MATHEMATICA BALKANICA 3 (1973)

SEPARATUM

3. 45. (1973) 368—382

MITTAS, JEAN

SUR LES HYPERANNEAUX ET LES HYPERCORPS

BEOGRAD, 1973.

MATHEMATICA BALKANICA
3 (1973) 368–382

MITTAS JEAN (Athènes, Grèce)

SUR LES HYPERANNEAUX ET LES HYPERCORPS[1]

Dans le présent travail j'étudie certaines propriétés des hyperanneaux et des hypercorps. Comme on le sait [4] la notion de l'hyperanneau a été introduite par M. KRASNER dans une conférence faite à l'Université Nationale Technique d'Athènes en avril 1966. L'hyperanneau est la notion généralisant celle de l'hypercorps, introduite de même par M. KRASNER dans un de ses travaux [1] en 1956. Par la suite j'utilise quelquefois les résultats de mon travail „*Hypergroupes canoniques*" [2], [3].

§ 1. La notion de l'hyperanneau; caractéristique

Définition (1.1). Un ensemble A organisé par une hyperopération [2] $x+y$, dite *addition* et une opération partout définie xy, dite *multiplication*, s'appelle un *hyperanneau* s'il satisfait aux axiomes suivants:

I. A est un hypergroupe canonique [3] par rapport à son additiion (dite *l'hyperqroupe additif* de l'hyperanneau), autrement dit:

1. $x+y \subseteq A$;
2. $(x+y)+z=x+(y+z)$;
3. $x+y=y+x$;
4. $(\exists o \in A)\,(\forall x \in A)\ [x+o=x]$;
5. Pour tout $x \in A$ il existe un et un seul $x' \in A$ tel que $o \in x+x'$ [un tel x' est noté $-x$ et on pose $x-y=x+(-y)$];
6. $z \in x+y \Rightarrow x \in z-y$.

II. A est un demi-groupe par rapport à sa multiplication, dont o est un élément bilatéralement absorbant, c'est-à-dire $xo=ox=o$ pour tout $x \in A$.

III. La multiplication est bilatéralement distributive par rapport à l'addition, autrement dit $(x+y)z=xz+yz$, $z(x+y)=zx+zy$.

[1] Dans ma Note des Comptes rendus [4] j'ai donné les notions et quelques résultats sans démonstrations du présent travail, que je publie aujourd'hui ici sous forme complète.

Les termes et les notations de la théorie des anneaux, qui ne dépendent que de ses propriétés multiplicatives tels que diviseur, unité, diviseur de zéro, éléments associés, intègre, domaine, unitaire, etc. seront maintenus tels que pour les hyperanneaux, sauf que „domaine" sera remplacé par „hyperdomaine". Autrement dit *hyperdomaine* est un hyperanneat intègre (c'est-à-dire sans diviseurs de zéro et commutatif) est unitaire. L'hyperanneau est dit *commutatif* si sa multiplication l'est $[xy=yx]$. Un hyperanneau A est appelé un *hypercorps* [1] si $A^*=A\ldots\{o\}$ est un groupe multiplicatif[1]. Nous remarquons encore que les propriétés des anneaux qui dépendent exclusivement de la multiplication et qui sont démontrables sans intervention de l'addition restent aussi valables dans le cas des hyperanneaux.

Évidemment tout anneau est un hyperanneau. Un hyperanneau qui n'est pas un anneau est appelé *propre*. Comme nous le savons [2], [3] un élément s d'un hypergroupe canonique est un scalaire si, et seulement si, $s-s=o$. Il résulte donc qu'un hyperanneau A est un anneau si, et seulement si, pour tout $x\in A$ on a $x-x=o$.

Il est facile de voir que dans tout hyperanneau on a $(x+y)(z+t)\subseteq xz+ +xt+yz+yt$, $x(-y)=(-x)y=-xy$ et que, si l'hyperanneau est sans diviseurs de zéro, la règle de simplification pour la multiplication a lieu, et inversement. Relativement aux hyperanneaux de ce type on a la

Proposition (1.1). *Si A est un hyperanneau propre et sans diviseurs de zéro à droite où à gauche l'ensemble S des scalaires de A (dans son hypergroupe additif) est le singleton $\{o\}$.*

Démonstration. En effet s'il y avait un $s\in S\ldots\{o\}$, alors, puisque $s-s=o$, pour tout $x\in A$ on aurait: $x(s-s)=o\Rightarrow xs-xs=o\Rightarrow(x-x)s=o\Rightarrow (\forall z\in x-x)[zs=o]\Rightarrow z=o\Rightarrow x-x=o\Rightarrow x\in S\Rightarrow A=S$. A serait donc un anneau, ce qui est contradictoire. Par conséquent $S=\{o\}$.

Remarque (1.1). Si l'hyperanneau sans diviseurs de zéro A est unitaire, il est visible que, pour tout $x\in A$, la différence $x-x$, respect. la somme $x+x$, est de la même cardinalité avec la différence $1-1$, respect. la somme $1+1$, où 1 est l'élément unité de A.

Soit un hyperanneau A.

Définition (1.1). On appelle *caractéristique* $\chi(x)$ d'un élément $x\in A$ l'ordre principal [2], [3] de x dans l'hypergroupe additif de A, si son ordre $\omega(x)\neq+\infty$, et on posera $\chi(x)=0$, si $\omega(x)=+\infty$.

Nous remarquons que si $x\in A$ divise (à droite où à gauche) $y\in A$, la caractéristique $\chi(y)$ divise $\chi(x)$.

En effet la propriété est évidente si $\chi(x)=0$. Soit $\chi(x)\neq0$ et supposons, par exemple, $y=ax$. Alors on a $o\in\chi(x)\cdot x+m\cdot(x-x)$, où $m\in N$ (ensemble des entiers rationnels non négatifs) est convenable, qui donne $o\in\chi(x)\cdot ax+m\cdot(ax-ax)$, donc $o\in\chi(x)\cdot y+m\cdot(y-y)$, d'où [3] nous concluons que $\chi(x)=\text{mult. }\chi(y)$.

Définition (3.1). On appelle *caractéristique* $\chi(A)$ de A le p.p.c.m. de $\chi(x)$, $x\in A$.

---

[1] On va noter $E\ldots F$ le complément de l'ensemble F dans l'ensemble E (qu'on ne suppose pas contenir F), c'est-à-dire $\{x\in E: x\notin F\}$.

S'il n'existe aucun multiple commun non nul des $\chi(x)$, visiblement $\chi(A)=0$. Il est encore visible que, si $\chi(A)\neq 0$, alors, pour tout $x\in A$, on a $o\in\chi(A)\cdot x+\Omega(x)$, où $\Omega(x)=\bigcup\limits_{k\in N} k\cdot(x-x)$ — comme nous le savons, $\Omega(x)$ est un sous hypergroupe canonique du sous-hypergroupe monogène $\{\overline{x}\}$ de l'hypergroupe additif de l'hyperanneau A [3] — et tout autre entier n pour lequel $o\in n\cdot x+\Omega(x)$, quel que soit $x\in A$, est multiple de la caractéristique. Enfin, si $\chi(A)=0$, il n'existe aucun entier n vérifiant $o\in n\cdot x+\Omega(x)$ pour tout $x\in A$.

