντας ένα παιχνίδι έπρεπε να διαπιστώσουν εάν μια ευθεία γραμμή χαραγμένη σε ένα χαρτί που κάθε παιδί είχε μπροστά του είχε μεγαλύτερο, ίσο ή μικρότερο μήκος από την ευθεία που ήταν χαραγμένη το χαρτί του άλλου παιδιού. Για τη μέτρηση του μήκους κάθε ζευγάρι παιδιών χρησιμοποιούσε το ίδιο μέσο, ενώ στο πείραμα χρησιμοποιήθηκαν τρία διαφορετικά μέσα μέτρησης του μήκους: ένα κορδόνι δεδομένου μήκους, ένας χάρακας με υποδιαίρεσεις σε εκατοστά, και ένας σπασμένος χάρακας με υποδιαίρεσεις σε εκατοστά, ο οποίος άρχιζε από τα 4 εκ.

Διαπιστώθηκε ότι τα παιδιά εκτέλεσαν με μεγαλύτερη επιτυχία τις μετρήσεις στην περίπτωση που χρησιμοποίησαν τον τυπικό χάρακα ακόμα και στην περίπτωση του σπασμένου χάρακα και ότι οι δυσκολίες κατά τη χρήση του μη τυπικού οργάνου μέτρησης, του κορδονιού, μπορεί να συνδέονται με την ανάγκη να επανα-εφευρεθούν βασικές λογικές ιδιότητες, όπως η επανάληψη και η υποδιαίρεση, οι οποίες εμπεριέχονται στο τυπικό εργαλείο μέτρησης.

Η διαπίστωση αυτή θέτει το ζήτημα της εισαγωγής των τυπικών εργαλείων μέτρησης στη διδασκαλία των μαθηματικών σε σχέση με τη χρήση μη τυπικών μέσων, όπως το κορδόνι, ο συνδετήρας, το μολύβι κ.α. τα οποία σε μια Πιαζετιανή λογική επιδιώκουν πρώτα να διασφαλίσουν τη διατήρηση και ακολούθως να διδάξουν τη μέτρηση του μήκους.

Συμπερασματικά, αυτές και παρόμοιες μελέτες οι οποίες συγκρίνουν τη χρήση διαφορετικών εργαλείων κατά την εκτέλεση της ίδιας μαθηματικής εργασίας ή συγκρίνουν τη χρήση του ίδιου εργαλείου κατά την εκτέλεση διαφορετικών μαθηματικών εργασιών υποστηρίζουν τη διαπίστωση ότι η απόδοση σε μία εργασία σχετίζεται με τα πολιτιστικά εργαλεία που είναι διαθέσιμα να υποστηρίξουν τη δραστηριότητα του ατόμου κατά την εκτέλεση της εργασίας.

(3) Περιορισμοί στη χρήση συγκεκριμένων εργαλείων, οι οποίοι επιβάλλονται, πραγματικά ή δυνητικά, από συγκεκριμένες κοινωνικές πρακτικές

Οι στρατηγικές για την επίλυση προβλημάτων μπορεί να διαφέρουν ανάλογα με την κοινωνική πρακτική στην οποία εντάσσονται. Η διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο επιβάλλει στα προβλήματα ένα πλαίσιο, το οποίο σε πολλές περιπτώσεις είναι εντελώς διαφορετικό από το πλαίσιο που επιβάλλουν στο ίδιο πρόβλημα οι καταστάσεις της καθημερινής ζωής. Έτσι φαίνεται ότι η επιλογή και η χρήση εργαλείων για την επίλυση ενός προβλήματος εξαρτάται από το ιδιαίτερο κοινωνικό περιβάλλον στο οποίο εντάσσεται και επιλύεται το πρόβλημα. Η διάκριση μεταξύ ‘σχολικών μαθηματικών’ και ‘μαθηματικών του δρόμου’ ή ‘πραγματικών μαθηματικών’ βασίζεται σε μεγάλο βαθμό σε μία τέτοια παραδοχή. Οι έρευνες των Νούνες, Σλίμαν και Κάραχερ (Nunes, Schliemann & Carraher 1993) επισημαίνουν ενδιαφέρουσες διαφορές, αλλά και αξιοσημείωτες ομοιότητες, μεταξύ ‘σχολικών μαθηματικών’ και ‘μαθηματικών του δρόμου’, ορίζοντας ως ‘μαθηματικά του δρόμου’ εκείνες τις πρακτικές επίλυσης προβλημάτων οι οποίες δεν διδάσκονται στο σχολείο (δηλαδή, τις άτυπες μεθόδους επίλυσης προβλημάτων). Βασική ερευνητική τους στρατηγική, η σύγκριση των μεθόδων επίλυσης προβλημάτων που χρησιμοποιούν κατά την ανάπτυξη των δραστηριοτήτων τους μικροπωλητές των δρόμων, αγρότες και άνθρωποι που δεν έχουν φοιτήσει σε σχολείο με τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται για την επίλυση των ίδιων προβλημάτων σε σχολικά περιβάλλοντα ή από ανθρώπους που τα αντιμετωπίζουν με τη σχολική «λογική».

Παράδειγμα: Διαφορετικές στρατηγικές για την επίλυση ενός προβλήματος γραμματοσήμων

Οι Σάλιο και Γουϊνταμ (Salio & Wyndhamm, 1993) διαπίστωσαν ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν διαφορετικές στρατηγικές για να βρουν το ταχυδρομικό κόστος μιας επιστολής ανάλογα με το περιβάλλον στο οποίο εντάσσεται το πρόβλημα. Στο σχολικό περιβάλλον του μαθήματος των μαθηματικών οι περισσότεροι μαθητές επιδόθηκαν σε

αριθμητικούς υπολογισμούς, ενώ στο μάθημα της κοινωνικής και πολιτικής αγωγής οι περισσότεροι μαθητές βρήκαν τη λύση διαβάζοντας τον πίνακα τιμών των Σουηδικών γραμματισμών.

Πολλές έρευνες αντιπαραθέτοντας το πλαίσιο των σχολικών μαθηματικών με μη θεσμοποιημένα κοινωνικά πλαίσια καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι η επιλογή διαφορετικών τύπων εργαλείων και η χρήση διαφορετικών στρατηγικών για την επίλυση ενός προβλήματος καθορίζονται από το νόημα, το οποίο προσλαμβάνει ένα πρόβλημα σε ένα συγκεκριμένο περιβάλλον, σε συνάρτηση με την αξία που αποδίδεται στα εργαλεία και στη συναφή γνώση στο συγκεκριμένο περιβάλλον.

(δ) Η χρήση ‘παλιών’ εργαλείων σε ένα νέο πλαίσιο

Εμπειρικές έρευνες έχουν δείξει ότι σε πολλές περιπτώσεις και υπό ιδιαίτερες συνθήκες οι άνθρωποι προσεγγίζουν μη οικείες καταστάσεις τις οποίες αντιμετωπίζουν σε ένα κοινωνικό πλαίσιο χρησιμοποιώντας εργαλεία τα οποία οικειοποιήθηκαν σε ένα άλλο πλαίσιο και ότι οι εξειδικευμένες σε ένα πλαίσιο (situated) στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων αναπτύσσονται μετά από προοδευτική εξειδίκευση στην πράξη (Scribner 1984).

Παρόλο που τα διαθέσιμα ερευνητικά ευρήματα δεν επιτρέπουν, κατά την άποψή μου, γενικευμένα συμπεράσματα στο ζήτημα αυτό, φαίνεται ότι η χρήση συγκεκριμένων εργαλείων σε συγκεκριμένα πλαίσια είναι επιλεκτική, εξαρτώμενη από τις κοινωνικές αξίες που αποδίδονται στα εργαλεία και στη χρήση τους σε συγκεκριμένες κοινωνικές πρακτικές. Υπό τους όρους αυτούς, ζητήματα ‘μεταφοράς’ (transfer) μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων από ένα πλαίσιο σε άλλο, μπορούν να μελετηθούν κάτω από μία εντελώς διαφορετική, από εκείνη της παραδοσιακής γνωστικής ψυχολογίας, προσέγγιση (Evans 1999).

Μερικές παρατηρήσεις για την ερευνητική μεθοδολογία

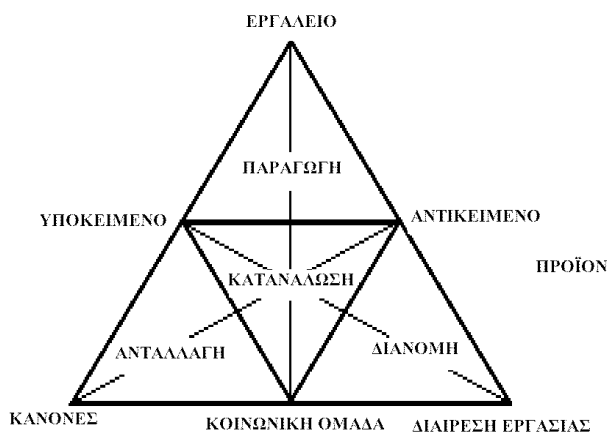
Εκτός από τα ερευνητικά προβλήματα τα οποία προκύπτουν από τη μελέτη του ρόλου που διαδραματίζουν τα μέσα και οι διαδικασίες διαμεσολάβησης στη συγκρότηση και στη χρήση των μαθηματικών, ουσιώδες στοιχείο κάθε σχετικής ερευνητικής προσπάθειας αποτελεί η μεθοδολογία που υιοθετείται ή αναπτύσσεται.

Όπως χαρακτηριστικά έχει διατυπωθεί από τον Βυγκότσκι (Vygotsky, 1978 σ. 65),

‘η αναζήτηση μεθόδων καθίσταται ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα ολόκληρου του εγχειρήματος της κατανόησης των μοναδικά ανθρώπινων μορφών της ψυχολογικής δραστηριότητας. Σ’ αυτή την περίπτωση η μέθοδος είναι ταυτόχρονα προαπαιτούμενο και προϊόν, εργαλείο και αποτέλεσμα της έρευνας’.

Μια επισκόπηση των σχετικών ερευνών υποδεικνύει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά ως περισσότερο ή λιγότερο κοινά, ανάλογα με την περίπτωση, στοιχεία των ερευνητικών τους μεθόδων:

- Ως βασική μονάδα ανάλυσης επιλέγεται μία στοχοθετημένη δραστηριότητα, αφού μία δραστηριότητα που έχει νόημα περιλαμβάνει και συντονίζει σε μία ενότητα πολλές αλληλοσυσχετιζόμενες ενδο-ψυχολογικές καθώς και δια-ψυχολογικές λειτουργίες.



- Οι δραστηριότητες ερευνώνται *in situ* (στη φυσική θέση), δηλαδή στο πλαίσιο στο οποίο συμβαίνουν ‘φυσικά’, αφού είναι όλες οι δραστηριότητες είναι κοινωνικά και πολιτισμικά καθορισμένες.
- Αποδίδεται έμφαση στα πολιτισμικά, θεσμικά και κοινωνικά χαρακτηριστικά του πλαισίου εντός του οποίου αναπτύσσονται αυτές οι δραστηριότητες.
- Η χρονική διάρκεια της έρευνας είναι η αναγκαία για την κατανόηση του αντικειμένου της δραστηριότητας και των ενδεχόμενων μετασχηματισμών του.
- Χρησιμοποιείται μια ποικιλία τεχνικών συλλογής δεδομένων, πολλές φορές παράλληλα όπως για παράδειγμα συνεντεύξεις, παρατηρήσεις και ανάλυση κειμένων.

Εκτός από τα προαναφερθέντα δύο μεθοδολογικά στοιχεία εμπλουτίζουν, εάν χρησιμοποιηθούν κατάλληλα, κάθε έρευνα της επίδρασης πολιτισμικών εργαλείων στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών.

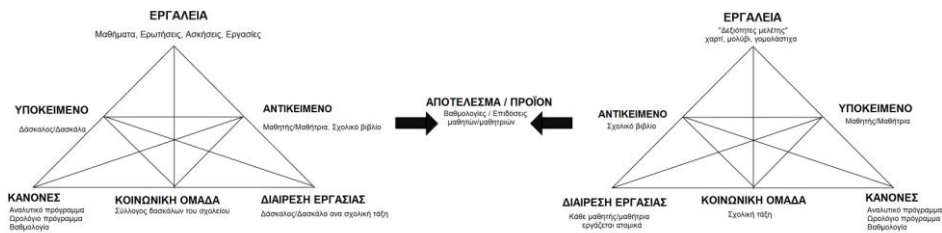
- (1) Υιοθετώντας ως βασική μονάδα ανάλυσης μία κατάλληλα επιλεγμένη, στοχοθετημένη, δραστηριότητα, έχει ιδιαίτερη σημασία η προσέγγιση της, όχι ως μιας κατάστασης στατικής και δεδομένης

ως προς τα ουσιώδη χαρακτηριστικά της, αλλά ως μιας κατάστασης συνεχούς αλλαγής και ανάπτυξης, μιας δηλαδή δυναμικής διαδικασίας.

Αυτό συνεπάγεται και μία αντίστοιχη μεθοδολογική στάση που στοχεύει να συμπεριλάβει στην έρευνα οποιοδήποτε νέο, αναδυόμενο στοιχείο της δραστηριότητας, των δρώντων προσώπων και των χρησιμοποιούμενων εργαλείων.

Για παράδειγμα, ερευνώντας τους τρόπους με τους οποίους χρησιμοποιείται ένα μαθηματικό εργαλείο (ένας τύπος, μια τεχνική, ένα υλικό αντικείμενο) σε μια εργασία επίλυσης ενός προβλήματος, πρέπει να μελετηθεί η χρήση του σε ένα ικανό χρονικό διάστημα, γιατί αυτή ακριβώς η χρήση επιτρέπει στο χρήστη να επεξεργαστεί και πιθανόν να διαφοροποιήσει το συγκεκριμένο εργαλείο.

- (2) Η μελέτη της επιλεγμένης ως μονάδας ανάλυσης δραστηριότητας είναι πληρέστερη εάν η συγκεκριμένη δραστηριότητα θεωρηθεί σε αλληλεπίδραση με άλλες δραστηριότητες άμεσα συσχετιζόμενες με αυτή, εξαρτώμενες ή επηρεαζόμενες από αυτή.



Για παράδειγμα, ερευνώντας τη μάθηση μέσα σε μια τάξη μαθηματικών, η δραστηριότητα του δασκάλου συσχετίζεται, εξαρτάται και επηρεάζει τη δραστηριότητα των μαθητών και η ανάλυση της μιας ή της άλλης δραστηριότητας θα είναι πληρέστερη εάν αναλυθεί παράλληλα με την αλληλεπίδραση των δύο δραστηριοτήτων.

Οι δύο δραστηριότητες είναι διακριτές, αλλά άμεσα αλληλοσυσχετιζόμενες, γιατί πρώτα απ' όλα είναι διαφορετικό το αντικείμενο του μαθήματος για το δάσκαλο και τους μαθητές και

επομένως είναι διαφορετικές και οι οπτικές τους (προθέσεις, διαθέσεις, καθήκοντα κλπ). Μπορούμε, για παράδειγμα, να υποθέσουμε ότι στόχος των μαθητών είναι η αντιμετώπιση των απαιτήσεων των εξετάσεων και η συμμετοχή τους στο μάθημα των μαθηματικών είναι ένα μέσο για την επιτυχία του, ενώ για το δάσκαλο αντικείμενο της δραστηριότητάς είναι η διδασκαλία των μαθηματικών και μέσα για την ανάπτυξη της δραστηριότητας αυτής είναι τα συναφή διαθέσιμα μέσα (βιβλία, τεχνικές διδασκαλίας, ασκήσεις κλπ).

Χωρίς αμφιβολία σε κάθε έρευνα για το ρόλο των πολιτισμικών εργαλείων στη μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών μπορούν να εντοπιστούν και να τεθούν σε συζήτηση πολλά μεθοδολογικά ζητήματα, όπως για παράδειγμα ζητήματα που σχετίζονται με την κοινωνική κατασκευή των ερευνητικών δεδομένων.

Μια αναλυτική, όμως, επισκόπηση τέτοιων ζητημάτων είναι έξω από τους στόχους αυτής της παρουσίασης, που ήταν η εισαγωγή, αν και επιλεκτική, σε βασικές όψεις αυτού του ερευνητικού πεδίου.

Βιβλιογραφικές αναφορές

- ABREU, G. DE (2000), Relationships between macro and micro socio-cultural contexts: implications for the study of interactions in the mathematics classroom, *Educational Studies in Mathematics* 41, pp. 1-29.
- BATESON, G. (1972). Steps to an ecology of mind: Collected essays in anthropology, psychiatry, evolution and epistemology (San Francisco, Chandler Publishing Co).
- BISHOP, A. (1988), *Mathematical Enculturation: A Cultural Perspective on Mathematics Education* (Dordrecht, Kluwer).
- BRUNER, J. (1962), Introduction. In L. S. Vygotsky, *Thought and language* (Cambridge, MA., MIT Press).
- CHASSAPIS, D. (1999), The mediation of tools in the development of formal mathematical concepts: The compass and the circle as an example, *Educational Studies in Mathematics*, 37, pp. 275-293.

- COLE, M. & WERTSCH, J. W. (n.d). Beyond the individual-social antimony in discussions of Piaget and Vygotsky. Vygotsky Centennial Project: Massey University's Virtual Faculty, <http://www.massey.ac.nz/~ALock/virtual/colevyg.htm> (2003, July 2).
- EVANS, J. (1999), Building bridges: Reflections on the problem of transfer of learning in mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 39, pp. 23-44.
- JOHN-STEINER, V. & MAHN, H. (1996). Sociocultural approaches to learning and development: A Vygotskian framework, *Educational Psychologist*, 31, pp. 191-206.
- KOZULIN, A. (1990). *Vygotsky's psychology: A biography of ideas* (New York, Harvester Wheatsheaf).
- LANCY, D.F. (1978), The indigenous mathematics project, *Papua New Guinea Journal of Education*, 14 (special issue).
- LURIA, A.R. (1929), The problem of the cultural development of the child. *Journal of Genetic Psychology*, 35, 493-506.
- MATUSOV, E. (1998), When solo activity is not privileged: Participation and internalization models of development, *Human Development*, 41, 326-349.
- MIURA, I.T. (1987), Mathematics achievement as a function of language, *Journal of Educational Psychology*, 79, pp. 79-82.
- MIURA, I. T., Kim, C. C., Chang, C-M., & Okamoto, Y. (1988). Effect of language characteristics on children's cognitive representation of number: Cross-national comparisons. *Child Development*, 59, 1445-1450.
- MIURA, I. T., Okamoto, Y., Kim, C. C., Chang, C-M., Steere, M., & Fayol, M. (1994). Comparisons of children's cognitive representation of number: China, France, Japan, Korea, Sweden, and the United States. *International Journal of Behavioral Development*, 77, 401-411.
- NUNES, T. (1992a), Cognitive invariants and cultural variation in mathematical concepts, *International Journal of Behavioral Development* 15(4), pp. 433-453.

- NUNES, T. (1992b), Ethnomathematics and everyday cognition, in D.A. GROUWS (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (New York, MacMillan), pp. 557–574.
- NUNES, T. & BRYANT, P. (1996), *Children doing mathematics* (Oxford, Blackwell).
- NUNES, T., LIGHT, P. & MASON, J. (1993), Tools for thought: the measurement of length and area', *Learning and Instruction* 3, pp. 39–54.
- NUNES, T., SCHLIEMANN, A. & CARRAHER, D. (1993), *Street mathematics and school mathematics* (Cambridge, Cambridge University Press).
- ROGOFF, B. (1990), *Apprenticeship in Thinking: Cognitive Development in Social Contexts* (New York, Oxford University Press).
- ROGOFF, B. and LAVE, J. (eds.), (1984), *Everyday Cognition: Its Development in Social Context* (Cambridge, Mass., Harvard University Press).
- SÄLJÖ, R. (1996), Mental and physical artifacts in cognitive practices, in P. REIMANN & H. SPADA (eds.), *Learning in Human and Machines* (Oxford, Pergamon), pp. 83–96.
- SÄLJÖ, R. & WYNDHAMN, J. (1993), 'Solving everyday problems in the formal setting. An empirical study of the school as context for thought in S. CHAIKLIN & J. LAVE (eds.), *Understanding Practice: Perspectives on Activity and Context* (Cambridge, Cambridge University Press), pp. 327–342.
- SAXE, G.B. and POSNER, J. (1983), The development of numerical cognition: cross-cultural perspectives in H.P. GINSBURG (ed.), *The Development of Mathematical Thinking* (London, Academic Press), pp. 291–317.
- SCRIBNER, S. (1984), Cognitive studies of work, *The Quarterly Newsletter of the Laboratory of Human Cognition* Vol. 6 (San Diego, University of California), pp. 1–50.
- VYGOTSKY, L.S. (1978), *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes* (Cambridge, MA., Harvard University Press).
- VYGOTSKY, L. S. (1981). The instrumental method in psychology (originally written in 1930) in J. V. WERTSCH, (Ed. & Trans.), *The*

- concept of activity in soviet psychology (Armonk, N.Y., M. E. Sharpe), pp.134-143.
- VYGOTSKY, L. S. (1987), Thinking and speech in R.W. RIEBER & A.S. CARTON (eds.), The Collected Works of L. S. Vygotsky, Volume I: Problems of General Psychology (New York, Plenum), pp. 38–285.
- WERTSCH, J. V. (1985). Vygotsky and the social formation of mind (Cambridge, MA., Harvard University Press).
- WERTSCH, J. V. (1991). Voices of the mind: A sociocultural approach to mediated action (Cambridge, MA., Harvard University Press).
- WERTSCH, J. V., DEL RIO, P. & ALVAREZ, A. (1995) Sociocultural studies: history, action and mediation, in WERTSCH, J. V., DEL RIO, P. & ALVAREZ, A. (Eds.), Sociocultural studies of mind (New York, Cambridge University Press), pp. 1-34.

Η διαθεματική προσέγγιση της διδασκαλίας των μαθηματικών επιστημολογικά ζητήματα

Περί διαθεματικότητας οχόλια εισαγωγικά

Η συζήτηση για την διαθεματική οργάνωση των αναλυτικών προγραμμάτων εισάγεται στην Ελλάδα σχετικά πρόσφατα με την θεσμοθέτηση του Διαθεματικού Ενιαίου Πλαισίου Προγράμματος Σπουδών (ΥΠΕΠΘ – Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2002) και συνοδεύεται εξ αρχής, όχι μόνο από μια εννοιολογική ασάφεια, αλλά και από μια, κατά την εκτίμηση μου, θεωρητική οπισθοδρόμηση σε σχέση με τις συναφείς εξελίξεις στο ζήτημα αυτό, τα τελευταία τουλάχιστον χρόνια.. Στα ενημερωτικά φυλλάδια που έχει κυκλοφορήσει το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2001), καθώς και σε σχετικά άρθρα στελεχών του, τα οποία τεκμηριώνουν θεωρητικά τις εισαχθείσες καινοτομίες στα προγράμματα σπουδών (ενδεικτικά, Ματσαγγούρας, 2002), ο όρος διαθεματικότητα, φορτίζεται με μια παιδοκεντρική διάσταση και ταυτίζεται με την ευέλικτη ζώνη, μια δεύτερη πρόταση του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου, η οποία κι αυτή με τη σειρά της παραπέμπει στα σχέδια εργασίας, τα οποία ανάγονται εντέλει στην παλαιότατη μέθοδο project (Frey1986). Αυτή η διπλή αναγωγή παραποιεί την έννοια της διαθεματικότητας και τροφοδοτεί απλά μια σύγχυση επί του θέματος.

Η μέθοδος project, τα σχέδια εργασίας δηλαδή, αποτελούν εκπαιδευτική πρόταση του αμερικάνικου πραγματισμού της δεκαετίας του 1920 η οποία εμφανίζεται με τα έργα κυρίως των John Dewey και William Kilpatrick (Kilpatrick 1919). Την ίδια εποχή διατυπώνονται παρόμοιες απόψεις και συγγενή διδακτικά μοντέλα, όπως το Σχολείο Εργασίας, του Kerschensteiner και των καθ' υμάς προοδευτικών του μεσο-πολέμου, το πολυτεχνικό σχολείο στη Σοβιετική Ένωση κλπ. Σύμφωνα με τις πραγματιστικές αντιλήψεις, το διδακτέο θα πρέπει να συντονίζεται με τη ζωή και να παρέχει πρακτικές λύσεις σε θέματα της καθημερινότητας.

Για το λόγο αυτό ιδιαίτερη σημασία στην ολοκλήρωση ενός project δίνονταν παραδοσιακά στο «παραχθέν προϊόν», που έπρεπε να έχει κατά κύριο λόγο χρηστική αξία.. Αυτή η θεώρηση, όμως, δεν προσεγγίζει παρά επιφανειακά το ζήτημα της διαθεματικότητας, όπως τίθεται σήμερα.

Οι κριτικές που διατυπώνονται για το Ενιαίο Πρόγραμμα και ειδικότερα για την διαθεματικότητα μονοπωλούνται, δυστυχώς για τη συζήτηση, από αντιδράσεις εκπαιδευτικών κινήσεων και παραγόντων διατυπωμένες συχνά με αριστερό λόγο, ο οποίος χαρακτηρίζεται ως προς το περιεχόμενο του από αντιφατικότητα και απλουστευτικές αναγωγές του εγχειρήματος της διαθεματικότητας σε πολιτικά σχέδια για την οικονομία και την κοινωνία.

Μια επί της ουσίας, επομένως, συζήτηση για την διαθεματικότητα προαπαιτεί καταρχήν μια εννοιολογική διευκρίνιση της, η οποία προϋποθέτει την οριοθέτηση της από την έννοια της διεπιστημονικότητας, από την οποία προέρχεται και στην οποία εντέλει ανάγεται.

Η διεπιστημονικότητα αναφέρεται στην αλληλεπίδραση δύο ή περισσότερων επιστημονικών κλάδων ή γνωστικών περιοχών (disciplines), η οποία μπορεί να περιορίζεται σε μια απλή ανταλλαγή εμπειρικών δεδομένων, εννοιών ή τεχνικών ή να επεκτείνεται σε μια από κοινού σύνθεση νέων εννοιών, μεθόδων, τεχνικών, ερευνητικών εγχειρημάτων ή εκπαιδευτικών σχεδίων. Το σημαντικό είναι ότι η διεπιστημονικότητα συγκροτείται επί, και για την επίλυση, συγκεκριμένων προβλημάτων ή για την ερμηνεία συγκεκριμένων φαινομένων. Στις περισσότερες περιπτώσεις, επομένως έχει χαρακτήρα πρωτίστως εργαλειακό και κυρίως - γεγονός με ιδιαίτερη σημασία - προϋποθέτει ως βάση τις επιστήμες. Υπογραμμίζεται, αυτή η βάση επί των επιστημών γιατί η διεπιστημονικότητα, κατά τη γνώμη μου, οφείλει να διακρίνεται από τις μετα-μοντέρνες προσεγγίσεις οι οποίες δεν αποδίδουν κεντρικό ρόλο στις επιστήμες κατά την, και για την, παραγωγή της γνώσης. Άρα και σε κάθε περίπτωση, το ζητούμενο είναι ποιες ερωτήσεις διατυπώνονται και επιδιώκεται η απάντησή τους μέσα από διεπιστημονικές προσεγγίσεις. Το είδος των ερωτήσεων είναι, επομένως, αυτό που ορίζει την διεπιστημονικότητα, την μορφή και την έκταση της.

Άρα η διεπιστημονικότητα δεν είναι μια ερευνητική διαδικασία ή το αποτέλεσμα μιας ερευνητικής διαδικασίας αλλά το ορίζον στοιχείο, η αφηγηρία, μιας διερευνητικής προσέγγισης (Lattuca 2001).

Η διαθεματικότητα, η οποία εδώ ενδιαφέρει, αναφέρεται στην εκπαίδευση και αντιστοιχεί άμεσα ή έμμεσα στη διεπιστημονικότητα, της οποίας τα χαρακτηριστικά αποτυπώνει και μετασχηματίζει.. Διακρίνεται, όμως, σε μια ποικιλία μορφών ανάλογα με τον βαθμό και την μορφή σύνδεσης των διακριμένων και οργανωμένων σε σχολικά μαθήματα γνώσεων (ενδεικτικά, Klein 1990, 1994, Kockelmans 1979, Lattuca 2001, Newell 1998). Οι μορφές αυτές, οι οποίες με διάφορους τίτλους εμφανίζονται στη διεθνή βιβλιογραφία συνοψίζονται από την Lattuca 2001, σ. 81) στους ακόλουθους τέσσαρες τύπους.

Ο πρώτος τύπος διαθεματικότητας αποκαλείται «εμπλουτισμένη διαθεματικότητα» (informed disciplinarity) και εμφανίζεται όταν το περιεχόμενο ενός σχολικού μαθήματος εμπλουτίζεται με στοιχεία άλλων μαθημάτων, π.χ. τα μαθηματικά με στοιχεία φυσικής. Όπως στο επίπεδο των επιστημών τα ερωτήματα που διατυπώνονται στο εσωτερικό μιας επιστήμης απαιτούν για την απάντησή τους εμπειρικά δεδομένα, έννοιες ή τεχνικές άλλων επιστημών.

Ο δεύτερος τύπος αποκαλείται «συνθετική διαθεματικότητα» (synthetic interdisciplinarity) και εμφανίζεται όταν το περιεχόμενο ενός μαθήματος κατασκευάζεται από τη σύνθεση του περιεχομένου άλλων μαθημάτων, π.χ. αγωγή υγείας. Όπως στο επίπεδο των επιστημών, ερωτήματα τα οποία διατυπώνονται έξω από μια επιστήμη απαιτούν για την απάντησή τους τη σύνθεση εμπειρικών δεδομένων, εννοιών ή τεχνικών δύο ή περισσότερων άλλων επιστημών, π.χ.. περιβαλλοντικά προβλήματα.

Ένας τρίτος τύπος διαθεματικότητας αποκαλείται «υπερ-θεματικότητα» (transdisciplinarity) και εμφανίζεται όταν δεν υφίσταται καν η έννοια του μαθήματος, αλλά αντικαθίσταται από μια σειρά διδακτικών δραστηριοτήτων με επίκεντρο ένα σύνολο προβλημάτων ή ένα φαινόμενο ή μια εμπειρία, για την προσέγγιση των οποίων απαιτείται ο συνδυασμός εννοιών, μεθόδων και τεχνικών, οι οποίες προέρχονται από διάφορες γνωστικές περιοχές και μαθήματα. Στο επίπεδο των

επιστημών η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί στην προηγούμενη προσέγγιση με τη διαφορά ότι δεν απαιτείται υποχρεωτικά η βάση άλλων επιστημών, όπως αυτό που αποκαλείται εθνο-επιστήμη, εθνο-μαθηματικά, γυναικείες σπουδές κλπ.

Τέλος, ένας τέταρτος τύπος διαθεματικότητας αποκαλείται από την Lattuca (2001) «εννοιολογική διαθεματικότητα» (conceptual interdisciplinarity) και εμφανίζεται όταν οργανώνονται εκπαιδευτικές δραστηριότητες χωρίς σταθερά καθορισμένο περιεχόμενο και χωρίς υποχρεωτική βάση ή αναφορά σε καθιερωμένες επιστημονικές περιοχές.

Οι παραπάνω τύποι, όπως και οι αντίστοιχες μορφές, διαθεματικότητας αποτελούν προτάσεις και αναλύσεις σε θεωρητικό επίπεδο, ενώ η ανάπτυξη και η εφαρμογή ενός πλήρως διαθεματικού προγράμματος σπουδών παραμένει αιτούμενο, παρά το γεγονός ότι σε προγράμματα της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης πολλών χωρών έχουν εισαχθεί στοιχεία διαθεματικότητας του περιεχομένου τους.

Το αίτημα ενός της ανάπτυξης ενός πλήρως διαθεματικού προγράμματος σπουδών και η αντικατάσταση των “γνωστικών αντικειμένων” με “θεματικές ενότητες” τέθηκε στη δεκαετία του 1970 από τους ριζοσπάστες θεωρητικούς της κοινωνιολογίας του αναλυτικού προγράμματος (Young 1971) και στην προβληματική αυτή ο Bernstein (1971, 1989) αναλύει κριτικά την ιδεολογική λογική και την κοινωνική λειτουργία της «ταξινόμησης» και «περικύραξης» της σχολικής γνώσης, και ο Bourdieu (1971α, 1971β) την οργάνωση και τον έλεγχο της επιστημονικής γνώσης και των γνωστικών αντικειμένων. Το ίδιο αίτημα επανέρχεται στην επικαιρότητα δεκαπέντε χρόνια αργότερα με την δημοσιοποίηση της Έκθεσης του Κολεγίου της Γαλλίας (1988), την οποία εκπόνησε το 1984 ο Bourdieu και ομάδα Γάλλων διανοουμένων. Στην έκθεση αυτή προβάλλεται η αναγκαιότητα να αποτελέσει η ενότητα της επιστήμης και η πολλαπλότητα των πολιτισμών οργανωτική αρχή της σχολικής γνώσης, η οποία στη βάση αυτή θα πρέπει να αντιμετωπίζεται ως ενιαίο σύνολο και όχι ως κατακερματισμένα γνωστικά αντικείμενα, τα οποία συνυπάρχουν στο ίδιο αναλυτικό πρόγραμμα (βλέπε ενδεικτικά, Μπουρντιέ και Γκρό, 1998, Μπουρντιέ, 2004). Το αίτημα της διαθεματικότητας του

σχολικού προγράμματος παραμένει και διεκδικείται από διαφορετικές οπτικές, για διαφορετικούς λόγους και με διαφορετικά, κατά περίπτωση, μέσα.

Επιστημολογικά ζητήματα στη διαθεματική προσέγγιση της διδασκαλίας των μαθηματικών

Κάθε επιστήμη έχει ένα αντικείμενο και κάθε επιστήμη αποτελείται από το αντικείμενο της, από το σύστημα των εννοιών της και από τις μεθόδους επικύρωσης της αλήθειας των προτάσεων της. Και τα τρία αυτά στοιχεία που συνιστούν μια επιστήμη αλληλοπροσδιορίζονται και καθένα προϋποθέτει την ύπαρξη των άλλων (Μπαλτάς, 1990). Οι μαθηματικές έννοιες, όμως, έχουν ένα ιδιαίτερο χαρακτήρα, ο οποίος και τις διαφοροποιεί από κάθε άλλο τύπο επιστημονικών εννοιών: δεν αντανακλούν και επομένως δεν αναφέρονται σε χαρακτηριστικά ή ιδιότητες, που ενυπάρχουν στα στοιχεία της αισθητής πραγματικότητας. Χωρίς, επομένως, αισθητό αντίκρισμα δεν είναι και εμπειρικά επαληθεύσιμες. Από την πρωταρχική έννοια του «αριθμού» μέχρι ειδικές έννοιες, όπως για παράδειγμα η έννοια της «πιθανότητας», οι μαθηματικές έννοιες αναφέρονται σε άλλες έννοιες δια των οποίων και κατά περίπτωση επαληθεύονται εμπειρικά (Χασάπης, 2000).

Ο επιστημολογικά ιδιαίτερος αυτός χαρακτήρας των μαθηματικών εννοιών θέτει μια σειρά προβλημάτων στην ανάπτυξη της διαθεματικής διδασκαλίας τους στο σχολείο και επιβάλλει μια προσέγγιση εντελώς διαφορετική από εκείνη των άλλων γνωστικών αντικειμένων, η οποία σε κάθε περίπτωση αποτελεί αντικείμενο διερεύνησης και προβληματισμού.

Με την ιδιαιτερότητα των εννοιών τους, τα μαθηματικά φαίνεται να μην παρέχουν καμία γνώση του πραγματικού, φυσικού και κοινωνικού, κόσμου, του κόσμου που υπάρχει έξω και ανεξάρτητα από τα μαθηματικά, αφού οι αναφορές τους σ' αυτό δεν είναι ούτε άμεσες ούτε αδιαμεσολάβητες. Για παράδειγμα, μια δευτεροβάθμια εξίσωση από μόνη της δεν μας λέει τίποτα για κανένα φαινόμενο του κόσμου. Μας λέει, εάν και μόνο εάν, διαμεσολαβηθεί από τη φυσική ή άλλη επιστήμη, δια της οποίας οι όροι της θα αποκτήσουν ένα

συγκεκριμένο νόημα. Τα ποικίλα θεωρητικά συστήματα, δηλαδή, των μαθηματικών (έννοιες-όροι, σχέσεις-αξιώματα, θεωρήματα μιας μαθηματικής θεωρίας, π.χ. άλγεβρας, γεωμετρίας, συναρτησιακής ανάλυσης) και το αντικείμενο τους φαίνεται να συμπίπτουν και κάθε αναφορά τους σε μια πραγματικότητα έξω και ανεξάρτητη από αυτά είναι αδύνατη χωρίς τη διαμεσολάβηση άλλων επιστημών, οι οποίες *χρησιμοποιούν* τις μαθηματικές θεωρίες. Από την οπτική αυτή και παρεμπιπτόντως, απαιτείται να ξανα-σκεφτούμε την έννοια «εφαρμογές» των μαθηματικών. Αντίστοιχα, οι μέθοδοι μελέτης των επιστημονικών αντικειμένων των μαθηματικών και ελέγχου της εγκυρότητας των αποτελεσμάτων τους (απόδειξη έναντι πειράματος) είναι για τους ίδιους λόγους προβληματικές. Στα μαθηματικά το κύριο μέσο *διαπίστωσης* (αληθές-ψευδές) των «γεγονότων» που παράγουν οι μαθηματικές έννοιες, όπως και το κύριο μέσο *επικύρωσης* των ίδιων «γεγονότων» (θεωρητικοποίησης και ένταξης τους στο πεδίο του μαθηματικού) ταυτίζονται στην ίδια διαδικασία, την «απόδειξη». Η απόδειξη, δηλαδή, επιτελεί στα μαθηματικά ταυτόχρονα δύο διαδικασίες: και διαπιστώνει ένα μαθηματικό γεγονός και το αφομοιώνει θεωρητικά. Αυτή η ταύτιση των όλων μέσων θεωρητικής παραγωγής σε ένα συμβαίνει μόνο στα μαθηματικά, ενώ αντίθετα, στις φυσικές επιστήμες τα γεγονότα είναι υλικά και τα εντοπίζει η *παρατήρηση*, τα διαπιστώνει το *πείραμα*, και τα αφομοιώνει θεωρητικά, ως νόμους, αρχές, κλπ. η αντίστοιχη *θεωρία*.

Από την οπτική τίθεται και ζήτημα του επιστημονικού καθεστώτος των μαθηματικών. Αφού δεν παρέχουν καμία γνώση του πραγματικού, τι είδους γνώση είναι η μαθηματική γνώση? Αυτό είναι το διαρκές πρόβλημα της φιλοσοφίας των μαθηματικών από τον Πλάτωνα και εξής. Ανεξάρτητα από τις απαντήσεις για τον χαρακτήρα και το καθεστώς των μαθηματικών εννοιών (από την ύπαρξη τους στον κόσμο των Πλατωνικών Ιδεών ή σε έναν Ποπεριανό Τρίτο Κόσμο θεωρητικών κατασκευών ή σε μια Βιντγκενσεϊανή γλωσσική κατασκευή) μπορούμε να θεωρήσουμε - υιοθετώντας μια ανάλυση που έχει διατυπώσει ο Raymond (1978) και αναπτύξει ο Μπαλτάς (2003)- ότι κάθε μαθηματικό κείμενο (τα μαθηματικά συνήθως είναι υπαρκτά ως γραπτό κείμενο) συγκροτείται ουσιαστικά ως σύνθεση δύο μερών: το *μαθηματικό* και το *μαθηματικοποιημένο* μέρος. Σύμφωνα με την ανάλυση αυτή, το *μαθηματικό* αποτελεί τη θεωρία και το

μαθηματικοποιημένο αποτελεί το αντικείμενο που η θεωρία ιδιοποιείται, γνωρίζει, ερευνά, καταχρηστικά «εφαρμοζεται». Δηλαδή, το *μαθηματικοποιημένο* αποτελεί το αντικείμενο μιας «πραγματικότητας» για τη θεωρία. Το *μαθηματικό* και το *μαθηματικοποιημένο* είναι λειτουργίες, δεν είναι οριστικά και αμετάκλητα ορισμένα χαρακτηριστικά ενός μαθηματικού κειμένου. Ορίζονται σε σχέση με το κάθε φορά δοσμένο μαθηματικό κείμενο και δεν επιτελούν απαραίτητα την ίδια λειτουργία και σε άλλα μαθηματικά κείμενα. Δηλαδή, αυτό το οποίο συνιστά ένα μαθηματικοποιημένο αντικείμενο σε σχέση με ένα δοσμένο μαθηματικό κείμενο μπορεί να συνιστά ένα μαθηματικό εννοιολογικό σύστημα σε σχέση με ένα άλλο, και αντιστρόφως. Γι' αυτό και στο επίπεδο της διδασκαλίας των μαθηματικών μοιάζει πολλές φορές ακατανόητο για τους μαθητές το «παιχνίδι» θεωρίας – ασκήσεων – εφαρμογών.

Σε αντίθεση με τις άλλες επιστήμες, όμως, τη φυσική για παράδειγμα όπου με τη *θεωρία* της βαρύτητας διερευνούμε και γνωρίζουμε νοητικά τη συμπεριφορά συγκεκριμένων υλικών αντικειμένων, π.χ. πτώση (αντικείμενο γνώσης από τη θεωρία) στα μαθηματικά το μαθηματικοποιημένο είναι ήδη θεωρητικό και έχει θεωρητικοποιηθεί από κάποιον κλάδο των μαθηματικών είτε στο εσωτερικό είτε έξω από τον κλάδο αυτόν, αυτόνομα και χωρίς αναφορές σε άλλους κλάδους των μαθηματικών. Το *μαθηματικό* μπορεί να είναι μια θεωρία που συγκροτήθηκε αποκλειστικά ως θεωρία, μπορεί όμως και να είναι ένα *μαθηματικοποιημένο* αντικείμενο που τώρα λειτουργεί ως *μαθηματικό*, δηλ. ως θεωρία. Και η ανάπτυξη των μαθηματικών είναι αποτέλεσμα και αυτόνομης ανάπτυξης και διαπλοκής των μαθηματικών με τα μαθηματικοποιημένα πεδία τους.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η γνωστή και στα σχολικά μαθηματικά αναλυτική γεωμετρία, η οποία είναι αποτέλεσμα ιδιοποίησης από την άλγεβρα (*θεωρία - μαθηματικό*) της ευκλείδειας γεωμετρίας (*αντικείμενο της θεωρίας- μαθηματικοποιημένο* και εντέλει θεωρητικοποιημένο). Δεν είναι «εφαρμογή» της άλγεβρας, όπως είναι οι εξισώσεις της θερμοδυναμικής, οι οποίες είναι μεν εφαρμογή της, αλλά με τη διαμεσολάβηση της φυσικής.

Στην αναλυτική γεωμετρία η άλγεβρα και η ευκλείδεια γεωμετρία εμφανίζονται ως μια ενιαία σύνθεση, στην οποία δεν ξεχωρίζει σαφώς ποιο μέρος της είναι άλγεβρα ποιο μέρος της είναι ευκλείδεια γεωμετρία. Μια γεωμετρική έννοια, όπως η έννοια του «κύκλου» γίνεται μαθηματικό αντικείμενο αφού αποσπαστεί από μια πρακτική, π.χ. την καλαθοπλεκτική ή την οικοδομική και αποκτήσει μια εννοιολογική αυτονομία, η οποία δεν εξαρτάται από, ούτε συναρτάται με καμία πρακτική της αναφορά. Αυτή η νοητική διαδικασία καθιστά τον κύκλο ένα εννοιολογικό «αντικείμενο» αφ' εαυτού, το οποίο έχει ορισμένες «ιδιότητες» και το οποίο παράγει «γεγονότα». Ένα τέτοιο «γεγονός» είναι ότι σε κάθε κύκλο «η επίκεντρη γωνία είναι διπλάσια της εγγεγραμμένης στο ίδιο τόξο του κύκλου». Ως εννοιολογικό «αντικείμενο» τώρα η έννοια του «κύκλου», ως έννοια δηλαδή αυτόνομα ορισμένη και ανεξάρτητη από κάθε πρακτική και τους κανόνες της, υπόκειται σε μια εννοιολογική επεξεργασία και ταυτόχρονα αξιολόγηση, αφού όλα τα «γεγονότα» που παράγει απαιτούν μια εννοιολογική οργάνωση σε ένα θεωρητικό σύστημα, αυτό που ονομάστηκε εδώ «μαθηματικό». Τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, ιδρυτικό κείμενο της ευκλείδειας γεωμετρίας είναι το πρώτο, ιστορικά, θεωρητικό σύστημα, το οποίο οργάνωσε όλες τις έννοιες της γεωμετρίας και όλα τα «γεγονότα» που οι έννοιες αυτές παράγουν. Αντίστοιχα τα *Αριθμητικά* του Διόφαντου για τις έννοιες του αριθμού.

Η αντιστοιχιστική, τώρα, των μαθηματικών με την πραγματικότητα, υλική και κοινωνική, γίνεται με δυο παράλληλους και ανεξάρτητους μεταξύ τους μονόδρομους. Οι μαθηματικές έννοιες προέρχονται από τις κοινωνικές πρακτικές και τα αποτελέσματά τους που αναπτύσσονται την πραγματικότητα, απογυμνώνονται από τις αναφορές μέσα από νοητικές επεξεργασίες και εντάσσονται σε ένα εννοιολογικό σύστημα, μια μαθηματική θεωρία. Από την άλλη μια μαθηματική θεωρία εφοδιάζεται με αναφορές σε ένα φαινόμενο ή αντικείμενο της πραγματικότητας (εφαρμόζεται σε ή χρησιμοποιείται) από μια άλλη επιστήμη και μέσα από μια διαμεσολάβηση αναφέρεται στην πραγματικότητα, με όρους γενικούς και διαφορετικούς από εκείνους τους συγκεκριμένους της προέλευσης της (Χασάπης, 1986).

Με δεδομένη λοιπόν μια ουσιαστικά *αυτό-αναφορικότητα* των μαθηματικών και μια αναγκαία *διαμεσολάβηση* της αναφοράς τους στην πραγματικότητα, τι μπορεί να σημαίνει διαθεματικότητα στη διδασκαλία των μαθηματικών;

Περί διαθεματικότητας στη διδασκαλία των μαθηματικών

Με βάση όσα προαναφέρθηκαν, η διαθεματικότητα στη διδασκαλία των μαθηματικών δεν μπορεί παρά να νοηθεί με τους όρους των μαθηματικών. Υπό τον όρο αυτόν και υιοθετώντας μια θεωρητική πρόταση της Nikitina (2006) μπορεί, κατ' αρχήν, να αναπτυχθεί σε τρεις άξονες:

- 1. Διερεύνηση του ιστορικού κοινωνικού και πολιτισμικού πλαισίου προέλευσης και εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών και τεχνικών,*
- 2. Μαθηματικοποίηση φαινομένων και*
- 3. Επίλυση μη τυπικά μαθηματικών προβλημάτων.*

Οι άξονες αυτοί αντιστοιχούν, σε γενικές γραμμές, στην διάκριση των συστημάτων γνώσης που έχει διατυπώσει ο Habermas (1971) ανθρωπιστικές επιστήμες, βασισμένες στην ερμηνευτική παράδοση της γνώσης, σε εμπειρικές-αναλυτικές επιστήμες, βασισμένες στην υποθετικο-παραγωγική λογική και στη διατύπωση νόμων και σε κοινωνικές επιστήμες ή επιστήμες της "κοινωνικής δράσης, οι οποίες περιλαμβάνουν την οικονομία, την κοινωνιολογία και την πολιτική επιστήμη.

Αναλυτικά:

- 1. Διερεύνηση του ιστορικού κοινωνικού και πολιτισμικού πλαισίου προέλευσης και εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών και τεχνικών,*

Η διερεύνηση του ιστορικού κοινωνικού και πολιτισμικού πλαισίου προέλευσης και εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών και τεχνικών μπορεί να συνδυαστεί με θέματα ιστορίας, λογοτεχνίας, πολιτισμού, κοινωνιολογίας, οικονομίας και γενικότερα θέματα των ανθρωπιστικών επιστημών. Η επιλογή του πλαισίου συναρτάται με τις μαθηματικές έννοιες, και τη σχολική τάξη. Για παράδειγμα, σε ένα ιστορικό πλαίσιο μπορεί χρησιμοποιείται ο ιστορικός χρόνος ή

το ιστορικό γεγονός για τη διαθεματική πλοκή της διδασκαλίας των μαθηματικών, ενώ αυτό που ενδιαφέρει είναι η διαπλοκή, και όχι απλά η εισαγωγή, της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών. Σε ένα φιλοσοφικό πλαίσιο, το οποίο αναδεικνύει τις κοινωνικές και πολιτισμικές διαστάσεις της εξέλιξης των μαθηματικών μπορεί διερευνώνται οι θεωρήσεις των φαινομένων ή της εξήγησης του κόσμου (Πυθαγόρειο, Χριστιανικό, Ισλαμικό). Σε ένα πολιτισμικό πλαίσιο οι τέχνες και η αρχιτεκτονική μιας εποχής, ενός πολιτισμού ή μιας γεωγραφικής ενότητας.

Η πλαισίωση των μαθηματικών εννοιών και τεχνικών σε μια διαθεματική λογική μπορεί να αναδείξει τις διαφορετικές προσεγγίσεις των επιστημών, όχι ως προς το περιεχόμενο τους, αλλά ως προς τον τρόπο οργάνωσης των εννοιών και των μεθόδων τους και έτσι να καταστήσει κατανοητή τη μαθηματική δραστηριότητα (τι σημαίνει «κάνω μαθηματικά»). Αναδεικνύοντας τις διαφορετικές παραδοχές των επιστημών και τις διαφορετικές προσεγγίσεις τους στο ίδιο φαινόμενο γίνεται κατανοητή η συμπληρωματικότητα των επιστημών στην οικοδόμηση της κατανοησιμότητας του κόσμου.

Από την οπτική της διδασκαλίας των μαθηματικών, το κύριο πλεονέκτημα μιας τέτοιου τύπου διαθεματικότητας είναι ο εύκολος συνδυασμός επιστημονικών περιοχών και σχολικών μαθημάτων, αλλά και ένα ουσιαστικό μειονέκτημα είναι ότι ο συνδυασμός αυτός επιτυγχάνεται εύκολα σε ένα ιστορικό, κοινωνικό ή πολιτισμικό και πολύ δύσκολα σε ένα εννοιολογικό επίπεδο.

2. Μαθηματικοποίηση φαινομένων

Η μαθηματικοποίηση φαινομένων, φυσικών ή κοινωνικών, προϋποθέτει την επιλογή εννοιών οι οποίες είναι σημαντικές σε δύο ή περισσότερες επιστήμες. π.χ. μεταβολή (μαθηματικά, φυσική, χημεία, βιολογία), περιοδικότητα, αναλογία κλπ. και αναδεικνύει τις ομοιότητες και τις διαφορές των διαφορετικών επιστημών στην προσέγγιση φαινομένων με κοινά χαρακτηριστικά, αλλά - και αυτό είναι ίσως σημαντικότερο - τα διαφορετικά συμβολικά συστήματα και «λεξιλόγια» των επιστημών. Σε αντίθεση με τη λογική της ανάδειξης ενός πλαισίου, η οποία αναδεικνύει τους ιστορικούς,

φιλοσοφικούς και κοινωνικούς καθορισμούς των επιστημών και των μαθηματικών, η μαθηματοποίηση φαινομένων επιδιώκει να αναδείξει την διαρκεί προσπάθεια κατανόησης και ερμηνείας των φαινομένων της φύσης.

Από την οπτική της διδασκαλίας των μαθηματικών, σε μια τέτοιου τύπου διαθεματικότητα είναι εφικτός ο εννοιολογικός συνδυασμός επιστημονικών περιοχών και σχολικών μαθημάτων, ο οποίος όμως κατά κανόνα περιορίζεται μεταξύ εννοιών και συμβολικών συστημάτων.

3. Επίλυση μη τυπικά μαθηματικών προβλημάτων

Στην περίπτωση αυτή επιλέγονται έννοιες, μέθοδοι και τεχνικές δύο ή περισσότερων επιστημών για τη θεώρηση προβλημάτων της φύσης, της τεχνολογίας ή της κοινωνίας, τα οποία πολλές φορές είναι και ασαφώς διατυπωμένα. Παράδειγμα, η μελέτη και η επίλυση προβλημάτων ατμοσφαιρικής ρύπανσης, μόλυνσης του περιβάλλοντος ή φυσικών καταστροφών (σεισμοί ή πλημμύρες) περιλαμβάνουν έννοιες, μεθόδους και τεχνικές της χημείας (σύσταση του αέρα και των ρυπαντών), της φυσικής (πίεση, θερμοκρασία, μεταβολές των αερίων), των μαθηματικών (μετρήσεις, γραφήματα, εξισώσεις), της μελέτης της χρήσης των αριθμών στα διάφορα συμβολικά συστήματα (ποσότητες, δείκτες, συντελεστές).

Από την οπτική της διδασκαλίας των μαθηματικών, το κύριο πλεονέκτημα μιας τέτοιου τύπου διαθεματικότητας είναι ότι υποκινεί το ενδιαφέρον εξαιτίας της αμεσότητας και της οικειότητας των προβλημάτων, ενώ είναι σχετικά εύκολος ένας επιστημονικών περιοχών και σχολικών μαθημάτων. Σημαντικά, όμως, μειονεκτήματα, όπως η προαπαίτηση της γνώσης των αναγκαιών για την επίλυση ενός προβλήματος εννοιών και τεχνικών ή ο περιορισμός σε συγκεκριμένες γνώσεις και τεχνικές εφαρμογής των μαθηματικών (με τα περί εφαρμογής των μαθηματικών προαναφερθέντα), καθιστούν εύκολη μεν αλλά περιορισμένης αποτελεσματικότητας την ανάπτυξη μιας διαθεματικής διδασκαλίας των μαθηματικών αυτού του τύπου.

Οι τρεις αξόνες ανάπτυξης της διαθεματικότητας που προαναφέρθηκαν αποτελούν διαφορετικές επιλογές, αφού υπηρετούν διαφορετικούς στόχους, προβάλλουν διαφορετικές εκδοχές της διαθεματικότητας, αναδεικνύουν διαφορετικές όψεις των επιστημονικών περιοχών και των σχολικών μαθημάτων και βέβαια τονίζουν διαφορετικά στοιχεία των μαθηματικών.

