HYPERGROUPES CANONIQUES VALUÉS ET HYPERVALOUÉS - HUPERGROUPES FORTEMENT ET SUPÉRIEUREMENT CANONIQUES

By

JEAN MITTAS

Offprint from "BULL. OF THE GREEK MATHEMATICAL SOCIETY"
Volume 23, 1982, pp. 55-88

BULLETIN OF THE GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
Vol. 23(1982)

HYPERGROUPES CANONIQUES VALUÉS ET HYPERVALUÉS - HYPERGROUPES FORTEMENT ET SUPÉRIEUREMENT CANONIQUES

par JEAN MITTAS

0. INTRODUCTION

La notion de l'hypergoupe canonique résulte, comme il est connu, [7] [13] de celle de l'hypercorps. Cette dernière a été introudite par M. Krasner en 1956 [2] [9] [12] [15] et elle a résulté de la considération de l'ensemble des classes d'un corps valué par rapport à une relation d'équivalence normale [13], convenablement définie sur lui. De manière concrète si K est un corps valué et ρ est un nombre semi-réel [1] [2] [3] [5] quelconque d'espèce 0 ou - et tel que $0 \leqq \rho \leqq 1$, la relation binaire Π_ρ telle que pour tout $a, b \in K$

$$a \Pi_\rho b \iff |a - b| \leqq \rho |a|$$

est une relation d'équivalence normale dans K [12] [14] et l'ensemble - quotient K/Π_ρ vérifie des propriétés analoques des celles du corps et même du corps valué. Un hypercorps diffère d'un corps du fait que son addition est une hyperopération [7] [13], ce qui justifie la nomination de cette structure comme hypercorps.

A un de mes travaux précédents ayant comme point de départ la structure générale de l'hypercorps, j'ai étudié isolement sa structure additive, qui est un hypergroupe d'un type special, que je l'ai appelé *hypergroupe canonique*

[7] [13]. Dans le présent travail prennant comme départ la structure de l'hypercorps valué [2] ainsi que la théorie des groupes valués [3], je construis une theorie analogue de cette dernière pour les hypergroupes canoniques.[1] Relativevent on rappelle qu'un hypercorps K est dit *valué*, s' il est muni d'une application $|\cdot|:K \to \mathbb{R}_+$ (où $\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des nombres réels non-négatifs) telle que: 1°. $|xy| = |x| \cdot |y|$; 2°. $|x+y| \leq \max(|x|,|y|)$; 3°. si $o \notin x+y$, $|x+y|$ est un singleton $\{r\}$, où $r \neq 0$ (o le zéro de K) et sera noté[2] r; 4°; Il existe un nombre semi-réel $\rho \geq 0$ d'espèce 0 ou-tel que, si $z \in x+y$, $|z'-z| \leq \rho\max(|x|,|y|) \iff z' \in x+y$. [Si X est un ensemble d'éléments de K, on note $|X|$ l'ensemble $\{|x|;\ x \in X\}$ des valuations de ses éléments. D'autre part si A et B sont deux sous-ensembles d' un ensemble ordonné, $A < B$ (resp. $A \leq B$) siquifie que pour tout $a \in A$, $b \in B$ on a $a < b$ (resp. $a \leq b$); en plus, $a < B$ et $A < b$ signifieront les mêmes choses que $\{a\} < B$ et $A < \{b\}$ et, de même, pour $\leq$]. Les axiomes 2° - 4° peut se mettre, comme nous allons voir plus bas, d'une forme plus géométrique en introuduissant une distance ultramétrique sur K. Pour cela, ainsi que pour l'étude entiére du présent sujet, il faut citer comme notions preliminaires quelques éléments de la théorie générale des espaces ultramétriques [2] [3] [4] [6], qui nous sont nécessaires:

DÉFINITION 1. On appelle *distance ultramétrique* ou, simplement, *ultramétrique* sur un ensemble E toute application d de $E \times E$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés:

u_1: $d(x,y) = 0$

u_2: $d(x,y) = d(y,x)$

u_3: $d(x,y) \leq \max d(x,z), d(z,y)$

---

1. Certaines resultats relatif ont été présentés a l'Académie d'Athènes [11].

2. On identifie, quand rien ne s'y oppose, les éléments x d'un ensemble et les singletons correspondants $\{x\}$ [7] [13].

quels que soient x,y,z dans E. Le couple alors (E,d) est appelé *espace ultramétrique*.

REMARQUE 1. Tout espace ultramétrique est un espace métrique.

PROPOSITION 1

Soit (E,d) un espace métrique. Les propositions suivantes sont équivalentes:

i) L'espace (E,d) est un espace ultramétrique.

ii) Tout triangle de E est isocèle et la longueur de la base est plus petite que celle de deux côtés égaux ou elle leur est égale.

iii) Pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ la relation "$d(x,y) \leqq r$" est une relation d'équivalence dans E.

iv) Pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ la relation "$d(x,y) < r$" est une relation d'équivalence dans E.

Dans la suite (E,d) désiguera une espace ultramétrique.

COROLLAIRE 1. *Pour tout* $x,y,z \in E$ *tels que* $d(x,z) \neq d(y,z)$ *on a* $d(x,y) = \max(d(x,z), d(y,z))$.

DÉFINITION 2. Soient $r \in \mathbb{R}_+$ et $a \in E$. Alors:

a) L'ensemble $C(a,r) = \{x \in E : d(a,x) \leqq r\}$ s'appelle *cercle non circonférencié* de centre a et de rayon r.

b) L'ensemble $C(a,r^-) = \{x \in E : d(a,x) < r\}$ s'appelle *cercle non circonférencié* de centre a et de rayon r.

REMARQUE 2. L'emploi des termes "cercle circonférencié", "cercle non circonférencié" au lieu des terme classiques "cercle fermé", "cercle ouvert" se doit au fait que ces ensembles $C(a,r)$, $C(a,r^-)$, ainsi que l'ensemble $S(a,r) = \{x \in E : d(a,x) = r\}$ - *circonférence* de centre a et de rayon r - sont en même temps des parties ouverts et fermés de E par rapport à la topologie introduite sur lui par sa distance ultramétrique. En effet on a[1]

$$S(a,r) = C(a,r)..C(a,r^-) = \bigcup_{x\in S(a,r)} C(x,r^-)$$

et

$$C(a,r) = \bigcup_{x\in C(a,r)} C(x,r^-)$$

COROLLAIRE 2. i) *Deux cercles de même nature et de même rayon sont disjoints ou confondus.*

ii) *Deux cercles quelconques sont disjoints ou l'un est contenu dans l'autre.*

iii) *Tout point d'un cercle est son centre.*

COROLLAIRE 3. *La reunion d'une famille de cercles deux à deux non disjoints est un cercle. Si l'intersection d'une famille de cercles est non vide, alors c'est un cercle.*

PROPOSITION 2

i) Soit C un cercle de E. Alors pour tout $x,y \in$ IE et pour tout $a \in E..C$ on a $d(a,x) = d(a,y)$.

ii) Soient C et C' deux cercles disjoints de E. Alors pour tout $x,y \in C$ et $x',y' \in C'$ on a $d(x,x') = d(y,y')$.

REMARQUE 3. De la proposition précédente il résulte la définition de la distance ultramétrique d'un point non situé dans un cercle de ce cercle, ainsi que la distance ultramétrique de deux cercles disjoints.

En conclusion on voit que les cercles circonférenciés et non circonférencies jouent des rôles analogues. On aimerait pouvoir les paramétres sur un même ensemble. Un tel ensemble existe en effet, c'est celui S des nombres semi - - réels. Ainsi un cercle de E de centre $a\in E$ et de reyon semi - réel ρ est l'ensemble $C(a,\rho) = \{x\in E; d(a,x) \leqq \rho\}$. ρ est évidemment $\geqq 0$ et d'espèce 0 ou - .

1. On va noter A..B le complément de l'ensemble B dans l'ensemble A (qu'on ne suppose pas contenir B), c'est-à-dire $\{x \in A : x \notin B\}$.

Relativement aux nombres *semi-réels* nous citons que leur ensemble, défini tout abord comme quotient de l'ensemble des suites monotones de $\mathbb{R}$ par une relation équivalence convenable, coïncide finalement avec l'ensemble des couples $\mathbb{R}\times\Sigma = S$, où Σ est l'ensemble $\{-,0,+\}$ ordonné par l'ordre $<$ tel que $- < 0 < +$. D'autre part on voit que le complété de Kurepa pour les ensembles totalement ordonnés [4] dans le cas de la droite réelle devient la droite semi-réelle. À tout nombre semi-réel (r,ξ) on distingue sa *valeur réelle* $r \in R$ et son *espèce* $\xi \in \Sigma$ et on note souvent r^{ξ} au lieu de (r,ξ). L'ensemble S est évidemment totalement ordonné par l'ordre lexicographique et si on identifie le sous-ensemble S° de S formé par les nombres semi-réels d'espèce 0 avec $\mathbb{R}$, nous constatons facilement que l'ordre de $\mathbb{R}$ s'étend à S, mais pas sa structure topologique. En effet la topologie de S induite par son ordre total est anticonnexe. On note encore que les opérations de $\mathbb{R}$ sont aussi définies dans S, mais de manière partielle.

