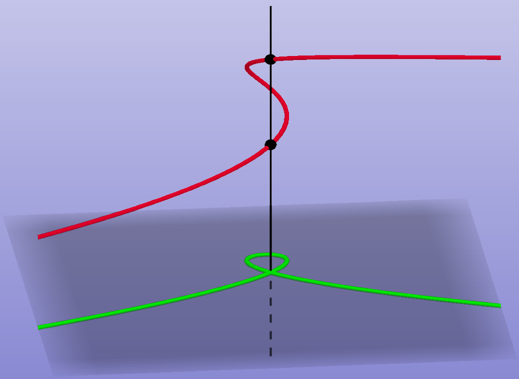
Théorie des Éclatements

Résolution des singularités d'une courbe plane

Cadre

Objectif

Il s'agit de régulariser une courbe algébrique en la plongeant dans un espace plus grand.



Éclatement de l'origine

On considère $H = \{(p,z) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \mid p \in z\}$
$= \{((x,y),(z_0 : z_1)) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \mid x\, z_1 = y\, z_0\}$.
On notera π la projection de H sur $\mathbb{C}^2$.

Définitions

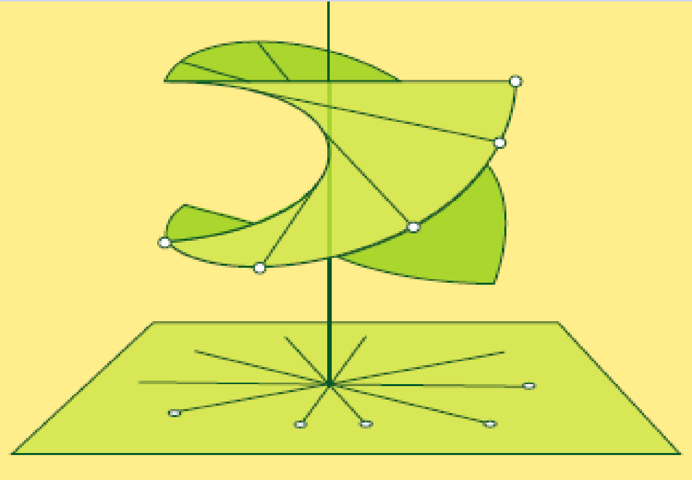
- H est l'éclaté de $\{0\}$.
- π est un éclatement de l'origine (*blow down*).
- π^{-1} transforme 0 en un $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (*blow up*).
- $E := \pi^{-1}(0) \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est appelé le diviseur exceptionnel de π.

Lemme

L'application π est un isomorphisme analytique de $H \backslash \pi^{-1}(0)$ sur $\mathbb{C}^2 \backslash \{0\}$.

Éclatement de l'origine

Couverture du livre « Basic Algebraic Geometry »



Transformée Totale, Transformée Stricte

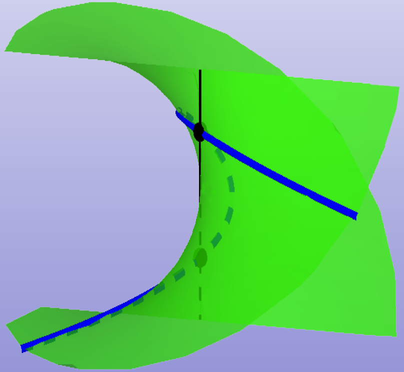
Soit f un germe de fonction holomorphe à deux variables avec $f(0) = 0$.

Le lieu des zéros de f est noté Γ et on pose $\hat{f} = f \circ \pi$.

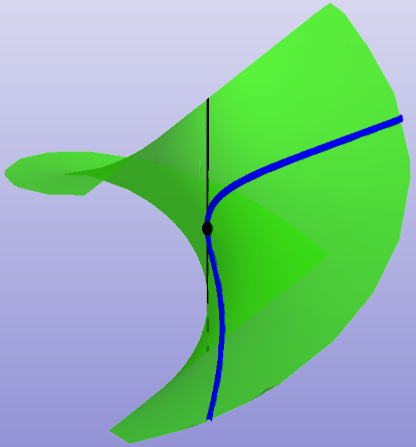
Définitions

- $\hat{f}^{-1}(0)$ est appelé la transformée totale de Γ.
  Elle est notée $\hat{\Gamma}$.
- L'adhérence de $\hat{f}^{-1}(0) \backslash \pi^{-1}(0)$ est appelé la transformée stricte de Γ. Elle est notée Γ'.

