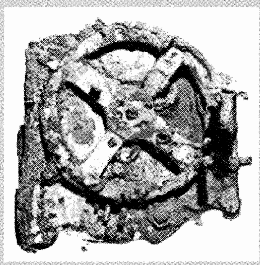

ΑΣΤΡΟΛΑΒΟΣ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΝΕΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ

Τεύχος 5 - 2006 - Τιμή Τεύχους 10 €

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Αστρολάβος, Τεύχος 5, 2006

Αλγεβρικές υπερσυνθετικές δομές που γεννήθηκαν από τη θεωρία των Γλωσσών και των Αυτομάτων

Χρήστος Γ. Μασούρος
ΤΕΙ Χαλκίδας, Γενικό Τμήμα Θετικών Επιστημών,
masouros@hol.gr

Περίληψη

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζονται οι αλγεβρικές δομές που προέκυψαν από τη μελέτη της θεωρίας των Γλωσσών και των Αυτομάτων με τη χρήση της υπερσυνθετικής Άλγεβρας και αναφέρονται ορισμένες από τις βασικότερες ιδιότητές τους. Οι κυριότερες από τις δομές αυτές είναι η ενισχυμένη συνδετική υπερομάδα, η συνδετική πολυσυμμετρική υπερομάδα, το συνδετικό υπερδακτυλιοειδές και το υπερμοντουλοειδές. Όπως καταδεικνύεται στο άρθρο, ο τύπος της υπερομάδας που εμφανίζεται στη θεωρία των γλωσσών και των αυτομάτων, είναι ίδιος με αυτόν που προέκυψε από τη μελέτη της Γεωμετρίας με την βοήθεια της υπερσυνθετικής Άλγεβρας.

1 Γλώσσες, Αυτόματα και υπερσυνθετικές δομές.

Σύμφωνα με το πρώτο αίτημα του Ευκλείδη [1]:

"ΗΙΤΗΣΘΩ ΑΠΟ ΠΑΝΤΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΕΠΙ ΠΑΝ ΣΗΜΕΙΟΝ ΕΥΘΕΙΑΝ ΓΡΑΜΜΗΝ ΑΓΑΓΕΙΝ"

Έτσι σε κάθε ζεύγος σημείων (α,β) απεικονίζεται το ευθύγραμμο τμήμα αβ. Αυτό το ευθύγραμμο τμήμα υπάρχει πάντα και αποτελείται από ένα σύνολο σημείων. Βεβαίως, στα *Στοιχεία* του ο Ευκλείδης πουθενά δεν αναφέρει από τι ακριβώς αποτελείται το ευθύγραμμο τμήμα, εκτός από την αναφορά που υπάρχει στον τρίτο όρο: *ΓΡΑΜΜΗΣ ΔΕ ΠΕΡΑΤΑ ΣΗΜΕΙΑ*. Ο λόγος που δεν περιλήφθηκε στα *Στοιχεία* κανένας ορισμός ο οποίος να λέει ότι η ευθεία αποτελείται από σημεία όπως αντίστοιχα έγινε στην αριθμητική για τον αριθμό, όπου άφοβα λέχθηκε ότι *ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΣΤΙΝ ΤΟ ΕΚ ΜΟΝΑΔΩΝ ΣΥΓΚΕΙΜΕΝΟΝ ΠΛΗΘΟΣ,* είναι ότι μια τέτοια παραδοχή θα άνοιγε διάπλατα τις πόρτες στους συλλογισμούς του Ζήνωνα του Ελεάτη ως προς τους οποίους οι αρχαίοι Έλληνες γεωμέτρες προσπάθησαν να λάβουν ενάντια θέση. Βεβαίως, ο Ευκλείδης, επιλέγει σημεία μέσα από την ευθεία χωρίς κανένα ενδοιασμό, έχοντας προηγουμένως κατοχυρώσει εμμέσως την ύπαρξή τους με τον τέταρτο όρο: *ΕΥΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΗ ΕΣΤΙΝ, ΗΤΙΣ ΕΞ ΙΣΟΥ ΤΟΙΣ ΕΦ' ΕΑΥΤΗΣ ΣΗΜΕΙΟΙΣ ΚΕΙΤΑΙ.* Αφήνοντας την περαιτέρω ανάλυση του θέματος αυτού για άρθρα πιο ειδικά επί του συγκεκριμένου αντικειμένου (πχ. βλ. [8]), επιστρέφουμε στην ιδέα από την οποία ξεκινήσαμε, δηλαδή την απεικόνιση ενός ζεύγους σημείων σε ένα σύνολο από σημεία. Εδώ κρύβεται η θεμελιακή ιδέα της *υπερπράξης* δύο στοιχείων, καθώς όταν έχουμε υπερπράξη μεταξύ δύο στοιχειών, το αποτέλεσμα που προκύπτει δεν είναι ένα μόνον στοιχείο, αλλά εν γένει ένα σύνολο από στοιχεία. Έτσι λοιπόν λέμε ότι ένα σύνολο H είναι εφοδιασμένο με μία υπερπράξη «*», αν η «*» είναι μια απεικόνιση του καρτεσιανού γινομένου $H\times H$ στο δυναμοσύνολο $P(H)$ του H. Οι αλγεβρικές δομές με υπερπράξη εισήχθησαν στα Μαθηματικά από τον Frederic Marty κατά την διάρκεια του 8^{ου} συνεδρίου των Σκανδιναβών Μαθηματικών που έγινε στη Στοκχόλμη το 1934 [5]. Στην ανακοίνωσή του στο συνέδριο αυτό ο F. Marty εισήγαγε την *υπερομάδα*, σχετίζοντας την άμεσα με την διδακτορική του διατριβή επί των μερομόρφων συναρτήσεων, την οποία εκπόνησε υπό την επίβλεψη του Paul Montel. Ο Frederic Marty ήταν ένας Γάλλος Μαθηματικός που γεννήθηκε το 1911 και σκοτώθηκε σε ηλικία 29 ετών, κατά τη διάρκεια του δευτέρου παγκοσμίου πολέμου, υπηρετώντας τη στρατιωτική του θητεία, όταν το αεροπλάνο του καταρρίφθηκε ενώ πετούσε πάνω από τη Βαλτική Θάλασσα. Η υπερομάδα λοιπόν είναι η αλγεβρική υπερσυνθετική δομή η οποία πληροί τα αξιώματα:

i. $(ab)c = a(bc)$ για κάθε $a,b,c \in H$ (προσεταιριστικό αξίωμα)

ii. $aH = Ha = H$ για κάθε $a \in H$ (αναπαραγωγικό αξίωμα)

Αποδεικνύεται ότι στην υπερομάδα το αποτέλεσμα της υπερπράξης είναι πάντα ένα μη κενό σύνολο [π.χ. βλ. 9]. Στην εργασία του [5] ο F. Marty όρισε επίσης δύο επαγόμενες υπερπράξεις, την εκ δεξιών και την εξ αριστερών διαίρεση οι οποίες προκύπτουν από την υπερπράξη της υπερομάδας. Αυτές ορίζονται αντιστοίχως ως εξής:

$$\frac{a}{|b} = \{x \in H \mid a \in xb\} \quad \text{and} \quad \frac{a}{b|} = \{x \in H \mid a \in bx\}$$

Από το αναπαραγωγικό αξίωμα προκύπτει ότι τα αποτελέσματα των δύο διαιρέσεων είναι πάντοτε μη κενά σύνολα [9]. Αλλά και το αντίστροφο είναι αληθές. Αποδεικνύεται δηλαδή ότι το αναπαραγωγικό αξίωμα είναι ισοδύναμο με το ότι τα αποτελέσματα των δύο επαγομένων υπερπράξεων είναι πάντοτε μη κενά σύνολα [9]. Είναι προφανές ότι, αν η υπερομάδα είναι αντιμεταθετική, τότε οι δύο επαγόμενες υπερπράξεις συμπίπτουν. Για λόγους απλοποίησης της γραφής, ο W. Prenowitz συμβόλισε την εκ δεξιών διαίρεση του a με το b με a/b και αργότερα ο J. Jantosciak χρησημοποίησε τον συμβολισμό b\a για να καταδείξει την εξ αριστερών διαίρεση του a με το b. Επίσης για τις δύο αυτές διαιρέσεις χρησιμοποιούνται αντίστοιχα και οι συμβολισμοί a:b και a..b. Ένα υποσύνολο S μιας υπερομάδας Η ονομάζεται *υποϋπερομάδα* αν για κάθε στοιχείο x της S ισχύει xS=Sx=S. Η υποϋπερομάδα S ονομάζεται *κλειστή* αν $x/y \subseteq S$ και $y\backslash x \subseteq S$ για κάθε x,y από το S. Αποδεικνύεται ότι η τομή δύο κλειστών υποϋπερομάδων είναι πάντοτε κλειστή υποϋπερομάδα ενώ η τομή δύο υποϋπερομάδων δεν είναι εν γένει υποϋπερομάδα.

Στο σημείο αυτό ας επιστρέψουμε για λίγο και πάλι στον Ευκλείδη και την Γεωμετρία για να τη συνδέσουμε με τα αξιώματα της υπερομάδας. Με το δεύτερο αίτημα: *«ΚΑΙ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗΝ ΕΥΘΕΙΑΝ ΚΑΤΑ ΤΟ ΣΥΝΕΧΕΣ ΕΠ' ΕΥΘΕΙΑΣ ΕΚΒΑΛΕΙΝ»* εξασφαλίζεται η δυνατότητα προέκτασης του ευθυγράμμου τμήματος και προς τις δύο κατευθύνσεις. Κατ' αυτόν τον τρόπο, υπάρχουν και είναι μη κενά, τόσο το σύνολο a/b, το οποίο αντιστοιχεί στην ημιευθεία που κείται επί της προεκτάσεως του ευθυγράμμου τμήματος ab προς το μέρος του a, με κορυφή το a, όσο και το σύνολο b/a, που αντιστοιχεί στην ημιευθεία η οποία έχει κορυφή το b και κείται επί της προεκτάσεως του ab προς το μέρος του b. Επομένως το αναπαραγωγικό αξίωμα της υπερομάδας πληρούται. Εξάλλου και το προσεταιριστικό αξίωμα επαληθεύεται, αν ληφθεί υπόψη η Κοινή Έννοια του Ευκλείδη *«ΤΑ ΤΩ ΑΥΤΩ ΙΣΑ ΚΑΙ ΑΛΛΗΛΟΙΣ ΕΣΤΙΝ ΙΣΑ»*. Συνεπώς το σύνολο των σημείων του επιπέδου, και γενικότερα, το σύνολο των σημείων ενός ν-διάστατου χώρου V επί ενός διατεταγμένου σώματος F γίνεται υπερομάδα με την υπέρπράξη :