Dans un espace ultramétrique (E,d) le rayon $r_a(A)$ d'une partie quelconque A de E par rapport à un point $a \in A$, ainsi que le diamètre d(A) de A se considèrent pris dans l'ensemble S des nombres semi-réels et ils sont évidemment d'espèce 0 ou $-$, comme d'ailleurs on a vu auparavant pour les rayons de cercles de A. En particulier:

DÉFINITION 3. Si C est un cercle de E on appelle *rayon propre* de C le nombre semi-réel d'espèce 0 ou $-$

$$r(C) = \sup_S\{d(a,x) : x \in C\},$$

où $a \in C$ est quelconque[1]. Évidemment on a $r(C) = d(C)$.

PROPOSITION 3

Les cercles de l'espace (E,d) de meme rayon semi-réel ρ

---

1. $\sup_S$ signifie que le supremum est considéré dans l'ensemble des nombres semi-réels.

forment une partition D_ρ de E.

DÉFINITION 4. a) Les partitions D_ρ de E sont appelées *diviseurs* de l'espace ultramétrique (E,d).

b) On appelle *valuation* d'un diviseur D de (E,d) le nombre semi-réel $|D| = \sup_S\{d(x,y) : x,y \in E$ tels que $x \equiv y(D)\}$, d'espèce évidemment 0 ou − .

c) Si D et D' sont deux diviseurs de (E,d), on dit que D *divise* D', si on a $D' \preccurlyeq' D$, c'est - à - dire lors que $x \equiv y(D') \Rightarrow x \equiv y(D)$.

REMARQUES 4. a) $D' \preccurlyeq D \Longleftrightarrow |D'| \leq |D|$.

b) Si $D' \preccurlyeq D$, chaque classe (cercle) du diviseur D est une réunion de classes de D' (ce qui justifie l'expression "divise").

c) L'ensemble Δ des diviseur de (E,d) est toitalement ordonné ayant comme élément minimum le diviseur trivial D_0 (les cercles de la partition sont des points de E) et comme élément maximum le diviseur amorphe D_∞ (definissant l'équivalence universelle dans E).

PROPOSITION 4

L'ensemble Δ des diviseurs D_ρ de (E,d) est un treillis complet.

PROPOSITION 4

Pour tout diviseur D de (E,d) l'ensemble - quotient E/D est un espace ultramétrique par rapport à la distance ultramétrique des cercles de D.

La notion ci-dessus de l'espace ultramétrique peut être facilement géneralisée à celle de l' *espace hyperultramétrique* comme suit:

DÉFINITION 5. Soient E et Ω deux ensembles, dont Ω totalement ordonné et possedant un élément minimum, appelé *zéro* et noté 0. On appelle *distance hyperultramétrique* ou *hyperdistance* ou, encore, si la confusion n'est pas à craindre, simplement *distance* sur l'ensemble E toute application $d: E \times E \to \Omega$, qui vérifie les propriétés $u_1 - u_3$ de la définition 1. Dans ce cas le couple (E,d) est appelé *espace hyperultramétrique*.

RÉMARQUES 5. Toutes les propriétés précédents des espaces ultramétriques sont valables pour les espaces hyperultramétriques. Quant à la definition des rayons et des diamètres d'un sous-ensemble de E, un ensemble analogue à celui des nombres semi-réels est évidemment le completé de Kurepa de Ω [3] [5].

1. DÉFINITIONS ET CERTAINES PROPRIÉTÉS

DÉFINITION (1.1). On appelle *hypergroupe ultramétrique* un hypergroupe canonique H sur lequel on a defini un distance ultramétrique $d: H \times H \to \mathbb{R}_+$ satisfaisante en plus aux propriétés:

h_1: Il existe un nombre semi-réel $\rho \geqq 0$ d'espéce 0 ou − tel que pour tout $x,y,z \in H$ avec $z \in x+y$ on a

$$x + y = C(z, \rho\max(d(o,x), d(o,y))),$$

autrement dit que la somme $x+y$ est un cercle de l'espace ultramétrique (H,d) de rayon proportionnel au $\max(d(o,x), d(o,y))$ (où o est le zéro de H).

h_2: Pour tout $x,y,a \in H$ tels que $(x+a) \cap (y+a) = \emptyset$ on a

$$d(x+a, y+a) = d(x+y),$$

c'est-à-dire que la distance des cerles disjoints $x+a$, $y+a$ est $d(x,y)$ (Prop. 2, Rem. 3).

Une telle ultramétrique est dite *compatible* avec la structure d'hypergroupe de H.

Nous allons voir plus bas [Rem. (3.2)b] que les hypergroupes additifs des hypercorps valués sont des hypergroupes ultramétriques.

REMARQUES (1.1). a) *Pour tout* $x,y \in H$ *on a l'implication suivante:* $d(x,y) \leqq \rho d(o,x) \Rightarrow x = y$.

Car $d(x,y) \leqq \rho d(o,x) \Rightarrow y \in C(x, \rho d(o,x)) = x + o = x$

b) *Si* $H \neq \{o\}$, *on a* $\rho < 1$.

En effet $x \neq y \Rightarrow d(x,y) > \rho d(o,x)$ et par conséquent pour $x \neq y = o$ on aura $d(o,x) > \rho d(o,x)$, d'où $\rho < 1$.

Il est évident que dans le cas trivial $H = \{o\}$ la condition h_1 est vérifiée pour tout nombre semi-réel $\rho \geqq 0$ d'espèce 0 ou $-$. Mais si H est un hypergroupe canonique quelconque et P l'ensemble des nombres semi-réels verifiants la condition h_1, on a, quels que soient $x,y \in H$, $x + y = \bigcap C(z, \rho \max d(o,x), d(o,y)) = C(z, \inf_S P \cdot \max(d(o,x), d(o,y))$, donc $\inf_S P \in P$. En considerant donc dans la suite le plus petit des nombres semi-réels pour lesquels la condition h_1 est satisfaite, on *aura toujours* $0 \leqq \rho < 1$ (c'est-à-dire soit $H \neq \{o\}$, soit $H = \{o\}$).

c) *Si* $\rho = 0$, *alors* H *est un groupe abelien.*

DÉFINITION (1.2). Si (H,d) est un hypergroupe ultramétrique, le nombre $d(o,x)$ est dit *valuation* de l'élément x et il se note par $|x|$; la fonction $|\cdot| : H \to \mathbb{R}_+$ ainsi définie est appelée *valuation de* H *associée à l'ultramétrique* d.

Soit (H,d) un hypergroupe ultramétrique.

PROPOSITION (1.1)

Pour tout $x,y,z,w \in H$, si $(x+y) \cap (z+w) \neq \emptyset$, on a ou bien $x+y \subseteq z+w$, ou bien $z+w \subseteq x+y$.

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate (Col. 2) de la condition h_1 de la définition (1.1).

PROPOSITION (1.2)

Pour tout $x,y \in H$ tels que $x \neq y$ on a $(x-y) \cap (x-x) = \emptyset$ et $(x-y) \cap (y-y) = \emptyset$.

DÉMONSTRATION. En effet, si on avait p.e. $(x-y) \cap (x-x) \neq \emptyset$, alors, puisque $x \neq y$, on aurait $x-y \subset x-x$, donc de même $y-x \subset x-x$ et, par conséquent, pour les rayons des cercles $x-x$, $x-y$, $y-x$ on aurait les relations[1]:

$$\rho\max(|x|,|-y|) < \rho\max(|x|,|-x|)$$

et

$$\rho\max(|y|,|-x|) < \rho\max(|x|,|-x|),$$

d'où

$$\max(|x|,|-y|,|y|),|-x|) < \max(|x|,|-x|),$$

ce qui est inexact.

COROLLAIRE (1.1)

$x \neq y \Rightarrow d(x,y) = |x-y| = |y-x|$.

Car $d(x,y) = d(x-y,y-y) = d(x-y,o) = |x-y|$. (On a donc pour $x \neq y$ que $|x-y|$ est un singleton).

COROLLAIRE (1.2)

$|x| = |-x|$.

PROPOSITION (1.3)

Si $x \in x+y$, alors $x+y=x$.

---

1. Si $C(a,\rho)$, $C(a,\rho')$ sont deux cercles non disjoints d'un espace ultramétrique (E,d), il est facile de voir que $C(a,\rho) \subset C(a,\rho') \Rightarrow \rho < \rho'$, tandis que, inversement, $\rho < \rho' \Rightarrow C(a,\rho) \subseteq C(a,\rho')$. Mais si les rayons considerés sont propres, alors on a $\rho < \rho' \Leftrightarrow C(a,\rho) \subset C(a,\rho')$.

DÉMONSTRATION. $x \in x + y \iff y \in x - x = C(o,\rho|x|) \Rightarrow d(o,y) = |y| \leqq \rho|x| < |x| \Rightarrow x + y = C(x,\rho|x|) = x + o = x$.

Les propriétés ci-dessus de l'hypergroupe ultramétrique (H,d) exprimées par les propositions (1.1) et (1.3) ont un caractère purement algébrique, c'est-à-dire elles sont indépendantes de l'ultramétrique d. Si donc un hypergroupe canonique les vérifie, il constitue un hypergroupe encore plus special que l'hypergroupe canonique. Les hypergroupes de ce type ont des propriétés intéressantes, donc certaines jouent un rôle importante à l'étude générale des hypergroupes ultramétriques et hyperultramétriques (voir §4) et lesquelles nous allons exposées toute de suite.