Transformée Totale, Transformée Stricte



Transformée Totale, Transformée Stricte



Résolution de Singularité

Composition d'éclatements

Une application $\pi : \Sigma \xmapsto{\pi_n} \Sigma_n \xmapsto{\pi_{n-1}} \ldots \xmapsto{\pi_1} \Sigma_1$ est une composition d'éclatements si les π_i sont des éclatements. On ne s'intéressera qu'aux compositions d'éclatements vérifiant :

(i) Σ_1 est un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^2$.

(ii) π_i éclate un ou plusieurs points du diviseur exceptionnel de π_{i-1}.

(iii) π_1 éclate uniquement l'origine.

Résolution de Singularité

Résolution de singularité à croisement normal

Une résolution de singularité à croisement normal est une composition d'éclatements telle que :

1. (i) Les branches de la transformée stricte sont lisses et deux à deux disjointes.
2. (ii) Le point de contact de la transformée stricte (de chaque branche) avec le diviseur exceptionnel est un point lisse du diviseur exceptionnel (c'est-à-dire un point où ne passe qu'une composante irréductible de ce diviseur exceptionnel).
3. (iii) Les branches de la transformée stricte sont transverses au diviseur exceptionnel.

Développement de Puiseux

Définition

Un développement de Puiseux (à l'origine) d'un germe de fonction holomorphe $f \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ est une série $\varphi \in \overline{\mathbb{C}\left\{X^{\frac{1}{n}}\right\}}$ convergente autour de 0 et telle que $f(X, \varphi(X)) = 0$.

Exemple

$f(X, Y) = Y^2 - X^3$ possède un développement de Puiseux : $\varphi(X) = X^{\frac{3}{2}}$

$f(X, Y) = Y^2 - X^3 - X^2$ possède deux développements de Puiseux : $\begin{cases} \varphi_1(X) = X + \frac{1}{2}X^2 - \dots \\ \varphi_2(X) = -X - \frac{1}{2}X^2 + \dots \end{cases}$

Paires Caractéristiques de Puiseux

Définition

Les paires caractéristiques de Puiseux $(n_1, m_1), \ldots, (n_r, m_r)$ du développement de Puiseux $\varphi(X) = \sum_{\kappa \in \mathbb{Q}} a_\kappa X^\kappa$ sont définies par :

- $\dfrac{n_1}{m_1} = \kappa_1 = min\left\{\kappa \in \mathbb{Q} \backslash \mathbb{N} \mid a_\kappa \neq 0\right\}$
- $\dfrac{n_i}{m_1 \ldots m_i} = \kappa_i = min\left\{\kappa \in \mathbb{Q} \mid a_\kappa \neq 0 \text{ et } \kappa \notin \frac{1}{m_1 \ldots m_{i-1}}\mathbb{N}\right\}$

Avec toujours les m_i et n_i premiers entre eux.

Exemples

$\varphi(X) = X^{\frac{3}{2}} + X^{\frac{7}{4}}$ $\quad (3, 2), (7, 2)$

$\varphi(X) = X^{\frac{3}{2}} + X^{\frac{5}{3}}$ $\quad (3, 2), (10, 3)$

Paires Caractéristiques de Puiseux

Propriété

Pour $i \in [\![2, r]\!]$, on a $n_{i-1} m_i < n_i$

Développement de Puiseux associé

Un ensemble de pairs vérifiant les propriétés au-dessus sont les paires de Puiseux de :

$$\begin{aligned}\varphi(X) &= X^{\frac{n_1}{m_1}} + X^{\frac{n_2}{m_1 m_2}} + \ldots + X^{\frac{n_r}{m_1 \cdots m_r}} \\ &= X^{\kappa_1} + X^{\kappa_2} + \ldots + X^{\kappa_r}\end{aligned}$$