Περί διαθεματικότητας σχολία καταληκτικά

Σε κάθε περίπτωση η ταξινόμηση των μορφών γνώσης είναι πολύ πολυδιάστατη και πολυποικίλη και η αντιστοίχηση τους σε κατηγορίες όπως ανθρωπιστικές, επιστημονικές και κοινωνικές είναι σαφώς απλοποιητική. Όπως έχει πολλαπλές μορφές και όψεις η ανάδειξη των κοινωνικών, πολιτιστικών και ιστορικών πλαισίων προέλευσης και ανάπτυξης των μαθηματικών εννοιών και τεχνικών, η μαθηματοποίηση των φαινομένων και η επίλυση προβλημάτων. Και στην περίπτωση της διαθεματικότητας στη διδασκαλία των μαθηματικών κάθε επιλογή ανταποκρίνεται και σε διαφορετικούς στόχους της διδασκαλίας (ερμηνεία, εξήγηση ή η χρήση των μαθηματικών εννοιών και τεχνικών), όπως και κάθε επιλογή υπόκειται στις μαθηματικές έννοιες και τεχνικές που θα διδάξουμε ή που έχουμε διδάξει.

Το ιδανικό είναι πάντοτε ο παραγωγικός συνδυασμός τους, ο οποίος, όμως, παραμένει αιτούμενος και θεωρητικά και πρακτικά .

Βιβλιογραφικές αναφορές

- Bernstein, B. (1971), On the classification and framing of educational knowledge. Στο M. Young (ed.), Knowledge and Control, London : Collier-MacMillan, σ. 47-69.
- Bernstein, B. (1989) Παιδαγωγικοί Κώδικες και Κοινωνικός Έλεγχος, Εισαγωγή, μετάφραση, σημειώσεις: Ιωσήφ Σολομών, Αθήνα, Αλεξάνδρεια.
- Bourdieu P. (1971a), Intellectual field and creative project. Στο M. Young (ed.), Knowledge and Control, London : Collier-MacMillan, σ. 161-188 (αρχική έκδοση στα Γαλλικά 1968).

- Bourdieu P. (1971β), Systems of education and systems of thought. Στο M. Young (ed.), Knowledge and Control, London : Collier-MacMillan, σ. 189-207 (αρχική έκδοση στα Γαλλικά 1967).
- Έκθεση του Κολεγίου της Γαλλίας (1998), Προτάσεις για την εκπαίδευση του μέλλοντος, επιμέλεια, μετάφραση Ν. Παναγιωτόπουλος & Σ. Τάνταρος, *Σύγχρονα Θέματα* , 66, 135-151.
- Frey K., (1986), Η μέθοδος Project. Μια μορφή συλλογικής εργασίας στο σχολείο ως θεωρία και πράξη, Θεσσαλονίκη, Αφοί Κυριακίδη.
- Habermas, J. (1971), Knowledge and human interests. Boston: Beacon Press και Γνώση και διαφέρον στο Κείμενα γνωσιοθεωρίας και κοινωνικής κριτικής, Αθήνα, Πλέθρον, 1990, 21-43.
- Kilpatrick T. (1919) The Project Method, New York, Teachers College Press.
- Klein, J. T. (1990), Interdisciplinarity: history, theory, and practice, Detroit MI, Wayne State University Press.
- Klein, J. T. & Doty, W. (1994) (eds.), Interdisciplinary Studies Today. San Francisco CA, Jossey-Bass.
- Kockelmans, J. J. (1979), Interdisciplinarity and higher education, University Park, Pennsylvania State University Press.
- Lattuca, L. R. (2001), Creating interdisciplinarity: interdisciplinary research and teaching among college and university faculty. Nashville TN, Vanderbilt University Press.
- Ματσαγγούρας, Η.Γ. (2002), Ευέλικτη ζώνη διαθεματικών προσεγγίσεων. Μια εκπαιδευτική καινοτομία που αλλάζει το σχολείο, *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, 6, 15-30.
- Μπαλτάς, Α. (1990), Επιστημολογικά, Για την ιστορία μιας επιστήμης, Εκδόσεις Ο Πολίτης, Αθήνα.
- Μπαλτάς, Α. (2003), Το επιστημονικό καθεστώς των μαθηματικών ή συνιστούν τα μαθηματικά «επιστημονική ήπειρο»; Στο Δημ. Χασάπης (επιμ.) Το επιχείρημα και η απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά, Πρακτικά 2^{ου} Δηήμερου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, ΠΤΔΕ, Θεσσαλονίκη, σ. 69-80.
- Μπουρντιέ Π. (2004), Για την εκπαίδευση του μέλλοντος. Οι προτάσεις του Πιέρ Μπουρντιέ, Επιστημονική επιμέλεια και πρόλογος Παναγιωτόπουλος Ν., Αθήνα, Νήσος.

- Μπουρντιέ Π. και Γκρο Φρ. (1998), Αρχές για να σκεφτούμε τα περιεχόμενα της εκπαίδευσης, *Ο Πολίτης Δεκαπενθήμερος*, 48, , σ. 18-22.
- Newell, W.H. (1998) (Ed.) *Interdisciplinarity: essays from the literature*. New York, College Board.
- Nikitina S. (2006), Three strategies for interdisciplinary teaching: contextualizing, conceptualizing, and problem-solving, *Journal of Curriculum Studies*, 38 (3), 251 - 271
- Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2001) Οδηγίες για την πιλοτική εφαρμογή των προγραμμάτων της Ευέλικτης Ζώνης στην υποχρεωτική Εκπαίδευση, ΥΠΕΠΘ, Αθήνα
- Raymond, P. (1978), *L' Histoire et les Sciences*, Paris: Maspero, 61-71. Ελληνική μετάφραση Α. Μπαλιάς, Για την επιστημολογία και την ιστορία των μαθηματικών, *Ο Πολίτης*, 30, 1979, 36-39.
- Young, M. (1971), An approach to the study of curricula as socially organized knowledge. Στο M. Young (ed.), *Knowledge and Control*, London : Collier-MacMillan, σ. 19-46.
- ΥΠΕΠΘ – Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2002) Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης. Αθήνα.
- Χασάπης Δ. (1986), Η οργάνωση του περιεχομένου ενός αναλυτικού προγράμματος μαθηματικών και οι υπονοούμενες αντιλήψεις για τη γνώση , την επιστήμη και την εκπαίδευση, *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, 28 , 28-35.
- Χασάπης, Δ. (2000), Διδακτική βασικών μαθηματικών εννοιών. Αριθμοί και αριθμητικές πράξεις, Εκδόσεις Μεταίχιμο, Αθήνα, σ. 13-44

Η μάθηση της γεωμετρίας ως οικειοποίηση της χρήσης γεωμετρικών οργάνων:

Δύο μαθησιακά επεισόδια και μια διδακτική πρόταση

Τα όργανα σχεδίασης στη γεωμετρία

Η γεωμετρία ως επιστημονική δραστηριότητα, αλλά και ως πεδίο γνώσης, έχει ιστορικά θεμελιωθεί στη χρήση δύο εμβληματικών οργάνων: του διαβήτη για τη σχεδίαση τόξων και κύκλων και του κανόνα για την χάραξη ευθειών. Τα 'Στοιχεία' του Ευκλείδη, κείμενο το οποίο θεμελίωσε τη γεωμετρία ως μαθηματική πρακτική, θεωρητικοποιεί τη χρήση των δύο αυτών οργάνων σχεδίασης για τον ορισμό γεωμετρικών εννοιών και για την επίλυση των προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών, παρά το γεγονός ότι ποτέ δεν αναφέρεται ρητά στη χρήση του κανόνα και του διαβήτη.

Στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, μετά τη διατύπωση των ορισμών παρατίθενται τα αιτήματα (postulati) (Σταμάτη, 1975, σ. 41):

«Αίτημα 1. Ζητείται να γίνει παραδεκτό ότι από οποιοδήποτε σημείο στο οποιοδήποτε σημείο άγεται ευθεία γραμμή (Ηιτήσθω από παντός σημείου εις παν σημειον ευθειαν γραμμην αγαγειν).

Αίτημα 2. Και ότι πεπερασμένη ευθεία προεκτείνεται σε ευθεία κατά τρόπο συνεχή (Και πεπερασμένην ευθειαν κατά το συνεχές επ' ευθείας εκβαλειν).

Αίτημα 3. Και ότι με οποιοδήποτε κέντρο και οποιαδήποτε διάστημα γράφεται κύκλος (Και παντί κέντρω και διαστήματι κύκλον γράφεσθαι).».

Στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, «ακόμα και εάν τα αιτήματα παραπέμπουν σε μια πρακτική χρήση των οργάνων σχεδίασης, δεν υπάρχει αμφιβολία ότι η πρόθεση είναι θεωρητική Ακόμα περισσότερο, το πρόβλημα δεν είναι ποτέ η εύρεση μιας προσεγγιστικής λύσης η οποία θα μπορούσε να είναι χρήσιμη σε πρακτικές εφαρμογές, αλλά ζητείται μια θεωρητική λύση με ευθείες γραμμές και κύκλους», όπως υπογραμμίζει η Bartolini Bussi (1998, σ. 738).

Ο κανόνας και ο διαβήτη, καθώς και οι κανόνες χρήσης τους, αντιστοιχούν και θεωρητικοποιούνται στα αξιώματα και στα θεωρήματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας και για κάθε δεδομένη γεωμετρική κατασκευή υπάρχει ένα θεώρημα στο οποίο διατυπώνονται οι σχέσεις ανάμεσα στα στοιχεία των γεωμετρικών σχημάτων, τα οποία κατασκευάζονται με τη χρήση των δύο αυτών οργάνων (Mariotti et. al, 1997). Με άλλα λόγια, κάθε γεωμετρική κατασκευή η οποία περιλαμβάνεται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη επικυρώνεται από ένα αντίστοιχο θεώρημα, παρά το γεγονός ότι αυτή η αντιστοίχιση γεωμετρικής κατασκευής και θεωρήματος είναι σύνθετη και σε πολλές περιπτώσεις είναι έμμεση, άρα δυσδιάκριτη (Heath, 1956, σ. 124-31).

Παράλληλα, τα περίφημα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα της ελληνικής αρχαιότητας, όπως για παράδειγμα ο διπλασιασμός του κύβου ή η τριχοτόμηση της γωνίας, δεν αποδεικνύουν απλώς τη θεωρητική σπουδαιότητα των γεωμετρικών κατασκευών (Henry, 1993), αλλά οδήγησαν - μέσα από την προσπάθεια επίλυσης τους - στην επινόηση νέων οργάνων χάραξης ειδικού τύπου ευθειών, όπως για παράδειγμα, του «μεσόλαβου» ενός οργάνου χάραξης δύο μέσων αναλόγων ευθειών το οποίο αποδίδεται στον Ερατοσθένη ή οργάνων για τη χάραξη καμπυλών διαφόρων τύπων και μορφών, όπως η «κογχοειδής» του Νικομήδη.

Αυτά τα όργανα χάραξης ευθειών και καμπυλών, παρότι δεν έγιναν αποδεκτά από την Ευκλείδεια γεωμετρία ως θεωρητικά εργαλεία, χρησιμοποιήθηκαν ευρύτατα ως μέσα για την επίλυση πρακτικών προβλημάτων. Παράδειγμα, η χρήση της κογχοειδούς καμπύλης επιτρέπει την εύρεση δύο μέσων αναλόγων ευθειών μεταξύ δύο ευθειών μήκους A και λA και έτσι την κατασκευή ενός κύβου του οποίου η πλευρά έχει τον οποιοδήποτε δεδομένο λόγο λ με την πλευρά δοθέντα κύβου.

Ο ριζικός μετασχηματισμός της γεωμετρίας κατά τον 17^ο αιώνα και το πέρασμα από τις κλασικές στατικές γεωμετρικές κατασκευές με τον περιορισμό της χρήσης μόνο κανόνα και διαβήτη στις διερευνήσεις γεωμετρικών τόπων, οι οποίοι προκύπτουν από μηχανικές κινήσεις ανέδειξε με ιδιαίτερη έμφαση, αλλά σε διαφορετικό βέβαια πλαίσιο, το ζήτημα των γεωμετρικών οργάνων χάραξης ευθειών και καμπυλών.

Η «Γεωμετρία» του Καρτέσιου (1954), ιδρυτικό έργο της νέας γεωμετρίας, επικεντρώνεται αποκλειστικά στη μελέτη μηχανικών κινήσεων και στην αναπαράστασή τους με αλγεβρικές εξισώσεις, ενώ στη μετέπειτα εξέλιξη της η γεωμετρία επιδιώκει να περιλάβει τη μελέτη οιασδήποτε καμπύλης μπορεί να σχεδιαστεί με συστήματα αρθρωτών ράβδων, γνωστών στην εποχή τους ως «διασυνδέσεις» (linkages), ουσιαστικά δηλαδή, όλων των αλγεβρικών καμπυλών (Lenoir, 1979).

Εκείνη την εποχή κατασκευάστηκαν συστήματα αρθρωτών ράβδων, όχι μόνο για την χάραξη διαφόρων τύπων καμπυλών, αλλά και για την πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση μηκών ευθυγράμμων τμημάτων (Artobolevskii, 1964), ενώ ο Καρτέσιος επινόησε και χρησιμοποίησε σε πολλές περιπτώσεις στη «Γεωμετρία» του ένα σύστημα για την εύρεση οιασδήποτε δύναμης ενός ακεραίου αριθμού (Dennis, 1997, Dennis & Confrey, 1997).

Στους αιώνες που ακολούθησαν επινοήθηκαν και υιοθετήθηκαν για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων διάφορες συσκευές σχεδίασης, οι οποίες ταξινομούνται σε δύο κύριες κατηγορίες: συσκευές χάραξης καμπυλών και παντογράφοι.

Οι συσκευές χάραξης καμπυλών είναι συστήματα αρθρωτών, ξύλινων ή και μεταλλικών, ράβδων, τα οποία αναγκάζουν ένα σημείο ή ένα ευθύγραμμο τμήμα να κινηθεί σε δεδομένη τροχιά. Παραδείγματα αποτελούν οι συσκευές σχεδίασης ευθειών (Peaucellier), κωνικών τομών (Cavalieri και De l' Hospital), ελλείψεων (De l' Hospital και van Schooten) και διαφόρων τύπων καμπυλών, όπως η στροφοειδής, η κισσοειδής ή η κογχοειδής καμπύλη.

Οι παντογράφοι είναι, επίσης, συστήματα αρθρωτών, ξύλινων ή και μεταλλικών, ράβδων, τα οποία σχεδιάζουν γεωμετρικούς μετασχηματισμούς δεδομένων σχημάτων, όπως για παράδειγμα χάραξη συμμετρικών ως προς σημείο ή ως προς άξονα σχημάτων, περιστροφή σχημάτων, χάραξη όμοιων σχημάτων ή προβολές σχημάτων σε δεδομένα επίπεδα.

Έχουν καταγραφεί ιστορικά οι παντογράφοι του Sylvester για την χάραξη ομοίων σχημάτων, ο μηχανισμός του Delaunay για αφινικούς ή ομοπαράλληλους μετασχηματισμούς σχημάτων, ο παντογράφος του Scheiner για ομοιοθεσίες σχημάτων, ο προοπτικογράφος του Lambert και άλλοι, που φιλοξενούνται σήμερα σε μουσεία επιστημών.

Η σημερινή ανάπτυξη λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας για υπολογιστές, όπως είναι το Cabri ή το Geometer's Sketchpad επανέφερε στο προσκήνιο το ζήτημα των γεωμετρικών οργάνων σχεδίασης, από εντελώς νέα, βέβαια, σύγχρονη οπτική.

Στη βάση αυτή η διδασκαλία και η μάθηση της στοιχειώδους γεωμετρίας, τουλάχιστον σε σχολικό επίπεδο, μπορεί να ιδωθεί ως οικειοποίηση της χρήσης των γεωμετρικών οργάνων σχεδίασης και μέτρησης, οργάνων παραδοσιακών, όπως ο κανόνας, ο γνώμονας ή ο διαβήτη και σύγχρονων, όπως τα προγράμματα δυναμικής γεωμετρίας σε περιβάλλοντα υπολογιστών.

Πέρα από τη συγκεκριμένη θεώρηση της γεωμετρίας, η άποψη αυτή τεκμηριώνεται στην κοινωνικο-πολιτισμική θεωρία μάθησης του Βυγκότσκι και των επιγόνων του, στην οποία αποδίδεται ιδιαίτερη βαρύτητα στη διαμεσολάβηση της ανθρώπινης νοητικής δραστηριότητας από τα πολιτισμικά ανεπτυγμένα, τεχνικά και συμβολικά, εργαλεία (Vygotsky, 1978). Τα εργαλεία αυτά, τα οποία έχουν αναπτυχθεί κατά τη διάρκεια της ιστορικής εξέλιξης του ανθρώπινου πολιτισμού, αποτελούν αναπόσπαστο στοιχείο της ανθρώπινης πρακτικής και νοητικής δραστηριότητας, την οποία διαμεσολαβούν ως «φορείς» γνώσεων και κοινωνικο-πολιτισμικών πρακτικών (Wertsch, 1994).

Τα τεχνικά και συμβολικά εργαλεία όμως, όχι μόνο διαμεσολαβούν, αλλά ταυτόχρονα οργανώνουν και διαμορφώνουν την ανθρώπινη νοητική και πρακτική δραστηριότητα, υποκινώντας διαφορετικές κατά περίπτωση νοητικές διεργασίες, οι οποίες ρυθμίζουν και τελικά μετασχηματίζουν κάθε συγκεκριμένη δραστηριότητα. Εργαλεία διαμεσολάβησης, νοητικές διεργασίες και πρακτικές δραστηριότητες διαπλέκονται και αλληλοδιαμορφώνονται σε μια διαλεκτική αλληλεξάρτηση.

Άρα, η χρήση διαφορετικών εργαλείων για την επίλυση ενός προβλήματος ή γενικότερα για τη ανάπτυξη μιας δραστηριότητας δομεί με διαφορετικούς τρόπους τις απαιτούμενες πρακτικές διαδικασίες και υποκινεί διαφορετικές νοητικές διεργασίες και τρόπους σκέψης, άρα υποβάλλει και διαφορετικές προσεγγίσεις στις απαιτούμενες γνώσεις και τεχνικές (Chassapis, 1998).

Οι έννοιες και οι μέθοδοι χάραξης παράλληλων ευθειών

Στο 1^ο βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδη (Σταμάτη, 1957) ορίζεται ότι:

«Παράλληλες ευθείες είναι εκείνες, που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και προεκτεινόμενες επ' άπειρο και από τα δύο μέρη δεν συναντάει η μία την άλλη από κανένα μέρος (Παράλληλοι εισιν ευθεις, αιτινες εν τω αυτω επιπέδω ούσαι καί εκβαλλόμεναι εἰς άπειρον εφ' εκάτερα τὰ μέρη επί μηδετέρα συμπιπτουσιν αλλήλας) (ορισμός 23), ενώ το περίφημο 5^ο αίτημα ζητάει να γίνει παραδεκτό ότι:

«Και αν ευθεία που συναντάει δύο ευθείες, σχηματίζει δύο εσωτερικές και προς το ίδιο μέρος γωνίες που έχουν άθροισμα μικρότερο των δύο ορθών, τότε οι δύο ευθείες προεκτεινόμενες επ' άπειρο συναντιούνται σε κείνα τα μέρη τους, όπου βρίσκονται οι μικρότερες των δύο ορθών γωνίες (Καί εάν εἰς δύο ευθείας ευθεία εμπίπτουσα τὰς εντός καί επί τὰ αυτά μέρη γωνίας δύο ορθών ελάσσουας ποιη, εκβαλλομένης τὰς δύο ευθείας επ' άπειρου συμπιπτειν, εφ' ἄ μέρη εισίν αἱ των δύο ορθαί ελάσσουες)».

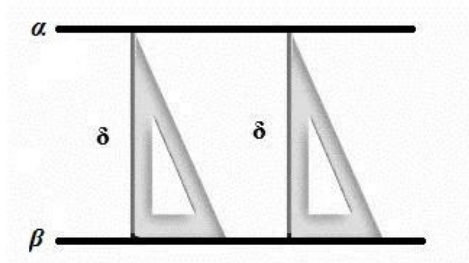
Με βάση την παραδοχή αυτή αναπτύσσεται στα «Στοιχεία» μια θεωρία των παραλλήλων ευθειών, η οποία συγκροτείται από προτάσεις για (α) την ισότητα των γωνιών οι οποίες σχηματίζονται από μια ευθεία η οποία τέμνει δύο άλλες ευθείες γραμμές (προτάσεις 27 – 29), (β) ευθείες οι οποίες είναι παράλληλες στην ίδια ευθεία γραμμή (πρόταση 30) και (γ) τη χάραξη ευθείας η οποία διέρχεται από δοθέν σημείο και είναι παράλληλη σε δοθείσα ευθεία (πρόταση 31).

Αυτό σημαίνει, ότι η Ευκλείδεια γεωμετρία περιλαμβάνει τρεις ισοδύναμους, αλλά πάντως διαφορετικούς, ορισμούς και άρα τρεις διαφορετικές εκδοχές της έννοιας των παραλλήλων ευθειών:

- (α) παράλληλες είναι δύο ευθείες, που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, των οποίων όλα τα σημεία ισαπέχουν (σύμφωνα με την πρόταση 31),
- (β) παράλληλες είναι δύο ευθείες, που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, δηλαδή δεν τέμνονται όσο και αν προεκταθούν προς οιαδήποτε κατεύθυνση (σύμφωνα με την πρόταση 23) και
- (γ) παράλληλες είναι δύο ευθείες, που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και οι οποίες τεμνόμενες από μια τρίτη ευθεία σχηματίζουν τις εντός-εκτός εναλλάξ ή τις εντός-εκτός και προς το ίδιο μέρος γωνίες ίσες (σύμφωνα με το αίτημα 5 και τις προτάσεις 27-29.)

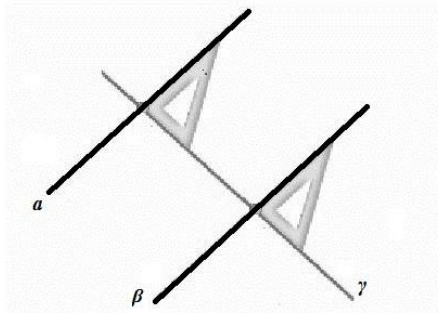
Οι τρεις αυτοί διαφορετικοί ορισμοί προσανατολίζουν και σε τρεις διαφορετικές μεθόδους χάραξης παραλλήλων ευθειών.

Ορισμός 1: Χαράζω μια ευθεία a έτσι ώστε να έχει παντού την ίδια απόσταση δ από μια ευθεία β (σχ. 1)



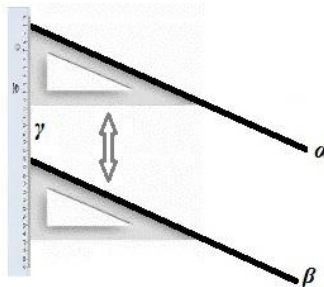
σχ. 1: Οι ευθείες a, β έχουν παντού τη ίδια απόσταση δ

Ορισμός 2: Χαράζω δύο ευθείες a και β κάθετες σε διαφορετικά σημεία της ίδιας ευθείας γ (σχ. 2).



σχ. 2: Οι ευθείες a, β είναι κάθετες στην ευθεία γ

Ορισμός 3: Χαράζω δύο ευθείες a και β έτσι ώστε να σχηματίζουν με μια τρίτη ευθεία γ τις εντός-εκτός και προς το ίδιο μέρος ή τις εντός-εκτός εναλλάξ γωνίες ίσες (σχ. 3).



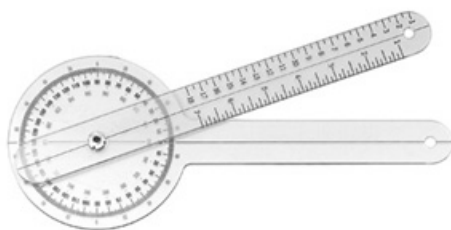
σχ. 3: Οι ευθείες a, β σχηματίζουν με την ευθεία γ τις εντός-εκτός και προς το ίδιο μέρος γωνίες ίσες

Δύο μαθησιακά επεισόδια

Στη συνέχεια παρουσιάζονται και σχολιάζονται συνοπτικά δύο μαθησιακά επεισόδια από μια σειρά διδακτικών πειραμάτων, τα οποία διερευνούν την επίδραση της χρήσης γεωμετρικών οργάνων στην οικειοποίηση επιλεγμένων εννοιών της ευκλείδειας γεωμετρίας.

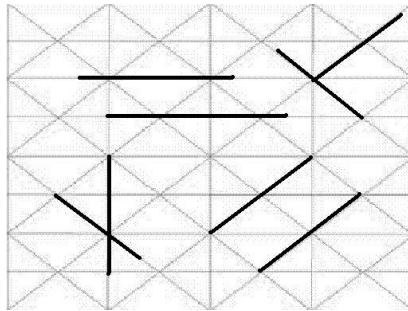
Τα συγκεκριμένα επεισόδια προέρχονται από τη χρήση ενός οργάνου χάραξης γωνιών και μέτρησης γωνιών κλίσης από ένα επτάχρονο κορίτσι, το οποίο κατά τη διεξαγωγή των διδακτικών πειραμάτων φοιτούσε στη Β' τάξη του Δημοτικού σχολείου. Στο συγκεκριμένο πείραμα, το ενδιαφέρον επικεντρώθηκε στην επίδραση του συγκεκριμένου γεωμετρικού οργάνου στην πρόσληψη των παράλληλων ευθειών, ως δύο ευθειών οι οποίες τεμνόμενες από μια τρίτη ευθεία σχηματίζουν τις δύο εσωτερικές και προς το ίδιο μέρος γωνίες ίσες, δηλαδή ως δύο ευθειών με ίσες γωνίες κλίσης. Σε αντίθεση με την έννοια των παράλληλων ευθειών ως δύο ευθειών των οποίων τα σημεία ισαπέχουν ή ως δύο ευθειών οι οποίες δεν τέμνονται όσο και αν προεκταθούν, οι οποίες διδάσκονται στο Δημοτικό σχολείο, ως πιο κατανοητές από τα παιδιά.

Το όργανο που χρησιμοποιήθηκε αποτελείται από δύο διαβαθμισμένους χάρακες σε άρθρωση με ενσωματωμένο μοιρογνώμονιο και αποκαλείται από τους τεχνικούς «μετρητής γωνιών» ή και «γωνιόμετρο» (σχ. 4).



σχ.4: Γωνιόμετρο ή μετρητής γωνιών

Αρχικά ζητήθηκε από τα παιδιά να αναγνωρίσουν τις παράλληλες ευθείες μεταξύ διαφόρων ζευγών παράλληλων και τεμνόμενων ευθειών, χαραγμένων σε διάφορες διευθύνσεις σε ισομετρικό χαρτί, στο οποίο εύκολα διαπιστώνεται οπτικά η ισότητα των αποστάσεων και η ισότητα των γωνιών και να αιτιολογήσουν την επιλογή τους.



σχ. 5: Παράλληλες και τεμνόμενες ευθείες σε ισομετρικό χαρτί

Στη συνέχεια του πειράματος, παρουσιάστηκε στα παιδιά το γωνιόμετρο, εξηγήθηκε η δομή και η λειτουργία του και επιδείχθηκε η χρήση του στη μέτρηση γωνιών και στη χάραξη παραλλήλων ευθειών. Ακολούθησαν ασκήσεις και επιλύσεις προβλημάτων με τη χρήση του γωνιόμετρου στις οποίες συμμετείχαν όλα τα παιδιά.

Η κύρια διαπίστωση αυτού του διδακτικού πειράματος τεκμηριώνεται στη συνέχεια με την παράθεση δύο χαρακτηριστικών διαλόγων ανάμεσα σε ένα από τα παιδιά και στο δάσκαλο, που διαχειρίστηκε το πείραμα. Στους διαλόγους αυτούς παρουσιάζει ενδιαφέρον το γεγονός ότι το παιδί απαντώντας σε ερωτήσεις για τη χάραξη δύο παράλληλων ευθειών ή για τη διαπίστωση της παραλληλίας δύο ευθειών συγχέει δεδομένα τα οποία προέρχονται από το χειρισμό του γωνιομέτρου με στοιχεία της σχολικής του γνώσης για την παραλληλία δύο ευθειών.

Επεισόδιο 1: Η απόσταση ανάμεσα σε δύο ευθείες γραμμές

Στο διάλογο που ακολουθεί σημειώνεται με Ε ο ερευνητής και με Π το παιδί που συμμετέχει στο διδακτικό πείραμα.

Ε: Ξέρεις πότε λέμε δύο ευθείες γραμμές παράλληλες, έτσι δεν είναι;

Π: Ναι, όταν δεν συναντιούνται.

Ε: Μπορείς να μου σχεδιάσεις δύο παράλληλες γραμμές;

Π: Ναι, μπορώ.

Ε: Έχεις μολύβι... χρειάζεται και κάτι άλλο; Ένα χάρακα, ένα διαβήτη, ένα υποδεκάμετρο ... ;

Π: Ναι, χρειάζομαι ένα χάρακα

Παίρνει τον χάρακα και χαράζει δύο ευθείες γραμμές κατά μήκος των δύο πλευρών του.

Ε: Είναι αυτές οι γραμμές παράλληλες;

Π. Ναι, αφού δεν συναντιούνται.

Ε: Και δεν υπάρχει περίπτωση να συναντηθούν;

Π: Όχι, όσο και αν τις μεγαλώσεις και από τη μια άκρη τους και από την άλλη δεν θα συναντηθούν.

Ε: Ναι, αλλά μπορούμε να το δούμε αυτό; Μπορούμε να δούμε ότι οι δύο γραμμές όσο και αν προεκταθούν και από τη μια άκρη τους και από την άλλη δεν θα συναντηθούν;

Π: Ναι, μπορούμε.

Ε: Ωραία, αν αρχίσω να προεκτείνω αυτή εδώ τη γραμμή (δείχνει με το δάχτυλο του τη μια από τις δύο ευθείες) που θα φτάσω;

Π: Μακριά, πολύ μακριά ...

Ε: Και αν προεκτείνω και την άλλη γραμμή που θα φτάσω;

Π: Το ίδιο, πολύ μακριά, όσο θέλεις μακριά ...

Ε: Ναι, αλλά είμαστε σίγουροι ότι αυτές οι δύο γραμμές δεν θα συναντηθούν κάπου πολύ-πολύ μακριά;

Π: Ναι, είμαστε ...

Ε: Πως μπορούμε να είμαστε;

Π: Γιατί δεν φτιάχνουν μια γωνία, δεξ δεν μπορούν να φτιάξουν μια γωνία.

Ε: Γιατί είσαι σίγουρη ότι οι δύο γραμμές δεν μπορούν να φτιάξουν μια γωνία;

Π: Γιατί δεν συναντιούνται, είναι παράλληλες.

Ε: Αυτό λες εσύ, αλλά εγώ λέω ότι αυτές οι δύο γραμμές μπορεί να συναντηθούν κάπου μακριά. Πρέπει με κάποιο τρόπο να με κάνεις να πιστέψω αυτό που λες.

Π:.... (μερικά δευτερόλεπτα σιωπής) ... Ωραία σκέφτηκα τι θα σου πω. Οι δύο γραμμές δεν θα συναντηθούν γιατί έχουν την ίδια απόσταση ανάμεσα τους. Όπως οι γραμμές του τρένου, συναντιούνται οι γραμμές του τρένου ..

Παίρνει το χάρακα και μετράει την απόσταση ανάμεσα στις δύο γραμμές.

Π: Ορίστε δεξ ... είναι 3 εκατοστά και εδώ .. 3 εκατοστά ... και εδώ παντού.

Ε: Ναι το βλέπω, αλλά μετρώντας την απόσταση σε δύο-τρία σημεία είναι αρκετό για να πούμε ότι οι δύο γραμμές είναι παράλληλες;

Π: Ναι είναι ... Νομίζω ... ο δάσκαλος μας μετράει μόνο σε δύο σημεία, εγώ μέτρησα και ένα παραπάνω

Ε: Γιατί νομίζεις ότι αρκεί να μετρήσουμε την απόσταση μεταξύ των γραμμών σε δύο σημεία φτάνει για να πούμε ότι οι δύο γραμμές είναι παράλληλες και όχι σε ένα ή σε τέσσερα σημεία;

Π:.....

Ε: Αν μετρήσουμε την απόσταση μεταξύ των δύο γραμμών σε ένα σημείο και βρούμε, όπως βρήκαμε εδώ 3 εκατοστά, μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι η απόσταση μεταξύ τους είναι παντού 3 εκατοστά;

Π: Ναι ... μάλλον ...

Ε: Σε πόσα σημεία μπορεί δύο ευθείες γραμμές να συναντιούνται;

Π: Σε ένα σε δύο ... δεν ξέρω ...

Ε: Δες αυτές τις δύο γραμμές (ο ερευνητής χαράζει δύο τεμνόμενες ευθείες σε ένα χαρτί). Που συναντιούνται;

Π: Εδώ (το παιδί δείχνει με το δάκτυλο του το σημείο τομής των δύο ευθειών).

Ε: Αυτό είναι ένα σημείο. Σε ποιο άλλο σημείο μπορεί αυτές οι δύο γραμμές να συναντηθούν;

Π:

Ε: Δες αν βάλω την άκρη του χάρακα πάνω στη μία γραμμή, εδώ στο σημείο που συναντάει την άλλη γραμμή και αρχίσω να τον γυρίζω γύρω από αυτό το σημείο για να βρω ένα άλλο σημείο στο οποίο οι δύο γραμμές συναντιούνται, τι νομίζεις ότι θα συμβεί;

Π: Ο χάρακας θα πέσει πάνω στην άλλη γραμμή.

Ε: Άρα, εάν σημειώσω στο χαρτί ένα σημείο πόσες ευθείες γραμμές μπορούν να περάσουν από αυτό το σημείο;

Π: Μια

Ε: Δες, λίγο (ο ερευνητής περιστρέφει το χάρακα γύρω από το σημείο) .. πόσες ευθείες γραμμές μπορώ να χαράξω που να περνούν από αυτό το σημείο;

Π:.. Πολλές ...

Ε: Ωραία πολλές ... αν σημειώσω και ένα άλλο σημείο εδώ (ο ερευνητής σημειώνει ένα δεύτερο σημείο σε απόσταση από το πρώτο) πόσες γραμμές μπορώ να χαράξω που να περνούν και από τα δύο σημεία;

Π: Μια..

Ε: Μπορούμε να χαράξουμε και μια δεύτερη γραμμή;

Π: (Σκέφτεται μερικά δευτερόλεπτα) Όχι, δεν μπορούμε ... νομίζω όχι ...

Ε: Γι' αυτό λέμε ότι αν η απόσταση μεταξύ των γραμμών σε δύο διαφορετικά σημεία κάθε γραμμής είναι ίσα, τότε οι γραμμές είναι παράλληλες. Γι' αυτό ο δάσκαλος σας μετράει σε δύο μόνο σημεία.

Π: Κατάλαβα, γιατί οι γραμμές δεν μπορούν να αλλάξουν θέση αν είναι στερεωμένες σε δύο σημεία ...

Στη συνέχεια παρουσιάστηκε στα παιδιά το γωνιόμετρο, εξηγήθηκε η δομή και η λειτουργία του και επιδείχθηκε η χρήση του στη μέτρηση γωνιών με έμφαση στη μέτρηση των γωνιών που σχηματίζουν δύο τεμνόμενες ευθείες.

Επεισόδιο 2: Οι γωνίες που σχηματίζουν δύο παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μια τρίτη

Ε: Είναι αυτές οι δύο γραμμές παράλληλες;

(ο ερευνητής δείχνει δύο παράλληλες γραμμές χαραγμένες σε μια λευκή σελίδα χαρτιού)

Π: Εάν δεν συναντιούνται, ναι είναι.

Ε: Δεν συναντιούνται εννοείς ότι δεν μπορεί να σχηματίσουν μια γωνία;

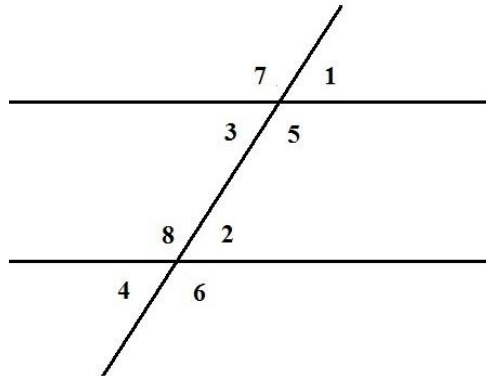
Π: Ναι, το έχουμε πει ξανά.

Ε: Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γωνιόμετρο για δούμε αν αυτές οι δύο γραμμές μπορούν να σχηματίσουν γωνία;

Π: (Σκέφτεται μερικά δευτερόλεπτα και μετά χρησιμοποιώντας τον διαβαθμισμένο χάρακα του γωνιομέτρου μετρά την απόσταση των δύο ευθειών)... Είναι 6 εκατοστά ... (μετά από μια μικρή σιωπή, τοποθετεί τον ένα χάρακα του γωνιομέτρου κατά μήκος της μιας γραμμής και περιστρέφει αργά τον άλλο χάρακα μέχρι να τμήσει την άλλη γραμμή, σταματώντας την περιστροφή σε διάφορες θέσεις)

Π: αυτή η γραμμή δεν γέρνει καθόλου ... εάν έγερνε λίγο τότε εδώ θα ήταν περισσότερο ... και εδώ λιγότερο (δείχνει με το δάχτυλο την απόσταση ανάμεσα στις δύο γραμμές σε δύο σημεία)

Ε: Αν γράψουμε μια άλλη γραμμή που θα κόβει και τις δύο γραμμές θα μπορούσαμε να μετρήσουμε τις γωνίες που σχηματίζονται, δεν θα μπορούσαμε;



σχ.6: Γωνίες που σχηματίζονται από μια ευθεία που τέμνει δύο παράλληλες ευθείες

Π: Α! ναι... θα μπορούσαμε .. με το γωνιόμετρο, όπως μάθαμε σήμερα.

(μετράει μια-μια τις γωνίες που σχηματίζονται από την ευθεία που τέμνει τις δύο γραμμές) ... αυτή η γωνία είναι ίδια με αυτή ... (δείχνει με το δάκτυλο της τις δύο γωνίες 1 & 2 στο σχήμα 6) ... και αυτές οι δύο είναι ίδιες ... (7 & 8)

... και αυτές είναι ίδιες (δείχνει τις γωνίες 3 & 2)... και αυτές (δείχνει τις γωνίες 1 & 4)... ωχ .. αυτές οι δύο δεν είναι ίδιες.. (δείχνει τις γωνίες 5 & 2) ...

(Σκέφτεται μερικά δευτερόλεπτα) ... Α..! Τώρα κατάλαβα Αν αυτές οι δύο γωνίες ήταν ίδιες και αυτές οι δύο (δείχνει τις εσωτερικές γωνίες 5 & 2 και 3 & 8) ... όχι είναι δεν είναι ... αυτές οι δύο γωνίες όμως είναι ίδιες (δείχνει τις γωνίες 1 & 2)... ωραία το βρήκα ... αυτές οι δύο γωνίες είναι ίδιες και αυτές οι δύο γραμμές είναι παράλληλες ... έτσι που το λέω δεν είναι;

Ε: Ναι, έτσι είναι ... οι γωνίες αυτές είναι ίσες. Ίσες γωνίες λέμε, όχι ίδιες.

Π: Δύο γραμμές είναι παράλληλες, όταν αυτές οι δύο γωνίες είναι ίσες. Αυτό είναι σωστό;

Ε: Είναι ... Οι μαθηματικοί λένε .. όταν μια γωνία που είναι ανάμεσα και μια γωνία που είναι έξω από τις δύο γραμμές, αλλά στο ίδιο μέρος, είναι ίσες τότε οι γραμμές είναι παράλληλες.

Π: Δύσκολο μου φαίνεται να το πω .. (Παρατηρώντας το σχήμα) Νομίζω είναι πιο απλό να πούμε ότι αν κυλίσουμε αυτή τη μια γραμμή θα πέσει ακριβώς πάνω στην άλλη ...

Ε: Φυσικά, αφού και οι δύο γραμμές είναι ευθείες.

Π: Όχι .. όχι δεν εννοώ αυτό Εννοώ ότι αν κυλίσουμε τη μια γραμμή πάνω σε αυτή τη γραμμή (δείχνει την τέμνουσα τις δύο παράλληλες ευθείες) θα πέσει ακριβώς πάνω στην άλλη γραμμή ... δεν θα κάνει γωνία θέλω να πω.

Ε: Έτσι φαίνεται να είναι, αλλά γιατί όμως;

Π: Νομίζω γιατί ... (σκέφτεται μερικά δευτερόλεπτα) ... μου φαίνεται ότι αυτό γίνεται γιατί αυτές οι γωνίες είναι ίδιες (δείχνει τις γωνίες 1 & 2 στο ένα μέρος και τις γωνίες 7 & 8 στο άλλο μέρος της τέμνουσας).

Ε: Εννοείς ίσες;

Π: Ναι, ίσες.

Ε: Και αν αυτές οι γωνίες δεν ήταν ίσες;

Π: Ε! φαίνεται ... τότε αυτή η γραμμή θα έγερνε και θα συναντούσε την άλλη γραμμή (δείχνει τις δύο παράλληλες ευθείες) εννοώ θα έκοβε την άλλη γραμμή ... και θα έκαναν μια γωνία ... κάπου εδώ ... όχι εδώ ίσως μακρύτερα, έξω από το χαρτί.

Ε: Μήπως μπορείς τώρα να μου πεις έναν κανόνα ... πότε δύο γραμμές είναι παράλληλες;

Π: ...ναι μάλλον μπορώ ... (σκέφτεται για λίγο)... θέλεις να σου πω όταν έχω ένα χάρακα ή όταν έχω το γωνιόμετρο;

Ε: και τα δύο

Π: Ωραία ... αν έχω ένα χάρακα τότε δύο γραμμές είναι παράλληλες όταν είναι ίδια απόσταση μεταξύ τους παντού όπου θέλω να μετρήσω ... αν έχω ένα γωνιόμετρο τότε δύο γραμμές είναι παράλληλες αν φτιάχνονται ίσες γωνίες όταν μια άλλη γραμμή τις κόβει και ... αν έχουμε αν δεν έχουμε ... τίποτα ... ας πούμε ούτε χάρακα, ούτε

γωνιόμετρο, αν δεν έχουμε τίποτα στα χέρια μας, τότε δύο γραμμές είναι παράλληλες αν δεν κόβονται, αν δεν φτιάχνουν μια γωνία μεταξύ τους ούτε πάνω στο χαρτί, ούτε πουθενά ...

Συμπερασματικά σχόλια

Μια πρώτη διαπίστωση που προκύπτει από την ανάλυση των μαθησιακών αυτών επεισοδίων είναι, ότι η εφαρμογή διαφορετικών μεθόδων χάραξης παραλλήλων ευθειών, τις οποίες επιβάλλει η χρήση διαφορετικών γεωμετρικών οργάνων, υποβάλλουν διαφορετικές εννοιολογικές προσλήψεις και προσανατολίζουν σε διαφορετικούς ορισμούς των παραλλήλων ευθειών. Δηλαδή, η χρήση διαφορετικών γεωμετρικών οργάνων δομεί με διαφορετικό τρόπο τη σκέψη κατά την εκτέλεση αντίστοιχων γεωμετρικών εργασιών και ως συνέπεια υποβάλλει διαφορετικές νοητικές διεργασίες, οι οποίες με τη σειρά τους οδηγούν σε διαφορετικές προσλήψεις και νοητικές προσεγγίσεις των γεωμετρικών εννοιών.

Με αφορμή τη διαπίστωση αυτή, μπορεί να διατυπωθεί η πρόταση ότι η διδασκαλία της στοιχειώδους γεωμετρίας θα πρέπει να οργανωθεί με αφετηρία και στη βάση της οικειοποίησης από τα παιδιά επιλεγμένων γεωμετρικών οργάνων σχεδίασης και μέτρησης.

Με άλλα λόγια, προτείνεται να τεθούν τα όργανα σχεδίασης στο επίκεντρο της διδασκαλίας της γεωμετρίας και να χρησιμοποιηθούν για τη διαμεσολάβηση της εξοικείωσης των παιδιών με τις θεωρητικές προτάσεις και τις πρακτικές επίλυσης προβλημάτων της γεωμετρίας. Αυτή η ιδέα δεν είναι καινοφανής. Τα γεωμετρικά όργανα μέτρησης και σχεδίασης αποτελούσαν ουσιαστικό μέρος της εκπαίδευσης των ευγενών στις τεχνικές και ιδίως στις στρατιωτικές τεχνικές και στις τεχνικές της ναυσιπλοΐας από τον 17^ο αιώνα και εξής (Turner, 1973), χρησιμοποιούνταν σε διάσημα ιδρύματα, όπως το ινστιτούτο μαθηματικών του Γκέτινγκεν, για την εκπαίδευση των μαθηματικών (Muehlhausen, 1993) και εκτίθενται από τότε έως σήμερα σε μουσεία και συλλογές για την προβολή και τη διάδοση των μαθηματικών (Bartolini Bussi, 1978).

Η πρόταση αυτή, η οποία από μια άλλη οπτική προωθεί την ιδέα της χρήσης χειραπτικών υλικών (manipulatives) στη διδασκαλία της γεωμετρίας, είναι πιο συμβατή με την ιστορία και την επιστημολογία των μαθηματικών πρακτικών από κάθε άλλη σχετική πρόταση διδασκαλίας, όπως είναι η πρόταση των λεγόμενων «χειροπιαστών μαθηματικών» (hands-on mathematics), η οποία προωθεί τη χρήση εκπαιδευτικών υλικών μέσα από τεχνητές δραστηριότητες με ασαφή ή ακατανόητα μαθηματικά νοήματα και παράλληλα, είναι μια πρόταση παιδαγωγικά τεκμηριωμένη στην κοινωνικο-πολιτισμική θεωρία της μάθησης.

Βιβλιογραφικές αναφορές

- Artobolevskii, I. I. (1964). *Mechanisms for the generation of plane curves*, New York: Macmillan.
- Bartolini Bussi Maria G. (1998). Drawing instruments: Theories and practices from history to didactics, *Documenta Mathematica*, Extra Volume ICM III, 735-746.
- Chassapis, D. (1998/99). The mediation of tools in the development of formal mathematical concepts: The compass and the circle as an example, *Educational Studies in Mathematics*, 37 (3), 275 –293.
- Dennis, D. & Confrey, J. (1997). Drawing logarithmic and exponential curves with the computer software geometer's sketchpad: A method inspired by historical sources. In J. King & D. Schatschneider (Eds.), *Geometry turned on: Dynamic software in learning, teaching and research* (pp. 147-156), Washington D.C.: Mathematical Association of America.
- Dennis, D. (1997), René Descartes' curve-drawing devices: Experiments in the relations between mechanical motion and symbolic language, *Mathematics Magazine*, 70 (3), 163-174.
- Descartes, R. (1954). *The Geometry*, New York: Dover.
- Heath T. (ed.) (1956), *The thirteen books of Euclid's Elements*, vol. 1, New York: Dover.

- Henry P. (1993) Mathematical machines. In Hanken, H., Karlqvist, A. & Svedin U.(eds.), *The machine as metaphor and tool* (pp. 101-122), New York: Springer- Verlag.
- Lenoir, T. (1979), Descartes and the geometrization of thought: The methodological background of Descartes geometry, *Historia Mathematica* , 6, 355-379.
- Mariotti M. A., Bartolini Bussi M. G., Boero P., Franca Ferri F., Rossella Garuti M. R. (1997)Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cognition. PME XXI Proceedings, Lahti, Finland (pp. 180-195).
- Turner A. J. (1973), Mathematical instruments and the education of gentlemen, *Annals of Science*, 30 (1), 51-88.
- Mühlhausen E. (1993), Riemann surface-crocheted in four colors, *The Mathematical Intelligencer*, 15 (3), 49-53.
- Vygotsky, L. S. (1978), *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*, Cambridge, Mass: Harvard University Press.
- Wertsch, J.V. (1994), Mediated action in socio-cultural studies, *Mind, Culture and Activity*, 1, 202-208.
- Σταμάτη Ευάγγελου (1975), Ευκλείδου Γεωμετρία Στοιχεία - Βιβλία 1,2,3,4, Τόμος Ι, Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.,.

Σημειωτικές προσεγγίσεις της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών:

Μια σκιαγράφιση του πεδίου

Ένα εισαγωγικό σχόλιο

Η μαθηματική εκπαίδευση, ως επιστημονικό πεδίο, παρουσίασε μια αξιοσημείωτη ανάπτυξη, ιδιαίτερα κατά τις τρεις τελευταίες δεκαετίες. Ένα σημαντικό πλήθος εμπειρικών ερευνών, αλλά και θεωρητικών αναλύσεων, διερεύνησαν τη δραστηριότητα της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών από πολλές οπτικές, επιχειρώντας να εντοπίσουν, να αναλύσουν, να ερμηνεύουν και τελικά να ελέγξουν τους καθοριστικούς παράγοντες διαμόρφωσης των βασικών χαρακτηριστικών τους. Παρά τα δεδομένα αυτά όμως, σημαντικές όψεις της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών παραμένουν αδιευκρίνιστες και πολλά συναφή ερωτήματα παραμένουν αναπάντητα. Η αμηχανία των ερευνητών της μαθηματικής εκπαίδευσης και ο προβληματισμός των εκπαιδευτικών μπροστά σε προβλήματα κατανόησης (με την τρέχουσα σημασία του όρου) θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών, όπως για παράδειγμα του κλάσματος ή μπροστά σε δυσχέρειες «εφαρμογής» των μαθηματικών εννοιών για την επίλυση προβλημάτων αριθμητικής, παραμένουν στο ακέραιο παρά την πληθώρα των διαθέσιμων ερευνητικών διαπιστώσεων, των θεωρητικών επεξεργασιών, αλλά και των πρακτικών διδακτικών προτάσεων.

Τα βασικά χαρακτηριστικά της ερευνητικής παραγωγής στο πεδίο της έρευνας της μαθηματικής εκπαίδευσης αναδεικνύονται με σαφήνεια μέσα από την έρευνα των Lerman & Τσατσαρώνη (στον παρόντα τόμο). Όμως, πέρα από τις συγκεκριμένες διαπιστώσεις αυτής και άλλων συναφών αναλύσεων των χαρακτηριστικών της έρευνας στο πεδίο της μαθηματικής εκπαίδευσης (π.χ. Chassapis 2002, Hanna & Sidoli 2002, Kieran 1995, Lubienski & Bowen 2000), φαίνεται ότι υφίσταται ένα γενικότερο πρόβλημα: τα θεωρητικά πλαίσια μέσα στα οποία αναπτύχθηκαν οι κυρίαρχες προσεγγίσεις των ερευνητικών ζητημάτων της μαθηματικής εκπαίδευσης αποδεικνύονται τελικά προβληματικά, τουλάχιστον ως προς την επάρκεια τους να εντοπίσουν, να αναλύσουν

και να ερμηνεύσουν τα συνιστώσα στοιχεία της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Οι κυρίαρχες προσεγγίσεις εντοπίζονται ή στις νοητικές δομές και λειτουργίες ή στη συμπεριφορά των ατόμων, οπότε και αντιμετωπίζουν τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών μέσα από μια πρωτίστως, αν όχι αποκλειστικά, ψυχολογική οπτική, αγνοώντας το κοινωνικό τους πλαίσιο και τον διαπροσωπικό τους χαρακτήρα. Παράλληλα, οι μη κυρίαρχες σήμερα προσεγγίσεις υπεραξιωνούν το κοινωνικό πλαίσιο της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών, παραβλέποντας τις υποκειμενικές λειτουργίες ιδιοποίησης της μαθηματικής γνώσης, οπότε και αδυνατούν τελικά να προσφέρουν μια συνολική θεώρηση των συναφών ζητημάτων, υπερβαίνοντας τη διχοτομία ατομικού και κοινωνικού με τρόπο προσιδιάζοντα στο περιεχόμενο και στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Στη βάση αυτή και υπό την επίδραση των γενικότερων ανακατατάξεων που σημειώνονται τα τελευταία χρόνια στη διαμόρφωση των ιδεών εισάγονται οι σημειωτικές προσεγγίσεις στο πεδίο της μαθηματικής εκπαίδευσης, ως προοπτική σύνθεσης και υπέρβασης των προσεγγίσεων που επιγραμματικά προαναφέρθηκαν. Οι προσεγγίσεις αυτές επικεντρώνονται στα χαρακτηριστικά των μαθηματικών σημείων ως συστημάτων παραγωγής νοημάτων και στη χρήση τους στο κοινωνικά προσδιορισμένο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης για την υποκειμενική παραγωγή μαθηματικών νοημάτων από τους δασκάλους και τους μαθητές. Επιδιώκουν, δηλαδή, να συνδυάσουν τις ατομικές και τις κοινωνικές διαστάσεις της μαθηματικής δραστηριότητας, θεωρούμενες ως αμοιβαία εξαρτώμενες και συστατικές όψεις της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών (Ernest 2002).

Τα αντικείμενα και η φιλοσοφία των σημειωτικών προσεγγίσεων

Οι σημειωτικές προσεγγίσεις μελετούν το αντικείμενο τους ως ένα σύστημα σημείων. Ως ένα σύστημα, δηλαδή, το οποίο περιλαμβάνει:

- Ένα σύνολο σημείων, δηλαδή στοιχείων οι εκφράσεις των οποίων έχουν φυσική μορφή λέξεων, εικόνων, ήχων, ενεργειών, ή αντικειμένων (σημαίνοντα), αναφέρονται σε κάτι άλλο από τον εαυτό τους (σημαινόμενα) και αναγνωρίζονται από τους χρήστες του συστήματος των σημείων σε ένα πλαίσιο χρήσης του (Turner 1992).
- Ένα σύνολο σχέσεων ανάμεσα στα σημεία αυτά, το οποίο βασίζεται σε ένα υποκείμενο νοηματικό πλαίσιο μέσα στο οποίο εντάσσονται τα σημεία και αποκτούν νόημα. Ένα σημείο, επομένως, δεν ταυτίζεται ποτέ με το νόημα του, αφού μπορεί να αποκτά ένα διαφορετικό νόημα σε ένα διαφορετικό πλαίσιο.
- Ένα σύνολο κανόνων παραγωγής σημείων.

Κάθε σημειωτικό σύστημα περιλαμβάνει επομένως τρεις διαστάσεις:

- μια σημαντική διάσταση, η οποία αναφέρεται στη σημασία των σημείων, δηλαδή στη η σχέση των σημείων με αυτό που αντιπροσωπεύουν,
- μια συντακτική διάσταση, η οποία αναφέρεται στις δομικές σχέσεις μεταξύ σημείων και
- μια πραγματιστική διάσταση, η οποία αναφέρεται στους τρόπους με τους οποίους τα σημεία χρησιμοποιούνται και ερμηνεύονται (Morris 1938/1970).

