

ΧΡΗΣΤΟΣ Γ. ΜΑΣΟΥΡΟΣ
ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ Γ. ΤΣΙΤΟΥΡΑΣ

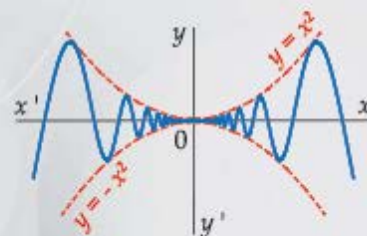
ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

3η Έκδοση

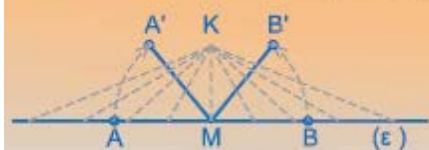
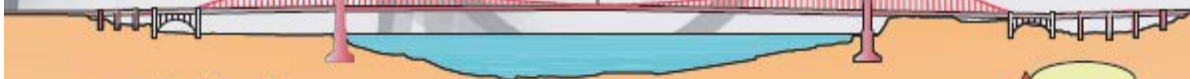
$$\int f(x) dx$$

$$\int_a^{\beta} f(x) dx$$

$$\frac{df(x)}{dx}$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$



$$f(x) = 0,01 x^2$$



ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΤΣΟΤΡΑΣ



© Copyright 2016, Χρήστος Μασούρος, Χαράλαμπος Τσίτουρας,
Εκδόσεις ΤΣΟΤΡΑΣ

ISBN 978-618-5066-51-2

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση, η αναπαραγωγή, ολική, μερική ή περιληπτική, ή η απόδοση κατά παράφραση ή διασκευή του περιεχομένου του βιβλίου με οποιονδήποτε τρόπο, μηχανικό, ηλεκτρονικό, φωτοτυπικό, ηχογράφηση ή άλλο, χωρίς προηγούμενη γραπτή άδεια του συγγραφέα ή του εκδότη.

Νόμος 2121/1993 και κανόνες του Διεθνούς Δικαίου, που ισχύουν στην Ελλάδα.



ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΤΣΟΤΡΑΣ

Σμύρνης 14 Ζωγράφου, 1572 - Τηλ./Fax : 210 7470789 - Κιν : 6944 460 280
E-mail : info@ekdoseis-tsotras.gr - Web : www.ekdoseis-tsotras.gr

Αφιερώνεται
στις οικογένειές μας

Πρόλογος της τρίτης Έκδοσης

Καθώς οι δύο προηγούμενες εκδόσεις και επανεκδόσεις των «Γενικών Μαθηματικών» εξαντλήθηκαν, αποφασίσαμε να μην προχωρήσουμε στην εκ νέου ανατύπωση της δεύτερης έκδοσης, αλλά να περάσουμε στη δημιουργία μιας καινούργιας. Η τρίτη έκδοση των «Γενικών Μαθηματικών», που κρατάτε στα χέρια σας, διατηρεί όλα εκείνα τα στοιχεία και χαρακτηριστικά που έκαναν το βιβλίο μας αγαπητό στους αναγνώστες του. Η εξέλιξη και η ιστορική διαδρομή των Μαθηματικών της περιοχής που πραγματεύεται, περιγράφεται με συνέπεια δίπλα στα Θεωρήματα, τις Προτάσεις, τις Εφαρμογές, τα Παραδείγματα και τις Ασκήσεις. Έτσι οι αναγνώστες μας μπορούν να αντιληφθούν ότι η ανάπτυξη της επιστήμης των Μαθηματικών είναι το αποτέλεσμα μιας μακράιωνης διαδικασίας, συχνά επίπονης, σίγουρα όμως συναρπαστικής, με τις όμορφες και τις άσχημες στιγμές της.

Όλα τα κεφάλαια της τρίτης έκδοσης εμπλουτίστηκαν με πολλά Παραδείγματα και Ασκήσεις.