Lemme (1.1). *Si $a\in A$ est un non-diviseur de zéro, alors $\chi(A)=\chi(a)$. Si, en particulier, A est unitaire, $\chi(A)=\chi(1)$.*

Démonstration. Si $\chi(a)=0$, évidemment $\chi(A)=0$. Soit $\chi(a)\neq 0$ et soit que a est un non-diviseur de zéro, p.e. à gauche. Alors de $o\in\chi(a)\cdot a+\Omega(a)$ on a, pour tout $x\in A$, $o\in\chi(a)\cdot ax+\Omega(a)\,x=a[\chi(a)\cdot x]+a\,\Omega(x)$, car $\Omega(a)\,x=[\bigcup\limits_{k\in N} k\cdot(a-a)]\,x=\bigcup\limits_{k\in N} k\cdot(ax-ax)=a[\bigcup\limits_{k\in N} k\cdot(x-x)]=a\,\Omega(x)$, donc $o\in a[x(a)\cdot x+\Omega(x)]$ qui implique $o\in\chi(a)\cdot x+\Omega(x)$, quel que soit $x\in A$. Il en résulte que, quel que soit $x\in A$, son ordre dans l'hypergroupe additif de A n'est pas infini et que l'ordre principal $\chi(x)$ de x est un diviseur de $\chi(a)$. $\chi(a)$ est, donc, le p.p.c.m. des $\chi(x)$, c'est-à dire on a $\chi(A)=\chi(a)$.

Il suit de là que tous les éléments non nuls d'un hyperanneau sans diviseurs de zéro sont ou bien d'ordre infini, si la caractéristique est égale à zéro, ou bien du même ordre principal qui est égale à la caractéristique, si celle-ci est non nulle.

Remarque (2.1). Contrairement aux anneaux, où $\{o\}$ en est le seul de caractéristique 1, il existe des hyperanneaux propres A avec $\chi(A)=1$. Il est visible pour qu'il soit ainsi il faut et il suffit que l'on ait, pour tout $x\in A$, $x\in\Omega(x)$ [3].

Exemple. Comme nous le savons [5], tout ensemble totalement ordonné E possedant un élément minimum o est un hypergroupe canonique par rapport à l'hyperopération $x+y$ définie à partir de l'ordre total de E comme suit: $x+y=\max\{x, y\}$, si $x\neq y$ et $x+x=\{z\in E: z\leqslant x\}$. L'élément o est le zéro de l'hypergroupe canonique et, pour tout $x\in E$, x lui-même est son opposé unique. Nous constatons facilement que si E est un demi-groupe multiplicatif totalement ordonné par l'ordre total considéré, ayant o comme élement bilatéralement absorbant par rapport à la multiplication xy, alors la structure $(E, +, \cdot)$ est un hyperanneau (La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition résulte, en effet, de la propriété: $x<y$ entraîne $xz<yz$ et $zx<zy$, quels que soient $x, y, z\in E$ avec $z\neq o$). Il est facile de voir que $\Omega(x)=x+x$, donc $x\in\Omega(x)$.

Nous démontrerons dans la suite d'autres propriétés des hyperanneaux qui se rapportent à leur caractéristique.

§ 2. Sous-hyperanneaux et hyperidéaux d'un hyperanneau. Sous-hypercorps d'un hypercorps

Soit un hyperanneau A.

Définition (1.2). Un sous-ensemble A' de A est dit un *sous-hyperanneau* de A s'il est un hyperanneau par rapport à l'addition et à la multiplication de A et avec le même zéro.

En vertu de propriété rélative concernant les hypergroupes canoniques [2], [3], il résulte facilement qu'un sous-ensemble non vide A' de A est un sous-hyperanneau de A si, et seulement si, $x, y \in A'$ impliquent $x-y \subseteq A'$ et $xy \in A'$. Si donc, nous appelons $\mathcal{S}$ l'ensemble des sous-hyperanneaux de A, $\mathcal{M}$ l'ensemble de ses parties stables par rapport à la multiplication et $\mathcal{C}$ l'ensemble de sous-hypergroupes canoniques de l'hypergroupe additif de A, nous aurons $\mathcal{S}=\mathcal{M}\cap\mathcal{C}$. Il s'ensuit que $\mathcal{S}$ est une famille de parties fermées de A (donc un treillis complet) et, par conséquent, à tout sous-ensemble B de A correspond par l'application de fermeture le plus petit sous-hyperanneau $\tilde{B}$ de A contenant B et, évidemment, on a $\tilde{B}=\bigcap_{B\in\mathcal{S}'} B'$ où $\mathcal{S}'=\{B'\in\mathcal{S}: B'\supseteq B\}$. $\tilde{B}$ est le sous-hyperanneau de A *engendré par* B et si on note $\bar{B}$ le sous-hypergroupe canonique de l'hypergroupe additif de A engendré par B, on a $\bar{B}\subseteq\tilde{B}$.

Définition (2.2). Un sous-hyperanneau Q de A en est dit un *hyperidéal à droite*, à *gauche* ou *bilatère* si respectivement

$$AQ\subseteq Q,\ QA\subseteq Q,\ AQ\cup QA\subseteq Q.$$

Proposition (1.2). *L'ensemble S des scalaires de l'hypergroupe additif de A est un anneau qui est, en même temps, un hyperidéal bilatère de A.*

Démonstration. Comme on le sait [3] l'ensemble S est un groupe abelien. D'autres part pour tout $(s, x)\in S\times A$ on a $xs-xs=x(s-s)=xo=o$ et $sx-sx=(s-s)x=ox=o$, donc $xs, sx\in S$ d'où la conclusion.

Soient X un sous-ensemble non vide de A et $\Omega(X)$ la réunion de toutes les sommes $(x_1-x_1)+\cdots+(x_i-x_i)$, où i est un entier positif arbitraire et où $x_1,\ldots,x_i$ parcourent indépendamment X. Comme nous le savons [3] $\Omega(X)$ est un sous-hypergroupe canonique de l'hupergroupe additif de A, c'est-à-dire $\Omega(X)\in\mathcal{C}$.

Proposition (2.2). *Si X est une partie multiplicativement fermée* ($X\in\mathcal{M}$) *de A, $\Omega(X)$ est un sous-hyperanneau de A et si X est un idéal* (de quelque sorte) *du demi-groupe multiplicatif de A, $\Omega(X)$* est *un hyperidéal* (de la même sorte) *de A.*

Démonstration. i) Soit $X\in\mathcal{M}$. Puisque pour tout $x\in\Omega(X)$ il existe une somme $(x_1-x_1)+\cdots+(x_i-x_i)$, où $x_1,\ldots,x_i\in X$, à laquelle x appartient, on aura, pour tout $x, y\in\Omega(X)$, $xy\in[(x_1-x_1)+\cdots+(x_i-x_i)][(y_1-y_1)+\cdots+(y_j-y_j)]\subseteq\sum_{i,j}(x_i-x_i)(y_j-y_j)\subseteq\sum_{i,j}[(x_iy_j-x_iy_j)+(x_iy_j-x_iy_j)]\subseteq\Omega(X)$, car les produits $x_iy_j\in X$, puisque $X\in\mathcal{M}$. Par conséquent $\Omega(X)\in\mathcal{M}\cap\mathcal{C}=\mathcal{S}$.

ii) Soit p.e. $AX\subseteq X$. Évidemment $\Omega(X)\in\mathcal{S}$ et pour tout $a\in A$, $x\in\Omega(X)$, on aura $ax\in\Omega(X)$, car $x\in(x_1-x_1)+\cdots+(x_i-x_i)$ entraîne $ax\in(ax_1-ax_1)+\cdots+(ax_i-ax_i)$ et où $ax_1,\ldots,ax_i\in X$. Il en résulte que $A\Omega(X)\subseteq\Omega(X)$, ce qui montre que le sous-hyperanneau $\Omega(X)$ est un hyperidéal à droite de A.

