ΠΕΡΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ

γράφουν οι: Μανώλης Αναστασάκης ♦ Αριστείδης Αντονάς ♦ Θανάσης Βαλτινός ♦ Γεράσιμος Βώκος ♦ Georges Canguilhem ♦ Antoine Culioli ♦ Carlo Ginzburg ♦ Νίκος Θεοτοκάς ♦ Τάκης Καγιαλής ♦ Βασίλης Κάλφας ♦ Σταύρος Κατσανέβας ♦ Νεφέλη Κονταρίνη ♦ Γεράσιμος Κουζέλης ♦ Κώστας Π. Κωστής ♦ Κώστας Λιβιεράτος ♦ Δημήτρης Ν. Μαρωνίτης ♦ Χρήστος Γ. Μασούρος ♦ Χρόνης Μπότσογλου ♦ Κωνσταντίνος Α. Παπαγεωργίου ♦ Γιώργος Παπακωνσταντίνου ♦ Ευθύμιος Παπαταξιάρχης ♦ Γιώργος Παρμενίδης ♦ Βασίλης Πεσμαζόγλου ♦ Παναγιώτης Πούλος ♦ Ingo W. Rath ♦ Θωμάς Σκάσσης ♦ Γιώργος Σταθάκης ♦ Γιάννης Σταυρακάκης ♦ Γεράσιμος Στεφανάτος ♦ Μαρία Τζεβελέκου ♦ Νίκος Τσαφταρίδης ♦ Βασίλης Τσελφές ♦ Richard Wollheim ♦ Κοσμάς Ψυχοπαίδης *και κείμενα των:* S. Freud και G.W.F. Hegel

τοπικά β'

ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΜΕΛΕΤΗΣ ΤΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΟΥ ΑΝΘΡΩΠΟΥ

νήσος

Τα *τοπικά*
είναι μια σειρά συλλογικών τόμων αφιερωμένων σε θέματα που συνδέονται με τη γνώση, ιδιαίτερα στις επιστήμες του ανθρώπου. Στόχος τους είναι να συμβάλουν στη διαμόρφωση ενός πλαισίου για την αντιπαράθεση απόψεων και την ανανέωση θεωρητικών και ερευνητικών ερωτημάτων, που απασχολούν ένα ευρύ φάσμα ελλήνων και ξένων επιστημόνων.
Κάθε θέμα, στο οποίο αφιερώνεται ένας τόμος, αποτελεί αντικείμενο συζήτησης ενός εργαστηρίου, που προηγείται της έκδοσης του τόμου. Το σχεδιασμό των εργαστηρίων και την επιμέλεια των τόμων αναλαμβάνει κάθε φορά διαφορετική ομάδα μελετητών. Οι επιμελητές συντάσσουν ένα εισαγωγικό κείμενο που θέτει τους άξονες του προβληματισμού για το εκάστοτε θέμα και καλεί τους ενδιαφερόμενους μελετητές σε συνεργασία. Οι εισηγήσεις και τα κείμενα που προτείνονται υποβάλλονται σε κρίση από επιστήμονες ειδικούς στο ανάλογο αντικείμενο, που συνεργάζονται με τα *τοπικά*.

Το τρίτο εργαστήριο των *τοπικών*, με θέμα «Η έννοια της κατασκευής στις επιστήμες του ανθρώπου», πραγματοποιήθηκε στα Χανιά από την 1η ώς τις 3 Απριλίου 1994 και φιλοξενήθηκε στην αίθουσα του Τεχνικού Επιμελητηρίου Δυτικής Κρήτης.
Η συζήτηση οργανώθηκε γύρω από τρεις θεματικές ενότητες:
– νοητικές διεργασίες και φύση,
– γλώσσα, κοινωνία και παιδεία,
– η τέχνη του λόγου.
Ευχαριστούμε το Δήμο Χανίων, το Τεχνικό Επιμελητήριο Δυτικής Κρήτης, την Ε.Τ.Β.Α. (υποκατάστημα Χανίων), τη ναυτιλιακή εταιρεία ANEK LINES, τη STAFF A.E.B.E. και το THE BODY SHOP για τις διευκολύνσεις που μας παρείχαν σε αυτήν τη διοργάνωση, καθώς και το Οικονομικό Επιμελητήριο Δυτικής Κρήτης για την ηθική του συμπαράσταση.