2. HYPERGROUPES FORTEMENT CANONIQUES

DÉFINITION (2.1). Un hypergroupe canonique F est appelé *fortement canonique* s'il vérifie en plus les conditions:

f_1: Pour tout $x,y,z,w \in F$ tels que $(x + y) \cap (z + w) \neq \emptyset$ on a ou bien $x + y \subseteq z + w$, ou bien $z + w \subseteq x + y$

f_2: Si pour $x,y \in F$ on a $x \in x + y$, alors $x + y = x$.

REMARQUES (2.1). a) *Tout hypergroupe ultramétrique est fortement canonique. L'inverse n'est pas vrai en général.* Mais tout hypergroupe fortement canonique est hyperultramétrique (hypervaluable) d'un certain type [voir Remarque (4.2)].

b) *Pour tout* $x,y \in F$, *si* $y \in x - x$, *alors* $x \pm y = x$ *et, par conséquent*, $x + (x - x) = x$.

c) *Si* $F \neq \{0\}$, *pour tout* $x,y \in F$ *la somme* $x + y$ *est un sous-ensemble propre de* F.

d) *Pour tout* $x,y,a \in F, x \neq y$ *et* $(x + a) \cap (y + a) \neq \emptyset$ *entraîne* $x - y \subset a - a$ [car $(x - y) \cap (a - a) \neq \emptyset$ [4] [10] et $o \notin x - y$].

e) *Pour tout* $x \in F^*$ $(=F - \{o\})$ *on a* $x \notin x - x$.

f) *L'ensemble* $F_o = \{x - x; x \in F\}$ *et plus généralement l'ensemble* $F_w = \{x + y; x, y, w \in F$ avec $w \in x + y\}$ *est totalement ordonné par l'inclusion.*

Pour les sous-ensembles $x - x$, $x \in F$ on a en particulier la proposition:

PROPOSITION (2.1)

i) Pour tout $x \in F$ la différence $x - x$ est un sous-hypergroupe canonique (donc fortement canonique) de F.

ii) Pour tout $x, y \in F$ on a $(x - x) + (y - y) = \max(x - x, \ y - y) = (x - x) \cup (y - y)$.

DÉMONSTRATION. i) En effet [4] [10] $w_1, w_2 \in x - x \Rightarrow w_1 - w_2 \subseteq (x - x) - w_2 = x - (x + w_2) = x - x$.

ii) Il est clair, compte tenu que $x-x \subseteq y-y$ ou $y-y \subseteq x-x$ et que $x - x$, $y - y$ sont des sous-hypergroupes canoniques.

On note $\bar{x}$ le sous-hypergroupes $x - x$ de F et on l'appelle *hauteur* de l'élément x. Il en résulte que l'ensemble F_o des hauteurs est une famille de sous-hypergroupes canoniques emboités (chaîne de sous-hypergroupes canoniques) de F, possédant visiblement le sous-hypergroupe $\bar{o} = o - o = \{o\}$ comme élément minimum; F_o sera appelée *echelle naturelle* de F. La relation d'ordre de l'echelle naturelle sera notée de préférence par $\leqq$. $\leqq$.

PROPOSITION (2.2)

La proposition (1.2) est valable à tout hypergroupe fortement canonique.

DÉMONSTRATION. En effet, si pour $x, y \in F$ on a, p.e., $(x - y) \cap (x - x) \neq \emptyset$, alors pour tout $w \in (x - y) \cap (x - x)$ on aura $y \in x - w$ et [par la Rem. (2.1)b] $x - w = x$, ce qui est contradictoire, si $x \neq y$.

PROPOSITION (2.3)

Pour tout $x, y, a \in F$, si $(x+a) \cap (y+a) \neq \emptyset$, on a $x+a = y+a$ et $x-a = y-a$.

DÉMONSTRATION. Elle est évidente pour $x = y$. Soit $x \neq y$. Alors de $(x+a) \cap (y+a) \neq \emptyset$ on a $(x-y) \cap (a-a) \neq \emptyset$ et, par conséquent, pour tout $w \in (x-y) \cap (a-a)$ on aura

$$x \in w+y \text{ et } a+w = a, \quad \text{donc} \quad x+a \subseteq w+a+y = y+a$$

$$y \in x-w \text{ et } a-w = a, \quad \text{donc} \quad y+a \subseteq x-w+a = x+a$$

d'où $x+a = y+a$. D'autre part

$$(x+a) \cap (y+a) \neq \emptyset \Rightarrow (x-a) \cap (y-a) \neq \emptyset$$

et, selon le premier cas, $x-a = y-a$.

COROLLAIRE (2.1)

Quelsque soient x, y, a dans F les ensembles $x+a$ et $y+a$ sont ou bien disjoints ou bien coïncidents.

Il en résulte donc la proposition très considérable suivante:

PROPOSITION (2.4)

Si $x \in F$ est fixé, les sommes $x+y$, où y parcourt F, forment une partition de F.

La relation d'équivalence definie de cette partition est appelée *congruence* (mod.x). Donc, quelsque soient $w, w' \in F$, on a

$$w = w' (\text{mod} \cdot x) \Leftrightarrow (\exists y \in F) \; [(w \in x+y) \wedge (w' \in x+y)],$$

d'où il résulte que de manière équivalente on a

$$w \equiv w' (\text{mod } x) \Leftrightarrow x+w = x+w' \Leftrightarrow (w-w') \cap (x-x) \neq \emptyset,$$

[car, évdemment, $(x+w) \cap (x+w') \neq \emptyset$]. *La congruence* (mod.x), *donc, n'est que la relation d'équivalence modulo le sous--hypergroupe canonique* $x-x$ [13].

PROPOSITION (2.5)

Soient $x,y \in F$. Alors:

i) Si $\bar{x} \neq \bar{y}$, les ensembles $x+y$ et $x-y$ sont des singletons.

ii) Si $w \in x+y$, a) Deux au moins des hauteurs $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{w}$ sont égales et la troisième leur est infétieure ou égale,

b) Deux au moins des ensembles $x+y$, $w-x$, $w-y$ sont des singletons.

Tout particuièrement on a:

Si $\{w\} \subset x+y$, alors ou bien $w-x=y$, $w-y=x$ et $\bar{w}<\bar{x}=\bar{y}$

ou bien $w-x=y$, $\{x\} \subset w-y$ et $\bar{x}<\bar{y}=\bar{w}$

Si $w=x+y$, alors ou bien $w-y=x$, $\{y\} \subset w-x$ et $\bar{y}<\bar{x}=\bar{w}$

ou bien $w-x=y$, $w-y=x$ et $\bar{x}=\bar{y}=\bar{w}$

ainsi que

Si $\bar{w}<\bar{x}=\bar{y}$, alors $\{w\} \subset x+y$, $w-x=y$, $w-y=x$

Si $\bar{w}=\bar{x}=\bar{y}$, alors $x+y=w$, $w-x=y$, $w-y=x$

Démontrons tout abord le lemme:

LEMME. i) *Pour tout* $x,w \in F$ *on a* $w+(x-x)=x+y$ *quelque soit* y *dans* $w-x$.

ii) $w \in x+y \Rightarrow x+y=w+(x-x)=w+(y-y)$

iii) *Pour tout* $x,w \in F$ *on a*: $\bar{x} \leq \bar{w} \Leftrightarrow w+(x-x)=w$

DÉMONSTRATION. i) $w+(x-x)=x+(w-x)=\bigcup\limits_{y \in w-x} x+y=x+y$,

car pour tout $y_1,y_2 \in w-x$ on a $x+y_1=x+y_2$ d'après la proposition (2.3).

ii) Il résulte immédiatement du précedent.

iii) $\bar{x} \leq \bar{w} \Rightarrow w+(x-x) \subseteq w+(w-w)=w$ par la remarque (2.1)b. D'autre part, inversement, il est clair que $w+(x-x)=$ $=w \Rightarrow x-x \subseteq w-w$, c'est-à-dire $\bar{x} \leq \bar{w}$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Soient $x,y,w \in F$ tels que $w \in x+y$. Alors, d'après les cas ii) et iii) du lemme, on aura

$$\{w\} \subset x + y \Rightarrow \bar{w} < \bar{x} \quad \text{et} \quad \bar{w} < \bar{y} \tag{1}$$

et

$$\bar{w} < \bar{x} \quad \text{ou} \quad \bar{w} < \bar{y} \Rightarrow \{w\} \subset x + y \tag{2}$$

(Car les relations $\{w\} \subset x + y$ et, p.e., $\bar{x} \leqq \bar{w}$ sont incompatibles). Par conséquent

$$\bar{x} = \bar{y} \Rightarrow w - x = y \quad \text{et} \quad w - y = x \tag{3}$$

D'autre part

$$\{w\} \subset x + y \Rightarrow w - x = y \quad \text{et} \quad w - y = x \tag{4}$$

car, si p.e. $\{y\} \subset w - x$, on aurait $\bar{y} < \bar{w}$, ce qui est inexact, compte tenu que $\{w\} \subset x + y \Rightarrow \bar{w} < \bar{y}$. On a, donc, [en s'appuyant sur (2) et (4)],

$$\{w\} \subset x + y \Rightarrow \bar{x} = \bar{y} \tag{5}$$

et

$$\bar{x} < \bar{y} \Rightarrow \{x\} \subset w - y \quad \text{et} \quad w - x = y \quad \text{et} \quad x + y = w \tag{6}$$

donc, encore,

$$x + y = w \quad \text{et} \quad w - x = y \quad \text{et} \quad w - y = x \Rightarrow \bar{x} = \bar{y} = \bar{w} \tag{7}$$

Finalement on a encore

$$\bar{x} < \bar{y} \Rightarrow \bar{w} = \bar{y} \tag{8}$$

[à partir de (5) et (5)] et

$$x + y = w \Leftrightarrow \bar{w} = \max(\bar{x}, \bar{y}) \tag{9}$$

car dans ce dernier cas on aura ou bien $x + y = w$ et $w - x = y$ et $w - y = x$, donc [par la propriété (7)] $\bar{w} = \bar{x} = \bar{y}$, ou bien, p.e., $x + y = w$ et $w - x = y$ et $\{x\} \subset w - y$, donc $\bar{x} < \bar{y} = \bar{w}$ [d'après (1) et (8)].