Επιπλέον δώσαμε ιδιαίτερη βαρύτητα στην πληρέστερη και εκτενέστερη ανάπτυξη των ευρύτερων εφαρμογών του Απειροστικού Λογισμού σε άλλες επιστήμες. Έτσι αναπτύξαμε σε νέα ξεχωριστά κεφάλαια τις εφαρμογές του Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού στις Φυσικές και Οικονομικές Επιστήμες. Τέλος δύο από τα καινούργια κεφάλαια του βιβλίου αφιερώθηκαν στην παρουσίαση θεμάτων της Γραμμικής Άλγεβρας.

Θεωρούμε ότι διαμορφώσαμε ένα σύγχρονο σύγγραμμα Μαθηματικών, και περιμένουμε από τους αναγνώστες να του αφιερώσουν τον απαραίτητο χρόνο με προσοχή, επιμέλεια και συγκέντρωση, διότι *«Μή είναι βασιλικήν άτραπὸν ἐπὶ γεωμετρίαν»*, κατά την ιστορική απάντηση του Ευκλείδη στον Πτολεμαίο Α' όταν αυτός του ζήτησε έναν πιο εύκολο τρόπο από τα *Στοιχεία* του για να μάθει γεωμετρία.

Οι συγγραφείς

Χρήστος Γ. Μασούρος

Χαράλαμπος Γ. Τσίτουρας

Πρόλογος της πρώτης Έκδοσης

Γράφοντας το βιβλίο αυτό προσπάθειά μας ήταν να παρουσιάσουμε με απλότητα και ενάργεια, αλλά ταυτόχρονα και με όλη την απαιτούμενη αυστηρότητα, εκείνα τα κεφάλαια των Μαθηματικών που έχουν γίνει πλέον κτήμα της μαθηματικοποίησης άλλων επιστημών και εργαλείο για την εξέλιξή τους. Δεν είναι γνωστό αν η περιρρέουσα πραγματικότητα που αντιλαμβάνεται ο νους του ανθρώπου είναι μαθηματικά περιγράψιμη. Είναι όμως δεδομένο ότι ορισμένες από τις Επιστήμες που αναπτύχθηκαν για να την κατανοήσουν εξελίσσονται ταχύτατα καθώς, ενσωματώνοντας και χρησιμοποιώντας τα πανίσχυρα εργαλεία που κατασκεύασαν τα Μαθηματικά, κατάφεραν να εκμεταλλευθούν τις έτοιμες απαντήσεις που η βαθιά θεωρητική Μαθηματική έρευνα είχε ήδη δώσει πολύ πριν αυτές διαμορφώσουν ή διατυπώσουν τα σχετικά ερωτήματα. Έτσι οι φυσικές και οι τεχνολογικές επιστήμες έχουν πλήρως μαθηματικοποιηθεί, οι οικονομικές επιστήμες φιλοδοξούν να κατακτήσουν το αντίστοιχο, ενώ πολλές άλλες οραματίζονται να επιτύχουν κάτι ανάλογο.

Ένα βιβλίο υπό τον τίτλο «ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ», θα μπορούσε να περιέχει διάφορα κεφάλαια της Μαθηματικής Επιστήμης, ανάλογα την εποχή που γράφθηκε και τους αναγνώστες στους οποίους απευθύνεται. Το βιβλίο αυτό πραγματεύεται θεμελιώδη συμπεράσματα της Μαθηματικής επιστήμης που έχουν σήμερα ευρύτατη εφαρμογή σε άλλα πεδία της επιστημονικής γνώσης.

Πιστεύουμε ότι παρουσιάζουμε ένα χρήσιμο σύγγραμμα για όλους τους φοιτητές που σπουδάζουν επιστήμες που χρησιμοποιούν τα Μαθηματικά και οι οποίοι επιθυμούν να κατανοήσουν τον μαθηματικό φορμαλισμό, προκειμένου να αντιληφθούν τη δύναμη που αυτός παρέχει στην πρόοδο της επιστήμης τους.