Corollaire (1.2). *Si $X=\{x\}$ et x est un idenpotent, alors $\Omega(x)=\bigcup_{k\in N}k(x-x)$ est un sous-hyperanneau de A, ainsi que de $\widetilde{\{x\}}$.*

Corollaire (2.2). *Pour $X=A$, $\Omega(A)=\Omega$ est un hypéridéal bilatère de A.*

Proposition (3.2). *Si $x\in A$ est un idempotent, l'hypergroupe monogène $\overline{\{x\}}$ est le sous-hyperanneau $\widetilde{\{x\}}$ de A.*

Démonstration. On sait [3] que $\{\bar{x}\} = \bigcup\limits_{(m,n) \in Z \times N} mx + n(x - x)$, (où Z est l'ensemble des entiers rattonnels). Donc pour tout $z \in \{\bar{x}\}$ il existe $(m, n) \in Z \times N$ tel que $z \in m \cdot x + n \cdot (x - x)$. Par conséquent pour tout $z_1, z_2 \in \{\bar{x}\}$ on aura $z_1 z_2 \in [m_1 \cdot x + n_1 \cdot (x - x)] \cdot [m_2 \cdot x + n_2 \cdot (x - x)] \subseteq m_1 m_2 \cdot x^2 + |m_1| n_2 (x^2 - x^2) + |m_2| n_1 (x^2 - x^2) + n_1 n_2 (x^2 - x^2) = m_1 m_2 \cdot x + (|m_1| n_2 + |m_2| n_1 + n_1 n_2) \cdot (x - x)$, donc $z_1 z_2 \in \{\bar{x}\}$, d'où il vient $\{\bar{x}\} \in \mathscr{M}$, donc $\{\bar{x}\} \in \mathscr{S}$ et, évidemment, on aura $\{\tilde{x}\} \subseteq \{\bar{x}\}$. Mais on a aussi $\{\bar{x}\} \subseteq \{\tilde{x}\}$. Il s'ensuit donc $\{\bar{x}\} = \{\tilde{x}\}$.

Soit Q un hyperideal bilatère de A. Comme Q est un sous-hypergroupe canonique de l'hypergroupe additif de A, définit, comme nous le savons [3], la partition (mod. Q) de A, dont les classes sont les sous-ensembles $C(x) = x + Q$, $x \in A$ et on $a: x' \equiv x \pmod{Q}$ si, et seulement si, $(x' - x) \cap Q \neq \emptyset$. Cette relation d'équivalence, qui, comme on le sait, est normale [3] pour l'addition est aussi normale pour la multiplication, car, si $x' = x \pmod{Q}$, alors $(x' - x) \cap Q \neq \emptyset$ implique $a(x' - x) \cap aQ \neq \emptyset$, pour tout $a \in A$, donc $(ax' - ax) \cap Q \neq \emptyset$ d'où resulte $ax' \equiv ax \pmod{Q}$ et, de même $x'a \equiv xa \pmod{Q}$.

En ce qui concerne ces relations d'équivalence on a la

Proposition (4.2). *Si R est une relation d'equivalence normale par rapport à l'addition et à la multiplication de A, l'ensemble-quontient A/R est un huperanneau.*

Démonstration. En effet on sait [3] que A/R est un hypergroupe canonique par rapport à l'hyperopération $C(x) + C(y) = [\bigcup\limits_{z' \in x' + y'} C(z')]/R = \{C(z') \in A/R : : z' \in x' + y'\}$, où $x' \in C(x)$ et $y' \in C(y)$ sont quelconques, ayant la classe $C(o)$ comme élément zéro. D'autre par, A étant un demi-groupe multiplicatif, A/R l'est aussi par rapport à la multiplication $C(x) \cdot C(y) = C(x'y')$, quelsque soient $x' \in C(x)$, $y' \in C(y)$. Cet demi-groupe possède, évidemment, $C(o)$ comme élément bilatéralement absorbant. Enfin quels que soient $x, y, z \in A$ on a

$$[C(x) \dotplus C(y)] \cdot C(z) = \{C(w) : w \in x + y\} \cdot C(z) = \{C(w) \cdot C(z) : w \subset x + y\} =$$
$$= \{C(wz) : w \in x + y\} = \{C(t) : t \in (x + y) z\} = \{C(t) : t \in xz + yz\} =$$
$$= C(xz) \dotplus C(yz) = C(x) \cdot C(z) \dotplus C(y) \cdot C(z)$$

et, de même, $C(z) \cdot [C(x) + C(y)] = C(z) \cdot C(x) + C(z) \cdot C(y)$. La structnre donc $(A/R, +, \cdot)$ est un hyperanneau.

Corollaire (3.2). *La classe $C(o)$ (mod R) est un hyperidéal bilatéral de A.*

En effet, comme il est connu [3], $C(o)$ est un hypergroupe canonique et, évidemment, $C(o)\, C(x) \subseteq C(ox) = C(o)$ et $C(x)\, C(o) \subseteq C(o)$ quel que soit $x \in A$; donc $C(o)\, A \subseteq C(o)$ et $AC(o) \subseteq C(o)$.

Corollaire (4.3). *Pour tout hyperidéal bilatéral Q de A l'ensemble des classes* (mod Q) *est un hyperanneau, appelé hyperanneau-quotient de A par Q et noté A/Q.*

Il est possible que l'hyperanneau A/Q soit, sous des conditions, un anneau. En effet selon ce qui précède et d'après une proposition relative concernant les hypergroupes canoniques [3], on conclût la proposition suivante:

Proposition (5.2). *A/Ω est un anneau et A/Q est un anneau si, et seulement si, $Q \supseteq \Omega$.*

Corollaire (5.2). *L'hyperanneau A est un anneau si, et seulement si, $\Omega = \{o\}$.*

Remarques (1.2). a) D'après les précédents résulte qu'étant donné un hyperanneau A il existe une correspondance biunivoque entre les hyperideaux bilateraux de A et les relations d'équivalences définies dans A et normales par rapport à son hyperopération et son opération.

b) De même on démontre facilement que, si R_d est une relation d'équivalence normale par rapport à l'hyperopération de A et régulière à droite pour l'opération, la classe $C(o)$ $(\mathrm{mod}\, R_d)$ est un hyperidéal à droite de A et inversement. On démontre aussi qu'une propriété analogue à lieu concernant les relations d'équivalences R_g, qui sont normales par rapport à l'hyperopération de A et régulières à gauche pour son opération, et les hyperidéaux à gauche de A.

Soit maintenant que l'hyperanneau A est unitaire et soit 1 son élément-unité. Appelons P le sous-hyperanneau $\{\tilde{1}\}$ engendré par 1.

Remarque (2.2). a) On a $P = \{\overline{1}\}$, selon la proposition (3.2).

b) P est un anneau si, et seulement si, A est un anneau.