Donc, pour les deux parties de la proposition, on a

i) Si $\bar{x} \neq \bar{y}$, alors la somme $x + y$ est un singleton, comme la propriété (6) le montre, et de même la différence $x - y$, car si $x - y$ ne l'est pas, alors, selon (5), on aurait $\bar{x} = -\bar{y} = \bar{y}$, ce qui s'oppose à l'hypothèse.

ii) C'est exprimée par toutes les relations (1)-(9).

COROLLAIRE (2.2). *Pour tout* $x,y,a\in F$ *tels que* $x\neq y$ *et* $(x+a)\cap(y+a)\neq\emptyset$ *les égaux* [*d'après la proposition* (2.3)] *ensembles* $x+a$ *et* $y+a$ *sont des singletons.*

(Car $\{w\}\subset x+a=y+a \Rightarrow w-a=x$ et $w-a=y$, donc $x=y$, ce qui est inexact).

COROLLAIRE (2.3). *Pour tout* $x\in F$ *l'ensemble* $a_x=\{z\in F:\bar{z}\leq\bar{x}\}$ *est un sous-hypergroupe canonique de* F.

Relativement à leur ensemble $A=\{a_x : x\in F\}$ on remarque qu'évidemment on a: $\bar{x}=\bar{y} \Leftrightarrow a_x=a_y$ et $\bar{x}<\bar{y} \Leftrightarrow a_x\subset a_y$. A constitue donc une famille de sous-hypergroupes canoniques emboités de F, dont le plus petit élément est $a_o=\{z\in F:\bar{z}=\bar{o}\}$, c'est-à-dire le sous-hypergroupe des scalaires de F qui, comme on le sait, est un groupe abelien [4] [10]. D' autre part, il est clair que cette famille A est semblable à l' echelle naturelle de F_o, moyennant de laquelle est définie et c'est pour cela normale d'être appelée *echelle adjointe* de F.

PROPOSITION (2.6)

i) Pour tout $x,w,w'\in F$ on a $w\equiv w'(\mathrm{mod}.x)\Leftrightarrow w+(x-x)=w'+(x-x)$

ii) Si $w\neq w'$, on a $w\equiv w'(\mathrm{mod}.x) \Leftrightarrow w'-w\subset x-x$

DÉMONSTRATION. i) En effet, $x-x$ est un sous-hypergroupe canonique de F et on a généralement pour un n'importe quel hypergroupe canonique H et pour tout sous-hypergroupe canonique h de H $w\equiv w'(\mathrm{mod}.h) \Leftrightarrow (w-w')\cap h\neq\emptyset$, donc $w\in w'+h$ et $w'\in w-h=w+h$, d'où $w+h\subseteq w'+h$ et $w'+h\subseteq w+h$, d'où $w+h=w'+h$.

ii) On a $w\equiv w'$ (mod.x) $\Leftrightarrow (w'-w)\cap(x-x)=\emptyset$, $w'-w\subset x-x$, car $w\neq w'$ [Rem. (2.1)d]. D'autre part $w-w'\subset x-x \Rightarrow$

$\Rightarrow (w-w')\cap(x-x)\neq\emptyset \Rightarrow w\equiv w'(\mathrm{mod}.x)$.

Nous démontrons encore la proposition trés importante suivante:

PROPOSITION (2.7)

Quels que soient $x,y,z,w \in F$ avec $z \in x+y$ on a $w \in x+y \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow w-z \subseteq \max(\bar{x},\bar{y})$.

DÉMONSTRATION. En effet, $z \in x+y$ et $w \in x+y$ entraînent $w-z \subseteq (x-x)+(y-y) = \max(\bar{x},\bar{y})$. [Prop. (2.1) ii]. Inversement si $w-z \subseteq \max(\bar{x},\bar{y})$, p.e. $w-z \subseteq x-x$, alors si $w \neq z$, on aura $w-z \subset x-x$, donc, en vertu de la proposition précédente, $w \equiv z (\mathrm{mod}.x)$ et, comme $z \in x+y$, il s'ensuit que, de même, $w \in x+y$.

3. HYPERGROUPES CANONIQUES VALUÉS. L'HYPERGROUPE SUPERIEUREMENT CANONIQUE

Revenons aux hypergroupes ultramétriques. Des précedents decoulent les remarques suivantes:

REMARQUES (3.1). Soit (H,d) un hypergroupe ultramétrique et n'importe quels $x,y,a \in H$.

a) i) $x \neq y$ et $(x+a) \cap (y+a) \neq \emptyset \Rightarrow d(x+a,y+a) = 0$

ii) $(x+a) \cap (y+a) \neq \emptyset \Rightarrow d(x,y) \in |a-a|$

iii) $d(x+y,x+y) \subseteq |x-x|$

Les deux premières résultent du corollaire (2.2) et de la proposition (2.6) ii. Quant à la troisième on voit qu' il est évidemment vraie, si $x+y$ est un singleton. Sinon on aura $\bar{x}=\bar{y}$ et, pour tout $z,w \in x+y$, on a $w-z \subseteq x-x$, donc si $w \neq z$, $|w-z| = d(z,w) \in |x-x|$.

b) Il en résulte immédiatement que, si r_{xy} le rayon propre du cercle $x+y$, donc $r_{xy} = \sup_s d(x+y,x+y)$, on a $r_{xy} \leq$ $\leq \rho\max(|x|,|y|)$. Par conséquent si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, pour tout $z,w \in x+y$ on a $d(z,w) < \max(|x|,|y|)$.

c) Soient H un hypergroupe canonique et d_1, d_2 deux ultramétriques définies sur lui et compatibles avec sa structure d'hypergroupe, $|\cdot|_1$ et $|\cdot|_2$ les valuations associées respectives à d_1 et d_2. Alors évidemment $|\cdot|_1 = |\cdot|_2 \Rightarrow d_1 = d_2$. Il est donc naturel qu'étant donnée une fonction $|\cdot| : H \to \mathbb{R}_+$ de chercher des conditions nécessaires et suffisantes sur cette fonction pour qu'elle soit la valuation associée à une ultramétrique sur H, compatible avec sa structure d'hypergroupe.

Relativement on a la proposition fondamentale suivante:

PROPOSITION (3.1)

Soit H un hypergroupe canonique. Pour qu'une fonction $|\cdot| : H \to \mathbb{R}_+$ soit la valuation associée à une ultramétrique sur H, compatible avec sa structure d'hypergroupe, il faut et il suffit qu'elle vérifie les cinq propriétés suivantes:

v_1: $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$, $x \in H$

v_2: $|x| = |-x|$, quel que soit $x \in H$.

v_3: Pour tout $x, y \in H$ tels que $x \neq y$ l'ensemble $|x - y|$ est un singleton [on écrit comme d'habitude $|x-y| \in \mathbb{R}_+$ (c'est-à-dire $\in$ au lieu de $\subseteq$)].

v_4: Pour tout $x, y \in H$, $|x + y| \leq \max(|x|, |y|)$ [autrement dit $z \in x + y \Rightarrow |z| \leq \max(|x|, |y|)$].

v_5: Il existe un nombre semi-réel $\rho \geq 0$ d'espèce 0 ou - tel que, pour tout $x, y, z, w \in H$, $z \in x+y$ et $|w-z| \leq \rho \max(|x|, |y|)$ entraîne $w \in x + y$.

DÉMONSTRATION. I. La condition est nécessaire: Soient d une ultramétrique compatible avec l'hyperopération d'hypergroupe de H, $|\cdot|$ la valuation respective associée. Alors:

i) $|x| = 0 \Leftrightarrow d(o,x) = 0 \Leftrightarrow x = o$. $|\cdot|$, donc, verifie v_1.

ii) $|\cdot|$ vérifie v_2 selon le corollaire (1.2).

iii) $|\cdot|$ vérifie aussi v_3, en vertu du corollaire (1.1).

iv) On distingue deux cas: $o \notin x + y$ et $o \in x + y$.

$$o \notin x + y \Rightarrow |x + y| = d(o, x + y) = d(x + y, y - y) =$$
$$= d(x,-y) \leqq \max(d(o,x), d(o,-y)) =$$
$$= \max(|x|, |y|),$$

d'après ii) et la proposition (2.1).

$$o \in x + y \Rightarrow x + y = x - x = C(o, |x|) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |x - x| \leqq \rho|x| < |x|,$$

c'est-à-dire, de même, $|x + y| \leqq \max(|x|, |y|)$

v) On a $x + y = C(z, \rho\max(|x|, |y|))$. Par conséquent pour tout $w \in H$, $w \neq z$, on a que $w \in x+y \Leftrightarrow d(z,w) = |z - w| \leqq \leqq \rho\max(|x|, |y|)$. [Mais même pour le cas $w = z$ on a la même chose, parce que, d'après la proposition (2.7), on a $z \in \max(\bar{x}, \bar{y})$, donc $|z - z| \leqq \max|x - x| \cup \cup |y - y| \leqq \rho\max(|x|, |y|)$].

