MATHEMATICA BALKANICA
5:37 (1975), 199—211

MITTAS, JEAN

ESPACES VECTORIELS SUR UN HYPERCORPS — INTRODUCTION DES HYPERESPACES AFFINES ET EUCLIDIENS

1. Introduction.

Dans mon travail [7] j'ai donné la définition des hypergroupes canoniques aves hyperopérateurs — appelés aussi d'une manière abregée et commode Δ — hypergroupes canoniques, où Δ est l'ensembie des hyperopérateurs. Une classe particulière et intéressante d'eux est celle des hyperespaces vectoriels, dont la définition, donnée dans le travail cité, est la suivante:

Etant donné un hypercorps K (commutatif ou non) [1] [3] [6], on appelle *espace vect riel* (par exemple *à gauche)sur l'hypercorps* K, brièvement K — *hyperespace vectoriel*, un hypergroupe canonique [4] H ayant K comme domaine d'opérateurs vérifiant les axiomes suivants:

1. $a(x+y)=ax+ay$, quels ques soient $a\in K$; $x, y\in H$,

$$\left.\begin{array}{l} 2.\ (a+b)x\subseteq ax+bx \\ 3.\ (ab)\,x=a\,(bx) \end{array}\right\} \text{quels que soient } a, b\in K;\quad x\in H,$$

4. $0\ \cdot x=0$, suel que soit $x\in H$, 0 signifiant le zéro de H et le zéro de K,

5. $1\cdot x=x$ quel que soit $x\in H$, 1 étant l'élément — unité de K.

Il résulte[1] immediatement que $(-a)\,x=-(ax)$ quels que soient $a\in K$, $x\in H$. D'autre part, comme on le sait [7], dans tout Δ — hypergroupe canonique H

---

(1) D. Strarigopoulos a aussi défini les hyperespaces vectoriels dans sa Note de Comptes Rendus ,,Hyperanneaux non commutatifs, hypermodules, hyperespaces vectoriels et leurs propriétés élémentaires" (C. R. Acad. Sc. Paris, t. 269, p. 489—492, 29 Septembre 1969, Série A) mais d'une manière plus stricte, car, au lieu de l'inclusion ensembliste dans l'axiome 2, il a considéré l'egalité, c'est-à-dire il a posé $(a+b)\,x=ax+bx$. Mais, en vue d'application ultérieure, la necessité que la propriété connue, selon laquelle l'ensemble des n-ades d'éléments d'un corps constitue un espace vectoriel sur le corps lui-même, se soit conservé au cas présent, c'est-à-dire que l'ensemble de n-a—des d'éléments d'un hypercorps K soit un K-hyperespace vectoriel, elle impose l'axiome 2 sous la forme d'inclusion et pas d'égalité.

Soit en effet K un hypercorps et soit H l'ensemble des n-ades d'éléments de K. Si $x=(x_1, \dots x_n)$, $y=(y_1 \dots y_n)$ sont deux éléments quelconques de H définissons l'égalité dans H et la multiplication par un $\lambda\in K$ comme d'habitude et posons $x+y=\{(z_1, \dots z_n)=$ $=z\in H;\ z_i\in x_i+y_i.\ i=1.\ 2, , , , n\}$. Alors on voit facilement que H est un hypergroupe canonique et que les axiomes 1—5 ci—dessus sont bien verifiées. En particulier pour l'axiome 2 on a $(a+b)\,x=\{\lambda\, x\in H;\ \lambda\in a+b\}=\{(\lambda x_1, \dots \lambda\, x_n);\ \lambda\in a+b\}$, tandis que $ax+bx=$ $=\{(z_1, \dots z_n)\in H\colon z_i\in ax_i+bx_i,\ i=1, 2, \dots n\}=\{(z_1, \dots z_n)\in H;\ z_i\in(a+b)\,x_i\ i=1, 2, \dots n\}=$ $=\{(\lambda_1\, x_1, \dots, \lambda_n\, x_n)\colon \lambda_i\in a+b,\ i=1, 2, \dots n\}$, donc, évidemment $(a+b)\,x\subseteq ax+bx$.

avec opérateurs on a $a(-x)=-(ax)$. En plus on a $a\cdot 0=0$, quel que soit $a\in K$, car $(a-a)\,0\subseteq a\cdot 0-a\cdot 0=a\,(0-0)$ implique $(a-a)\,0=a\cdot 0$, donc $a\cdot 0=0\cdot 0=0$. D'après le précédant il est facile de voir que $ax=0\Rightarrow a=0$ ou $x=0$.

Dans le présent travail d'abord nous allons donner quelques notions concernant les hyperespaces vectoriels ainsi que quelques—unes de leurs propriétés; ensuite nous allons introduire et étudier brièvement les hyperespaces affines et euclidiens.

2. Définitions et propriétés diverses des hyperespaces vectoriels.

D' abord nous remarquons que tout espace vectoriel est un hyperespace vectoriel. Puis qu'il est possible qu'un hyperespace vectoriel propre (c'est-a-dire qui n'est pas un espace vectoriel) ait comme domaine d' opérateurs un corps; c'est le cas par exemple de l'hypergroupe canonique $H=\{0, x\}$ (dont 0 est son zéro et $x-x=H$) qui, comme il est facile de voir, est un hyperespace vectoriel sur le corps des classes résiduelles (mod. 2) des entiers rationnels. Relativement nous avons la condition suffisante suivante:

Proposition (2.1). *Si un $K-$hyperespace vectoriel H possède un scalaire*[1] *différent de zéro, alors l'hypercorps des opérateurs K est un corps.*

Démonstration. *En effet si $x\in H$ est un scalaire différent de zéro, alors on aura $(1-1)\,x\subseteq x-x=\{0\}$ d'où il résulte que, pour tout $a\in 1-1$, $ax=0$, donc $a=0$ et, par conséquent, $1-1=0$, donc $s-s=0$, pour tout $s\in K$. K est bien un corps.*