Proposition (6.2). i) *Le sous-hyperanneau $\Omega(1) = \mathcal{A}_0$ est un hyperidéal bilatéral de P et l'hyperanneau $P/\mathcal{A}_0$ est un anneau.*

ii) *L'anneau $P/\mathcal{A}_0$ est isomorphe à l'anneau Z des entiers rationnels où à l'anneau $Z/(p)$ des classes $(\mathrm{mod}\, p)$ de Z, selon que la caractéristique $\chi(A)$ de A est nulle où non nulle p.*

Démonstration. i) On sait [3] que pour tout hypergroupe monogène $H = \{\overline{x}\}$ on a $H = \bigcup_{m \in Z} \mathcal{A}_m$ où $\mathcal{A}_m = m \cdot x + \Omega(x)$. Donc, P étant égal à $\{\tilde{1}\}$, on a $P = \bigcup_{m \in Z} \mathcal{A}_m$ et, par conséquent, $P\mathcal{A}_0 = (\bigcup_{m \in Z} \mathcal{A}_m)\mathcal{A}_0 = \bigcup_{m \in Z} \mathcal{A}_m \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_0$, car

$$\mathcal{A}_m \mathcal{A}_0 = (m \cdot 1 + \mathcal{A}_0)\mathcal{A}_0 \subseteq (m \cdot 1)\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_0\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0.$$

De même on a $\mathcal{A}_0 P \subseteq \mathcal{A}_0$. Il en résulte que $\mathcal{A}_0$ est un hyperidéal bilatéral de P et, par la proposition (5.2) et puisque $\mathcal{A}_0 = \Omega(P)$ [3], on a que $P/\mathcal{A}_0$ est un anneau.

ii) Selon une proposition de la théorie des hypergroupes monogènes [3] on a que le groupe additif de l'anneau $P/\mathcal{A}_0$ est isomorphe au groupe additif de Z où de $Z/(p)$, selon que l'ordre $\omega(1)$ de 1 est $+\infty$ où (p, q), donc selon que la caractéristique de A est 0 où p. L'isomorphisme de l'anneau $P/\mathcal{A}_0$ par rapport à l'anneau Z où $Z/(p)$ suit du fait que, pour tout $\mathcal{A}_m, \mathcal{A}_{m'} \in P/\mathcal{A}_0$ on a $\mathcal{A}_m\mathcal{A}_{m'} = (m \cdot 1 + \mathcal{A}_0)(m' 1 + \mathcal{A}_0) \subseteq mm' 1 + (m \cdot 1)\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_0(m' \cdot 1) + \mathcal{A}_0\mathcal{A}_0 \subseteq$ $\subseteq mm' \cdot 1 + \mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_{mm'}$, donc $\mathcal{A}_m \cdot \mathcal{A}_{m'} = \mathcal{A}_{mm'}$.

Corollaire (6.2). i) *L'anneau $P/\mathcal{A}_0$ est commutatif. $P/\mathcal{A}_0$ est un corps si, et seulement si, la caractéristique de A est un nombre premier.*

Corollaire (8.2). *L'hyperanneau A et l'anneau $P/\mathcal{A}_0$ sont de la même caractéristique.*

Proposition (7.2). *Si la caractéristique p d'un hyperanneau sans diviseurs de zéro est différente de 0 et de 1, elle est, un nombre premier.*

Démonstration. Si $p \neq 0$ et 1 et si on suppose $p = p_1 p_2$, où $p_1 \neq 1$, $p_2 \neq 1$ alors, puisque $1 \in \mathcal{A}_1$ on a pour les produits des sous-ensemble $p_1 \mathcal{A}_1$, $p_2 \mathcal{A}_1$ de A: $(p_1 \mathcal{A}_1)(p_2 \mathcal{A}_1) = (\mathcal{A}_1 + \cdots + \mathcal{A}_1)(\mathcal{A}_1 + \cdots + \mathcal{A}_1) = (p_1 p_2) \mathcal{A}_1 = p \mathcal{A}_1 = = p(1 + \mathcal{A}_0) = p \cdot 1 + \mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0$. Il y a, donc, des éléments $x \in p_1 \mathcal{A}_1$, $y \in p_2 \mathcal{A}_1$ non nuls (puisque $o \notin p_1 \mathcal{A}_1$ et $o \notin p_2 \mathcal{A}_1$) et tels que $xy = o$, ce qui est contradictoire. Il en résulte que p est premier.

Proposition (8.2). *Si le sous-hyperanneau P est un hypercorps, alors P est ou bien un corps de caracséristique non nulle et, dans ce cas, A est un anneau dont la caractéristique $\chi(A)$ est un nombre premier, ou bien on a $P = \mathcal{A}_0$ et, par conséquent, $\chi(A) = 1$.*

Démonstration. Si, en effet, P est un hypercorps, alors son hyperideal $\mathcal{A}_0$ sera (o) ou P lui-même, c'est-à dire non propre[1]. Mais si $\mathcal{A}_0 = (o)$, alors les hyperanneaux $P/\mathcal{A}_0 = P/(o)$ et P sont isomorphes et, puisque $P/\mathcal{A}_0$ est un anneau, il vient que P est un corps et, de même, $P/\mathcal{A}_0$. Donc, par le corollaire (6.2) la caractéristique $\chi(A)$ de A est un nombre premier. *D'* autre part, par la remarque $(2b \cdot 2)$, on a que A est un anneau. Si $P = \mathcal{A}_0$, alors $1 \in \mathcal{A}_0$ et, selon la remarque (2.1), on a $\chi(A) = 1$.

Proposition (9.2). *L'hyperanneau P vérifie la propriété: Si $z \in P$ et si $x \in A$, il existe $z', z'' \in P$ tels que $xz = z'x$ et $zx = xz''$.*

Démonstration. Évidemment pour tout $z \in P$ il existe $m \in Z$ tel que $z \in \mathcal{A}_m = m \cdot 1 + \mathcal{A}_0 + = m \cdot 1 + \bigcup_{k \in Z} k \cdot (1-1)$ donc, pour tout $x \in A$, on a

$$xz \in x[m \cdot 1 + \bigcup_{k \in Z} k \cdot (1-1)] = m \cdot x \cdot + \bigcup_{k \in Z} k \cdot (x - x) =$$

$$= [m \cdot 1 + \bigcup_{k \in Z} k \cdot (1-1)]\, x = \mathcal{A}_m \cdot x.$$

Il existe donc un $z' \in \mathcal{A}_m \subseteq P$ tel que $xz = z'x$ et on trouve, de même, qu'il existe un $z'' \in P$ tel que $zx = xz''$.

Remarque (3.2). La propriété ci-dessus de P est très importante, car il en résulte que pour tout a, $b \in P$ il y a des élements x, $y \in P$ de manière que l'on ait $ab = by = xa$, où la construction de l'hypercorps des fractions de P se base [voir remarque (4.2)].

Supposons maintenant que l'hyperanneau A est un hypercorps. Un sous--hyperanneau A' de A qui est un hypercorps sera appelé un *sous-hypercorps* de A. Évidemment un sous-ensemble non vide A' de A est un sous-hypercorps de A si, et seulement si, pour tout $x, y \in A'$ ou a $x - y \subseteq A'$ et, si $y \neq 0$, $xy^{-1} \in A'$. Il est aussi évident que l'intersection d'une famille de sous-hypercorps de A en est encore un. Il suit de là que l'ensemble des sous-hypercorps de A est une famille des parties fermées de A, donc un treillis complet, dont l'élément mi-

[1] Comme dans le cas des anneaux, si Q est un hyperidéal (de quelque sorte) d'un hyperanneau unitaire A, alors, si $1 \in Q$, on *a* $Q = A$. Il en résulte que les hypercorps sont privés des hyperidéaux propres.

nimum est visiblement le sous-hypercorps engendré par 1 et qui sera noté Π. Π est appelé *sous-hypercorps premier* de A. Évidemment on a $P \subseteq \Pi$.

Proposition (10.2). *Si $P = \Pi$, alors A est ou bien un corps de caractéristique un nombre premier, ou bien est un hypercorps propre avec $\chi(A) = 1$.*

Démonstration. Si $P = \Pi$, alors P est un hypercorps et la conclusion est immédiate [par la proposition (8.2)].

Corollaire (8.2). *Si A est propre et $\chi(A) \neq 1$, alors $P \subset \Pi$.*

Comme nous le savons [5[il existe des hypercorps A tels que $\chi(A) \neq 1$. Il résulte donc du corollaire ci-dessus du'il y a des hyperanneaux propres qui ne sont pas des hypercorps.