Paires Caractéristiques de Zariski

Définition

Les paires caractéristiques de Zariski $(p_1, q_1), \ldots, (p_r, q_r)$ d'un développement de Puiseux sont définies par :

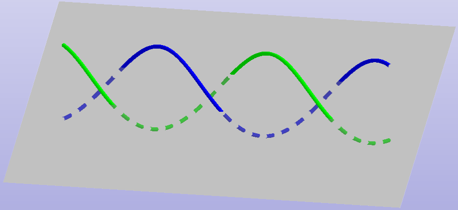
- $p_1 = n_1$
  $p_i = n_i - n_{i-1} m_i$
- $q_i = m_i$

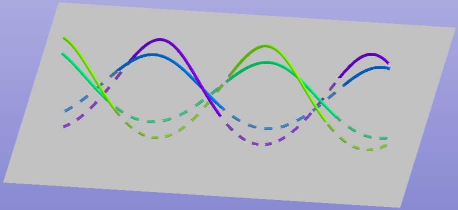
Examples

$\varphi(X) = X^{\frac{3}{2}} + X^{\frac{7}{4}}$	$\varphi(X) = X^{\frac{3}{2}} + X^{\frac{7}{3}}$	
$(3,2),(7,2)$	$(3,2),(14,3)$	Paires de Puiseux
$(3,2),(1,2)$	$(3,2),(5,3)$	Paires de Zariski

Interprétation Géométrique

$$|X| = \epsilon \text{ dans } \varphi_1(X) = X^{\frac{3}{2}} \text{ et dans } \varphi_2(X) = X^{\frac{3}{2}} + X^{\frac{7}{4}}$$





Approximation Lente d'un Rationnel

On note $\dfrac{p}{q} = h_0 + \cfrac{1}{h_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{h_m}}}$ l'écriture de $\dfrac{p}{q}$ en fraction continue.

Définition

L'approximation lente de $\frac{p}{q}$ est le $\ell(\frac{p}{q})$-uplet défini par :

- $a_k = k$ pour $1 \leqslant k \leqslant h_0$
- $a_k = h_0 + \frac{1}{k - h_0}$ pour $h_0 < k \leqslant h_0 + h_1$
- $a_k = h_0 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{k - (h_0 + h_1 + \ldots + h_{i-1})}}$

  pour $h_0 + \ldots + h_{i-1} < k \leqslant h_0 + \ldots + h_i$

Résolution d'une Singularité - 1 Branche - 1 Paire Caractéristique

Théorème

Soit $f \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ ayant une singularité à 1 branche à l'origine et dont la branche possède exactement 1 paire caractéristique de Zariski (p, q).

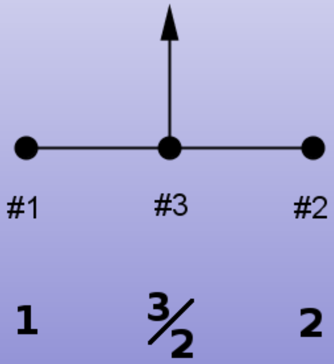
Alors il faut composer $\ell\left(\frac{p}{q}\right)$ projections d'éclatements pour obtenir une résolution de la singularité de f à l'origine.

Exemple

$Y = X^{\frac{3}{2}}$ est résolu par une composition de 3 éclatements $\pi_2 \circ \pi_1 \circ \pi_0$.