Οι συγγραφείς

Χρήστος Γ. Μασούρος

Χαράλαμπος Γ. Τσίτουρας

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

I Τα Σύνολα, οι Συναρτήσεις και οι Πραγματικοί Αριθμοί

1. Ορισμός του Συνόλου.....	1
2. Καθορισμός Συνόλου, Στοιχεία του Συνόλου.....	2
3. Γραφική παράσταση Συνόλου	5
4. Υποσύνολα Συνόλου. Ίσα Σύνολα.....	6
➤ Ιδιότητες του εγκλεισμού και της ισότητας	8
5. Πράξεις επί των Συνόλων	10
➤ Ιδιότητες της ένωσης.....	11
➤ Ιδιότητες της τομής	12
➤ Ιδιότητες της συμμετρικής διαφοράς	14
6. Τύποι (ή Νόμοι) του De Morgan.....	18
7. Καρτεσιανό Γινόμενο	18
➤ Ιδιότητες του καρτεσιανού γινομένου	20
8. Γραφική παράσταση καρτεσιανού Γινομένου	20
➤ α. πίνακας διπλής εισόδου.....	20
➤ β. καρτεσιανό διάγραμμα.....	20
➤ γ. Δενδροειδές διάγραμμα.....	22
9. Η Απεικόνιση	25
10. Ορισμός της απεικόνισης.....	25
11. Μια πρώτη διάκριση των απεικονίσεων.....	33
12. Ισοδύναμα σύνολα.....	43
13. Πεπερασμένα και άπειρα σύνολα	46
14. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών.....	50
15. Η πληρότητα των πραγματικών αριθμών.....	53

II Πραγματικές Συναρτήσεις

1. Εισαγωγή.....	55
2. Αλγεβρικές πράξεις μεταξύ συναρτήσεων.....	56
3. Σύνθεση Συναρτήσεων.....	58
➤ Πότε και πως ορίζεται η σύνθεση της f με την g	59
➤ Ιδιότητες της σύνθεσης των συναρτήσεων.....	61
4. Αντίστροφη Συνάρτηση.....	68
➤ Η γραφική παράσταση της αντίστροφης.....	70
5. Μονότονες συναρτήσεις.....	74
6. Φραγμένες συναρτήσεις.....	77
7. Άρτιες και περιττές συναρτήσεις.....	79
8. Γραμμικές Συναρτήσεις.....	84
9. Συναρτήσεις Δυνάμεων.....	85
10. Πολυωνομικές συναρτήσεις – Ρητές συναρτήσεις.....	88
11. Αλγεβρικές και υπερβατικές συναρτήσεις.....	92
12. Περιοδικές Συναρτήσεις – Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις.....	95
13. Υπερβολικές συναρτήσεις.....	99
14. Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις.....	101
15. Πολικό σύστημα συντεταγμένων.....	105
Ασκήσεις ανασκόπησης Κεφαλαίου.....	110

III Σύγκλιση Συναρτήσεων

1. Η έννοια του ορίου.....	113
2. Όριο συνάρτησης.....	116
3. Ιδιότητες των ορίων.....	125
4. Μη πεπερασμένα όρια.....	133
5. Το συμπαγές σύνολο των πραγματικών αριθμών.....	144
➤ Ιδιότητες μη πεπερασμένων ορίων.....	144
6. Διάφοροι μέθοδοι υπολογισμού των ορίων.....	147
➤ i. Απαλοιφή παραγόντων σε ρητές συναρτήσεις.....	147
➤ ii. Δημιουργία και απαλοιφή κοινού παράγοντα σε άρρητες συναρτήσεις.....	148
➤ iii. Δημιουργία κλασμάτων που τείνουν στο 0, όταν το x τείνει στο άπειρο.....	151
7. Ασυμπτωτικά ισοδύναμες συναρτήσεις, πλάγιες ασύμπτωτοι.....	154
Ασκήσεις ανασκόπησης Κεφαλαίου.....	157

IV Συνέχεια Συναρτήσεων

1. Η έννοια της συνέχειας	161
2. Ασυνέχεια συναρτήσεων	173
3. Ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων	182
4. Ορισμένα Θεμελιώδη Θεωρήματα των Συνεχών Συναρτήσεων	186
5. Ομοιόμορφη Συνέχεια	199
Λυμένες ασκήσεις Κεφαλαίου	202
Ασκήσεις ανασκόπησης Κεφαλαίου	206