$$ab = \{ka + mb \mid k,m \in F,\ k,m > 0,\ k+m=1\} \qquad (1)$$

Αυτή η υπέρομάδα καλείται *προσαρτημένη υπέρομάδα* του διανυσματικού χώρου. Διάφορες υπέρομάδες μπορούν να προσαρτηθούν σε ένα διανυσματικό χώρο [20]. Ο W. Prenowitz εφοδίασε τη δομή της υπερομάδας με ένα επί πλέον αξίωμα και έτσι δημιούργησε ένα κατάλληλο αλγεβρικό εργαλείο για τη μελέτη της γεωμετρίας. Πιο συγκεκριμένα ο W. Prenowitz εισήγαγε σε μια αντιμεταθετική υπερομάδα H το αξίωμα:

αν $a/b \cap c/d \neq \varnothing$ τότε $ad \cap bc \neq \varnothing$ για κάθε $a,b,c,d \in H$ (*αξίωμα χιασμού*)

και ονόμασε την νέα αυτή υπερομάδα *συνδετικό χώρο* [21] (ή *συνδετική υπερομάδα*). Αργότερα ο J. Jantosciak γενίκευσε το ανωτέρω αξίωμα σε μία τυχούσα υπερομάδα ως εξής:

αν $b\backslash a \cap c/d \neq \varnothing$ τότε $ad \cap bc \neq \varnothing$ για κάθε $a,b,c,d \in H$

και ονόμασε *υπερομάδα χιασμού* (transposition hypergroup) την υπερομάδα που πληροί αυτό το αξίωμα [2].

Ας έλθουμε τώρα στη θεωρία των Γλωσσών. Αν A είναι ένα αλφάβητο, τότε με A* συμβολίζεται το σύνολο των λέξεων οι οποίες ορίζονται από το A και με λ συμβολίζεται η κενή λέξη. Το σύνολο A* είναι ημιομάδα ως προς τη σύζευξη των λέξεων με ουδέτερο στοιχείο το λ, αφού ισχύει $\lambda\alpha=\alpha\lambda=\alpha$ για κάθε α από το A*. Εξάλλου στη θεωρία γλωσσών χρησιμοποιείται η έκφραση α+β, όπου α, β λέξεις υπεράνω του A, εννοώντας «ή το α ή το β». Με αφετηρία το γεγονός ότι το α+β είναι ουσιαστικά ένα δισύνολο, στο σύνολο των λέξεων εμφανίζεται η υπερπράξη $\alpha+\beta=\{\alpha, \beta\}$. Αποδεικνύεται ότι ως προς την υπερπράξη αυτή το A* είναι συνδετική υπερομάδα [11], η υπερομάδα δηλαδή που εμφανίσθηκε στην υπερσυνθετική Άλγεβρα με αφορμή την μελέτη της Γεωμετρίας. Σε συνδυασμό τώρα με το γεγονός ότι το A* είναι ημιομάδα ως προς τη σύζευξη των λέξεων και ότι η σύζευξη των λέξεων είναι επιμεριστική ως προς την υπερπράξη, παράγεται μια νέα υπερσυνθετική δομή, το υπερδακτυλοειδές και πιο συγκεκριμένα το συνδετικό υπερδακτυλιοειδές [11, 16, 17].

Ορισμός 1.1 Ένα μη κενό σύνολο Y εφοδιασμένο με μια πράξη «·» και μία υπερπράξη «+» καλείται *υπερδακτυλιοειδές* αν:

i) το (Y,+) είναι υπερομάδα

ii) το (Y,·) είναι ημιομάδα

iii) η πράξη είναι αμφίπλευρα επιμεριστική ως προς την υπερπράξη

Αν ειδικότερα η υπερομάδα (Υ,+) είναι συνδετική, τότε το υπερδακτυλιοειδές (Υ,+,·) καλείται *συνδετικό*.

Μια άλλη έννοια στη θεωρία γλωσσών είναι η μηδενική λέξη, η εισαγωγή της οποίας έγινε με αφορμή τη θεωρία των αυτομάτων. Αυτή συμβολίζεται με 0 και είναι αμφίπλευρα απορροφητική ως προς τη σύζευξη των λέξεων. Ορίζεται έτσι το κάλυμμα του A^* ήτοι η ένωση $A^*\cup\{0\}$. Επεκτείνοντας λοιπόν στο κάλυμμα του A^* την πράξη και την υπερπράξη του A^*, έχουμε

$$0\alpha = \alpha 0 = 0, \quad 0+\alpha = \alpha+0 = \{0, \alpha\} \quad \text{για κάθε } \alpha\in A^*$$

Με τις επεκτάσεις αυτές η δομή $(A^*\cup\{0\},+,\cdot)$ εξακολουθεί να είναι υπερδακτυλειοειδές, το οποίο όμως τώρα έχει και απορροφητικό στοιχείο. Η προσθετική δομή αυτού του υπερδακτυλιοειδούς εισάγει μια νέα υπερομάδα με πολλές και ενδιαφέρουσες ιδιότητες, την ενισχυμένη συνδετική υπερομάδα [14]