Διακρίνονται δύο μεγάλες κατηγορίες σημειωτικών συστημάτων: τα ιδιώματα (registers) και οι κώδικες. Ιδίωμα είναι μια γλωσσική παραλλαγή, η οποία περιλαμβάνει ένα σύνολο σημασιολογικών (λέξεων), των οποίων η χρήση καθορίζεται από κανόνες μετασχηματισμού των σημείων (γραμματική), είναι προσανατολισμένη σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο ή σε έναν ορισμένο τύπο δραστηριότητας, ο οποίος περιλαμβάνει ορισμένες ομάδες ανθρώπων, με ορισμένη ευχέρεια λόγου (Halliday 1975). Το μαθηματικό ιδίωμα, ως γλωσσική παραλλαγή, είναι προσανατολισμένο σε μαθηματικές δραστηριότητες

και περιλαμβάνει διάφορες γλωσσικές μορφές και τις χρήσεις τους, οι οποίες εμφανίζονται στα πλαίσια αυτών των δραστηριοτήτων (π.χ. αριθμητικό σύστημα, αλγεβρικός συμβολισμός ή καρτεσιανά διαγράμματα). Αντίθετα, κώδικας είναι ένα ευρύτερο σύστημα νοημάτων, οργανωμένων με βάση κάποιες συμβάσεις για την κατασκευή και τη χρήση σημείων, τα οποία παράγουν ένα νόημα στο πλαίσιο του. Τα μαθηματικά στο σύνολο τους αποτελούν έναν κώδικα.

Τυπικό παράδειγμα σημειωτικού συστήματος στο πεδίο των μαθηματικών που ενδιαφέρει εδώ αποτελεί το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, το οποίο περιλαμβάνει:

- Ένα σύνολο αριθμητικών σημείων, τα οποία παριστάνονται συμβολικά (0, 1, 2, 3,..) λεκτικά (μηδέν, ένα, δύο, τρία,...), εικονιστικά, υλικά, κλπ. (σημειώνονται), αναφέρονται σε πληθικότητες (σημαινόμενα) και αναγνωρίζονται από τους χρήστες του αριθμητικού συστήματος σε ένα πλαίσιο απαρίθμησης ή μέτρησης.
- Ένα σύνολο σχέσεων ανάμεσα στα αριθμητικά σημεία, σημαντικότερη από τις οποίες είναι η σχέση «μεγαλύτερο / μικρότερο», η οποία καθορίζεται στη βάση της έννοιας «επόμενο / προηγούμενο» και
- Ένα σύνολο κανόνων παραγωγής αριθμητικών σημείων, οι οποίοι συνοψίζονται ως αρχές απαρίθμησης από τους Gelman & Gallistel (1978) εξής:
 - i. αρχή της ένα-προς-ένα αντιστοιχίσις, σύμφωνα με την οποία σε κάθε απαριθμούμενο αντικείμενο αντιστοιχίζεται ένα και μόνο ένα αριθμητικό σημείο.
 - ii. αρχή της σταθερής ακολουθίας, σύμφωνα με την οποία η ακολουθία των αριθμητικών σημείων πρέπει να είναι σταθερή σε κάθε απαρίθμηση.
 - iii. αρχή της πληθικότητας, σύμφωνα με την οποία το αριθμητικό σημείο που αντιστοιχίζεται στο τελευταίο απαριθμούμενο αντικείμενο μιας συλλογής αναπαριστά το συνολικό αριθμό των αντικειμένων της συλλογής αυτής.
 - iv. αρχή της αφαίρεσης, σύμφωνα με την οποία μπορεί να ομαδοποιούνται σε μια συλλογή αντικείμενα με διαφορετικά χαρακτηριστικά με στόχο την απαρίθμηση τους.

- v. την αρχή της ανεξαρτησίας της σειράς, σύμφωνα με την οποία η σειρά με την οποία απαριθμούνται τα αντικείμενα μιας συλλογής δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα της απαρίθμησης, με την προϋπόθεση ότι τηρείται η αρχή της ένα-προς-ένα αντιστοίχισης.

Με αφετηρία ένα κοινό εννοιολογικό πλαίσιο βασισμένο στις αρχικές έννοιες που προαναφέρθηκαν, οι σημειωτικές προσεγγίσεις διαφοροποιούνται ανάλογα με τις όψεις των σημειωτικών συστημάτων, τις οποίες αναδεικνύουν ως πρωτεύουσες και το ρόλο που τους αποδίδουν, όπως επίσης και ανάλογα με τα χαρακτηριστικά της σημειωτικής λειτουργίας, τα οποία θεωρούν ως καθοριστικά στις διαδικασίες παραγωγή νοημάτων.

Εντελώς επιγραμματικά, μια κατηγορία σημειωτικών προσεγγίσεων αποδίδει πρωταρχική σημασία και επικεντρώνεται στη μελέτη των σημείων, ως ειδικών αντικειμένων με συγκεκριμένα νοήματα σε ιστορικά προσδιορισμένα και πολιτιστικά καθορισμένα πλαίσια. Αποδίδει ιδιαίτερη σημασία στη σχέση του σημαίνοντος με το σημαινόμενο κάθε σημείου και ενδιαφέρεται για τους κανόνες που διέπουν τις σχέσεις των σημείων με τα νοήματα τους. Για τις προσεγγίσεις αυτές, θεωρούνται σημεία – πέρα από τα γλωσσικά σημεία, όπως είναι τα φωνήματα, τα γράμματα, οι λέξεις ή οι προτάσεις – όλες οι μορφές ύλης και ενέργειας στις οποίες αποδίδεται νόημα από μια κοινότητα ανθρώπων μέσα σε ένα πλαίσιο χρήσης τους, όπως είναι για παράδειγμα οι χειρονομίες στην καθημερινή ζωή, στις θρησκευτικές τελετουργίες ή στον καλλιτεχνικό χορό, τα αντικείμενα που ανταλλάσσονται μεταξύ των ανθρώπων μιας κοινωνίας ως χρήματα, ενθύμια ή δώρα, όπως και άπειροι πολιτιστικοί κώδικες από τους κανόνες της καλής συμπεριφοράς μέχρι τα σήματα οδικής κυκλοφορίας.

Σε αντίθεση με την προηγούμενη, μια άλλη κατηγορία σημειωτικών προσεγγίσεων αποδίδει πρωταρχική σημασία και επικεντρώνεται στη μελέτη, όχι των σημείων καθαυτών ως στοιχείων που παράγουν νοήματα, αλλά των νοημάτων που αποδίδονται στα σημεία, καθώς και των διαδικασιών παραγωγής των νοημάτων σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο.

Πυρήνα των προσεγγίσεων αυτών αποτελεί μια γενικευμένη έννοια «κειμένου», όπου ως «κείμενο» μέσα από την «ανάγνωση» του οποίου παράγονται νοήματα θεωρείται κάθε φαινόμενο, συμπεριλαμβανομένων των στοιχείων και των σχέσεων μεταξύ των στοιχείων που «συνθέτουν» το φαινόμενο. Διακριτικά χαρακτηριστικά και δομές χαρακτηριστικών κάθε «κειμένου», αλλά και του πλαισίου μέσα στο οποίο εντάσσεται και λειτουργεί το ένα «κείμενο», παράγουν νοήματα και επομένως αποτελούν σημεία. Για τις προσεγγίσεις αυτές, δηλαδή, τα νοήματα παράγουν τα σημεία και όχι αντίστροφα.

Μια τρίτη κατηγορία σημειωτικών προσεγγίσεων, επιδιώκοντας να συνθέσει τις δύο προηγούμενες, αποδίδει πρωταρχική σημασία και τοποθετεί στο επίκεντρο της μελέτης της, όχι τα σημεία και τα νοήματα τους, αλλά τις λειτουργίες των σημείων στις διαδικασίες της επικοινωνίας μεταξύ των ανθρώπων ή γενικότερα μεταξύ συστημάτων ανταλλαγής μηνυμάτων, θεωρώντας ότι τα σημεία αποτελούν πρώτα και πάνω απ' όλα φορείς ή κομιστές νοημάτων. Τα σημεία, δηλαδή, έχουν αναμφίβολα μια υλική παράσταση και ένα νόημα, η ουσία τους όμως έγκειται στη διαμεσολάβηση που επιτελούν κατά την επικοινωνία και στην δια της επικοινωνίας ανταλλαγή πληροφοριών ανάμεσα σε ανθρώπους ή γενικότερα ανάμεσα σε τεχνικά ή κοινωνικά συστήματα.

Τέλος, μια τέταρτη κατηγορία σημειωτικών προσεγγίσεων, επικεντρώνεται στη μελέτη των επιδράσεων που έχει η χρήση των σημείων και στη διερεύνηση των σημείων μέσα από τα αποτελέσματα που παράγει η χρήση τους, επιδιώκοντας να υπερβεί τα εννοιολογικά και μεθοδολογικά προβλήματα των προηγούμενων προσεγγίσεων. Για τις προσεγγίσεις αυτές, τα σημεία είναι οντότητες, οι οποίες δεν μπορεί να οριστούν προκαταβολικά και στη συνέχεια να αναλυθούν, ούτε μπορεί να αναλυθούν μέσα από τις λειτουργίες που επιτελούν σε διάφορες διαδικασίες επικοινωνίας. Τα σημεία, πέρα από οτιδήποτε άλλο, παράγονται από σημεία και ταυτόχρονα παράγουν άλλα σημεία, οπότε στη βάση αυτή σημείο είναι οτιδήποτε έχει τη δυνατότητα, υπό κατάλληλους όρους, να παράγει άλλα σημεία και αντικείμενο κάθε σημειωτικής ανάλυσης είναι οι σχέσεις αιτίου και αιτιατού μεταξύ των σημείων.

Συνοψίζοντας και γενικεύοντας, ένα σημείο μπορεί να θεωρηθεί ή ως μέσο αναπαράστασης, οπότε το νόημα του προκύπτει από τη σχέση των υποκειμένων με το αντικείμενο στο οποίο το σημείο αναφέρεται ή ως μέσο επικοινωνίας, οπότε το νόημα του προκύπτει από τη διαδικασία αλληλόδρασης μεταξύ των υποκειμένων που χρησιμοποιούν το σημείο. Στην πρώτη περίπτωση, δηλαδή πυρήνα του σημείου αποτελεί μια σχέση, ενώ στη δεύτερη μια διαδικασία. Οι σημειωτικές προσεγγίσεις της πρώτης περίπτωσης, τώρα, επεξεργάζονται και χρησιμοποιούν μια προβληματική των σημείων και θεωρώντας τη δημιουργία νοημάτων ως ιδιότητα των σημείων, εντοπίζονται στην ανάλυση της δομής και των κανόνων των σημειωτικών συστημάτων. Το νόημα, δηλαδή, ενός σημείου προκύπτει από το πλαίσιο του. Αντίθετα, οι σημειωτικές προσεγγίσεις της δεύτερης περίπτωσης αναπτύσσουν και χρησιμοποιούν μια προβληματική των «κειμένων» και θεωρώντας τη δημιουργία νοημάτων ως ιδιότητα των «κειμένων», αναλύουν τα γενεσιουργά και ερμηνευτικά χαρακτηριστικά τους και τις επικοινωνιακές λειτουργίες τους. Το νόημα, δηλαδή, ενός σημείου προκύπτει από την ερμηνεία του.

Οι σημειωτικές προσεγγίσεις, ανεξάρτητα από τις διαφοροποιήσεις τους, εδράζονται σε μια φιλοσοφική βάση, η οποία συνοψίζεται, κατά τη γνώμη μου, στις ακόλουθες παραδοχές, διατυπωμένες με σαφήνεια από τον Charles S. Peirce, έναν από τους θεμελιωτές της σημειωτικής, στο δημοσιευμένο το 1868 δοκίμιο του *Questions concerning certain faculties claimed for man*:

- Δεν υπάρχει στον άνθρωπο καμία δυνατότητα ενδοσκόπησης, όλη η γνώση του για τον εσωτερικό του κόσμο προέρχεται από υποθετικούς συλλογισμούς βασισμένους στα δεδομένα παρατηρήσεων των γεγονότων του εξωτερικού του κόσμου,
- Δεν υπάρχει στον άνθρωπο καμία δυνατότητα ενόρασης, όλη η γνώση του καθορίζεται και απορρέει λογικά από την πρότερη γνώση του,
- Δεν υπάρχει στον άνθρωπο καμία δυνατότητα νοητικής σύλληψης αυτού που δεν μπορεί να γνωσθεί και

- Η οποιαδήποτε σκέψη είναι αδύνατη χωρίς τη διαμεσολάβηση σημείων.

Κατά συνέπεια δεν υπάρχει και δεν μπορεί να υπάρξει για τον άνθρωπο άμεση πρόσβαση στα στοιχεία της πραγματικότητας. Τα σημεία αποτελούν το καθολικό μέσο, το οποίο διαμεσολαβεί τις σχέσεις του ανθρώπινου νου με τον κόσμο, ο οποίος επομένως κατανοείται αποκλειστικά διαμέσου των σημείων. Τα σημεία, όμως, δεν είναι ατομικές, αλλά κοινωνικές κατασκευές, οπότε είναι η κοινωνία η οποία ορίζει και καθιερώνει τα νοήματα τους. Άρα, η υπερβατική αρχή των σημειωτικών προσεγγίσεων είναι η κοινωνία, η αλήθεια είναι συμβατική και το κριτήριο αλήθειας της ανθρώπινης γνώσης είναι η κοινωνική συναίνεση. Οπότε, κύριος σκοπός των σημειωτικών προσεγγίσεων δεν είναι η γνώση μιας πραγματικότητας (γνώση, η οποία θεωρείται προγραμματικά αδύνατη), αλλά η αποτύπωση και διασάφηση των αποδεκτών σε μια κοινωνία ιδεών για την πραγματικότητα αυτή.

Σημειωτικές όψεις της μαθηματικής δραστηριότητας

Σε αντιστοιχία με τις προαναφερθείσες προσεγγίσεις, η μαθηματική δραστηριότητα, ως επιστημονική πρακτική, αντιμετωπίζεται από διαφορετικές σημειωτικές οπτικές με αντίστοιχα διαφορετικά επίκεντρα και αντικείμενα ανάλυσης. Κάθε σημειωτική οπτική στη μαθηματική δραστηριότητα, όμως, προϋποθέτει αντίστοιχες επιστημολογικές παραδοχές για τη μαθηματική γνώση, από τις οποίες και προκύπτουν διαφορετικά περιεχόμενα και λειτουργίες για τα μαθηματικά σημειωτικά συστήματα. Μια θεώρηση της μαθηματικής γνώσης, για παράδειγμα, η οποία προϋποθέτει ότι τα μαθηματικά αντικείμενα (οι αριθμοί, τα γεωμετρικά σχήματα, οι συναρτήσεις κλπ.) αποτελούν δεδομένα στοιχεία ενός υπαρκτού πλατωνικού κόσμου ιδεών αποδίδει άλλο καθεστώς στα μαθηματικά σημεία (τα αριθμητικά σύμβολα, τους γεωμετρικούς όρους, τους αλγεβρικούς τύπους κλπ.) από εκείνο μιας θεώρησης, η οποία υποστηρίζει ότι τα μαθηματικά αντικείμενα αποτελούν νοητικές κατασκευές, ατομικές ή κοινωνικές, με αφετηρία και αναφορά την υλική πραγματικότητα. Μια βασική διάκριση, για παράδειγμα, τοποθετείται στη σχέση των μαθηματικών

αντικειμένων με τα μαθηματικά σημεία. Στην πρώτη περίπτωση τα μαθηματικά σημεία αποτελούν εκφράσεις ή ανα-παραστάσεις των υπαρκτών μαθηματικών αντικειμένων, τα μαθηματικά αντικείμενα δηλαδή «παράγουν» μέσα από την υλική αποτύπωση τους τα μαθηματικά σημεία. Αντίθετα, στη δεύτερη τα μαθηματικά αντικείμενα αποτελούν ερμηνείες ή υλοποιήσεις των μαθηματικών σημείων, τα οποία συγκροτούνται ως προϊόντα νοητικής αφαίρεσης και κοινωνικής νοηματοδότησης, οπότε είναι τα μαθηματικά σημεία τα οποία «παράγουν» μέσα από τη χρήση τους τα μαθηματικά αντικείμενα (ενδεικτικά Ernest 1998, Sfard 2000).

Με τις διαφοροποιήσεις, που προκύπτουν από τις διαφορετικές επιστημολογικές οπτικές για τη μαθηματική γνώση, είναι δυνατόν, σε πολύ γενικές γραμμές, να διακριθούν δύο σημειωτικές οπτικές στη μαθηματική δραστηριότητα. Η μια οπτική ενδιαφέρεται για την ανάλυση των σημείων, που συνιστούν τα μαθηματικά σύμβολα και το μαθηματικό λόγο γενικότερα, ως κώδικα ή ιδιαίτερο επιστημονικό ιδίωμα, και η άλλη για το είδος και τα χαρακτηριστικά των νοημάτων που δημιουργούνται μέσα και στο πλαίσιο της μαθηματικής δραστηριότητας, ως μιας κοινωνικής δραστηριότητας η οποία οικοδομεί την κατανοησιμότητα όψεων της πραγματικότητας. Η πρώτη οπτική, δηλαδή, ενδιαφέρεται πρώτιστα για τα στοιχεία και τη δομή του μαθηματικού λόγου, ενώ η δεύτερη για τους όρους της χρήσης και τα παράγωγα της αποτελέσματα.

Θεμελιώδη παραδοχή της πρώτης οπτικής αποτελεί η θέση, ότι τα μαθηματικά συνιστούν μια ιδιαίτερη γλώσσα, τη «γλώσσα των μαθηματικών», η οποία ως σημειωτικός κώδικας ή ιδίωμα δομείται με πυρήνα της ένα σύστημα μαθηματικών όρων, συμβόλων και γραφημάτων, το νόημα των οποίων είναι καθορισμένο ή καθορίζεται κατά περίπτωση στο κάθε συγκεκριμένο μαθηματικό πλαίσιο. Τα μαθηματικά σημειωτικά συστήματα, επομένως, αποτελούν μέσα καταγραφής και έκφρασης της μαθηματικής γνώσης, μέσα διάδοσης της μαθηματικής γνώσης, όπως επίσης και μέσα επεξεργασίας και ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης.

Αντίθετα, η δεύτερη οπτική δομείται με άξονα την παραδοχή, ότι τα μαθηματικά συγκροτούνται από τα νοήματα τα οποία παράγουν μέσα από τις πρακτικές τους και τα οποία επικυρώνονται κοινωνικά μέσα από τη χρήση τους. Νοήματα αριθμητικών πράξεων, ισότητας και ανισότητας μεγεθών, γεωμετρικών σχέσεων μεταξύ γραμμών, σχημάτων και πολλά άλλα. Είναι αυτά τα νοήματα που συνιστούν τα μαθηματικά, άσχετα από τη μορφή έκφρασης τους, ως γλωσσικές διατυπώσεις, σύμβολα, εικόνες, διαγράμματα ή πίνακες. Τα νοήματα αυτά, σύμφωνα με μια ανάλυση του Lemke (2002) είναι κυρίως νοήματα «βαθμού», τα οποία αναφέρονται σε ποσοτικές διαφορές και συνεχείς μεταβολές σε αντίθεση με τα νοήματα «είδους», τα οποία αναφέρονται σε ποιοτικές διακρίσεις και διακριτές οντότητες, που παράγει και εκφράζει η πρωτίστως φυσική γλώσσα.

Από μια παρόμοια οπτική αλλά σε ένα εντελώς διαφορετικό πλαίσιο προσέγγισης της γνώσης και της οικοδόμησης της, τα μαθηματικά σημειωτικά συστήματα μπορεί να θεωρηθούν ως πολιτιστικά εργαλεία, τα οποία σε ατομικό επίπεδο διαμεσολαβούν τόσο τη συγκρότηση, όσο και την επικοινωνία της μαθηματικής γνώσης (Βυγκότοκι 1988, Radford 2001). Στη βάση αυτή, τα μαθηματικά σημειωτικά συστήματα τα οποία οι άνθρωποι χρησιμοποιούν στις δραστηριότητες τους και με τα οποία σκέφτονται έχουν μια διπλή λειτουργία. Από το ένα μέρος αποτελούν νοητικά εργαλεία τα οποία επιτρέπουν τη συμμετοχή του κάθε ατόμου στη μαθηματική δραστηριότητα και από την άλλη αποτελούν κοινωνικά εργαλεία τα οποία υπερβαίνουν το άτομο και επιτρέπουν την αντικειμενοποίηση μιας κοινωνικής πρακτικής, στο πλαίσιο της οποίας και νοηματοδοτούνται.

Σε κάθε περίπτωση, όλες οι σημειωτικές οπτικές στη μαθηματική δραστηριότητα δομούνται στην παραδοχή, ότι η σημειωτική διάσταση της μαθηματικής γνώσης είναι ουσιαστική, αφού τα σημειωτικά μαθηματικά συστήματα αποτελούν θεμελιώδεις παράγοντες για τη συγκρότηση και την ανάπτυξη της.

Σημειωτικές οπτικές στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών

Οι σημειωτικές προσεγγίσεις στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών βρίσκονται σήμερα σε περίοδο ανάπτυξης, αλλά και διαμόρφωσης, όπως συνάγεται από τις αντίστοιχες δημοσιεύσεις και τις συναφείς ανακοινώσεις στα συνέδρια της μαθηματικής εκπαίδευσης. Επομένως, κάθε απόπειρα επισκόπησης τους δεν μπορεί παρά να είναι εκ των πραγμάτων ατελής. Σύμφωνα όμως με όλα τα δεδομένα, ο συναφής προβληματισμός φαίνεται να διαμορφώνει τρεις, όχι αλληλο-αποκλειόμενες, προσεγγίσεις (Winslow 2003). Μια ατομικό-γνωστική προσέγγιση, στο πλαίσιο της οποίας ενδιαφέρον και διερευνώνται ζητήματα της σημειωτικής λειτουργίας κάθε ατόμου και των νοητικών προϋποθέσεων ιδιοποίησης της μαθηματικής γνώσης μέσα από τη χρήση των μαθηματικών σημειωτικών συστημάτων, μια κοινωνική προσέγγιση, η οποία ενδιαφέρεται και διερευνά ζητήματα που προκύπτουν από τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών σημειωτικών συστημάτων στο πλαίσιο της διδασκαλίας των μαθηματικών στο σχολείο, από την οπτική κυρίως των επικοινωνιακών διαστάσεων της μάθησης και της διδασκαλίας και μια πολιτιστική προσέγγιση, η οποία ενδιαφέρεται για τις επιδράσεις τις οποίες συνεπάγονται οι σχέσεις των μαθηματικών με τα άλλα σημειωτικά συστήματα στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών, τόσο σε ατομικό όσο και σε σχολικό επίπεδο.

Η ατομικό-γνωστική προσέγγιση στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών έχει ως αφετηρία της τις θεωρητικές θέσεις του Piaget και των νεώτερων εποικοδομητιστών για τη νοητική συγκρότηση και λειτουργία του ατόμου και επιχειρεί στη βάση αυτή να διερευνήσει τις σημειωτικές όψεις συγκρότησης της μαθηματικής γνώσης. Ενδιαφέρεται ιδιαίτερα για την επίδραση που έχουν τα χαρακτηριστικά των μαθηματικών δραστηριοτήτων στις οποίες ένα άτομο εμπλέκεται στις σχέσεις που το άτομο αυτό συγκροτεί μεταξύ των μαθηματικών σημείων και των αντικειμένων στα οποία τα σημεία αναφέρονται, επιχειρώντας να απαντήσει σε μια θεμελιώδη ερώτηση: με ποιες νοητικές διαδικασίες ένα άτομο συγκροτεί νοητικά σχήματα τα οποία αντιστοιχούν σε μαθηματικά αντικείμενα μέσα από το νοητικό χειρισμό των σημειωτικών παραστάσεων τους, οι οποίες

μάλιστα πολλές φορές έχουν ποικίλες μορφές που προβάλλουν και διαφορετικά στοιχεία του ίδιου μαθηματικού αντικειμένου ή διατυπωμένο διαφορετικά με ποιους όρους, μέσα από ποιες διαδικασίες και σε ποιο πλαίσιο ένα άτομο αποδίδει μαθηματικά νοήματα σε σημειωτικές παραστάσεις διαφόρων τύπων (ενδεικτικά, Radford 2000, Steinbring 2002).

Για παράδειγμα, πως συγκροτούνται οι έννοιες του κλάσματος και του ρητού αριθμού μέσα από το χειρισμό των συμβολικών παραστάσεων τους ως λόγων δύο αριθμών, οι οποίες με διαφορετικές μορφές, όπως $2/3$, $4/6$ ή $8/12$, αναφέρονται στην ίδια σχέση ή στο ίδιο μέγεθος; πως αποδίδεται το νόημα του κλάσματος σε μια εικόνα που παριστάνει με διαφορετικά χρώματα το μέρος ενός όλου ή σε μια δραστηριότητα μοιράσματος ενός πλήθους αντικειμένων σε μέρη; και πως στη συνέχεια συσχετίζεται η έννοια και οι παραστάσεις του ρητού αριθμού με την έννοια και τις παραστάσεις του δεκαδικού αριθμού;

Για την κοινωνική προσέγγιση της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών, ο προηγούμενος προβληματισμός εντοπίζει προβλήματα συγκρότησης της μαθηματικής γνώσης κάτω τους όρους που δημιουργεί η οικειοποίηση και η χρήση των διαθέσιμων τυπικών και άτυπων σημειωτικών παραστάσεων της, αλλά περιορίζοντας την οπτική του στο ατομικό επίπεδο αδυνατεί να ιχνηλατήσει τους όρους επίλυσης των προβλημάτων αυτών. Γιατί ποιες δυνατότητες παρέχονται στα άτομα να οικειοποιηθούν τις σημειωτικές παραστάσεις της μαθηματικής γνώσης και το αντίστοιχο εννοιολογικό μαθηματικό πλαίσιο ή πιο γενικά ποιες μορφές συγκρότησης μαθηματικών νοημάτων εντοπίζονται στη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο και με ποιους τρόπους μπορούν να αναλυθούν, ώστε να εντοπιστούν τα δομικά χαρακτηριστικά τους; Οι απαντήσεις στα ερωτήματα αυτά προϋποθέτουν την αποτύπωση και την ανάλυση του κοινωνικού πλαισίου της μάθησης των μαθηματικών, συστατικό στοιχείο του οποίου αποτελεί η μορφή και το περιεχόμενο της επικοινωνίας στη σχολική τάξη, στην οποία έχει μέχρι σήμερα επικεντρωθεί ένας σημαντικός αριθμός αναλύσεων των ερευνών (ενδεικτικά Morgan, 2001).

Η επικοινωνία αυτή, στοιχεία της οποίας αποτελούν μεταξύ άλλων, οι διάλογοι μεταξύ μαθητών και δασκάλων κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών, οι οδηγίες, οι εντολές και οι επιπλήξεις των δασκάλων, οι διάφορες μορφές της «γλώσσας του σώματος», όπως είναι τα νοήματα ή οι κινήσεις του κεφαλιού, τα διδακτικά μέσα και άλλα, συμβάλλει έμμεσα αλλά καθοριστικά στην οικειοποίηση των μαθηματικών σημειωτικών συστημάτων και στη συγκρότηση των μαθηματικών εννοιών. Αφού η συγκρότηση της μαθηματικής γνώσης είναι μεν μια υποκειμενική νοητική διαδικασία, συμβαίνει όμως σε κοινωνικό πλαίσιο με τη χρήση ιστορικά αναπτυγμένων και κοινωνικά καθιερωμένων σημειωτικών συστημάτων.

Η πολιτιστική προσέγγιση, τέλος, στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών εκκινεί από το γεγονός, ότι τα μαθηματικά σημειωτικά συστήματα και πολλοί άλλοι πολιτιστικοί κώδικες και συστήματα νοηματοδότησης διαπλέκονται με πολλούς και πολύπλοκους τρόπους στο σχολείο, όπως και σε άλλα κοινωνικά πεδία και ότι οι σημειωτικές προσεγγίσεις προσφέρουν τη δυνατότητα μιας ενοποιητικής ανάλυσης της διαπλοκής αυτής και των επιπτώσεων της στη συγκρότηση της μαθηματικής γνώσης. Η ανάλυση αυτή έχει μέχρι σήμερα αναπτυχθεί σε δύο διαφορετικές, αλλά και σε κάποιο βαθμό συμπληρωματικές κατευθύνσεις.

Η πρώτη βασίζεται στην παραδοχή, ότι τα μαθηματικά αποτελούν συστατικό στοιχείο ενός πολιτισμού, οπότε τα συστήματα των μαθηματικών συμβόλων αποτελούν εργαλεία σκέψης, η χρήση των οποίων σε πολιτιστικά εντοπισμένες δραστηριότητες παραγωγής νοημάτων επιτρέπει ή εμποδίζει, περιορίζει ή εμπλουτίζει κατά περίπτωση, την ανάπτυξη των δραστηριοτήτων ή και την παραγωγή συγκεκριμένων μαθηματικών νοημάτων. Θεμελιώδεις έννοιες των αναλύσεων του τύπου αυτού είναι η πλαισίωση και η διαχρονικότητα, η οποίες τονίζουν τη εξάρτηση της συγκρότησης των μαθηματικών νοημάτων από τους στόχους και το περιεχόμενο των πολιτιστικά καθιερωμένων δραστηριοτήτων, όπως επίσης και από την ιστορία ενός πολιτισμού. Από διδακτική άποψη, αυτό σημαίνει, μεταξύ άλλων, την ανάλυση των ομοιοτήτων και των διαφορών του σχολικού και του κοινωνικο-πολιτιστικού περιβάλλοντος των μαθητών από την οπτική των σημειωτικών κωδίκων και τη δημιουργία ενός πλαισίου

διδασκαλίας των μαθηματικών που θα ενσωματώνει τις ομοιότητες και θα γεφυρώνει τις διαφορές, θέτοντας πάντα υπό ερωτηματικό τη διαχωριστική γραμμή μεταξύ μαθηματικών σημείων και άλλων μορφών σημείωσης (ενδεικτικά, Presmeg, 1998).

Η δεύτερη κατεύθυνση της πολιτιστικής προσέγγισης στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών θεωρεί τα μαθηματικά σημειωτικά συστήματα ως σαφώς διαφορετικά από τα άλλα σημειωτικά συστήματα, αν και σε κάποιο βαθμό αλληλο-συσχετιζόμενα, οπότε ενδιαφέρουν οι όροι της συγκρότησης μαθηματικών εννοιών μέσα από τα νοήματα που παράγει η σύγχρονη χρήση του μαθηματικού και του μη μαθηματικού λόγου (ενδεικτικά Emori & Winslow 2002). Η ομοιότητα και η αντιστοιχία των μαθηματικών και των μη μαθηματικών σημειωτικών συστημάτων, καθώς διαπλέκονται σε ένα συγκεκριμένο κοινωνικο-πολιτιστικό πλαίσιο, αποτελούν το αντικείμενο των συναφών αναλύσεων και ερευνών, πολλές φορές σε εννοιολογικές βάσεις δανεισμένες από την πολιτισμική ανθρωπολογία.

Μια τελευταία παρατήρηση

Οι σημειωτικές προσεγγίσεις συνεισφέρουν στην καλύτερη κατανόηση των προβλημάτων της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών σε δύο επίπεδα. Σε ένα πρώτο επίπεδο φαίνεται να παρέχουν ένα ενιαίο εννοιολογικό πλαίσιο κι ένα σύνολο όρων και μεθόδων περιγραφής των διαδικασιών παραγωγής μαθηματικών νοημάτων σε συγκεκριμένα πλαίσια δραστηριοτήτων, ενώ σε ένα δεύτερο επίπεδο υποστηρίζουν την ανάπτυξη μιας κοινωνικο-πολιτιστικής θεώρησης των μαθηματικών και της μαθηματικής εκπαίδευσης, αναδεικνύοντας τις διαδικασίες παραγωγής νοημάτων που ενυπάρχουν στα επικοινωνιακά φαινόμενα μέσα από την αναγωγή των σημείων σε πυρήνα της επικοινωνίας (Vile & Lerman, 1996).

Με την παρατήρηση, ότι η σημειωτική θεώρηση της επικοινωνίας επικεντρώνεται στο νόημα και στην ερμηνεία, είναι επομένως αντιθετική σε κάθε υπεραπλουστευτικό υπόδειγμα μετάδοσης, το οποίο εξισώνει τη νόημα με το περιεχόμενο ενός μηνύματος. Τα σημεία δεν 'μεταδίδουν' απλώς νοήματα, αλλά συνιστούν το μέσο με το οποίο δημιουργούνται τα νοήματα, επομένως κανένα νόημα δεν

απορροφάται παθητικά, αλλά δημιουργείται κατά την ενεργητική διαδικασία της ερμηνείας.

Σε κάθε περίπτωση, η συγκρότηση και η ευχέρεια χειρισμού των μαθηματικών εννοιών και αντικειμένων εξαρτάται καθοριστικά από τη γνώση και την ευχέρεια χειρισμού των μαθηματικών σημειωτικών συστημάτων. Τα μαθηματικά σύμβολα και οι αναπαραστάσεις των μαθηματικών εννοιών μπορεί να συμβάλλουν σημαντικά στην ιδιοποίηση της μαθηματικής γνώσης, όπως μπορεί και να δημιουργήσουν σοβαρά διδακτικά προβλήματα. Αποτελούν ταυτόχρονα μέσα επικοινωνίας και εργαλεία χειρισμού της μαθηματικής γνώσης, οπότε απαιτούν συνεργατικές, κοινωνικές, δραστηριότητες, οι οποίες θα παρέχουν ένα πλαίσιο επικοινωνίας και θα στοχεύουν στην από κοινού επίλυση προβλημάτων. Αυτό συνεπάγεται μια άλλου τύπου διδασκαλία των μαθηματικών, τουλάχιστον ως προς τα κοινωνικά χαρακτηριστικά και τις εκπαιδευτικές της δραστηριότητες.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

- Βυγκότσκι, Λ. (1988), *Γλώσσα και σκέψη*, Αθήνα: Εκδόσεις Γνώση.
- Chassapis, D. (2002) Social groups in mathematics education research: An investigation into mathematics education-related research articles published from 1971 to 2000. In P. Valero & O. Skovsome (Eds) *Proceedings of Third International Mathematics Education and Society Conference*, 1, Centre for Research in Learning Mathematics, Danish University of Education, 273-281.
- Emori, H. and Winsløw, C. (2002) Elements of a semiotic analysis of the secondary level classroom in Japan. In: *Pre-conference proceedings of ICMI comparative study conference*. Hong Kong: University of Hong Kong.
- Ernest, P. (2002), A semiotic perspective of mathematical activity, *Paper presented in the Discussion Group on Semiotics in Mathematics Education at the 26th PME International Conference*, United Kingdom, University of East Anglia, Norwich July 21- 26, 2002, (<http://www.math.uncc.edu/~sae/dg3/ernest.pdf>).

- Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. New York: SUNY Press.
- Gelman, R. And Gallistel, C. -R. (1978) The Child's understanding of number, Cambridge, MA.: Harvard University Press.
- Halliday, M. A. K. (1975), Some aspects of sociolinguistics. Στο E Jacobson (Ed) *Interactions between linguistics and mathematics education* (σσ. 64 - 73), Paris: UNESCO.
- Hanna, G. & Sidoli, N. (2002) The story of ESM. *Educational Studies in Mathematics*, 50(2), 123-156.
- Kieran,, C. (1994) Doing and seeing things differently: A 25-year retrospective of mathematics education research on learning, *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 583-607.
- Lemke, J. (2002). Mathematics in the middle: measure, picture, gesture, sign, and word. In A. Sáenz-Ludlow, M. Anderson, S. Zellweger, and V. Cifarelli (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From thinking to interpreting to knowing*. Ottawa: Legas Publishing, 215-234
- Lerman, S. & Τσατσαρώνη, Α. (2004) Η ερευνητική δραστηριότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης ως κοινωνική πρακτική / πρακτική λόγου. Μια απόπειρα παραγωγής νοήματος. *Σ' αυτόν τον τόμο*.
- Lubienski, S. T. & Bowen, A. (2000) Who's counting? A Survey of mathematics education research 1982-1998. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(5), 626-633.
- Morgan, C. (2001). What does social semiotics have to offer mathematics education research? *Paper presented in the Discussion Group on Semiotics in Mathematics Education at the 26th PME International Conference*, United Kingdom, University of East Anglia, Norwich July 21- 26, 2002, (www.math.uncc.edu/~sae/morgan.pdf).
- Morris, C. W. (1938/1970), *Foundations of the Theory of Signs*. Chicago: Chicago University Press.
- Peirce, Ch. (1868) Questions Concerning Certain Faculties Claimed for Man, *Journal of Speculative Philosophy*, 2, 103-114. Αναδημοσιευμένο στο James Hoopes (Ed.), *Perice on sings* (1991, 34-53). Chapel Hill: The University of North Carolina Press.
- Peirce, Ch. (1981), Η Λογική ως σημειωτική: Η θεωρία των σημείων. Στο *Κείμενα Σημειολογίας*, Αθήνα: Νεφέλη.

- Presmeg, N. C. (1998). A semiotic analysis of students' own cultural mathematics. Research Forum Report, in A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.1, 136-151.
- Radford, L. (2001). On the Relevance of Semiotics in Mathematics Education. Paper presented in the Discussion Group on Semiotics in Mathematics Education at the 25th PME International Conference, The Netherlands, University of Utrecht, July 12-17, 2001, (<http://www.math.uncc.edu/~sae/dg3/RADFORDSUMMARY-PME25-DG3.pdf>).
- Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics* 42, 237-268.
- Sebeok, T. A. (1994): *An Introduction to Semiotics*. London: Pinter.
- Sfard, A. (2000) Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb et al. (Eds), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: perspectives on Mathematical Discourse, Tools, and Instructional Design*. Mahwah, N.J.: Erlbaum.
- Steinbring, H. (2002). What makes a sign a mathematical sign? An epistemological perspective on mathematical interaction. *Paper presented in the Discussion Group on Semiotics in Mathematics Education at the 26th PME International Conference*, United Kingdom, University of East Anglia, Norwich July 21- 26, 2002, (<http://www.math.uncc.edu/~sae/dg3/steinbring.pdf>).
- Turner, G. (1992): *British Cultural Studies: An Introduction*, New York: Routledge
- Winsløw, C. (2003) Semiotics as an analytic tool for the didactics of mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education*, υπό δημοσίευση, (http://www.naturdidak.ku.dk/winslow/NOMAD_ICME10.pdf).
- Vile, A. and Lerman, S (1996), Semiotics as a descriptive framework in mathematical domains. *Proceedings of the 20th meeting of the International group for the Psychology of Mathematics Education*, Valencia, Spain, v. 4, p. 395-402.

Το βιβλίο στη διδασκαλία των μαθηματικών:

Ένα πρόβλημα υπό διαρκή διερεύνηση

Εισαγωγικά σχόλια: περί σχολικών βιβλίων γενικώς

Μια φαινομενικά κοινότυπη, αλλά αναγκαία προκείμενη κάθε συζήτησης περί σχολικών βιβλίων γενικώς είναι ότι κάθε σχολικό βιβλίο γράφεται εκ προθέσεως για την επιδίωξη της υλοποίησης συγκεκριμένων διδακτικών στόχων, οι οποίοι είναι σαφώς διατυπωμένοι και προτάσσονται του αντίστοιχου αναλυτικού προγράμματος, το οποίο επίσης καθορίζουν. Μαζί με τη διδασκαλία, και ως μέσα διδασκαλίας, τα σχολικά βιβλία υλοποιούν τις επιλογές του αναλυτικού προγράμματος των σχολικών μαθημάτων. Το δεδομένο αυτό σημαίνει ότι κάθε σχολικό - διδακτικό, βιβλίο επιλέγει, οργανώνει και μεταβιβάζει τις αξιολογημένες ως σημαντικές - από μια συγκεκριμένη βεβαίως οπτική - γνώσεις και πρακτικές και ως εκ τούτου αναγκαίες για τη διδασκαλία τους στο σχολείο.

Γενικά, επομένως, τα σχολικά βιβλία αποτελούν συλλογές κειμένων, επιστημονικών ή μυθοπλαστικών, κοσμικών ή θρησκευτικών, τα οποία οι μαθητές οφείλουν να μελετούν, ώστε να πιστοποιηθούν από το σχολείο και με τα κριτήρια του σχολείου ως ικανοί για την προαγωγή τους στην επόμενη εκπαιδευτική βαθμίδα και εντέλει ως εγγράμματοι με την ολοκλήρωση των κύκλων της βασικής εκπαίδευσης. Άρα, η μορφή, το περιεχόμενο, ο λόγος και η ιδεολογία των σχολικών βιβλίων αποτελεί μια επικυρωμένη και επίσημα αναγνωρισμένη εκδοχή της επιδιωκόμενης εγγραματοσύνης σε ένα συγκεκριμένο τομέα γνώσης και πρακτικής και εν προκειμένου στα μαθηματικά. Όπως έχει αναλυθεί από τον Bernstein (1989), αυτό που αποκαλείται σχολική γνώση συγκροτείται από κοινού από το αναλυτικό πρόγραμμα το οποίο ορίζει ποια είναι η έγκυρη γνώση, από την παιδαγωγική πρακτική η οποία ορίζει ποια είναι η έγκυρη μεταβίβαση αυτής της γνώσης και από την αξιολόγηση η οποία ορίζει ποια είναι η έγκυρη απόκτηση της γνώσης.

Η συγγραφή, επομένως, και γενικότερα η παραγωγή ενός σχολικού βιβλίου αποτελεί συστατικό στοιχείο μιας επιλεκτικής λογικής, η οποία διαμορφώνεται από σύνθετες ιστορικο-κοινωνικές διαδικασίες και η οποία χαρακτηρίζει ταυτόχρονα και το αντίστοιχο αναλυτικό πρόγραμμα. Μια επιλεκτική λογική δια της οποίας συγκεκριμένα κοινωνικά και πολιτικά συμφέροντα συγκροτούν αυτό που θεωρείται αρχικά έγκυρη σχολική και τελικά σε μεγάλο βαθμό και αξιόλογη δημόσια γνώση. Τα σχολικά βιβλία, επομένως, μπορούν να θεωρηθούν ως μέσα παραγωγής και διάδοσης, όχι μόνο των επικυρωμένων ως έγκυρων γνώσεων, αλλά και συγκεκριμένων αξιών απέναντι στις γνώσεις αυτές. Ως μέσα, δηλαδή, διαμόρφωσης των σχέσεων των παιδιών με την κοινωνική λειτουργία των γνώσεων αυτών και των προτύπων αναφοράς και πρακτικής χρησιμοποίησης τους στην καθημερινή ζωή. Αποτέλεσαν ιστορικά και αποτελούν στο παρόν, σε διαφορετική βεβαίως έκταση και με διαφορετική μορφή κατά μάθημα, πρωτίστως μέσα μεταβίβασης στις νέες γενιές θρησκευτικών, πολιτισμικών, κοινωνικών και πολιτικών αξιών, όπως επίσης και πρακτικών συμπεριφορών και δευτερευόντως εργαλεία μάθησης και ανάπτυξης νοητικών δεξιοτήτων.

Γι' αυτό ακριβώς το λόγο, τα σχολικά βιβλία αποτελούν βασικά εργαλεία της κοινωνικής κατασκευής της εγγραματοσύνης και προφανώς πολύ συχνά αντικείμενα έντονης διαμάχης με εμφανή ιδεολογικά και πολιτικά προτάγματα. Ο κρατικός έλεγχος στους όρους παραγωγής, διανομής και χρήσης του σχολικού βιβλίου, ιδιαίτερα στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα αλλά όχι μόνον και όχι πάντα με τις ίδιες μορφές και μηχανισμούς, συναρτάται με αυτές ακριβώς τις ιδεολογικο-πολιτικές λειτουργίες του.

Με την απόλυτη σαφήνεια και τον καθόλου πολιτικά συγκαλυμμένο λόγο των πρώτων σχετικών νομοθετικών ρυθμίσεων δια των οποίων οργανώθηκε το σχολείο στη χώρα μας (και τις αναγκαίες προσαρμογές στον τονισμό) το Διάταγμα της 1^{ης} Απριλίου 1836 «περί βιβλιοπωλείου εν τη Βασιλική Τυπογραφία», ορίζει ότι « ... πρέπει να φυλαχθή ως αξίωμα ότι πρέπει όλα τα διδασκαλεία (εννοεί διδακτήρια) του Κράτους, και εξαιρέτως τα ελληνικά και κοινά σχολεία, συμφώνως με τον σκοπόν του παρόντος διατάγματος, να προβλέπωνται αδιακόπως κατά την αληθή ανάγκη των με τοιαύτα βιβλία και παραδείγματα, τα

οποία να μην εμπεριέχουν διδασκαλίας και γνώμας επιβλαβείς εις την θρησκείαν ή εις την πολιτείαν ή εις την ηθικήν και πνευματική του ανθρώπου ανάπτυξιν και εκπαιδευσιν, και όντα χρήσιμα εις τον σκοπόν μιας φρονίμου παιδαγωγίας να συντείνουν εις τας κοινάς και αναποφεύκτους δια το εξής χρείας της Ελλάδος και να επιταχύνωσι την εκπαιδευσιν του λαού δι' ενός λεκτικού καθαρού και καλλωπισμένου ... ». Η λογική αυτή, άσχετα από τη ρητή ή μη διατύπωση της, καθόρισε την παραγωγή και τη χρήση των σχολικών βιβλίων, όλων των μαθημάτων, στην Ελλάδα, αλλά και στην πλειονότητα των εθνικών εκπαιδευτικών συστημάτων, βεβαίως με τις αντίστοιχες κατά περίπτωση και τις εκάστοτε πολιτικές, κοινωνικές, πολιτιστικές ή άλλες ιδιομορφίες (Χασάπης 2007).

Τα σχολικά βιβλία, αρχικά κυρίως είναι αναγνωστικά και θρησκευτικής κατήχησης και αργότερα βιβλία αριθμητικής, γεωμετρίας και φυσικών επιστημών, αρχίζουν να παράγονται μαζικά με την εμφάνιση της τυπογραφίας στη Δυτική Ευρώπη και να χρησιμοποιούνται ευρέως, ιδίως στα γερμανικά, σχολεία τον 16^ο αιώνα κατά τη διάρκεια της Προτεσταντικής Μεταρρύθμισης. Τα Λουθηριανά σχολικά βιβλία, τα οποία εισήγαγαν τη λογική και έκτοτε καθόρισαν τα βασικά χαρακτηριστικά των σχολικών βιβλίων, αποτελούσαν συλλογές διασκευασμένων, συντομευμένων ή και σχολιασμένων θρησκευτικών και κοσμικών κειμένων σε μια αλληλουχία, καθορισμένη με διάφορα κατά περίπτωση κριτήρια. Κατά τον επόμενο αιώνα στις αυτοκρατορίες και αργότερα κατά τον 18^ο και 19^ο αιώνα με τη συγκρότηση των εθνικών κρατών, τα σχολικά βιβλία σε συνδυασμό με την επιθεώρηση των σχολείων και τις εξετάσεις των μαθητών αποτέλεσαν τον πυρήνα των προσπαθειών για την τυποποίηση της διδασκαλίας κάθε μαθήματος σε όλα τα σχολεία των διαφορετικών γεωγραφικά ή και πολιτισμικά περιοχών μιας κρατικής επικράτειας, όπως επίσης και για την τυποποίηση των εθνικών γλωσσών.

Αυτά τα ιστορικά δεδομένα διαμόρφωσαν τις βασικές αρχές της μορφής και του περιεχομένου των σχολικών βιβλίων, ώστε να ενσωματώνουν και να υλοποιούν κανονιστικές αρχές για το τι πρέπει να διδαχθεί στα παιδιά, πότε πρέπει να διδαχθεί, με ποιες γλωσσικές μορφές και με βάση ποιες παιδαγωγικές παραδοχές.

Οι κανονιστικές αυτές αρχές, απολύτως ιδεολογικές, προσέλαβαν κατά τη διάρκεια του 20ου αιώνα επιστημονικά επιχρίσματα με τη βοήθεια της εκπαιδευτικής ψυχολογίας. και παράλληλα συσκοτίστηκαν από την κυριαρχία του δόγματος για την ουδετερότητα της επιστήμης και της τεχνολογίας, όπως και της ίδιας της εκπαιδευτικής διαδικασίας εννοούμενης πλέον ως διαδικασία κυρίως τεχνική.

Τα διδακτικά βιβλία μαθηματικών: μορφή και περιεχόμενο

Όπως όλα τα σχολικά διδακτικά βιβλία, αλλά σε μεγαλύτερο βαθμό τα διδακτικά βιβλία των μαθηματικών παίζουν έναν ιδιαίτερο ρόλο στην καθημερινή πρακτική της διδασκαλίας των μαθηματικών, την οποία ουσιαστικά οργανώνουν, αφού καθορίζουν άμεσα το περιεχόμενο και την αλληλουχία των μαθημάτων. Παράλληλα, διαμορφώνουν τη δομή της ίδιας της διδασκαλίας στα πρότυπα των διδακτικών ενοτήτων τους μέσα από τα παραδείγματα τα οποία προσφέρουν, αλλά κυρίως μέσα από τις ασκήσεις και τα προβλήματα τα οποία προτείνουν στους μαθητές (και στους δασκάλους) για επίλυση.

Σε μια αξιολόγηση των διδακτικών βιβλίων των μαθηματικών πριν από ογδόντα χρόνια στις ΗΠΑ σημειώνονταν ότι *«το διδακτικό βιβλίο είναι το σπουδαιότερο από τα εργαλεία του δασκάλου. Στον καθορισμό του αντικειμένου των μαθησιακών εμπειριών των μαθητών μέρα με τη μέρα είναι πιο αποφασιστικός παράγοντας από το εγκεκριμένο αναλυτικό πρόγραμμα. Στον καθορισμό της μεθόδου διδασκαλίας ώρα με την ώρα έχει μεγαλύτερη επιρροή από τις οδηγίες διδασκαλίας. Στην πραγματικότητα τα διδακτικά βιβλία που χρησιμοποιούνται από μαθητές και δασκάλους αποτελούν το πραγματικό αναλυτικό πρόγραμμα και την πραγματική μεθοδολογία της διδασκαλίας. Αυτό δεν αποτελεί μια συνηθισμένη θεωρία αλλά ένα πραγματικό γεγονός»* (Fuller 1928, όπως αναφέρεται στο Chavez-Lopez 2003, σ. 6).

Σε μια πρώτη ανάγνωση όλα τα διδακτικά βιβλία των μαθηματικών οργανώνουν το περιεχόμενο τους σε τρία μέρη: μέρος πρώτο, παρουσίαση θεωρητικών γνώσεων ή τεχνικών, μέρος δεύτερο, παραδείγματα και μέρος τρίτο, ασκήσεις και προβλήματα.

Το πρώτο μέρος στο οποίο υποστηρίζεται, κατά τις προθέσεις των συγγραφέων, η ιδιοποίηση των διδασκόμενων μαθηματικών εννοιών και μεθόδων οι οποίες παράλληλα αναπτύσσονται κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών στη σχολική τάξη, ακολουθείται από παραδείγματα, τα οποία αποτελούν ένα είδος προτύπων για την επίλυση των ασκήσεων και των προβλημάτων του τρίτου μέρους. Οι ασκήσεις και τα προβλήματα καταλαμβάνουν συνήθως την μεγαλύτερη έκταση κάθε ενότητας του βιβλίου και, κατά κανόνα, διατάσσονται σε μια κλίμακα δυσκολίας από το εύκολο στο δύσκολο, στη βάση μιας υπόθεσης η οποία έρχεται από την παράδοση του συμπεριφορισμού σύμφωνα με την οποία η μάθηση είναι αποτέλεσμα μιας βήμα προς βήμα εξάσκησης (Love & Pimm 1996).

Για την ανάλυση του περιεχομένου των διδακτικών βιβλίων μαθηματικών και της οργάνωσης του έχουν προταθεί διάφορα σχήματα ταξινόμησης από διάφορες οπτικές, κάθε μια από τις οποίες αναδεικνύει και διαφορετικές όψεις τους, τονίζοντας και διαφορετικά στοιχεία του ρόλου τους στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Ο Van Dormolen (1986), για παράδειγμα, τονίζοντας το περιεχόμενο των διδακτικών βιβλίων μαθηματικών διακρίνει σε κάθε διδακτική ενότητα ένα θεωρητικό μέρος (ορισμοί, αξιώματα, θεωρήματα), ένα αλγοριθμικό μέρος (κανόνες, τεχνικές, οδηγίες), ένα λογικό μέρος (κανόνες προσέγγισης και χρήσης του θεωρητικού μέρους), ένα μεθοδολογικό μέρος (μέθοδοι) και ένα επικοινωνιακό μέρος (συμβολισμοί και κανόνες γραφής των μαθηματικών). Αντίθετα, ο Dowling (1998) προτάσσει μια κοινωνιολογική ανάλυση του περιεχομένου και της δομής των διδακτικών βιβλίων των μαθηματικών διαπιστώνοντας ότι και το μαθηματικό τους περιεχόμενο και η διδακτική τους λογική διαφοροποιούνται με κριτήρια συναρτημένα με τα εκπαιδευτικά χαρακτηριστικά των μαθητών στους οποίους απευθύνονται και τους διαφορετικούς τύπους των σχολείων για τα οποία προορίζονται (τυπικά ή πρότυπα, γενικά ή τεχνικά σχολεία).

Η έρευνά για τα διδακτικά βιβλία μαθηματικών: Μια σκιαγράφηση του πεδίου

Παρόλο που η έρευνα για τα διδακτικά βιβλία, το περιεχόμενο, τη δομή, τη χρήση τους από μαθητές και δασκάλους, το ρόλο τους στη διδασκαλία και άλλα συναφή ζητήματα αναπτύχθηκε ήδη από τη δεκαετία του 1930 παράλληλα με τη γενικότερη ανάπτυξη της εκπαιδευτικής έρευνας (ενδεικτικά, Bagley 1931), τα διδακτικά βιβλία των μαθηματικών ως ιδιαίτερο είδος διδακτικών βιβλίων αποτέλεσαν αντικείμενο έρευνας και ανάπτυξης πολύ αργότερα, όταν κατά τη δεκαετία του 1960 πραγματοποιήθηκαν οι ριζικές μεταρρυθμίσεις των σχολικών μαθηματικών, υπό την καθοδήγηση του ΟΟΣΑ, σε όλες σχεδόν τις χώρες του κόσμου.

