RIVISTA DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA N. 9 - 1991 (61-67)

CERTAINES REMARQUES SUR LES HYPERGROUPES CANONIQUES HYPERVALUABLES ET FORTEMENT CANONIQUES

Jean Mittas
Université Aristote
54622 Thessaloniki
GRECE

RESUME'. Dans ce travail et après l'introduction d'un nouveau type d'hypervaluation d'un hypergroupe canonique, certains sujets relatifs à la terminologie des différentes sortes d'hypervaluation de ces hypergroupes sont reglès. D'autre part, une classe encore d'hypergroupes canoniques s'introduit, c'est celle des hypergroupes presque fortement canoniques.

Comme on le sait, une condition nécessaire pour qu'un hypergroupe canonique [4] [8] (H,+) soit valuable ou hypervaluable [7] [9] est qu'il soit fortement canonique [6] [9], c'est-à-dire qu'il satisfasse de plus aux conditions:

f_1. Pour tout $x,y,z,w \in H$, si $(x+y)\cap(z+w)\neq\varnothing$, on a ou bien $x+y\subseteq z+w$, ou bien $z+w\subseteq x+y$

f_2. Pour tout $x,y\in H$ on a [(1)]
$x\in x+y \Rightarrow x+y=x$.

On a démontré que l'axiome f_2 seul implique les deux propriétés suivantes [9]:

f_2'. Pour tout x, y$\in H$ avec $x\neq y$ on a:
$(x-x)\cap(y-x)=\varnothing$ et $(y-y)\cap(y-x)=\varnothing$

---

(1) Comme d'habitude, on identifie, s'il n y a pas le risque de confusion, les éléments x avec les singletons correspondants $\{x\}$, donc, en particulier, $x+y=x$ au lieu de $x+y=\{x\}$ [4] [8].

f_2''. Pour tout $x,y,a \in H$, si $(x+a) \cap (y+a) \neq \varnothing$, on a

$$x+a=y+a$$

On remarque maintenant que chacune de ces propriétés isolement implique l'axiome f_2.

En effet:

i) $f_2' \Rightarrow f_2$.

Car si $x,z \in x+y$, alors $y \in x-x$ et $y \in z-x$, donc $(x-x) \cap (z-x) \neq \varnothing$, ce qui contredit à f_2' pour $z \neq x$. Donc $z = x$ et $x+y = x$.

ii) $f_2'' \Rightarrow f_2$.

Comme précédemment $x,z \in x+y$ entraîne $(x-x) \cap (z-x) \neq \varnothing$, donc, par hypothèse, $x-x=z-x$, d'où $0 \in z-x$ et $z = x$.

On déduit, donc, que:

Proposition 1 : *L'hypergroupe fortement canonique peut être dèfini de maniere équivalente par les axiomes f_1, f_2' et f_1, f_2'' respectivement .*

Considèrons maintenant un hypergroupe canonique hypervalué au sens de [4], c'est-à-dire dont le support est muni d'une distance hyperultramétrique d [autrement dit d'une application $d: H \times H \to \Omega$, où Ω est un ensemble totalement ordonné contenant un plus petit élément notè 0-le zéro de Ω - telle que :

a) $d(x,x) = 0$.

b) $d(x,y) = d(y,x)$.

c) $d(x,y) \leq \max \{d(x,z), d(z,y)\}$ *quelsque soient x,y,z dans H] , qui verifie de plus les conditions:*

h_1. *Pour tout* $x,y \in H$ *L'hypersomme* $x+y$ *est un cercle de l'espace hyperultrametrique (H,d).*

h_2. *Pour tout* $x,y,a \in H$ *tels que* $(x+a) \cap (y+a) = \varnothing$, *on a* $d(x+a,y+a) = d(x,y)$.

h_3. *Pour tout* $x,y \in H$ *on a* $x \in x+y \Rightarrow x+y = x$.

On voit que par cette définition l'hypervaluabilité d'un hypergroupe canonique a lieu seulement au cas qu'il vérifie l'axiome f_2 des hypergroupes fortement canoniques. Mais l'exemple ci-dessous montre que l'on peut considérer des hypergroupes canoniques qui sont hypervalués d'apres un nouvel sens, résultant des précédents par une modification de leur définition et sans qu'ils satisfassent à l'axiome f_2.

Soit, en effet, un ensemble H totalement ordonné et possedant un élément minimum 0. Comme on le sait [6] H muni de l'hyperopération :

$$x+y=max\{x,y\},\ si\ x \neq y\ et\ x+x=[0,x].$$

se rend un hypergroupe canonique à éléments autoopposés, qui satisfait à l'axiome f_1 des hypergroupes canoniques, mais non à l'axiome f_2 (puisque, pour $x \neq 0,\ x \in x+x \not\Rightarrow x+x = x$). Pour simplifier les choses considérons $H \subseteq R_+$ avec $0 \in H$ et $\Omega \equiv H$. Alors l'application $d{:}H \times H \to H$ telle que:

$$d(x,y) = max\{x,y\},\ \text{si}\ x = y\ \text{et}\ d(x,x) = 0$$

est une hyperultramétrique (même, au cas présentune ultramétrique) sur H, qui satisfait à l'axiome h_1 des hypergroupes canoniques hypervalués. En effet, pour tout $x,y \in H$, $x+y$ est un cercle de l'espace (H,d). Car, si $x < y$, alors $x+y = y = C(y,o)$ est un cercle de rayon propre 0, tandis que le plus grand rayon semi-réel [1] [2] est y^-.