Ορισμός 1.2 *Ενισχυμένη συνδετική υπερομάδα* ονομάζεται μια συνδετική υπερομάδα (H, +) η οποία πληροί επιπλέον τα αξιώματα:

i) υπάρχει μοναδικό ουδέτερο στοιχείο, συμβολιζόμενο με 0 –το μηδεν της H– τέτοιο ώστε για κάθε $\chi\in H$ να ισχύει $\chi\in\chi+0$ και $0+0=0$

ii) για κάθε $\chi\in H\text{-}\{0\}$ υπάρχει ένα και μόνον στοιχείο $\chi'\in H\text{-}\{0\}$ –αντίθετο ή συμμετρικό του χ (ως προς το 0)– τέτοιο ώστε $0\in\chi+\chi'$.

Ας περάσουμε τώρα στη θεωρία των αυτομάτων. Αν $A=(A,S,s_o,\delta,F)$ είναι ένα ντετερμινιστικό αυτόματο, όπου A το αλφάβητο εισόδου, S το σύνολο των καταστάσεων, s_o η αρχική κατάσταση και F το σύνολο των τελικών καταστάσεων, τότε η συνάρτηση μετάβασης δ είναι μια απεικόνιση του $S\times A$ στο S. Αν όμως το A είναι μη ντετερμινιστικό τότε η δ είναι μια απεικόνιση του $S\times A$ στο P(S). Προκειμένου να διερευνηθεί αν το αυτόματο δέχεται μια λέξη του A, η συνάρτηση δ επεκτείνεται στην δ^* από το $S\times A^*$ στο S ή στο P(S) ανάλογα με το είδος του αυτόματου ως εξής (όπου λ η κενή λέξη)

$$\delta^*(s,\lambda) = s, \quad \text{για κάθε } s\in S$$

και $$\delta^*(s,\alpha\omega) = \delta^*(\delta(s,\alpha),\omega), \quad \text{για κάθε } s\in S, \alpha\in A, \omega\in A^*$$

αν το αυτόματο είναι ντετερμινιστικό, ενώ

$$\delta^*(s,\omega\alpha) = \bigcup_{q\in\delta^*(s,\omega)} \delta(q,\alpha), \quad \text{για κάθε } s\in S, \alpha\in A, \omega\in A^*$$

αν το αυτόματο είναι μη ντετερμινιστικό.

Με αφετηρία λοιπόν τα ανωτέρω και γενικεύοντας τις αντίστοιχες έννοιες της κλασικής θεωρίας των τελεστών ή των υπερτελεστών επί ενός συνόλου και ιδιαίτερα των τελεστών ή υπερτελεστών από δακτυλίους ή υπερδακτυλίους υπεράνω συνόλων προέκυψε ο ορισμός [12].

Ορισμός 1.3 Έστω Μ ένα τυχόν σύνολο και Υ ένα υπερδακτυλιοειδές. Το Υ αποτελεί ένα σύνολο *τελεστών* επί του Μ, αν υπάρχει μια εξωτερική πράξη από το $M \times Y$ στο Μ, η οποία να πληροί το αξίωμα:

$$(s\alpha)\beta = s(\alpha\beta) \qquad s \in M \text{ και } \alpha,\beta \in Y$$

Αν υπάρχει μια εξωτερική υπερπράξη από το $M \times Y$ στο $P(M)$ που πληροί το ανωτέρω αξίωμα τότε το Υ είναι ένα σύνολο *υπερτελεστών*. Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι το Υ δρα μέσα από μια πράξη ενώ στη δεύτερη μέσα από μια υπερπράξη.

Αν θεωρηθεί τώρα ότι το υπερδακτυλιοειδές των τελεστών δρα σε ένα σύνολο Μ εφοδιασμένο με τη δομή της υπερομάδας τότε, κατ' αντιστοιχία με τα όσα ισχύουν στη θεωρία των υπερσυνθετικών δομών, εισήχθη ο ορισμός:

Ορισμός 1.4 Αν το Μ είναι μια υπερομάδα και το Υ ένα υπερδακτυλιοειδές τελεστών επί του Μ τέτοιο ώστε:

i) $(s+t)\alpha = s\alpha + t\alpha$

ii) $s(\alpha+\beta) \subseteq s\alpha + s\beta$

iii) $(s\alpha)\beta = s(\alpha\beta)$

για κάθε $s,t \in M$ και $\alpha,\beta \in Y$

τότε το Μ ονομάζεται *(δεξιό) υπερμοντουλοειδές* υπεράνω του Υ. Αν το Υ είναι ένα πεδίο υπερτελεστών, τότε το Μ ονομάζεται *(δεξιό) σουπερμοντουλοειδές* υπεράνω του Υ.