Οι δημοσιευμένες έρευνες για τα διδακτικά βιβλία των μαθηματικών μπορεί, με γενικούς όρους, να ταξινομηθούν σε τρεις κατηγορίες:

1. έρευνες για τη δομή και το περιεχόμενο των βιβλίων,
2. έρευνες για τη χρήση των βιβλίων από μαθητές και δασκάλους,
3. έρευνες για το θεσμικό καθεστώς παραγωγής και χρήσης των βιβλίων καθώς και για το ρόλο τους στις εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις.

Οι έρευνες για τη δομή και το περιεχόμενο των διδακτικών βιβλίων μαθηματικών μπορεί, όπως προτείνουν οι Pepin & Haggarty (2001), να ταξινομηθούν στις ακόλουθες επιμέρους τέσσερες κατηγορίες.

Έρευνες οι οποίες προσεγγίζουν τη δομή και το περιεχόμενο των διδακτικών βιβλίων μαθηματικών με κριτήρια

- (1) *τις μαθηματικές προθέσεις των βιβλίων*, οπότε αναλύουν το μαθηματικό περιεχόμενο των βιβλίων, τις υπονοούμενες παραδοχές τους για τη μαθηματική γνώση και τη μορφή παρουσίασης της μαθηματικής γνώσης (ενδεικτικά, Pickreign 1996, Raman 1998),
- (2) *τις παιδαγωγικές προθέσεις των βιβλίων*, οπότε αναλύουν τους τρόπους με τους οποίους ενισχύεται ή δεν ενισχύεται η μάθηση από το μαθηματικό περιεχόμενο των διδακτικών βιβλίων, από τη μέθοδο παρουσίασης του περιεχομένου και τις διδακτικές τεχνικές

που τα βιβλία υιοθετούν και από τις μορφές παρουσίασης και τη ρητορική των κειμένων των βιβλίων (ενδεικτικά, Fischer 1997),

- (3) τις κοινωνικές αναφορές των βιβλίων (ενδεικτικά, Clarkson 1993, Garcia et al. 1990) και
- (4) τις πολιτισμικές αξίες, οι οποίες αποτυπώνονται στα βιβλία, οπότε αναλύουν από αντίστοιχες οπτικές το περιεχόμενο τους (ενδεικτικά, Seah & Bishop 2000).

Στο πλαίσιο της ταξινόμησης αυτής, ένα μεγάλο μέρος των ερευνών για τη δομή και το περιεχόμενο των διδακτικών βιβλίων μαθηματικών περιλαμβάνει έρευνες συγκριτικής ανάλυσης των διδακτικών βιβλίων στο σύνολο τους ή σε στοιχεία του περιεχομένου τους κατά χώρα ή και χρονική περίοδο, όπως η ανάλυση του Bierhoof (1996) για τη δομή και το περιεχόμενο των διδακτικών βιβλίων μαθηματικών του πρωτοβάθμιου σχολείου στην Βρετανία, Γερμανία και Ελβετία, των Park & Leung (2002) για τα βιβλία στην Κίνα, Αγγλία, Ιαπωνία, Κορέα και ΗΠΑ, των Perin & Haggarty (2001) για τα βιβλία των κατώτερου κύκλου της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Αγγλία, Γαλλία και Γερμανία ή των Valverde και άλλων (2002) οι οποίοι στο πλαίσιο της TIMSS (Τρίτη Διεθνής Μελέτη των Μαθηματικών και των Φυσικών Επιστημών) ανέλυσαν τα σχολικά βιβλία μαθηματικών σε συνάρτηση με τα αντίστοιχα αναλυτικά προγράμματα πενήντα περίπου χωρών.

Οι έρευνες για τη χρήση των βιβλίων από μαθητές και δασκάλους μπορεί, επίσης σύμφωνα με τις Perin & Haggarty (2001), να διακριθούν σε έρευνες για

- (1) το κύρος των διδακτικών βιβλίων στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών,
- (2) τους χρήστες των διδακτικών βιβλίων μαθηματικών (δασκάλους, μαθητές, γονείς),
- (3) τους τρόπους χρήσης των βιβλίων από μαθητές, δασκάλους, γονείς και άλλους,
- (4) τη διαμεσολάβηση του περιεχομένου των διδακτικών βιβλίων από τους δασκάλους και

(5) τις εκπαιδευτικές παραδόσεις που σχετίζονται με τα σχολικά βιβλία.

Στις κατηγορίες αυτές περιλαμβάνονται έρευνες για τον τρόπο με το οποίο οι δάσκαλοι χρησιμοποιούν το διδακτικό βιβλίο μαθηματικών στις σχολικές τάξεις, όπως της Pepin (1997) για την Αγγλία, Γαλλία και Γερμανία, των Freeman & Porter (1989) για τις ΗΠΑ, των Χασάπη & Βλάχου (2008) για την Ελλάδα, συγκριτικές έρευνες όπως των Sosniak & Stodolsky (1993) για τη χρήση των βιβλίων από τους δασκάλους κατά τη διδασκαλία διαφόρων μαθημάτων σε μια τάξη του πρωτοβάθμιου σχολείου των ΗΠΑ ή όπως του Reys και άλλων (2003) για τη χρήση διαφορετικών διδακτικών βιβλίων για τη διδασκαλία μαθηματικών σε ίδιες σχολικές τάξεις, έρευνες για την έκταση της χρήσης του διδακτικού βιβλίου και για τον βαθμό εξάρτησης της διδασκαλίας των μαθηματικών από το σχολικό βιβλίο, όπως των Grouws & Smith (2000) ή του Whittington (2000) στις ΗΠΑ, έρευνες για τη συνάφεια της χρήσης του διδακτικού βιβλίου με την επίδοση των μαθητών, όπως του Foxman (1999), και άλλες για διάφορες όψεις και ζητήματα της χρήσης των διδακτικών βιβλίων των μαθηματικών.

Οι έρευνες για το θεσμικό καθεστώς παραγωγής και χρήσης των βιβλίων, όπως και για το ρόλο τους στις εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις εντοπίζονται στην συγχρονική και διαχρονική ανάλυση συναφών ζητημάτων, όπως είναι για παράδειγμα οι πολιτικές επιλογής και υιοθέτησης σχολικών βιβλίων (Seeley 2003, Tyson-Bernstein & Woodward 1991), η συνάφεια αναλυτικών προγραμμάτων και αντίστοιχων σχολικών βιβλίων (Freeman & Porter 1989), το διδακτικό κύρος τους, οι σχέσεις δασκάλων με τα σχολικά βιβλία (Colloby 2003, Remillard 2000), αλλά και οι σχέσεις μαθητών και γονέων, η αποτελεσματικότητά τους ως φορέων εισαγωγής καινοτομιών στη διδασκαλία των μαθηματικών (Wilson & Goldenberg, 1998).

Επιλεγόμενα σχόλια

Όπως όλες οι έρευνες υποδεικνύουν, ο ρόλος του διδακτικού βιβλίου και στην οργάνωση και στο περιεχόμενο και στη μεθοδολογία της διδασκαλίας των μαθηματικών είναι καταλυτικός και η διαπίστωση αυτή έχει μια διεθνή ισχύ. Όπως υπογραμμίζουν οι Robitaille &

Travers (1992), συνοψίζοντας τα πορίσματα μιας διεθνούς έρευνας «*οι δάσκαλοι των μαθηματικών σε όλες τις χώρες βασίζονται πάρα πολύ για την καθημερινή δουλειά τους στα διδακτικά βιβλία και αυτό χαρακτηρίζει τη διδασκαλία των μαθηματικών περισσότερο από κάθε άλλο μάθημα του αναλυτικού προγράμματος. Οι δάσκαλοι αποφασίζουν τι θα διδάξουν, πως θα το διδάξουν και τι είδους ασκήσεις θα βάλουν στους μαθητές τους κυρίως με βάση το περιεχόμενο του εγκεκριμένου διδακτικού βιβλίου* (σ. 706).

Από το άλλο μέρος, τα διδακτικά βιβλία μαθηματικών απευθύνονται πρωτίστως στους μαθητές και οι συγγραφείς τους θεωρούν – τουλάχιστον τυπικά – ως κύριους αναγνώστες και χρήστες των βιβλίων τους μαθητές (Kang & Kilpatrick, 1992). Όμως, οι δάσκαλοι είναι αυτοί οι οποίοι διαμεσολαβούν μεταξύ μαθητών και διδακτικών βιβλίων με ποικίλους τρόπους και κατά τη διάρκεια και στο περιθώριο της διδασκαλίας των μαθηματικών, και όπως έχει χαρακτηριστικά διατυπωθεί από τους Love & Pimm (1996) «*ακόμα και στην περίπτωση που ο υποτιθέμενος αναγνώστης είναι ο μεμονωμένος μαθητής, τα διδακτικά βιβλία υπάρχουν σε ένα ευρύτερο πλαίσιο άλλων πηγών στις οποίες συμπεριλαμβάνονται οι περιεχόμενες στα βιβλία του δασκάλου οδηγίες χρήσεις τους στην τάξη. Ο δάσκαλος αναμένεται να είναι παρών πριν ή κατά τη διάρκεια της ανάγνωσης του διδακτικού βιβλίου για να διευκρινίζει, να επεκτείνει το περιεχόμενο του ή, να απαλείφει τις δυσκολίες κατανόησης του*» (σ. 385).

Η σχέση του δασκάλου, επομένως, με το διδακτικό βιβλίο μαθηματικών, όπως και με το αναλυτικό πρόγραμμα που αυτό υλοποιεί, είναι συστατική της διδακτικής του πρακτικής.

Γι' όλα αυτά και πολλά περισσότερα που έστω και η απλή αναφορά τους στο παρόν κείμενο είναι αδύνατη, ο προβληματισμός - θεωρητικός και ερευνητικός - για το περιεχόμενο, τη δομή, τη χρήση, το θεσμικό πλαίσιο, το ρόλο τους στη μάθηση και στη διδασκαλία και άλλα συναφή με τα διδακτικά βιβλία των μαθηματικών ζητήματα είναι διαρκής και ως εκ τούτου η θεωρητική και ερευνητική δραστηριότητα αναγκαία.

Βιβλιογραφικές αναφορές

- Bagley, W. C. (1931). The textbook and methods of teaching. In G. M. Whipple (Ed.), *The textbook in American education*, 30th Yearbook of the National Society for the Study of Education, Chicago: University of Chicago Press.
- Bernstein, B., (1989), *Παιδαγωγικοί κώδικες και κοινωνικός έλεγχος*, Εισαγωγή, μετάφραση, σημειώσεις Ι. Σόλομων, Αθήνα: Εκδόσεις Αλεξάνδρεια.
- Bierhoof, H. (1996). Laying the foundations of Numeracy: A comparison of primary school textbooks in Britain, Germany and Switzerland. *Teaching Mathematics and its Applications*, 15(4), 141-157.
- Chavez-Lopez, O. (2003), *From the textbook to the enacted curriculum: textbook use in the middle school mathematics classroom*, Unpublished Ph. D. Thesis, University of Missouri, Columbia.
- Clarkson, P. (1993). Gender, ethnicity and textbooks. *Australian Mathematics Teacher*, 49(2), 14-16.
- Colloby, R. (2003). Curriculum materials as a professional tool: How a mathematics textbook affected two teachers' learning, *The Elementary School Journal*, 103, 287-311.
- Dowling, P. (1998) *The Sociology of Mathematics Education: mathematical myths/redagogic texts*, London: Falmer Press.
- Fischer, T. A. (1997). A content analysis of United States math textbooks, 1966-1996 from a special education perspective. Doctoral dissertation, University of Wisconsin. (UMI: AAT 9810351)
- Freeman, D. J., & Porter, A. C. (1989), Do textbooks dictate the content of mathematics instruction in elementary schools? *American Educational Research Journal*, 26, 403-421.
- Foxman, D. (1999), *Mathematics textbooks across the world: Some evidence from the Third International Mathematics and Science Study*, Slough: National Federation for Educational Research.
- Fuller, F. D. (1928), *Scientific evaluation of textbooks: An experiment in cooperative evaluation of junior high school mathematics texts*. Boston: Houghton Mifflin.

- Garcia, J., Harrison, N. R., & Torres, J. (1990), The portrayal of females and minorities in selected elementary mathematics series. *School Science and Mathematics*, 90 (1), 2-12.
- Grouws, D. A., & Smith, M. S. (2000). NAEP findings on the preparation and practices of mathematics teachers. In E. A. Silver & P. A. Kennedy (Eds.), *Results from the seventh mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress*, Reston, VA: NCTM, 107-139.
- Kang, W., & Kilpatrick, J. (1992), Didactic transposition in mathematics textbooks, *For the Learning of Mathematics*, 12, 2-7.
- Love, E., & Pimm, D. (1996), 'This is so': a text on texts. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education*, Vol. 1, Dordrecht: Kluwer, 371-409.
- Park, K., & Leung, F. K. S. (2002), A comparison of the mathematics textbooks of China, England, Japan, Korea, and United States. In S. L. Y. Yam & S. Y. S. Lau (Eds.), *ICMI comparative study conference 2002: Pre-conference proceedings Hong Kong: University of Hong Kong*, 225-233.
- Pepin, B. (1997), *Developing an understanding of mathematics teachers in England, France and Germany: an ethnographic study*, unpublished PhD thesis, Reading.
- Pepin, B., & Haggarty, L. (2001), Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures, *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik*, 33(5), 158-175.
- Pickreign, J. R. (1996), *An analysis of mathematics vocabulary and symbols use in five elementary mathematics textbook series*. Doctoral dissertation, University of Kansas. (UMI: AAT 9726564)
- Raman, M. (1998), *Epistemological messages conveyed by high school and college mathematics textbooks*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association. San Diego. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 420523)
- Remillard, J. T. (2000), Can curriculum materials support teachers' learning: Two fourth-grade teachers' use of a new mathematics text, *The Elementary School Journal*, 100 (4), 331-350.

- Reys, R., Reys, B., Lapan, R., Holliday, G., & Wasman, D. (2003), Assessing the impact of standards-based middle grades mathematics curriculum materials on student achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 74-95.
- Robitaille, D. F., & Travers, K. J. (1992). International studies of achievement in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning*, New York: Macmillan, 687-709.
- Seeley, C. L. (2003), Mathematics textbook adoption in the United States. In G. Stanic and J. Kilpatrick (eds.), *A History of Mathematics Education*, vol. 2, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 957-988.
- Seah, W. T., & Bishop, A. J. (2000), Values in mathematics textbooks: A view through two Australasian regions. Paper presented at the Annual Meetings of the American Educational Research Association, New Orleans, LA.
- Sosniak, L. A., & Stodolsky, S. S. (1993), Teachers and textbooks: Materials use in four fourth-grade classrooms, *The Elementary School Journal*, 93, 249-275.
- Tyson-Bernstein, H., & Woodward, A. (1991). Nineteenth century policies for twenty-first century practice: The textbook reform dilemma. In *Textbooks in american society*, Albany, NY: State University of New York Press, 91-104.
- Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002), *According to the Book. Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Van Dormoien, J. (1986) Textual analysis, in: B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds), *Perspectives on Mathematics Education*, Dordrecht: Reidel.
- Whittington, D. (2000), 2000 National Survey of Science and Mathematics Education: Status of middle school mathematics teaching. Chapel Hill, NC: Horizon Research, Inc. <http://2000survey.horizon-research.com/reports/mid-math.php>
- Wilson, M. S., & Goldenberg, M. P. (1998). Some conceptions are difficult to change: One middle school mathematics teachers' struggle. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1, 269-293.

Χασάπης Δ. & Βλάχου Μ. (2008), Η χρήση του σχολικού βιβλίου στη διδασκαλία των μαθηματικών του Δημοτικού σχολείου. Στο Δ. Χασάπης (επιμ.) *Το βιβλίο στη διδασκαλία των μαθηματικών, 7^ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, Ομάδα Έρευνας Μαθηματικής Εκπαίδευσης, Θεσσαλονίκη, 177-190..

Χασάπης, Δ. (2007), Περί σχολικών βιβλίων γενικώς, αλλά όχι αορίστως, *Ευθέματα, Κυριακάτικη Αυγή*, 2 Σεπτ. 2007

Η διαμεσολάβηση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών

Ο ρόλος της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία τους

Η διαμεσολάβηση της ιστορίας των μαθηματικών στη διερεύνηση της μάθησης και στη διδασκαλία των μαθηματικών με στόχο τη βελτίωση των αποτελεσμάτων της, είναι μια πολύ παλιά ιδέα. Διατυπώθηκε ως πρόταση με σχετική πληρότητα στις αρχές της δεκαετίας του 1960 στα πλαίσια των συζητήσεων που αναπτύχθηκαν εκείνη την εποχή για την μεταρρύθμιση της μαθηματικής εκπαίδευσης και έκτοτε επανέρχεται με περισσότερη ή λιγότερη έμφαση και με διάφορες αφορμές σε συστάσεις διεθνών και εθνικών συλλογικών οργάνων (όπως είναι η Διεθνής Επιτροπή Μαθηματικής Εκπαίδευσης – ICMI, το Εθνικό Συμβούλιο Εκπαιδευτικών Μαθηματικών των ΗΠΑ – NCTM, 1989 ή η Μαθηματική Ένωση Αμερικής των ΗΠΑ), σε επεξεργασίες ειδικών ομάδων μελέτης (όπως είναι η Διεθνής Ομάδα Μελέτης των Σχέσεων Ιστορίας και Παιδαγωγικής των Μαθηματικών), σε εισηγήσεις και συζητήσεις διεθνών και εθνικών συνεδρίων (όπως το 6^ο Διεθνές Συνέδριο για τη Μαθηματική Εκπαίδευση του Διεθνούς Συμβουλίου Μαθηματικής Εκπαίδευσης - ICMI, Σεβίλλη Ισπανίας, 1996 ή τα συνέδρια της Βρετανικής - BSHM ή της Ιταλικής – SISM Εταιρείας για την Ιστορία των Μαθηματικών) και σε πλήθος δημοσιευμάτων σε περιοδικά και συλλογικούς τόμους που αναφέρονται σε ζητήματα μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης (εντελώς ενδεικτικά, Katz, 2000, Swetz et. al., 1995)

Από όλη αυτή τη δραστηριότητα και το πλήθος των αναλύσεων φαίνεται να προκύπτει ως γενικό συμπέρασμα μια ομοφωνία για τη θετική συμβολή που η διαμεσολάβηση της ιστορίας των μαθηματικών φαίνεται να έχει στη διερεύνηση της μάθησης και στη διδασκαλία των μαθηματικών. Ο Fauvel (1991) μάλιστα, ένας από τους πρωτεργάτες και δραστήριο μέλος των συζητήσεων για την εισαγωγή της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο απαριθμεί σε ένα μόνο κείμενο δέκα πέντε λόγους για τους οποίους οι

εκπαιδευτικοί οφείλουν να καταστήσουν την ιστορία συστατικό στοιχείο της διδασκαλίας των μαθηματικών¹. Τόσο στο συγκεκριμένο όσο και σε παρόμοια κείμενα (για παράδειγμα, Avital 1995, Bidwell 1993, Ernest 1998, Garner 1996, Jones 1989, Katz 1993, Kleiner 1993, Swetz 1995, Rickey 1995, Sawyer 1997, Scriba 1975, Sfard 1995, Swetz 1995α, 1995β, Voolich 1993), η θετική συμβολή στοιχείων της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών φαίνεται να τεκμηριώνεται σε τρεις κατηγορίες επιχειρημάτων:

- Η ιστορία των μαθηματικών αναδεικνύει και υπογραμμίζει τον ανθρώπινο χαρακτήρα της μαθηματικής δραστηριότητας.
- Η ιστορία των μαθηματικών προκαλεί το ενδιαφέρον και συμβάλλει στη συγκρότηση μιας θετικής στάσης απέναντι στα μαθηματικά και
- Η ιστορία των μαθηματικών συνεισφέρει στην κατανόηση των εννοιών και των μαθηματικών προβλημάτων, αναδεικνύοντας τα πλαίσια και τις συνθήκες προέλευσης τους αλλά και τους όρους της εξέλιξης τους .

Με έμφαση στη μια ή στην άλλη κατηγορία επιχειρημάτων έχει σήμερα διαμορφωθεί μεταξύ των ερευνητών της μαθηματικής εκπαίδευσης και των εκπαιδευτικών μια ευρεία, τουλάχιστον σε θεωρητικό επίπεδο, συναίνεση για τη χρησιμότητα της εισαγωγής στοιχείων της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Η εισαγωγή στοιχείων της ιστορίας των μαθηματικών στο σχολείο

Στο επίπεδο του σχολείου της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης τώρα, όπου επιχειρήθηκε η εισαγωγή στοιχείων της ιστορίας των μαθηματικών στα αναλυτικά προγράμματα, στα σχολικά βιβλία ή στις διδακτικές δραστηριότητες έχει ακολουθήσει μια από τις ακόλουθες δύο λογικές.

Μια πρώτη λογική *πρόσθεσης* ιστορικών στοιχείων, η οποία δεν βασίζεται σε μια συνολική τροποποίηση και προσαρμογή του αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών, αλλά στην προσθήκη

αποσπασματικών εκθέσεων ιστορικών επεισοδίων, συνοπτικών παραθέσεων δεδομένων για τη ζωή και το έργο μεγάλων μαθηματικών και παρουσιάσεων μεμονωμένων ιστορικών προβλημάτων, παρενθετικά και στο περιθώριο του περιεχομένου των συναφών ή των υποτιθέμενα συναφών θεματικών ενοτήτων του αναλυτικού προγράμματος ή και μόνο των σχολικών βιβλίων. Μια τέτοια περίπτωση αποτελεί η εισαγωγή στοιχείων της ιστορίας των μαθηματικών με τη μορφή ένθετων “ιστορικών σημειωμάτων” σε επιλεγμένα κεφάλαια των βιβλίων των μαθηματικών του Γυμνασίου στη χώρα μας και άλλων βαθμίδων της εκπαίδευσης σε άλλες χώρες.

Μια δεύτερη λογική αρνείται τη δυνατότητα λειτουργικής συνύφανσης των σύγχρονων μαθηματικών που πρέπει να διδάσκει το σχολείο με στοιχεία της ιστορικής τους εξέλιξης, χωρίς όμως να αρνείται την παιδαγωγική χρησιμότητα της ιστορίας των μαθηματικών καθαυτής. Θεωρεί όμως, ότι κάθε τέτοιο εγχείρημα καταλήγει αναπόφευκτα είτε στην αποδόμηση του περιεχομένου και στον αποπροσανατολισμό της διδασκαλίας των μαθηματικών είτε στη διαστρέβλωση των ιστορικών δεδομένων ώστε να υπηρετούν τις ανάγκες του παρόντος και επομένως στην αλλοίωση του χαρακτήρα της ιστορίας ως αυτοτελούς επιστημονικής πρακτικής (για παράδειγμα, Fried, 2001). Γι’ αυτό προβάλλει μια λογική *διάκρισης*, υποστηρίζοντας την εισαγωγή στοιχείων της ιστορίας των μαθηματικών στο δευτεροβάθμιο κατά κανόνα σχολείο και ιδίως στις τελευταίες τάξεις του, ως ένα ξεχωριστό διδακτικό αντικείμενο, το οποίο διδάσκεται σε συνδυασμό και παράλληλα με το μάθημα των μαθηματικών λειτουργώντας υποστηρικτικά, αλλά αυτόνομα και σε σαφή διάκριση από αυτό.

Σε μια παραπέρα ανάπτυξη της λογικής αυτής και ως παραλλαγή της προβάλλεται η διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών μέσα από κατάλληλα επιλεγμένα, αυθεντικά όμως, ιστορικά κείμενα των μαθηματικών (ενδεικτικά, Laubenbacher and Pengelley 1992, 1996, Shulman 1998). Για την εκδοχή αυτή, η χρήση των πρωτότυπων πηγών της ιστορίας είναι η μόνη αποτελεσματική και ενδεδειγμένη πρακτική για τη διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών στο σχολείο.

Μια τρίτη τέλος λογική η οποία προκύπτει ως εκδοχή, αλλά σύμφωνα με όλα τα διαθέσιμα δεδομένα δεν έχει επιχειρηθεί μέχρι σήμερα καμιά ολοκληρωμένη και σε έκταση υλοποίηση της, είναι η συνολική αναθεώρηση ενός αναλυτικού προγράμματος μαθηματικών και η ενσωμάτωση σ' αυτό της ιστορίας ως συστατικού στοιχείου του, στη βάση του οποίου επιλέγεται και οργανώνεται το περιεχόμενο και καθορίζεται η ακολουθία ανάπτυξης της διδασκαλίας των μαθηματικών στο σχολείο. Ένα από τα ελάχιστα αλλά χαρακτηριστικά παραδείγματα της λογικής αυτής αποτελεί ένα πρόγραμμα διδασκαλίας στοιχείων του διαφορικού λογισμού, που αναπτύχθηκε από τον Katz (1993).

Από όσα εκτέθηκαν συνοπτικά και αναπόφευκτα ελλειπτικά προηγουμένως προκύπτει η ακόλουθη διαπίστωση.

Σε μια χρονική περίοδο μεγαλύτερη των σαράντα ετών έχει συσσωρευτεί ένα αξιόλογο ως προς τον όγκο σώμα θεωρητικών αναλύσεων και παιδαγωγικών θέσεων, όπως επίσης και μια πληθώρα κάθε είδους και μορφής διδακτικού υλικού, και έχει διαμορφωθεί μια ευρύτατη συναίνεση στην ερευνητική και εκπαιδευτική κοινότητα για τις θετικές επιπτώσεις της διαμεσολάβησης της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών. Παράλληλα όμως, έχει καταστεί εμφανής η αδυναμία πρακτικής αξιοποίησης των αναλύσεων, των θέσεων και των υλικών αυτών στο επίπεδο της μαθηματικής εκπαίδευσης στο σχολείο της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, αφού οι όποιες προτάσεις και εφαρμογές καταγράφονται, έχουν αφενός ένα μερικό ή και πολλές φορές αποσπασματικό χαρακτήρα και αφετέρου δεν εξασφαλίζουν μια αποδοχή, η οποία να επιτρέπει τη διάδοση και την επέκτασή τους.

Παράγοντες που καθορίζουν την ενσωμάτωση στοιχείων της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία τους στο σχολείο

Το γεγονός αυτό συνιστά εκ πρώτης όψεως ένα παράδοξο, το οποίο δεν φαίνεται να θίγεται, στις συναφείς αναλύσεις ή συζητήσεις και αυτό είναι πραγματικά εντυπωσιακό. Κι' όμως το φαινομενικά παράδοξο αυτό γεγονός, αναδεικνύει ουσιαστικά ένα από τα καιρία σημεία του υπό συζήτηση θέματος, αφού οδηγεί άμεσα στο εξής ερώτημα:

Ποιοι είναι οι παράγοντες που καθορίζουν - και στην προκείμενη περίπτωση με βάση όλες τις ενδείξεις δυσχεραίνουν - την ενσωμάτωση ιστορικών διαστάσεων των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο, παρά τις θετικές επιπτώσεις που οι θεωρητικές αναλύσεις αποδίδουν σε ένα τέτοιο εγχείρημα;

Η απάντηση του ερωτήματος αυτού και η ερμηνεία του παραδόξου που το υποβάλλει, όπως και πολλών άλλων αδιεξόδων και αντίστοιχων ερωτημάτων που αφορούν τη μαθηματική εκπαίδευση, θα πρέπει κατά τη γνώμη μου να αναζητηθεί στις κυρίαρχες παραδοχές για τη φύση και το χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης και στις σχέσεις των παραδοχών αυτών με τα περιεχόμενα και τις πρακτικές της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Γιατί κυρίαρχα χαρακτηριστικά του περιεχομένου και των πρακτικών της διδασκαλίας των μαθηματικών ενσωματώνουν και υλοποιούν σε μεγάλο βαθμό τις κυρίαρχες παραδοχές για τη φύση και το χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης και αντίστροφα η κυρίαρχη, όπως και κάθε, φιλοσοφική-επιστημολογική θεώρηση της μαθηματικής γνώσης εμπεριέχει και υποβάλλει αντίστοιχες προσεγγίσεις σε καθοριστικά χαρακτηριστικά της διδασκαλίας των μαθηματικών. Η ενσωμάτωση επομένως ιστορικών διαστάσεων των μαθηματικών, ως συστατικού στοιχείου της διδασκαλίας τους στο σχολείο, προϋποθέτει μια αντίστοιχη επιστημολογική θεώρηση της μαθηματικής γνώσης.

Η κυρίαρχη από τις αρχές του προηγούμενου αιώνα μέχρι τις μέρες μας επιστημολογική θεώρηση της μαθηματικής γνώσης οικοδομείται σε παραδοχές μεταξύ των οποίων περιλαμβάνονται οι ακόλουθες, διατυπωμένες εντελώς συνοπτικά:

- Η μαθηματική γνώση συγκροτείται από ένα σύνολο προτάσεων (ορισμοί, αξιώματα, θεωρήματα) και μια σειρά αποδείξεων (διαδικασιών ελέγχου και τεκμηρίωσης) της αλήθειας των προτάσεων αυτών.
- Οι αποδείξεις της αλήθειας των μαθηματικών προτάσεων βασίζονται αποκλειστικά σε ένα σύνολο παραδοχών (αξιώματα και ορισμοί) και σε μια σειρά κανόνων λογικής συνεπαγωγής, που αποτελούν μέρος μιας παραδεκτής τυπικής-παραγωγικής λογικής.

- Αφού οι αποδείξεις της αλήθειας των μαθηματικών προτάσεων είναι αποκλειστικά λογικές, χωρίς καμία προσφυγή στην εμπειρική πραγματικότητα, η μαθηματική γνώση είναι κατά συνέπεια αδιάψευστη, αντικειμενική και απόλυτη, εξαρτημένη μόνο από τις παραδοχές της και τους κανόνες της τυπικής-παραγωγικής λογικής.
- Η μαθηματική γνώση, ως αδιάψευστη, αντικειμενική και απόλυτη γνώση - ουσιαστικά ως εξ ορισμού αληθής – υποκείμενη μόνο στη δική της εσωτερική λογική είναι επομένως ανεξάρτητη από κάθε χρονικό και κοινωνικό δεδομένο, ανεξάρτητη δηλαδή από κάθε ιστορική εξέλιξη και κοινωνική πρακτική².
- Η μαθηματική γνώση είναι κατά συνέπεια απαλλαγμένη πλήρως από τα εμπειρικά δεδομένα και τις αντιφάσεις της κοινωνικής πραγματικότητας, πλήρως ανεξάρτητη από τις κυρίαρχες κοινωνικές αξίες και άρα ιδεολογικά ουδέτερη.
- Η μαθηματική γνώση αναπτύσσεται συσσωρευτικά και αδιάλειπτα με την προσθήκη νέων μαθηματικών αληθειών, οι οποίες αποτελούν ένα τελεσίδικα περατωμένο και ολοκληρωμένο προϊόν της ανθρώπινης σκέψης.

Στα πλαίσια του επιστημολογικού αυτού προτύπου η ιστορία δεν αποτελεί συστατικό στοιχείο της μαθηματικής γνώσης, αφού η μαθηματική γνώση δεν αποτελεί πρώτιστα ένα ιστορικό και κοινωνικό προϊόν. Κάτω από την κυριαρχία αυτής της θεώρησης της μαθηματικής γνώσης, η ενσωμάτωση ιστορικών δεδομένων στη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο είναι ουσιαστικά ανέφικτη και όπου επιχειρείται δεν μπορεί παρά να έχει αποσπασματικό και ευκαιριακό χαρακτήρα.

Τα τελευταία όμως χρόνια και έπειτα από δεκαετίες προβληματισμού και διαλόγου διευρύνεται - σύμφωνα με όλα τα δεδομένα που προκύπτουν από τη διεθνή βιβλιογραφία - η αμφισβήτηση του κυρίαρχου επιστημολογικού προτύπου της μαθηματικής γνώσης, βασικά στοιχεία του οποίου σκιαγραφήθηκαν προηγούμενα και διάφορες εναλλακτικές εκδοχές που προτάσσουν τον ιστορικό και κοινωνικό χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης, από διαφορετικές βέβαια φιλοσοφικές αφητηρίες, προβάλλονται και κερδίζουν έδαφος στην επιστημονική και εκπαιδευτική κοινότητα.

Οι εκδοχές αυτές οικοδομούνται στη βάση της παραδοχής, ότι η μαθηματική γνώση - όπως και κάθε επιστημονική γνώση - είναι κοινωνική κατασκευή, υποκείμενη στα ιστορικά καθορισμένα κοινωνικά και πολιτισμικά πλαίσια του σταδίου ανάπτυξης της. Δεν αποτελεί κατά συνέπεια μια αδιάψευστη, αντικειμενική και απόλυτη γνώση, αυτόνομη και κατηγορικά διακριμένη από τις άλλες μορφές της ανθρώπινης γνώσης, απαλλαγμένη από τα εμπειρικά δεδομένα και τις αντιφάσεις της κοινωνικής πραγματικότητας (Kitcher 1983, Tymoczo 1986, Wittgenstein 1956). Αντίθετα - όπως και κάθε επιστημονική γνώση - είναι προϊόν κοινωνικής δραστηριότητας υποκείμενη σε διαρκείς διαψεύσεις και αναθεωρήσεις (Lakatos 1976/1996). Επομένως για τις εκδοχές αυτές, η μαθηματική γνώση δεν αποτελεί ένα τελεσίδικα περατωμένο προϊόν της ανθρώπινης δραστηριότητας, εκφρασμένο οριστικά από ένα κλειστό σύστημα προτάσεων (ορισμών, αξιωμάτων και θεωρημάτων) και μια σειρά δεδομένων τεκμηρίωσης και απόδειξης της αλήθειας των προτάσεων αυτών, αλλά ως προϊόν κοινωνικής δραστηριότητας εντάσσεται σε ιστορικά καθορισμένα κοινωνικά και πολιτιστικά πλαίσια, που καθορίζουν το επίπεδο και προσδιορίζουν την κατεύθυνση ανάπτυξης της. Η ιστορία δηλαδή, αποτελεί συστατικό στοιχείο των προτάσεων και των διαδικασιών ελέγχου και τεκμηρίωσης της αλήθειας των προτάσεων αυτών, που συγκροτούν τη μαθηματική γνώση.

Στα πλαίσια αυτών των εκδοχών θεώρησης της μαθηματικής γνώσης υπάρχουν επομένως όλες οι προϋποθέσεις για την οργανική ένταξη της ιστορικής διάστασης ως συστατικού στοιχείου της διδασκαλίας των μαθηματικών στο σχολείο της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στην προοπτική επομένως της επικράτησής τους και μόνο μπορεί να θεωρηθεί εφικτή μια ριζική αναθεώρηση των κυρίαρχων προτύπων της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Σημειώσεις

¹ Λόγοι για την εισαγωγή της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο (Fauvel, 1991):

- Συμβολή στον πολλαπλασιασμό των κινήτρων για μάθηση.
- Ανάδειξη του ανθρώπινου χαρακτήρα της μαθηματικής δραστηριότητας.

- Η ιστορική εξέλιξη υποδεικνύει μια διάταξη της ύλης των μαθηματικών στο αναλυτικό πρόγραμμα.
 - Η γνώση της ιστορίας της ανάπτυξης των εννοιών συμβάλλει στην κατανόηση τους.
 - Τροποποίηση των αντιλήψεων των παιδιών για τα μαθηματικά.
 - Ανάδειξη της αξίας των νεώτερων τεχνικών μέσα από τη σύγκριση τους με παλιότερες τεχνικές.
 - Συμβολή στην ανάπτυξη πολύ-πολιτισμικών προσεγγίσεων στα μαθηματικά.
 - Παροχή ευκαιριών και δυνατοτήτων διερευνητικών δραστηριοτήτων.
 - Συμβολή στην κατανόηση νοητικών εμποδίων των παιδιών στην κατανόηση αλγεβρικών εννοιών.
 - Ενθάρρυνση των παιδιών μέσα από τη συνειδητοποίηση του γεγονότος, ότι και άλλοι άνθρωποι στο παρελθόν είχαν προβλήματα με τα μαθηματικά.
 - Ενίσχυση των παιδιών που μαθαίνουν πιο γρήγορα να προχωρήσουν σε παραπέρα διερευνήσεις προβλημάτων.
 - Συμβολή στην κατανόηση του ρόλου των μαθηματικών στην κοινωνία.
 - Κάνει τα μαθηματικά πιο ελκυστικά ή τουλάχιστον λιγότερο απωθητικά στα παιδιά.
 - Η ιστορική διερεύνηση προκαλεί το ενδιαφέρον και εξάπτει τη φαντασία των παιδιών.
 - Παρέχει ευκαιρίες διαθεματικής προσέγγισης των μαθηματικών.
- ² Υπονοούμενη παραδοχή της οπτικής αυτής είναι η ύπαρξη απόλυτα ορθών και τελεσίδικα ολοκληρωμένων μαθηματικών αληθειών, οι οποίες “ανακαλύπτονται” ή “μαθαίνονται” και η κατανόηση τους είναι κατά συνέπεια μια νοητική διαδικασία ανάλογη της βιολογικής διαδικασίας της “αφομοίωσης”.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

- Arcavi, A., Bruckheimer, M. & Ben-Zvi, R.(1982), Maybe a Mathematics Teacher Can Profit from the Study of the History of Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 3, 30–37.
- Avital, S. (1995), History of Mathematics Can Help Improve Instruction and Learning, in F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson & V. Katz (eds.), *Learn from the Masters*, The Mathematical Association of America, Washington, DC, 3–12.
- Bidwell, J. K. (1993), Humanize Your Classroom with the History of Mathematics, *Mathematics Teacher*, 86 (6), 461-64.
- Bos, Henk J. M. (1976), History of Mathematics in the Mathematics Curriculum at Utrecht University, *Historia Mathematica*, 3 473-76.
- Calinger, R. (ed.), (1996), *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching*, Mathematical Association of America, Washington, D.C.
- Corry, L. (1989), Linearity and Reflexivity in the Growth of Mathematical Knowledge, *Science in Context*, 3(2), 409–440.
- Ernest P. (1998), The History of Mathematics in the Classroom, *Mathematics in School*, 27 (4), 25-31.
- Fauvel, J. (1991), Using History in Mathematics Education, *For the Learning of Mathematics*, 11(2), 3-6.
- Fauvel, J. & Gray, J. (1987), *The History of Mathematics: A Reader*, The Open University, London.
- Freudenthal, G. (1996), Pluralism or Relativism?, *Science in Context*, 9, 151–163.
- Fried, M. N. (2001), Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? *Science & Education*, 10, 391–408.
- Furinghetti, F. (2000), The History of Mathematics as a Coupling Link between Secondary and University Teaching, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*; 31 (1), 43-51.
- Furinghetti, F. (1997), History of Mathematics, Mathematics Education, School Practice: Case Studies in Linking Different Domains, *For the Learning of Mathematics*, 17, 55-61.

- Garner, M. (1996), The Importance of History in Mathematics Teaching and Learning, *Interface '96*, Atlanta.
- Hitchcock, G. (1997), Teaching the Negatives, 1870-1970: A Medley of Models, *For the Learning of Mathematics*, 17, 17-25.
- Jardine, R. (1997), Active Learning Mathematics History, *Primus*, 7, 115-21.
- Jones, P. S. (1989), The History of Mathematics as a Teaching Tool. Στο Historical Topics for the Mathematics Classroom, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Va., 1-17.
- Katz, V. J. (2000), Using History to Teach Mathematics: An International Perspective, The Mathematical Association of America, Washington, DC.
- Katz, V. J. (1995), Napier's Logarithms Adapted for Today's Classroom . Στο F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson & V. Katz (eds.), Learn from the Masters, The Mathematical Association of America, Washington, DC, 49-56.
- Katz, V. J. (1993), Using the History of Calculus to Teach Calculus, *Science & Education*, 2, 243-249.
- Katz, V. J. (1986), Using History in Teaching Mathematics , *For the Learning of Mathematics*, 6 13-19.
- Kitcher, P. (1983), The Nature of Mathematics Knowledge, Oxford University Press, Oxford.
- Kleiner, I. (1993), Functions: Historical and Pedagogical Aspects, *Science & Education*, 2, 183-209.
- Krussel, L. (2000), Using History to Further the Understanding of Mathematical Concepts, *Primus*, 10 (3), 273-76.
- Lakatos, I. (1976), Proofs and Refutations, Cambridge University Press, Cambridge. Ελληνική έκδοση: Lakatos, I. (1996), Αποδείξεις και Ανασκευές, Τροχαλία, Αθήνα.
- Laubenbacher, R. and Pengelley, D. (1992), Great Problems of Mathematics: A Course Based on Original Sources, *American Mathematical Monthly*, 99, 313-317.
- Laubenbacher, R. and Pengelley, D. (1996), Mathematical Masterpieces: Teaching with Original Sources. Στο R. Calinger (ed.) Vita

- Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching, Mathematical Association of America, Washington, D.C., 257-260.
- McBride, C. C., and James H. R. (1977), The Effects of History of Mathematics on Attitudes toward Mathematics of College Algebra Students, *Journal for Research in Mathematics Education*, 1, 57-61.
- Marshall G. L. and Rich B. S. (2000), The Role of History in a Mathematics Class, *Mathematics Teacher*, 93 (8), 704-6
- National Council of Teachers of Mathematics (1989), Historical Topics for the Mathematics Classroom, NCTM, Reston, VA.
- Ponza, M. V. (1998), A Role for the History of Mathematics in the Teaching and Learning of Mathematics: An Argentinian Experience, *Mathematics in School*, 27 (4), 10-13.
- Radford, L. (1997), On Psychology, Historical Epistemology, and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics, *For the Learning of Mathematic*, 17(1), 26-33.
- Rickey, V. F. (1996), The Necessity of History in Teaching Mathematics. Στο R. Calinger (ed.) *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching*, Mathematical Association of America, Washington, D.C., 251-60.
- Rickey, V. F. (1995), My Favorite Ways of Using History in Teaching Calculus. Στο F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson & V. Katz (eds.), *Learn from the Masters*, The Mathematical Association of America, Washington, DC, 123-134.
- Sfard, A. (1995), The Development of Algebra: Confronting Historical and Psychological Perspectives, *Journal of Mathematics Behavior*, 14, 15-39.
- Sawyer, W. (1997), Mathematics as History, *Mathematics in School*, 26, 2-3.
- Scriba, C. J. (1975), The Place and Function of a 'Historical Introduction' in the Curriculum for Mathematics Students, *Historia Mathematica*, 2, 322-31.
- Shulman, B. (1998), Math-Alive! Using Original Sources To Teach Mathematics in Social Context. *Primus*; 8, 1-14.
- Swetz, F. J. (1995^a), Using Problems from the History of Mathematics in Classroom Instruction. Στο F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B.

- Johansson & V. Katz (eds.), Learn from the Masters, The Mathematical Association of America, Washington, DC, 25–38.
- Swetz, F. (1995β), Some Not So Random Thoughts about the History of Mathematics—Its Teaching, Learning, and Textbooks, *Primus*, 5, 97–107.
- Swetz, F., Fauvel, J., Bekken, O., Johansson, B. & Katz, V. (1995), Learn from the Masters, The Mathematical Association of America, Washington, D.C.
- Tymoczko, T. (1993), Humanistic and Utilitarian Aspects of Mathematics. Στο A. M. White (ed.), *Essays in Humanistic Mathematics*, The Mathematical Association of America, Washington, DC, 11–14.
- Tymoczko, T. (ed.), (1986), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Birkhauser, Boston.
- Van Maanen, J. A. (1997), New Maths May Profit from Old Methods, *For the Learning of Mathematics*, 17 39–46.
- Voolich, E. D. (1993), Using Biographies to ‘Humanize’ the Mathematics Class, *Arithmetic Teacher*, 41 16–19
- White A. M. (ed.), (1993), *Essays in Humanistic Mathematics*, The Mathematical Association of America, Washington, DC
- Wilder, R.L. (1981), *Mathematics as a Cultural System*, Pergamon, Oxford.
- Wittgenstein, L. (1956), *Remarks on the Foundations of Mathematics*, revised edition, MIT Press, Cambridge, 1978.

Το παιχνίδι στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών

Μαθηματικά – παιχνίδι: προαπαιτούμενες εννοιολογικές διευκρινήσεις

Τι είναι αυτό που στις κοινωνίες που ζούμε αναγνωρίζουμε και αποκαλούμε «μαθηματικά»;

Με δυο λόγια, μαθηματικά είναι μια κοινωνικά κατασκευασμένη οπτική για την κατανόηση της φυσικής και κοινωνικής πραγματικότητας μέσα από την εισαγωγή και τον χειρισμό ποσοτικών και χωρικών σχέσεων και παράλληλα ένας λόγος για την περιγραφή της πραγματικότητας από αυτή την (μαθηματική) οπτική.

Πρόκειται, επομένως, για μια κοινωνική πρακτική, η οποία αξιοποιεί όλους τους ιστορικά αναπτυγμένους τρόπους δράσης για τον χειρισμό ποσοτικών και χωρικών σχέσεων καθώς και προβλημάτων τα οποία προκύπτουν στο πλαίσιο των χειρισμών αυτών, υιοθετώντας για την διεκπεραίωση των δράσεων αυτών τους καθιερωμένους σε μια συγκεκριμένη κοινωνία κανόνες, αξίες και εργαλεία.

Με άλλα λόγια, κάθε μαθηματική πρακτική περιλαμβάνει:

- Επιτελεστικές/εκτελεστικές πράξεις, οι οποίες διεκπεραιώνουν εργασίες με μαθηματικό περιεχόμενο, π.χ. πολλαπλασιασμός διψήφων αριθμών.
- Διαλογικές/γλωσσικές πράξεις, οι οποίες μιλούν για τις επιτελεστικές πράξεις και τα ζητήματα που προκύπτουν στο πλαίσιο τους, καθώς και για ζητήματα μαθηματικών διατυπώσεων και
- Θέσεις/πεποιθήσεις για την ίδια τη μαθηματική πρακτική και την άσκηση της.

Άρα η άσκηση μιας μαθηματικής πρακτικής σημαίνει:

- Κάνω μαθηματικά, δηλαδή αναπτύσσω μια μαθηματική δραστηριότητα, η οποία όπως κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα έχει κίνητρο, αντικείμενο και αποτέλεσμα.
- Μιλώ μαθηματικά, δηλαδή διατυπώνω με συγκεκριμένη γλώσσα περιγραφές της μαθηματικής δραστηριότητας και των αποτελεσμάτων και διαλέγομαι με βάση τις περιγραφές αυτές και
- Έχω άποψη για τη μαθηματική δραστηριότητα και το λόγο της, η οποία υποβάλλει και μια συγκεκριμένη τοποθέτηση απέναντι τους.

Παράγωγο αποτέλεσμα αυτής της μαθηματικής πρακτικής είναι η οργανωμένη με βάση συγκεκριμένες αρχές μαθηματική γνώση.

Η μαθηματική γνώση, όπως όλα τα παράγωγα των κοινωνικών πρακτικών, μετά την παραγωγή της αυτονομείται πλήρως από την πρακτική στην οποία οφείλει την ύπαρξη της. Δηλαδή, η μαθηματική γνώση - οι έννοιες, τα θεωρήματα οι τεχνικές, των μαθηματικών - παρόλο που είναι ανθρώπινες κατασκευές αποκτούν μετά την παραγωγή τους δικές τους, αντικειμενικά υπαρκτές, ιδιότητες και οδηγούν σε προβλήματα, πέρα από τις προθέσεις και τις προβλέψεις των ανθρώπων-δημιουργών τους.

Όπως έχει αναλυθεί από τον Πόππερ (Popper, 1972), η μαθηματική γνώση είναι ένα διαρκώς αναπτυσσόμενο προϊόν του ανθρώπινου πνεύματος, το οποίο αντικειμενοποιώντας τις δημιουργίες του και στη συνέχεια μελετώντας τις δημιουργίες αυτές και προσπαθώντας να επιλύσει τα συχνά απρόβλεπτα και απρόσμενα προβλήματα που προκύπτουν από τις δημιουργίες αυτές παράγει νέες μαθηματικές έννοιες, νέα προβλήματα και νέες μαθηματικές κατασκευές, παράγει δηλαδή νέα μαθηματική γνώση. Η γνώση αυτή είναι μια «αντικειμενική γνώση», η οποία έχει μια σχετικά αυτόνομη ύπαρξη και διακρίνεται σαφώς από την «υποκειμενική πίστη» του γνωρίζοντος ανθρώπινου υποκειμένου. Το Πυθαγόρειο Θεώρημα, δηλαδή, από τη στιγμή της παραγωγής του ως μιας σχέσης ανάμεσα στο μήκος των πλευρών ενός συγκεκριμένου είδους τριγώνου (ορθογώνιου) και της διατύπωσης του ως ενός μαθηματικού θεωρήματος στα Στοιχεία του Ευκλείδη, υπάρχει ως (νοητικό) αντικείμενο, ανεξάρτητο από τους ανθρώπους που το δημιούργησαν. Η μελέτη του θεωρήματος αυτού, των προβλημάτων που παρήγαγε με την ύπαρξη του και των

ερωτημάτων που υποκίνησε οδήγησαν στη δημιουργία νέας μαθηματικής γνώσης, πέρα από τις προθέσεις και τις προβλέψεις των δημιουργών του.

Στην αντικειμενικότητα της μαθηματικής γνώσης, στην ανεξαρτητοποίηση της δηλαδή από τις υποκειμενικές πεποιθήσεις των ανθρώπων συμβάλλει καθοριστικά η γλώσσα στην οποία διατυπώνεται η γνώση αυτή, γλώσσα η οποία αποτυπώνει τις λογικο-παραγωγικές σχέσεις μεταξύ μαθηματικών εννοιών, θεωρημάτων, αποδείξεων, προβλημάτων και επιχειρημάτων.

Η γλωσσικά διατυπωμένη μαθηματική γνώση υπάρχει αντικειμενικά, όχι όμως με τον ίδιο τρόπο που υπάρχουν τα υλικά αντικείμενα και τα φαινόμενα του φυσικού κόσμου. Υπάρχει ως αντικείμενο ενός αφηρημένου κόσμου, ο οποίος περιλαμβάνει όλα τα προϊόντα της ανθρώπινης σκέψης και της γλώσσας.

Ο Πόππερ εισήγαγε μια διάκριση, η οποία μας ενδιαφέρει εδώ άμεσα. Διέκρινε έναν αντικειμενικά υπαρκτό «πρώτο κόσμο», τον φυσικό κόσμο, ο οποίος περιλαμβάνει όλα τα φυσικά όντα και τα υλικά αντικείμενα, έναν υποκειμενικό «δεύτερο κόσμο», κατασκευασμένο από τους ανθρώπους, ο οποίος περιλαμβάνει τα περιεχόμενα της ανθρώπινης εμπειρίας (τις εντυπώσεις, τα αισθήματα, τις πεποιθήσεις) και σε έναν αντικειμενικά υπαρκτό «τρίτο κόσμο», ο οποίος περιλαμβάνει τα παράγωγα της ανθρώπινης νοητικής δραστηριότητας (τις επιστημονικές γνώσεις, τα καλλιτεχνικά δημιουργήματα, τα φιλοσοφικά συστήματα).

Μέσα από αυτή τη διάκριση της πραγματικότητας σε τρεις διαφορετικούς κόσμους αίρεται η φιλοσοφική αντίθεση ανάμεσα στη θεώρηση των μαθηματικών ως μιας κοινωνικής κατασκευής (κατασκευασιοκρατία) με τη θεώρηση των μαθηματικών ως μιας αναπαράστασης μιας ήδη μαθηματικά οργανωμένης πραγματικότητας (πλατωνισμός).

Οι μαθηματικές έννοιες, τα θεωρήματα και τα προβλήματα υπάρχουν ανεξάρτητα από την ανθρώπινη σκέψη, ενώ είναι προϊόντα της ανθρώπινης κοινωνικής πρακτικής.

Είναι, δηλαδή, ταυτόχρονα και ανθρώπινες κατασκευές και υπαρκτά «αντικείμενα», τα οποία αφότου δημιουργηθούν αποξενώνονται από

τους δημιουργούς τους, αποκτούν αυτόνομη και α-χρονική ύπαρξη, έχοντας τις δικές τους ιδιότητες, πολλές φορές απρόσμενες και απρόβλεπτες από τους δημιουργούς τους (βλέπε και τα άλυτα προβλήματα των μαθηματικών), ανεξάρτητα από τη γνώση ή την άγνοια των ιδιοτήτων αυτών από τους ανθρώπους. Αυτό σημαίνει, ότι μπορεί να προκύψουν ανακαλύψεις νέων μαθηματικών γεγονότων, τα οποία προκύπτουν από αρχικά ανθρώπινες μαθηματικές κατασκευές, ανακαλύψεις δηλαδή αντικειμενικά υπαρκτών και όχι δι-υποκειμενικά αποδεκτών, μαθηματικών αληθειών. Για παράδειγμα, αφότου δημιουργήθηκαν οι φυσικοί αριθμοί ως εκφράσεις του πλήθους ενός συνόλου αντικειμένων, η διάκριση άρτιων και περιττών αριθμών ή η διάκριση πρώτων και σύνθετων αριθμών προέκυψαν αντικειμενικά ως ιδιότητες των αριθμών, όπως προέκυψε αντικειμενικά, ανεξάρτητα από τη θέληση των μαθηματικών και εντελώς απρόσμενα, η αναπάντητη μέχρι σήμερα εικασία του Γκόλμπας (είναι δυνατόν να γραφεί κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 ως άθροισμα δυο πρώτων αριθμών;).

Συμπερασματικά, η μαθηματική πρακτική αναπτύσσεται στο φυσικό κόσμο των όντων, των αντικειμένων και των φαινομένων, διαμορφώνεται από τον υποκειμενικό κόσμο της ανθρώπινης εμπειρίας και παράγει πνευματικά προϊόντα τα οποία εντάσσονται στο κόσμο των έργων της ανθρώπινης νοητικής δραστηριότητας.