Corollaire (2.1). *Si H est un groupe le domaine des opérateurs K est un corps.*

Soit H un $K-$hyperespace vectoriel. On va appeler les éléments de H *hypervecteurs*. Les définitions relatives à la dépendance et indépendance linéaire de la théorie des espaces vectoriels se transfèrent facilement aux hyperespaces vectoriels par le remplacement seul dans elles du signe $=$ de l'égalité par le signe $\in$ de l'appartenance. Ainsi nous disons que $n\geqslant 1$ hypervecteurs $x_1,\dots,x_n\in H$ sont *linéairement dépendants* s'il existe n coefficients $a_1,\dots a_n\in K$ non tous nuls tels que l'on ait $0\in a_1x_1+\cdots+a_n x_n$. Autrement, s'il n'en est pas ainsi, par conséquent si d' une relation $0\in a_1x_1+\cdots+a_nx_n$ on a $a_1=\cdots=a_n=0$, les hypervecteurs s' appellent *linéairement indépendants*. Deux hypervecteurs linéairement dépendants sont appelés *colinéaires* ou *parallèles*. On dit aussi qu'ils ont une *direction commune*. On appelle qu' un hypervecteur $x\in H$ est une *combinaison linéaire* des hypervecteurs $x_1,\dots,x_n\in H$ s'il existe n coefficients $a_1,\dots,a_n\in K$ tels que l' on ait $x\in a_1x_1+\cdots+a_nx_n$.

De ces définitions il résulte facilement que:

1) *Si $n>1$ hypervecteurs sont linéairement dépendants, alors un d'eux au moins est une combinaison linéaire des autres. Le réciproque est encore vrai.*

[1] Comme on le sait [2] [4] un élément s d'un hypergroupoïde (H,.) est dit un *scalaire à droite* (respect. *à gauche*) si pour tout $x\in H$, xs (resp. sx) est un singleton. On sait encore que si H est un hypergroupe canonique alors pour qu' un élément $x\in H$ soit un scalaire il faut et il suffit que $x-x=0$ [2] [4].

2) *Si* $m<n$ *des hypervecteurs* $x_1, \ldots, x_n$ *sont linéairement dépendants, alors tous les* n *hypervecteurs sont aussi linéairement dépendants.*

3) *Si les hypervecteurs* $x_1, \ldots, x_n$ *sont linéairement indépendants tandis que* $x, x_1, \ldots, x_n$ *sont linéairement dépendants, alors* x *est une combinaison linéaire des* $x_1, \ldots, x_n$.

On dit que l'hyperespace vectoriel H est de *dimension finie* n, symboliquement $\dim H=n$, s'il contient n hypervecteurs linéairement indépendants et si tout ensemble d'hypervecteurs en nombre $n+1$ est un ensemble d'hypervecteurs linéairement dépendants. La dimension de l'hyperespace vectoriel $\{0\}$ est par définition le zéro. Dans un hyperespace vectoriel de dimension n tout ensemble de n hypervecteurs linéairement indépendants est appelé *base* de l'hyperespace. On dit qu' un hyperespace vectoriel est de *dimension infinie* si, pour tout entier non négatif n, il existe n hypervecteurs linéairement indépendants. En géneralisant la notion ci-dessus de la base d'un hyperespace vectoriel de dimension finie, on dit qu'un sous—ensemble B d'un hyperespace vectoriel H de n'importe quelle dimension est une *base* de H si tout sous—ensemble fini de B est un ensemble d'hypervecteurs linéairement indépendants et si tout hypervecteur de H est une combinaison linéaire d'un nombre fini d'hypervecteurs de B.

Comme exemple d'hyperespace vectoriel de dimension n on peut citer l'hyperespace vectoriel K^n des n—ades d'éléments d'un hypercorps K sur l'hypercorps K lui—même. Les hypervecteurs même $(1, 0, \ldots 0), (0, 1, \ldots 0), \ldots (0, 0, \ldots, 1)$ constituent évidemment une base de cet hyperespace qui est appelé *canonique*. D'autre part on vérifie facilement que l'ensemble des hyperpolynômes d'une indéterminée à coefficients d'un hypercorps K [7] est un K—hyperespace vectoriel, dont les hypervecteurs $1, x, \ldots x^{n-1}$ sont, comme dans le cas correspondant des polynômes, pour tout entier naturel n, lineairement indépendants. Donc cet hyperespace est de dimension infinie.

Il est clair que si $e_1, \ldots, e_n$ est une base quelconque d'un hyperespace vectoriel H de dimension finie n sur un hypercorps K, alors pour tout $x \in H$ il existe des éléments $a_1, \ldots, a_n \in K$ tels sue $x \in a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$. Ces éléments $a_1, \ldots, a_n$ sont appelés *coordonnées* de l'hypervecteur x par rapport à la base $e_1, \ldots, e_n$ et, comme dans le cas classique, elles sont définies de manière unique. La démonstration de ceci dans le cas présent se fait comme suit: Soit que l'on a encore $x \in a_1' e_1 + \cdots + a_n' e_n$. Alors on aura $0 \in (a_1 - a_1') e_1 + \cdots + (a_n - a_n') e_n$ et, par conséquent, il y aura des elements $m_1 \in a_1 - a_1', \ldots m_n \in \in a_n - a_n'$ tels que $0 \in m_1 e_1 + \cdots + m_n e_n$. Mais les hypervecteurs $e_1, \ldots, e_n$ étant linéairement indépendants on aura $m_1 = \cdots = m_n = 0$, donc $a_1 = a_1' \ldots a_n = a_n'$. D'autre part, puisque en général la somme $a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$ n'est pas un singleton, donc un hypervecteur, on conclût que *dans tout hyperespace vectoriel propre de dimension finie deux hypervecteurs ayant par rapport à une base quelconque des coordonnées égales, ne sont pas, en général, égaux*, ce qui montre une différence essentielle entre les hyperespaces vectoriels propres et les espaces vectoriels.