II. La condition est suffisante. Soit que la fonction $|\cdot| : H \to \mathbb{R}_+$ vérifie les propriétés $v_1 - v_5$. Si elle est la valuation associée à une ultramétrique sur H compatible avec l'hyperopération d'hypergroupe de H, alors pour tout $x, y \in H$ on a $d(x,y) = |x - y|$, si $x \neq y$ et 0, si $x = y$. Verifions que cette fonction $d : H \times H \to \mathbb{R}_+$, définie moyennant v_3 comme ci-dessus, est une telle ultramétrique:

i') $x \neq y$ et $d(x,y) = 0$ sont incompatibles, car $|x-y| = 0 \Rightarrow \Rightarrow (\exists z \in x - y) [|z| = 0] \Rightarrow z = o$ par v_1 et, par conséquent, $o \in x - y$, c'est-à-dire $x = y$. Donc $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = y$ et l'axiome u_1 des distances ultramétriques est satisfait (Déf. 1).

ii') L'axiome u_2 est aussi satisfait, car évidemment, en vertu de v_2 (pour $x \neq y$), on a $d(x,y) = |x-y| = |y - x| = = d(y,x)$.

iii') La condition $d(x,y) \leqq \max(d(x,z), d(z,y))$, c'est - à - -dire l'axiome u_3, est satisfaite à l' évidence aux trois cas: $x = y$ et z quelconque, $x \neq y = z$, $z = x \neq y$.

Autrement on aura $x - y \subseteq (x - y) + (z - z) = (x-z) + (z-y)$ et par conséquent pour tout $w \in x-y$ il existe $w_1 \in x-z$ et $w_2 \in z-y$ tels que $w \in w_1 + w_2$, donc, moyennant v_4, $|w| \leqq \max(|w_1|, |w_2|)$ et finalement, en raison de v_3, $|x - y| \leqq \max(|x - z|, |z - y|)$. L'axiome donc u_3 est généralement satisfait.

La fonction donc d est une ultramétrique sur H. De plus, elle est compatible avec la structure d'hypergroupe canonique de H, parce que:

iv') La condition h_1 des hypergroupes ultramétriques est satisfait puisque, comme cela résulte de v_5, pour tout $t < H..(x + y)$ on a $d(z,t) > \rho\max(|x|, |y|)$, donc $x + y = C(z, \rho\max(|x|, |y|))$, c'est-à-dire, en effet, x+y est un cercle de l'espace (H,d) de rayon proportionnel au $\max(|x|, |y|)$.

v') Pour vérifier que d satisfait encore à la condition h_2 on remarque tout abord que

a) L'hypergroupe H est fortement canonique, car la validité de h_1 entraîne la validité de la proposition (1,1), c'est-à-dire la condition f_1 des hypergroupes fortement canoniques, ainsi que la validité de la proposition (1.2), qui, en combinaison avec les propriétés v_2 et v_3 qui ne sont d'autres que les corollaires (1.1) et (1.2), assure la validité de la proposition (1.3), c'est-à-dire la condition f_2 des hypergroupes fortement canoniques.

b) La fonction $|\cdot|$ vérifie pour tout $x, a \in H$ la propriété: $x \notin a - a \Rightarrow |x + a - a| = |x|$. En effet, d'après le lemme de la proposition (2.5), on a $x + (a - a) = a + y$, où $y \in x - a$ est quelconque. En plus on a $y \neq -a$ (car autrement $x \in a - a$) et, par conséquent et en raison de v_3, $|a + y|$ est un singleton. Donc $|a + y| = |x + a - a| = |x|$.

En continuant on voit que pour tout $x,y,a \in H$ tels que $(x+a) \cap (y+a) = \emptyset$ on a $d(x+a, y+a) = d(z,w) = |z-w|$, où $z \in x+$ $+a$, $w \in y+a$ sont quelconques. Mais $|z-w| \in |(x+a)-(y+a)| =$ $= |(x-y)+(a-a)| = \bigcup_{t \in x-y} |t+a-a| = \{|t| : t \in x-y\}$, car $(x+a) \cap$ $\cap (y+a) = \emptyset \Rightarrow (x-y) \cap (a-a) = \emptyset \Rightarrow t \notin a-a$ et, puisque $x \neq y$, $|t| = |x-y|$. Donc on a $d(z,w) = |x-y|$, c'est-à-dire $d(x+a,$ $y+a) = d(x,y)$ et la condition h_2 est aussi satisfaite.

(H,d) est bien un hypergroupe ultramétrique.

DÉFINITION (3.1). Soit H un hypergroupe canonique. Une fonction $|\cdot| : H \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant aux propriétés $v_1 - v_5$ de la proposition précédente est appelée *valuation* de H; la fonction $d : H \times H \to \mathbb{R}_+$ définie moyennant la valuation, comme elle est exposée dans la proposition, est une ultramétrique sur H appelée *ultramétrique associée à la valuation* $|\cdot|$.

Tout hypergroupe canonique muni d'une valuation est dit *valué*.

REMARQUES (3.2). a) De la proposition (2.5) il résulte que *les notions de l'hypergroupe ultramétrique et de l'hypergroupe valué sont identiques.*

b) Il est facile de voir que *les hypergroupes additifs des hypercorps valués sont des hypergroupes valués.*

c) De la démonstration de la proposition (2.5) il résulte que *pour tout* $x,a \in H$ si $x \notin a-a$ (ou si $x = a-a = 0$) *on a* $|x+a-a| = |x|$. Le reciproque est aussi vraie. En plus on voit que si $x \in a-a$, alors $|x+a-a| = |a-a|$. Car $|x+a-a| =$ $= \{d(x,y) : y \in a-a\}$, donc, puisque $x-y \subseteq a-a, d(x,y) \in |a-a|$.

PROPOSITION (3.2)

Soit H un hypergroupe valué. i) Pour tout $x,y \in H$ on a $\bar{x} < \bar{y} \Rightarrow$ $\Rightarrow |x| < |y|$, tandis que, inversement, $|x| < |y| \Rightarrow \bar{x} \leq \bar{y}$. ii) Si $w \in x+y$, deux au moins des valuations $|x|$, $|y|$, $|w|$ sonts équales

et la troisième leur est inférieure ou équale. En particulier on a:

$$\bar{x} \neq \bar{y} \Rightarrow |w| = \max(|x|,|y|), \quad \{w\} \subseteq x+y \Rightarrow |w| < |x| = |y|$$

DÉMONSTRATION. i) $\bar{x} < \bar{y} \Rightarrow x - x \subset y - y \Rightarrow C(o,\rho|x|) \subset$

$$\subset C(o,\rho|y|) \Rightarrow \rho|x| < \rho|y| \Rightarrow |x| < |y|$$

(pour $\rho \neq 0$).

Inversement $|x| < |y| \Rightarrow C(o,\rho|x|) \subseteq C(o,\rho|y|) \Rightarrow x - x \subseteq$ $\subseteq y - y$, c'est-à-dire $\bar{x} \leq \bar{y}$.

ii) Il résulte des relations $|w| \leq \max(|x|,|y|)$, $|x| \leq$ $\leq \max(|y|,|w|)$, $|y| \leq \max(|w|,|x|)$. Les relations particulières sont des conséquences immediates de ces dernières et de i).

COROLLAIRE (3.1). i) *Si* $|x| \neq |y|$, *la somme* $x+y$ *est un singleton.*

ii) $|x| = |y| \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$, *donc:*

iii) *Si* $o \notin x+y$, *alors pour tout* $z,w \in x+y$ *on a* $\bar{z} = \bar{w}$.

COROLLAIRE (3.2). Si $x \in z - z$ et $y \notin z - z$ on a $\bar{x} \leq \bar{y}$.

On voit que cette propriété, comme de même la troisième du corollaire précédent, possède de caractère purement algébrique. On peut donc considérer des hypergroupes fortement canoniques les vérifiants.

DÉFINITION (3.2). Un hypergroupe fortement canonique S est appelé *supérieurement canonique* s'il satisfait en plus aux conditions:

S_1: Pour tout $x,y,z,w \in S$ tels que $o \notin x+y$ et $z,w \in x+y$ on a $\bar{z} = \bar{w}$.

S_2: Si $x \in z - z$ et $y \notin z - z$ on a $\bar{x} \leq \bar{y}$.

REMARQUES (3.3). a) *La condition* S_2 *est équivalente,* comme il est évident, *à la condition*

S'_2: *Si* $\bar{x} < \bar{y}$ *et* $y \in z - z$, *on a aussi* $x \in z - z$.

b) *Tout hypergroupe valué est supérieurement canonique*

c) *Tout sous-hypergroupe canonique d'un hypergroupe supérieurement canonique est supérieurement canonique.*

Pour les hypergroupes valués nous citons encore quelques propriétés. Soit H un tel hypergroupe:

PROPOSITION (3.3)

Pour tout $x \in H$ le sous-hypergroupe a_x [voir Corol. (2.3)] est un cercle de H centré sur son zéro.