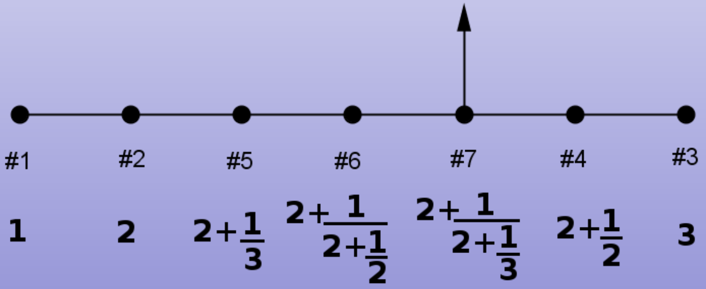
Exemples

Arbre de Résolution de $Y = X^{\frac{3}{2}}$



Exemples

Arbre de Résolution de $Y = X^{\frac{17}{7}}$



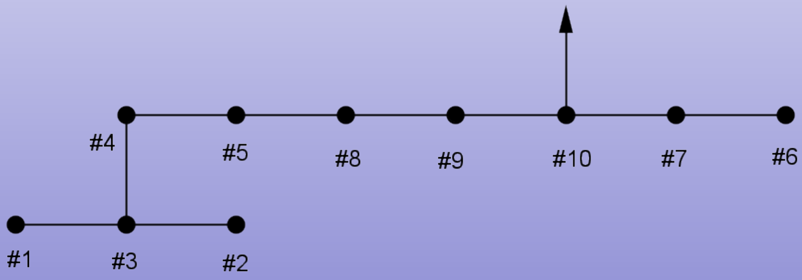
Résolution d'une Singularité - 1 Branche - Plusieurs Paires Caractéristiques

Théorème

Soit $f \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ ayant une singularité à 1 branche à l'origine et dont la branche a $(p_1, q_1), \ldots, (p_r, q_r)$ pour paires caractéristiques de Zariski.
Alors l'arbre de résolution de la singularité en 0 de f s'obtient à partir des arbres $A\left(\frac{p_i}{q_i}\right)$ en attachant le dernier $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de $A\left(\frac{p_i}{q_i}\right)$ à l'extrémité gauche de $A\left(\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}\right)$ pour $i \in [\![1, r-1]\!]$.

Exemple

Arbre de Résolution de $Y = X^{\frac{3}{2}} + X^{\frac{38}{14}} = X^{\frac{3}{2}}(1 + X^{\frac{17}{14}})$



Présentation du Problème

But

Lorsque le germe de fonction holomorphe possède plusieurs branches, il faut non seulement rendre chacune de ces branches lisse, mais en plus veiller à ce qu'elles ne se coupent plus dans l'espace éclaté.

Remarque

Si B_1 et B_2 sont deux branches transverses, alors elles ne se coupent plus après un seul éclatement.

Exemple

Les branches d'un polynôme homogène sont toujours transverses.

Exposant de Coïncidence

Définition

Soit $\varphi \in \overline{\mathbb{C}\left\{X^{\frac{1}{m}}\right\}}$ et $\varphi' \in \overline{\mathbb{C}\left\{X^{\frac{1}{m'}}\right\}}$ deux dévelopements de Puiseux correspondant à deux branches d'une courbe.
L'exposant de coïncidence est défini par :

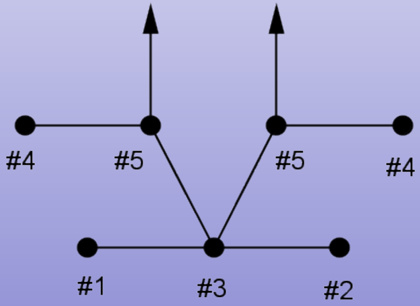
$$C(\varphi, \varphi') = \max_{\sigma, \sigma'} \left\{ \mathrm{val}(\sigma(\varphi) - \sigma'(\varphi')) \right\}$$

Exemple

$\varphi(X) = X^{\frac{5}{2}} + X^{\frac{27}{4}} + X^{10}$
$\varphi'(X) = X^{\frac{5}{2}} - X^{\frac{27}{4}} + X^{\frac{61}{6}}$
$C(\varphi, \varphi') = \mathrm{val}(X^{10} - X^{\frac{61}{6}}) = 10$

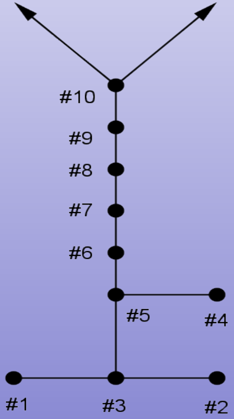
Exemples

$$\varphi(X) = X^{\frac{3}{2}} + X^{\frac{7}{4}}$$
$$\varphi'(X) = X^{\frac{3}{2}} + 2X^{\frac{7}{4}}$$