Proposition (11.2). *On a* $\Pi = \{xy^{-1} : x \in P,\ y \in P^*\}$.

Démonstration. Nous démontrerons d'abord que l'ensemble $\Gamma = \{xy^{-1} : x \in P, y \in P^*\}$ est un sous-hypercorps de A et puis que l'on a $\Gamma = \Pi$.

En effet, selon la proposition (9.2) pour tout $x \in P$, $y \in P^*$ on a $xy^{-1} = y^{-1}x'$, où $x' \in P$ est convenable. Par conséquent pour tout xy^{-1}, $x_1 y_1^{-1} \in \Gamma$ on a: $w \in xy^{-1} - x_1 y_1^{-1} \Rightarrow xy^{-1} \in w + x_1 y_1^{-1} \Rightarrow y^{-1}x' \in w + x_1 y_1^{-1} \Rightarrow x' \in yw + yx_1 y_1^{-1} \Rightarrow x'y_1 \in ywy_1 + yx_1 \Rightarrow ywy_1 \in x'y_1 - yx_1 \in P \Rightarrow (ywy_1) y_1^{-1} \in \Gamma \Rightarrow yw \in \Gamma$ et par suite, comme il résulte de la définition de Γ, il existe $z \in P$, $z_1 \in P^*$ tels que $yw = zz_1^{-1}$. Il suit de là que $w = (y^{-1}z) z_1^{-1}$ et, puisque $y^{-1}z = z'y^{-1}$ pour un $z' \in P$ convenable, on a $w = (z'y^{-1}) z_1^{-1} = z'(z_1 y)^{-1}$ et, comme $z' \in P$, $z_1 y_1 \in P^*$, il vient que $w \in \Gamma$, donc $xy^{-1} - x_1 y_1^{-1} \subseteq \Gamma$.

De même pour tout xy^{-1}, $x_1 y_1^{-1} \in \Gamma$ tels que $xy^{-1} \neq o$, c'est-à dire $x \neq o$, on a, en appliquant la propriété (9.2), $(x_1 y_1^{-1})(xy^{-1})^{-1} = x_1 y_1^{-1}(y^{-1}x')^{-1} = x_1 y_1^{-1} x'^{-1} y = x_1 (x'y_1)^{-1} y = x_1 [y^{-1}(x'y_1)]^{-1} \in \Gamma$, car $xy^{-1} \neq o \Rightarrow y^{-1}x' \neq o$, donc $y^{-1}(x'y_1) \in P^*$. Γ est donc, en effet un sous-hypercorps de A.

Ensuite nous remarquons que pour tout $z \in \Gamma$ il existe $x \in P$, $y \in P^*$, donc $x, y \in \Pi$, tels que $z = xy^{-1}$, d' où il résulte $z \in \Pi$ et par suite $\Gamma \subseteq \Pi$. Π étant le plus petit sous-hypercorps de A on a $\Gamma = \Pi$.

Remarwue (4.2). Si A est un anneau (commutatif ou non) sans diviseurs de zéro, on appelle, comme il est connu, *corps de fractions de A* un corps (en général gauche) $K \supseteq A$ tel que tout élément $x \in k$ puisse se mettre à la fois sous les formes $x = ab^{-1} = b'^{-1}a'$, où a, $a' \in A$, b, $b' \in A^*$. En adoptant la terminologie analogue pour les hyperanneaux et les hypercorps on a que Π est l'hypercorps des fractions de P.

§ 3. Homomorphisme et isomorphisme d'hyperanneaux. Plongement d'un hyperanneau dans un hypercorps

Soient A et B deux hyperanneaux.

Définition (1.3). Une application $\varphi : A \to B$ de A dans B est dit un *homomorphisme si*:

$$\varphi \cdot (x + y) = (\varphi \cdot x) + (\varphi \cdot y) \quad (1), \qquad \varphi \cdot (xy) = (\varphi \cdot x)(\varphi \cdot y) \quad (2), \qquad \varphi \cdot o = o \quad (3)$$

Un homomorphisme qui est une application biunivoque de A sur B est un *isomorphisme*.

Proposition (1.3). *L'image homomorphe $\varphi \cdot A$ de A dans un homomorphisme φ est un hyperanneau. Le noyau $\mathcal{N}(\varphi) = \varphi^{-1} \cdot (\varphi \cdot o)$ de φ est un hyperidéal bilatère de A et l'application $x + \mathcal{N}(\varphi) \to \varphi \cdot x$ est un isomorphisme de l'hyperanneau-quotient $A/\mathcal{N}(\varphi)$ sur l'hyperanneau $\varphi \cdot A$.*

Démonstration. Comme on le sait [3] $\varphi \cdot A$ est un hypergroupe canonique donc l'axiome I de la définition (1.1) est satisfait. Évidemmert l'élément $\varphi \cdot o$, $o \in A$ est le zéro de $\varphi \cdot A$. L'axiome II visiblement est aussi satisfait tant qu'on ne fait intervenir que la multiplication. Quant à l'axiome III, c'est-à dire la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition on a: $[(\varphi \cdot x) + (\varphi \cdot y)] (\varphi \cdot z) = \varphi \cdot (x+y) (\varphi \cdot z) = \{\varphi \cdot w : w \in x+y\} (\varphi \cdot z) = \{(\varphi \cdot w) (\varphi \cdot z) : w \in x+y\} = \{\varphi \cdot (wz) : w \in x+y\} = \varphi \cdot [(x+y) z] = \varphi \cdot (xz+yz) = \varphi \cdot (xz) + \varphi \cdot (yz) = (\varphi \cdot x) (\varphi \cdot z) + (\varphi \cdot y) (\varphi \cdot z)$ pour tout $x, y, z \in A$. On démontre de même que $(\varphi \cdot z) [(\varphi \cdot x) + (\varphi \cdot y)] = (\varphi \cdot z) (\varphi \cdot x) + (\varphi \cdot z) (\varphi \cdot y)$. L'axiome, donc, III est aussi satisfait et $\varphi \cdot A$ est bien un hyperanneau.

Le noyau $\mathcal{N}(\varphi)$ de φ est en effet un hyperidéal bilatàre de A, car d' une part est, comme on le sait [3], un hypergroupe canonique et d'autre part pour tout $x \in \mathcal{N}(\varphi)$, $z \in A$ on a $\varphi \cdot (xz) = (\varphi \cdot x) (\varphi \cdot z) = (\varphi \cdot o) (\varphi \cdot z) = \varphi (oz) = \varphi \cdot o$, donc $xz \in \mathcal{N}(\varphi)$ et, de même $zx \in \mathcal{N}(\varphi)$.

Enfin l'application $x + \mathcal{N}(\varphi) \to \varphi \cdot x$ est, comme il est connu [3], un isomorphisme de l'hypergroupe additif de A sur l'hyergroupe additif de $\varphi \cdot A$. Si on note ψ cet homomorphisme on aura aussi:

$$\psi [(x + \mathcal{N}(\varphi)) \cdot (y + \mathcal{N}(\varphi))] = \psi (xy + \mathcal{N}(\varphi)) = \varphi \cdot (xy) = (\varphi \cdot x) (\varphi \cdot y) =$$
$$= \psi (x + \mathcal{N}(\varphi)) \, \psi (y + \mathcal{N}(\varphi)) \text{ et } \psi (\mathcal{N}(\varphi)) = \psi (o + \mathcal{N}(\varphi)) = \varphi \cdot o.$$

Il en résulte que ψ est un isomorphisme de l'hyperanneau — quotient $A/\mathcal{N}(\varphi)$ sur $\varphi \cdot A$.