Κατά τη μελέτη της θεωρίας των αυτομάτων με τη χρήση των υπερσυνθετικών δομών, το σύνολο των καταστάσεων του αυτομάτου εφοδιάσθηκε με διάφορες υπερπράξεις οι οποίες όρισαν αντίστοιχα υπερομάδες που ονομάσθηκαν *προσαρτημένες υπερομάδες* στο αυτόματο. Τέτοιες υπερομάδες είναι οι προσαρτημένες υπερομάδες τάξης του αυτομάτου, η προσαρτημένη υπερομάδα βαθμίδας του αυτομάτου, η προσαρτημένη υπερομάδα λειτουργίας του αυτομάτου κλπ. [11, 13]. Ειδικά η προσαρτημένη υπερμάδα βαθμίδας του αυτομάτου εισήγαγε μια νέα υπερομάδα, που ονομάσθηκε *συνδετική πολυσυμμετρική υπερομάδα*.

Ορισμός 1.5 *Συνδετική πολυσυμμετρική υπερομάδα* ονομάζεται μια συνδετική υπερομάδα (H, +) η οποία πληροί επιπλέον τα αξιώματα:

i) υπάρχει μοναδικό ουδέτερο στοιχείο, συμβολιζόμενο με 0 –το μηδεν της H– τέτοιο ώστε για κάθε $\chi \in H$ να ισχύει $\chi \in \chi+0$ και $0+0=0$

ii) για κάθε $\chi \in H-\{0\}$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi' \in H-\{0\}$ –αντίθετο ή συμμετρικό του χ (ως προς το 0)– τέτοιο ώστε $0 \in \chi+\chi'$.

Το σύνολο των αντιθέτων του στοιχείου χ συμβολίζεται με S(χ) και ονομάζεται συμμετρικό σύνολο του χ. Το S(0) αποτελείται μόνον από το 0.

Όλες οι υπερομάδες που προαναφέρθηκαν και προκύπτουν από τη θεωρία των γλωσσών και των αυτόματων είναι αντιμεταθετικές. Έτσι κατ' αντιστοιχία προς αυτές ορίσθηκε και μελετήθηκε η *ενισχυμένη υπερομάδα χιασμού* [3] και η *πολυσυμμετρική υπερομάδα χιασμού,* στις οποίες δεν ισχύει κατ' ανάγκην το αξίωμα της αντιμεταθετικότητας [10, 18]. Σημειώνεται ότι είναι σύνηθες να συμβολίζονται με προσθετική γραφή οι αντιμεταθετικές υπερπράξεις και με πολλαπλασιαστική γραφή οι υπερπράξεις που δεν είναι κατ' ανάγκην αντιμεταθετικές.

Μία ακόμα πολύ σημαντική υπερομάδα, που εμφανίζεται αρκετά συχνά στην άλγεβρα, είναι η κανονική υπερομάδα:

Ορισμός 1.6 *Κανονική υπερομάδα* ονομάζεται μια αντιμεταθετική υπερομάδα (H, +) η οποία πληροί επιπλέον τα αξιώματα:

i) υπάρχει ουδέτερο στοιχείο, συμβολιζόμενο με 0 –το μηδεν της H– τέτοιο ώστε για κάθε $\chi \in H$ να ισχύει $\chi=\chi+0$

ii) για κάθε $\chi \in H$ υπάρχει ένα και μόνον ένα $\chi' \in H$ τέτοιο ώστε $0 \in \chi+\chi'$. Το χ' το συμβολίζουμε $-\chi$ και το καλούμε αντίθετο του χ.

iii) αν $\omega \in \chi+\psi$, τότε $\chi \in \omega-\psi$ και $\psi \in \omega-\chi$ (αξίωμα της *αναστρεψιμότητας*)

Η κανονική υπερομάδα εμφανίσθηκε το 1956 ως το προσθετικό μέρος του υπερσώματος, μιας υπερσυνθετικής δομής που εισήγαγε ο M. Krasner προκειμένου να ορίσει μια συγκεκριμένη προσέγγιση ενός πλήρους διατιμημένου σώματος από μια ακολουθία διατιμημένων σωμάτων [4]. Η ονομασία της όμως και η σε βάθος μελέτη της οφείλεται στον Ι. Μήττα (π.χ. βλ [19]). Στη συνέχεια ορίσθηκε και μελετήθηκε η *σχεδόν κανονική υπερομάδα*, η οποία πληροί αντίστοιχα προς την κανονική αξιώματα χωρίς να είναι κατ' ανάγκην αντιμεταθετική (π.χ. βλ [6]).

Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζονται στοιχεία από τη μελέτη εκείνων των υπερομάδων που εισήχθησαν με αφορμή την προσέγγιση της θεωρίας Γλωσσών και Αυτομάτων με εργαλεία της υπερσυνθετικής Άγεβρας.

2 Οι ενισχυμένες συνδετικές υπερομάδες και οι ενισχυμένες υπερομάδες χιασμού.

Η βασική μελέτη της ενισχυμένης συνδετικής υπερομάδας και αντίστοιχα της ενισχυμένης υπερομάδας χιασμού, οι οποίες είναι υπερομάδες εφοδιασμένες με ουδέτερο στοιχείο, γίνεται στα άρθρα [3] και [14].

Γενικότερα, στη θεωρία των υπερομάδων, ένα στοιχείο e καλείται *δεξιό ουδέτερο*, αν για κάθε στοιχείο x της υπερομάδας ισχύει $x \in xe$. Αντίστοιχα ορίζεται το *αριστερό ουδέτερο*, ενώ αν το e είναι εκ δεξιών και εξ αριστερών ουδέτερο τότε ονομάζεται *αμφίπλευρο ουδέτερο* ή απλά *ουδέτερο*. Το e καλείται *βαθμωτό ουδέτερο* αν $x=xe=ex$.