C'est-a-dire on a $x+y=C(y,y^-)$. Car pour tout $z \in H$ on a, si $z > y$, $d(y,z) = z > y^-$, donc $z \notin C(y, y^-)$ et si $z<y$, $d(y,z) = y > y^-$, donc de même $z \notin C(y, y^-)$. Il en resulte, donc, que $C(y,y^-) = \{y\}$.

Soit $x = y$. Alors $x+y = x+x = [0, x]$ et $x+y$ est le cercle $C(0, x)$. En effet, pour tout: $z \in H$ on a $d(0, z) = z = |z|$ (l'hypervaluation (valuation) de z associée à d [9] et, si $z>x$, $d(0, z)>x$, donc $z \notin C(0,x)$, tandis que pour tout $z < x$, on a $d(0, z) < x$ et $z \in C(0, x)$. Donc $C(0, x) = [0, x]$.

Evidemment pour les deux cas on peut ècrire $x+y = C(z,\ \rho\ max\{\ |x|, |y|\ \})$, où $z \in x+y$ est quelcouque et où pour le "coefficien de proportionalité" ρ on a $\rho = 1^-$, si $x \neq y$ et $\rho = 1$, si $x=y$.

Ensuite on voit que le fait que $(H,+)$ satisfait à l'axiome h_1 entraîne qu'il satisfait aussi à l'axiome f_1 des hypergroupes fortement canoniques. Quant à l'axiome f_2 de ces dernieres, celui-ci n'a pas lieu pour tout $x, y \in H$. En particulier on a, si $x < y$,

$$y \in x+y \Rightarrow x+y = y$$

tandis que, si $x = y \neq 0$, $x \in x+x \not\Rightarrow x+x = x$.

Evidemment $(H,+)$ ne satisfait pas à l'axiome équivalent f_2', par rapport auquel on a, si p.e., $x < y$,

$$(x+x)\cap(y+x) = \varnothing \quad \text{et} \quad (y+y)\cap(y+x) \neq \varnothing \tag{1}$$

D'autre part et relativement à l'hypervaluation de (H, +) et d'après f_1 on a pour les cercles disjoints $x+x$ et $y+x$ et pour $x<y$,

$$d(x+x,y+x) = d([0,x],y) = y = d(x,y) \tag{2}$$

En généralisant, on a que pour un hypergroupe canonique quelcouque $(H, +)$ acceptant une hypervaluation avec des conséquences comme dans l'exemple consideré, ces dernieres, c'est-àdire les (1) et (2), sont exprimées respectivement par les propriétés:

p: <u>Pour tout</u> $x,y \in H$, si $x \neq y$, <u>on a</u>
<u>ou bien</u> $(x\text{-}x)\cap(y\text{-}x) = \varnothing$, <u>ou bien</u> $(y\text{-}y)\cap(y\text{-}x) = \varnothing$.

h: <u>Pour tout</u> $x,y \in H$, <u>si</u> $x \neq y$, <u>on a</u>
<u>ou bien</u> $d(x\text{-}x,y\text{-}x) = d(x,y)$, <u>ou bien</u> $d(y\text{-}y,y\text{-}x) = d(x,y)$.

On abouti ainsi à poser les définitions:

Definition 1. *Un hypergroupe canonique $(H, +)$ muni d'une distance hyperultramétrique $d: H \times H \to \Omega$ (où Ω est comme ci-dessus) et vérifiant de plus les conditions $hv_1 \equiv h_1$ et $hv_2 \equiv h$ sera appelé <u>hypervalué</u> ou <u>hyperultramétrique</u>. On pose $d(o,x) = |x|$ -l'hypervaluation de x - et la fonction $|\bullet|: H \to \Omega$ ainsi dèfinie est <u>l'hypervaluation associée à l'hyperultrametrique</u> d (Comp. [9]).*

Conséquences :

i) Si $(x\text{-}x)\cap(y\text{-}x) = \varnothing$, alors $d(x\text{-}x,y\text{-}x) = d(0,y\text{-}x) = |y\text{-}x|$, donc, d'après hv_2, si $x \neq y$, $d(x,y) = |y\text{-}x|$

(où, évidemment,si $A \subseteq H$, $|A| = \{|a| \in \Omega : a \in A\}$. Pour conséquent $|y\text{-}x|$ pour $x \neq y$ est un singleton).

ii) Il est èvident que $|y\text{-}x| = |x\text{-}y|$. Donc $|x| = |\text{-}x|$ pour tout $x \in H$.

iii) Si pour $x,y,a \in H$ on a $(x+a)\cap(y+a) = \varnothing$ alors $d(x+a,y+a) = d(x,y)$.