Στο πεδίο αυτό της αλληλεπίδρασης των τριών κόσμων, όπως διακρίθηκαν από τον Πόππερ, του φυσικού κόσμου (των όντων, των αντικειμένων και των φαινομένων), του υποκειμενικού κόσμου της ανθρώπινης εμπειρίας (των αισθημάτων, των απόψεων και των πεποιθήσεων) και του αντικειμενικού κόσμου της μαθηματικής γνώσης (των εννοιών, των τεχνικών και των θεωρημάτων) εντοπίζονται κοινοί τόποι της μαθηματικής δραστηριότητας με τη δραστηριότητα του παιχνιδιού, όπως θα αναλυθεί παρακάτω. Με την χρήσιμη υπογράμμιση ότι ο υποκειμενικός κόσμος της ανθρώπινης συνείδησης διαμεσολαβεί ανάμεσα στον αφηρημένο αντικειμενικό και στο συγκεκριμένο αντικειμενικό κόσμο, δηλαδή ανάμεσα στον πολιτισμό και στη φύση, αίροντας κάθε απόλυτη διάσταση φυσικού και πνευματικού κόσμου.

Αλλά, τι εννοούμε λέγοντας «παιχνίδι»;

Ένα νήπιο βγάζει από ένα κουτί ξύλινους κύβους διαφόρων διαστάσεων και χτίζει έναν πύργο βάζοντας τον έναν κύβο πάνω στον άλλο. Μόλις χρησιμοποιήσει όλους τους κύβους, παρατηρεί για λίγο τον πύργο και αμέσως μετά τον γκρεμίζει με ένα χτύπημα του χεριού του. Επαναλαμβάνει την ίδια δραστηριότητα πολλές φορές συνδυάζοντας τους κύβους με διάφορους τρόπους.

Μια νηπιαγωγός καλεί τα παιδιά να παίξουν ντόμινο. Εξηγεί το παιχνίδι και τους κανόνες του παιχνιδιού. Τοποθετεί τα ντόμινα αντεστραμμένα, ώστε να μην φαίνονται οι βούλες τους, μπροστά στα παιδιά, και κάθε παιδί παίρνει έξι ντόμινα και τα τοποθετεί μπροστά του, χωρίς να μπορούν τα άλλα παιδιά να τα δουν. Αποφασίζουν ποιο παιδί θα παίξει πρώτο και με ποια σειρά θα παίξουν τα υπόλοιπα παιδιά και αρχίζει το παιχνίδι.

Μια δασκάλα μοιράζει στα παιδιά της 3^{ης} τάξης μια σελίδα στην οποία υπάρχει ένα πλήθος κουκίδων, κάθε μια από τις οποίες σημαδεύεται με έναν αριθμό. Ζητά από καθένα παιδί να ενώσει τις κουκίδες ακολουθώντας την αλληλουχία των αριθμών και να αναγνωρίσει την εικόνα που θα προκύψει.

Είναι οι δραστηριότητες αυτές παιχνίδια;

Η απάντηση προφανώς εξαρτάται από ποιόν ορισμό υιοθετούμε για το τι είναι παιχνίδι. Υπάρχουν πολλοί ορισμοί του παιχνιδιού διατυπωμένοι στο πλαίσιο διαφορετικών επιστημονικών προσεγγίσεων και διαφορετικών θεωρητικών οπτικών, ιδίως μετά το ιστορικό πια έργο του Χουιζίνγκα «Homo Ludes: Μια μελέτη του παιχνιδιού ως στοιχείου του πολιτισμού» (Huizinga, 1955/1938, ελληνική έκδοση 1989). Στο έργο αυτό ο Χουιζίνγκα ορίζει το παιχνίδι ως «μία ελεύθερη δραστηριότητα, η οποία διατηρείται απολύτως συνειδητά εκτός της 'συννηθισμένης' ζωής ως 'μη σοβαρή', η οποία όμως την ίδια στιγμή απορροφά πλήρως και απολύτως τον παίκτη. Είναι μια δραστηριότητα χωρίς υλικό συμφέρον από την οποία δεν μπορεί να προκύψει κανένα

κέρδος. Εξελίσσεται μέσα στα δικά της αρμόζοντα όρια του χρόνου και του τόπου σύμφωνα με σταθερούς κανόνες και καθορισμένα βήματα.

Έκτοτε διατυπώθηκαν πολλοί ορισμοί και διακρίσεις του παιχνιδιού, από τους οποίους γίνεται σαφές ότι η έννοια του παιχνιδιού είναι πολύπλευρη και κατά τον Moyles (1994) κάθε απόπειρα διατύπωσης ενός καθολικού ορισμού για το παιχνίδι μοιάζει με μια «προσπάθεια να πιάσεις αιωρούμενες φυσαλίδες» (σ. 5).

Μέσα από μια κριτική θεώρηση των ορισμών που υιοθέτησαν ή διατύπωσαν οι παραδοσιακές θεωρίες για το παιχνίδι προβάλλει σήμερα μια προσέγγιση του παιχνιδιού ως μιας σύνθετης και ποικιλόμορφης δραστηριότητας, η οποία καθορίζεται από το εκάστοτε κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο στο οποίο αναπτύσσεται και παράλληλα ως μιας ατομικής διάθεσης των ανθρώπων (Wood, 2008).

Από μια τέτοια οπτική, το παιχνίδι δεν μπορεί να καθοριστεί ούτε από το αντικείμενο ούτε από τη μορφή του, αλλά πρωτίστως από μια ιδιαίτερη στάση ή από μια ιδιαίτερη προσέγγιση των υλικών αντικειμένων, των ανθρώπινων συμπεριφορών και των ιδεών και όχι από τα αντικείμενα, τις συμπεριφορές ή τις ιδέες καθαυτές. Όπως έχει χαρακτηριστικά διατυπωθεί από την ΜακΛέιν «παιχνίδι είναι ένας ειδικός τρόπος σκέψης και πράξης. Αυτός ο τρόπος είναι μη-κυριολεκτικός, σηματοδοτεί τις δραστηριότητες ως να μην είναι πραγματικές, ως να μην αποδίδουν όφελος, ως να μην έχουν το κόστος ή τις συνέπειες του πραγματικού κόσμου. Αυτός ο τρόπος επιτρέπει ανοιχτές, διερευνητικές, υποθετικές προσεγγίσεις στις οποίες οι σκοποί υπόκεινται στα μέσα. Αυτός ο τρόπος επιτρέπει στον παίκτη να υιοθετεί μια 'τι εάν / ως εάν' προσέγγιση, να δοκιμάζει υλικά και ιδέες χωρίς να είναι υποχρεωμένος να παρουσιάζει ένα τελικό προϊόν και χωρίς το φόβο μιας αποτυχίας. Η διαδικασία του παιχνιδιού παρέχει στον παίκτη μια αίσθηση δυναμότητας, όπως επίσης και μια αίσθηση κυριότητας, ελέγχου και επάρκειας. Δηλαδή, το παιχνίδι με υλικά, δραστηριότητες, ταυτότητες, κανόνες και ιδέες μπορεί, με την πάροδο του χρόνου, να ενισχύσει την ανάπτυξη μη-κυριολεκτικών, αφηρημένων, υποθετικών, πειραματικών και δημιουργικών τύπων πράξης και σκέψης» (McLane, 2003, σ. 11).

Αυτό σημαίνει ότι η διαδικασία του παιχνιδιού χαρακτηρίζεται από μια μορφή υποθετικο-παραγωγικής σκέψης, η οποία δημιουργεί προβληματικές καταστάσεις για τις οποίες υπάρχουν πολλά δυνατά αποτελέσματα και για τις οποίες μπορεί να διατυπώνονται ερωτήσεις χωρίς μια μόνο σωστή απάντηση.

Επομένως, στα ουσιαστικά χαρακτηριστικά της διαδικασίας του παιχνιδιού, ανεξάρτητα από το περιεχόμενο του, περιλαμβάνονται η δυνατότητα επιλογών, η μη-κυριολεκτική προσέγγιση, η πολλαπλότητα των δυνατών αποτελεσμάτων και η ανταμοιβή της ικανότητας των παικτών.

Παράλληλα με έναν τρόπο σκέψης και πράξης, το παιχνίδι είναι και μια ατομική προδιάθεση, μια στάση απέναντι σε υλικά, δραστηριότητες, ταυτότητες, κανόνες και ιδέες (Carr, 2001). Όπως χαρακτηριστικά διατυπώθηκε από τον Αμπτ «*παιχνίδι είναι ένας ιδιαίτερος τρόπος να βλέπουμε κάτι, οτιδήποτε*» (Abt, 1970, σ.5)

Οι κοινοί τόποι μαθηματικών και παιχνιδιού

Στο πεδίο της αλληλεπίδρασης του φυσικού κόσμου (των όντων, των αντικειμένων και των φαινομένων), του υποκειμενικού κόσμου της ανθρώπινης εμπειρίας (των αισθημάτων, των απόψεων και των πεποιθήσεων) και του αντικειμενικού κόσμου της μαθηματικής γνώσης (των εννοιών, των τεχνικών και των θεωρημάτων) εντοπίζεται, όπως προαναφέρθηκε, ένας κοινός τόπος της μαθηματικής δραστηριότητας με τη δραστηριότητα του παιχνιδιού.

Γιατί τα παιχνίδια, όπως και τα μαθηματικά, εντάσσονται στον αντικειμενικά υπαρκτό «τρίτο κόσμο», ο οποίος περιλαμβάνει τα παράγωγα της ανθρώπινης νοητικής δραστηριότητας και αναφέρονται, όπως και τα μαθηματικά στον φυσικό κόσμο των όντων, των αντικειμένων και των φαινομένων μέσα από τη διαμεσολάβηση της ανθρώπινης δραστηριότητας. Τα μαθηματικά και τα παιχνίδια, δηλαδή, έχουν την ίδια σχέση με την πραγματικότητα, μια σχέση

καθοριστική και για τη συγκρότηση και ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και για τη δραστηριότητα του παιχνιδιού.

Όπως η μάθηση των μαθηματικών σημαίνει την εισαγωγή σε μια κοινωνικά καθιερωμένη μαθηματική πρακτική η οποία διαμορφώνει τον «κόσμο» των μαθηματικών, έτσι και το παιχνίδι σημαίνει την είσοδο σε μια διακριτή και ανεξάρτητη σφαίρα ανθρώπινης δραστηριότητας, η οποία αναφέρεται και ως ο «μαγικός κύκλος» του παιχνιδιού, εντός της οποίας η ανθρώπινη συμπεριφορά δομείται από τους κανόνες του παιχνιδιού και μόνο (Huizinga, 1955).

Το «μαγικό» έγκειται στην «άλλη πραγματικότητα» που το παιχνίδι κατασκευάζει. Από τη στιγμή που ενεργοποιείται ή αρχίζει να δημιουργείται ο «μαγικός κύκλος» ενός παιχνιδιού, καθετί στο εσωτερικό του νοηματοδοτείται από τους κανόνες του παιχνιδιού και μόνον και, όπως έχει διατυπωθεί από τον Κεϊλουά κατασκευάζεται μια «δεύτερης τάξης» πραγματικότητα (Caillois, 1961).

Με τις διατυπώσεις του Χουιζίνγκα, «το παιχνίδι αναπτύσσεται και αποκτά υπόσταση μέσα σε ένα πεδίο προκαταβολικά οριοθετημένο, υλικά ή συμβολικά, προσχεδιασμένα ή παρεμπιπτόντως ... Η αρένα, το τραπέζι, ο μαγικός κύκλος, ο ναός, η σκηνή, η οθόνη, το γήπεδο του τένις, το δικαστήριο κλπ. Είναι όλα στη μορφή και στη λειτουργία τους πεδία παιχνιδιού, δηλαδή απαγορευμένοι χώροι, απομονωμένοι, περιφραγμένοι, καθαγιασμένοι, εντός των οποίων ισχύουν ειδικοί κανόνες. Είναι όλοι προσωρινοί κόσμοι μέσα στο συνηθισμένο κόσμο, αφιερωμένοι στην εκτέλεση μιας ξεχωριστής πράξης» (Huizinga, 1955, σ. 10).

Το γεγονός ότι ο «μαγικός κύκλος» είναι ένας κύκλος είναι ουσιώδες χαρακτηριστικό αυτής της μεταφοράς. Ως κλειστό σχήμα ο κύκλος περιγράφει έναν χώρο οριοθετώντας και ξεχωρίζοντας τον από τον πραγματικό κόσμο. Ως σηματοδότης του χρόνου ο «μαγικός κύκλος» μοιάζει με το ρολόι: αντιπροσωπεύει μια διαδρομή με αρχή και τέλος και ταυτόχρονα μια πορεία χωρίς αρχή και τέλος. Δημιουργεί, δηλαδή έναν χώρο-χρόνο επαναλαμβανόμενο, περιορισμένο και απεριόριστο, έναν πεπερασμένο χώρο και απεριόριστες εκδοχές (Salen and Zimmerman, 2003, σ. 95).

Με άλλα λόγια, το παιχνίδι θεωρούμενο ως ένα σύστημα μπορεί να έχει μια ανοικτή ή μια κλειστή σχέση με την πραγματικότητα που το περιβάλλει, αλλά θεωρούμενο ως ένα σύνολο κανόνων είναι απολύτως κλειστό. Άρα το παιχνίδι ως δραστηριότητα είναι ταυτόχρονα ανοικτό και κλειστό (Salen and Zimmerman, 2003).

Αυτό σημαίνει, ότι το παιχνίδι, όπως και τα μαθηματικά αλλά με τους δικούς τους όρους, συνάπτει μια δισυπόστατη σχέση με την πραγματικότητα. Αντλεί στοιχεία από τη φυσική και κοινωνική πραγματικότητα και ταυτόχρονα τα μετασχηματίζει σε μορφές που αντιστοιχούν στους όρους του παιχνιδιού, αλλά δεν υπάρχουν στην πραγματικότητα. Μορφές, οι οποίες είναι και δεν είναι πραγματικές, προέρχονται από τον πραγματικό κόσμο, αλλά είναι φανταστικές. Ένα άλογο είναι ζώο υπαρκτό στην πραγματικότητα και ένα καλάμι είναι ένα φυσικό αντικείμενο της πραγματικότητας, αλλά ένα καλάμι που ιππεύει ένα παιδί είναι ένα άλογο φανταστικό, που αντιστοιχεί όμως σε μια πραγματικότητα. Το καλάμι-άλογο είναι μια φανταστική πραγματικότητα στον κόσμο του παιχνιδιού.

Το παιδί συνάπτοντας τη δισυπόστατη αυτή σχέση με την πραγματικότητα μέσα από τις δραστηριότητες του παιχνιδιού οικοδομεί, σύμφωνα με τους Πιαζέ και Ίνχελντερ, συστήματα μορφών δράσης, σκέψης και έκφρασης, τα οποία του επιτρέπουν να μετασχηματίζει συμβολικά την πραγματικότητα για να την κατανοήσει και να την αφομοιώσει στις δικές του νοητικές δομές. Στα συστήματα αυτά, η συνύπαρξη του πραγματικού και του φανταστικού, παρέχει στο παιδί (φανταστικές) δυνατότητες να προσεγγίζει συμβολικά (πραγματικές) καταστάσεις, οι οποίες σε (πραγματικές) συνθήκες θα ήταν απρόσιτες. Παράλληλα, μέσα από τη διαπλοκή του πραγματικού με το φανταστικό το παιδί ανατρέπει την πραγματικότητα, παραβιάζοντας σε φανταστικό επίπεδο τα πραγματικά της όρια, τα όρια της ανθρώπινης πράξης και τους περιορισμούς του τόπου και του χρόνου. Μέσα στις δραστηριότητες του παιχνιδιού μπορεί να υποτεθούν ικανότητες και συμπεριφορές, οι οποίες σε πραγματικές συνθήκες είναι ανύπαρκτες ή ανέφικτες. (Piaget & Inhelder, 1990).

Όπως έχει υπογραμμιστεί από τον Βυγκότσκι «Η σκέψη χωρίζεται από τα αντικείμενα επειδή ένα κομμάτι ξύλο αρχίζει να είναι μια κούκλα και ένα ραβδί γίνεται ένα άλογο. Η δράση που αναπτύσσεται σύμφωνα με κανόνες αρχίζει να καθορίζεται από ιδέες, όχι από αντικείμενα. Αυτή είναι μια ανατροπή της σχέσης του παιδιού με την πραγματική, άμεση, συγκεκριμένη κατάσταση, της οποίας η πλήρης σημασία είναι δύσκολο να εκτιμηθεί. Το παιδί δεν το επιτυγχάνει αυτό με μιας. Είναι εξαιρετικά δύσκολο για το παιδί να διαχωρίσει τη σκέψη (το νόημα μιας λέξης) από το αντικείμενο στο οποίο αναφέρεται και το παιχνίδι είναι ένα μεταβατικό στάδιο σε μια τέτοια κατεύθυνση. Σε εκείνο το κρίσιμο σημείο, που μια ράβδος - δηλαδή ένα αντικείμενο - γίνεται το μέσο για να διαχωριστεί η έννοια άλογο από το πραγματικό άλογο, τότε μια από τις βασικές ψυχολογικές δομές η οποία προσδιορίζει τη σχέση του παιδιού με την πραγματικότητα τροποποιείται ριζικά» (Vygotsky, 1967).

Η ύπαρξη κανόνων οι οποίοι δομούν κάθε παιχνίδι ως ένα σύστημα και ο ρόλος τους στην οργάνωση και ανάπτυξη του παιχνιδιού είναι ένας δεύτερος κοινός τόπος της μαθηματικής δραστηριότητας με τη δραστηριότητα του παιχνιδιού, εξίσου σημαντικός και απόλυτα συναρτημένος με τις σχέσεις που το παιχνίδι και μαθηματικά συνάπτουν με την πραγματικότητα.

Στο παιχνίδι, όπως και στα μαθηματικά με την ιδιαιτερότητα της πολυμορφίας τους, οι κανόνες αποτελούν συστατικά τους στοιχεία και όρους ανάπτυξης των αντίστοιχων δραστηριοτήτων. Στο παιχνίδι, όπως και στα μαθηματικά, οι κανόνες είναι σαφείς και εφαρμόσιμοι, είναι μη συζητήσιμοι και υποχρεωτικοί για όλους τους παίκτες και κατά την ανάπτυξη του παιχνιδιού δημιουργούν ένα πεδίο δυνατοτήτων, αξιοποιήσιμο από κάθε παίκτη. Οι Σάλεν και Ζίμερμαν διακρίνουν σε κάθε παιχνίδι τρία είδη κανόνων: τους λειτουργικούς κανόνες με τους οποίους παίζεται το παιχνίδι, τους συστατικούς κανόνες, με τους οποίους συγκροτείται η τυπική δομή του παιχνιδιού και τους υπονοούμενους κανόνες, οι οποίοι δεσμεύουν τις εκφράσεις και τις συμπεριφορές των παικτών (Salen and Zimmerman, 2003).

Οι κανόνες, όπως προαναφέρθηκε, δομούν κάθε παιχνίδι ως ένα σύστημα, όπως ακριβώς οι αρχικές έννοιες και τα αξιώματα κάθε μαθηματικού συστήματος μαζί με τους κανόνες της παραγωγικής λογικής δομούν την οργάνωση και την ανάπτυξη κάθε μαθηματικής δραστηριότητας, η οποία αναπτύσσεται στο πλαίσιο του.

Στο παιχνίδι, όπως και στα μαθηματικά, οι κανόνες οργανώνουν το σύστημα και η εφαρμογή τους οργανώνει το παιχνίδι και προσφέρει στους παίκτες τις εμπειρίες του παιχνιδιού μέσα σε καθορισμένα από τους κανόνες και την εφαρμογή τους πλαίσια.

Τα μαθηματικά ως παιχνίδι: μια πρόταση

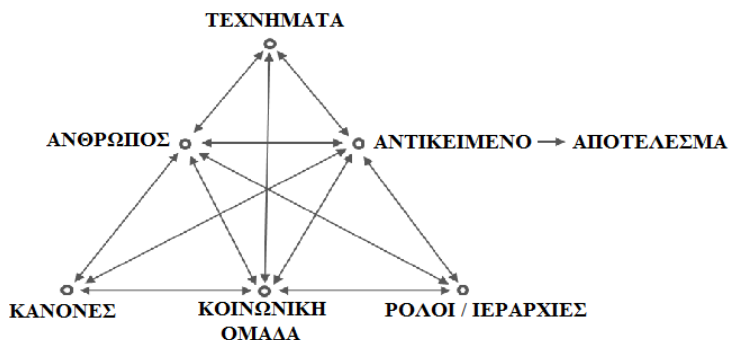
Η δραστηριότητα της μάθησης

Με βάση όσα αρχικά εκτέθηκαν, μαθαίνω μαθηματικά σημαίνει εισάγομαι σε μια κοινωνικά καθιερωμένη μαθηματική πρακτική και παράλληλα αποκτώ μια γνώση, η οποία είναι διάχυτη στο κοινωνικό περιβάλλον και ταυτόχρονα οργανωμένη με συγκεκριμένες αρχές σε εννοιολογικά συστήματα και εκφρασμένη σε μια δική της γλώσσα.

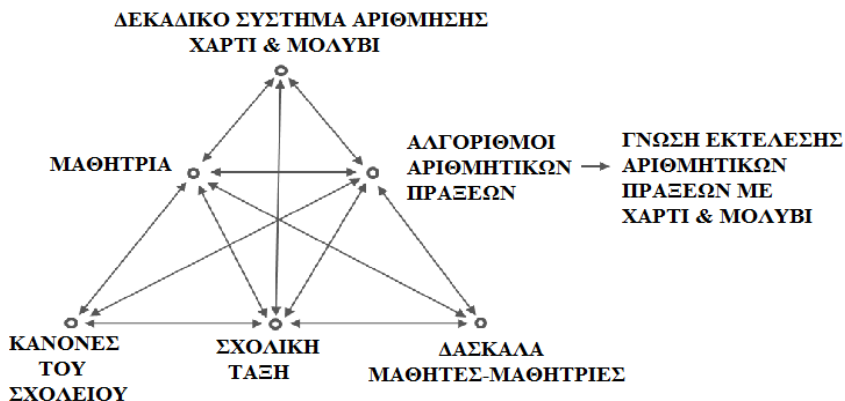
Η εισαγωγή των παιδιών σ' αυτή τη μαθηματική πρακτική και η απόκτηση της μαθηματικής γνώσης και γλώσσας γίνεται μέσα από τη συμμετοχή τους σε δραστηριότητες, με τη γενικότερη έννοια μαθησιακές. Σε μια πρώτη φάση μέσα από την περιφερειακή συμμετοχή τους σε μαθηματικές δραστηριότητες, συμμετοχή η οποία σταδιακά με την καθοδήγηση ωριμότερων ατόμων, ενηλίκων ή ομηλικών, μεταβάλλεται σε επόμενες φάσεις σε μια συμμετοχή πλήρη και αυτόνομη.

Κάθε δραστηριότητα, οποιουδήποτε περιεχομένου και αντικειμένου, διαμεσολαβείται και διαμορφώνεται από συμβολικά και τεχνικά εργαλεία και γενικότερα από τεχνήματα του ανθρώπινου πολιτισμού, ενώ αναπτύσσεται μέσα σε ένα συγκεκριμένο κάθε φορά κοινωνικό πλαίσιο, το οποίο επίσης την συνδιαμορφώνει (Vygotsky, 1997). Το κοινωνικό πλαίσιο ορίζεται από την κοινωνική ομάδα στην οποία συμμετέχει το δρών υποκείμενο, τους κοινωνικούς ρόλους και τις ιεραρχίες, οι οποίες δομούν την κοινωνική ομάδα και τους καθιερωμένους κανόνες για τις σχέσεις μεταξύ των μελών της ομάδας

και για την ανάπτυξη κάθε συγκεκριμένης δραστηριότητας (Engeström, 1987).



Για παράδειγμα, μια δραστηριότητα η οποία έχει ως αντικείμενο της τη μάθηση των αλγορίθμων για την εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού διαμεσολαβείται από το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης και τη συμβολική και γλωσσική έκφραση των αριθμών, καθώς και από τα υλικά μέσα για την εκτέλεση των πράξεων, χαρτί-μολύβι ή υπολογιστής (τεχνήματα). Εάν αυτή η δραστηριότητα μάθησης αναπτύσσεται στο σχολείο, τότε το κοινωνικό πλαίσιο ορίζεται από το σχολείο και τη σχολική τάξη, τους ρόλους και τις ιεραρχίες των δασκάλων και των μαθητών, καθώς και τους κανόνες λειτουργίας του σχολείου και διεξαγωγής των μαθημάτων.



Εάν, όμως, η ίδια δραστηριότητα αναπτύσσεται στο πλαίσιο ενός παιχνιδιού με κάρτες, τότε οι ρόλοι και οι κανόνες είναι αυτοί που επιβάλλουν οι κανονισμοί του παιχνιδιού, οπότε και το περιεχόμενο

της δραστηριότητας είναι εντελώς διαφορετικό, παρόλο που ίσως έχει το ίδιο αποτέλεσμα.



Η μάθηση μέσα από τη συμμετοχή των παιδιών σε κατάλληλες δραστηριότητες προκύπτει ως αποτέλεσμα αντιφάσεων, οι οποίες δημιουργούνται σε μια ή σε περισσότερες συνιστώσες μιας δραστηριότητας, σε διάφορες φάσεις ανάπτυξης μιας δραστηριότητας ή ανάμεσα σε συμπληρωματικές δραστηριότητες, οι οποίες επιδιώκουν το ίδιο αποτέλεσμα. Οι αντιφάσεις αυτές είναι αποτέλεσμα μιας διάστασης ανάμεσα στις απαιτήσεις που επιβάλλει το αντικείμενο της δραστηριότητας και στα διαθέσιμα από τον ή στον πρωταγωνιστή της δραστηριότητας εννοιολογικά, συμβολικά ή τεχνικά εργαλεία καθώς και των γνώσεων χρήσης τους ή των κανόνων που διέπουν τη δραστηριότητα ή των ρόλων που επιβάλλει το κοινωνικό πλαίσιο μέσα στο οποίο αναπτύσσεται η δραστηριότητα. Για παράδειγμα, μια δραστηριότητα επιβάλλει την εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού, την οποία ο πρωταγωνιστής δεν έχει οικειοποιηθεί, παρόλο που ξέρει και την έννοια και την τεχνική εκτέλεσης του πολλαπλασιασμού στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.

Σε μια τέτοια περίπτωση, η μαθησιακή δραστηριότητα αναδιοργανώνεται και το περιεχόμενο της διευρύνεται, ώστε να καθίσταται δυνατός ο χειρισμός του αντικειμένου της και η επίτευξη των στόχων της. Στο παράδειγμα που προαναφέρθηκε, το παιδί με την καθοδήγηση της δασκάλας ή άλλου ατόμου διευρύνει τις γνώσεις του για τον πολλαπλασιασμό των αριθμών και αναδιοργανώνοντας την αντίστοιχη μαθηματική δραστηριότητα επιτυγχάνει τους στόχους της. Πρόκειται για μια «μάθηση δια της διεύρυνσης» της δραστηριότητας,

όπως έχει αποκληθεί από τον Engeström (1987), η οποία χαρακτηρίζεται από τον ουσιαστικό ρόλο της αποκληθείσας «ζώνη της επικείμενης ανάπτυξης» κάθε παιδιού.

Το παιχνίδι στα μαθηματικά – Τα μαθηματικά στο παιχνίδι

Στις καθιερωμένες σχέσεις μαθηματικών και παιχνιδιού μπορούμε να διακρίνουμε δύο σαφείς καταστάσεις, οι οποίες αποτελούν πάντα αντικείμενο προβληματισμού και πεδίο γόνιμων προτάσεων.

1. *Το παιχνίδι στα μαθηματικά:* στην περίπτωση αυτή είναι δεδομένη η προτεραιότητα των μαθηματικών και στοιχεία μιας μαθηματικής δραστηριότητας, όπως για παράδειγμα η επίλυση ενός προβλήματος, ή μια μαθηματική γνώση, όπως για παράδειγμα μια ιδιότητα των αριθμητικών πράξεων, μετατρέπεται σε ένα είδος παιχνιδιού ή σε ένα διασκεδαστικό γρίφο. Υπάρχουν πάρα πολλά παιχνίδια αυτού του τύπου, τα οποία παίζονται με χαρτί και μολύβι, με κάρτες, ζάρια κλπ. Η εισαγωγή παιχνιδιών στις μαθηματικές δραστηριότητες έχει θετικά αποτελέσματα στη δημιουργία κινήτρων για τη συμμετοχή των παιδιών στις δραστηριότητες αυτές και συνακόλουθα στη δημιουργία κλίματος μάθησης των μαθηματικών, όπως έχει τεκμηριωθεί από πλήθος σχετικών ερευνών.
2. *Τα μαθηματικά του παιχνιδιού:* στην περίπτωση αυτή η δραστηριότητα του παιχνιδιού είναι η κυρίαρχη δραστηριότητα, στην οποία εντάσσονται στοιχεία των μαθηματικών ή η οποία περιέχει στη δομή ή στους κανόνες της μαθηματικές ενέργειες, όπως για παράδειγμα σύγκριση, απαρίθμηση, μέτρηση, εκτέλεση πράξεων ή ανάπτυξη λογικών συλλογισμών. Η περίπτωση αυτή αξιοποιείται ιδίως στην προσχολική και πρώτη σχολική εκπαίδευση ως μια μορφή έμμεσης διδασκαλίας μαθηματικών εννοιών και τεχνικών.

Η εισαγωγή παιχνιδιών στα μαθηματικά και τα παιχνίδια που περιλαμβάνουν μαθηματικά είναι δύο τύποι σύζευξης μαθηματικών και παιχνιδιού, ο καθένας από τους οποίους έχει τα δικά του πλεονεκτήματα και τη δικιά του θετική συμβολή στις μαθηματικές-

εκπαιδευτικές δραστηριότητες (ενδεικτικά, Bright et al. 1985, Ginsburg, 2006, Holton et al., 2001, Van Oers, 1996).

Στην κάθε της περίπτωση, όμως, η σύζευξη προϋποθέτει μια κύρια δραστηριότητα - τη μαθηματική ή το παιχνίδι - στα τεχνήματα, στους κανόνες ή στις ενέργειες της οποίας εισάγονται στοιχεία της άλλης δραστηριότητας.

Το ενδιαφέρον ερώτημα, όμως, είναι αν μπορούμε να ταυτίσουμε τη μαθηματική δραστηριότητα με τη δραστηριότητα του παιχνιδιού ή με άλλα λόγια αν μπορούμε να οργανώσουμε τη διδασκαλία των μαθηματικών αποκλειστικά ως παιχνίδι. Γιατί μέσα από μια τέτοια ταύτιση θα υποστηρίξουμε και την σύμπτωση δράσης και σκέψης και άρα σκέψης και μάθησης.

Παρά τις όποιες δυσκολίες, οι οποίες προκύπτουν από τους τρόπους με τους οποίους οργανώνονται και αναπτύσσονται οι σχολικές δραστηριότητες, με τα αναλυτικά και ωρολόγια προγράμματα δεδομένα, με τις διοικητικές ρυθμίσεις της εκπαιδευτικής δραστηριότητας ισχύουσες και τα λοιπά συναφή, ισχυρίζομαι ότι μπορούμε μέσα από μια κατάλληλη δόμηση της αλληλουχίας των μαθημάτων να οργανώσουμε τις μαθηματικές δραστηριότητες στο σχολείο με τη δομή ενός παιχνιδιού, η οποία θα προτρέπει τη συμμετοχή όλων των παιδιών σε δράσεις και πράξεις παιχνιδομαθηματικών.

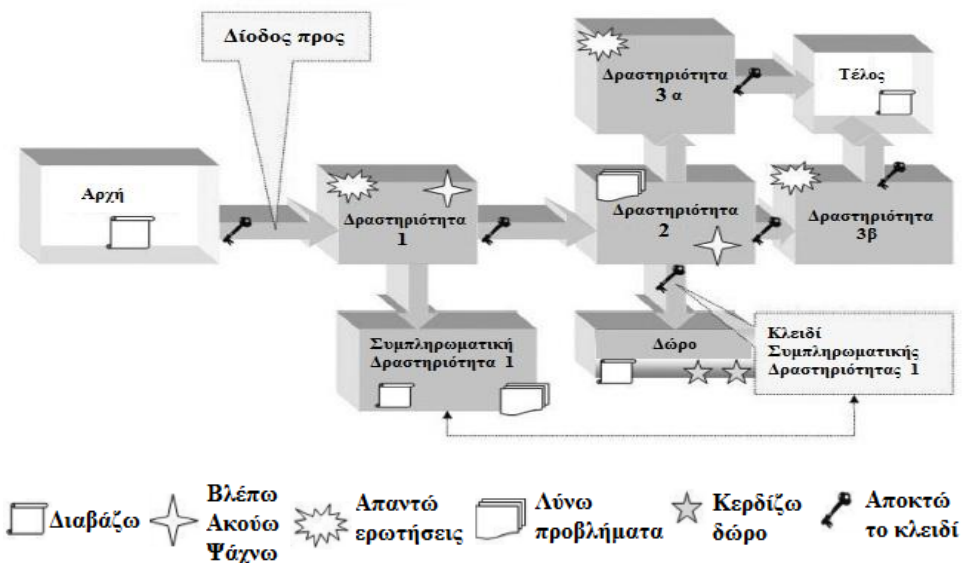
Μπορούμε, δηλαδή, να οργανώσουμε τις μαθηματικές δραστηριότητες στο σχολείο κατά τη διάρκεια μιας σχολικής περιόδου ως ένα «σοβαρό παιχνίδι» (serious game). Ο Abt (1970) ορίζει τα «σοβαρά παιχνίδια» ως εκείνα τα παιχνίδια τα οποία *«έχουν έναν σαφή και προσεκτικά μελετημένο εκπαιδευτικό σκοπό και δεν προορίζονται να παιχτούν κυρίως για διασκέδαση, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι τα σοβαρά παιχνίδια δεν είναι ή δεν πρέπει να είναι διασκεδαστικά»*. Η λογική του «σοβαρού παιχνιδιού» έχει αλματώδως αναπτυχθεί σε περιβάλλοντα υπολογιστών και με την αξιοποίηση των τεχνολογιών της πληροφορικής και των επικοινωνιών έχουν επινοηθεί εξαιρετικά εκπαιδευτικά παιχνίδια και προσομοιώσεις.

Με βάση τις προαναφερθείσες παραδοχές ότι μαθαίνω μαθηματικά σημαίνει:

- εισάγομαι σε μια κοινωνικά καθιερωμένη μαθηματική και δια της πρακτικής αυτής γνωρίζω τον «κόσμο» των μαθηματικών και
- δρω μέσα σ' αυτόν τον κόσμο για την επίλυση προβλημάτων και την επίτευξη στόχων

μπορούμε αξιοποιώντας τη λογική και την εμπειρία των «σοβαρών παιχνιδιών» να οργανώσουμε τη μάθηση των μαθηματικών ως μια περιπετειώδη εξερεύνηση επιλεγμένων περιοχών του «μαθηματικού κόσμου».

Για παράδειγμα, η εξερεύνηση της περιοχής των αριθμών, η οποία είναι «πρωτεύουσα» του «κόσμου των μαθηματικών» θα μπορούσε να περιλαμβάνει μια αλληλουχία μαθησιακών δραστηριοτήτων, προκλήσεων και εμποδίων με επίκεντρο τους φυσικούς αριθμούς και τις ιδιότητες τους, οργανωμένων στη λογική μιας πορείας, η οποία σχηματικά θα είχε μια δομή όπως η ακόλουθη:



Κάθε μια δραστηριότητα (εννοείται μεταφορικά ως ένας «τόπος») έχει έναν στόχο, ο οποίος είναι η κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας ή η εκμάθηση μιας μαθηματικής τεχνικής, ενώ απαιτεί για την επίτευξη του στόχου την οικειοποίηση ενός μαθηματικού συμβολικού ή τεχνικού εργαλείου και τη χρήση του για την απάντηση ερωτήσεων και την επίλυση προβλημάτων. Η προτροπή στη μελέτη κειμένων, στη βοήθεια της δασκάλας ή στη διεξαγωγή μιας μικρής έρευνας αποτελούν συστατικά στοιχεία μιας δραστηριότητας, με οργανωμένο υλικό ή διδακτικές παρεμβάσεις ανάλογο με το περιεχόμενο της. Οι δραστηριότητες μπορεί να είναι ατομικές ή εναλλακτικά ομαδικές με αντίστοιχες απαιτήσεις στην απάντηση ερωτήσεων ή στην επίλυση προβλημάτων.

Στην περίπτωση των αριθμών, για παράδειγμα, το προς οικειοποίηση μαθηματικό εργαλείο είναι το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, ενώ οι έννοιες και οι τεχνικές αφορούν στις διάφορες έννοιες του αριθμού (πληθικός, διατακτικός, μέτρο, κλασματικός αριθμός κλπ) και στις τεχνικές απαρίθμησης, μέτρησης, εκτέλεσης πράξεων κλπ.

Η επίτευξη του στόχου κάθε μιας δραστηριότητας, η οποία επιβεβαιώνεται από την επιτυχή απάντηση των ερωτήσεων ή την επίλυση προβλημάτων κερδίζει το «κλειδί», το οποίο επιτρέπει στον πρωταγωνιστή να προχωρήσει στην «εξερεύνηση» του επόμενου «τόπου» των μαθηματικών.

Η διαδοχή των δραστηριοτήτων εξασφαλίζει τη λογική ή τη διδακτική αλληλουχία των μαθηματικών εννοιών και τεχνικών, ενώ επιτρέπει τη χρονική οργάνωση των σχολικών μαθημάτων.

Είναι αυτονόητο ότι η εξερεύνηση των επιλεγμένων περιοχών του «μαθηματικού κόσμου» υποστηρίζεται και καθοδηγείται από μια ιστορία, η οποία επιτρέπει στα παιδιά να ταυτιστούν με τον πρωταγωνιστή-ήρωα της και οι ιστορίες, οι οποίες προσφέρονται για τέτοια εγχειρήματα είναι πολλές. Οι άθλοι του Θησέα ή του Ηρακλή, η Οδύσσεια, ο γύρος του κόσμου σε 80 ημέρες και πολλές ιστορίες της μυθολογίας και της λογοτεχνίας μπορεί κατάλληλα διασκευασμένες να αποτελέσουν το υπόβαθρο μαθηματικών περιπετειών. Όπως μπορεί να επινοηθούν ιστορίες με πλοκή, η οποία θα υποβάλλει μια αλληλουχία δραστηριοτήτων.

Δύο παρατηρήσεις έχουν εδώ ενδιαφέρον.

Παρατήρηση πρώτη: Ο Τζούλ (Juul, 2002) έχει διακρίνει τα «σοβαρά παιχνίδια» σε δύο τύπους. Τα παιχνίδια εμφάνισης (emergence games), όπως για παράδειγμα το σκάκι και τα παιχνίδια εξέλιξης (progression games), όπως για παράδειγμα το Μονόπολη. Η δομή των παιχνιδιών εμφάνισης διαμορφώνεται από έναν καθορισμένο, μικρό αριθμό, κανόνων, οι οποίοι επιτρέποντας συνδυασμούς οδηγούν σε ένα πλήθος διαφορετικών κάθε φορά καταστάσεων που οι παίκτες χειρίζονται αναπτύσσοντας διάφορες στρατηγικές. Αντίθετα, η δομή των παιχνιδιών εξέλιξης διαμορφώνεται από μια αλληλουχία προκαθορισμένων καταστάσεων, κάθε μια από τις οποίες απαιτεί από τους παίκτες την επιτυχή αντιμετώπιση της. Είναι σαφές ότι ο κάθε τύπος παιχνιδιού προσφέρει στους παίκτες και διαφορετικού τύπου εμπειρίες, συγκινήσεις, προκλήσεις και κίνητρα, όπως είναι φανερό ότι κάθε τύπος παιχνιδιού έχει τα πλεονεκτήματα του και τα μειονεκτήματα του. Τα παιχνίδια εξέλιξης, η δομή των οποίων προτάθηκε για τη διδασκαλία των μαθηματικών ως παιχνίδι, έχουν δύο σημαντικά μειονεκτήματα σε σχέση με τα παιχνίδια εμφάνισης. Πρώτον, οι επιτρεπόμενες αλληλεπιδράσεις μεταξύ των παικτών δεν μπορεί να είναι παρά περιορισμένης έκτασης και ποικιλίας και δεύτερον δεν μπορεί να επαναλαμβάνονται στα ίδια παιδιά, χωρίς τροποποιήσεις στις ερωτήσεις, στα προβλήματα και στις εργασίες που προαπαιτούνται για την εξέλιξη του παιχνιδιού.

Παρατήρηση δεύτερη: Από μια άλλη οπτική, τα παιχνίδια εξέλιξης παρέχουν ένα σαφές και με νόημα πλαίσιο για μάθηση μαθηματικών εννοιών και τεχνικών μέσα από την επίλυση προβλημάτων. Ένα παιχνίδι εξέλιξης αποτελείται από μια αλληλουχία προβλημάτων και ταυτόχρονα αποτελεί το ίδιο ένα πρόβλημα. Η αξία των προβλημάτων στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών έχει αναλυθεί σε πλήθος θεωρητικών αναλύσεων και έχει τεκμηριωθεί από πλήθος ερευνητικών διαπιστώσεων, οπότε δεν χρειάζεται εδώ ειδικότερη αναφορά. Ο τύπος των προβλημάτων, τα οποία μπορεί να εισαχθούν σε ένα παιχνίδι εξέλιξης ποικίλει και συναρτάται με το περιεχόμενο και τους στόχους της διδασκαλίας των μαθηματικών που επιδιώκει να υποκαταστήσει.

Πρόβλημα μπορεί να συνιστά για τα παιδιά, οποιαδήποτε ερώτηση απαιτεί απάντηση και οποιοδήποτε εμπόδιο απαιτεί την υπέρβαση του για την πορεία του παίκτη προς το στόχο του. Το ακόλουθο σχόλιο του Γκάρντνερ (Gardner, 1990), συγγραφέα πολλών βιβλίων με μαθηματικά προβλήματα, παράδοξα και σπαζοκεφαλιές, είναι για την περίπτωση χαρακτηριστικό. «*Αν και δεν μπορώ να ορίσω ένα μαθηματικό παιχνίδι καλύτερα από όσο μπορώ να ορίσω ένα ποίημα, μπορώ να ισχυριστώ ότι οτιδήποτε και να είναι αυτό είναι το βέλτιστο μέσο για να προκληθεί το ενδιαφέρον των παιδιών κατά τη διδασκαλία των στοιχειωδών μαθηματικών. Ένας καλός μαθηματικός γρίφος, ένα παράδοξο ή ένα μαγικό τέχνασμα μπορεί να διεγείρει τη φαντασία των παιδιών καλύτερα από μια πρακτική εφαρμογή των μαθηματικών (ειδικά αν αυτή η εφαρμογή είναι έξω από τις εμπειρίες των παιδιών) και εάν το 'παιχνίδι' επιλεγεί προσεκτικά μπορεί να οδηγήσει σχεδόν χωρίς νοητική προσπάθεια στην κατανόηση σημαντικών μαθηματικών ιδεών*» (σ. xi).

Ένα τελευταίο, αλλά όχι τελικό, σχόλιο

Ο Bishop (1988) έχει διατυπώσει και αναλύσει την άποψη, ότι η μάθηση και αντίστοιχα η διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο μπορεί να ιδωθεί ως μια διαδικασία εισαγωγής στον μαθηματικό πολιτισμό, η οποία στοχεύει στη μύηση των παιδιών στις έννοιες, στα σύμβολα και στις αξίες των μαθηματικών, θεωρούμενων ως συστατικό στοιχείο των ανθρώπινων πολιτισμών.

Το παιχνίδι αποτελεί ένα εξίσου σημαντικό στοιχείο όλων των πολιτισμών, αιτία και παράγωγο πολλών ανθρώπινων δραστηριοτήτων. Το παιχνίδι, κυρίαρχη δραστηριότητα όλων των παιδιών, όλου του κόσμου και όλων των ιστορικών εποχών, αποτελεί ένα σημαντικό πλαίσιο, αλλά και έναν φορέα μάθησης και πολιτισμικής μεταβίβασης.

Η ταύτιση της μαθηματικής δραστηριότητας με τη δραστηριότητα του παιχνιδιού και μέσα από την ταύτιση αυτή η εισαγωγή των παιδιών στον μαθηματικό πολιτισμό μοιάζει σχεδόν αυτονόητη.

Η ανάπτυξη ενός αντίστοιχου πλαισίου μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών, αρχικά στο νηπιαγωγείο και στο δημοτικό σχολείο, είναι ζήτημα υποστήριξης των αυτονόητων στο συγκεκριμένο, όπως και σε πολλά άλλα ζητήματα της σχολικής εκπαίδευσης.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Abt, Clark (1970), *Serious games*, New York, Viking Press.

Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht: Kluwer

Bright, G.W., Harvey, J.G. & Montague Wheeler, M. (1985), *Learning and Mathematics Games*, *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, vol. 1, 1-189.

Caillois, R. (1961), *Man, play, and games*. The Free Press, Glencoe, New York.

Engeström, Y. (1987). *Learning by expanding: An activity-theoretical approach to developmental research*. Helsinki: Orienta-Konsultit.

Gardner, M. (1990), *Mathematical Circus*, Penguin Books, London.

Ginsburg, H. P. (2006). *Mathematical play and playful mathematics: A guide for early education*. In R. M. Golinkoff, K Hirsh-Pasek, & D. Singer (Eds.), *Play=learning*, New York: Oxford University Press. 145-165.

Holton D., Ahmed,A., Williams, H. & Hill, C. (2001): *On the importance of mathematical play*, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32 (3), 401-415

Huizinga, J. (1955/1938). *Homo ludens; a study of the play-element in culture*. trans. by R.F.C. Hull, Boston: Beacon Press.

Ελληνική έκδοση: Χουϊζίνγκα, Γ., (1989) *Ο άνθρωπος και το παιχνίδι (Homo ludens)*, (μτφ. Ροζάνης Σ., Λυκιαρδόπουλος Γ.) Γνώση, Αθήνα.

Juul J. (2002), *The Open and the Closed: Game of emergence and games of progression*". Στο Frans Mäyrä (Ed.) *Computer Games and Digital Cultures Conference Proceedings*, Tampere: Tampere University Press, 323-329.

- McLane, J. B. (2003). "Does not." "Does too." Thinking about play in the early childhood classroom. Herr Research Center, Erikson Institute Occasional Paper, 4, 2-15. <http://www.erikson.edu/downloads/cmsFile.ashx?VersionID=1301&PropertyID=78> [ανακτήθηκε 1/2/12]
- Moyles, J. (Ed.) (1994) *The Excellence of Play*. Buckingham: Open University Press.
- Piaget, J., & Inhelder, B. Mental imagery in the child. New York: Basic, 1971
- Piaget, J. & Inhelder, B. (1990/1950), Η ψυχολογία του παιδιού, Μτφ. Κ. Κίτσος, Αθήνα: Δαιδαλος Ι. Ζαχαρόπουλος.
- Popper, K. R. (1972) *Objective Knowledge, An Evolutionary Approach* Oxford, Clarendon Press, London.
- Salen, K. & Zimmerman E. (2003), *Rules of Play - Game Design Fundamentals*. MIT Press, Cambridge,
- Van Oers, B. (1996). Are you sure? Stimulating mathematical thinking during young children's play, *European Early Childhood Education Research Journal*, 4(1), 71-87.
- Vygotsky L.S., (1997) *Νους στην κοινωνία*, (μτφ. Μπίμπου Α. & Βοονιάδου Σ.), Αθήνα: Gutenberg.
- Vygotsky, L. (1967). Play and its role in the mental development of the child. *Soviet Psychology*, 5(3), 6-18.
- Wood, E. (2008) Conceptualising a pedagogy of play: International perspectives from theory, policy and practice. Στο D. Kurschner (Ed.) *From children to red hatters: Diverse images and issues of play*, Play and Culture Studies, vol. 8, Lanham, MD: University Press of America, 166-189.

Εισάγοντας τα μαθηματικά στο νηπιαγωγείο ως αφήγηση

Η μαθηματική δραστηριότητα και η μαθηματική γνώση

Η μαθηματική γνώση είναι παράγωγο μιας κοινωνικής πρακτικής, η οποία όμως μετά την παραγωγή της αυτονομείται πλήρως από την πρακτική στην οποία οφείλει την ύπαρξη της. Η μαθηματική γνώση - οι έννοιες, τα θεωρήματα και οι τεχνικές, των μαθηματικών - παρόλο που είναι ανθρώπινες κατασκευές αποκτούν μετά την παραγωγή τους δικές τους, αντικειμενικά υπαρκτές, ιδιότητες και οδηγούν σε προβλήματα, πέρα από τις προθέσεις και τις προβλέψεις των ανθρώπων-δημιουργών τους. Όπως έχει αναλυθεί από τον Πόππερ (Popper 1972), η μαθηματική γνώση - και γενικότερα η επιστημονική γνώση - είναι ένα από τα αναπτυσσόμενα προϊόντα του ανθρώπινου πνεύματος, το οποίο αντικειμενοποιώντας τις δημιουργίες του και προσπαθώντας να επιλύσει τα συχνά απρόβλεπτα και απρόσμενα προβλήματα που προκύπτουν από τις δημιουργίες αυτές παράγει νέες μαθηματικές έννοιες, νέα προβλήματα και νέες λογικές κατασκευές, παράγει δηλαδή νέα μαθηματική γνώση. Στη βάση αυτή διακρίνεται η «αντικειμενική γνώση», η οποία έχει και μια σχετικά αυτόνομη ύπαρξη, από την «υποκειμενική πίστη» του γνωρίζοντος ανθρώπινου υποκειμένου.

Στην αντικειμενικότητα της μαθηματικής και γενικότερα της επιστημονικής γνώσης, στην ανεξαρτητοποίηση της δηλαδή από τις υποκειμενικές πεποιθήσεις των ανθρώπων, συμβάλλει καθοριστικά η διατύπωση της γνώσης αυτής σε μια περιγραφική και επιχειρηματολογική γλώσσα, η οποία αποτυπώνει τις λογικο-παραγωγικές σχέσεις μεταξύ μαθηματικών εννοιών, θεωρημάτων, αποδείξεων, προβλημάτων και επιχειρημάτων. Η γλωσσικά διατυπωμένη γνώση, η οποία εκφράζει ιδιότητες και σχέσεις και η οποία μπορεί να παράγει (και παράγει) νοητικά και (έμμεσα δια της τεχνολογίας) φυσικά προϊόντα είναι μια γνώση η οποία υπάρχει αντικειμενικά, δηλαδή ανεξάρτητα από τους ανθρώπους, τους παραγωγούς και τους γνώστες της γνώσης αυτής.

Το ζήτημα είναι ότι δεν υπάρχει με τον τρόπο που υπάρχουν τα υλικά αντικείμενα και τα φαινόμενα του φυσικού κόσμου. Η μαθηματική γνώση υπάρχει ως αντικείμενο ενός αφηρημένου κόσμου, ο οποίος περιλαμβάνει τα αντικειμενοποιημένα προϊόντα της ανθρώπινης σκέψης και της γλώσσας. Σε αντιδιαστολή με τον φυσικό κόσμο, ο οποίος περιλαμβάνει όλα τα φυσικά όντα και τα υλικά αντικείμενα (τον «πρώτο κόσμο»), ο Πόπερ εισήγαγε τη διάκριση ανάμεσα σε έναν υποκειμενικό «δεύτερο κόσμο», ο οποίος περιλαμβάνει τα περιεχόμενα της ανθρώπινης εμπειρίας (τις εντυπώσεις, τα αισθήματα, τις πεποιθήσεις) και σε έναν αντικειμενικό «τρίτο κόσμο», ο οποίος περιλαμβάνει τα παράγωγα της ανθρώπινης νοητικής δραστηριότητας (τις επιστημονικές γνώσεις, τα καλλιτεχνικά δημιουργήματα, τα ιδεολογικά συστήματα). Μέσα από αυτή τη διάκριση της πραγματικότητας σε τρεις διαφορετικούς κόσμους αίρεται η φιλοσοφική αντίθεση ανάμεσα στη θεώρηση των μαθηματικών ως μιας κοινωνικής κατασκευής (κατασκευασιοκρατία) με τη θεώρηση των μαθηματικών ως μιας αναπαράστασης μιας ήδη μαθηματικά οργανωμένης πραγματικότητας (πλατωνισμός). Οι μαθηματικές έννοιες, τα θεωρήματα και τα προβλήματα υπάρχουν ανεξάρτητα από την ανθρώπινη σκέψη, ενώ είναι προϊόντα, ιδίως γλωσσικά, της ανθρώπινης κοινωνικής πρακτικής. Είναι, δηλαδή, ταυτόχρονα και ανθρώπινες κατασκευές και υπαρκτά «αντικείμενα», τα οποία αφότου δημιουργηθούν αποξενώνονται από τους δημιουργούς τους, αποκτούν αυτόνομη και α-χρονική ύπαρξη, έχοντας τις δικές τους ιδιότητες, πολλές φορές απρόσμενες και απρόβλεπτες από τους δημιουργούς τους (βλέπε και τα άλτα προβλήματα των μαθηματικών), ανεξάρτητα από τη γνώση ή την άγνοια των ιδιοτήτων αυτών από τους ανθρώπους. Αυτό σημαίνει, ότι μπορεί να προκύψουν ανακαλύψεις νέων μαθηματικών γεγονότων, τα οποία προκύπτουν από αρχικά ανθρώπινες μαθηματικές κατασκευές, ανακαλύψεις δηλαδή αντικειμενικά υπαρκτών και όχι δι-υποκειμενικά αποδεκτών, μαθηματικών αληθειών. Για παράδειγμα, αφότου δημιουργήθηκαν οι φυσικοί αριθμοί ως εκφράσεις του πλήθους ενός συνόλου αντικειμένων, η διάκριση άρτιων και περιττών αριθμών ή η διάκριση πρώτων και σύνθετων αριθμών προέκυψαν αντικειμενικά ως ιδιότητες των αριθμών, όπως προέκυψε αντικειμενικά, ανεξάρτητα από τη θέληση των μαθηματικών και εντελώς απρόσμενα, η αναπάντητη μέχρι

σήμερα εικασία του Γκόλμπαχ: είναι δυνατόν να γραφεί κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 ως άθροισμα δυο πρώτων αριθμών;

Απο μια τέτοια οπτική, η αντικειμενικά υπάρχουσα μαθηματική γνώση προσομοιάζει στα φυσικά αντικείμενα και στις υλικές σχέσεις τους, τα οποία επίσης δεν είναι παρατηρήσιμα έξω από ένα θεωρητικό πλαίσιο και δεν είναι περιγράψιμα χωρίς μια γλώσσα, η οποία ενσωματώνει αντίστοιχες θεωρητικές παραδοχές. Οι δυνατότητες εφαρμογής των μαθηματικών στις φυσικές επιστήμες προκύπτουν από αυτήν ακριβώς τη στενή θεωρητική αλληλοσυσχέτιση μαθηματικών γεγονότων και γεγονότων του φυσικού κόσμου. Οι βασικές έννοιες και πράξεις της αριθμητικής, για παράδειγμα, αναπτύχθηκαν αρχικά για να επιλύσουν πρακτικά προβλήματα απαρίθμησης και μέτρησης μεγεθών. Είναι επομένως αναμενόμενο, ότι όλα τα μαθηματικά τα οποία βασίζονται στην αριθμητική είναι εφαρμόσιμα σε εκείνα τα φυσικά φαινόμενα, τα οποία είναι ισόμορφα με τις πράξεις της αριθμητικής και τα οποία είναι δυνατόν να ποσοτικοποιηθούν με μαθηματικούς όρους και έτσι να εκφραστούν με μαθηματική γλώσσα. Τέτοια φαινόμενα είναι, για παράδειγμα, εκείνα τα φαινόμενα της μεταβολής ή της ένωσης, τα οποία είναι ισόμορφα με την πράξη της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

Στα μαθηματικά, όπως και στις φυσικές επιστήμες, οι θεωρίες διατυπώνονται αρχικά ως εικασίες, δηλαδή ως υποθετικά συμπεράσματα, οι οποίες διαψεύδονται ή ανασκευάζονται με την απόδειξη στα μαθηματικά και με τις εμπειρικές δοκιμασίες στις φυσικές επιστήμες. Μέσα από την εμπειρική επικύρωση επιστημονικών θεωριών, όμως, επικυρώνονται εμμέσως και σε κάποιο βαθμό και οι αντίστοιχες μαθηματικές θεωρίες (Popper, 1963). Η αντικειμενικά υπάρχουσα μαθηματική και επιστημονική γνώση, όπως ορίζεται στη βάση αυτή από τον Πόππερ, διαμορφώνει την ανθρώπινη συνείδηση επηρεάζοντας ακόμα και τον τρόπο με τον οποίο ο άνθρωπος παρατηρεί, ή μέσω της τεχνολογίας μετασχηματίζει, τη φυσική πραγματικότητα. Η ανθρώπινη συνείδηση, επομένως, διαμεσολαβεί ανάμεσα στο αφηρημένο και στο συγκεκριμένο, ανάμεσα στον πολιτισμό και στη φύση, αίροντας την απόλυτη διάσταση φυσικού και πνευματικού κόσμου.