Για τις ενισχυμένες υπερομάδες χιασμού ισχύει η Πρόταση:

Πρόταση 2.1 *Έστω (H, ·) μια ενισχυμένη υπερομάδα χιασμού με ουδέτερο στοιχείο το e. Τότε για κάθε* $x \in H$ *ισχύει* $xe=ex \subseteq \{e,x\}$

Αν ένα ουδέτερο στοιχείο έχει την ιδιότητα που αναφέρεται στην παραπάνω Πρόταση τότε ονομάζεται *ισχυρό ουδέτερο*. Η ανωτέρω Πρόταση οδηγεί άμεσα στο συμπέρασμα ότι η H διαμερίζεται στα ακόλουθα δύο σύνολα:

$A=\{x \in H \mid ex=xe=\{e,x\}\}$ και $C=\{x \in H-\{e\} \mid ex=xe=x\}$

Τα στοιχεία του συνόλου C ονομάζονται *κανονικά* ενώ του συνόλου A *ελκτικά*, καθώς «έλκουν» το ουδέτερο στοιχείο στο αποτέλεσμα της υπερπράξης τους με αυτό. Στις Προτάσεις που ακολουθούν, παρατίθενται ορισμένες από τις πιο βασικές ιδιότητες των κανονικών και των ελκτικών στοιχείων. Οι αποδείξεις των Προτάσεων αυτών περιέχονται στα άρθρα [3] και [14]. Έστω λοιπόν (H, ·) μια ενισχυμένη υπερομάδα χιασμού με ουδέτερο στοιχείο το e. Τότε

Πρόταση 2.2 *Αν x στοιχείο της H διάφορο του e, τότε* $x/e=e\backslash x=x$

Πρόταση 2.3 $A=e/e=e\backslash e$

Πρόταση 2.4 *Αν το x είναι ελκτικό στοιχείο, τότε το* x^{-1} *είναι επίσης ελκτικό.*

Πόρισμα 2.1 *Αν το c είναι κανονικό στοιχείο, τότε το* c^{-1} *είναι επίσης κανονικό.*

Πρόταση 2.5 *Αν το x είναι ελκτικό στοιχείο, και το c είναι κανονικό, τότε* $xc=cx=c$.

Πρόταση 2.6 *Αν τα x, y είναι ελκτικά στοιχεία, τότε* $\{x,y\}\subseteq xy$

Πόρισμα 2.2 *Αν τα x, y είναι ελκτικά στοιχεία, τότε* $x\in x/y$ *και* $x\in y\backslash x$.

Πόρισμα 2.3 *Αν το x είναι ελκτικό στοιχείο, τότε* $A=x/x=x\backslash x$.

Πόρισμα 2.4 *Αν τα x, y είναι ελκτικά στοιχεία, τότε* $x/y\subseteq A$ *και* $y\backslash x\subseteq A$.

Πρόταση 2.7 *Αν το c είναι κανονικό στοιχείο, τότε* $A\subseteq cc^{-1}$

Πρόταση 2.8 *Το αποτέλεσμα της υπερπράξης δύο ελκτικών στοιχείων αποτελείται από ελκτικά στοιχεία, και το αποτέλεσμα της υπερπράξης δύο κανονικών στοιχείων, τα οποία δεν είναι συμμετρικά μεταξύ τους, αποτελείται από κανονικά στοιχεία.*

Πρόταση 2.9 *Το A αποτελεί την ελάχιστη, υπό την έννοια του εγκλεισμού, κλειστή υποϋπερομάδα της H.*

Ορισμένα Παραδείγματα τέτοιων υπερομάδων είναι τα ακόλουθα:

Παράδειγμα 2.1 Έστω G μια οποιαδήποτε ομάδα και έστω «·» μια υπερπράξη ορισμένη ως εξής:

$$\alpha\cdot\beta=\{\alpha\beta,\alpha,\beta\} \text{ για κάθε } \alpha,\beta\in G$$

Τότε η (G,·) είναι ενισχυμένη υπέρομάδα χιασμού της οποίας μάλιστα όλα τα στοιχεία είναι ελκτικά. Αν η G είναι αβελιανή τότε η (G,·) είναι ενισχυμένη συνδετική υπέρομάδα.

Παράδειγμα 2.2 Έστω H ένα πυκνό ολικά διατεταγμένο σύνολο, και συμμετρικό αναφορικά ως προς ένα κέντρο 0∈H. Εισάγουμε σε αυτό μια υπερπράξη «+» ορισμένη ως εξής:

$x+y = \{x, y\}$ αν $y \neq x$

$x+(-x) = [0, |x|] \cup \{-|x|\}$

Τότε η δομή (H,+) είναι μια ενισχυμένη συνδετική υπερομάδα της οποίας όλα τα στοιχεία είναι ελκτικά. Στην υπερομάδα αυτή παρατηρούμε ότι

$x-x = [0, |x|] \cup \{-|x|\}$

ενώ $-(x-x)=-([0, |x|] \cup \{-|x|\})=[-|x|,0]\cup\{|x|\}$

Συνεπώς $x-x\neq-(x-x)$. Άρα στις ενισχυμένες συνδετικές υπερομάδες γενικά δεν ισχύει η ισότητα $x-x=-(x-x)$. Σχετικά ισχύει η Πρόταση