V Η Παράγωγος

1. Η έννοια της παραγώγου	209
2. Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου	212
3. Η ιστορική διαδρομή του Διαφορικού Λογισμού	214
4. Ο ε - δ ορισμός της παραγώγου	217
5. Κανόνες παραγώγισης	225
6. Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων - Τεχνικές Παραγώγισης	227
➤ Τύποι παραγώγων βασικών συναρτήσεων	235
➤ Τύποι παραγώγων συνθέτων συναρτήσεων	237
➤ Παραγώγιση με την βοήθεια λογαρίθμων	238
Λυμένες ασκήσεις Κεφαλαίου	239
Ασκήσεις ανασκόπησης Κεφαλαίου	253

VI Θεμελιώδη Θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού

1. Το Θεώρημα του Fermat	257
➤ Παρατηρήσεις για το Θεώρημα του Fermat	260
➤ Το Θεώρημα του Darboux	262
2. Το Θεώρημα του Rolle	264
3. Το Θεώρημα Μέσης τιμής του Lagrange	271
4. Το γενικευμένο Θεώρημα Μέσης τιμής του Cauchy	284
5. Ο Κανόνας του de l'Hôpital	286
➤ Απροσδιόριστη μορφή $0 \cdot \infty$	291
➤ Απροσδιόριστη μορφή $\infty - \infty$	294
➤ Απροσδιόριστες μορφές $0^\infty, 1^\infty, \infty^0$	294
6. Ο Τύπος του Taylor	302
➤ Σειρές Taylor	313
Ασκήσεις ανασκόπησης Κεφαλαίου	325

VII Μελέτη Συνάρτησης

1. Ορισμοί και Προτάσεις	329
2. Χάραξη της καμπύλης μιας συνάρτησης	336
3. Εύρεση ριζών συνάρτησης	339
➤ Μέθοδος Newton - Raphson	340
➤ Μέθοδος τέμνουσας	343
Λυμένες ασκήσεις Κεφαλαίου	344
Ασκήσεις ανασκόπησης Κεφαλαίου	370

VIII Εισαγωγή στον Ολοκληρωτικό Λογισμό

1. Η ιστορική διαδρομή του Ολοκληρωτικού Λογισμού	373
2. Εποπτική ανάλυση της έννοιας του ολοκληρώματος	378
3. Ορισμός του ολοκληρώματος	381
➤ Αθροίσματα Riemann	388
4. Ιδιότητες του ολοκληρώματος	389
5. Κανόνες Ορθογωνίου και Τραπεζίου	399
➤ Κανόνας Ορθογωνίου	399
➤ Κανόνας Τραπεζίου	401
Ασκήσεις ανασκόπησης Κεφαλαίου	405

IX Θεμελιώδη Θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού

1. Το πρώτο θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού	407
2. Το δεύτερο θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού	412
3. Η παραγωγή και η ολοκλήρωση ως αντίστροφες διαδικασίες	414
4. Το γενικευμένο ολοκλήρωμα	416
Λυμένες ασκήσεις Κεφαλαίου	425
Ασκήσεις ανασκόπησης Κεφαλαίου	429

X Αριθμητική Ολοκλήρωση

1. Ξανακοιτάζοντας το Θεώρημα του Taylor.....	431
2. Αριθμητικές Μέθοδοι Ολοκλήρωσης	437
➤ Τύποι Newton - Cotes	437
➤ Τύποι Gauss.....	442
Ασκήσεις ανασκόπησης Κεφαλαίου.....	453