Toutefois dans le K—hyperespace vectoriel K^n deux hypervecteurs ayant les mêmes coordonnées par rapport à la base canonique de K^n son égaux. On a même, encore plus généralement, que deux hypervecteurs de K^n, dont les coordonnées par rapport à une base $e_1, \dots, e_n$ telle que $e_i=(0, \dots a_i, \dots 0)$, $a_i \in K^\star (-K \cdots \{0\})$, $i=1, \dots n$, sont égales, sont également égaux. D'autre part pour tout $a, b \in K$ et pour tout hypervecteur e_i de la base considérée, on a $(a+b)\, e_i=(a+b)\,(0, \dots a_i, \dots 0)=\{(0, \dots, \lambda_i\, a_i, \dots 0) \colon \lambda_i \in a+b\}$ et $ae_i+be_i= =(0, \dots a\,a_i, \dots 0)+(0, \dots b\,a_i, \dots 0)=\{(0, \dots, c_i, \dots 0) \colon c_i \in a\,a_i+ba_i\}= =\{(0, \dots, \lambda_i\, a_i, \dots) \colon \lambda_i \in a+b\}$, donc $(a+b)\, e_i=ae_i+be_i$, autrement dit on a que l'axiome 2 de la définition de l'hyperespace vectoriel est réalisé sous la forme d'égalité. Ces deux propriétés de la base $e_1, \dots, e_n$ de K^n nous conduisent de poser les définitions suivantes:

Définition (2.1). *Dans un $K-$hyperespace vectoriel de dimension finie n toute base $e_1, \dots e_n$ telle que.*

i) pour tout $a_1. \dots a_n \in K$ la somme $a_1\, e_1+\cdots+a_n\, e_n$ soit un singleton

ii) pour tout $a, b \in K$ et pour tout hypervecteur e_i de la base on ait $(a+b)\, e_i=ae_i+be_i$ est appelée base exceptionnelle.

Définition (2.2). *Un hyperespace vectoriel de dimension finie est appelé exceptionnel s'il admet une base exceptionnelle au moins.*

Désormais tous les hyperespaces vectoriels considérées seront exceptionnels,, sauf mention expresse du contraire. Nous appellerons aussi *exceptionnelles* les coordonnées d'un hypervecteur par rapport à une base exceptionnelle.

De ce qui est précédé nous tirons la

Proposition (2.2). *Dans tout hyperespace vectoriel deux hypervecteurs' ayant des coordonnées exceptionnelles égales, sont égaux. Le réciproque est aussi vrai.*

Dans la théorie des hyperespaces vectoriels l'isomorphisme est défini comme dans le cas des espaces vectoriels. Ainsi deux hyperespaces vectoriels H et H' sur le même hypercorps K sont dits *isomorphes* s'il existe une application biunivoque $\sigma \colon H \to H'$ de H sur H' telle que, pour tout $x, y \in H$ et pour tout $\lambda \in K$, on ait $\sigma(x+y)=\sigma(x)+\sigma(y)$ et $\sigma(\lambda x)=\lambda \sigma(x)$. On conclût facilement que *si les $K-$hyperespaces vectoriels H et H' sont isomorphes, alors l'image isomorphe de zéro de H est le zéro de H' et les images isomorphes d'hypervecteurs de H linéairemant dépendants sont des hypervecteurs, de H' de même linéairement dépendants. Il en résulte la*

Proposition (2.3). *Dans tout isomorphisme $H \to H'$ les images isomorphes des hypervecteurs d'une base exceptionnelle du $K-$hyperespace vectoriel H constituent une base de même exceptionnelle, de $K-$hyperespace vectoriel isomorphe H'.*

Pour les hyperespaces vectoriels aussi nous avons la proposition très considérable suivante.

Proposition (2.4). *Deux $K-$hyperespaces vectoriels de la même dimension n sont isomorphes entre eux. Le réciproque est encore vrai.*

Démonstration. Si H et H' sont les deux hyperespaces vectoriels, considérons $e_1, \dots, e_n$ une base exceptionnelle dans H et $e_1', \dots e_n'$ une autre, de même exceptionnelle, dans H'. Puis faisons correspondre à tout hypervecteur $x=\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n$ de H l'hypervecteur $x'=\lambda_1 e_1'+\cdots+\lambda_n e'_n$ de H'. Il est évident que la correspondence considérée, soit σ, est biunivoque et que, si $y=\mu_1 e_1+\cdots+\mu_n e_n$ et $y'=\mu_1 e_1'+\cdots+\mu_n e_n'$ sont deux autres hypervecteurs correspondants, on aura [vue que $\sigma(e_i)=e_i'$ et que les deux bases $e_1,\ldots,e_n$ et $e_1',\ldots,e_n'$ sont exceptionnelles] $\sigma(x+y)=\sigma[(\lambda_1 e_1+\mu_1 e_1)+ +\cdots+(\lambda_n e_n+\mu_n e_n)]=\sigma[(\lambda_1+\mu_1) e_1+\cdots+(\lambda_n+\mu_n) e_n]=(\lambda_1+\mu_1) e_1'+\cdots+ +(\lambda_n+\mu_n) e_n'=(\lambda_1 e_1'+\cdots+\lambda_n e_n')+(\mu_1 e_1+\cdots+\mu_n e_n')=x'+y'=\sigma(x)+\sigma(y)$.

De même on a $\sigma(\lambda x)=\sigma(\lambda\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda\lambda_n e_n)=\lambda\lambda_1 e_1'+\cdots+\lambda\lambda_n e_n'= =\lambda(\lambda_1 e_1'+\cdots+\lambda_n e_n')=\lambda x'=\lambda\sigma(x)$. L'application donc σ est bien un isomorphisme. Le récipioque est évident. Si les deux $K-$hyperespaces vectoriels H et H' sont isomorphes ils ont la même dimension.

Il en résulte que tout $K-$hyperespace vectoriel est isomorphe au $K-$hyperespace vectoriel K^n des $n-$ades d'éléments de K.

Supposons maintenant que les hypervecteurs $a_1=(a_{11},\ldots a_{1n}),\ldots a_n= =(a_{n1},\ldots a_{nn})$ constituent une base exceptionnelle dans l'hyperespace vectoriel K^n. Alors chaque somme $a_i+\lambda a_j$, où $i,j=1,2,\ldots n$, $i\neq j$ et $\lambda\in K$, est un seul hypervecteur, donc, pour tout $k\in\{1,\ldots n\}$, la somme $a_{ik}+\lambda a_{jk}$ est un singleton. Ce fait implique que pour tout tel k un des elements a_{ik}, a_{jk} au moins est égal à zéro, car autrement si $a_{ik}a_{jk}\neq 0$ pour $\lambda=-\dfrac{a_{ik}}{a_{jk}}$ la somme $a_{ik}-a_{ik}$ ne serait pas un singleton, comme il fallait[(1)]. Il en résulte que si par exemple on a $a_{ik}\neq 0$, alors $a_{jk}=0$ pour tout $j\in\{1,\ldots n\}$ tel que $i\neq j$, autrement dit que, si un élément d'un n'importe quel hypervecteur de la base est différent de zéro, alors tous les éléments du même ordre des autres hypervecteurs de la base sont égaux à zéro. Ensuite on voit qu'il n'est pas possible que l'on ait $a_{ik}=0$ pour k constant et pour tout $i\in\{1,\ldots n\}$, car autrement les hypervecteurs $a_1,\ldots a_n$ ne seraient pas linéairement indépendants.