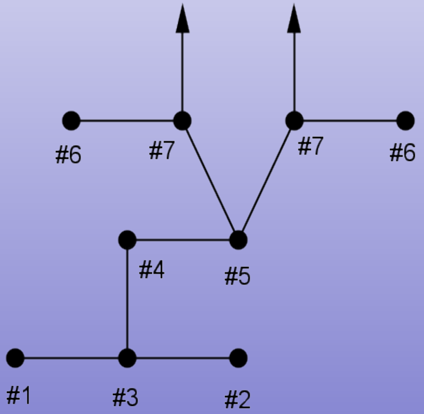
Exemples

$$\varphi(X) = X^{\frac{3}{2}} + X^{\frac{7}{4}}$$
$$\varphi'(X) = X^{\frac{3}{2}} + X^{\frac{7}{4}} + X^{3}$$



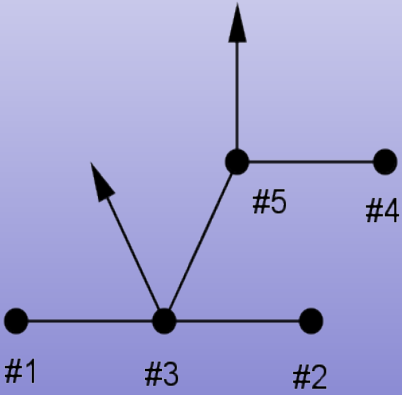
Exemples

$$\varphi(X) = X^{\frac{3}{2}} + X^{\frac{11}{4}}$$
$$\varphi'(X) = X^{\frac{3}{2}} + X^{\frac{5}{2}} + X^{\frac{11}{4}}$$



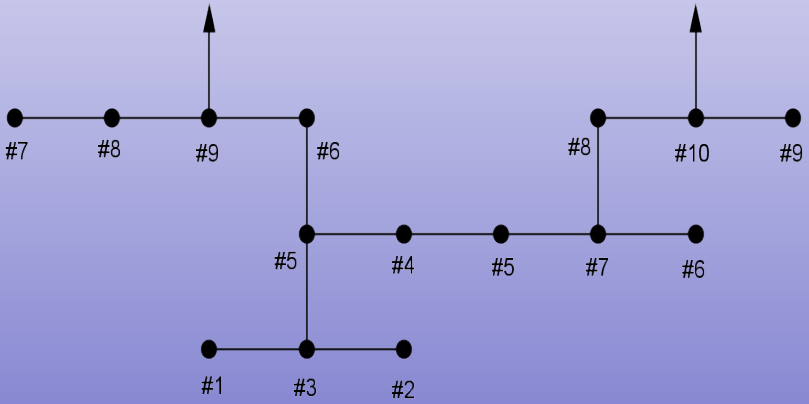
Exemples

$$\varphi(X) = X^{\frac{3}{2}} + X^{\frac{7}{4}}$$
$$\varphi'(X) = X^{\frac{3}{2}}$$



Exemples

$$\varphi(X) = X^{\frac{3}{2}} + X^{\frac{7}{4}} + X^{\frac{25}{12}}$$
$$\varphi'(X) = X^{\frac{3}{2}} + X^{\frac{11}{4}} + X^{\frac{25}{8}}$$



Références

- A. Chenciner. *Courbes Algébriques Planes*. Springer, 2008. Chapitre 8 - Séries de Puiseux Series et polygônes de Newton
- E. Brieskorn et H. Knörrer. *Plane Algebraic Curves*. Birkhäuser, 1986. Chapitre III - Très belles illustrations - Étude via les polygônes de Newton
- I.R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry*. T. 1. Springer, 2013. Chapitre II - Ne se limite pas aux courbes planes
- O. Zariski. *Algebraic Surfaces*. Springer-Verlag, 1935. Chapitre I - Paires caractéristiques de Zariski et approximation lente par les fractions continuées