Όπως προαναφέρθηκε, η μαθηματική γνώση διασφαλίζει την αντικειμενική της ύπαρξη μόνο όταν, και στο βαθμό στον οποίο, μπορεί να πραγματωθεί υλικά ως γραπτό κείμενο ή ως προφορικός λόγος, τα οποία με τη σειρά τους απαιτούν την ανθρώπινη εμπλοκή (του γραφέα και του αναγνώστη ή του αφηγητή και του ακροατή). Σ' αυτό ακριβώς το πεδίο της μερικής σύμπτωσης και της αλληλεπίδρασης των τριών κόσμων, όπως διακρίθηκαν από τον Πόππερ, του φυσικού κόσμου (των όντων, των αντικειμένων και των φαινομένων), του υποκειμενικού κόσμου της ανθρώπινης εμπειρίας (των αισθημάτων, των απόψεων και των πεποιθήσεων) και του αντικειμενικού κόσμου της μαθηματικής γνώσης (των εννοιών, των τεχνικών και των θεωρημάτων) μπορούμε να οργανώσουμε και να αναπτύξουμε μια εισαγωγή των μαθηματικών, στο σχολείο και ιδίως στο νηπιαγωγείο, βασισμένη στην αφήγηση, η οποία θα συμπλέκει τα αντικείμενα του κόσμου, τα συναισθήματα των παιδιών και τις έννοιες των μαθηματικών.

Η αφήγηση ως μορφή ανθρώπινης σκέψης

Αναλύοντας την ανθρώπινη νόηση ο Μπρούνερ υποστηρίζει, ότι οι άνθρωποι για να διαχειριστούν την εμπειρική πραγματικότητα και να οργανώσουν τη γνώση τους για την πραγματικότητα αυτή αναπτύσσουν δύο τύπους σκέψης, την αφηγηματική και την λογικο-επιστημονική ή παραδειγματική σκέψη. Οι δύο αυτοί τύποι σκέψης είναι συμπληρωματικοί χωρίς, όμως, να ανάγεται ο ένας στον άλλον, αφού έχουν διαφορετικές οργανωτικές αρχές, διαφορετικά κριτήρια πληρότητας και διαφορετικές διαδικασίες επαλήθευσης (Bruner, 1986, σ. 11-13). Η παραδειγματική σκέψη αναπτύσσεται με κύριο μέσο την υποθετικο-παραγωγική λογική, επιδιώκοντας τη διατύπωση αιτιολογημένων επιχειρημάτων και αποδείξιμων ισχυρισμών. Είναι επομένως μια μορφή σκέψης δομημένη στην κατηγοριοποίηση και στο λογικό επιχείρημα, η οποία δομείται με άξονα τη λογική συνεπαγωγή και όχι τη χρονική αλληλουχία και από την οποία προκύπτει μια λογικά τεκμηριωμένη γνώση, διατυπωμένη με πληρότητα και συνέπεια.

Αντίθετα, η αφηγηματική σκέψη, με κύριο μέσο την «ιστορία», επιδιώκει να οργανώσει την ανθρώπινη εμπειρία χρονικά και χωρικά, εφαρμόζοντας μια υπονοούμενη, αλλά σπάνια ρητά εκφρασμένη, γνώση και επιδιώκοντας πρωτίστως, όχι την επαλήθευση, αλλά την αληθοφάνεια των ισχυρισμών της. Διεκδικεί, επομένως, όχι την απόδειξη ενός ισχυρισμού, αλλά την αποδοχή του δια της πειθούς. Παράλληλα, όπως σημειώνει ο Μπρούνερ, η αφήγηση μιας ιστορίας συνδυάζει δύο όψεις, «μια ακολουθία γεγονότων και μια υπονοούμενη αξιολόγηση των αφηγούμενων γεγονότων» (Bruner, 2007). Μέσω της αξιολόγησης αυτής ο αφηγητής παρουσιάζει τη δικιά του ερμηνεία των γεγονότων που αφηγείται, ενσωματώνει έμμεσα τις δικές του εμπειρίες στα γεγονότα αυτά και προβάλλει τις δικές του επιλογές για τη σημαντικότητα των γεγονότων αυτών.

Κύρια χαρακτηριστικά μιας αφήγησης είναι κατά τον Μπρούνερ, η χρονική αλληλουχία, η αδιαφορία για τη διάκριση πραγματικού και φανταστικού, η ιδιόμορφη διαχείριση της κανονικότητας και η δραματοποίηση γεγονότων και καταστάσεων (Bruner, 1996).

Η δόμηση της αφήγησης με άξονα μια χρονική αλληλουχία γεγονότων, συμβάντων και νοητικών καταστάσεων στις οποίες εμπλέκονται ανθρώπινα όντα ως δράστες ή κεντρικά πρόσωπα είναι το θελιώδες χαρακτηριστικό της. Τα συστατικά, όμως, της χρονικής αλληλουχίας μιας αφήγησης αποκτούν νόημα, όχι ως μεμονωμένα στοιχεία, αλλά από τη θέση τους στη διαμόρφωση της αλληλουχίας ως συνόλου, από την πλοκή δηλαδή της αφήγησης. Η διαδικασία κατανόησης μιας αφήγησης, επομένως, περιλαμβάνει αφενός την κατανόηση του νοήματος των συστατικών στοιχείων της και της συσχέτισης τους με την πλοκή της αφήγησης και αφετέρου τη διάκριση της διαμόρφωσης της πλοκής από την ακολουθία των γεγονότων της αφήγησης. Αντίθετα με την αφήγηση και κατά συνέπεια την αφηγηματική σκέψη, η οποία δομείται με άξονα τη χρονική αλληλουχία γεγονότων, συμβάντων και καταστάσεων, η παραδειγματική σκέψη, μορφή της οποίας αποτελεί η μαθηματική σκέψη, οργανώνεται με άξονα τη λογική αλληλουχία παραδοχών, αληθειών και επιχειρημάτων.

Οι χρονικές σχέσεις απαλείφονται πλήρως και όπως σημειώνεται από τις Σινκλαίρ κ.α (Sinclair et al., 2009) ακόμα και οι μαθηματικές διαδικασίες οι οποίες ενέχουν μια χρονική εξέλιξη, όπως είναι η απαρίθμηση στην αριθμητική ή η περιστροφή στη γεωμετρία, μετατρέπονται σε αντικείμενα ή στατικές καταστάσεις και περιγράφονται γλωσσικά με ουσιαστικά και αντωνυμίες. Η μαθηματική γνώση, σε αντίθεση με μια αφηγούμενη ιστορία, δομείται με άξονα τις λογικές και όχι τις χρονικές σχέσεις, γι' αυτό και κατά μια εκδοχή «δεν μπορεί να έχει αφηγηματική μορφή» (Solomon & O'Neill, 1998, σ. 217).

Η αδιαφορία για τη διάκριση πραγματικών και φανταστικών συμβάντων και καταστάσεων, το οποίο αποτελεί το δεύτερο χαρακτηριστικό της αφήγησης, συναρτάται στενά με την καθοριστική σημασία της αλληλουχίας των γεγονότων μιας αφήγησης. «Αυτό που καθορίζει πάνω απ' όλα τη μορφή ή το περιεχόμενο της αφήγησης είναι περισσότερο η ακολουθία των προτάσεων παρά η αλήθεια ή η ανακρίβεια που εμπεριέχεται στις προτάσεις αυτές» (Bruner, ο.π., σ. 86). Επομένως, κάθε αφήγηση κατασκευάζει μια δικιά της εικονική πραγματικότητα, ένα δικό της πεδίο αναφοράς, στο οποίο ένα γεγονός μπορεί να ενταχθεί ανεξάρτητα αν έχει πραγματικά συμβεί ή είναι απολύτως φανταστικό. Αυτό το χαρακτηριστικό, όμως, αποτελεί - αν και όχι κυρίαρχο, πάντως ουσιαστικό - στοιχείο και της παραδειγματικής σκέψης, η οποία επίσης κατασκευάζει και αποδέχεται φανταστικές πραγματικότητες στη βάση υποθέσεων, παραδοχών και θεωρητικών κατασκευών. Η διαφορά αφηγηματικής και παραδειγματικής σκέψης στο ζήτημα αυτό έγκειται στα μέσα, που έχουν αναπτυχθεί και εφαρμόζονται για την τεκμηρίωση της «αλήθειας» των ισχυρισμών, οι οποίοι αναφέρονται και αφορούν στις φανταστικές αυτές πραγματικότητες. Οι μαθηματικές και επιστημονικές «αλήθειες» τεκμηριώνονται με σαφώς ορισμένες λογικές διαδικασίες (ορισμούς, επιχειρήματα, συλλογισμούς), ενώ οι «αλήθειες» των αφηγήσεων εξαρτώνται και καθορίζονται από το πλαίσιο αναφοράς τους και τις ερμηνείες του πλαισίου αυτού.

Τρίτο χαρακτηριστικό της αφήγησης και της αφηγηματικής σκέψης είναι η ιδιόμορφη διαχείριση της κανονικότητας, δηλαδή των σχέσεων μεταξύ του συνηθισμένου και του ασυνήθιστου, αυτού το οποίο θεωρείται καθιερωμένο σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο και αυτού το οποίο στο ίδιο πλαίσιο θεωρείται παρέκκλιση. Μια καλά δομημένη ιστορία περιλαμβάνει πέντε στοιχεία: έναν δράστη, μια πράξη, ένα στόχο, μια σκηνή και ένα όργανο συν κάποιο πρόβλημα, το οποίο προκαλεί ή προκύπτει από τη διατάραξη της ισορροπίας ανάμεσα στα πέντε αυτά στοιχεία. Η κανονικότητα, όμως, και η ρήξη της, ο κανόνας και η εξαίρεση, το παράδειγμα και το αντι-παράδειγμα, αποτελεί επίσης συστατικό στοιχείο της παραδειγματικής σκέψης, του οποίου βέβαια ο ρόλος στην ανάπτυξη της είναι εντελώς διαφορετικός από το ρόλο που κατέχει στην αφηγηματική σκέψη.

Η διατάραξη της ισορροπίας ανάμεσα στους παράγοντες της ιστορίας, την οποία προκαλεί ένα πρόβλημα, και οι συνέπειες της διατάραξης αυτής αποδίδουν στην αφήγηση το τέταρτο χαρακτηριστικό της, τη δραματικότητα, η οποία συνήθως δημιουργείται στη βάση των αποκλίσεων από την κανονικότητα και των ρήξεων με το συνηθισμένο που προκαλούνται από το πρόβλημα. Η αφήγηση ιστορεί παθήματα και πράξεις των πρωταγωνιστών της και τα αφηγούμενα γεγονότα συναρτώνται με τα αισθήματα, τις προτιμήσεις, τις επιθυμίες, τις αξίες, τις πεποιθήσεις τους μέσα από καταστάσεις αναγκαιότητας, οι οποίες επενδύονται με δραματικά στοιχεία. Η δημιουργία ή η παρουσίαση δραματικών καταστάσεων είναι ένα χαρακτηριστικό το οποίο διακρίνει την παραδειγματική από την αφηγηματική σκέψη. Ενώ η πρώτη επιδιώκει να ταξινομήσει ιδιότητες και σχέσεις, η δεύτερη επινοεί σκοπιμότητες για τις ιδιότητες και τις σχέσεις μεταξύ προσώπων, γεγονότων και καταστάσεων.

Συνοψίζοντας, τόσο η παραδειγματική όσο και η αφηγηματική σκέψη κατέχουν θεμελιώδεις ρόλους στην παραγωγή και στην οργάνωση της γνώσης, επικεντρώνονται όμως σε διαφορετικές όψεις των διαδικασιών αυτών.

Η παραδειγματική σκέψη επικεντρώνεται στα δεδομένα στοιχεία ενός συστήματος και στις μεταξύ τους σχέσεις, επιδιώκοντας να εντοπίσει και να διατυπώσει γενικότητες, οι οποίες χαρακτηρίζουν τα στοιχεία και τις σχέσεις αυτές, ενώ η αφηγηματική σκέψη εντοπίζεται στα

συγκεκριμένα γεγονότα στα οποία εμπλέκονται τα στοιχεία ενός συστήματος καθώς τα γεγονότα εξελίσσονται χρονικά, στο υπόβαθρο των γεγονότων αυτών και στις συνάψεις τους με τις γνώσεις ή τις μνήμες των αναγνωστών, των ακροατών ή των θεατών της αφήγησης.

Από την οπτική της διδασκαλίας και της μάθησης, τώρα η έμφαση στην παραδειγματική σκέψη αιτιολογείται για εκείνα τα είδη γνώσης, τα οποία οργανώνονται με άξονα τις αρχές και τους κανόνες της λογικής, όπως είναι τα μαθηματικά, αλλά όπως επισημαίνει ο Μπρούνερ, η έμφαση αυτή είναι απολύτως αναποτελεσματική όταν πρόκειται για γνώση του «συμβολικού κόσμου» (Bruner, 1991), μέρος του οποίου αποτελούν και τα μαθηματικά. Επομένως, μπορεί να διατυπωθεί ο ισχυρισμός, ότι στη συγκρότηση της μαθηματικής σκέψης και στη μάθηση της μαθηματικής γνώσης, η αφηγηματική σκέψη είναι συμπληρωματική της παραδειγματικής σκέψης και ο ρόλος τους εξίσου σημαντικός. Στην πρώτη σχολική ηλικία, μάλιστα, η αφήγηση και η ανάπτυξη της αφηγηματικής σκέψης μπορεί να αποτελέσει τη βάση για την ανάπτυξη της παραδειγματικής - μαθηματικής και επιστημονικής - σκέψης.

Η μαθηματική εκπαίδευση με άξονα την αφήγηση

Η αφήγηση και στις δύο όψεις της (ως παρακολούθηση και κατανόηση ιστοριών και ως κατασκευή και παρουσίαση ιστοριών) μπορεί να αποτελέσει τον άξονα ενός προγράμματος μαθηματικής εκπαίδευσης στο νηπιαγωγείο παρέχοντας στα παιδιά την νοητική οργανωτική δομή για την αφομοίωση (με τους όρους της θεωρίας του Πιαζέ) μαθηματικών εμπειριών και γνώσεων μέσα από τη δημιουργία ενός περιβάλλοντος διερευνητικής μάθησης. Σε ένα τέτοιο μαθησιακό περιβάλλον, τα παιδιά υποκινούνται να θέτουν ερωτήσεις, να διατυπώνουν υποθέσεις, να συλλέγουν δεδομένα, να ελέγχουν τις υποθέσεις μέσα από την ανάλυση των δεδομένων και να εξαγουν συμπεράσματα. Σε ένα περιβάλλον διερευνητικής μάθησης με άξονα την αφήγηση τα παιδιά μπορεί να είναι οι πρωταγωνιστές μιας ιστορίας, η οποία κατασκευάζεται και εξελίσσεται με τη συμμετοχή τους και η οποία δομείται στην επίλυση προβλημάτων, ενώ κατά την

εξέλιξη της ιστορίας τα παιδιά «ανακαλύπτουν» τα αναγκαία στοιχεία για την επικύρωση ή την απόρριψη των υποθέσεων τους.

Μια τέτοια προσέγγιση στην εισαγωγή των μαθηματικών στο νηπιαγωγείο οφείλει να πληροί τρεις προϋποθέσεις:

- (1) Να εξασφαλίζει μια ισορροπία ανάμεσα στην εξέλιξη μιας ιστορίας, η οποία προκαλεί το ενδιαφέρον και τη συμμετοχή των παιδιών και στην επίτευξη των διδακτικών στόχων μέσα από την ιστορία αυτή. Το πρώτο είναι αναγκαίο για να υποκινήσει τη μάθηση και το δεύτερο είναι απαραίτητο για να εξασφαλίσει την αποτελεσματικότητα της εκπαιδευτικής δραστηριότητας.
- (2) Να εισάγει ή να δημιουργεί ιστορίες, όχι μόνο κατανοητές από όλα τα παιδιά, αλλά ιστορίες οι οποίες θα παρέχουν δυνατότητες συμμετοχής στις δραστηριότητες τους σε όλα τα παιδιά.
- (3) Η αφήγηση μιας ιστορίας θα πρέπει να βασίζεται σε μια προσχεδιασμένη πλοκή, η οποία όμως θα είναι ταυτόχρονα ευέλικτη και δεκτική τροποποιήσεων ανάλογα με την εξέλιξη της συμμετοχής των παιδιών στην αφήγηση και στην επίλυση των προβλημάτων της ιστορίας. Η προσαρμογή μιας προκατασκευασμένης ιστορίας στα, όχι απολύτως προβλέψιμα, δεδομένα της αφήγησης της ιστορίας επιβάλλει το σχεδιασμό της σε διαδοχικά τμήματα, τα οποία θα επιτρέπουν την κατά περίπτωση τροποποίηση της. Κατά το σχεδιασμό μιας ιστορίας ενδιαφέρει πρωτίστως η χρονική αλληλουχία των επεισοδίων και από μαθηματική άποψη το περιεχόμενο και μέθοδοι επίλυσης των προβλημάτων, ενώ κατά την αφήγηση της οι πράξεις των πρωταγωνιστών της ιστορίας, η συμμετοχή των παιδιών και βέβαια οι μαθηματικές εμπειρίες τους.

Εισάγοντας τα μαθηματικά ως αφήγηση ιστοριών με καταστάσεις και ήρωες, που προκαλούν το ενδιαφέρον τους, υποκινούμε τη συμμετοχή των παιδιών σε τρεις τύπους δραστηριοτήτων, δημιουργώντας αντίστοιχες καταστάσεις μάθησης:

- (1) Στην κατασκευή της ιστορίας, μια δραστηριότητα η οποία ενισχύει τη δημιουργία νοημάτων για τον κόσμο της πραγματικότητας και απ' την οπτική που εδώ ενδιαφέρει τη

δημιουργία μαθηματικών νοημάτων ανάγνωσης, χειρισμού και μετασχηματισμού στοιχείων της πραγματικότητας.

- (2) Στη διερεύνηση καταστάσεων, οι οποίες συνθέτουν την αφηγούμενη ιστορία, όπως για παράδειγμα ποιες μπορεί να είναι οι λογικές συνέπειες μιας πράξης ενός ήρωα της ιστορίας στις δεδομένες συνθήκες και ποιες θα μπορούσαν να είναι υπό διαφορετικές συνθήκες ή ποιες είναι οι συνέπειες των προθέσεων ενός ήρωα της ιστορίας στις πράξεις του και επομένως στην εξέλιξη της ιστορίας.
- (3) Στον αναστοχασμό επεισοδίων-προβλημάτων της ιστορίας και στην νοητική επεξεργασία των αντίστοιχων μαθηματικών γνώσεων.

Ο Gerrig (1993) σημειώνει ότι η αφήγηση ιστοριών προσφέρει στους ακροατές, στους αναγνώστες ή στους θεατές της δύο ενδιαφέρουσες, από μαθησιακή άποψη, εμπειρίες. Πρώτον, τους «μεταφέρει» σε έναν διαφορετικό από τον παρόντα χώρο και σε έναν άλλο από το ενεστώτα χρόνο με έναν τρόπο γοητευτικό, έτσι που η «μεταφορά» αυτή να γίνεται αληθοφανής. Δεύτερον τους υποκινεί τη «συμμετοχή» στη δράση της ιστορίας, ως εάν η δράση αυτή να ήταν πραγματική. Οι ακροατές, οι αναγνώστες ή οι θεατές «μετέχουν» στην ιστορία, νοητικά και συναισθηματικά, με τρόπο ανάλογο της συμμετοχής των ηθοποιών σε ένα θεατρικό έργο. Νοητικά, μετέχοντας στην εξέλιξη της ιστορίας και συναισθηματικά εκδηλώνοντας τα αισθήματα τους κατά την εξέλιξη της. Οι εμπειρίες της «μεταφοράς» μπορεί να αξιοποιηθούν για τη δημιουργία κινήτρων για μάθηση και οι εμπειρίες της «συμμετοχής» μπορεί να συμβάλλουν στην δημιουργία καταστάσεων διερευνητικής μάθησης των μαθηματικών.

Συμπερασματικά, υπό τους προαναφερθέντες όρους, ένα πρόγραμμα μαθηματικών με άξονα την αφήγηση θα συμβάλει καθοριστικά στην δημιουργία κινήτρων για μάθηση και στην αποτελεσματικότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης στο νηπιαγωγείο.

Με το πλεονέκτημα, μάλιστα, ότι θα μεταθέσει το επίκεντρο του ενδιαφέροντος για τα μαθηματικά από την αλγοριθμική τους όψη, η οποία τονίζει την εκτέλεση πράξεων στην αναλυτική τους όψη η οποία προσανατολίζει στην επίλυση προβλημάτων, τα οποία προέρχονται από, ή αναφέρονται σε καταστάσεις της πραγματικότητας.

«Η κατασκευή ιστοριών στο μυαλό μας (ή η εξιστόρηση όπως συχνά αποκαλείται) είναι ένα από πιο θεμελιώδη μέσα κατασκευής νοημάτων' είναι μια δραστηριότητα η οποία διαποτίζει όλες τις όψεις της μάθησης... Μέσα από την ανταλλαγή ιστοριών οι δάσκαλοι και οι μαθητές μπορούν να μοιραστούν τις δικές τους κατανοήσεις ενός θέματος και να συγκλίνουν στις νοητικές τους αναπαραστάσεις του κόσμου. Μ' αυτή την έννοια οι ιστορίες και οι αφηγήσεις τους έχουν θέση σε όλα τα μαθήματα του αναλυτικού προγράμματος (Mandler 1984, σ. 194). Χωρίς να εξαιρούνται τα μαθηματικά.

Ένα παράδειγμα μαθηματικών αφηγημάτων

Αφηγήματα τα οποία μπορεί να αποτελέσουν βάση για την εισαγωγή των μαθηματικών στο νηπιαγωγείο, να χρησιμοποιηθούν δηλαδή ως μήτρες ανάπτυξης καταστάσεων διερευνητικής μάθησης μαθηματικών εννοιών, υπάρχουν ελάχιστα στην ελληνική βιβλιογραφία, σε αντίθεση με την ξενόγλωσση βιβλιογραφία εκπαιδευτικών μαθηματικών ιστοριών και αυτό συνιστά μια δυσκολία εφαρμογής της άποψης που εκτέθηκε προηγουμένα, αφού θα πρέπει να επινοηθούν οι κατάλληλες ιστορίες και από μαθηματική και από εκπαιδευτική άποψη. Τα αφηγήματα του Τσιώτσου «Ιστορίες με 4 πράξεις» και «Επίπεδια: Αφηγήματα σε δύο διαστάσεις» αποτελούν χαρακτηριστικά παραδείγματα ιστοριών, οι οποίες κατάλληλα οργανωμένες και ενδεχομένως τροποποιημένες μπορεί να εισάγουν τα παιδιά του νηπιαγωγείου στις έννοιες των αριθμητικών πράξεων το πρώτο και στα χαρακτηριστικά των επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων το δεύτερο.

Στην «Επιπεδία» τα γεωμετρικά σχήματα είναι ανθρωπομορφικά και οι ιδιότητες των χαρακτήρων-σχημάτων γίνονται οργανικό μέρος της πλοκής των ιστοριών, με τέτοιο τρόπο ώστε οι μαθηματικές ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων που είναι ταυτόχρονα και στοιχεία των δρώντων προσώπων να δημιουργούν ελιγμούς στην πλοκή και να κατευθύνουν αποφασιστικά τη δραματική ένταση των ιστοριών. Τα αφηγήματα έχουν τη μορφή ιστοριών αστυνομικού μυστηρίου, οι οποίες απαιτούν την επίλυση προβλημάτων. Για παράδειγμα όταν αναζητείται ο διαρρήκτης που έκλεψε τη σπάνια συλλογή των τόξων του Γεράσιμου Χορδωτού (ενός πλούσιου και εκκεντρικού κύκλου), ο υπαστυνόμος Τρίκας (ένα οξυγώνιο τρίγωνο με τετράγωνη λογική) μαζί με το βοηθό του τον Αγησίλαο (ένα ορθογώνιο τρίγωνο που προσπαθεί φιλότιμα να οξύνει το πνεύμα και τις γωνίες του) ανακαλύπτουν στον τόπο της διάρρηξης αποτυπώματα μιας γωνίας 75° . Τα παιδιά καλούνται συνεχίζοντας την ανάγνωση του αφηγήματος να αποκλείσουν από τα βασικά τετράπλευρα σχήματα (απλό τετράπλευρο, τραπέζιο, ισοσκελές τραπέζιο, πλάγιο παραλληλόγραμμο, ρόμβο, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και τετράγωνο) τους «ύποπτους» εκείνους οι οποίοι δε θα μπορούσαν να έχουν στο περίγραμμά τους έστω και μία γωνία 75° . Στην προκειμένη περίπτωση, το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και το τετράγωνο. Από κει και πέρα, οι έρευνες, οι οποίες στην αφήγηση είναι αστυνομικές, εντοπίζονται σε πρόσθετα χαρακτηριστικά τα οποία θα μπορούσαν να μειώσουν τον αριθμό των υπόπτων μέχρι την αποκάλυψη (και τη σύλληψη) του πραγματικού ένοχου. Μέχρι να συμβεί αυτό, τα χαρακτηριστικά των τετράπλευρων γεωμετρικών σχημάτων είναι διαρκώς παρόντα στην εξέλιξη της ιστορίας και έχοντας οργανική σημασία για τη ροή της αφήγησης, αποκτούν μια ιδιαίτερη σημασία και για τον ακροατή ή αναγνώστη (Τσιώτσος, 2008).

Στο πλαίσιο ενός τέτοιου αφηγήματος, τα παιδιά μπορούν να συνθέσουν και να εντάξουν τις δικές τους ιστορίες, τους δικούς τους χαρακτήρες-γεωμετρικά σχήματα, τις δικές τους υποθέσεις και τα δικά τους γεωμετρικά προβλήματα και συμπεράσματα και τέτοια αφηγήματα μπορούν να συνθέσουν τον άξονα της εισαγωγής των μαθηματικών στο νηπιαγωγείο, σύμφωνα με την πρόταση η οποία υποστηρίζεται στο παρόν κείμενο.

Βιβλιογραφικές αναφορές

- Bruner, J. S., *Actual minds, possible worlds*. Harvard University Press, Cambridge, MA., 1986.
- Bruner, J. S., The narrative construction of reality, *Critical Inquiry*, 18(1), 1–21, 1991.
- Bruner, J., *Πράξεις νοήματος*, Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα, 1997.
- Bruner, J. S. , *Ο πολιτισμός της εκπαίδευσης*, Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα, 2007.
- Gerrig, R., *Experiencing Narrative Worlds: On the Psychological Activities of Reading*, Yale University Press, New Haven, 1993.
- Mandler, J., *Stories, Scripts, and Scenes: Aspects of Schema Theory*, Erlbaum, Hillsdale, NJ., 1984.
- Popper K., *Objective Knowledge: An Evolutionary Approach*, Clarendon Press, Oxford, 1972.
- Popper K., *Conjectures and Refutations: The Growth of Scientific Knowledge*, Routledge and Kegan Paul, London, 1963.
- Sinclair N., Healy, L. and Sales C. O. R., Time for telling stories: narrative thinking with dynamic geometry, *ZDM Mathematics Education*, 41, 2009, 441–452.
- Solomon, Y., & O'Neill, J., Mathematics and narrative, *Language and Education*, 2(3), 1998, 210–221.
- Τσιώτσος Ν. , *Επιπεδία: Αφηγήματα σε δύο διαστάσεις*, Κέδρος, Αθήνα, 2003.
- Τσιώτσος Ν. , *Ιστορίες με 4 πράξεις*, Κέδρος, Αθήνα, 2005.
- Τσιώτσος Ν., *Μπορεί ένα αφηγηματικό βιβλίο να είναι μαθηματικό; Προσεγγίσεις των μαθηματικών του Δημοτικού σχολείου μέσα από βιβλία με ιστορίες*. Στο Δ. Χασάπης (επιμ.), *Το βιβλίο στη διδασκαλία των μαθηματικών*, Θεσσαλονίκη: Ομάδα Έρευνας της Μαθηματικής Εκπαίδευσης, 2008, 55-76.

**Η διδακτική των μαθηματικών
ως επιστημονική δραστηριότητα**

Το επιστημονικό αντικείμενο της διδακτικής των μαθηματικών: Παραδοχές και ζητούμενα

Εισαγωγικά σχόλια

Ποιο είναι το αντικείμενο της διδακτικής των μαθηματικών, ως επιστημονικής πρακτικής; Ακριβέστερα, ποιο αντικείμενο αποδίδεται άμεσα ή έμμεσα στη διδακτική των μαθηματικών από τις δημοσιεύσεις θεωρητικών αναλύσεων και εμπειρικών ερευνών, από τα πρακτικά των συναφών συνεδρίων και από τα σχετικά ερευνητικά προγράμματα;

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό φαίνεται αυτονόητη: η μάθηση και η διδασκαλία των μαθηματικών. Δεν είναι όμως, γιατί αυτή η απάντηση προϋποθέτει την παραδοχή ότι το φαινόμενο της μάθησης έχει ουσιωδώς διαφορετικά χαρακτηριστικά για τη μαθηματική γνώση από εκείνα τα χαρακτηριστικά που έχει η μάθηση κάθε άλλης επιστημονικής γνώσης. Στην ίδια βάση, η διδασκαλία των μαθηματικών διαφοροποιείται από τη διδασκαλία άλλων επιστημονικών γνώσεων, ως εφαρμογή επιστημονικών δεδομένων τα οποία προκύπτουν από τη μελέτη της μάθησης των μαθηματικών. Η παραδοχή αυτή, όμως, δεν μπορεί ούτε να θεωρείται εκ προοιμίου αυτονόητη ούτε είναι βέβαια καθολικά αποδεκτή.

Ως συνέπεια, τίθεται υπό ερώτηση το επιστημονικό καθεστώς της διδακτικής των μαθηματικών, αλλά και με ανάλογα επιχειρήματα όλων των διδακτικών, οι οποίες εντάσσονται στην ενότητα των επιστημονικών πρακτικών, οι οποίες ονομάζονται «επιστήμες της αγωγής» και οι οποίες συγκροτούνται στη βάση παρόμοιων παραδοχών για το φαινόμενο της μάθησης.

Η παρούσα εισήγηση θέτει πρωτίστως ερωτηματικά για το ζήτημα αυτό και επιχειρεί να σκιαγραφήσει απαντήσεις, αποσπασματικά και αναπόφευκτα ελλειπτικά, υιοθετώντας βασικές αρχές της Αλτουσεριανής επιστημολογικής οπτικής, όπως έχουν αναπτυχθεί από τον Μπαλτά (1990) και συνοψίζονται επιλεκτικά στη συνέχεια.

Κάθε επιστήμη έχει το αντικείμενο της, το οποίο η ίδια συγκροτεί και το οποίο ταυτόχρονα αποτελεί συστατικό της στοιχείο. Κάθε επιστήμη συγκροτεί το αντικείμενο της επιλέγοντας, ορίζοντας και περιγράφοντας φαινόμενα της πραγματικότητας, ανακατασκευάζοντας εννοιολογικά τα φαινόμενα αυτά και εντάσσοντας τα επιλεγμένα και εννοιολογικά ανακατασκευασμένα φαινόμενα στο επιστημονικό της αντικείμενο. Η διαδικασία συγκρότησης του επιστημονικού αντικειμένου μιας επιστήμης αποτελεί ταυτόχρονα και διαδικασία συγκρότησης της ίδιας της επιστήμης, αφού προϋποθέτει και χρησιμοποιεί, ενώ τη ίδια στιγμή παράγει, το εννοιολογικό σύστημα και τις ερευνητικές μεθόδους, που προσιδιάζουν στη συγκεκριμένη επιστήμη. Το επιστημονικό αντικείμενο, το εννοιολογικό σύστημα και οι ερευνητικές μέθοδοι μιας επιστήμης συγκροτούνται, επομένως, ταυτόχρονα μέσα από μια διεργασία αμοιβαίων προσδιορισμών και ελέγχων, όπου καθένα από τα στοιχεία αυτά προϋποθέτει την ύπαρξη των άλλων. Αυτή η διαδικασία συγκρότησης μιας επιστήμης καθιστά το αντικείμενο της σχετικά αυτόνομο από τα αντικείμενα των άλλων επιστημών και αποδίδει στις έννοιες που αποτελούν το εννοιολογικό της σύστημα μια σχετική αυτονομία νοήματος. Η αυτονομία του επιστημονικού αντικειμένου και αυτονομία νοήματος των εννοιών κάθε επιστήμης καθορίζουν τα όρια της διεπιστημονικότητας της.

Η συγκρότηση της διδακτικής των μαθηματικών

Όπως διατυπώνεται από τον Μπαλτά (1983), η συγκρότηση κάθε επιστήμης συνιστά *«μια ιδιαίτερα σύνθετη διαδικασία η οποία ενέχει και ενεργοποιεί κατά ιδιάζοντες τρόπους πολλά, διαφορετικά και ανομοιογενή στοιχεία της συνολικής κοινωνικής πρακτικής. Άλλαγές στην υλική παραγωγή και τη ζωή των ανθρώπων, τεχνικά επιτεύγματα και καινοτομίες, νέες κοινωνικές εμπειρίες, εντάσεις και ρήγματα στις πρακτικές ιδεολογίες, αλλαγές που συνεπιφέρονται στις θεωρητικές, φιλοσοφικές διαφοροποιήσεις και συγκρούσεις, συσσωρεύονται, αλληλοδιαπλέκονται και δημιουργούν ένα σημείο κρίσιμης συγκέντρωσης όπου οι επιμέρους πιέσεις που υφίσταται το δεδομένο συμπυκνώνονται, αλληλοενισχύονται και οδηγούν στην καταστροφή του. Η διαδικασία αυτής της καταστροφής είναι ταυτόχρονα ή διαδικασία που διαμορφώνει το επιστημονικό αντικείμενο, αυτή που*

συνιστά το αντίστοιχο εννοιολογικό σύστημα και αυτή πού αποκαθιστά τις προσιδιάζουσες σ' αυτά πειραματικές διαδικασίες. Είναι, δηλαδή, ή διαδικασία πού συγκροτεί ταυτόχρονα, μέσα σε μία ενιαία κίνηση, όλα τα στοιχεία πού συναποτελούν την επιστήμη αυτή», μια διαδικασία που έχει ονομαστεί από τον Μπασελάρ «επιστημολογική τομή».

Η διδακτική των μαθηματικών ως επιστημονική πρακτική και ερευνητικό πεδίο συγκροτείται ταυτόχρονα με, και σε μεγάλο βαθμό μέσα από, τις μεγάλες μεταρρυθμίσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης, οι οποίες πραγματοποιήθηκαν κατά τη δεκαετία του 1960. Οι μεταρρυθμίσεις αυτές καθοδηγήθηκαν από τον Οργανισμό Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης (OECD, αρχικά Οργανισμό Ευρωπαϊκής Οικονομικής Συνεργασίας - ΟΕΕΚ), ως απόκριση της Δύσης στην τεχνολογική πρόκληση της ΕΣΣΔ στο πλαίσιο του λεγόμενου Ψυχρού Πολέμου, η οποία εκδηλώθηκε με την εκτόξευση του δορυφόρου Sputnik I τον Οκτώβριο του 1957. Κατά τη δεκαετία του 1960, συνέρχονται με την καθοδήγηση και την χρηματοδότηση του ΟΟΣΑ σε διαδοχικές συναντήσεις με τη μορφή σεμιναρίων-συνεδρίων ειδικοί της μαθηματικής εκπαίδευσης και στελέχη εκπαιδευτικής πολιτικής, ως αντιπρόσωποι χωρών της Δυτικής Ευρώπης και των ΗΠΑ και επεξεργάζονται το περιεχόμενο, τα μέσα, τις πρακτικές και τα προβλήματα της διδασκαλίας των μαθηματικών, διαμορφώνοντας το βασικό πλαίσιο των μεταρρυθμίσεων της μαθηματικής εκπαίδευσης (Fehr, 1961α, 1961β, 1964). Από το 1966 και εξής δραστηριοποιείται στην ίδια κατεύθυνση με μια σειρά μελετών, εκδόσεων και σεμιναρίων η UNESCO με στόχο τη διάδοση των μεταρρυθμίσεων της μαθηματικής εκπαίδευσης στις χώρες εκτός της Δυτικής Ευρώπης και τις ΗΠΑ (UNESCO, 1966). Το 1968 εκδίδεται το περιοδικό *Educational Studies in Mathematics* και τον επόμενο χρόνο το *Journal for Research in Mathematics Education*, δύο από τα σημαντικότερα περιοδικά και με μεγάλη επιρροή στη διαμόρφωση της διδακτικής των μαθηματικών. Την ίδια εποχή αναπτύσσονται εκπαιδευτικά προγράμματα για τα μαθηματικά της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης από διάφορους οργανισμούς και ιδρύματα (Nuffield-M.Βρετανία, Alef-Γερμανία, Analogue-Γαλλία, School Mathematics Study Group-ΗΠΑ, κ.α.), τα οποία ασκούν σημαντική επίδραση στους συστατικούς όρους της υπό διαμόρφωση διδακτικής των μαθηματικών.

Μέσα σ' αυτό το πολιτικό και κοινωνικό πλαίσιο και με ότι το πλαίσιο αυτό συνεπάγεται, παράλληλα με τις επεξεργασίες των ζητημάτων που αφορούν τις μεταρρυθμίσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης, συγκροτείται ως αυτόνομη επιστημονική δραστηριότητα η διδακτική των μαθηματικών. Έκτοτε αναπτύσσεται ως επιστημονική πρακτική και καθιερώνεται σε ακαδημαϊκό επίπεδο, όπως μπορεί να διαπιστωθεί από μια σειρά γεγονότων, όπως η ανάπτυξη προπτυχιακών και μεταπτυχιακών πανεπιστημιακών σπουδών και η ίδρυση αντίστοιχων τμημάτων ή ινστιτούτων, η ανάπτυξη ερευνητικών προγραμμάτων και η χορηγία υποτροφιών, η ίδρυση εθνικών και διεθνών επιστημονικών ενώσεων, η διοργάνωση συνεδρίων, η έκδοση περιοδικών και βιβλίων με θεματολογία αποκλειστικά αφιερωμένη στη διδακτική των μαθηματικών. Το επιστημονικό αντικείμενο της διδακτικής των μαθηματικών συγκροτείται, επομένως, μέσα από μια «επιστημονική» θεώρηση ενός ήδη διακριτού φαινομένου, αυτού «της διδασκαλίας των μαθηματικών» στο τυπικό σχολείο. Η μετατροπή, δηλαδή, της θεώρησης ενός φαινομένου, υπό την πίεση κοινωνικο-πολιτικών αναγκών, παράγει το επιστημονικό αντικείμενο της διδακτικής των μαθηματικών. Η μέχρι τότε κυρίαρχη οπτική θεωρούσε τη μαθηματική σκέψη και κατά συνέπεια τη μάθηση των μαθηματικών ως φυσική δυνατότητα, ως εγγενές χάρισμα, των ατόμων, οπότε η διδασκαλία των μαθηματικών απευθύνονταν σε συγκεκριμένα άτομα, ο δε ρόλος της δεν μπορούσε να θεωρηθεί καθοριστικός. Η διδακτική των μαθηματικών συγκροτείται σε διεπιστημονική βάση, υπό τους όρους της νέας θεώρησης πρωταρχικά της διδασκαλίας και δευτερευόντως του φαινομένου της μάθησης των μαθηματικών. Η με τους συγκεκριμένους όρους, όμως, συγκρότηση της διδακτικής των μαθηματικών ως επιστημονικής πρακτικής συνεπάγεται μια εξαρχής ασάφεια στις σχέσεις θεωρίας και εφαρμογής, όπως επίσης και στις σχέσεις αμφοτέρων με την εκπαιδευτική πολιτική της μαθηματικής εκπαίδευσης. Τελικά, στη συγκρότηση του επιστημονικού αντικειμένου της διδακτικής των μαθηματικών καταλαμβάνει πρωτεύουσα θέση και κυριαρχεί η εφαρμογή σε βάρος της θεωρίας, γεγονός που διαμορφώνει καθοριστικά το εννοιολογικό σύστημα και τις ερευνητικές διαδικασίες της.

Οι σχέσεις θεωρίας και εφαρμογής στη διδακτική των μαθηματικών

Μια εγγενής ασάφεια στις σχέσεις θεωρίας και εφαρμογής, όπως επίσης και στις σχέσεις αμφοτέρων με την εκπαιδευτική πολιτική της μαθηματικής εκπαίδευσης κυριαρχεί, όπως προαναφέρθηκε, ως αποτέλεσμα του διεπιστημονικού χαρακτήρα της και των κοινωνικών και πολιτικών όρων, υπό τους οποίους συγκροτήθηκε η διδακτική των μαθηματικών. Τα ερευνητικά ερωτήματα και οι προβληματικές μέσα από τις οποίες αναδεικνύονται, αναφέρονται κατά κανόνα στη διδασκαλία των μαθηματικών στο τυπικό σχολείο και η διερεύνηση τους δεν τεκμηριώνεται στη θεωρία, αλλά στη χρησιμότητα τους για την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας των μαθηματικών, δηλαδή σε εφαρμογές της διδακτικής των μαθηματικών σε ένα πολύ συγκεκριμένο πλαίσιο. Εφαρμογές της διδακτικής των μαθηματικών, δηλαδή, οι οποίες υποδεικνύονται, κατά κανόνα, από τις συγκυριακές ανάγκες της εκπαιδευτικής πολιτικής και δεν προσδιορίζονται από την θεωρητική ανάπτυξη της διδακτικής των μαθηματικών και τα φαινόμενα της πραγματικότητας που αυτή στοχεύει. Η πλειονότητα των ερευνητικών ανακοινώσεων που δημοσιεύονται σε περιοδικά ή παρουσιάζονται σε συνέδρια διδακτικής των μαθηματικών, ιδιαίτερα στις Αγγλόφωνες χώρες, εισάγουν τον προβληματισμό τους με αναφορά στους στόχους ή και στις ανάγκες που επισημαίνονται σε κείμενα εκπαιδευτικής πολιτικής ή σε θεσμοθετημένα προγράμματα σπουδών. Παράλληλα, όπως καταγράφεται από τους Lerman & Τσατσαρώνη (2003), ένα ποσοστό μεγαλύτερο του 85% των άρθρων διδακτικής των μαθηματικών που δημοσιεύτηκαν κατά τη δεκαετία 1990-2001 στα περιοδικά *Educational Studies in Mathematics* και *Journal for Research in Mathematics Education* αναφέρονται σε, ή υπονοούν, ένα συγκεκριμένο παιδαγωγικό μοντέλο. Οι εφαρμογές της διδακτικής των μαθηματικών που αναφέρονται στις, και προκύπτουν από τις, εκπαιδευτικές πολιτικές αποκτούν έτσι μια ιδιάζουσα προτεραιότητα σε βάρος των προβλημάτων τα οποία προκύπτουν από τη θεωρητική της ανάπτυξη. Αυτή η κυριαρχία της εφαρμογής επί της θεωρίας συνεπάγεται αφενός τον περιορισμό του επιστημονικού αντικειμένου και κατά συνέπεια τη μονομερή ανάπτυξη του θεωρητικού πλαισίου της διδακτικής των μαθηματικών και αφετέρου την διαμόρφωση ενός ιδιότυπου καθεστώτος νομιμοποίησης της γνώσης, που με τη σειρά του

διαμορφώνει αντίστοιχα το περιεχόμενο της θεωρίας. Σε μεγάλο βαθμό, κριτήριο νομιμοποίησης της γνώσης, που παράγεται από την επιστημονική πρακτική της διδακτικής των μαθηματικών δεν θεωρείται η αλήθεια με την τυπική επιστημονική έννοια του όρου, αλλά η ενδεχόμενη χρησιμότητα της στην πολιτική της μαθηματικής εκπαίδευσης. Η διδακτική των μαθηματικών, κατά συνέπεια, καλείται διαρκώς να λογοδοτεί όχι στην επιστημονική αλλά στην εκπαιδευτική δεοντολογία και στα κριτήρια της κυρίαρχης εκπαιδευτικής πολιτικής με ανάλογη αλλοίωση και ανεπαρκή ανάπτυξη του θεωρητικού της χαρακτήρα. Η απόδοση ενός πρωτεύοντα ρόλου στη θεωρία μέσα από τη συγκρότηση κατάλληλων σχέσεων θεωρίας και εφαρμογής και η αυτονόμηση τους από τις αντίστοιχες ιδεολογικές εξαρτήσεις παραμένουν, επομένως, ζητούμενα και αποτελούν αναγκαίες προϋποθέσεις για την ολοκλήρωση της επιστημονικής συγκρότησης της διδακτικής των μαθηματικών, υπό τους όρους, βέβαια, που θέτει ο διεπιστημονικός χαρακτήρας της.

Ο διεπιστημονικός χαρακτήρας της διδακτικής των μαθηματικών

Η διδακτική των μαθηματικών συγκροτείται, όπως προαναφέρθηκε, και αναπτύσσεται σε διεπιστημονική βάση. Τα όρια αυτής της διεπιστημονικότητας καθορίζονται από την αυτονομία του αντικειμένου της διδακτικής των μαθηματικών, ως προς τα αντικείμενα άλλων επιστημών και από την αυτονομία του νοήματος των εννοιών του εννοιολογικού της συστήματος απέναντι στο νόημα που, ενδεχομένως, έχουν οι ίδιες έννοιες στην τρέχουσα εμπειρία ή στα πλαίσια του εννοιολογικού συστήματος άλλων επιστημών (Μπαλτάς, 1983).

Με την παραδοχή ότι το φαινόμενο της μάθησης των μαθηματικών και κατά συνέπεια της διδασκαλίας τους παρουσιάζουν χαρακτηριστικά ουσιαδώς διαφοροποιημένα από εκείνα της μάθησης και διδασκαλίας άλλων επιστημονικών γνώσεων, η διδακτική των μαθηματικών συγκροτεί, ως επιστήμη, το εννοιολογικό της σύστημα επιλέγοντας και υιοθετώντας έννοιες από τρεις, πρωτίστως, επιστημονικές περιοχές: τα μαθηματικά, τα οποία καθορίζουν το περιεχόμενο της μάθησης, την

ψυχολογία, η οποία περιγράφει με γενικούς όρους το φαινόμενο της ανθρώπινης μάθησης και την κοινωνιολογία, η οποία προσεγγίζει το φαινόμενο της μάθησης και τις δραστηριότητες της διδασκαλίας, ως διαδικασίες κοινωνικά και πολιτισμικά εντοπισμένες. Παρότι, όμως, στη διδασκαλία των μαθηματικών, όπως επίσης και στα αποτελέσματα της στο πλαίσιο της θεσμοθετημένης εκπαίδευσης, αποδίδονται κοινωνικές λειτουργίες, στο φαινόμενο της μάθησης των μαθηματικών καθαυτό δεν αποδίδεται καμία κοινωνική διάσταση και η θεώρηση του περιορίζεται σε ένα αποκλειστικά ατομικό επίπεδο από τις κυρίαρχες σήμερα τάσεις στη διδακτική των μαθηματικών (Chassapis 2002, Kilpatrick 1992, Lerman et al. 2003, Lubienski, & Bowen 2000, Reyes & Stanic 1988, Secada 1992). Η διεκδίκηση κοινωνικών προσεγγίσεων στη μελέτη των φαινομένων της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών αποτελεί ζητούμενο, παρά την συγκυριακή ανάδειξη όψεων των κοινωνικών διακρίσεων, που παράγει ή νομιμοποιεί η μαθηματική εκπαίδευση (Chassapis, 2004).

Όπως επίσης αποτελούν διαρκή ζητούμενα, η αυτονομία του αντικειμένου της διδακτικής των μαθηματικών, ως προς τα μαθηματικά και την ψυχολογία, όπως και σε μικρότερο βαθμό, η αυτονομία νοήματος του εννοιολογικού της συστήματος απέναντι στις ίδιες επιστήμες, αλλά και απέναντι στην τρέχουσα διδακτική εμπειρία. Η θεώρηση της διδακτικής των μαθηματικών ως εφαρμογής των μαθηματικών παραμένει στις μέρες μας ισχυρή κάτω από την επίδραση ενός κυρίαρχου πλατωνισμού στη φιλοσοφία της μαθηματικής γνώσης και πρακτικής, ο οποίος εξαιτίας των επιστημολογικών του παραδοχών αδυνατεί να προσεγγίσει το φαινόμενο της μάθησης των μαθηματικών με όρους, οι οποίοι θα επέτρεπαν την αυτονόμηση του ως επιστημονικού αντικειμένου. Στο πλαίσιο της θεώρησης αυτής πρωταρχικό αντικείμενο διερεύνησης αποτελεί το περιεχόμενο και η θέση του μαθήματος των μαθηματικών στο σχολικό πρόγραμμα της τυπικής εκπαίδευσης, ενώ η διδακτική μεθοδολογία αποτελεί εγγενές στοιχείο της μαθηματικής γνώσης.

Από μια άλλη οπτική, με το ίδιο όμως αποτέλεσμα, οικειοποιούνται το φαινόμενο της μάθησης των μαθηματικών κυρίαρχα ρεύματα της ψυχολογίας, όπως η ψυχολογία της συμπεριφοράς και η γνωστική ψυχολογία.

Οι θεωρήσεις αυτές χρησιμοποιούν τις μαθηματικές έννοιες και γενικότερα τη μαθηματική νοητική δραστηριότητα ως προνομιακό πεδίο ελέγχου των θεωρητικών τους προτάσεων για τη μάθηση και τη νοητική συγκρότηση των ανθρώπων. Καθιστούν έτσι το φαινόμενο της μάθησης των μαθηματικών πεδίο εφαρμογής τους, αμφισβητώντας εξ αντικειμένου τη βασική παραδοχή επί της οποίας συγκροτείται η διδακτική των μαθηματικών, ότι το φαινόμενο της μάθησης, δηλαδή, έχει ουσιωδώς διαφορετικά χαρακτηριστικά για τη μαθηματική γνώση από εκείνα τα χαρακτηριστικά που έχει η μάθηση κάθε άλλης επιστημονικής γνώσης. Το βιβλίο «*Η Ψυχολογία της Αριθμητικής*» του Thorndike (1922) αποτελεί ιδρυτικό κείμενο της οπτικής αυτής από την ψυχολογία της συμπεριφοράς, ενώ αντίστοιχα κείμενα εξειδικεύουν την οπτική της γνωστικής ψυχολογίας (ενδεικτικά, Dehaene, S. *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics*, 1997).

Σε κάθε περίπτωση, όπως και στις προαναφερθείσες, η ασάφεια των ορίων της διδακτικής των μαθηματικών ως επιστημονικής πρακτικής και η εκ της ασάφειας αυτής συνεπαγόμενη σχετικότητα του επιστημονικού της αντικειμένου αποτελεί ουσιώδες στοιχείο της διεπιστημονικών σχέσεων (Μπαλτάς, 1983).

Όπως ουσιώδες στοιχείο του διεπιστημονικού χαρακτήρα της διδακτικής των μαθηματικών αποτελεί η παραγωγή επιστημονικής γνώσης, υποκείμενης στις απαιτήσεις της θεωρητικής ανάπτυξης της διδακτικής των μαθηματικών και παράλληλα η παραγωγή γνώσης ρητά χρήσιμης και άμεσα εφαρμόσιμης στη μαθηματική εκπαίδευση. Επιδίωξη σε πολλά σημεία αντιθετική, η οποία όμως ερμηνεύει πολλά από τα χαρακτηριστικά των σχέσεων θεωρίας και εφαρμογής, τα οποία εκτέθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Απολύτως συνοπτικά και σε μεγάλο βαθμό σχηματοποιημένα, η διαδικασία παραγωγής επιστημονικής γνώσης ως προϋπόθεση και παράγωγο της θεωρητικής ανάπτυξης της διδακτικής των μαθηματικών προέρχεται και κινείται από διεργασίες πρωτίτως «εσωτερικές», από προβλήματα τα οποία προκύπτουν, ορίζονται και διατυπώνονται στο σύνολο τους μέσα στο πλαίσιο και με τους όρους του εννοιολογικού της συστήματος, ενώ η επίλυση τους υπόκειται στις ερευνητικές μεθόδους και στα κριτήρια της επιστημονικής της πρακτικής.