En effet pour toute relation $\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_n a_n=0$ on a le „système" correspondant

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 a_{11}+\lambda_2 a_{21}+\cdots+\lambda_n a_{n1}=0\\
&\lambda_1 a_{12}+\lambda_2 a_{22}+\cdots+\lambda_n a_{n2}=0\\
&-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\\
&-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\\
&\lambda_1 a_{1n}+\lambda_2 a_{2n}+\cdots+\lambda_n a_{nn}=0.
\end{aligned}$$

Mais, comme aucun d'hypervecteurs $a_1,\ldots a_n$ n'est le zéro, d'après les précédents on aura $\lambda_i=0$ pour tout élément $a_{ij}\neq 0$. Donc s'il y avait un index k tel que $a_{ik}=0$ pour tout $i\in\{1,\ldots n\}$, le système ci-dessus serait vérifié pour un système de valeurs $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ dont $n-1$ au plus seraient égales à zéro et les restes quelconques.

Il résulte donc que chaque hypervecteur $a_i=(a_{i1},\ldots a_{in})$ contient un et un seul élément différent de zéro d'où découle la

---

(1) Comme il est connu tout hypercorps K possède son zéro comme élément scalaire unique [6]. Donc pour tout $a\in K$ on a $\{0\}\subset a-a$ (au sens strict) [3], [6].

Proposition (2.5). *Toutes les bases exceptionnelles de l'hyperespace vectoriel K^n des n-ades d'éléments d'un hypercorps K sont de la forme $a_1\varepsilon_1, \ldots, a_n\varepsilon_n$ où $a_1, \ldots, a_n \in K^\star$ et où $\varepsilon_1=(1, 0, \ldots, 0), \ldots, \varepsilon_n=(0, 0, \ldots, 1)$ est la base canonique de K^n.*

D' après cette proposition et en vertu de la proposition (2.3) nous déduisons la

Proposition (2.6). *Toutes les bases exceptionnelles d'un K-hyperespace vectoriel H sont de la forme $a_1\sigma(\varepsilon_1), \ldots, a_n\sigma(e_n)$, où $a_1, \ldots, a_n \in K$; $\varepsilon_1 \ldots, \varepsilon_n$ est la base canonique de K^n et σ est un isomorphisme de K^n sur H.*

Il est clair que si $a_1\varepsilon_1, \ldots, a_n\varepsilon_n$ et $b_1\varepsilon_1, \ldots, b_n\varepsilon_n$ sont deux bases exceptionnelles de l'hyperespace vectoriel K^n, les formules liant les coordonnées $x_1', \ldots, x_n'$ et $x_1'', \ldots, x_n''$ d'un hypervecteur $x \in K^n$ par rapport à ces bases sont $a_i x_i' = b_i x_i''$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, car on a $x = x_1'(a_1\varepsilon_1) + \cdots + x_n(a_n\varepsilon_n) = x_1''(b_1\varepsilon_1) + \cdots + x_n''(b_n\varepsilon_n)$. Évidemment on a les mêmes choses pour les coordonnées d'un hypervecteur d'un n'importe quel K-hyperespace vectoriel H par rapport aux bases exceptionnelles $a_1\sigma(\varepsilon_1), \ldots, a_n\sigma(\varepsilon_n)$ et $b_1\sigma(\varepsilon_1), \ldots, b_n\sigma(\varepsilon_n)$ de H, σ signifiant un isomorphisme de K^n sur H.

Soit encore le K-hyperespace vectoriel K^n, et $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sa base canonique. Deux isomorphismes σ et σ' de K^n sur lui-même seront appelés *équivalents*, si, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe des éléments $a_j, a_j' \in K^\star$ et un hypervecteur ε_j tel que l'on ait $\sigma(\varepsilon_i) = a_j\varepsilon_j$ et $\sigma'(\varepsilon_i) = a_j'\varepsilon_j$. La définition est justifiée par le fait que la relation binaire R ainsi résultant dans l'ensemble I des isomorphismes de K^n sur lui-même, est une relation d'équivalence. D'autre part on voit que cette relation R est compatible avec la composition des isomorphismes étant de même un isomorphisme comme il est visible. Car, en effet, si σ, σ' et φ, φ' sont deux couples des isomorphismes équivalents, alors si $\sigma(\varepsilon_j) = a_k\varepsilon_k$, $\sigma'(\varepsilon_j) = a_k'\varepsilon_k$ et $\varphi(\varepsilon_i) = b_j\varepsilon_j$, $\varphi'(\varepsilon_i) = b_j'\varepsilon_j$, on aura $(\sigma\varphi)(\varepsilon_i) = \sigma[\varphi(\varepsilon_i)] = \sigma(b_j\varepsilon_j) = b_j\sigma(\varepsilon_j) = b_j a_k \varepsilon_k$ et $(\sigma'\varphi')(\varepsilon_i) = \sigma'[\varphi'(\varepsilon_i)] = \sigma'(b_j'\varepsilon_j) = b_j\sigma(\varepsilon_j) = b_j' a_k'\varepsilon_k$, i. e. les isomorphismes $\sigma\varphi$ et $\sigma'\varphi'$ sont de même équivalents. Il résulte ainsi qu' à toute classe d' isomorphismes équivalents correspond une permutation des hypervecteurs de la base canonique $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n$ de K^n. Nous en déduisons donc facilement la

Proposition 7. *L'ensemble I/R des classes d'équivalence des applications isomorphes de l'hyperespace vectoriel K^n sur lui-même est un groupe, qui est isomorphe au groupe symétrique.*