Corollaire (1.3). *Tout homomorphisme $\varphi : A \to B$ de A dans B se factorise en composé $\varphi = \psi \eta (\mathcal{N}(\varphi))$, où $\eta (\mathcal{N}(\varphi))$ est l'homomorphisme canonique de A sur $A/\mathcal{N}(\varphi)$ et où ψ est un isomorphisme de $A/\mathcal{N}(\varphi)$ sur $\varphi \cdot A$.*

Corollaire (2.3). *L'image homomorphe d'un hyperdomain, respect. d'un hypercorps, est aussi un hyperdomain, respect. un hypercorps.*

Remarque (1.3). a) Pour qu'un homomorphisme $\varphi : A \to B$ soit un isómorphisme il faut et il suffit que l'on ait $\mathcal{N}(\varphi) = \{o\}$, où $\mathcal{N}(\varphi)$ est le noyau de φ.

b) Pour tout homomorphisme $\varphi : A \to B$ la relation d'équivalence $R\varphi$ définie par φ dans A est la rélation d'équivalence (mod. $\mathcal{N}(\varphi)$) (voir [3]).

Soit maintenant A un hyperanneau intégre. La méthode habituelle de construction du corps des fractions d'un anneau intègre s'applique à A tant qu'on ne fait intervenir que la multiplication. Nous citons breuvement ci-dessous de la théorie classique ce que se rapporte à la partie multiplicative de A, c'est-à dire au plongement du demi-groupe multiplicative de A^* dans un groupe abelien pui, d'ailleurs, sont aussi nécessaires pour la construction demandée de l'hypercorps des fractions de A.

Considérons l'ensemble D de toutes les *fractions* de la forme $\frac{a}{x}$, où $a \in A$, $x \in A^*$ et où sous le terme „fraction" on entend le couple ordonné (a, x) des éléments a, x. Ensuite nous définissons dans D une relation d'égalité comme suit: $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ si, et seulement si, $ay = bx$. Nous définissons aussi une multiplication dans D: $\frac{a}{x} \cdot \frac{b}{y} = \frac{ab}{xy}$. Cette multiplication est, évidemment, associative et commutative. Comme on le sait l'égalité dans D est une relation d'équivalence compatible avec la multiplication et, par suite, l'ensemble K des classes de fractions égales est un demi-groupe, de même, commutatif par rapport à sa multiplication: $C\left(\frac{a}{x}\right) \cdot C\left(\frac{b}{y}\right) = C\left(\frac{ab}{xy}\right)$. L'ensemble des fractions de la forme $\frac{z}{z}$, $z \in A^*$ constitue une classe particulière qui joue le rôle de l'élément unité dans K. De même les fractions de la forme $\frac{o}{w}$, $w \in A^*$ sont égales entre elles et forment une classe qui joue le rôle du zéro dans K. Enfin, à toute classe $C\left(\frac{x}{y}\right)$, $x, y \in A^*$ correspond la classe $C\left(\frac{y}{x}\right)$ comme élément inverse de $C\left(\frac{x}{y}\right)$ dans K. Il en résulte que l'ensemble $K^* = K \ldots \left\{C\left(\frac{o}{w}\right)\right\}$ est par rapport à la multiplication des classes un groupe abelien. D'autre part les fractions de la forme $\frac{ax}{x}$, $x \in A^*$, étant égales entre elles, constituent une classe et la correspondance $a \to C\left(\frac{ax}{x}\right)$ est, évidemment, une application biunivoque de A dans K, qui respecte la multiplication: $ab \to C\left(\frac{ax}{x}\right) C\left(\frac{by}{y}\right) = C\left(\frac{(ab)\,w}{w}\right)$ c'est-à dire elle est un isomorphisme du demi-groupe A dans le demi-groupe K. En ce qui concerne le groupe K^*, celui-ci est le plus petit groupe contenant comme sous-ensemble un demi-groupe isomorphe à A^*.

Désirant maintenant munir K d'une structure d'hypercorps, nous définissons sur l'ensemble D des fractions une hyperopération (addition) comme suit: $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \left\{\frac{c}{xy} : c \in ay + bx\right\}$ et qui a un sens, car $xy \in A^*$ $(a, b \in A,\ x, y \in A^*)$, puisque A est sans diviseurs de zero. Cette addition est évidemment commutative. Elle est aussi associative, car

$$\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y}\right) + \frac{c}{z} = \left\{\frac{d}{xy} : d \in ay + bx\right\} + \frac{c}{z} = \bigcup_{d \in ay+bx} \left(\frac{d}{xy} + \frac{c}{z}\right) =$$

$$= \bigcup_{d \in ay+bx} \left\{\frac{e}{xyz} : e \in dz + cxy\right\} = \left\{\frac{e}{xyz} \cdot e \in ayz + bzx + cxy\right\}$$

et nous trouvons le même pour $\frac{a}{x}+\left(\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)$. A partir de l'addition des fractions nous avons pour les classes des fractions égales:

$$C\left(\frac{a}{x}\right)+C\left(\frac{b}{y}\right)=\bigcup\left(\frac{a'}{x'}+\frac{b'}{y'}\right),\ \text{où}\ \frac{a'}{x'}=\frac{a}{x}\ \text{et}\ \frac{b'}{y'}=\frac{b}{y}.$$

Nous remarquons que deux fractions $\frac{c_1}{z_1}, \frac{c_2}{z_2}\in\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$ sont égales, si et seulement si, $c_1=c_2$ et $z_1=z_2$. En effet on a $z_1=z_2=xy$ et de $c_1z_2=c_2z_1$ il vient $c_1=c_2$. D'autre part pour tout $\frac{a'}{x'}\in C\left(\frac{a}{x}\right), \frac{b'}{y'}\in C\left(\frac{b}{y}\right)$ et pour tout $\frac{c'}{z'}\in\frac{a'}{x'}+\frac{b'}{y'}$ il existe un $\frac{c}{z}\in\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$ tel que $\frac{c'}{z'}=\frac{c}{z}$. En effet $\frac{c'}{z'}\in\frac{a'}{x'}+\frac{b'}{y'}$ donne $z'=x'y'$ et $c'\in a'y'+b'x'$, donc $c'(xy)\in(a'x)yy'+(b'y)xx'$ et puisque $\frac{a'}{x'}=\frac{a}{x}$, $\frac{b'}{y'}=\frac{b}{y}$ d'où $a'x=ax'$ et $b'y=by'$, on a $c'xy\in(ax')yy'+(by')xx'=(ay+bx)x'y'$. Il existe donc un $c\in ay+bx$ tel que $c'xy=cx'y'$, c'est-à dire $\frac{c'}{x'y'}=\frac{c}{xy}=\frac{c}{z}\in\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$. Il résulte, donc, pour la somme des classes de fractions égales que

$$C\left(\frac{a}{x}\right)+C\left(\frac{b}{y}\right)=\bigcup C\left(\frac{c'}{z'}\right)\ \text{où}\ \frac{c'}{z'}\in\frac{a'}{x'}+\frac{b'}{y'}\ \text{et où}\ \frac{a'}{x'}=\frac{a'}{x}\ \text{et}\ \frac{b}{y'}=\frac{b}{y}.$$