Αντίθετα, η παραγωγή ρητά χρήσιμης και άμεσα εφαρμόσιμης γνώσης στοχεύει στην επίλυση ενός πρακτικού προβλήματος της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ένα πρακτικό πρόβλημα της μαθηματικής εκπαίδευσης προκύπτει σε ένα κοινωνικό πλαίσιο από διεργασίες πρωτίστως «εξωτερικές» της διδακτικής των μαθηματικών και, όπως κάθε φαινόμενο της πραγματικότητας, είναι πολυδιάστατο, επομένως δεν ορίζεται στο σύνολο του από τη διδακτική των μαθηματικών, αλλά και δεν επιδέχεται μια και μοναδική ούτε μονοσήμαντη λύση στο πλαίσιο της διδακτικής των μαθηματικών. Διαφορετικές επιστημονικές οπτικές, άρα και επιστημονικά πεδία, μπορεί ή είναι αναγκαίο να συμβάλλουν στην επίλυση του, στην οποία επιπλέον υπεισέρχεται ένα πλήθος άμεσα κοινωνικών, άρα μη επιστημονικών παραγόντων. Οι λύσεις, επομένως, ενός πρακτικού προβλήματος της μαθηματικής εκπαίδευσης δεν υπόκεινται στα τυπικά επιστημονικά κριτήρια, αλλά αποτελούν μια πολλαπλότητα επιλογών ή ένα πεδίο δυνατών λύσεων, ενώ η λύση που κατά περίπτωση επιλέγεται είναι έξω από τη δικαιοδοσία της διδακτικής των μαθηματικών, υποκείμενη στις κοινωνικές σχέσεις και στις αντιθέσεις τους.

Επιλεγόμενα σχόλια

Παρά την αξιοσημείωτη ανάπτυξη των δραστηριοτήτων που συναρτώνται με τη μαθηματική εκπαίδευση, το επιστημονικό αντικείμενο της διδακτικής των μαθηματικών παραμένει σε μεγάλο βαθμό ασαφές και, κατά συνέπεια, παραμένουν ασαφή και το συστατικό εννοιολογικό της σύστημα και οι βασικές ερευνητικές της μέθοδοι, στοιχεία τα οποία συγκροτούνται ταυτόχρονα μέσα από αμοιβαίους προσδιορισμούς, όπου καθένα προϋποθέτει την ύπαρξη των άλλων. Ως αποτέλεσμα, παραμένει υπό αίρεση το επιστημονικό καθεστώς της διδακτικής των μαθηματικών και υπό αμφισβήτηση η ουσιαστική συμβολή της στην επίλυση προβλημάτων και στη βελτίωση της αποτελεσματικότητας της μαθηματικής εκπαίδευσης. Αναγνωρίζοντας το πρόβλημα και τις πολλαπλές συνέπειες του, η International Commission on Mathematics Instruction (ICMI) – μια τις παλαιότερες οργανώσεις που δραστηριοποιούνται σε ζητήματα μαθηματικής εκπαίδευσης εκφράζοντας τις κυρίαρχες τάσεις – έθεσε, εδώ και μια δεκαετία, σε συζήτηση το ζήτημα της ταυτότητας της

διδασκτικής των μαθηματικών σε συνέδριο με αυτό αποκλειστικά το θέμα, που συγκλήθηκε το 1994 στο Πανεπιστήμιο του Maryland των ΗΠΑ. Τα πρακτικά του συνεδρίου αυτού (Sierpinska and Kilpatrick, 1998) επιβεβαιώνουν την προαναφερθείσα διαπίστωση. Το επιστημονικό αντικείμενο της διδασκτικής των μαθηματικών, οι εννοιολογικές αναφορές και το θεωρητικό της πλαίσιο, οι ερευνητικές πρακτικές και τα πεδία εφαρμογής της, ορίζονται με διαφορετικούς όρους – στην πλειονότητα των περιπτώσεων ασύμβατους ή και αντιθετικούς – στις 33 προσκεκλημένες εισηγήσεις επιφανών επιστημόνων της διδασκτικής των μαθηματικών, στις 5 αναφορές των ομάδων εργασίας του συνεδρίου, αλλά και στη σύνοψη των εργασιών του συνεδρίου, που τιτλοφορείται χαρακτηριστικά «*Συνεχίζοντας την αναζήτηση*» (Sierpinska & Kilpatrick, 1998, vol. 2, σελ. 527-548).

Υιοθετώντας την ανάλυση της διεπιστημονικότητας, που αναπτύσσει ο Μπαλτάς (1983, σελ. 39-44), θα πρέπει να δεχτούμε, ότι η διδασκτική των μαθηματικών συγκροτούμενη σε διεπιστημονική βάση, με αφετηρία τις παραδοχές που προαναφέρθηκαν για το φαινόμενο της μάθησης της μαθηματικής γνώσης και τη δραστηριότητα της διδασκαλίας της, χαρακτηρίζεται εγγενώς από ασταθή οριοθέτηση του επιστημονικού της αντικειμένου, ως προς τις όψεις των φαινομένων αυτών και παράλληλα από ασαφή οριοθέτηση του επιστημονικού της αντικειμένου, ως προς άλλες επιστήμες και ιδίως ως προς τα μαθηματικά, την ψυχολογία και την κοινωνιολογία, οι οποίες περιλαμβάνουν στα αντικείμενα τους τις ίδιες ή διαφορετικές όψεις των φαινομένων της μάθησης και της τυπικής ή άτυπης διδασκαλίας των μαθηματικών.

Συμπερασματικά, η αυτονομία του επιστημονικού αντικειμένου και η αυτονομία νοήματος των εννοιών που συγκροτούν το εννοιολογικό σύστημα της διδασκτικής των μαθηματικών, με δεδομένους τους όρους της διεπιστημονικότητας της, οι οποίοι επιβάλλουν επιπλέον ένα είδος «επιστημονικής απροσδιοριστίας» (Μπαλτάς, 1983) στην αντιμετώπιση των πρακτικών προβλημάτων της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών, παραμένουν οιονεί ζητούμενες και επομένως διαρκώς υπό (ενδιαφέρουσα) συζήτηση.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

- Chassapis, D. (2002) Social groups in mathematics education research: An investigation into mathematics education-related research articles published from 1971 to 2000. In P. Valero & O. Skovsme (eds.) Proceedings of 3rd International Mathematics Education and Society Conference, vol.1, Copenhagen: Centre for Research in Learning Mathematics, Danish University of Education, 273-281.
- Chassapis, D. (2004), The objects of mathematics education research: Spotting, and commenting on, characteristics of the mainstream, Paper presented at the Erasmus Summer School on Researching the Teaching and Learning of Mathematics (MATHED2004), Tolmin, Slovenia.
- Dehaene, S. (1997), The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics, New York, Oxford: The Oxford Press.
- Fehr, H.F. (ed.), (1961α), New Thinking in School Mathematics, Paris: OEEC.
- Fehr, H.F. (ed.), (1961β), Synopses for modern secondary School Mathematics, Paris: OEEC.
- Fehr, H.F. (ed.), (1964), Mathematics to-day, Paris: OECD.
- Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. In D. Grouws (Ed.), Handbook for research on mathematics teaching and learning, New York: Macmillan, 3-380
- Lerman, S., Xu, G., & Tsatsaroni, A. (2003) A sociological description of changes in the intellectual field of mathematics education research: Implications for the identities of academics. Proceedings of the British Society for Research in Learning Mathematics, 23(2), 43-48.
- Lerman, S. & Τοατσάρωνη, Α. (2004), Η δημιουργία νοήματος στην έρευνα της μαθηματικής εκπαίδευσης ως κοινωνική πρακτική και πρακτική λόγου. Στο Δ.. Χασιάκης (επιμ.) *Εικόνα, σχήμα και λόγος στη διδασκαλία των μαθηματικών, Πρακτικά 3^{ου} Δηήμερου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, Θεσσαλονίκη: Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Π.Τ.Δ.Ε.,.
- Lubienski, S. T. & Bowen, A. (2000). Who's counting? A survey of mathematics education research 1982-1998, *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 626-633.

- Μπαλιτάς, Α. (1983), Για το οικολογικό κίνημα: επιστήμη και διεπιστημονικότητα, *Ο Πολίτης*, 63, 30-46,
- Μπαλιτάς, Α. (1990), Επιστημολογικά, Για την ιστορία μιας επιστήμης, Εκδόσεις Ο Πολίτης, Αθήνα.
- Reyes, L. H., & Stanic, G. M. A. (1988). Race, sex, socioeconomic status, and mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 26-43.
- Secada, W. G. (1992). Race, ethnicity, social class, language, and achievement in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, New York: Macmillan, 623-660.
- Sierpinska A. and Kilpatrick J. (eds), (1998) *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*, An ICMI Study, Vols. 1 & 2 , Dordrecht: Kluwer.
- Thorndike, E. (1922). *The Psychology of Arithmetic*. New York: Macmillan
- UNESCO (1966), *New trends in mathematics teaching*, Paris: UNESCO.

Το ερευνητικό αντικείμενο της διδακτικής των μαθηματικών: Χαρακτηριστικές επιλογές του κυριάρχου ρεύματος

Το πρόβλημα και οι όροι της συζήτησης του

Πρώτα απ' όλα μια κοινοτυπία, αναγκαία όμως αφετηρία του προβληματισμού που εκτίθεται στη συνέχεια: κάθε επιστήμη έχει ένα αντικείμενο. Να σημειωθεί, όμως, ότι το αντικείμενο κάθε επιστήμης κατασκευάζεται από την ίδια την επιστήμη και ταυτόχρονα αποτελεί συστατικό της στοιχείο. Το αντικείμενο αυτό αποτελεί εννοιολογική ανακατασκευή φαινόμενων της πραγματικότητας, τα οποία η επιστήμη επιλέγει, ορίζει και περιγράφει. Η σχέση μιας επιστήμης με το αντικείμενο της, φαινομενικά ένας φαύλος κύκλος, είναι μια σχέση αμοιβαίου καθορισμού. Όπως έχει διεξοδικά αναλυθεί από τον Μπαλτά (1990), η διαδικασία δια της οποίας συγκροτείται το επιστημονικό αντικείμενο μιας επιστήμης αποτελεί ταυτόχρονα και διαδικασία (ανα)συγκρότησης της ίδιας της επιστήμης, αφού ενώ προϋποθέτει και χρησιμοποιεί το ήδη συγκροτημένο εννοιολογικό σύστημα και τις ήδη αναπτυγμένες ερευνητικές μεθόδους της συγκεκριμένης επιστήμης, την ίδια στιγμή παράγει ή αναπαράγει, διευρύνοντας και εμπλουτίζοντας, το ίδιο αυτό εννοιολογικό σύστημα και τις ερευνητικές μεθόδους της.

Αυτή η διαδικασία, η οποία συγκροτεί ταυτόχρονα και τα επιστημονικά αντικείμενα μιας επιστήμης και την ίδια την επιστήμη, διεκπεραιώνεται πρωτίστως από την ερευνητική δραστηριότητα των επιστημόνων, αλλά επηρεάζεται αποφασιστικά από διάφορους παράγοντες, οι οποίοι χρησιμοποιούν τα αποτελέσματα της επιστημονικής δραστηριότητας ή υπόκεινται τις συνέπειες τους. Στην περίπτωση της διδακτικής των μαθηματικών, που εδώ αναφερόμαστε, οι εκπαιδευτικοί του σχολείου και τα στελέχη της εκπαιδευτικής πολιτικής διαδραματίζουν έναν ιδιαίτερο ρόλο.

Η ερευνητική δραστηριότητα των επιστημόνων, όπως ορίζεται από το κυρίαρχο ρεύμα το οποίο διαμορφώνεται με τη συμβολή όλων των εμπλεκόμενων παραγόντων:

- ορίζει, περιγράφει και διαβαθμίζει τα θεωρούμενα ως σημαντικά κι άρα αξιολόγησιμα για διερεύνηση φαινόμενα της πραγματικότητας,
- ορίζει τις θεωρητικές οπτικές και άρα τα ερωτήματα τα οποία στο πλαίσιο τους διατυπώνονται και διερευνώνται,
- προβάλλει τις μεθόδους, τις τεχνικές και τα μέσα διερεύνησης και
- διαμορφώνει και αποδίδει νοήματα στα ερευνητικά αποτελέσματα συγκροτώντας το πλαίσιο για την αξιολόγηση και την αξιοποίηση τους, τόσο σε επιστημονικό όσο και σε κοινωνικό επίπεδο.

Από την συνοπτικά διατυπωμένη αυτή οπτική σχολιάζονται στην παρούσα εισήγηση τα ερευνητικά αντικείμενα, όπως και οι προσανατολισμοί κατά τη συγκρότηση των αντικειμένων αυτών της επιστημονικής δραστηριότητας η οποία στην Ελλάδα και στις χώρες της Κεντρικής Ευρώπης αποκαλείται «διδασκτική των μαθηματικών» ενώ στον αγγλοσαξονικό ακαδημαϊκό χώρο «μαθηματική εκπαίδευση», θεωρώντας ότι ενδιαφέρουν ιδιαίτερα οι μορφές και οι διαδικασίες παραγωγής, συσσώρευσης και χρήσης της συναφούς επιστημονικής γνώσης.

Τα σχόλια είναι επιλεκτικά, μερικά και αποσπασματικά. Τα στοιχεία έχουν ένα χαρακτήρα αντικειμενικότητας ως εμπειρικά δεδομένα, αλλά η προσέγγιση και η ερμηνεία τους σφραγίζεται από υποκειμενικές επιλογές και θεωρήσεις.

Η συγκρότηση της διδασκτικής των μαθηματικών ως ερευνητικού, και αντίστοιχα ως επιστημονικού, πεδίου μπορεί να θεωρηθεί αποτέλεσμα των μεγάλων μεταρρυθμίσεων της διδασκαλίας των μαθηματικών, οι οποίες σχεδιάστηκαν και υλοποιήθηκαν στις αρχές της δεκαετίας του 1960 στην Ευρώπη και στις ΗΠΑ και στην Ελλάδα, με την εκπαιδευτική μεταρρύθμιση της Ένωσης Κέντρου (Χασάπης, 2004).

Έκτοτε, η διδασκτική των μαθηματικών έχει καθιερωθεί διεθνώς ως επιστημονικό και γνωστικό αντικείμενο, όπως συνάγεται από μια σειρά δεδομένων, όπως είναι το πλήθος των πανεπιστημιακών τμημάτων και τομέων τα οποία προσφέρουν σπουδές ειδίκευσης στη διδασκτική των μαθηματικών, των ερευνητικών προγραμμάτων και των αντίστοιχων χρηματοδοτήσεων, των εθνικών και διεθνών επιστημονικών οργανώσεων, των εκδόσεων και των περιοδικών, των εθνικών και

διεθνών συνεδρίων και άλλων δραστηριοτήτων σχετικών με την διδακτική των μαθηματικών. Έχουν, επομένως, αποκρυσταλλωθεί τα θεμελιώδη επιστημολογικά χαρακτηριστικά της και έχουν αναδειχθεί οι βασικές επιλογές του κυρίαρχου ρεύματος, άρα νομιμοποιείται και η κριτική προσέγγιση τους .

Στην παρούσα προσέγγιση η διδακτική των μαθηματικών ως επιστημονικό πεδίο θεωρείται με μια ευρεία έννοια ως η μελέτη φαινομένων και διαδικασιών οι οποίες πραγματικά ή εν δυνάμει εμπλέκονται στις διαδικασίες μάθησης και άσκησης μαθηματικών δραστηριοτήτων κάθε είδους, όπως και των επιδράσεων οι οποίες ασκούνται στη μάθηση και στην άσκηση των μαθηματικών δραστηριοτήτων από διάφορους παράγοντες, μεταξύ των οποίων περιλαμβάνονται, για παράδειγμα, η διδασκαλία, η χρήση διαφόρων μέσων και αναπαραστάσεων, η κοινωνική οργάνωση των μαθηματικών δραστηριοτήτων. Αντικείμενο της διδακτικής των μαθηματικών, επομένως, αποτελούν συγκεκριμένες ανθρώπινες δραστηριότητες, των οποίων οι στόχοι, τα αντικείμενα και τα περιεχόμενα είναι μαθηματικά διαφόρων τύπων και επιπέδων. Αυτό, βέβαια, σε καμία περίπτωση δεν σημαίνει ότι η μαθηματική γνώση υπάρχει έξω και ανεξάρτητα από τις αντίστοιχες ανθρώπινες δραστηριότητες, οπότε αντικείμενο της διδακτικής των μαθηματικών μπορεί ευρύτερα να θεωρηθεί η μελέτη των σχέσεων τις οποίες τα ανθρώπινα υποκείμενα αναπτύσσουν με τα μαθηματικά, αμφότερα θεωρούμενα στην πολλαπλότητα τους.

Μπορεί, άρα, να θεωρηθεί ότι η διδακτική των μαθηματικών προϋποθέτει και αναπτύσσεται στη βάση ενός συνδυασμού στοιχείων τα οποία προέρχονται από τρεις επιστημονικές περιοχές:

- των μαθηματικών, τα οποία αποτελούν το περιεχόμενο της μάθησης και της άσκησης των μαθηματικών δραστηριοτήτων,
- της ψυχολογίας, αφού η μάθηση και η άσκηση μαθηματικών δραστηριοτήτων περιλαμβάνει ατομικές ψυχολογικές διαδικασίες και
- της κοινωνιολογίας, αφού η μάθηση και η άσκηση μαθηματικών δραστηριοτήτων αναπτύσσεται σε κοινωνικά οργανωμένα πλαίσια, ιστορικά και πολιτισμικά καθορισμένα.

Μια ισόρροπη συγκρότηση και ανάπτυξη του επιστημονικού αντικειμένου της διδακτικής των μαθηματικών οφείλει, επομένως, να συνδυάζει το ατομικό και το κοινωνικό της μάθησης και της άσκησης των μαθηματικών δραστηριοτήτων με το μαθηματικό περιεχόμενο τους. Όμως, το κυρίαρχο ρεύμα της έρευνας και της θεωρητικής ανάπτυξης της διδακτικής των μαθηματικών έχει αγνοήσει ουσιώδεις κοινωνικές, πολιτικές και οικονομικές όψεις, καθώς και αντίστοιχα θεμελιώδη στοιχεία της μάθησης και της άσκησης των μαθηματικών δραστηριοτήτων. Ο Kilpatrick (1992), για παράδειγμα, ένας από τους πρωτεργάτες της συγκρότησης της διδακτικής των μαθηματικών ως επιστημονικού πεδίου βεβαιώνει ότι η διδακτική των μαθηματικών θεμελιώνεται από κοινού στα μαθηματικά για ότι αφορά το περιεχόμενο της μαθηματικής γνώσης και στην ψυχολογία για ότι αφορά τις μεθόδους έρευνας των διαδικασιών της μαθηματικής σκέψης.

Ως αποτέλεσμα, η ατομικότητα και τα ψυχολογικά χαρακτηριστικά της έχουν αναχθεί σε πρωταρχικούς παράγοντες της μάθησης και της άσκησης των μαθηματικών δραστηριοτήτων με ανάλογες συνέπειες, τόσο στις επιλογές συγκρότησης του επιστημονικού αντικειμένου της διδακτικής των μαθηματικών όσο και στην παραγόμενη γνώση. Διαπίστωση η οποία έχει προβληθεί και σχολιαστεί από πολλές και διαφορετικές οπτικές. Ο Tate (1997), για παράδειγμα, σημειώνει ότι η έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών έχει πολύ περιορισμένη οπτική, επικεντρωμένη στα μαθηματικά και στην ψυχολογία, ενώ ο Hudson (2001) σχολιάζει ότι το φαινόμενο αυτό αντανακλάται και στο γεγονός ότι η Διεθνής Ομάδα για την Ψυχολογία της Μαθηματικής Εκπαίδευσης (International Group for the Psychology of Mathematics Education), γνωστή ως PME, έχει γίνει το κύριο διεθνές φόρουμ της έρευνας στη μαθηματική εκπαίδευση.

Κριτικές επισκοπήσεις των ερευνών της διδακτικής των μαθηματικών

Οι δημοσιεύσεις οι οποίες επισκοπούν την εξέλιξη της διδακτικής των μαθηματικών ή ταυτόσημα της μαθηματικής εκπαίδευσης προσεγγίζουν διάφορες όψεις της εξέλιξης αυτής υιοθετώντας ποικίλες οπτικές, από παιδαγωγικές μέχρι κοινωνιολογικές, επιχειρώντας ταυτόχρονα να σκιαγραφήσουν ουσιώδη κατά περίπτωση χαρακτηριστικά της συναφούς ερευνητικής δραστηριότητας. Από το σύνολο αυτό, εκείνες οι οποίες αναλύουν κριτικά την ερευνητική δραστηριότητα από την οπτική που εδώ ενδιαφέρει παρουσιάζονται συνοπτικά και αναπόφευκτα ελλειπτικά στη συνέχεια.

Η Kieran (1994), σε μια από τις πρώτες στη βιβλιογραφία επισκοπήσεις της διδακτικής των μαθηματικών παρουσιάζει μια αναδρομική εικόνα της εξέλιξης της στις Η.Π.Α. σε μια περίοδο 25 χρόνων μέσα από συνεντεύξεις δύο πρωτοπόρων αμερικάνων ερευνητών, του Tom Kieran και του Tom Romberg. Οι συνεντεύξεις τους συνοδεύονται από μια ανάλυση των ερευνητικών άρθρων τα οποία δημοσιεύθηκαν στο περιοδικό *Journal for Research in Mathematics Education* (JRME), έκδοσης του National Council of Teachers of Mathematics των ΗΠΑ, τα πρώτα 25 χρόνια της έκδοσης του (1969-1994). Η ανάλυση αυτή είναι οργανωμένη με βάση, και σε συσχέτιση με, τα σχόλια που οι δύο ερευνητές διατυπώνουν στις συνεντεύξεις τους. Από τα στοιχεία αυτά η Kieran καταλήγει στο συμπέρασμα ότι κατά την συγκεκριμένη χρονική περίοδο εντοπίζεται μια τάση στην έρευνα της διδακτικής των μαθηματικών να συσχετιστεί η μάθηση με την κατανόηση των μαθηματικών και να διερευνηθούν ως ένα ενιαίο φαινόμενο, όπως επίσης και μια σταδιακή επικέντρωση των θεωρητικών προσεγγίσεων σε αλληλοδραστικές θεωρήσεις της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών, βασισμένες σε ιδέες που αρχικά αναπτύχθηκαν από τον Βυγκότσκι.

Ο Niss (2000), στην εναρκτήρια ομιλία του στο 9^ο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικής Εκπαίδευσης, παρουσίασε έναν απολογισμό της μαθηματικής εκπαίδευσης «*βασισμένο σε παρατηρήσεις ενός δείγματος προερχόμενου από ερευνητικά περιοδικά, από τα πρακτικά των συνεδρίων του Διεθνούς Συνεδρίου Μαθηματικής Εκπαίδευσης (ICME - International Congress on Mathematical Education) και από άλλες*

ερευνητικές εκδόσεις του τελευταίου τρίτου του 20ου αιώνα». Ο απολογισμός αυτός αναφέρθηκε σε ζητήματα, ερωτήματα, αντικείμενα και φαινόμενα, σε μεθόδους, συμπεράσματα, προβλήματα και προκλήσεις τα οποία αναδείχθηκαν και απασχόλησαν την διδακτική των μαθηματικών ως ερευνητικό πεδίο. Παρόλο που η επισκόπηση του Niss δεν μπορεί να θεωρηθεί συστηματική, σκιαγραφεί τις εξελίξεις του αντικειμένου της διδακτικής των μαθηματικών από την συγκρότηση της στα μέσα μέχρι το τέλος του 20ου αιώνα. Κατά την εκτίμηση του Niss κύριο αντικείμενο έρευνας και προβληματισμού της διδακτικής των μαθηματικών αρχικά κατά τις δεκαετίες του 1960 και του 1970 αποτέλεσε το αναλυτικό πρόγραμμα και οι μέθοδοι διδασκαλίας και στη συνέχεια κατά τη δεκαετία του 1980 η μάθηση των μαθηματικών σε ατομικό επίπεδο και στη σχολική τάξη, υπό την επίδραση διαφόρων παραγόντων, όπως του αναλυτικού προγράμματος, της διδασκαλίας, των διδακτικών δραστηριοτήτων, των διδακτικών υλικών και των σχολικών βιβλίων, των ηλεκτρονικών υπολογιστών, των μεθόδων αξιολόγησης, των στάσεων και πεποιθήσεων των μαθητών και των εκπαιδευτικών, του εκπαιδευτικού περιβάλλοντος και του κλίματος της σχολικής τάξης από ποικίλες οπτικές γλωσσικής και συμβολικής επικοινωνίας, των κοινωνικών σχέσεων και της κοινωνικής αλληλόδρασης, των γνώσεων και της εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών και πλήθους άλλων. Τέλος, κατά τη δεκαετία του 1990 το πεδίο έρευνας της διδακτικής των μαθηματικών αρχίζει να επεκτείνεται σε παράγοντες πέρα από το άτομο και τη σχολική τάξη, αλλά πάντοτε σε αναφορά με αυτά, όπως οι επιδράσεις κοινωνικών, πολιτισμικών και γλωσσικών παραγόντων στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών. Ο Niss καταλήγει στο συμπέρασμα ότι *«σήμερα η μάθηση των μαθηματικών είναι το κυρίαρχο αντικείμενο έρευνας της μαθηματικής εκπαίδευσης»*.

Από μια διαφορετική οπτική γωνία οι Lubienski και Bowen (2000) αναλύουν τα δημοσιευμένα ερευνητικά άρθρα της διδακτικής των μαθηματικών σε μια περίοδο 15 χρόνων, από το 1982 μέχρι και το 1998. Χρησιμοποιώντας τη βάση δεδομένων του Κέντρου Πληροφόρησης Εκπαιδευτικών Πόρων (Educational Resources Information Center - ERIC) εντοπίζουν 3.011 ερευνητικά άρθρα διδακτικής μαθηματικών δημοσιευμένα σε 48 εκπαιδευτικά περιοδικά και προσδιορίζουν εκείνα τα οποία περιλαμβάνουν στο αντικείμενο

τους αναφορές στο φύλο, στην εθνότητα, στην κοινωνική τάξη ή στην μειονεξία των υποκειμένων σε συνδυασμό με την σχολική τάξη, τις μαθηματικές έννοιες και γενικότερα τα εκπαιδευτικά προβλήματα τα οποία ερευνούν. Το κύριο συμπέρασμα των Lubienski και Bowen είναι, ότι η πλειονότητα των ερευνών κατά την συγκεκριμένη χρονική περίοδο επικεντρώνεται στις ατομικές γνωστικές λειτουργίες και στις επιπτώσεις τους στη μάθηση των μαθηματικών, υποτιμώντας ζητήματα του κοινωνικού ή του πολιτισμικού περιβάλλοντος των ατόμων που ερευνούν (49% των 3.011 δημοσιευμένων ερευνών σε σύγκριση με το 18% όλων των ερευνητικών δημοσιεύσεων οι οποίες καταγράφονται στο ERIC). Ακολουθεί η σχολική επίδοση στα μαθηματικά, η οποία αποτελεί αντικείμενο του 23% των ερευνητικών άρθρων. Αντίθετα, το φύλο, η εθνότητα, η κοινωνική τάξη ή η μειονεξία των ερευνούμενων ατόμων απασχολεί 623 ή το 21% των 3.011 δημοσιευμένων ερευνητικών άρθρων. Μεταξύ αυτών, πρωτεύουσα θέση κατέχει το φύλο των ατόμων, το οποίο ως διακριτικό στοιχείο κοινωνικού χαρακτήρα εντοπίζεται σε κάποιο βαθμό στην κυρίαρχη λογική της έρευνας στη μαθηματική εκπαίδευση στις Η.Π.Α. Αναλυτικά, το φύλο των ερευνούμενων ατόμων αποτελεί αντικείμενο διερεύνησης του 10.7% (323), η μειονεξία του 6.4% (193), η εθνότητα του 3.7% (112) και η κοινωνική τάξη του 1.7% (52) των 3.011 δημοσιευμένων ερευνητικών άρθρων. Αξιοσημείωτο είναι ότι τα δύο τρίτα των άρθρων αυτών είναι δημοσιευμένα σε εκπαιδευτικά περιοδικά και όχι σε περιοδικά μαθηματικής εκπαίδευσης.

Η έρευνα των Lubienski and Bowen επεκτάθηκε χρονικά και περιέλαβε περισσότερες κοινωνικές κατηγορίες ατόμων σε μια έρευνα του Chassapis (2002). Υιοθετώντας παρόμοια μέθοδο συλλογής και ανάλυσης βιβλιογραφικών δεδομένων στην έρευνα αυτή εντοπίζονται και αναλύονται 13.999 ερευνητικές δημοσιεύσεις μιας χρονικής περιόδου 30 χρόνων (1971 έως 2000) ως προς τις αναφορές τους στην κοινωνική τάξη ή στην κοινωνικό-οικονομική κατηγορία (socio-economic status), στο κοινωνικό (gender) ή στο βιολογικό (sex) φύλο, στην εθνότητα (ethnicity) ή στη φυλή (race), στην δημογραφική μειονότητα (minority) και στην οικονομική ή στην εκπαιδευτική μειονεξία (disadvantage) των υποκειμένων των ερευνών. Παράλληλα, εντοπίζονται τα ζητήματα μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών τα οποία αποτελούσαν αντικείμενο αυτών των ερευνητικών

δημοσιεύσεων. Ένα γενικό συμπέρασμα της ανάλυσης αυτής είναι ότι οι κοινωνικές κατηγορίες που προαναφέρθηκαν δεν θεωρούνται παράγοντες υπό διερεύνηση στην κυρίαρχη λογική της έρευνας στη διδακτική των μαθηματικών, όπως και γενικότερα της εκπαιδευτικής έρευνας κατά την συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Μόνο στο 9.1% (1277) των 13.999 δημοσιευμένων ερευνητικών άρθρων της διδακτικής των μαθηματικών περιλαμβάνεται στους παράγοντες που διερευνώνται μια από τις κατηγορίες αυτές, με την κοινωνική τάξη ή την κοινωνικό-οικονομική κατηγορία να εξετάζεται ως παράγοντας της μαθηματικής εκπαίδευσης σε μόλις 57 (0.4% του συνόλου) ερευνητικά άρθρα. Βέβαια, οι αντίστοιχες κατηγορίες στο σύνολο των εκπαιδευτικών ερευνών της εξεταζόμενης περιόδου δεν είναι ουσιαστικά διαφορετικές (9.6% των άρθρων αναφέρονται σε μια από τις προαναφερθείσες κατηγορίες και 0.8% στην κοινωνική τάξη ή στην κοινωνικό-οικονομική κατηγορία των υποκειμένων έρευνας).

Κύριο αντικείμενο της έρευνας στη διδακτική των μαθηματικών κατά την περίοδο αυτή αποτελούν η σχολική επίδοση των μαθητών (17.7% των δημοσιεύσεων), και ποικίλα ζητήματα μάθησης των μαθηματικών σε ατομικό επίπεδο (17.6% των δημοσιεύσεων). Ακολουθούν ζητήματα διδακτικής μεθοδολογίας των μαθηματικών 15.9%, γνώσεων, στάσεων και συμπεριφορών των εκπαιδευτικών που διδάσκουν μαθηματικά 15.3%, ζητήματα αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών στην πρωτοβάθμια και στην κατώτερη δευτεροβάθμια εκπαίδευση 14% και άλλα ζητήματα γνωστικών λειτουργιών και μαθηματικής σκέψης 11.6%, των δημοσιεύσεων. Ως αποτέλεσμα αυτής της κυρίαρχης λογικής, δεν διερευνώνται οι σύνθετες σχέσεις της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών με τους κοινωνικούς, πολιτισμικούς και πολιτικούς παράγοντες του πλαισίου στο οποίο αναπτύσσονται.

Οι Hanna & Sidoli (2002) αναλύουν τα περιεχόμενα του διεθνούς περιοδικού *Educational Studies in Mathematics* (έκδοση Kluwer), από το πρώτο τεύχος του το έτος 1968 και εξής σε δύο επίπεδα. Σε ένα πρώτο επίπεδο αναλύεται η συνεισφορά των εκάστοτε υπευθύνων έκδοσης του περιοδικού (editors) στον καθορισμό της φυσιογνωμίας του, της πολιτικής του στα ζητήματα της μαθηματικής εκπαίδευσης και των διαδικασιών δημοσίευσης των άρθρων.

Σε ένα δεύτερο επίπεδο αναλύονται τα δημοσιευμένα στο περιοδικό άρθρα κατά τη χρονική περίοδο 1970 έως 1999 από την οπτική του μαθηματικού περιεχομένου τους, των εκπαιδευτικών ζητημάτων τα οποία θίγουν, της εκπαιδευτικής βαθμίδας στην οποία αναφέρονται και των ερευνητικών μεθόδων τις οποίες υιοθετούν. Τα εκπαιδευτικά ζητήματα τα οποία θίγονται στα δημοσιευμένα στο περιοδικό, κατά την περίοδο αυτή, 713 άρθρα ταξινομούνται σε: 1) συναισθηματικά, 2) γνωστικά, 3) επιστημολογικά, 4) διδακτικά, 5) παιδαγωγικά, 6) αναλυτικού προγράμματος και μεταρρυθμίσεων του, 7) κοινωνικά και πολιτισμικά, 8) ιστορικά, 9) τεχνολογικά, 10) γλωσσικά, 11) αναπαραστάσεων / οπτικοποιήσεων (visualisation), 12) φύλου / εθνότητας, 13) ποιοτικής μεθοδολογίας, 14) ποσοτικής μεθοδολογίας και 15) αξιολόγησης. Οι ερευνήτριες, βέβαια, διευκρινίζουν ότι τα ζητήματα αυτά επιλέγονται ως σημαντικές κατηγορίες ταξινόμησης κατά τον χρόνο της ανάλυσης τους και δεν αντανακλούν αναγκαστικά και τα ενδιαφέροντα της ερευνητικής κοινότητας της διδακτικής των μαθηματικών κατά τον χρόνο διεξαγωγής των ερευνών ή δημοσίευσης των σχετικών άρθρων στο περιοδικό.

Υπό τον όρο αυτό, οι Hanna και Sidoli καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι τα γνωστικά ζητήματα της μάθησης των μαθηματικών, τα οποία στη δεκαετία 1970–79 προσέλκυαν ένα μεγάλο μέρος της έρευνας στη διδακτική των μαθηματικών, κυριάρχησαν κατά τις επόμενες δεκαετίες 1980–89 και 1990–99 αποτελώντας αντικείμενο ενός ποσοστού πλέον του 29% και του 32% των δημοσιευθέντων άρθρων στο περιοδικό *Educational Studies in Mathematics*. Αντίθετα, το ερευνητικό ενδιαφέρον για κοινωνικά και πολιτισμικά ζητήματα της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών, όπως αποτυπώνεται στα δημοσιευμένα άρθρα του περιοδικού, είναι σχεδόν ανύπαρκτο την πρώτη δεκαετία, αλλά αυξάνεται και απασχολεί το 11% κατά τη δεκαετία 1980–89 και το 15% των άρθρων κατά τη δεκαετία 1990–99.

Οι Lerman και Τσατοσάρωνη (2004) αναλύουν την έρευνα στην μαθηματική εκπαίδευση με βάση ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα δημοσιεύσεων κατά την δωδεκαετία 1990–2001 στα *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* και στα περιοδικά *Educational Studies in Mathematics* και *Journal for Research in Mathematics Education*. Για την ανάλυση αυτή,

αναπτύσσουν και εφαρμόζουν μια μέθοδο βασισμένη «σε μια ευρύτερη προσέγγιση του έργου του Basil Bernstein» κατηγοριοποιώντας τις ερευνητικές δημοσιεύσεις αρχικά με κριτήριο τον θεωρητικό ή τον εμπειρικό προσανατολισμό τους, την αναφορά τους δηλαδή ή όχι σε μία θεωρία και στη συνέχεια με βάση τον τύπο της θεωρίας την οποία υιοθετούν. Διακρίνουν, έτσι, παραδοσιακές ψυχολογικές και μαθηματικές θεωρίες, ψυχο-κοινωνικές θεωρίες, κοινωνιολογικές και κοινωνικο-πολιτισμικές θεωρίες, γλωσσολογικές, κοινωνιο-γλωσσολογικές και σημειωτικές θεωρίες, θεωρίες γειτονικών στη μαθηματική εκπαίδευση πεδίων, όπως της διδακτικής των φυσικών επιστημών, σύγχρονα ευρύτερα θεωρητικά ρεύματα, όπως φεμινισμός, μετα-δομισμός και ψυχανάλυση, φιλοσοφικές θεωρήσεις, εκπαιδευτικές θεωρίες και άλλες μη περιλαμβανόμενες στις προηγούμενες κατηγορίες. Παράλληλα, ταξινομούν τα ίδια ερευνητικά άρθρα και με διάφορα άλλα κριτήρια, όπως τον σκοπό, το μαθηματικό θέμα και τον τομέα της εκπαίδευσης τα οποία αποτελούσαν αντικείμενο της έρευνας, την ιδεολογική στάση και το παιδαγωγικό μοντέλο τα οποία οι συγγραφείς υιοθετούν και προβάλλουν.

Ένα γενικό συμπέρασμα των Lerman και Τσατσαρώνη είναι ότι οι κυρίαρχες θεωρίες, οι οποίες υιοθετούνται σ' όλη τη εξεταζόμενη χρονική περίοδο στα ερευνητικά δημοσιεύματα τα οποία εμφανίζονται και στους τρεις τύπους εκδόσεων είναι οι παραδοσιακές ψυχολογικές και μαθηματικές θεωρίες. Αν και τα ερευνητικά άρθρα τα οποία αντλούν τις θεωρητικές τους προσεγγίσεις από τις παραδοσιακές ψυχολογικές και μαθηματικές θεωρίες μειώνονται κατά τη εξεταζόμενη χρονική περίοδο 1990-2001 στα *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* και στο περιοδικό *Educational Studies in Mathematics* (από 73.1% στο 60.5% στα πρώτα και από 63.4% στο 51.6% στο δεύτερο) αυξάνονται στο *Journal for Research in Mathematics Education* (από 54.8% στο 57.9%).

Αντίστοιχα, τα ερευνητικά άρθρα τα οποία αντλούν τις θεωρητικές τους προσεγγίσεις από κοινωνιολογικές και κοινωνικο-πολιτισμικές θεωρίες αυξάνονται (από 3.0% στο 9.9% στα *Proceedings of the PME* από 3.7% στο 11.6% στο *Educational Studies* και από 1.6% στο 7.9% στο *Journal for Research in Mathematics Education*) αλλά

παραμένουν ως ποσοστό του συνόλου των δημοσιευμένων άρθρων κάτω του 12%. Αυξάνονται επίσης τα άρθρα τα οποία υιοθετούν γλωσσολογικές, κοινωνιο-γλωσσολογικές και σημειωτικές θεωρίες, αν και το ποσοστό τους παραμένει εξαιρετικά χαμηλό (κάτω του 8%).

Σε αναζήτηση του κοινωνικού

Οι επισκοπήσεις των ερευνών της διδακτικής των μαθηματικών, οι οποίες παρουσιάστηκαν συνοπτικά προηγούμενα, οδηγούν στο συμπέρασμα ότι ουσιαστικοί παράγοντες του κοινωνικού, πολιτικού και πολιτισμικού πλαισίου της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών, έχουν από την συγκρότηση της διδακτικής των μαθηματικών ως επιστημονικού αντικειμένου μέχρι σήμερα αγνοηθεί ή υποβαθμιστεί από το κυρίαρχο ερευνητικό ρεύμα, σε αντίθεση με τους ψυχολογικούς παράγοντες, οι οποίοι και αυτοί προσεγγίζονται σχεδόν αποκλειστικά από μια ατομικιστική οπτική.

Κατά συνέπεια, μπορεί να διατυπωθεί ο ισχυρισμός ότι η ψυχολογικοποίηση και ατομικοποίηση, ως ερευνητικές λογικές, έχουν διαμορφώσει τα φαινόμενα τα οποία διερευνώνται από τη διδακτική των μαθηματικών, όπως επίσης και τους κυρίαρχους όρους διερεύνησης τους. Έχουν, επομένως, διαμορφώσει σε μεγάλο βαθμό το επιστημονικό αντικείμενο της διδακτικής των μαθηματικών ως επιστημονικής πρακτικής και γνώσης.

Ουσιαστική συμβολή στην κατάσταση αυτή μπορεί να αποδοθεί στην επίδραση των μέχρι πρόσφατα κυρίαρχων απολυτοκρατικών φιλοσοφιών των μαθηματικών για τις οποίες η μαθηματική γνώση είναι μια αδιάφραστη, αντικειμενική και απόλυτη γνώση, αυτόνομη και κατηγορικά διακριμένη από τις άλλες μορφές της ανθρώπινης γνώσης, απαλλαγμένη πλήρως από τα εμπειρικά δεδομένα και τις αντιφάσεις της κοινωνικής πραγματικότητας και άρα ανεξάρτητη από τις κυρίαρχες κοινωνικές αξίες, υποκείμενη αποκλειστικά σε μια δική της αυτόνομη εσωτερική λογική και καθορισμένη μόνο από την τυπική λογική (φορμαλισμός) ή από μια υπερβατική πραγματικότητα (πλατωνισμός).

Όπως μπορεί εξίσου να αποδοθεί στην κυριαρχία της Πιαζετιανής ψυχολογίας της νοητικής ανάπτυξης, η οποία υποστηρίζει μια ατομικιστική, και από πολλές απόψεις ανεξάρτητη από το κοινωνικό πλαίσιο, θεώρηση της μάθησης των μαθηματικών και της μαθηματικής σκέψης γενικότερα . Η λογικο-μαθηματική περιγραφή, μάλιστα, την οποία υπερ-χρησιμοποίησε ο Πιαζέ για τις νοητικές λειτουργίες και την ανάπτυξη τους αποδείχθηκε ιδιαίτερα ελκυστική και συνέβαλε στην κυριαρχία της Πιαζετιανής ψυχολογίας στην έρευνα της μάθησης και στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Τέλος, δεν πρέπει να υποτιμηθεί η συμβολή ενός τρίτου παράγοντα, ο οποίος σχετίζεται με την πολιτική της χρηματοδότησης των ερευνών της διδακτικής των μαθηματικών από τα διάφορα ιδρύματα και τους κρατικούς φορείς, όπως επίσης και με την πολιτική των περιοδικών της μαθηματικής εκπαίδευσης, ιδίως των *Educational Studies in Mathematics* και *Journal for Research in Mathematics Education*. Τόσο η χρηματοδότηση των ερευνών, όσο και η πολιτική δημοσίευσης άρθρων στα περιοδικά αυτά ενίσχυσαν συστηματικά τις τάσεις που προαναφέρθηκαν. Όπως χαρακτηριστικά έχει διατυπωθεί από τον Secada (1992) οι ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών οι οποίοι θέτουν σοβαρά κοινωνικά ζητήματα ωθούνται εκτός προσκήνιου της έρευνας και υπόκεινται για την δημοσίευση των ερευνών τους σε αυστηρότερα κριτήρια από τους άλλους ερευνητές.

Η διδακτική των μαθηματικών και γενικότερα η μαθηματική εκπαίδευση είναι καταστατικά ένα πολύ-επιστημονικό πεδίο, γεγονός το οποίο αντανakλάται στον πλούτο του εννοιολογικού της συστήματος και στο ευρύ φάσμα των ερευνητικών της μεθόδων. Οι θεμελιώδεις έννοιες της διδακτικής των μαθηματικών είναι, όπως άλλωστε είναι οι θεμελιώδεις έννοιες κάθε πολύ-επιστημονικού πεδίου, πολύπλευρες και το νόημα τους εξαρτάται και προσδιορίζεται από τις εγκαθιδρυμένες σχέσεις ανάμεσα στις διάφορες συνιστώσες τους. Είναι ανάγκη, επομένως, να αντιμετωπίζονται «σχεσιακά», τόσο θεωρητικά όσο και εμπειρικά. Η «σχολική μάθηση» των μαθηματικών ή το «συναίσθημα» απέναντι στα μαθηματικά, για παράδειγμα, δεν μπορεί να θεωρούνται στην έρευνα της διδακτικής των μαθηματικών ως απολύτως ψυχολογικές έννοιες, όπως δεν μπορεί να θεωρούνται ως απολύτως κοινωνιολογικές έννοιες η «σχολική αξιολόγηση» ή η το

«κοινωνικο-οικονομικό επίπεδο» των μαθητών. Αφού σε μια σχεσιακή προσέγγιση η σχολική μάθηση περιλαμβάνει την αξιολόγηση ως εσωτερικό της στοιχείο και αντίστροφα. Χωρίς αμφιβολία, οι έννοιες που αναφέρονται στις κοινωνικές δομές είναι γενικεύσεις, όπως είναι γενικεύσεις και οι έννοιες που αναφέρονται σε ψυχολογικές καταστάσεις και διεργασίες. Δεν μπορεί, επομένως, να θεωρηθεί ως δεδομένο ότι η συμπερίληψη κοινωνικών, πολιτισμικών και πολιτικών παραγόντων στους θεωρητικούς προβληματισμούς ή στα ερευνητικά εγχειρήματα της διδακτικής των μαθηματικών θα αποκαλύψει και θα ερμηνεύσει τις ιδιαίτερες και πολύπλοκες σχέσεις ανάμεσα στις ποικίλες όψεις της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών. Ο αποκλεισμός τους, όμως, εξαφανίζει πολλές από τις δυνατότητες διερεύνησης τους περιορίζοντας και διαστρεβλώνοντας το επιστημονικό αντικείμενο της διδακτικής των μαθηματικών.

Βιβλιογραφικές αναφορές

- Chassapis, D. (2002) Social groups in mathematics education research: An investigation into mathematics education-related research articles published from 1971 to 2000. Στο P. Valero & O. Skovsme (Eds) *Proceedings of Third International Mathematics Education and Society Conference*, 1, Centre for Research in Learning Mathematics, Danish University of Education, 273-281.
- Hanna, G. & Sidoli, N. (2002) The story of ESM, *Educational Studies in Mathematics*, 50 (2), 123-156.
- Hudson, B. (2001), Holding complexity and searching for meaning – teaching as reflective practice, *Journal of Curriculum Studies*, 34, 1, 43-57.
- Kieran, C. (1994) Doing and seeing things differently: A 25-year retrospective of mathematics education research on learning, *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 583-607.
- Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. Στο D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning*, New York: Macmillan, 3-380
- Lerman, S. και Τσατσαρώνη Α. (2004), Η δημιουργία νοήματος στην έρευνα της μαθηματικής εκπαίδευσης ως κοινωνική πρακτική και πρακτική λόγου. Στο Δ. Χασάπης (επιμ.), *Εικόνα, σχήμα και λόγος στη*

διδασκαλία των μαθηματικών, Πρακτικά 3^{ου} Δημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών, Θεσσαλονίκη, Θεσσαλονίκη: Α.Π.Θ., 17-38.

Lubienski, S. T. & Bowen, A. (2000). Who's counting? A survey of mathematics education research 1982-1998, *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 626-633.

Μπαλιός, Α. (1990), Επιστημολογικά, Για την ιστορία μιας επιστήμης, Αθήνα: Εκδόσεις Ο Πολίτης.

Niss, M (2000) Key issues and trends in research on mathematical education. *Plenary address to Ninth International Congress on Mathematical Education*, Makuhari, Japan.

Secada, W. G. (1992). Race, ethnicity, social class, language, and achievement in mathematics. Στο D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, New York: Macmillan, 623-660.

Tate, W. F. (1997). Race-ethnicity, SES, gender, and language proficiency trends in mathematics achievement: An update. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 652-679.

Χασάπης Δημήτρης (2004), Το επιστημονικό αντικείμενο της διδακτικής των μαθηματικών: Παραδοχές και ζητούμενα, *Κριτική*, 1, 97-106.

Ιστορία των μαθηματικών – Ιστορίες των μαθηματικών: επιλεκτικά σχόλια για τα αναγκαία (μεταξύ άλλων) στοιχεία μιας συζήτησης

Μια εισαγωγική σημείωση για την ιστορία

«Η πολιτική ιστορία είναι ψυχολογική και αγνοεί τις εξαρτήσεις' είναι εκλεκτικιστική, δηλαδή βιογραφική, και αγνοεί το σύνολο της κοινωνίας και τις μάξες πού την απαρτίζουν' είναι ποιοτική και αγνοεί το σειραϊκό' έχει σαν στόχο της το καθέκαστο και αγνοεί τη σύγκριση' είναι αφηγηματική και αγνοεί την ανάλυση' είναι ιδεαλιστική και αγνοεί το υλικό' είναι ιδεολογική και δεν έχει συνείδηση του πράγματος' είναι μερική και ούτε αυτό το ξέρει' μένει προσκολλημένη στο συνειδητό και αγνοεί το ασυνείδητο' ασχολείται με το γεγονός της στιγμής και αγνοεί τη μακρά διάρκεια' με μία λέξη πού στο ιδίωμα των ιστορικών τα λει ολα, είναι συμβαντολογική» γράφει σε μια κριτική του για την πολιτική ιστορία ο Ζακ Ζουλιάρ (Julliar, 1975, σελ. 257).

Από μια παρόμοια θεώρηση της κυρίαρχης ιστοριογραφίας των μαθηματικών στη χώρα μας, και όχι μόνο¹, και με δεδομένο έναν ορισμό της ιστορίας ως σπουδής του ανθρώπινου παρελθόντος διατυπώνονται στην παρούσα εισήγηση επιλεκτικά, και αναπόφευκτα αποσπασματικά, σχόλια για τους αναγκαίους, κατά την εκτίμηση μου, όρους μιας συζήτησης για την ιστορία των μαθηματικών, η οποία μπορεί να προσανατολίσει γόνιμα έναν προβληματισμό για τη σχέση της ιστορίας με τη μαθηματική εκπαίδευση.

Η ιστορία, ως σπουδή του ανθρώπινου παρελθόντος, εμπεριέχει δύο συστατικές και αλληλοκαθοριζόμενες όψεις, που ενδιαφέρουν την παρούσα συζήτηση και επισημαίνονται εντελώς συνοπτικά. Η πρώτη αφορά στη διάκριση της ιστορικής μελέτης από την ιστορική αφήγηση ή την ιστορία ως μέθοδο έρευνας και την ιστοριογραφία, ως ανάπλαση του παρελθόντος με βάση τα ευρήματα και τις διαπιστώσεις της

¹ Μια πρόσφατη επισκόπηση της κυρίαρχης ιστοριογραφίας των μαθηματικών σε διεθνές επίπεδο αποτελεί το Dauben & Scriba (2002).

ιστορικής έρευνας και η δεύτερη, συνάρτηση της πρώτης, αφορά στις σχέσεις του παρόντος και του παρελθόντος, όπως συγκροτούνται μέσα από, και δια, της ιστορικής μελέτης και της ιστοριογραφίας.

Η ιστοριογραφία ανασυνθέτοντας ένα παρελθόν υποκείμενο σε απαιτήσεις του δικού της παρόντος, συνδυάζει ταυτόχρονα ορθολογικές αναλύσεις και στο όνομα τους δεοντολογικά ή αξιολογικά προτάγματα του παρόντος. Συνθέτει, έτσι, όχι το παρελθόν γενικά, αλλά το παρελθόν που είναι σε θέση, αλλά και ενδιαφέρεται, να ανασυστήσει η κοινωνία του παρόντος κάθε ιστοριογραφικής παραγωγής. Γι' αυτό και η ιστορία, κάθε ιστορία, γράφεται και ξαναγράφεται διαρκώς.

Με την σημείωση αυτή υπόψη, τα σχόλια που ακολουθούν, διατυπωμένα εντελώς σχηματικά και σε μεγάλο βαθμό απλοποιητικά, δεν διεκδικούν πρωτοτυπία. Συνοψίζουν για τις ανάγκες μιας συζήτησης για την ιστορία των μαθηματικών και για τις συσχετίσεις της με τη μαθηματική εκπαίδευση παραδοχές αποδεκτές από τις σύγχρονες κοινότητες των ιστορικών και επιστημολογικές θέσεις μιας ορισμένης θεώρησης της μαθηματικής γνώσης και πρακτικής αποδεκτές από μια συγκεκριμένη σύγχρονη κοινότητα μαθηματικών και εκπαιδευτικών.

Σχόλιο Πρώτο:

Για την αντικειμενικότητα της ανάγνωσης των ιστορικών τεκμηρίων και της ιστορικής αφήγησης

Η αντικειμενικότητα της ανάγνωσης των ιστορικών τεκμηρίων, όπως και η αντικειμενικότητα της αφήγησης κάθε ιστορίας των μαθηματικών η οποία προκύπτει από την ανάγνωση αυτή είναι σχετική, υποκείμενη στους καθορισμούς και δομημένη από το εννοιολογικό πλαίσιο που υιοθετεί ή και κατασκευάζει ο ιστορικός. Τα ιστορικά τεκμήρια επιλέγονται, οργανώνονται, αξιολογούνται και ερμηνεύονται από τον ιστορικό με τη διαμεσολάβηση ενός εννοιολογικού πλαισίου, το οποίο, επίσης, αποτελεί μια ιστορική κατασκευή υποκείμενη σε συγκεκριμένους καθορισμούς. Είναι κοινός τόπος της επιστήμης της ιστορίας, ότι νοήματα στα ίχνη του ανθρώπινου παρελθόντος μπορεί να αποδοθούν μόνον και εφόσον

έχουν συσταθεί οι όροι πρόσληψης νοημάτων, δια των οποίων διακρίνονται τα ιστορικά δεδομένα από τα «ακατανόητα» στοιχεία του παρελθόντος και άρα μη ιστορικά τεκμήρια.

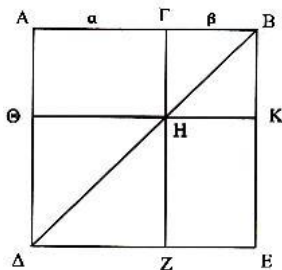
Η μοναδική έννοια «αντικειμενικότητας» των τεκμηρίων του ανθρώπινου παρελθόντος αφορά και μόνο το γεγονός ότι αποτελούν για τον ιστορικό «αντικείμενα» έρευνας, τα οποία παρέχουν στοιχεία για το ανθρώπινο παρελθόν και συνακόλουθα αντικείμενα της επιχειρούμενης στο πλαίσιο της ιστορικής έρευνας ανάγνωσης, κατανόησης και ερμηνείας τους. Δεν μπορεί, όμως, όπως συμβαίνει συχνά στην ιστοριογραφία των μαθηματικών, αυτή ή έννοια της «αντικειμενικότητας» των ιστορικών τεκμηρίων, δηλαδή το γεγονός της αντικειμενικής τους ύπαρξης και της επιλογής τους ως αντικειμένων της ιστορικής έρευνας, να προβάλλεται και να χρησιμοποιείται για να επενδυθούν με αντικειμενικότητα και οι ερμηνείες που αναπτύσσονται και τεκμηριώνονται από μια συγκεκριμένη προσέγγιση τους.