Comme il est connu **[7]** un sous-ensemble H_1 d'un K-hyperespace vectoriel H est un sous-hyperespace(1) vectoriel de H si, et seulement si, $x+y \subseteq H_1$ et $\lambda x \in H_1$, quels que soient $x, y \in H_1$ $\lambda \in K$; ces conditions sont évidemment équivalentes à la seule condition $\lambda x + \mu y \subseteq H_1$, quels que soient $x, y \in H_1$ et $\lambda, \mu \in K$. De ce qui précède et vue de la théorie de génération de sous-hypergroupes canoniques d'un hypergroupe canonique **[4]**, nous concluons

(1) *K-sous-hyperespace vectoriel* d'un K-hyperespace vectoriel H s'appelle un sous-ensemble H_1 de H qui est un hyperespace vectoriel par rapport à l'addition et à la multiplication externe de H **[7]**.

facilement qu *le* K*—sous—hyperespace vectoriel engendré par un sous—ensemble non vide* Δ *d'un hyperespace vectoriel* H *est la réunion des sommes d'un nombre fini d'éléments de l'ensemble* $K\Delta$. *Si* $\Delta = \varnothing$, *le* K*—sous—hyperespace vectoriel engendré est visiblement* $\{0\}$. Il en résulte que toute base d'un hyperespace vectoriel H est un système de générateurs de H.

3. Hyperespaces vectoriels euclidiens.

Considérons maintenant un hyperespace vectoriel H sur l'hypercorps totalement ordonné $(R, \dot{+}, \cdot, <)$ des nombres réels[1], pas nécessairement exceptionnel. Un tel hyperespace vectoriel H sera appelé *réel* ou R*—hyperespace vectoriel*. Notons l'hyperopération dans H par $z \dot{+} y$ (c'est-à-dire comme l'hyperaddition de R). Ensuite nous introduisons dans H, comme dans les espaces vectoriels réels, l'opération binaire du *produit scalaire* à valeurs dans R comme suit:

Définition 3. *On appelle produit scalaire dans* H *et on le note* $x \circ y$, $x, y \in H$, *toute application de* $H \times H$ *dans* R *vérifiant les axiomes:*

1. $x \circ y = y \circ x$, *quels que soient* $x, y \in H$;

2. $\lambda (x \circ y) = (\lambda x) \circ y$, *quels que soient* $x, y \in H$, $\lambda \in R$;

3. $(x \dot{+} y) \circ z \subseteq (x \circ z) \dot{+} (y \circ z)$, *quels que soient* $x, y, z \in H$

4. $x \circ y \geqslant 0$, *quel que soit* $x \in H$; $x \circ x = 0 \Rightarrow x = 0$.

Ce dernier axiome nous permet de définir la *mesure* ou *longueur* ou *norme* aux hypervecteurs comme dans la théorie classique pour les vecteurs, en appelant ainsi la racine carrée non négative $\sqrt{x \circ x}$, $x \in H$ que nous désignerons par $\| x \|$.

5. $| x \circ y | \leqslant \| x \| \cdot \| y \|$, quels que soient $x, y \in H$. Moyennant cet axiome nous définissons *l'angle* de deux hypervecteurs non nuls x et y par l'égalité $\cos \varphi = \dfrac{x \circ y}{\| x \| \cdot \| y \|}$, c'est-à-dire, comme dans le cas correspondant des espaces

---

[1] C'est l'hypercorps totalement ordonné commutatif et saturé par rapport à son ordre total, résultant du corps $(R, +, <, \cdot)$ des nombres réels par le remplacement de l'addition $a+b$ de R par l'hyperaddition $a \dot{+} b$ défiiie comme suit [8];

$$a \dot{+} b = \begin{cases} [|a-b|, \ a+b], & \text{si } 0 < a, \ 0 < b, \ a \neq b \\ [a+b, \ -|a-b|], & \text{si } a < 0, \ b < 0, \ a \neq b \\ ]0, \ a+b], & \text{si } 0 < a = b \\ [a+b, \ 0[, & \text{si } a = b < 0 \\ [a+b, \ |a-b|] \cup [-|a-b|, \ -(a+b)], & \text{si } ab < 0, \ 0 \leqslant a+b \\ [-|a-b|, \ a+b] \cup [-(a+b), \ |a-b|], & \text{si } ab < 0, \ a+b \leqslant 0 \\ a, \ \text{si } b = 0 & \\ b, \ \text{si } a = 0. & \end{cases}$$

vectoriels, le nombre réel φ univoquement défini par la restriction $\varphi \in [0, \pi]$. Deux hypervecteurs non nuls x et y dont l'angle est $\varphi = \frac{\pi}{2}$, autrement dit tel que l'on ait $x \circ y = 0$, sont appelés *perpendiculaires ou orthogonaux*. L'hypervecteur zéro est évidemment perpendiculaire à tout hypervecteur.

Un hypervecteur dont la longueur est égale à 1 est appelé *hypervecteur unité* et une base dont tous les hypervecteurs sont des unités et deux à deux orthogonaux, sera appelée *orthonormée*.

Un hyperespace vectoriel sur lequel un produit scalaire a été défini, est appelé *hyperespace Euclidien*. Comme exemple d'un tel hyperespace on peut considérer n'importe quel hyperespace vectoriel réel H de dimension finie (pas nécessairement exceptionnel), car l'opération $x \circ y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$, définie dans H pour tout $x, y \in H$ et où $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots y_n$ sont les coordonnées de x et y respectivement par rapport à une base quelconque de H, est un produit scalaire sur H. En effet cette opération vérifie évidemment les axiomes 1, 2, 4 et 5 ci-dessus et il ne reste que la vérification de 3 pour lequel on a: $(x \circ z) \dotplus (y \circ z) = (x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n) \dotplus (y_1 z_1 + \cdots + y_n z_n)$ (1) tandis que $(x \dotplus y) \circ z = \{w \circ z; w \in x \dotplus y\} = \{w_1 z_1 + \cdots + w_n z_n;\ w_i \in x_i \dotplus y_i,\ i = 1, \ldots, n\} = (x_1 \dotplus y_1) z_1 + \cdots + (x_n \dotplus y_n) z_n = (x_1 z_1 \dotplus y_1 z_1) + \cdots + (x_n z_n \dotplus y_n z_n)$ (2). De (1) il résulte que $(x \circ z) \dotplus (y \circ z)$ est un segment de R ou une réunion de deux segments définis convenablement par les nombres $\pm((x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n) + (y_1 z_1 + \cdots + y_n z_n))$, $\pm((x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n) - (y_1 z_1 + \cdots + y_n z_n))$ selon la définitio de l'hyperaddition $a \dotplus b$ dans R (voir page 207, note de pied) tandis que, comme il résulte de (2), $(x \dotplus y) \circ z$ est une somme de segments ou de réunions de segments définis convenablement par les nombres $\pm x_i z_i$, $\pm y_i z_i$ $i = 1, \ldots, n$, donc, finalement, une réunion de segments contenant évidemment ceux de (1). L'opération $x \circ y$ est bien un produit scalaire dans H. Il en résulte que l'hyperespace vectoriel R^n est Euclidien et que sa base canonique $\varepsilon_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, \varepsilon_n = (0, 0, \ldots, 1)$ est orthonormée.