Πρόταση 2.10 *Αν x, y στοιχεία μιας ενισχυμένης υπερομάδας χιασμού με* $x\neq y^{-1}$ *τότε*

$$(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}$$

Πρόταση 2.11 *Αν x, y στοιχεία μιας ενισχυμένης υπερομάδας χιασμού τότε*

$$(x/y)^{-1}\cup y = y/x\cup x^{-1} \quad \text{και} \quad (y\backslash x)^{-1}\cup y = x\backslash y\cup x^{-1}$$

Κατασκευή. Έστω (C,∗) μια σχεδόν κανονική υπερομάδα και (A,•) μια ενισχυμένη υπερομάδα χιασμού, όλα τα στοιχεία της οποίας είναι ελκτικά. Έστω επίσης ότι οι δύο αυτές υπερομάδες έχουν κοινό ουδέτερο στοιχείο, το οποίο συμβολίζεται με e. Στο σύνολο $H=C\cup A$ εισάγεται μια νέα υπερπράξη ως ακολούθως:

$$xy = \begin{cases} x\bullet y & \text{αν } (x,y) \in A^2 \\ x*y & \text{αν } (x,y) \in C^2 \text{ και } y\neq x^{-1} \\ (x*y)\cup A & \text{αν } (x,y) \in C^2 \text{ και } y=x^{-1} \\ y & \text{αν } x \in A \text{ και } y\in C \end{cases}$$

Τότε αποδεικνύεται ότι η H είναι μια ενισχυμένη υπερομάδα χιασμού.

Θεώρημα. *Κάθε ενισχυμένη υπερομάδα χιασμού μπορεί να προκύψει με την ανωτέρω κατασκευή.*

Το παραπάνω «δομικό» θεώρημα μας επέτρεψε να αποκτήσουμε μια αρκετά καθαρή εικόνα για τις υπερομάδες αυτές. Η μελέτη των δομών αυτών έχει επεκταθεί και σε άλλα θέματα, όπως στις υποϋπερομάδες τους και τα σύμπλοκα που αυτές ορίζουν [15], στους ομομορφισμοί τους [7] κλπ. Φυσικά, υπάρχουν και πολλά ανοικτά θέματα για περαιτέρω έρευνα επί των συγκεκριμένων δομών.

3 Οι πολυσυμμετρικές υπερομάδες χιασμού και οι συνδετικές πολυσυμμετρικές υπερομάδες.

Όπως αναφέρθηκε και στην πρώτη παράγραφο, οι υπερμάδες αυτές προέκυψαν ως προσαρτημένες υπερμάδες ενός αυτομάτου. Έχει αποδειχθεί μάλιστα ότι όταν η προσαρτημένη υπερομάδα του αυτομάτου μετατραπεί από συνδετική πολυσυμμετρική, σε ενισχυμένη συνδετική, τότε το αντίστοιχο αυτόματο μετατρέπεται στο ελάχιστο αυτόματο που δέχεται την ίδια γλώσσα με το αρχικό. Ας ξεκινήσουμε με ένα Παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.1 Έστω K ένα σώμα και G μια υποομάδα της πολλαπλασιαστικής του ομάδας. Στο K ορίζουμε μια υπερπράξη ως ακολούθως:

$$x \dagger y = \{ xp+yq \mid p, q \in G \}$$

Τότε η (K, †) είναι μία συνδετική πολυσυμμετρική υπερμάδα, η οποία έχει το 0 του K ως το ουδέτερο στοιχείο της. Τα συμμετρικά στοιχεία ενός στοιχείου x του K είναι τα στοιχεία του συνόλου $S(x) = \{-xp \mid p \in G\}$.

Οι υπερομάδες αυτές έχουν ενδιαφέρουσες ιδιότητες και μια πρώτη μελέτη τους γίνεται στο [18]. Από εκεί αντλούμε το υλικό που ακολουθεί. Έστω λοιπόν (H,·) μια πολυσυμμετρική υπέρομάδα χιασμού, με ουδέτερο στοιχείο e, τότε

Πρόταση 3.1 *Για κάθε στοιχείο x της H ισχύει:* $ex \subseteq \{e\} \cup S(S(x))$.

Πρόταση 3.2 *Αν το e είναι ισχυρό ουδέτερο, τότε είναι μοναδικό.*

Πρόταση 3.3 *Αν x είναι ένα ελκτικό στοιχείο της H, τότε το S(x) αποτελείται από ελκτικά στοιχεία.*

Πόρισμα 3.1 *Αν x είναι ένα μη ελκτικό στοιχείο της H, τότε το S(x) αποτελείται από μη ελκτικά στοιχεία.*

Πρόταση 3.4 *Έστω* $x \neq e$, *τότε* $S(x) \cup \{e\} = x \backslash e \cap e/x$, *αν το x είναι ελκτικό στοιχείο και* $S(x) = x \backslash e \cap e/x$, *αν το x είναι μη ελκτικό.*

Πρόταση 3.5 $x \in x/e = e\backslash x$.

Πρόταση 3.6 $A = e/e = e\backslash e$.