DÉMONSTRATION. En effet on a $a_x = \{z \in H : \bar{z} \leqq \bar{x}\}$ et si $y \in a_x$ et $|z| \leqq |y|$, alors on aura $\bar{z} \leqq \bar{y} \leqq \bar{x}$, donc $z \in a_x$.

PROPOSITION (3.4)

Pour tout $x \in H$ la partition (mod. x) de H est le diviseur $D_{\rho|x|}$ de l'espace ultramétrique (H,d).

DÉMONSTRATION. Comme on a vu [Prop. (2.4)] les classes de la partition (mod. x) sont les sommes $x + y$, $y \in H$ et les classes du diviseurs $D_{\rho|x|}$ sont des cercles de rayon semi-réel $\rho|x|$ (Prop. 3). Soit donc $z \in x + y$. Si $|y| \leqq |x|$, alors $x + y = C(z, \rho|x|)$. Si $|x| < |y|$, alors, d'après le corollaire (3.1), la somme $x + y = z = C(\dot{z}, \rho|y|)$ et, puisque $C(z, \rho|x|) \subseteq C(z, \rho|y|)$, il s'ensuit que l'on a de même $x + y = C(z, \rho|x|)$.

PROPOSITION (3.5)

Soit $r \geqq 0$ un nombre semi-réel d'espèce 0 ou $-$. Alors pour tout $x \in H$ on a $C(x,r) = x + C(o,r)$.

DÉMONSTRATION. On a $y \in C(o,r) \Rightarrow |y| \leqq r$. Donc pour tout $w \in x + C(o,r)$, $w \neq x$, il existe un $y \in C(o,r)$ tel que $y \in w - x$, qui entraîne que $|y| = |w - x| = d(x,w) \leqq r$, donc $w \in C(x,r)$, d'où $x + C(o,r) \subseteq C(x,r)$. Inversement pour tout $w \in C(x,r)$, $w \neq x$, on a $d(x,w) = |w - x| \leqq r$, donc pour tout $y \in w - x$ on a $|y| \leqq r$

et par conséquent $y \in C(o,r)$, d'où $w \in x + y \subseteq x + C(o,r)$, c'est-à-dire $C(x,r) \subseteq x + C(o,r)$.

COROLLAIRE (3.3). *Pour se donner un diviseur dans un hypergroupe valué il suffit de se donner sa classe de zéro.*

COROLLAIRE (3.4). $x + C(a,r) = \bigcup_{w \in x+a} C(w,r)$.

PROPOSITION (3.6)

Tout cercle centré sur le zéro de H est un sous-hypergroupe canonique de H.

DÉMONSTRATION. En effet on a $C(o,r) + C(o,r) = C(o,r)$ et pour tout $x \in C(o,r)$ on a encore $-x \in C(o,r)$.

PROPOSITION (3.7)

i) Pour tout $x \in H$, x est un élément de plus grande hauter du cercle $C(o,|x|)$.

ii) Si $\bar{y} < \bar{x}$, alors $y \in C(o,|x|)$ et par conséquent

$$C(o,|x|) \subseteq a_x.$$

DÉMONSTRATION. Elle découle immédiatement de la proposition (2.3).

Soit G l'ensemble des cercles de centre o et de rayon semi-réel r. Il est évident que G constitue une famille de sous-hypergroupes canoniques emboités de H, ayant comme élément minimum le sous-hypergroupe canonique trivial $\{o\} = C(o,|0|)$. D'autre part on voit facilement que pour tout $x \in H$ le cercle $C(o,|x|)$ est l'intersection de tous les cercles $C(o,r)$ de G contenants x. C'est-à-dire on a $C(o,|x|) = \bigcap_{|x| \leq r} C(o,r)$.

Deux autres familles de sous-hypergroupes canoniques emboités qui sont en même temps des cercles de H centrés à o et qui jouent un rôle très important dans la théorie générale des valuations des hypergroupes canoniques sont les deux echelles H_o et A de H (naturelle et adjointe). Ces trois familles G, H_o et A sont évidemment compatibles pour l'inclusion, autrement dit leur réunion $G \cup H_o \cup A$ est aussi une famille de sous-hypergroupes enboités (ici ou a même $H_o \cup A \subseteq G$). Compte tenu encore que l'intersection d'une famille de cercles non disjoints est aussi un cercle, on peut énoncer pour la famille G les propositions:

PROPOSITION (3.8)

La famille G vérifie les propriétés: 1°. Pour tout $x \in H$ elle contient l'intersection de tous sous-hypergroupes $g \in G$ tels que $x \in g$. 2°. Elle contient la suite des intersections analogues de la réunion $H_o \cup A$. 3°. La réunion $G \cup H_o \cup A$ est totalement ordonnée par l'inclusion.

REMARQUE (3.4). La famille G contient encore plus généralement (que 1°) l'intersection des sous - hypergroupes canoniques de toute sous-famille de G, ainsi que la suite des intersections analogues de $H_o \cup A$.

PROPOSITION (3.9)

Il existe une application injective de l'ensemble $|H|$ des valeurs de la valuation $|\cdot|$ dans l'ensemble G qui, quel que soit $x \in H$, correspond à la valeur $|x|$ de $|\cdot|$ l'intersection de tous sous-hypergroupes de la famille G contenants x.

Le nombre semi-réel ρ définit évidemment une application croissante au sens strict de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_+^-$, $\mathbb{R}_+^-$ signifiant l'ensemble des nombres semi-réels positifs d'espèce – . D'autre part puisque, comme il est clair, i) l'ensemble Γ des cercles de centre o et de rayon réel est un sous-ensemble propre de G, ii) l'intersection d'une famille de cercles est un cercle de rayon en général semi - réel et iii) pour des nombres semi-réels positife d'espèce 0 ou -

on a $\rho_1 < \rho_2 \Rightarrow C(o,\rho_1) \subseteq C(o,\rho_2)$, il s'ensuit que le nombre semi-réel ρ définit une application $\varphi_\rho : \Gamma \to G$, qui est croissante au sens large et telle que $\varphi_\rho \cdot C(o,0) = C(o,0)$. La remarque conduit à la géneralisation suivante:

4. HYPERGROUPES CANONIQUES HYPERVALUÉS

DÉFINITION (4.1). Soient H un hypergroupe canonique et Ω un ensemble totalement ordonné possédant un élement minimum 0 (le *zéro* de Ω) et soient encore $\hat{\Omega}$ le completé de Kurepa de Ω et $\hat{\Omega}^\xi$ la partie de $\hat{\Omega}$ d'espèce ξ. On dit que l'hypergroupe H est *hyperultramétrique* s'il existe une distance hyperultramétrique $d: H \times H \to \Omega$ satisfaisante en plus aux condition h_1 et h_2 de la définition (1.1), où, au lieu du nombre semi-réel ρ on a maintenant une application convenable $\rho : \Omega \to \hat{\Omega}$, qui est croissante au sens large et telle que $\rho \cdot 0 = 0$ (hyperdistance *compatible* avec la structure d'hypergroupe de H).

REMARQUES (4.1). a) *Tout hypergroupe ultramétrique est hyperultramétrique.*

b) *La fonction* ρ *est encore telle que* $\rho|x| < |x|$, *quel que soit* x *dans* H*.

Car, en effet, pour tout $x,y \in H$ on a, comme dans les hypergroupes ultramétriques, l'implication $d(x,y) \leq \rho|x| \Rightarrow x=y$ demontrée comme dans le cas correspondant [Remar.(1.1)a]. Donc pour tout $x \in H^*$ on aura $d(o,x) > \rho|x|$, c'est-à-dire $\rho|x| < |x|$.

c) *Si* ρ *est l'application constante ayant comme valeur pour tout* $\omega \in \Omega, \rho\omega = 0$, *alors* H *est un groupe abelien.*

d) Tout hypergroupe hyperultramétrique, vérifie toutes les propriétés que l'on a demontré pour les hypergroupes ultramétriques. Les démonstrations des propositions relatives se réalisent par la repétition des mêmes raisonnements comme dans les cas correspondants, avec, bien entendu, des modifications convenables d'expessions en raison que au lieu de l'ensemble $\mathbb{R}_+$ on a maintenant Ω, au lieu du nombre semi-réel ρ la fonction ρ et au lieu de l'espace ultramétrique un espace hyperultramétrique. On définie ainsi comme analogue de l'hypergroupe valué l'hypergroupe *hypervalué* et on trouve, conformément à la proposition respective (pour le cas présent) à la proposition (3.1), que cette notion est équivalente à celle de l'hypergroupe hyperultramétrique. Il en résulte enfin comme conclusion que *tout hypergroupe canonique hypervalué est supérieurement canonique.*

Ce qui est trés considérable pour la théorie, en général, de valuations des hypergroupes canoniques est que le reciproque à la proposition ci-dessus est encore valable. C'est-à-dire que *tout hypergroupe supérieureument canonique est hypervaluable* (c'est-à-dire il possède une hypervaluation).