Τα Μαθηματικά. Ένα τεράστιο και πολύπλοκο οικοδόμημα, γέννημα των πιο καθαρών στοχασμών του νου του ανθρώπου. Ένας λαβύρινθος με δαιδαλώδεις διαδρομές που τις περισσότερες φορές διασταυρώνονται για να χωρίσουν και να ξανασυναντηθούν αργότερα. Ένας λαβύρινθος που σίγουρα δεν είναι απαλλαγμένος από το φόβο του Μινώταυρου. Κατά παράξενο τρόπο στις πιο κρυστάλλινες σκέψεις του μυαλού του ανθρώπου ελλοχεύει ο φόβος του παράδοξου.

Έναν τέτοιο φόβο ενέσπειρε στους γεωμέτρες της Αρχαίας Ελλάδας η Σχολή των Ελεατών με τα παράδοξολογήματα του Ζήνωνα για τον Αχιλλέα. Η επίδρασή τους στη θεμελίωση της γεωμετρίας υπήρξε καθοριστική. Οι ιδρυτές της, όχι μόνο έλαβαν υπόψη τους τα παράδοξα επιχειρήματα του Ελεάτη Ζήνωνα, αλλά προσπάθησαν να τη θωρακίσουν με τον καλύτερο δυνατό τρόπο απέναντι σ' αυτά. Έτσι στο κρίσιμο σημείο της κατασκευής και του προσδιορισμού της φύσης της ευθείας γραμμής ο Ευκλείδης απάντησε διαμορφώνοντας το πρώτο του αίτημα ως εξής:

> Ἠιτήσθω ἀπό παντός σημείου ἐπί πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμήν ἀγαγεῖν.

Κατασκευάζει λοιπόν από δύο σημεία ένα "νέο γεωμετρικό ον" του οποίου όμως πουθενά δεν καθορίζει σαφώς τη φύση. Δηλαδή, πουθενά δεν αναφέρει από τι ακριβώς αποτελείται αυτή η γραμμή. Ή μάλλον, για να είμαστε πιο σαφείς, υπάρχει η αναφορά στον τρίτο όρο ότι:

> Γραμμῆς δέ πέρατα σημεῖα.

Αλλά για το εσωτερικό αυτής της γραμμής δεν κάνει καμία νύξη. Από την άλλη μεριά όμως επιλέγει σημεία μέσα από την ευθεία χωρίς κανέναν ενδοιασμό, έχοντας προηγουμένως κατοχυρώσει εμμέσως την ύπαρξή τους με τον τέταρτο όρο:

> Εὐθεῖα γραμμή ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

Δεν περιλήφθηκε λοιπόν κανένας ορισμός στα *Στοιχεία* ο οποίος να λέει ότι η ευθεία αποτελείται από σημεία, όπως αντίστοιχα έγινε στην αριθμητική για τον αριθμό, όπου άφοβα λέχθηκε ότι:

> Ἀριθμός ἐστίν τό ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

Μια παρόμοια παραδοχή για το ευθύγραμμο τμήμα σε σχέση με τα σημεία θα άνοιγε διάπλατα τις πόρτες στους συλλογισμούς του Ζήνωνα, ως προς τους οποίους οι αρχαίοι Έλληνες γεωμέτρες προσπάθησαν να λάβουν ενάντια θέση. Τα παραδοξολογήματα βέβαια του Ζήνωνα απαντήθηκαν αργότερα κατά σαφή και συγκεκριμένο τρόπο, όμως άφησαν ανεξίτηλα τα ίχνη τους πάνω στα *Στοιχεία*, στο θεμελιακό αυτό κείμενο της γεωμετρίας.

Η ευθεία ακολούθησε το δικό της δρόμο μέσα στα μαθηματικά. Η αναλυτική γεωμετρία την όρισε με τη βοήθεια αλγεβρικών εξισώσεων, μερικές από τις οποίες είναι γνωστές και στους μαθητές των πρώτων τάξεων του γυμνασίου. Μία άλλη όμως θεώρηση της γεωμετρίας η οποία δεν στηρίζεται στα σχήματα ή τις εξισώσεις, και είναι ανεξάρτητη από συστήματα συντεταγμένων, ήρθε από τη μεριά της υπερσυνθετικής άλγεβρας και κατέθεσε, όπως άλλωστε ήταν φυσικό, το δικό της ορισμό για την ευθεία.

Η υπερσυνθετική άλγεβρα είναι ένας σχετικά νέος κλάδος των μαθηματικών. Παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στη Στοκχόλμη, το 1934, στο πλαίσιο του 8ου συνεδρίου των Σκανδιναυών Μαθηματικών από τον F. Marty, ένα νεαρό Γάλλο μαθηματικό που χάθηκε λίγο αργότερα στο Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο. Ο F. Marty στο συνέδριο αυτό εισήγαγε την πρώτη υπερσυνθετική δομή, την υπερομάδα, παρακινούμενος από διάφορα προβλήματα των μη αντιμεταθετικών ομάδων.