Χαρακτηριστική περίπτωση αποτελεί η «ανάγνωση» του Δευτέρου Βιβλίου των Στοιχείων του Ευκλείδη από την οπτική της Άλγεβρας ή της Τριγωνομετρίας, μαθηματικά δημιουργήματα επόμενων ιστορικά εποχών. Το βιβλίο αυτό περιέχει εφαρμογές του Πυθαγορείου θεωρήματος στην κατασκευή ενός τετραγώνου από τετράγωνα και ορθογώνια σχήματα συνδυασμένα με διάφορους τρόπους.

Νεότεροι, όμως, ιστορικοί των μαθηματικών «βλέπουν» στις προτάσεις αυτές αλγεβρικές ταυτότητες ή τριγωνομετρικά θεωρήματα μέσα από μια ανάγνωση η οποία αφενός τις αποπλαισιώνει από την Ευκλείδεια λογική και τις αντιμετωπίζει με μια σύγχρονη οπτική της μαθηματικής γνώσης, αφετέρου διακρίνει το περιεχόμενο από τη μορφή διατύπωσης της μαθηματικής γνώσης, θεωρώντας τη μορφή διατύπωσης περιστασιακή και χωρίς συνάφεια με το περιεχόμενο της μαθηματικής γνώσης. «*Το βιβλίοιού τούτο περιέχει και εφαρμογήν της γεωμετρίας εις την Άλγεβραν και αποδίδεται κατά το μέγιστον μέρος εις τους Πυθαγορείους. Τα πρώτα δέκα θεωρήματα αφορούν εις αλγεβρικές ταυτότητας*» (Σταμάτης, 1952, σελ. 14) ή «*Οι πρώτες 10 προτάσεις (του βιβλίου II) αποτελούν αυτό που σήμερα λέμε 'Γεωμετρική Άλγεβρα' των αρχαίων Ελλήνων, δηλαδή αλγεβρικές σχέσεις που αποδεικνύονται γεωμετρικά*» (Ευκλείδη Στοιχεία, 2001, σελ. 206) ή για τις προτάσεις 12 και 13 «*είναι τα θεωρήματα που δίνουν το τετράγωνο της πλευράς*

τριγώνου η οποία βρίσκεται απέναντι από αμβλεία ή οξεία γωνία και αποτελούν καθαρά 'γεωμετρικές μορφές' του γενικότερου θεωρήματος του συνημίτονου» (ο.π. σελ. 205). Ενδεικτικό παράδειγμα, η Ευκλείδεια πρόταση (II.4) «Αν ευθύγραμμο τμήμα διαιρεθεί από σημείο σε δύο τμήματα, το τετράγωνο του όλου τμήματος είναι ίσο με τα τετράγωνα των δύο τμημάτων και το διπλάσιο ορθογώνιο που ορίζουν τα δύο τμήματα» (Ευκλείδη Στοιχεία, 2001, σελ. 219), δηλαδή ότι αν ένα ευθύγραμμο τμήμα AB διαιρεθεί από σημείο Γ σε δύο τμήματα $A\Gamma$ και ΓB τότε το τετράγωνο με πλευρά το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι ίσο με το άθροισμα δύο τετραγώνων με πλευρά τα ευθύγραμμο τμήματα $A\Gamma$ και ΓB αντίστοιχα και ενός ορθογωνίου με πλευρές τα ευθύγραμμο τμήματα $A\Gamma$ και ΓB .

Σχηματικά



«Διαβασμένο» αλγεβρικά αυτό διατυπώνεται ως «η γνωστή αλγεβρική ταυτότητα: $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ » (Ευκλείδη Στοιχεία, 2001, σελ. 220).

Όπως όμως εύστοχα σχολιάζεται από τον Γκράτταν-Γκίννες (Grattan-Guinness, 1996), ο Ευκλείδης στα *Στοιχεία* αναφέρεται σε ευθείες, γωνίες, επιφάνειες, στερεά και σχέσεις, όχι στα ποσοτικοποιημένα αντίστοιχα τους μήκη, εμβαδά, όγκους, αθροίσματα, γινόμενα κλπ. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα αναφέρεται το «τετράγωνο με πλευρά το ευθύγραμμο τμήμα AB » και όχι το «τετράγωνο του ευθυγράμμου τμήματος AB ». Αντίστοιχα, ο όρος άλγεβρα αναφέρεται σε μαθηματικές έννοιες και τεχνικές οι οποίες αφορούν στον τυπικό χειρισμό αφηρημένων συμβόλων για την ή και στην επίλυση εξισώσεων, το οποίο ως ιδιαίτερο πεδίο μαθηματικής δραστηριότητας εισάγεται από τους Άραβες μαθηματικούς κατά τον 8^ο αιώνα και αναπτύσσεται στην Ευρώπη μεταγενέστερα. Παρεμπιπτόντως, η

διατύπωση της αλγεβρικής ταυτότητας στη μορφή $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ συναντάται αρχικά σε κείμενα του Χάριουτ (Harriot) και του Καρτέσιου (Descartes) στις αρχές του 17^{ου} αιώνα (Grattan-Guinness, 2004).

Αντίστοιχα, η Ευκλείδεια πρόταση (II.13) «*Σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της πλευράς που βρίσκεται απέναντι από την οξεία γωνία είναι μικρότερο από το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία κατά το διπλάσιο του γινομένου της μιας από αυτές επί την προβολή της άλλης επ' αυτή*» («Ευκλείδη Στοιχεία, 2001, σελ. 246) μπορεί να «διαβαστεί» τριγωνομετρικά ως $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma \sin A$.

Μια τέτοιου τύπου ιστορική ανάγνωση του παρελθόντος των μαθηματικών υπερασπίστηκαν πριν τριάντα χρόνια σε μια σχετική συζήτηση μαθηματικοί, όπως ο Φρόντενταλ (Freudenthal, 1976) ο Βαν ντερ Βάρντεν (van der Waerden, 1975) και ο Βέλ (Weil, 1978), ενώ την αρνήθηκαν επισημαίνοντας την αβασιμότητα της κυρίως ιστορικοί των επιστημών, υπογραμμίζοντας την ανάγκη ανάγνωσης και κατανόησης των μαθηματικών ιδεών του παρελθόντος μέσα στο ιστορικό πλαίσιο στο οποίο διατυπώθηκαν, αναπτύχθηκαν και διαδόθηκαν και κατακρίνοντας την επαναδιατύπωση τους με όρους και έννοιες των σύγχρονων μαθηματικών (Unguru, 1975).

Σχόλιο Δεύτερο: Για τον ιστορικό χρόνο

Ως ιστορικός χρόνος και σε αντιδιαστολή με το φυσικό χρόνο, δηλαδή το χρόνο όπως ορίζεται ως έννοια της κλασικής φυσικής, θεωρείται ο χρόνος που διέπει τα ιστορικά φαινόμενα, τα οποία αποτελούν αντικείμενο της ιστορίας. Σύμφωνα με μια θεώρηση, η οποία αναλύεται από τον Μπαλτά (1988), ο ιστορικός χρόνος πρέπει να θεωρείται, μεταξύ άλλων και, με τα ακόλουθα θεμελιώδη χαρακτηριστικά σε ευθεία αντιδιαστολή με τα χαρακτηριστικά του χρόνου της φυσικής.

Ο ιστορικός χρόνος πρέπει να θεωρείται ασυνεχής, διακοπτόμενος από τομές και ρήξεις της συνέχειας του, οι οποίες οριοθετούν χρονικά διαφορετικές ιστορικές καταστάσεις.

Ο ιστορικός χρόνος πρέπει να θεωρείται ανομοιογενής ως προς αυτές τις τομές και τα σημεία ρήξης της συνέχειας του. Κάθε χρονική

στιγμή, είτε συνιστά τομή και ρήξη είτε όχι, είναι ουσιαστικά διαφορετική από κάθε άλλη. Ο ιστορικός χρόνος είναι ανομοιογενής ως προς τις διάρκειες που διέπουν τις ιστορικές καταστάσεις, οι οποίες ως εκ τούτου δεν μπορεί να συνταχθούν γραμμικά σε μια αλληλουχία «ακολουθώντας απλά μια υποθετική υποκείμενη χρονική 'ευθεία'. Απλά 'υπερτίθενται' με τρόπους που καθιστούν τις μεταξύ τους αρθρώσεις ιδιαίτερα πολύπλοκες» (Μπαλτάς, 1988, σελ. 64).

Ο ιστορικός χρόνος είναι χρόνος ο οποίος πρέπει να θεωρείται ότι 'ρέει' ανομοιόμορφα. Η διαδοχή των χρονικών στιγμών δεν ακολουθεί πάντοτε τον ίδιο 'ρυθμό' και οι αντίστοιχες χρονικές διάρκειες δεν είναι 'ισοταχείς', σε αντίθεση με ανάλογες παραδοχές για το χρόνο της φυσικής. Επομένως, μια χρονική διάρκεια δεν χαρακτηρίζεται μόνο από το εύρος της, αλλά και από τον ρυθμό διαδοχής των χρονικών στιγμών που εμπεριέχει.

Ο ιστορικός χρόνος πρέπει να θεωρείται ανισότροπος, δηλαδή το παρελθόν σε ριζική ασυμμετρία με το μέλλον, οπότε και το τετελεσμένο δεν μπορεί να θεωρείται ότι προσδιορίζει πλήρως το ασυντέλεστο. Με άλλα λόγια, σε καμία περίπτωση το μέλλον δεν αποτελεί επανάληψη του παρελθόντος.

Τέλος, ο ιστορικός χρόνος δεν μπορεί να θεωρείται ανεξάρτητος από τα κοινωνικά φαινόμενα. Είναι συστατικό στοιχείο των κοινωνικών φαινομένων μετέχοντας στον προσδιορισμό της ιστορικής τους ταυτότητας. «Και αυτό σημαίνει όχι μόνο απλά πως ένα ιστορικο-κοινωνικό φαινόμενο είναι αδιαχώριστο από τη χρονικότητα του (το 'καθεστώς' χρόνου που το διέπει) και τη χρονολόγηση του (τα όρια του φαινομένου όπως τα προσδιορίζει αυτό το 'καθεστώς') αλλά και πως το γίνεσθαι του φαινομένου αυτού δεν μπορεί να διαχωριστεί από το είναι του, *πως ένα ιστορικο-κοινωνικό φαινόμενο είναι πάντοτε φαινόμενο εν εξελίξει, πως το είναι του είναι το ίδιο το γίνεσθαι*» (Μπαλτάς, 1988, σελ. 65).

Τυπική περίπτωση ιστοριογραφίας των μαθηματικών, η οποία αναιρεί ουσιαστικά χαρακτηριστικά του ιστορικού χρόνου αποτελεί μια προσέγγιση στην ιστορία της άλγεβρας η οποία παρουσιάστηκε

αρχικά από τον Νέσσελμαν (Nesselman, 1842) στα μέσα του 19^{ου} αιώνα και υιοθετήθηκε στη συνέχεια από άλλους ιστορικούς των μαθηματικών. Η προσέγγιση αυτή ανακατασκευάζει την ιστορική εξέλιξη της άλγεβρας για να της αποδώσει συνέχεια και ομοιογένεια, ως χαρακτηριστικά μιας ενδογενούς αναγκαιότητας της άλγεβρας, ανεξάρτητης από τα αντίστοιχα κοινωνικά φαινόμενα.

Διακρίνει τρεις διαδοχικές περιόδους ιστορικής εξέλιξης, που χαρακτηρίζονται από την κυρίαρχη μορφή συμβολισμού στη γραφή της άλγεβρας, η οποία όμως μορφή συμβολισμού αντιμετωπίζεται ως έκφραση μιας προοδευτικής εξέλιξης ενός τύπου μαθηματικής αφαίρεσης: τη ρητορική, την συντομογραφική και την συμβολική άλγεβρα. Στην ρητορική άλγεβρα δεν χρησιμοποιείται καμία μορφή συμβολισμού ή συντομογραφίας των μαθηματικών εννοιών, στην συντομογραφική άλγεβρα εισάγονται συντομογραφικές παραστάσεις των συχνότερα χρησιμοποιούμενων πράξεων, σχέσεων και μεγεθών και στην συμβολική άλγεβρα αναπτύσσεται και χρησιμοποιείται ένα πλήρες συμβολικό σύστημα παράστασης των αλγεβρικών εννοιών. Η συντομογραφική άλγεβρα, όμως, θεωρούμενη ως ένα ενδιάμεσο στάδιο στην εξέλιξη της άλγεβρας με στόχο την απόδοση μιας συνεχούς, ομοιογενούς και ισότροπης ιστορικά ανάπτυξης, δεν αποτελεί παρά μια τεχνική αναγκαιότητα επιβεβλημένη στους αντιγραφείς των μαθηματικών κειμένων της εποχής από τους περιορισμούς της γραφής με το χέρι και την έλλειψη δυνατοτήτων τυπογραφικής αναπαραγωγής. Γι' αυτό και οι συχνότερα χρησιμοποιούμενες λέξεις στην άλγεβρα της περιόδου αυτής, κατά κανόνα στα λατινικά, αντικαθίστανται με τα αρχικά τους γράμματα, όπως πχ. *c* για τη λέξη *cosa* (αντικείμενο, σταθερά), *p* για τη λέξη *plus* (συν, και) ή *mca* για τη λέξη *mutiplica* (πολλαπλασιάζω, πολλαπλασιασμός) (Radford, 1997).

Η ιστορία, και ακριβέστερα οι ιστορίες, της εννοιολογικής συγκρότησης και εξέλιξης των μαθηματικών θεωριών του λογισμού, απειροστικού, διαφορικού, ολοκληρωτικού κλπ., οι οποίες κατέληξαν σε μια θεωρία που ονομάστηκε μαθηματική ανάλυση, αποτελούν ένα από τα παραδείγματα, τα οποία καταδεικνύουν με χαρακτηριστικό τρόπο την ασυνέχεια, την ανομοιογένεια και την ανισοτροπία του ιστορικού χρόνου.

Ο λογισμός, δηλαδή μελέτη των συναρτήσεων με βάση τις έννοιες του ορίου (συνέχεια, ολοκλήρωση, διαφόριση), αναπτύχθηκε μέσα από διακριτά μαθηματικά ερευνητικά προγράμματα με διαφορετικές εννοιολογικές βάσεις, τα οποία μπορεί να διαταχθούν χρονολογικά, χωρίς όμως και να συγκροτούν μια αλληλουχία με στοιχεία συνέχειας, ως εξής (Grattan-Guinness, 1987):

- Οι θεωρίες των 'ροών' (fluxions) και των 'ρευστών' (fluents) του Νεύτωνα (Newton) στις οποίες αναπτύσσεται μια, ανεπαρκής όμως, θεωρία των ορίων από το 1660 και εξής.
- Ο 'διαφορικός' και 'ολοκληρωτικός' λογισμός του Λάιμπνιτς (Leibniz) με επίκεντρο τα απειροστά, αλλά χωρίς καμία αναφορά σε έννοιες 'ορίου', ο οποίος αναπτύσσεται από το 1670 και εξής. Ο λογισμός αυτός επαναδιατυπώνεται από τον Όυλερ (Euler) στα μέσα της δεκαετίας του 1750 και αναπτύσσεται με την προσθήκη μιας πρόδρομης έννοιας της 'παραγώγου', του 'διαφορικού συντελεστή'.
- Η αλγεβροποίηση του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού από τον Λαγκράντζ (Langrange) σε μια προσπάθεια παράκαμψης των εννοιών τόσο των 'απειροστών' όσο και των 'ορίων', η οποία επιχειρείται από το 1770 και εξής.
- Η προσέγγιση του Κωσύ (Cauchy) βασισμένη σε μια συνεκτική θεωρία των 'ορίων' η οποία αναπτύσσεται από το 1810 και εξής. Με βάση την έννοια του 'ορίου' θεμελιώνονται οι βασικές έννοιες του λογισμού και αναπτύσσονται οι θεωρίες των συναρτήσεων και των σειρών με τις οποίες ολοκληρώνονται θεωρητικά οι βάσεις της μαθηματικής ανάλυσης.
- Η προσέγγιση του Κωσύ (Cauchy) επεξεργασμένη και επαναδιατυπώμενη εννοιολογικά από τον Βάιερστρας (Weierstrass) και άλλους στα μετέπειτα χρόνια, και κυρίως από τις αρχές της δεκαετίας του 1850 και εξής, επικρατεί τελικά ως η κύρια μορφή της μαθηματικής ανάλυσης.

Σε πολλές ιστορίες της μαθηματικής ανάλυσης ή ιστορίες της εννοιολογικής εξέλιξης θεμελιωδών ιδεών της αποδίδεται μια χρονολογική συνοχή και μια αδιάλειπτη συνέχεια, εννοιολογική και

μεθοδολογική, υπό το πρίσμα μιας «εκ των υστέρων» ανάγνωσης των ιστορικών δεδομένων, η οποία παραβλέπει όλα τα χαρακτηριστικά του ιστορικού χρόνου. Χαρακτηριστική περίπτωση μιας τέτοιας προσέγγισης της ιστορίας αποτελεί η κλασική *Ιστορία του Λογισμού και της Εννοιολογικής του Ανάπτυξης* του Καρλ Μπόϋρ (Boyer, 1959), στην οποία παρουσιάζεται μια συνεχής εξέλιξη των βασικών εννοιών του λογισμού από τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά μέχρι το τέλος του 19^{ου} αιώνα διακριμένη σε έξι περιόδους ανάπτυξης και αντίστοιχα κεφάλαια: Ιδέες στη αρχαιότητα, Οι συνεισφορές του Μεσαίωνα, Ένας αιώνας προσδοκίας, Νεύτωνας και Λάιμπνιτς, Η περίοδος των δισταγμών, Η αυστηρή τυποποίηση. Στην ιστορία του μαθηματικού λογισμού, όπως παρουσιάζεται από το Μπόϋρ, δεν υπάρχουν τομές, όλες οι χρονικές περίοδοι είναι ισότιμες ως προς την εξέλιξη των συναφών μαθηματικών ιδεών και τεχνικών, αλλά πάνω από όλα το παρελθόν και το παρόν της κάθε χρονικής περιόδου δεν αποτελούν αλληλουχία. Κάποιες μάλιστα εννοιολογικές εξελίξεις του λογισμού υπόκεινται και σε ένα χειρισμό χρονικής αντιστροφής, ως εάν συνέβησαν σε αντίστροφη χρονική διαδοχή, όπως για παράδειγμα η έννοια του «απειροστού» ή του «ολοκληρώματος» στα μαθηματικά του Αρχιμήδη, οι οποίες φαίνεται να συγκροτούνται ανεξάρτητα και στην περίπτωση του ολοκληρώματος πριν από την έννοια της «παραγώγου» (Boyer, 1959, σελ. 48-60).

Αντίθετα σε μια συλλογή κειμένων του Γκράτταν-Γκίννες (Grattan-Guinness, 1980) στην οποία παρουσιάζεται η εξέλιξη των εννοιολογικών θεμελίων και των τεχνικών της μαθηματικής ανάλυσης από το 1630 έως το 1910 αποτυπώνονται με σαφήνεια και τα δεδομένα του ιστορικού πλαισίου και τα χαρακτηριστικά του ιστορικού χρόνου συγκρότησης και ανάπτυξης τους.

Σχόλιο Τρίτο:

Για τα αντικείμενα της ιστορίας των μαθηματικών

Από την οπτική που θεωρεί τα μαθηματικά ως μια κοινωνική πρακτική, αντικείμενα της ιστορίας των μαθηματικών αποτελούν ισότιμα και σε αλληλοσυσχέτιση, όλοι οι παράγοντες οι οποίοι διαμορφώνουν την οργάνωση της μαθηματικής δραστηριότητας και

την παραγωγή της μαθηματικής γνώσης σε μια καθορισμένη ιστορική περίοδο.

Τα υποκείμενα της μαθηματικής δραστηριότητας, άτομα και ερευνητικές ομάδες μαθηματικών. Η θεσμική οργάνωση της μαθηματικής δραστηριότητας στην οποία και δια της οποίας ασκείται η μαθηματική πρακτική, όπως είναι τα ερευνητικά κέντρα, οι μορφές επαγγελματικής απασχόλησης των μαθηματικών, οι τύποι και οι μηχανισμοί χρηματοδότησης της μαθηματικής έρευνας, οι μορφές και τα μέσα επικοινωνίας και δημοσιοποίησης των αποτελεσμάτων της μαθηματικής έρευνας (συνέδρια και περιοδικά), τα συστήματα εκπαίδευσης των ερευνητών μαθηματικών (προ-πτυχιακά και μεταπτυχιακά), και κάθε συναφές. Ιδιαίτερα, οι επαγγελματικές κοινότητες των ερευνητών μαθηματικών οι οποίες διαδραματίζουν κεντρικό ρόλο στην δημιουργία και στην επικύρωση της μαθηματικής γνώσης αποτελούν ενδιαφέρον αντικείμενο της ιστορικής έρευνας και συστατικό παράγοντα της εξέλιξης των μαθηματικών. Η κοινωνική οργάνωση και η δομή των κοινοτήτων αυτών και, ειδικότερα, οι ιεραρχίες και η εξουσία στις κοινότητες αυτές, οι οποίες δεν έχουν καθόλου ευκαιριακό και τυχαίο χαρακτήρα, διαμορφώνει τους μηχανισμούς δημιουργίας και επικύρωσης της μαθηματικής γνώσης, αποτελώντας ταυτόχρονα το πλαίσιο διαφύλαξης και το πεδίο εφαρμογής και μετάδοσης της άρρητης και άτυπης μαθηματικής γνώσης (Collins & Restivo, 1983, Martin, 1988). Κατά τον Ρεστίβο (Restivo, 1992) μάλιστα, οι αλλαγές των στοιχείων και οι μετασχηματισμοί των μορφών οργάνωσης της μαθηματικής δραστηριότητας περιγράφουν πληρέστερα τη δυναμική της ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών, απ' ότι η ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης με τους όρους εξέλιξης των επιστημών ως αλλαγή παραδειγμάτων που διατύπωσε ο Κουν (Kuhn, 1981), αναλύοντας τις επιστημονικές επαναστάσεις στη φυσική, αφού η εξέλιξη των μαθηματικών προσομοιάζει εκείνη της εξέλιξης των κοινωνικών παρά των φυσικών επιστημών.

Οι τρόποι δράσης και οι μορφές δραστηριότητας των μαθηματικών, όπως είναι οι διαδικασίες ανάδειξης και επίλυσης προβλημάτων και βέβαια η οργανωμένη σε αρχές και συστήματα μαθηματική γνώση. Η μαθηματική γνώση, η οποία ως παράγωγο μιας κοινωνικής πρακτικής,

εντάσσεται σε ιστορικά καθορισμένα κοινωνικά και πολιτιστικά πλαίσια, τα οποία καθορίζουν το επίπεδο και προσδιορίζουν την κατεύθυνση ανάπτυξης της, αποτελούν επομένως συστατικό στοιχείο της ιστορίας της.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η αποδοχή από την Γαλλική μαθηματική κοινότητα της μαθηματικής έννοιας ‘απειροστό’, μιας έννοιας θεμελιώδους για το διαφορικό λογισμό κατά την πρώτη περίοδο συγκρότησης της μαθηματικής ανάλυσης ως πεδίου της μαθηματικής δραστηριότητας. Έννοια, η οποία σε μια ύστερη περίοδο αντικαταστάθηκε από την έννοια ‘όριο’. Και στην αποδοχή της έννοιας ‘απειροστό’ και στην αντικατάστασή της από την έννοια ‘όριο’ κυριάρχησαν κριτήρια πρωτίστως φιλοσοφικά και ακριβέστερα ιδεολογικο-πολιτικά, παρά κριτήρια υπαγορευμένα από τις ανάγκες θεμελίωσης ή ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης. Η έννοια του ‘απειροστού’, ως ποσότητα η οποία είναι διάφορη του μηδενός ενώ ταυτόχρονα μικρότερη σε απόλυτη τιμή από κάθε πραγματικό θετικό αριθμό, θεωρήθηκε αντιθετική της Καρτεσιανής φιλοσοφίας και ως εκ τούτου η αποδοχή της προκάλεσε ισχυρές αντιδράσεις στη Γαλλική μαθηματική κοινότητα κατά τις αρχές του 18^{ου} αιώνα, επειδή εμπειρείε ουσιαστικά την αποδοχή της ύπαρξης ενός πραγματικού απείρου. Οι αντιδράσεις κατέληξαν σε μια οξυτάτη αντιπαράθεση των οπαδών με τους πολέμιους της έννοιας, η οποία επιλύθηκε υπέρ της έννοιας του ‘απειροστού’, όχι από την μαθηματική πρακτική, αλλά από την Γαλλική Βασιλική Ακαδημία Επιστημών με τη μέθοδο της πλειοψηφίας των μελών της. Παρά την πολιτική επιλογή της Γαλλικής Βασιλικής Ακαδημίας Επιστημών να προασπίζεται την «καθαρότητα της επιστήμης» μη επιτρέποντας στους κόλπους της θεολογικές ή φιλοσοφικές συζητήσεις για τα επιστημονικά ζητήματα, η αποφυγή της συζήτησης για την αντιπαράθεση της επιστημονικής κοινότητας επί των θεμελιωδών εννοιών του διαφορικού λογισμού δεν έγινε δυνατή. Τελικά, το 1706 η σχετική επιτροπή επίλυσης των επιστημονικών διαφορών εκτιμώντας ότι οι οπαδοί της έννοιας του «απειροστού» πλειοψηφούσαν στην ολομέλεια της Ακαδημίας, ζήτησε και επέτυχε από τους πολέμιους της έννοιας να αποσύρουν τις αντιθέσεις τους (Mancosu, 1989).

Σε μια επόμενη περίοδο ανάπτυξης του διαφορικού λογισμού στις αρχές του 19^{ου} αιώνα η έννοια «απειροστό» αντικαταστάθηκε από την έννοια «όριο», δια της οποίας επιλύονταν προβλήματα συναρτημένα με την αποδοχή μιας έννοιας πραγματικού απείρου. Η εκ των υστέρων επινόηση και ανάπτυξη μιας άλλου τύπου μαθηματικής ανάλυσης κατά το 1960-61, όταν ο Ρόμπινσον (Abraham Robinson) κατασκεύασε ένα μαθηματικό μοντέλο όπου υπάρχουν απειροστά, και θεμελίωσε την Non Standard Ανάλυση, κατέδειξε ότι ούτε η απόρριψη της έννοιας του «απειροστού» ούτε η εισαγωγή της έννοιας του «ορίου» συνιστούσαν αναγκαιότητες υπαγορευμένες από μια εσωτερική λογική ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης.

Αντίστοιχα, η διαδικασία της διαρκώς αυξανόμενης αφαίρεσης και γενίκευσης της μαθηματικής γνώσης μοιάζει χωρίς επαρκή αιτιολογία, αν ιδωθεί αποκλειστικά με τους όρους της εσωτερικής λογικής της μαθηματικής γνώσης, χωρίς να εκτιμηθεί, παράλληλα, με όρους κοινωνικής πρακτικής η σημαντική επίδραση της συγκρότησης ολόενα και πιο ανταγωνιστικών δομών της μαθηματικής δραστηριότητας (Schubring, 1981).

Από την οπτική αυτή, επομένως, και με δεδομένη την πολλαπλότητα των διαστάσεων της μαθηματικής δραστηριότητας δεν μπορούμε παρά να μιλάμε για *ιστορίες* των μαθηματικών, έστω και αν καταχρηστικά χρησιμοποιούμε τον όρο *ιστορία* των μαθηματικών.

Σχόλιο Τέταρτο: Για την ιστορικότητα της μαθηματικής γνώσης

Η αποδοχή της θέσης, ότι τα μαθηματικά είναι μια κοινωνική πρακτική επιβάλλει μια ιστορική προσέγγιση, η οποία αναιρεί μια συγκεκριμένη επιστημολογική θεώρηση των μαθηματικών που έχει καθιερωθεί στη συναφή βιβλιογραφία με τον όρο πλατωνισμός ή και απολυτοκρατία (Ernest, 1991, 1998). Με απλά λόγια, ο όρος πλατωνισμός παραπέμπει σε μια επιστημολογία των μαθηματικών βασισμένη στην παραδοχή ότι η ύπαρξη των μαθηματικών οντοτήτων είναι ανεξάρτητη από την ανθρώπινη νόηση. Η επιστημολογία αυτή αποκαλείται 'πλατωνισμός' επειδή θεωρείται παράγωγη της φιλοσοφικής θέσης που διατυπώθηκε από τον Πλάτωνα, ότι τα εμπειρικά δεδομένα των αισθήσεων μας αποτελούν αντανakλάσεις, και

μάλιστα ατελείς, ιδεωδών «μορφών» που υπάρχουν ανεξάρτητα από τόπο και χρόνο. Ο Ρέσνικ (Resnik, 1993, σελ. 39), περιγράφει τον πλατωνισμό ως την θεώρηση που δέχεται ότι *«Οι αριθμοί, τα σύνολα, οι συναρτήσεις και άλλα παραδειγματικά μαθηματικά αντικείμενα βρίσκονται εκτός χώρου και χρόνου κάθε αλληλεπίδραση τους με τα υλικά σώματα είναι αδύνατη»*.

Αυτή η επιστημολογική θεώρηση της μαθηματικής γνώσης, απόλυτα κυρίαρχη από τις αρχές του προηγούμενου αιώνα μέχρι τις μέρες μας, οπότε αμφισβητείται σοβαρά, οικοδομείται σε παραδοχές μεταξύ των οποίων περιλαμβάνονται οι ακόλουθες, διατυπωμένες εντελώς συνοπτικά. (Χασάπης, 2005).

Η μαθηματική γνώση συγκροτείται από ένα σύνολο προτάσεων (ορισμοί, αξιώματα, θεωρήματα) και μια σειρά αποδείξεων (διαδικασιών ελέγχου και τεκμηρίωσης) της αλήθειας των προτάσεων αυτών. Οι αποδείξεις της αλήθειας των μαθηματικών προτάσεων βασίζονται αποκλειστικά σε ένα σύνολο παραδοχών (αξιώματα και ορισμοί) και σε μια σειρά κανόνων λογικής συνεπαγωγής, που αποτελούν μέρος μιας παραδεκτής τυπικής-παραγωγικής λογικής.

Αφού οι αποδείξεις της αλήθειας των μαθηματικών προτάσεων είναι αποκλειστικά λογικές, χωρίς καμία προσφυγή στην εμπειρική πραγματικότητα, η μαθηματική γνώση είναι κατά συνέπεια αδιάψευστη, αντικειμενική και απόλυτη, εξαρτημένη μόνο από τις παραδοχές της και τους κανόνες της τυπικής-παραγωγικής λογικής. Η μαθηματική γνώση, ως αδιάψευστη, αντικειμενική και απόλυτη γνώση - ουσιαστικά ως εξ ορισμού αληθής - υποκείμενη μόνο στη δική της εσωτερική λογική είναι επομένως ανεξάρτητη από κάθε χρονικό και κοινωνικό δεδομένο, ανεξάρτητη δηλαδή από κάθε ιστορική εξέλιξη και κοινωνική πρακτική. Η μαθηματική γνώση είναι κατά συνέπεια απαλλαγμένη πλήρως από τα εμπειρικά δεδομένα και τις αντιφάσεις της κοινωνικής πραγματικότητας, πλήρως ανεξάρτητη από τις κυρίαρχες κοινωνικές αξίες και άρα ιδεολογικά ουδέτερη.

Η μαθηματική γνώση αναπτύσσεται συσσωρευτικά και αδιάλειπτα με την προσθήκη νέων μαθηματικών αληθειών, οι οποίες αποτελούν ένα τελεσίδικα περατωμένο και ολοκληρωμένο προϊόν της ανθρώπινης σκέψης

Σε τελευταία ανάλυση, η μαθηματική γνώση υπάρχει, ως συστατικό στοιχείο της πραγματικότητας ή μιας πραγματικότητας 'έξω' από την ανθρώπινη ύπαρξη και 'ανακαλύπτεται' από την ανθρώπινη δραστηριότητα. Ο γνωστός μαθηματικός Χάρντυ (Hardy, 1993, σελ. 89), δηλώνει χαρακτηριστικά *«Πιστεύω ότι η μαθηματική πραγματικότητα βρίσκεται έξω από μας, ότι ο ρόλος μας είναι να την ανακαλύπτουμε ή να την παρατηρούμε και ότι τα θεωρήματα που αποδεικνύουμε και που με υπερφίαλο τρόπο περιγράφουμε ως δικές μας 'δημιουργίες' είναι απλώς οι σημειώσεις για τις παρατηρήσεις μας»*.

Στα πλαίσια αυτού του επιστημολογικού προτύπου η ιστορικότητα της μαθηματικής γνώσης περιορίζεται ουσιαστικά στις «ανακαλύψεις» μαθηματικών αληθειών, οι οποίες είναι αποτέλεσμα έμπνευσης ιδιοφυών ατόμων και η ιστορική εξήγηση κάθε όψης και κάθε αποτελέσματος της μαθηματικής δραστηριότητας αναζητείται πρωτίστως στην εσωτερική λογική της μαθηματικής γνώσης (Weil, 1979, σελ. 434-442).

Αντίστοιχα, μια ιστορία των μαθηματικών δομημένη στις βιογραφίες των πρωταγωνιστών-μαθηματικών και στις ιδιοφυείς εμπνεύσεις τους, όπως και μια ιστορία της μαθηματικής γνώσης, η οποία προτάσσει ως κινητήρια δύναμη της εξέλιξης των μαθηματικών μια αυτόνομη εσωτερική λογική τους δεν αποτελεί παρά μια όψη της ιστορίας, άρα μια από τις ιστορίες των μαθηματικών, και μάλιστα σε κάποιες περιπτώσεις απλουστευτική.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα ιστοριογραφίας στη λογική αυτή αποτελεί το έργο του Μπελ (Bell, 1965/1991) «Οι Μαθηματικοί», στην εισαγωγή του οποίου εκτίθεται ρητά η Πλατωνική επιστημολογική θέση για την «ανακάλυψη» των μαθηματικών εννοιών και μεθόδων, καθώς και η αντίστοιχη εκδοχή της ιστορίας των μαθηματικών. *«Στόχος μας είναι να οδηγηθούμε σε μερικές από τις κυρίαρχες ιδέες σε μεγάλες περιοχές των σύγχρονων Μαθηματικών, και αυτό θα το κάνουμε μέσα από την εξέταση του βίου των ανθρώπων οι οποίοι υπήρξαν φορείς αυτών των ιδεών»* (Τόμος, I, σελ. 1.)

Μια αντιθετική, όμως, επιστημολογική θεώρηση βασισμένη στη θέση ότι η μαθηματική γνώση - όπως και κάθε επιστημονική γνώση - είναι κοινωνική κατασκευή, υποκείμενη στα ιστορικά καθορισμένα

κοινωνικά και πολιτισμικά πλαίσια του σταδίου ανάπτυξης της θεωρεί την ιστορία δηλαδή συστατικό στοιχείο των μαθηματικών προτάσεων και των διαδικασιών ελέγχου και τεκμηρίωσης της αλήθειας των προτάσεων αυτών, οι οποίες ως σύνολο συγκροτούν τη μαθηματική γνώση. Η μαθηματική γνώση, κατά συνέπεια, δεν αποτελεί μια αδιάψευστη, αντικειμενική και απόλυτη γνώση, αυτόνομη και κατηγορικά διακριμένη από τις άλλες μορφές της ανθρώπινης γνώσης, απαλλαγμένη από τα εμπειρικά δεδομένα και τις αντιφάσεις της κοινωνικής πραγματικότητας, αλλά ως προϊόν μιας κοινωνικής δραστηριότητας υπόκειται σε διαρκείς διαψεύσεις και αναθεωρήσεις, όπως και κάθε επιστημονική γνώση (Lakatos 1976/1996). Άρα, δεν αποτελεί και δεν μπορεί να θεωρείται ως ένα τελεσίδικα περατωμένο προϊόν της μαθηματικής πρακτικής, εκφρασμένο οριστικά από ένα κλειστό σύστημα προτάσεων (ορισμών, αξιωμάτων και θεωρημάτων) και μια σειρά δεδομένων τεκμηρίωσης και απόδειξης της αλήθειας των προτάσεων αυτών. Η ιστορία δηλαδή, αποτελεί συστατικό στοιχείο των προτάσεων και των διαδικασιών ελέγχου και τεκμηρίωσης της αλήθειας των προτάσεων, που συγκροτούν τη μαθηματική γνώση (Χασάπης, 2002, 2005).

Επομένως από μια τέτοια οπτική, η ιστορική εξήγηση κάθε όψης και αποτελέσματος της μαθηματικής δραστηριότητας αναζητείται στα χαρακτηριστικά της συγκεκριμένης κοινωνίας και του πολιτισμού της κατά τη συγκεκριμένη ιστορική περίοδο, όπως, άλλωστε, ισχύει και για κάθε άλλη ανθρώπινη δραστηριότητα και κάθε άλλο στοιχείο του ανθρώπινου πολιτισμού (Restivo, 1985, 1992). Αντίστοιχα, κάθε ιστορική μελέτη και κάθε ιστοριογραφία των μαθηματικών στη λογική αυτή, μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως μια από τις ιστορίες των μαθηματικών.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα προσέγγισης της ιστορίας των μαθηματικών από μια κοινωνική οπτική, η οποία αναδεικνύει τόσο την πολλαπλότητα των αντικειμένων της ιστορίας των μαθηματικών, όσο και ιδιαίτερες όψεις της ιστορικότητας της μαθηματικής γνώσης αποτελούν, κατά τη γνώμη μου, οι αναλύσεις του Ρεστίβο (Restivo, 1992) για τη συγκρότηση των μαθηματικών ως επιστημονικού κλάδου κατά τον 16^ο και 17^ο αιώνα στην Ευρώπη. Στο κεφάλαιο 7 με τίτλο

‘Διαμάχες, κοινωνική αλλαγή και μαθηματικά στην Ευρώπη’ του βιβλίου του ‘Τα μαθηματικά στην ιστορία και στην κοινωνία’ (Restivo, 1992) περιγράφονται αντιπαραθέσεις μεταξύ μαθηματικών της εποχής, οι οποίες σε πολλές ιστορίες των μαθηματικών εμφανίζονται ως «νοητικές μονομαχίες» και περιγράφονται με όρους ιδιομορφίας των πρωταγωνιστών τους και μαθηματικού ενδιαφέροντος των προς επίλυση προβλημάτων που έθετε ο ένας προκαλώντας τον άλλον (πρόκειται πάντοτε για άνδρες). Περιγράφονται οι αντιπαραθέσεις Καρνιάνο (Cardano) και Ταρτάλια (Tartaglia) κατά τη δεκαετία του 1540, Νεύτωνα (Newton) και Λάιμπνιτς ((Leibniz) (1670-1730), Κωσύ (Cauchy), Άμπελ (Abel) και Γκαλουά (Galois) (1826-1832), καθώς και η συζήτηση των Κάντορ (Cantor) και Κρόνεκερ (Kronecker) στα τέλη του 19ου αιώνα.

Για τον Ρεστίβο (Restivo), οι ιστορικά καταγραμμένες αντιπαραθέσεις και διαμάχες μεταξύ των μαθηματικών εκείνης, αλλά και της μεταγενέστερης, εποχής αντανakλούν σημαντικές ιστορικές αλλαγές στην κοινωνική οργάνωση και σηματοδοτούν συγκρούσεις για την οργάνωση της επιστημονικής δραστηριότητας και για τον έλεγχο της επιστημονικής γνώσης, της μαθηματικής συμπεριλαμβανομένης. Οι επιστημονικές συμπεριφορές που αναδύονται μέσα από τις διαμάχες των μαθηματικών δεν προκύπτουν από ιδεώδη ή από πρότυπα της μαθηματικής δραστηριότητας, αλλά επιβάλλονται από τις ανάγκες του ανταγωνισμού υποδηλώνουν, όπως καθορίζονται στις συγκεκριμένες ιστορικές συγκυρίες από τις κοινωνικές αλλαγές.

Ενδεικτικά, η αντιπαραθέση των Ιταλών μαθηματικών Καρνιάνο και Ταρτάλια κατά δεκαετία του 1540 για την πατρότητα της γενικής μεθόδου επίλυσης της κυβικής εξίσωσης $ax^3+bx^2+cx+d=0$., είχε πολλές φορές και τη μορφή μιας δημόσιας μαθηματικής μονομαχίας. Οι μαθηματικές μονομαχίες κατά τη διάρκεια των οποίων επιλύονταν δημόσια ένα πρόβλημα αποτελούσε μια μορφή εκδήλωσης συνηθισμένη μεταξύ των μαθηματικών κατά τον 16^ο αιώνα, δια της οποίας όμως εκτός από αναγνώριση κέρδιζαν και χρήματα με τη μορφή στοιχημάτων. Η αντιπαραθέση Καρνιάν και Ταρτάλια αντανakλά μια μετάβαση από ένα επιστημονικό καθεστώς στο οποίο οι λύσεις των προβλημάτων αποτελούσαν ατομική ιδιοκτησία και το οποίο υπερασπιζόνταν ο Ταρτάλια, σε ένα άλλο στο οποίο

καθιερώνονταν η δημοσιοποίηση τους και το οποίο πρόβαλλε ο Καρντάν, ο οποίος και δημοσίευσε πρώτος τη μέθοδο επίλυσης των κυβικών εξισώσεων στο βιβλίο του *Ars Magna* (1545).

Ανάλογα, η αντιπαράθεση Νεύτωνα και Λάιμπνιτς (1670-1730), η οποία αφορούσε την ιδέα και τη χρήση στη θεμελίωση του ολοκληρωτικού λογισμού των «απειροστών» αντανάκλα μια μετάβαση από ένα επιστημονικό καθεστώς οργανωμένο σε άτυπα κέντρα συγκροτημένα γύρω από ισχυρές, επιστημονικά και κοινωνικά, προσωπικότητες, στα οποία οι πληροφορίες διακινούνταν από δίκτυα προσωπικών σχέσεων σε ένα άλλο στο οποίο επιστημονικές ενώσεις, όπως οι επιστημονικές εταιρείες ή οι ακαδημίες επιστημών διαχειριζόνταν τη διάδοση της γνώσης μέσα από επιστημονικά περιοδικά και συνέδρια.

Σχόλιο τελικό (του κειμένου) και αρχικό (μιας συζήτησης)

Ένα σχόλιο τελικό του παρόντος κειμένου και εισαγωγικό μιας συζήτησης μπορεί να διατυπωθεί με τα λόγια του Ρεστίβο (Restivo, 1993, σελ. 269-270), τα οποία δεν χρειάζονται καμία παραπέρα ανάλυση ή επιμέρους διευκρίνιση:

«Οι κόσμοι των μαθηματικών είναι κοινωνικοί κόσμοι. Αλλά τι είδους κοινωνικοί κόσμοι είναι; Πώς εντάσσονται στο ευρύτερο πολιτισμικό πλαίσιο; Ποιών τα συμφέροντα εξυπηρετούν οι κόσμοι των μαθηματικών; Τι είδους άνθρωποι είναι μέλη αυτού του κόσμου; Τι είδους αξίες δημιουργούν και στηρίζουν οι κόσμοι των μαθηματικών; Στην περιγραφή και στην υπεράσπιση της “κοινωνιολογικής φαντασίας” (ενός είδους κοινωνιολογικής απαίτησης), ο Τσαρλς Ραϊτ Μιλς (Mills, 1961) υπογράμμισε τη σχέση ανάμεσα στα προσωπικά προβλήματα και στα δημόσια ζητήματα, την τομή βιογραφίας και ιστορίας στην κοινωνία, και έθεσε ερωτήματα σχετικά με την κοινωνική δομή, τη θέση των διαφόρων κοινωνιών στην ιστορία και τους διαφορετικούς τύπους ανδρών και γυναικών που κυριαρχούν και θα κυριαρχούν στην κοινωνία. Αν προσεγγίσουμε τους κόσμους των μαθηματικών από την οπτική αυτή, οι ερωτήσεις που θα θέσουμε είναι εντελώς διαφορετικές από αυτές που θέτουν συνήθως οι φιλόσοφοι οι ιστορικοί και οι κοινωνιολόγοι. Οι ερωτήσεις που έχω θέσει και αλλού

για τους κόσμους της επιστήμης, ισχύουν σε γενικές γραμμές και για τους κόσμους των μαθηματικών: Τι παράγουν οι επιστήμονες και πώς; Ποιούς πόρους χρησιμοποιούν και καταναλώνουν; Τι υλικά υποπροϊόντα και σκουπίδια παράγουν; Από ποια οπτική έχουν αξία αυτά που παράγουν, σε ποίο κοινωνικό πλαίσιο αποκτούν αξία και ποιοι τους αποδίδουν αξία; Ποιο τμήμα, κίνδυνο και όφελος συνεπάγεται η επιστημονική εργασία για τα άτομα, τις κοινότητες, τις τάξεις, τις κοινωνίες και τις οικολογικές βάσεις της κοινωνικής ζωής... Ποια η σχέση των επιστημόνων με τους πολίτες, τους πελάτες, τα ακροατήρια, και τους υποστηρικτές τους; Τι σχέσεις έχουν οι επιστήμονες μεταξύ τους, με τις οικογένειες και τους φίλους τους, τους συναδέλφους τους άλλων κοινωνικών θέσεων; Ποια είναι η σχέση τους ως εργαζομένων για τους κατόχους των μέσων επιστημονικής παραγωγής; Ποιες είναι οι αυτό-εικόνες τους και πώς εντάσσονται στις κοινότητες που ζούνε; Ποιοι είναι οι στόχοι, τα οράματα και τα κίνητρό τους; (Restivo, 1988, σελ. 218).

Αυτές οι ερωτήσεις είναι σχετικές με τη μελέτη των μαθηματικών κόσμων επειδή μας βοηθούν να ανασυστήσουμε τους κοινωνικούς κόσμους, οι οποίοι προοδευτικά απαλείφονται κατά τη διαδικασία της παραγωγής και, τελικά, της παρουσίασης (επανα-παρουσίασης) μαθηματικών αντικειμένων.

Η εξήγηση του “περιεχόμενου” των μαθηματικών δεν είναι ένα ζήτημα δημιουργίας μιας απλής αιτιακής σύνδεσης μεταξύ ενός μαθηματικού αντικειμένου, όπως είναι ένα θεώρημα, και μιας κοινωνικής δομής. Είναι, μάλλον, ένα ζήτημα αποκάλυψης και ανάδειξης των κοινωνικών ιστοριών και των κοινωνικών κόσμων, οι οποίοι είναι ενσωματωμένοι σε τέτοια μαθηματικά αντικείμενα, όπως είναι τα θεωρήματα.

Τα μαθηματικά αντικείμενα είναι και πρέπει να αντιμετωπίζονται κυριολεκτικά ως αντικείμενα, πράγματα τα οποία παράγονται, κατασκευάζονται, από κοινωνικά υποκείμενα. Δεν υπάρχει κανένας λόγος για τον οποίο ένα αντικείμενο όπως είναι ένα θεώρημα θα πρέπει να αντιμετωπιστεί διαφορετικά από ένα γλυπτό, ένα φλιτζάνι τσαγιού ή έναν ουρανοξύστη. Μόνο κοινωνικοί κόσμοι που είναι αλλοτριωμένοι και αλλοτριώνουν θα επέτρεπαν να αναπτυχθεί η

άποψη ότι τα μαθηματικά αντικείμενα είναι ανεξάρτητες, χωρίς υλική βάση δημιουργίες και ότι η ουσία των μαθηματικών αποκτά υλική υπόσταση σε έναν τεχνικό λόγο. Οι γραπτές παραστάσεις και τα σύμβολα είναι εργαλεία, υλικά αντικείμενα και, γενικότερα, είναι μέσα εκτέλεσης εργασιών κοινωνικά κατασκευασμένα, γύρω από κοινωνικά συμφέροντα, προσανατολισμένα σε κοινωνικούς στόχους. Αποκτούν το νόημα τους από την ιστορία της κατασκευής και της χρήσης τους, από τους τρόπους που χρησιμοποιούνται στο παρόν, από τις συνέπειες της χρήσης τους μέσα και έξω από τα μαθηματικά και από το πλέγμα των ιδεών του οποίου αποτελούν μέρος..

Άλλωστε, όπως έχει επιγραμματικά διατυπωθεί από τον Μέρτνες (Mehrtens,1994) και τα μαθηματικά, όπως κάθε άλλη επιστήμη, έχουν αναγκαστικά και πολιτικό χαρακτήρα. Το ίδιο και οι ιστοριογραφίες τους.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

- Bell, E.T. (1965/1993), Οι Μαθηματικοί, τόμος I (μτφ. Μαν. Μαγειρόπουλος) & τόμος II (μτφ. Νικ. Σταματάκης), Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο.
- Boyer, C. B. (1959),The History of the Calculus and its Conceptual Development, Dover New York.
- Collins, R., and Restivo, S. (1983) Robber barons and politicians in mathematics: a conflict model of science, *Canadian Journal of Sociology*, 8, 199-227.
- Dauben J. W. & Scriba, C. J. (eds.) (2002), *Writing the History of Mathematics: Its Historical Development*, International Commission on the History of Mathematics, Birkhäuser, Basel.
- Ernest, P. (1991), The Philosophy of Mathematics Education, Falmer Press, London.
- Ernest, P. (1998), Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics, SUNY Press, Albany, New York.
- Ευκλείδη «Στοιχεία», (2001), Τόμος 1, Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης, Αθήνα.

- Freudenthal, H. (1977), What is algebra and what has been its history? *Archive for History of Exact Sciences* 16, 189-200.
- Grattan-Guinness, I. (ed.) (1980), From the Calculus to Set Theory. 1630–1910, Duckworth, London.
- Grattan-Guinness, I. (1987), What was and what should be the calculus? Στο I. Grattan-Guinness (ed.), *History in mathematics education*, Belin, Paris, σελ. 116-135.
- Grattan-Guinness, I. (1996), Numbers, magnitudes, ratios and proportions in Euclid's *Elements* : how did he handle them?, *Historia mathematica*, 23, 355-375.
- Grattan-Guinness, I. (2004), History or heritage? A central question in the historiography of mathematics. Στο I. Grattan-Guinness (ed.) *History of the Mathematical Sciences*, Hindustan Book Agency, New Delhi.
- Hardy, G.H. (1993), Η Απολογία ενός Μαθηματικού, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο.
- Julliard, J. (1975), Η πολιτική. Στο Ζακ Λε Γκολφ, & Πιερ Νορά, Το έργο της ιστορίας, Εκδόσεις Ράππα, Αθήνα.
- Kuhn, T.S. (1981), Η Δομή των Επιστημονικών Επαναστάσεων, Εκδόσεις Σύγχρονα Θέματα, Θεσσαλονίκη.
- Lakatos, I. (1976/1996), Αποδείξεις και Ανασκευές, Τροχαλία, Αθήνα.
- Mancosu, P. (1989), The Metaphysics of the Calculus: A Foundational Debate in the Paris Academy of Sciences, 1700-1706, *Historia Mathematica* 16, 224-248.
- Mehrtens, H. (1994), Irresponsible Purity: The Political and Moral Structure of Mathematical Sciences in the National Socialist State. Στο M. Renneberg and M. Walker (eds.) *Science, Technology and National Socialism*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Mills, C. W. (1961) *The sociological imagination*, Grove, New York (ελληνική έκδοση, Η κοινωνιολογική φαντασία, Ολκός, Αθήνα, 1974).
- Μπαλτάς, Αριστ. (1988), Για την έννοια του ιστορικού χρόνου – Φυσική και «ιστορικός υλισμός», *Ο Πολίτης*, 94, 59-70.
- Nesselmann G. H. F. (1842), *Versuch einer Kritischen Geschichte der Algebra: Erster Theil: Die Algebra der Griechen*, G. Reimer, Berlin.

- Radford, L. (1997), On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26-33.
- Resnik, M. (1993), "A Naturalized Epistemology for a Platonist Mathematical Ontology" pp. Στο S. Restivo, J.P. Van Bendegem, and R. Fischer (eds.), *Math Worlds: Philosophical and Social Studies of Mathematics and Mathematics Education*, SUNY Press, Albany, NY, σελ. 39-60.
- Restivo, Sal (1985), *The Social Relations of Physics, Mysticism and Mathematics*, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands.
- Restivo, S. (1988), Modern science as a social problem, *Social Problems*, 35, 206-225.
- Restivo, S. (1992), *Mathematics in Society and History: Sociological Inquiries*, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands.
- Restivo, S. (1993), *The Social Life of Mathematics*. Στο Restivo, Sal, Van Bendegem, J.P. and Fischer, R, (Eds.), *Math Worlds - Philosophical and Social Studies of Mathematics and Mathematics Education*, Albany, State University of New York Press, 247 - 278.
- Schubring, G. (1981) The conception of pure mathematics as an instrument in the professionalization of mathematics. Στο H. Mehrtens, H. Bos and I. Schneider (eds.), *Social History of Nineteenth Century Mathematics*, Birkhauser, Boston, pp. 111-134.
- Σταμάτης Ευάγγελος. (1952), *Ευκλείδου Γεωμετρία : Στοιχεία*, Βιβλία 1, 2, 3, 4, Οργανισμός Εκδόσεως Σχολικών Βιβλίων, Αθήνα.
- Unguru, S. (1975), On the need to rewrite the history of Greek mathematics, *Archive for History of Exact Sciences*, 15, 67-114.
- van der Waerden, B. L. (1976), Defense of a 'Shocking' Point of View, *Archive for History of Exact Sciences*, 15, 199-210.
- Weil, A. (1978), Who betrayed Euclid?, *Archive for History of Exact Sciences*, 19, 91-93.
- Weil A. (1979), *The History of Mathematics: Why and How*. Στο A. Weil, *Collected Papers*, vol. 3, Springer-Verlag, New York, σελ. 434-442
- Χασάπης Δημήτρης, (2002), Η διαμεσολάβηση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών. Στο Δ. Χασάπης, (Επιμ.), *Η*

ιστορία των μαθηματικών ως μέσο διδασκαλίας των μαθηματικών στο Δημοτικό σχολείο και στο Γυμνάσιο, Πρακτικά 1^{ου} Δηήμερου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών, Α.Π.Θ., Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Θεσσαλονίκη, 55-66.

Χασάπης, Δ. (2005), Κοινωνικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης: Όψεις και ζητήματα. Στο Δ. Χασάπης, (Επιμ.), *Κοινωνικές & πολιτισμικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης, Πρακτικά 4^{ου} Δηήμερου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών, Α.Π.Θ., Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Θεσσαλονίκη, 9 – 23.*