XI Αναλυτικές Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Τύποι βασικών ολοκληρωμάτων	458
1. Ολοκλήρωση Αθροίσματος.....	460
2. Ολοκλήρωση κατά παράγοντες.....	461
3. Ολοκλήρωση με αντικατάσταση.....	469
4. Τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις - Το Πυθαγόρειο θεώρημα στην ολοκλήρωση.....	482
➤ i. Ολοκληρώματα που περιέχουν την παράσταση $\sqrt{x^2 + a^2}$	483
➤ ii. Ολοκληρώματα που περιέχουν την παράσταση $\sqrt{a^2 - x^2}$	485
➤ iii. Ολοκληρώματα που περιέχουν την παράσταση $\sqrt{x^2 - a^2}$	488
5. Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων απλών κλασμάτων	490
➤ i. το ολοκλήρωμα $\int \frac{A}{x-a} dx$	491
➤ ii. το ολοκλήρωμα $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx$	491
➤ iii. το ολοκλήρωμα $\int \frac{A}{ax^2 + bx + c} dx$	491
➤ iv. το ολοκλήρωμα $\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$	493
➤ v. το ολοκλήρωμα $\int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^k} dx$	494
6. Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων με ανάλυση σε απλά κλάσματα	497
➤ Η μέθοδος του Heaviside.....	498
7. Ολοκλήρωση Αρρήτων Συναρτήσεων	505
➤ Ολοκληρώματα της μορφής $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$	505

➤ Ολοκληρώματα της μορφής $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$	506
➤ Ολοκληρώματα της μορφής $\int R(x, x^a, x^b, \dots) dx$	508
➤ Ολοκληρώματα της μορφής $\int R\left(x, \left(\frac{px+q}{rx+s}\right)^a, \left(\frac{px+q}{rx+s}\right)^b, \dots\right) dx$	509
➤ Οι αντικαταστάσεις του Euler	510
8. Ολοκλήρωση Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων	512
➤ i. το ολοκλήρωμα $\int R(\sin x, \cos x) dx$	513
➤ ii. το ολοκλήρωμα $\int \sin^m x \cos^n x dx, m, n \in \mathbb{Q}$	514
Ασκήσεις ανασκόπησης Κεφαλαίου	518

XII

Εφαρμογές του Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού στη Γεωμετρία

1. Βελτιστοποίηση σε προβλήματα κατασκευών	521
➤ i. Ελάχιστη διαδρομή	521
➤ ii. Βελτιστοποίηση Επιφανειών στο Επίπεδο	527
➤ iii. Προβλήματα Βελτιστοποίησης στο Χώρο	536
2. Εμβαδόν χωρίων που ορίζονται στο επίπεδο	549
➤ i. Εμβαδόν περιοχών οι οποίες οριοθετούνται από τον άξονα των τετμημένων και γραφήματα συναρτήσεων	549
➤ ii. Εμβαδόν περιοχών οι οποίες περικλείονται μεταξύ των γραφημάτων δύο συναρτήσεων	560
➤ iii. Εμβαδόν περιοχών οι οποίες οριοθετούνται από μια καμπύλη και τον άξονα των τεταγμένων	570
➤ iv. Υπολογισμός εμβαδών σε πολικές συντεταγμένες	573
3. Μήκος καμπύλης στο επίπεδο	582
➤ Μήκος τόξου καμπύλης η οποία περιγράφεται παραμετρικά	593
➤ Μήκος τόξου καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες	596
4. Εμβαδόν επιφανείας εκ περιστροφής	600
5. Όγκοι στερεών	607
➤ Υπολογισμός όγκου με διατμήσεις	607
➤ Υπολογισμός όγκου σε στερεά εκ περιστροφής	616
Ασκήσεις ανασκόπησης Κεφαλαίου	625

XIII

Εφαρμογές του Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού στις Φυσικές Επιστήμες

1. Η είσοδος των Μαθηματικών στις Θετικές Επιστήμες	629
2. Η διάθλαση του φωτός, και η Αρχή του Ελαχίστου Χρόνου	631
3. Κινηματική του υλικού σημείου	634
➤ i. Ευθύγραμμη κίνηση	634
➤ ii. Κυκλική κίνηση.....	638
➤ iii. Γραμμική αρμονική ταλάντωση.....	639
4. Κυματικές εξισώσεις αρμονικών κυμάτων	642
5. Θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής	645
6. Έργο Δυνάμεως	646
7. Ροή Υγρών.....	651
8. Δυνάμεις ασκούμενες από υγρά σε ηρεμία	656
9. Ροπές και κέντρα βάρους.....	661
➤ Υλικά σημεία τοποθετημένα σε ευθεία.....	663
➤ Ράβδοι	665
➤ Υλικά σημεία καταναμημένα στο επίπεδο.....	668
➤ Ροπές επιπέδων επιφανειών ως προς τον άξονα των τεταγμένων	669
➤ Ροπές επιπέδων επιφανειών ως προς τον άξονα των τετμημένων	670
10. Το Θεώρημα του Πάππου	677
11. Η μορφή και το σχήμα κρεμαστών γεφυρών.....	679
12. Εξασθένηση των ακτίνων Röntgen.....	687
13. Ο Νόμος της ραδιενεργού διασπάσεως	689
Ασκήσεις ανασκόπησης Κεφαλαίου	693