Η θεμελιακή ιδέα της υπερομάδας είναι η *υπερπράξη*, που χαρακτηρίζεται από το πλειότιμο και όχι από το μονότιμο του αποτελέσματος της "σύνθεσης" δύο στοιχείων. Δηλαδή, *όταν έχουμε υπερπράξη μεταξύ δύο στοιχείων, το αποτέλεσμα που προκύπτει δεν είναι ένα μόνο στοιχείο, αλλά εν γένει ένα σύνολο από στοιχεία.*

Δύο ακόμη αξιώματα πλαισιώνουν την υπερπράξη για να δώσουν τον ορισμό της υπερομάδας. Έτσι αναλυτικά έχουμε:

Ένα μη κενό σύνολο H εφοδιασμένο με μία υπερπράξη "." είναι υπερομάδα αν πληροί το αναπαραγωγικό αξίωμα, δηλαδή α.H = H.α = H για κάθε α από το H, και το προσεταιριστικό αξίωμα, δηλαδή α.(β.γ) = (α.β).γ για κάθε α,β,γ από το H. Η υπερπράξη όμως δεν είναι απαραίτητα αντιμεταθετική, δηλαδή το α.β δεν είναι πάντοτε ίσο με β.α. Έτσι η υπερπράξη αυτή επάγει δύο νέες υπερπράξεις, την ":" και την "..". Το α:β αποτελείται από όλα εκείνα τα στοιχεία χ της H τα οποία περιέχουν το α στην υπερπράξη τους με το β, όταν αυτή γίνεται από τα δεξιά τους, δηλαδή στο χ.β. Αντίστοιχα το α..β αποτελείται από όλα εκείνα τα στοιχεία ψ του H, τα οποία περιέχουν το α στα σύνολα β.ψ. Όταν η υπερομάδα αποδεικνύεται είναι αντιμεταθετική, τότε α:β = α..β. Στην υπερομάδα αποδεικνύεται ότι τα σύνολα α.β, α:β και α..β είναι πάντοτε μη κενά, και μάλιστα το μη κενό των α:β και α..β είναι ισοδύναμο με το αναπαραγωγικό αξίωμα.

Ο W. Prenowitz ήταν ο πρώτος που εισήγαγε την υπερπράξη στη γεωμετρία. Εμείς όμως εδώ θα έλθουμε στον ευκλείδειο χώρο για να δούμε πώς η υπερομάδα μπαίνει στη γεωμετρία μέσα από την κατασκευή της ευθείας και πόσο στενά συνδέεται η θεώρηση αυτή με τα αιτήματα του Ευκλείδη. Το πρώτο αίτημα του Ευκλείδη ορίζει μία υπερπράξη, την ".", μεταξύ των σημείων. Πράγματι αν α,β είναι δύο σημεία, τότε το ευθύγραμμο τμήμα αβ υπαρχει και ως α.β ορίζουμε το σύνολο των σημείων του (θέτουμε δε α.α = α). Ένα ερώτημα που ανακύπτει είναι αν τα α και τα β ανήκουν στο αποτέλεσμα της εν λόγω υπερπράξης. Η σχετική μαθηματική ανάλυση είναι εκτενέστατη και βασίζεται στο γεγονός ότι η θεώρηση της υπερπράξης εξαρτάται από τα συμπεράσματα που θέλουμε να πετύχουμε. Στο άρθρο αυτό θα θεωρήσουμε το ανοιχτό ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή αυτό στο οποίο δεν περιέχονται τα άκρα του.

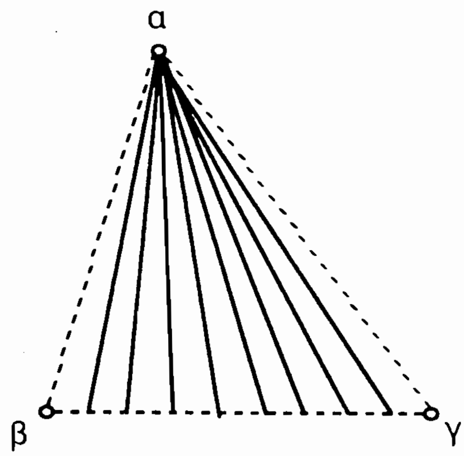
Στη συνέχεια, σύμφωνα με το δεύτερο αίτημα:

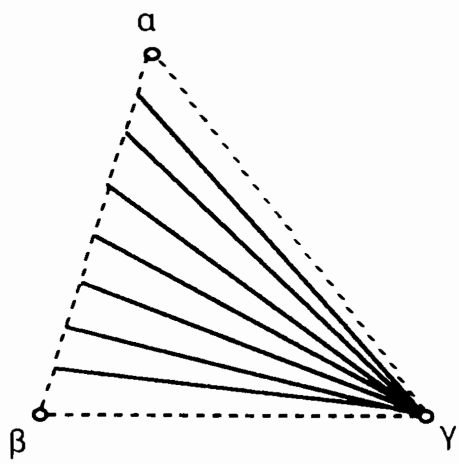
> Καί πεπερασμένην εὐθεῖαν κατά τό συνεχές ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.