Πρόταση 3.7 *Αν το x είναι ένα ελκτικό στοιχείο, τότε όλα τα στοιχεία του ex είναι ελκτικά. Επίσης αν το x είναι ένα μη ελκτικό στοιχείο, τότε το ex αποτελείται από μη ελκτικά στοιχεία.*

Πρόταση 3.8 *Αν το x είναι ένα ελκτικό στοιχείο και το y είναι ένα μη ελκτικό στοιχείο, τότε τα xy και yx αποτελούνται από μη ελκτικά στοιχεία.*

Πρόταση 3.9 *Το σύνολο των ελκτικών στοιχείων μιας πολυσυμμετρικής υπέρομάδας χιασμού Η, αποτελεί την ελάχιστη, υπό την έννοια του εγκλεισμού, κλειστή υποϋπερομάδα της Η.*

Όταν μια πολυσυμμετρική υπερομάδα χιασμού, έχει ισχυρό ουδέτερο στοιχείο, τότε εμφανίζει πολλές και ενδιαφέρουσες ιδιότητες, οι οποίες μελετώνται στο άρθρο [10]. Βέβαια και οι υπερομάδες αυτές έχουν δημιουργήσει ευρύ πεδίο για περαιτέρω έρευνα.

Βιβλιογραφία

[1] Ευκλειδης. Στοιχεία.

[2] Jantosciak, J. (1997). Transposition hypergroups, Noncommutative Join Spaces. Journal of Algebra, 187, pp. 97-119.

[3] Jantosciak, J., Massouros, C.G. (2003). Strong Identities and fortification in Transposition hypergroups. Journal of Discrete Mathematical Sciences & Cryptography, 6 (2-3), pp. 169-193.

[4] Krasner, M. (1983). A class of hyperrings and hyperfields. Internat. J. Math. and Math. Sci. 6 (2), pp. 307-312.

[5] Marty F., (1934). Sur un generalisation de la notion de groupe. Huitieme Congres des mathematiciens Scand., pp. 45-49, Stockholm.

[6] Massouros, C.G. (1990). Quasicanonical Hypergroups. Proceedings of the 4th Internat. Cong. on Algebraic Hyperstructures and Applications, pp. 129-136, World Scientific.

[7] Massouros, C.G. (1994). Normal homomorphisms of Fortified Join Hypergroups. Proceedings of the 5th Internat. Cong. on Algebraic Hyperstructures and Applications, pp. 133-142, Hadronic Press.

[8] Μασούρος, Χ.Γ. (1994). Η ευθεία: Η αρχαία θεώρηση και μία νέα άποψη. Πρακτικά Επιστημονικού Συνεδρίου με θέμα «Η έννοια της Κατασκευής στις Επιστήμες του Ανθρώπου», pp. 419-421.

[9] Massouros, C.G. (1996). Hypergroups and Geometry. Mem. Academia Romana, Mathematics, special issue, Ser. IV, Tom. XIX, pp. 185-191.

[10] Massouros C.G., Massouros G.G. (2005) Transposition Polysymmetrical Hypergroups with strong identity. Proceedings of the 9th Internat. Cong. On Algebraic Hyperstructures and Applications.

[11] Massouros, G.G., Mittas, J. (1990). Languages-Automata and hypercompositional structures. Proceedings of the 4th Internat. Cong. on Algebraic Hyperstructures and Applications, pp. 137-147, World Scientific.
[12] Massouros, G.G. (1994). Automata and Hypermoduloids Proceedings of the 5th Internat. Cong. on Algebraic Hyperstructures and Applications, pp. 251-266, Hadronic Press.
[13] Massouros, G.G. (1994). An Automaton during its operation. Proceedings of the 5th Internat. Cong. on Algebraic Hyperstructures and Applications, pp. 267-276, Hadronic Press.
[14] Massouros, G.G., Massouros, C.G., Mittas, J.D. (1996). Fortified Join Hypergroups. Annales Matematiques Blaise Pascal, 3 (2), pp. 155-169.
[15] Massouros, G.G. (1997). The subhypergroups of the Fortified Join Hypergroup. Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2, pp.51-63.
[16] Massouros G.G. (1998). The Hyperringoid. Multiple Valued Logic, 3, pp. 217-234.
[17] Massouros, G.G., Massouros, C.G. (1999). Homomorphic relations on Hyperringoids and Join Hyperrings. Ratio Matematica, 13, pp. 61-70.
[18] Massouros G.G., Zafiropoulos F.A., Massouros C.G. (2002) Transposition Polysymmetrical Hypergroups. Proceedings of the 8th Internat. Cong. On Algebraic Hyperstructures and Applications, pp. 191-202, Spanidis Press.
[19] Mittas, J. (1972). Hypergroupes canoniques. Mathematica Balkanica, 2, pp. 165-179.
[20] Mittas, J., Massouros, C.G. (1989). Hypergroups defined from a linear space. Bull. Greek Math. Soc., 30, pp. 64-78.
[21] Prenowitz, W., (1961) A Contemporary Approach to Classical Geometry. Amer. Math. Month. 68 (1), part II, pp. 1-67.
[22] Prenowitz, W., Jantosciak, J. (1972) Geometries and Join Spaces. J. Reine Angew. Math. 257, pp. 100-128.
[23] Prenowitz, W., Jantosciak, J. (1979) Join Geometries. A Theory of convex Sets and Linear Geometry. Springer - Verlag.