XIV

Εφαρμογές του Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού στις Οικονομικές Επιστήμες

1. Τα Μαθηματικά στην Οικονομία	697
2. Συνέχεια και ασυνέχεια σε συναρτήσεις που περιγράφουν οικονομικά μεγέθη	698
3. Οικονομικές Συναρτήσεις.....	701
➤ i. Η συνάρτηση ζήτησης.....	701
➤ ii. Η συνάρτηση προσφοράς.....	704
➤ iii. Ισορροπία αγοράς.....	707
➤ iv. Η συνάρτηση κόστους.....	710
➤ v. Τα συνολικά έσοδα.....	711
➤ vi. Το συνολικό κέρδος.....	712

4. Η παραγωγισιμότητα σε συναρτήσεις που περιγράφουν οικονομικά μεγέθη.....	714
5. Μέσες Συναρτήσεις και Οριακές Συναρτήσεις	716
➤ i. Μέσα έσοδα	717
➤ ii. Μέσο κόστος.....	717
➤ iii. Οριακά έσοδα	718
➤ iv. Οριακό κόστος.....	719
6. Ελαστικότητα Συναρτήσεων	722
➤ i. Ελαστικότητα σημείου	723
➤ ii. Ελαστικότητα τόξου (Μέση ελαστικότητα).....	729
7. Πλεόνασμα καταναλωτή και πλεόνασμα παραγωγού.....	730
8. Δείκτες άνισης κατανομής του εισοδήματος.....	739
Λυμένες ασκήσεις Κεφαλαίου	742
Ασκήσεις ανασκόπησης Κεφαλαίου.....	763

XV

Πίνακες

Γραμμικά Συστήματα

1. Γραμμικές Εξισώσεις.....	765
2. Γραμμικά Συστήματα	769
3. Παραδείγματα απαλοιφής Γκάους.....	770
➤ Ιδιομορφίες της διαδικασίας απαλοιφής.....	771
4. Μια συμβολική γραφή των γραμμικών συστημάτων.....	773
5. Η μέθοδος της απαλοιφής με τον επαυξημένο πίνακα.....	774
6. Πίνακες.....	781
7. Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός και Άθροισμα Πινάκων.....	787
8. Πολλαπλασιασμός Πινάκων	793
9. Ιδιότητες του Πολλαπλασιασμού των Πινάκων.....	800
10. Στοιχειώδεις Πίνακες και μια μέθοδος υπολογισμού του Αντιστρόφου Πίνακα	810
11. Ορίζουσες.....	818
➤ Ιδιότητες των οριζουσών.....	820
12. Ελάσσονες Ορίζουσες – Συμπληρωματικός τετραγωνικού Πίνακα	830
➤ Υπολογισμός του Αντιστρόφου Πίνακα	833
13. Επίλυση γραμμικών συστημάτων με τη βοήθεια του Αντιστρόφου Πίνακα	837
14. Ο κανόνας του Cramer.....	843

XVI Διανυσματικοί Χώροι

1. Ορισμοί και Παραδείγματα	853
2. Ο Ευκλείδειος διανυσματικός χώρος	858
➤ Μια άλλη αναπαράσταση των διανυσμάτων στον \mathbb{R}^n	862
➤ Εξωτερικό γινόμενο	864
3. Διανυσματικοί υπόχωροι	869
4. Γραμμικοί συνδυασμοί	874
➤ Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων στον \mathbb{R}^n	879
5. Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου	884
➤ Η κανονική βάση του \mathbb{R}^n	887
6. Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα	891