L'égalité, donc, des fractions qui est une relation d'équivalence dans D normale pour la multiplication est aussi normale pour l'addition, d'où il vient que l'ensemble K des classes est, par rapport à l'addition

$$C\left(\frac{a}{x}\right)\dot{+}C\left(\frac{b}{y}\right)=\left\{C\left(\frac{c}{xy}\right):c\in ay+ax\right\}$$

un demi-hypergroupe commutatif. Ce demi-hypergroupe possède, évidemment, la classe $C\left(\frac{o}{w}\right)$ comme élément zéro et pour toute classe $C\left(\frac{a}{x}\right)$ la classe $C\left(\frac{-a}{x}\right)$ comme élément opposé de $C\left(\frac{a}{x}\right)$. Enfin, si $C\left(\frac{c}{xy}\right)\in C\left(\frac{a}{x}\right)\dot{+}C\left(\frac{b}{y}\right)$, alors $c\in ay+bx$ implique successivemment $bx\in c-ay$, $bx^2\in cx-axy$, $\frac{bx^2}{yx^2}\in\frac{cx-axy}{x^2y}=$ $=\frac{c}{xy}-\frac{a}{x}$ et, puisque $\frac{bx^2}{yx^2}=\frac{b}{y}$, il s'ensuit que $C\left(\frac{b}{y}\right)\in C\left(\frac{c}{xy}\right)\dot{+}C\left(\frac{-a}{x}\right)$. L'ensemble, donc, K est un hypergroupe canonique par rapport à l'addition $C\left(\frac{a}{x}\right)\dot{+}C\left(\frac{b}{y}\right)$. Enfin il est facile de vérifier que la multiplication est doublement distributive par rapport à l'addition. Par conséquent, et en vu de ce qui est exposé ci-dessus pour la partie multiplicative, il résulte que K est un hypercorps commutatif.

Ensuite nous remarquons que l'application considérée précédemment $\varphi: A\rightarrow K$

telle que $\varphi \cdot a = C\left(\frac{ax}{x}\right)$ pour laquelle on a $\varphi \cdot (ab) = (\varphi \cdot a)(\varphi \cdot b)$ satisfait encore à la relation $\varphi \cdot (a+b) = (\varphi \cdot a) + (\varphi \cdot b)$. En effet on a

$$\varphi \cdot (a+b) = \{\varphi \cdot c : c \in a+b\} = \left\{C\left(\frac{cx}{x}\right) : c \in a+b\right\}$$

et

$$(\varphi \cdot a) + (\varphi \cdot b) = C\left(\frac{ax}{x}\right) + C\left(\frac{by}{y}\right) = \left\{C\left(\frac{d}{xy}\right) : d \in (a+b)\,xy\right\} = \left\{C\left(\frac{ew}{w}\right) : e \in a+b\right\}.$$

Évidemment on a encore $\varphi \cdot o = C\left(\frac{o}{w}\right) \cdot \varphi$ est donc un isomorphisme de l'hyperanneau A dans l'hyperanneau K. Ainsi nous avons la

Proposition (2.3). *Tout hyperanneau intègre peut être plongé isomorphiquement dans un hypercorps.*

Cet hypercorps K, comme il résulte des exposés préalablement à la partie multiplicative, est le plus petit hypercorps qui contient comme sous-ensemble un hyperanneau isomorphe à A. Evidemment K est l'hypercorps des fractions de A [voir remarque (4.2)].

Remarques (2.3). a) De l'exposé précédent résulte que la méthode de consstruction de l'anneau des fractions A_M de dénominateurs éléments d'un sous-ensemble M de A multiplicativement fermé et tel que $o \notin M$ s'étend aussi aux hyperanneaux commutatifs.

b) Aux hyperanneaux s'applique aussi la méthode de construction du corps des fractions d'un anneau sans diviseurs de zéro et satisfaisant à la condition suivante, toujours vérifiée dans le cas commutatif: pour des éléments non nuls a, b de l'annéau on peut trouver dans lui des éléments non nuls x et y tels que $ax = by$ [Ore, Ann. of Math., 32 (1931), 463—477]. Bien entendu cette méthode s'applique aux hyperanneaux satisfaisant aux mêmes que les anneaux conditions ci-dessus.

Il en résulte que dans un hyperanneau unitaire et sans diviseurs de zéro, il existe toujours, en raison de la proposition (9.2), l'hypercorps des fractions de l'hyperanneaux P engendré par l'élément-unité 1 [voir remarques (3.2) et (4.2)].

§ 4. Certaines remarques sur les hyperidéaux d'hyperanneaux.

Soit un hyperanneau A. Si $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_g$, $\mathcal{H}_d$ sont respectivement les ensembles des hyperidéaux bilateraux, à gauche et à droite de A, nous remarquons que chacun d'eux est l'intersection de l'ensemble $\mathcal{C}$ des sous-hypergroupes canoniques de l'hypergroupe additif de A et de l'ensemble respectivement $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}_g$, $\mathcal{J}_d$ des idéaux du demi-groupe multiplicatif de A. Et comme ces ensembles $\mathcal{C}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}_g$, $\mathcal{J}_d$ constituent des familles de parties fermées de A, il résulte que chacun des ensembles $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_g$, $\mathcal{H}_d$ constitue aussi une telle famille. Par conséquent l'intersection de toute famille d'hyperidéaux (de quelque sorte) en est encore un et, si B est un sous-ensemble de A, l'intersection $\hat{B}$ des hyperidéaux (de la même sorte) qui contiennent B comme sous-ensemble est, évidemment, le plus petit hyperidéal de cette sorte contenant B, dit *hypérideal de A engendré par B.*

On définit comme d'habitude la somme de plusieurs hyperidéaux ou d'une famille d'hyperidéaux (de quelque sorte) comme l'hyperidéal de cete sorte engendré par leur réunion. On définit le *produit* $\mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_1$ des hyperidéaux $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ (de quelque sorte) comme l'hyperidéal engendré par l'ensemble de a_1a_2, ou (a_1, a_2) parcourt le produit cartesien $\mathcal{Q}_1 \times \mathcal{Q}_2$. On démontre facilement que les égalités et les inclusions de la théorie classique concernant les sommes, les intersections et les produits des idéaux des anneaux restent valables pour ceux des hyperidéaux des hyperanneaux (les démonstration relatives étant modifiées convenablement en ce qui concerne l'hyperopération de l'hyperanneau). Nous avons ainsi les propriétés:

1) La somme d'une famille d'hyperidéaux (de quelque sorte) est égale avec le sous-hypergroupe canonique engendré par leur réunion.

2) Si $\hat{B}_g$, $\hat{B}_d$, $\hat{B}$ sont respectivement les hyperidéaux à gauche, à droite et bilatéraux de A ayant comme générateur $B \subseteq A$, on a

$$\hat{B}_g = \overline{B \cup AB},\quad \hat{B}_d = \overline{B \cup BA},\quad \hat{B} = \overline{B \cup AB \cup BA \cup ABA}$$

où, si $\Gamma \subseteq A$, $\overline{\Gamma}$ signifie le sous-hypergroupe canonique engendré par Γ.

Évidemment si l'hyperanneau A est unitaire, ces formules deviennent

$$\hat{B}_g = \overline{AB},\quad \hat{B}_d = \overline{BA},\quad \hat{B} = \overline{ABA}.$$

3) Si B est un idéal à gauche du demi-groupe multiplicatif de A, alors $\hat{B}_g = \overline{B}$. De même on a $\hat{B}_d = \overline{B}$, si B est un idéal à droite et $\hat{B} = \overline{B}$, si B est un idéal bilatéral de ce demi-groupe.

4) En ce qui concerne le produit de deux hyperidéaux (p.e. à gauche) $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'$ on a, d'après la proposition concernant la génération de sous-hypergroupes canoniques [3], que celui-ci n'est que la réunion de sommes $a_1a_1' + \cdots + a_ka_k'$, $k \in \{1, 2, \dots\}$, $a_i \in \mathcal{Q}$, $a_i' \in \mathcal{Q}$.