Pour la démonstration on remarque d'abord que, si un hypergroupe canonique accepte deux hypervaluations $|\cdot\cdot|_1$ et $|\cdot\cdot|_2$, celles-ci sont toujours comparables et on dit que $|\cdot\cdot|_1$ est *plus fine*, ou encore, *moins grossière* que $|\cdot\cdot|_2$, si, pour tout $x,y \in H$, $|x|_1 = |y|_1 \Rightarrow |x|_2 = |y|_2$. La plus grossière donc des valuations que l'on peut définir sur un hypergroupe hypervaluable est celle qui, selon les propositions (3.9) et (3.8), correspond à tout $x \in H$ le sous-hypergroupe de H, qui est l'intersection de sous-hypergroupes de la famille $H_o \cup A$ contenant x et qui, comme il est visible, correspond à la valuation triviale des groupe (on a en effet $H_o = \{\{o\}\}$ et $A = \{\{H\}\}$). D'autre part on remarque encore que la famille $H_o \cup A$ est cohérent avec H, cette dernière étant bien entendu un hypergroupe supérieurement (donc à fortiori, fortement) canonique.

Soit donc S un hypergroupe supérieurement canonique. Pour démontrer qu'il est hypervaluable il suffit de construire une de ses hypervaluations possibles, de préférence la plus grossière. Pour cela on démontre tout d' abord le lemme.

LEMME 1. *Les deux echelles* S_o *et* A *(naturelle et adjointe) de* S *sont compatibles pour l'inclusion. En d'autres termes leur réunion* $S_o \cup A$ *est une famille de parties emboitées de* S.

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer que pour tout $\bar{x} \in S_o$ et pour tout $a_y \in A$ on a ou bien $\bar{x} \subseteq a_y$, ou bien $a_y \subseteq \bar{x}$. On distingue deux cas: $\bar{x} \leqq \bar{y}$ et $\bar{y} < \bar{x}$.

a) Si $\bar{x} \leqq \bar{y}$, alors $w \in x - x \Rightarrow \bar{w} < \bar{x} \Rightarrow \bar{w} < \bar{y} \Rightarrow w \in a_y$. Donc $\bar{x} \subseteq a_y$.

b) Si $\bar{y} < \bar{x}$ deux sous-cas sont én évidence possibles: $y \in x - x$ et $y \in x - x$.

i) Soit $y \in x - x$. Alors, en vectu de la condition S_2 [déf. (3.2)] , pour tout $z \in x - x$ on a $\bar{z} \leqq \bar{y}$, donc $z \in a_y$ et par conséquent $\bar{x} \subset a_y$.

ii) Soit $y \in x - x$. Alors, si on n'a pas $a_y \subseteq \bar{x}$, il existera un $z \in a_y$ tel que $z \notin x - x$. Par conséquent (de même en vertu de S_2) $\bar{y} \leqq \bar{z}$ et comme $\bar{z} \leqq \bar{y}$ on a enfin $\bar{y} = \bar{z}$. D'autre part dans ce cas il n'est pas possible d' avoir un $w \in x - x$ avec $\bar{y} < \bar{w}$, car, puisque $z \notin x-x$, on aura $\bar{w} \leqq \bar{z}$, donc $\bar{w} < \bar{y}$, ce qui est contradictoire à $\bar{y} < \bar{w}$. On aura, donc, pour tout $w \in x - x$, $\bar{w} \leqq \bar{y}$ entraînant $w \in a_y$. C'est-à-dire on a de même $\bar{x} \subset a_y$.

La réunion donc $S_o \cup A$ est une chaîne de sous-hypercoupes canoniques de S.

Soit maintenant Ω l'ensemble résultant de $S_o \cup A$, si on lui adjoint l'ensemble des intersections de toutes ses sous-familles et, également, S lui-même. Ω est evidemment l' analogue à l'ensemble G de la proposition (8.3), puisque il vérifie, comme il est facile de voir, ses propriétés énumérées $1^{\circ}-3^{\circ}$. Designons en suite quels que soient x, y dans S par h_{xy} l'intersection des $h \in S_0 \cup A$ tels que $(x-y) \cap h \neq \emptyset$. h_{xy} est évidemment un sous-hypergroupe canonique de S vérifiant de même la relation $(x-y) \cap h_{xy} \neq \emptyset$.

La propriété $(x-y) \cap h \neq \emptyset$ exprime, comme il est connu [7] [13], l'équivalence mod. h dans H [voir Prop. (2.6), démonstration].

Soit $\Delta_{xy} \subseteq S_0 \cup A$ l'ensemble des $h \in S_0 \cup A$ tels que $x \equiv y$ (mod. h). Si $\Delta_{xy} = \emptyset$, on considère $h_{xy} = S$. Il est évident que pour tout $x,y,z,w \in S$ on a

$$h_{xy} = h_{zw} \iff \Delta_{xy} = \Delta_{zw},$$

$$h_{xy} \subset h_{zw} \iff \Delta_{xy} \supset \Delta_{zw}$$

Les sous-hypergroupes h_{xy} ont les propriétés:

i) $h_{xy} = \{o\} \iff x = y$. Evidente

ii) $h_{xy} = h_{yx}$, car $\Delta_{xy} = \Delta_{yx}$

iii) $h_{xy} \subseteq \max(h_{xz}, h_{yz})$. Cette dernière propriété est évidemment vraie, si $\max(h_{xz}, h_{yz}) = S$. Soit donc ce cas exclu et supposons, p.e., $h_{xz} \subseteq h_{yz}$. Alors on aura $\Delta_{yz} \subseteq \Delta_{xz}$ et par conséquent pour tout $h \in \Delta_{yz}$ on a $h \in \Delta_{xz}$, donc $x \equiv y \equiv z$ (mod. h). Il s'ensuit donc que l'on a $\Delta_{yz} \subseteq \Delta_{xz} \subseteq \Delta_{xy}$, d'où le résultat.

Conformément donc aux précédents on a que l'application $d: S \to \Omega$ telle que, pour tout $x,y \in S$, $d(x,y) = h_{xy}$ est une distance hyperultramétrique sur S, qui, étant définie moyennant la réunion de deux echelles S_0 et A de S, sera appelés *hyperdistance naturelle* sur S.

Nous allons démontrer que cette hyperdistance naturelle est une distance hyperultramétrique sur S. Pour le faire on a besoin du lemme:

LEMME 2. *Pour tout* $x, y \in S$ *tels que* $x \neq y$ *et pour tout* $h \in \Delta_{xy}$ *on a* $x - y \subseteq h$. *En d'autres termes on a* $(x-y) \cap h \neq \emptyset \Longleftrightarrow x-y \subseteq h$.

DÉMONSTRATION. $h \in \Delta_{xy} \Rightarrow h \in S_o \cup A$ et on distengue deux cas: $h \in S_o$ et $h \in A$. Si $h \in S_o$, alors il existe un $z \in S$ tel que $h = z - z$ et par conséquent [Prop. (1.1)] $(x-y) \cap (z-z) \neq \emptyset$ entraîne $x - y \subset z - z$ (car $o \notin x - y$), c'est-à-dire $x - y \subset h$. Soit $h \in A$. Il existe donc un $w \in S$ tel que $h = a_w$. Evidemment si $x - y$ est un singleton $(x - y) \cap h \neq \emptyset \Rightarrow x - y \subseteq h$. Si $x - y$ ne l'est pas, $(x - y) \cap a_w \neq \emptyset$ signifie qu'il existe un $z \in x - y$ avec $\bar{z} \leq \bar{w}$ (c'est-à-dire $z \in a_w$). D'autre part, d'après l'axiome S_1 [Déf. (3.2)], pour tout $z' \in x-y$ on aura $\bar{z}' = \bar{z}$, donc $\bar{z}' \leq \bar{w}$. Il en résulte donc que $z' \in a_w$ et on a de même $x - y \subseteq h$.

Pour démontrer maintenant que d est compatible avec la structure d'hypergroupe de S on remarque que pour tout $x, y, z \in S$ avec $z \in x + y$ on a $w \in x + y \Longleftrightarrow w - z \subseteq \max(\bar{x}, \bar{y})$, ce qui, comme nous le savons [Prop. (2.7)], est valable dans toute hypergroupe fortement canonique. Donc on a $\max(\bar{x},\bar{y}) \in \Delta_{zw}$, d'où $h_{zw} \subseteq \max(\bar{x},\bar{y})$. Il en résulte donc que $w \in x+y \Longleftrightarrow d(z,w) \leq \max(\bar{x},\bar{y})$, ce qui signifie que la somme $x + y$ est un cercle de l'espace hyperultramétrique (S,d) ayant comme rayon le $\max(\bar{x},\bar{y})$.

Si en particulier on met $d(o,x) = |x|$, il est évident que $|x|$ est l'intersection de $h \in S_o \cup A$ tels que $x \in h$ [car $(x-o) \cap h \neq \emptyset$] èt on voit que pour tout $x, y \in S$ tels que $|x| < |y|$ ($\leq$ au sens de $\subseteq$) on a $\bar{x} \leq \bar{y}$. En effet $|x| < |y|$ implique qu'il existe un $h \in S_o \cup A$ tel que $x \in h$ et $y \notin h$. Et si $h \in S_o$, alors il existe un $z \in S$ tel que $h = z-z$, et $x \in z-z$ et $y \notin z-z$ fournit $\bar{x} \leq \bar{y}$, selon la condition S_1. Si $h \in A$, alors on aura $h = a_w$ où $w \in S$, et $x \in a_w$ et $y \notin a_w$ implique $\bar{x} \leq \bar{w}$ et $\bar{w} < \bar{y}$, donc $\bar{x} < \bar{y}$. En plus il est clair que $|o| = \{o\} = \bar{o}$. Si donc on considère l'application $\rho: \Omega \to \Omega$ telle que pour tout $\omega \in \Omega$ pour lequel il n'existe un $x \in S$ tel que $\omega = |x|$ on ait $\rho \cdot \omega = \omega$, tandis que $\rho \cdot |x| = \bar{x}$, ρ sera croissante au sens large et telle que $\rho \cdot |o| = \bar{o} = |o|$. Par conséquent on aura

$$\max(\bar{x},\bar{y}) = \max(\rho|x|,\rho|y|) = \rho\max(|x|,|y|)$$

et le cercle $x+y$ de (S,d) est de rayon $\rho\max(|x|,|y|)$. L'hyperdistance donc d satisfait à la condition h_1 des hypergroupes ultramétriques.