En effet, les cercles $x+a$, $y+a$ étant disjoint, on a que $d(x+a,\ y+a)$ est un singleton, leur distance,qui est égale à $d(z, w)$ où $z \in x+a$ et $w \in y+a$ sont quelconques [1] [2]. Donc $d(x+a,\ y+a) = d(z,\ w) = |\ z\text{-}w\ | = |(x+a)\text{-}(y+a)| = |(x\text{-}y)\text{-}(a\text{-}a)| = d(x\text{-}y,\ a\text{-}a) = d(x\text{-}y,0) = |\ x\text{-}y\ | = d(x,y)$, car $(x\text{-}y)\cap(a\text{-}a) = \varnothing$.

L'hyperultramétrique d vérifiant cette propriété est appelé, comme d'habitude [2] [9] compatible avec la structure de l'hypergroupe canonique de H.

Remarque (concernant les groupes). Il resulte que l'on peut définir un groupe abelien (G,.) comme hypervalué [2] en considérant que l'ultamétrique:

$$d: G\times G \to \Omega$$

vérifie pour tout $x,y \in G$ la condition: $d(e,yx^{-1}) = d(x,y)$

Il est, d'ailleurs, évident que au cas des groupes abeliens, cette condition équivant à l'autre, exprimènt la compatibilité de d avec la structure du groupe de G. C'est-a-dire avec la condition $d(ax,\ ay) = d(xa,\ ya) = d(x,y)$ quelsque soient x, y, a dans G.

Definition 2 .*Un hypergroupe canonique* $(H,+)$ *satisfais de plus aux conditions :*

$$pf_1 \equiv f_1 \quad \text{et} \quad pf_2 \equiv p$$

serà appelé presque fortement canonique.

Des précèdents il resulte la:

Proposition 2 . *Pour qu'un hypergroupe canonique soit hypervaluable il faut qu'il soit presque fortement canonique .*

Après la consideration des hypergroupes canoniques hypervalués au sens de la définition ci-dessus **1** , on doit préciser les choses relativement à la terminologie pour èviter la confusion, parce que l'on a étudié d'autres types d'hypergroupes canoniques par la même caractérisation [4] - [7] [9] . Ainsi les hypergroupes canoniques hypervalués, qui ont éte défini moyennent les conditions h_1, h_2, h_3 cités auparavant, seront appelés fortement hypervalués (et, comme on le sait, il en est ainsi si, et seulement si , ils sont fortement canoniques).
Sauf ces deux types d'hypergroupes canoniques acceptant d'hypervaluations il y a encore ceux qui sont strictement hypervalués [5] [9] et qui seront appelés encore supérienrement hypervalués, definis par les conditions h_1, h_2, mais où h_1 est au sens strict: les rayons des cercles $x+y$ sont de la forme $\rho\, max\{|x|,|y|\}$, le coefficien de proportionnalité ρ ètant partout la même. Et on rappelle qu'un hypergroupe canonique est ainsi hypervalué si, et seulement si, il est supérieurement canonique.

Quant aux hypergroupes canoniques valués, on a des distinctions pareilles, etant donné que ces dernieres ne sont qu'un cas particulier des hypervalués.

Enfin les sujets, si on a le reciproque de la proposition **2** , la construction de toutes les hypervaluations possibles d'un hypergroupe canonique hypervalué ainsi que l'etude particulière de l'hypergroupe presque fortement canonique, restent actuellement ouverts.

REFERENCES

[1] KRASNER, M. Nombres semi- réeels et espaces ultramétriques . C.R. Acad. Sc. Paris, tome II , 219, p. 433-437 (1944)

[2] KRASNER, M. Introduction à la théorie des valuations. Cours de la Faculté des Sciences de l'Université de Paris (1962.et 1967) .

[3] MITTAS , J : Sur une classe d'hypergroupes commutatifs. C.R. Acad.Sc. Paris , série A , t.269, p.485-488 (1969).

[4] MITTAS , J : Hypergroupes caniniques hypervaluables . C.R. Acad. Sc. Paris, Série A t. 271 , p.4-7 (1970).

[5] MITTAS , J : Les hypervaluations strictes des hypergroupes canoniques. C.R. Acad. Sc. Paris , Série A, t.271, p.69-72 (1970) .

[6] MITTAS , J : Hypergroupes values et hypergroupes fortement canoniques. Πρακτικαι τεσ Ακ. Ατεναιον, T. 44, P. 304-312 (Ατεναι 1971)

[7] MITTAS , J : Hypergroupes canoniques values et hypervalués . Math.Balk., t.1, p.181-185 (Beograd 1971)

[8] MITTAS , J : Hypergrouper canoniques. Math.Balk., t.2, P.165-179 (Beograd 1972)

[9] MITTAS , J : Hypergroupes canoniques valués et hypervalués- hypergroupes fortement et supérieurement canoniques.
Bull.of the Greek Math. Soc. vol. 23, p. 55-88 (Athens 1982)

received 27th December 1990