εξασφαλίζεται η δυνατότητα προέκτασης του ευθυγράμμου τμήματος και προς τις δύο κατευθύνσεις. Κατ' αυτόν τον τρόπο, τόσο το σύνολο α:β, το οποίο αντιστοιχεί στην προέκταση του ευθυγράμμου τμήματος αβ από τη μεριά του α, υπάρχει και είναι μη κενό, όσο και το σύνολο β:α, που είναι η προέκταση του αβ από τη μεριά του β. Επομένως το αναπαραγωγικό αξίωμα της υπερομάδας ισχύει. Εξάλλου, έχοντας υπόψη την πρώτη *Κοινή Έννοια* του Ευκλείδη:

> τά τῷ αὐτῷ ἴσα καί ἀλλήλοις ἐστίν ἴσα

είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι επαληθεύεται και η προσεταιριστικότητα. Για παράδειγμα, ας δούμε την περίπτωση που τα α,β,γ είναι τρία μη συνευθειακά σημεία. Αρχίζουμε με το σύνολο α.(β.γ). Για να κατασκευάσουμε το σύνολο αυτό, πρέπει να κατασκευάσουμε το ευθύγραμμο τμήμα βγ και στη συνέχεια να ενώσουμε κάθε σημείο του βγ με το α, όπως ακριβώς φαίνεται στο πρώτο από τα παρακάτω σχήματα:

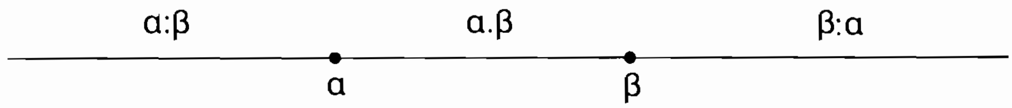




Βλέπουμε ότι το αποτέλεσμα του α.(β.γ) είναι το εσωτερικό του τριγώνου που ορίζεται από τα α,β,γ. Το ίδιο ακριβώς σύνολο παίρνουμε και ως αποτέλεσμα του (α.β).γ, όπως άλλωστε καταδεικνύεται με τη βοήθεια του δεύτερου από τα παραπάνω σχήματα. Άρα α.(β.γ) = (α.β).γ.

Συνεπώς το σύνολο των σημείων αποτελεί υπερομάδα και η μελέτη των γεωμετρικών προβλημάτων ανάγεται στη μελέτη αυτής της υπερομάδας ή ακόμη και άλλων πιο ειδικών υπερομάδων. Επεξεργαζόμαστε επομένως τα γεωμετρικά προβλήματα με αλγεβρικά εργαλεία τα οποία όμως λειτουργούν χωρίς να χρειάζονται καρτεσιανά ή άλλα συστήματα συντεταγμένων. Έτσι για παράδειγμα τα κλειστά ως προς την υπερπράξη υποσύνολα αυτών των υπερομάδων, δηλαδή τα υποσύνολα εκείνα που περιέχουν πάντα το αποτέλεσμα της υπερπράξης δύο στοιχείων τους, αντιστοιχούν στα κυρτά σύνολα και η μελέτη των πρώτων οδηγεί σε συμπεράσματα για τα δεύτερα.

Ας επανέλθουμε όμως πάλι στην ευθεία, και ας δούμε σχηματικά τα όσα μέχρι στιγμής είπαμε γι' αυτήν:



Συνεπώς η ευθεία <α,β> που ορίζεται από τα α και β, δίνεται από τον τύπο:

$<\alpha,\beta> = \{\alpha\} \cup \{\beta\} \cup \alpha.\beta \cup \alpha{:}\beta \cup \beta{:}\alpha$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι με αντίστοιχο ορισμό της υπερπράξης, οποιασδήποτε διαστάσεως ευκλείδειος χώρος γίνεται υπερομάδα, ευθεία δε του χώρου αυτού καλούμε πάντοτε το παραπάνω σύνολο. Ένας ορισμός θεμελιωμένος ακριβώς πάνω στα ερείπια ενός αρχαίου φόβου.

Χρήστος Γ. Μασούρος