En ce qui concerne maintenant la condition h_2 nous remarquons d'abord que pour tout $x,y,a \in S$ tels que $(x+a) \cap \cap (y+a) = \emptyset$ et pour tout $h \in S_0 \cup A$ on a:

i) si $(x-y) \cap h \neq \emptyset$, alors pour tout $z \in x+a$, $w \in y+a$ on a de même $(z-w) \cap h \neq \emptyset$.

En effet $z \in x+a$ et $w \in y+a$ implique $(z-x) \cap (w-y) \neq \emptyset$, ce qui équivaut à $(x-y) \cap (z-w) \neq \emptyset$; Or, selon le lemme 2, $x-y \subseteq h$, donc $(z-\omega) \cap h \neq \emptyset$.

ii) s'il existe $z \in x+a$ et $w \in y+a$ tels que $(z-w) \cap h \neq \emptyset$, alors de même $(x-y) \cap h \neq \emptyset$. Car, comme ci-dessus, on aura $(x-y) \cap (z-w) \neq \emptyset$ et $z-w \subseteq h$. Il en résulte donc que:

iii) pour tout $z \in x+a$, $w \in y+a$ on a $\Delta_{xy} = \Delta_{zw}$, donc $h_{xy} = h_{zw}$, c'est-à-dire $d(x,y) = d(z,w)$, d'où il suit

$$d(x+a,y+a) = d(x,y),$$

c'est-à-dire la condition h_2.

On prend ainsi la proposition fondamentale de la théorie des hypergroupes hypervalués:

PROPOSITION (4.1)

Pour ou'un hypergroupe canonique soit hypervaluable il faut et il suffit qu'il soit supérieurement canonique.

L'hypervaluation $|\cdot\cdot|: S \to \Omega$ qui est définie sur S moyennant l'hyperdistance naturelle est appelé *hypervaluation naturelle*. Si d'autre part $|\cdot\cdot|': S \to \Omega$ est une autre hypervaluation de S, alors, conformément avec tous que nous avons cité généralement ci-dessus pour les hypergroupes hypervalués [Rem. (4.1)], la famille

$$G' = \{ g_\omega = \{x \in S : |x| \leq \omega\},\ \omega \in \Omega \},$$

dont chaque élément est un cercle de centre o de l'espace hyperultramétrique (S,d') - où d'est l'hyperdistance associée à $|\cdot\cdot|'$ - donc un sous-hypergroupe canonique de S [voir prop. (3.3)], est l'analogue de la famille G des hypergroupes values et elle vérifie, comme il est facile de le voir, les propriétés de la proposition (3.8) et de la remarque (3.4). Mais on démontre sans peine que le reciproque est aussi valable, c'est-à-dire la

PROPOSITION (4.2)

`A toute famille Q de sous-hypergroupes canoniques d'un hypergroupe H, qui vérifie les propriétés $1^{o} - 3^{o}$ de la proposition (3.8), correspond une hypervaluation de H.

Cette proposition montre que l'on peut obtenir toutes les hypervaluations de H, si on considère toutes ses familles de telle sorte de sous-hypergroupes canoniques.

La démonstration de la proposition se réalise comme ci--dessus pour le cas particulier de l'hypervaluation naturelle (c'est-à-dire on forme l'ensemble Ω' correspondant à Ω par l'adjonction à l'ensemble $Q \cup H_0 \cup A$ les intersections de toutes les sous-familles de $Q \cup H_0 \cup A$ ainsi que H lui--même et on définie ensuite la fonction $d' : H \times H \to \Omega'$ justement comme d, c'est-à-dire par l'égalité $d'(x, y) = h_{xy}$, quels que soient x,y dans H et où h_{xy} est l'intersection de $h \in Q \cup H_0 \cup A$ tels que $x \equiv y \pmod{h}$; puis on continue comme auparavent pour le cas special).

REMARQUES (4.2). Soit H un hypergroupe hypervaluable.

a) *Tout hypervaluation* $|\cdot\cdot| : H \to \Omega$ *de H induit une hypervaluation au groupe abelien* $a_0 \in A$ *des scalaires de* H.

Car la restriction en effet de $|\cdot\cdot|$ à a_0 vérifie évidemment les propriétés v_1, v_2 et v_4 de la proposition (3.1) qui, comme on le sait [3], sont nécessaires et suffisante pour qu'un groupe abelien soit hypervaluable.

b) En vertu que, quels que soient x,y dans H, $\bar{x} < \bar{y}$ implique $|x| < |y|$, on a card $H_0 \leq$ card $|H|$. Il s'ensuit donc que si card $H_0 >$ continuun, alors l'hypergroupe fortement canonique H ne peut pas se rendre valué.

c) Sauf les hypergroupes hypervalués que nous avons examinés il y a des hypergroupes canoniques acceptant des *hypervaluations affaiblies*, c'est-à-dire des hypergroupes H munis d'une hyperultramétrique d satisfaisante à la condition h_2 de la définition (1.1) et au lieu de h_1 ou la condition plus faible

h_1'': Pour tout $x,y \in H$, $x + y$ est un cercle par rapporte à l'hyperdistance d, qui se réduit à un singleton si $y \in x-x$ (donc dans ce cas $x + y = x$). Un tel hypergroupe est évidemment fortement canonique. Nous avons démontré que l'inverse est aussi vraie, c'est-à-dire que tout hypergroupe fortement canonique est hypervaluable de ce type [9] [11][12].

d) L'echelle naturelle des hypergroupes fortement canoniques conduit á la construction d'un simple exemple d'hypergroupe canonique hypervaluable. En effet, on voit facilement que tout ensemble totalement ordonné H possedant un élément minimum o et muni de l'hyperopération $x + y$ définie par

$$x + y = \max(x,y)\text{, si } x \neq y \text{ et } x + x = \{z \in H : z < x\}$$

est un hypergroupe fortement (même supérieurement) canonique, donc hypervaluable (On remarque que s'il existe un $x \in H^*$ pour lequel on ait $x + x = \{z \in H : z \leq x\}$, la structure (H,y) est encore un hypergroupe canonique mais pas fortement canonique [11] [13] [15]).

REFERENCES

1. DOKAS L., *Sur les classes de Baire des fonctions semi--réelles* Bull. Soc. Math. Grèce, Tome 15 (1974) p. 83-88.

2. KRASNER M., *Approximation des corps valués complets de caractéristique* $p\neq 0$ *par ceux de caractérisque* 0 (Actes du Colloque d'Algèbre Supérieure, C.B.R.M., Bruxelles, 19-22 décembre 1956).

3. - *Introduction à la théorie des valuations* (Cours de la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, 1962 et 1967).

4. KUREPA D., *Tableaux ramifiés d'ensembles. Espaces pseudo-distanciés* ((C.R.Acad. Sc., Paris, 1934, t.198, p. 1563-1565).

5. - *Ensembles ordonnés et ramifiés*. Thèse de doctorat, Paris 1935 et Publ. Univ. Beograd 4 (1935), p. 1--138, en particulier p. 29-33.

6. - *Sur l'ècart abstrait*. Glasnik, Mat. fir. (2), t. 11, Zagreb 1956, p. 105-134.

7. MITTAS J., *Sur une classe d'hypergroupe commutatifs* (C. R. Acad. Sc. Paris. Série A', t.269. p. 485 - 488, 29 Septembre 1969).

8. - *Hyperanneaux et cetraines de leurs propriétés* (C. R. Acad. Sc. Paris, Serie A, t. 269, p. 623 - 626, Octobre 1969).

9. - *Hypergroupes canoniques hypervaluables* (C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, t. 271, p. 4-7, 6 Julliet 1970).

10. - *Les hypervaluations strictes des hypergroupes cacaniques* (C.R. Acad. Sc. Paris, t. 271, p. 69 - 72, 15 Juillet 1970).

11. - *Hypergroupes valués et hypergroupes fortement canoniques* (Πρακτικά της Ακαδημίας Αθηνών, έτος 1969, τομ. 44, σ. 304-312, Αθήναι 1971).

12. - *Hypergroupes canoniques values et hypervalués* (Mathematica Balkanica, t. 1. p. 181-185, Beograd 1971).

13. - *Hypergroupes canoniques* (Mathematica Balkanica, t. 2, p. 165-179. Beograd 1972).

14. - *Contribution à la théorie des structues ordonnés et des structures values* (Πρακτικά της Ακαδημίας Αθηνών, έτος 1973, τομ. 48, σ. 319-331, Αθήναι 1973).

15. - *Sur les hyperanneaux et les hypercorps* (Mathematica Balkanica, t. 3, p. 368-382, Beograd 1973)..

Adresse: 37, rue Pavlou Mela
546 22 Thessaloniki - Grèce.