L'isomorphisme aux hyperespaces vectoriels Euclidiens est défini comme dans le cas des espaces vectoriels homonymes. Donc, d'après cela, deux hyperespaces vectoriels Euclidiens isomorphes sont tels au sens de l'isomorphisme des hyperespaces vectoriels, donné précédemment, ayant en plus la propriété que le produit scalaire de deux hypervecteurs quelconques d'un hyperespace est égal au produit scalaire de leurs images isomorphes dans l'autre. Il en résulte que *tous les hyperespaces vectoriels Euclidiens de même dimension sont isomorphes et que pendant les applieations isomorphes des hyperespaces vectoriels Euclidiens les longueurs des hypervecteurs ainsi que leurs angles sont conservées.*

4. Hyperespaces affines.

Notre intention étant maintenant de définir „l'hyperespace ponctuel[1] affine sur un hyperespace vectoriel quelconque" comme structure hypercompositionnelle respective de celle de l'espace ponctuel affine sur un espace vectoriel, nous prenons comme point de départ la définition de ce dernier et le fait que tout espace vectoriel définit un espace ponctuel affine sur lui-même. Nous définissons donc cet hyperespace de manière que tout hyperespace vectoriel soit un hyperespace ponctuel affine sur lui-même. Donc, et après de recherches, nous posons

Définition (4.1). *Soient un hyperespace vectoriel H sur un hypercorps K, pas forcément de dimension finie et à fortiori exceptionnel, et un ensemble non vide E dont les éléments seront appelés hyperpoints. Nous disons que cet ensemble est un hyperespace ponctuel affine sur l'hyperespace vectoriel H, si les éléments de H opèrent sur les éléments de E comme hyperopérateurs* **[7]** *par une hyperopération externe $E\times H\rightarrow P(E)\cdots\{\varnothing\}$ notée additivement et satisfaisant aux axiomes:*

1. *Pour tout $A, B\in E$ il existe un hypervecteur au moins $a\in H$ tel que $B\in A+a$.*

Il nous convient à écrire d'une manière équivalente $a\in B-A=\overline{AB}$. Autrement dit on a $\overline{AB}=\{a\in H: B\in A+a\}$.

2. *Il existe un, et un seul, hyperpoint O tel que, pour tout $a\in H$, il existe un, et un seul, hyperpoint $A\in E$ tel que l'on ait $\overline{OA}=a$.*

3. *L'hypervecteur zéro 0 est un hyperopérateur unité, autrement dit pour tout $A\in E$ on a $A+0=A$.*

4. $(A+a)+b=A+(a+b)$, *quels que soient $A\in E$, $a, b\in H$.*

5. *Pour tous trois hyperpoints A, B, $\Gamma\in E$ on a $\overline{A\Gamma}\leq\overline{AB}+\overline{B\Gamma}$, l'égalité ayant lieu si, et seulement si, $B=0$.*

Propriétés. Des axiomes précédents résulte:

i) $\overline{AB}=-\overline{BA}$

ii) $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$

On a encore

iii) $\overline{OA}=\overline{OB}\Rightarrow A=B$

En effet on a $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=\overline{OA}-\overline{OA}$, donc $O\in\overline{AB}$ d'où par l'axiome 3, il vient $B\in A+O=A$, donc $A=B$.

iv) *Pour tout $a\in H$ il existe un, et un seul, $A\in E$ tel que $O+a=A$.*

En effet il existe un hyperpoint unique A tel que $\overline{OA}=a$, donc $A\in O+a$. S'il existe un $B\in E$ tel que $B\in O+a$, alors $a\in B-O=\overline{OB}$, donc, par l'axiome 2, $\overline{OB}=a$, d'où il vient $A=B$ et par conséquent $O+a=A$.

Des hyperespaces ponctuels affines existent. En effet nous constatons facilement que tout $K-$hyperespace vectoriel H est un hyperespace ponctuel affine sur lui$-$même, si nous considérons comme hyperopération externe l'hyperopération $x+y$ de H. Dans cet hyperespace on a $\overline{xy}=\{z\in H: z\in y-x\}$.

Soit encore l'hyperespace affine E sur le $K-$hyperespace vectoriel H. La dimension de H est appelée aussi *dimension* de E, l'hyperpoint fixe O de E est son *origine* et, pour tout hyperpoint $A\in E$ l'hypervecteur unique $\overline{OA}$ est appelé *rayon hypervectoriel* de A ou encore son *hypervecteur de place*.

Si E est de dimension n et $e_1, \ldots, e_n$ est une base de H, alors le système $(O; e_1, \ldots, e_n)$ est appelé *système de coordonnées affines* ou simplement *système affine* et l'origine O de l'hyperespace *origine* du *système* ou origine *des coordonnées*. Si A est un hyperpoint quelconque de E, alors $\overline{OA}=a$ et si $a_1, \ldots, a_n \in K$ sont les coordonnées de a par rapport à la base $e_1, \ldots, e_n$, donc $a \in a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$, alors $a_1, \ldots, a_n$ sont appelés aussi *coordonnées* de l'hyperpoint A et nous notons, comme d'habitude, $A(a_1, \ldots, a_n)$. De ce qui précède résulte qu' à tout hyperpoint A de E correspond une n—ade d'éléments de l'hypercorps K, c'est-à-dire les coordonnées de A, mais *deux hyperpoints ayant les mêmes coordonnées ne coincident pas en général*, sauf s'il s'agit de leurs *coordonnées exceptionnelles*, en appelant ainsi les coordonnées des hyperpoints quand la base considérée de l'hyperespace H est exceptionnelle. Il est visible que pour tout hypervecteur $z \in \overline{AB}$ on a $z_i \in b_i - a_i$, où $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n)$ sont les coordonnées des hyperpoints A et B par rapport à un système affine de coordonnées de E et où $(z_1, \ldots, z_n)$ sont les coordonnées de l'hypervecteur z par rapport à la base respective de H. En effet on a $z \in \overline{AO} + \overline{OB} = \overline{OB} - \overline{OA}$, donc $O \in \overline{OB} - \overline{OA} - z = (b_1 - a_1 - z_1)\, e_1 + + \cdots + (b_n - a_n - z_n)\, e_n$.

Nous remarquons que si les hyperpoints A et B décrivent E, on a $\bigcup \overline{AB} = H$. Nous appellons après cela *sous—hyperespace ponctuel affine* de E tout sous—ensemble E_1 de E tel que la réunion $\bigcup\limits_{A, B \in E_1} \overline{AB} = H_1$ soit un sous—hyperespace vectoriel de H et que E_1 lui—même soit un hyperespace ponctuel affine sur H_1. Si de ces deux conditions la première seule est satisfaite, alors nous appelons E_1 *sous—hyperespace ponctuel semi—affine de* E.

Soit un sous—hyperespace affine E_1 de E. Alors si O_1 est son origine, on aura $\overline{AO_1} + \overline{O_1B} = \overline{AB}$ pour tout $A, B \in E_1$, selon l'axiome 5 de la définition 4. Mais A, B, O_1 étant des hyperpoints de E l'égalité $\overline{AO_1} + \overline{O_1B} = \overline{AB}$ implique, de même par l'axiome 5, que $O_1 = O$. Donc $O \in E_1$. Inversement si E_1 est un sous—hyperespace semi—affine de E tel que $O \in E_1$, il est évident que tous les axiomes 1—5 sont satisfaits et E_1 est bien un sous—hyperespace affine de E. Nous en tirons donc la

Proposition (4.1). *Pour qu'un sous—hyperespace ponctuel semi—affine E_1 d'un hyperespace affine D soit un sous—hyperespace affine de E il faut et il suffit que l'origine O de E soit dans E_1*

Considérons maintenant un sous—hyperespace semi—affine E_1 de E et soit un hyperpoint $O_1 \in E_1$. Pour tout hyperpoint $M \in E_1$ et pour tout $z \in \overline{O_1M}$ on aura $M \in O_1 + z$ et, par conséquent, si on met $\overline{OM} = r$, $\overline{OO_1} = r$ on a $O + r \in (O + r_1) + z = O + (r_1 + z)$ selon l'axiome 4, donc $r \in r_1 + z$. D'autre pait, en vertu de la condition $\bigcup\limits_{A, B \in E_1} AB = H_1$, l'hyperpoint O_1 vérifie la condition $\overline{O_1O_1} \subseteq H_1$, donc $r_1 - r_1 \subseteq H_1$, car $\overline{O_1O_1} = \overline{O_1O} + \overline{OO_1} = r_1 - r_1$. On voit encore que, si B est une base de H_1, l'hypervecteur z apparu dans l' „équation" $r \in r_1 + z$, est une combinaison linéaire d'un nombre fini d'hypervecteurs de B. Inversement si H_1 est un sous—hyperespace vectoriel de H, B est une base de H_1 et r_1 est un hypervecteur $\overline{OO_1}$ de H tel que $r_1 - r_1 \subseteq H_1$, alors l' „équation“ $r \in r_1 + z$ définit un sous—ensemble E_1 de E quand z décrit H_1, donc pour tous les hypervecteurs $z \in H$ qui sont des combinaisons linéaires d'un nombre fini d' hypervecteurs de B et où $r = \overline{OM}$; ce sous—ensemble E_1 est un sous—hyperespace ponctuel semi—affine de l'hyperespace ponctuel affine E, car en effet, pour tout $A, B \in E_1$ on a, si on met $r_A = \overline{OA}$, $r_B = \overline{OB}$, $r_A \in r_1 + z'$ et $r_B \in r_1 + z''$, $\overline{AB} = r_B - r_A \subseteq (r_1 + z'') - (r_1 + z') = (r_1 - r_1) + (z'' - z') \subseteq H_1$. D'autre part pour tout $z \in H_1$ il existe au moins un $M \in E_1$ tel que $\overline{OM} = r \in r_1 + z$ et, par conséquent, $z \in r - r_1 = \overline{OM} - \overline{OO_1} = \overline{O_1O} + \overline{OM} = \overline{O_1M} \subseteq \bigcup_{A, B \in E_1} \overline{AB}$, donc $\bigcup_{A, B \in F_1} \overline{AB} = H_1$. Quant à l'hyperpoint O_1, il est visible qu'il est dans E_1 (car $z = O \in H_1$ et $r_1 = r_1 + 0$). Il en résulte la

Proposition (4.2). *Soient E un hyperespace ponctuel affine sur un K—hyperespace vectoriel H, O l' origine de E, H_1 un sous—hyperespace vectoriel de H et $O_1 \in E$ tel que, si $OO_1 = r_1$, $r_1 - r_1 \subseteq H_1$. Alors l' ensemble $E_1 = \{M \in E: \overline{OM} = r \in r_1 + z,\ z \in H_1\}$ est un sous—hyperespace semi—affine de E.*

La relation $r \in r_1 + z$ qui, pour z décrivant H_1 et $r_1 \in H$ tel que $r_1 - r_1 \subseteq H$, définit le sous—hyperespace semi—affine E_1 est appelé *équation* de E_1. En particulier on a le

Corollaire (4.1). *Si H_1 admet une base finie $e_1, \ldots, e_n$, alors l' équation de E_1 est $r \in r_1 + t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n$, où $t_1, \ldots, t_n \in K$.*

Remarques 1. a) Si le sous—hyperespace semi—affine E_1 est affine, alors $O \in E_1$ et on peut considérer $O_1 = O$, et dans ce cas on aura comme équation de E_1 $r = z$ d'où, pour le cas particulier du corollaire précédent, on a $r \in t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n$. Si en plus la base $e_1, \ldots, e_n$ est exceptionnelle, l'équation de E_1 est $r = t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n$.

b) Si l'hyperespace affine E est un espace (c'est le cas classique), tout sous—hyperespace semi—affine E_1 de E est un sous—espace affine. Dans ce cas, évidemment, tout point de E_1 peut être pris comme O_1.

Soient deux hyperespaces ponctuels affines E et E' sur le même hyperespace vectoriel H. Alors E et E' sont appelés *isomorphes* s'il existe une application biunivoque $f: E \to E'$ telle que, si on met $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, on ait $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ quels que soient A, B dans E. Relativement à l'isomorphisme on a la généralisation suivante d'une proposition connue des espaces ponctuels affines:

Tout hyperespace ponctuel affine E sur un hyperespace vectoriel H est isomorphe à H, considéré comme hyperespace ponctuel affine sur lui—même.

Car en effet l'application $f: E \to H$ telle que $f(A) = \overline{OA} = a$ est évidemment biunivoque et $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = b - a = \overline{ab}$.

Il est facile de voir que si f est une application isomorphe de l'hyperespace ponctuel affine E sur lui—même on aura $f(O) = O$. Car si $f(O) = O'$ et $f(A) = A'$, alors $\overline{OA} = \overline{O'A'} = \{a \in H: A' \in O' + a\} = a$, donc par l' axiome 2, $O' \equiv O$.

Un hyperespace ponctuel affine se dit *réel*, si l'hyperespace vectoriel correspondant l'est aussi. Un hyperespace ponctuel affine de dimension finie n est appelé *Euclidien*, si son hyperespace vectoriel en est tel. Dans un hyperespace ponctuel Euclidien E on peut définir la *distance* de deux hyperpoints $A, B \in E$ possédant des coordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n)$ par rapport à un système quelconque de coordonnées affines comme la longueur de l'hypervecteur de coordonnées $(b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n)$ [par exemple, si on note cette distance par $d(A, B)$ et si la base considérée est orthonormée, $d(A, B) = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + \cdots + (b_n-a_n)^2}$]. Et si $C(c_1, \ldots, c_n)$ est un troisième hyperpoint de E, on définit comme *angle* BAC l'angle des hypervecteurs de coordonnées respectivement $(b_1-a_1, \ldots, b_n-a_n)$, $(c_1-a_1, \ldots, c_n-a_n)$.

Deux hyperespaces ponctuels Euclidiens sont appelés *isomorphes* s'ils en sont tels considérés comme hyperespaces ponctuels affines, et, si le produit scalaire des hyperespaces vectoriels correspondants est conservé par cet isomorphisme. Il en résulte, donc, que *les distances des hyperpoints d' un hyperespace ponctuel Euclidien E, ainsi que les angles qui sont formées par les hyperpoints de E, sont conservées par les applications isomorphes de l'hyperespace E dans un autre E'.*

En particulier, puisque, comme on a vu, si f est une application isomorphe de E sur lui-même, on a $f(O)=O$, on a la

Proposition (4.3). *Les distances des hyperpoints d'un hyperespace ponctuel Euclidien E de son origine O et les angles de E ayant comme sommet O sont conservées pendant les applications, isomorphes de E sur lui-même.*

Comme exemple d'une telle application isomorphe on peut citer l'application de l'hyperespace ponctuel Euclidien R^n sur lui-même, selon laquelle on fait correspondre à tout hyperpoint $M(x_1, \ldots, x_n)$ de R^n, où $x_1, \ldots, x_n$ sont les coordonnées de M par rapport au système orthonormée des coordonnées affines $0; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, hyperpoint $M'(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ où $i_1, \ldots, i_n$ est une permutation des indices $1, \ldots, n$ et $\varepsilon_1=(1, 0, \ldots, 0), \ldots \varepsilon_n=(0, 0, \ldots, 1)$ la base cononique de R^n.

Références

[1] KRASNER M., *Approximation des corps valués complets de caractéristique $p \neq 0$ par ceuxde caractéristique* 0 (Actes du colloque d'Algèbre Supérieure, C. B. R. M., Bruxelles 19–22 Décembre 1956).

[2] MITTAS J., *Sur une classe d'hypergroupes commutatifs* (C. R. Acad. Sc. Paris, t. 269, p. 485–488, 29 Septembre 1969, Série A').

[3] — *Hyperanneaux et certaines de leurs propriétés* (C. R. Acad. Sc. Paris, t. 269, p. 623–626, 13 Octobre 1969, Serie A').

[4] — *Hypergroupes canoniques* (Mathematica Balkanica, t. 2, p 165–179, Beograd 1972).

[1] On rappelle que pour tout $a,b \in R$, $a \dotplus b$ signifie l'hyperaddition de R [et on note $a \dot{-} b$ au lieu de $a \dotplus (-b)$] et $a+b$ son addition usuelle [et on a aussi, comme d'habitude, $a-b=a+(-b)$].

[5] — *Certains hypercorps et hyperanneaux définis à partir de corps et enneaux ordonnés* (Bulletin Mathématique, t. 15 (63), p. p. 371—378, Bucarest 1973).

[6] — *Sur les hyperanneaux et les hypercorps* (Mathematica Balkanica, t. 3. p. 368—382, Beograd 1973).

[7] — *Sur certaines classes des structures hypercocompositionnelles* (Πρακτικά τῆσ 'Ακαδημιας 'Αθηνῶν. ἔτος 1973, τὸμος 48, σελις 302—318 'Αθῆναι 1974).

[8] — *Hypercorps totalement ordonnés* ('Επιστημονιμὴ 'επετηις τῆς Πολυτεχνιμῆς Σχογῆς τοῦ 'Αριστοτελειου Πανεπιστημιου Θεσσαλονικης, τομοσ Στ, 1972—73 σελ 49—64, Θεσσαλονικη 1974).

37, rue Pavlou Mela, Thessaloniki — Grèce (↓ Beograd, 1974 : 11 : 18)