5) Si on remplace à la proprieté précédente du produit $\mathcal{Q}\mathcal{Q}'$ l'hyperidéal $\mathcal{Q}'$ par une partie non vide B de A, la réunion $\cup \sum_{z=1}^{k} a_ib_i$, $k \in \{1, 2, \dots\}$, $a_i \in \mathcal{Q}$, $b_i \in B$, est encore un hyperidéal à gauche de A, appelé *hyperidéal-produit* de l'hyperidéal à gauche $\mathcal{Q}$ par la partie B de A.

On définit symétriquement *l'hyperidéal-produit* B de la partie non vide B de A par l'hyperidéal à droite $\mathcal{D}$ de A et on voit facilement qu'il s'agit d'un hyperidéal à droite de A. Bien entendu que cette extension est en défaut pour les hyperidéaux bilatères.

6) De ce qui précède résulte que le produit d'un hyperidéal à gauche $\mathcal{G}$ par un hyperidéal à droite $\mathcal{D}$ a un sens, et est visiblement, un hyperidéal bilatéral de A.

7) La multiplication dans chacun des ensembles $\mathcal{H}_g$, $\mathcal{H}_d$, $\mathcal{H}$ est associative et isotone. Elle est aussi doublement distributive par rapport à l'addition dans $\mathcal{H}_g$, dans $\mathcal{H}_d$, dans $\mathcal{H}$ respectivemt. Cette distributivité, même, est encore valable pour la somme d'une famille infinie d'hyperidéaux (distributivité générale).

8) Les treillis complets $\mathcal{H}_g$, $\mathcal{H}_d$, $\mathcal{H}$ sont multiplicatifs. La borne supérieure d'une famille d'hyperidéaux (de quelque sorte) est leur somme qui est bien distribué par la multiplication. Mais la multiplication n'est pas, en général, distributive par rapport à leur borne inférieure (qui coincide avec leur intersection ensembliste).

Soit $B \subseteq A$, un sous-ensemble de A. Comme dans la théorie classique si $B=\{b\}$, nous notons $(b\}$, $\{b)$, (b) les hyperidéaux à gauche, à droite et bilatéral de A engendré par $\{b\}$ et nous les appelons *hyperidéaux principaux* de A. Nous concluons facilement les formules:

$$(b\} = \bigcup_{n\in Z,\ a\in A} nb + ba, \quad \{b) = \bigcup_{n\in Z,\ a\in A} nb + ab, \quad (b) = \bigcup_{n\in Z,\ (a_1, a_2, a', a'')\in A^4} nb + a_1 b + ba_2 + a'ba''$$

Si l'hyperanneau A est unitaire, évidemment, on a $(b\} = Ab$, $\{b) = bA$, $(b) = AbA$, donc $(1\} = \{1) = (1) = A$.

Si $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ est un sous-ensemble fini de A, nous notons respectivement comme ci-dessus, par $(b_1, \ldots, b_k\}$, $\{b_1, \ldots, b_k)$, $(b_1, \ldots, b_k)$ l'hyperidéal á gauche, à droite et bilatéral de A engendré par B et nous disons que, chacun de ces hyperidéaux, admet un *système générateur*, fini ou *une base finie*. Il résulte facilement que pour l'hyperidéal p.e. à gauche on a $(b_1, \ldots, b_k\} = \sum_{i=1}^{k} (b_i\}$. Par conséquent, si $\mathcal{G} = (b_1, \ldots, b_k\}$ $\mathcal{G}' = (b_1', \ldots, b_e'\}$ sont deux hyperidéaux de bases finies, on a $\mathcal{G} + \mathcal{G}' = (b_1, \ldots, b_k, b_1, \ldots, b_e\}$ c'est-à dire leur somme admet aussi de base finie, réunion de celles de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$. De même leur produit admet aussi de base finie. Si d'autre part $\mathcal{G}$ et $\mathcal{D}$ sont deux hyperidéaux de A, respectivement à gauche et à droite, admettant de bases finies respectivement, Γ et Δ; il est visible que leur produit $\mathcal{G}\mathcal{D}$ admet aussi une base finie, l'ensemble $\Gamma\Delta$. Si, donc $\mathcal{G} = (a\}$, $\mathcal{D} = \{b)$, alors $\mathcal{G}\mathcal{D} = (ab)$.

Un hyperidéal $\mathcal{Q}$ est dit *premier* si $ab \in \mathcal{Q}$ implique $a \in \mathcal{Q}$ ou $b \in \mathcal{Q}$ et il est dit *maximal* s'il n'existe aucun hyperidéal $\mathcal{Q}'$ de même sorte tel que $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}' \subset A$ (ou sens strict).

Pour lès hyperidéaux premiers et maximaux nous avons, comme dans la théorie classique les propriétés:

a) Si l'hyperidéal $\mathcal{Q}$ est premier, l'hyperanneaux-quotient $A/\mathcal{Q}$ est dans diviseur de zéro. Le réciproque est aussi vraie.

b) Si l'hyperanneau-quotient $A/\mathcal{Q}$ est un hypercorps, alo s l'hyperidéal $\mathcal{Q}$ est maximal. Inversement si l'hyperanneau A est commutatif et unitaire et si l'hyperidéal $\mathcal{Q}$ est maximal, alors l'hyperanneau-quotient $A/\mathcal{Q}$ est un hypercorps.

La première de ces propriétés se démotre facilement. Quant à la deuxième:

i) Soit que $A/\mathcal{Q}$ est un hypercorps et supposons qu'il existe un superidéal $\mathcal{Q}'$ de A tel que $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}'$. Alors il existe un élément $a \in \mathcal{Q}'$ tel que $a \notin \mathcal{Q}$ et, par suite, la classe (mod. $\mathcal{Q}$) $C = C(a) \neq C(o) = \mathcal{Q}$. Soit $x \in A$ un élément quelconque appartenant à une classe $X \in A/\mathcal{Q}$. Comme $A/\mathcal{Q}$ est un hypercorps il existe une classe $C' \in A/\mathcal{Q})$, telle que $X = CC'$ et, si $a' \in C'$, alors $x \equiv aa'$ (mod. $\mathcal{Q}$) d'où $(x - aa') \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$, donc il existe un élément $b \in \mathcal{Q}$ tel que $x \in b + aa'$. Mais $b \in \mathcal{Q} \Rightarrow b \in \mathcal{Q}'$ et $a \in \mathcal{Q}' \Rightarrow aa' \in \mathcal{Q}'$ et, par conséquent, $b + aa' \subseteq \mathcal{Q}'$ donc $x \in \mathcal{Q}'$ d'où il résulte $\mathcal{Q}' = A$.

ii) Pour prouver que $A/\mathcal{Q}$ est un hypercorps, démontrons que pour tout C, $C' \in A/\mathcal{Q}$, $C \neq C_0 = \mathcal{Q}$, il existe une classe $X \in A/\mathcal{Q}$ telle que $C' = C \cdot X$. En effet pour tout $a \in C$ l'hyperidéal engendré par la réunion $\mathcal{Q} \cup \{a\}$ et la somme $\mathcal{Q} + (a)$ des hyperidéaux $\mathcal{Q}$ et (a) et, évidemment on a $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q} + (a)$ d'où, puisque $\mathcal{Q}$ est maximal, il résulte $\mathcal{Q} + (a) = A$. Par conséquent pour tout $a' \in C' \subset A$ il existe un $b \in \mathcal{Q}$ et un $y \in (a)$ tel que $a' \in b + y$. D'autre part, pour l'hyperidéal principal (a) on a $(a) = aA = Aa$, car A est commutatif et unitaire, ce qui entraîne qu'il existe un $x \in A$ tel que $y = ax$, donc $a' \in b + ax$, d'où $b \in a' - ax$ et, par suite, $(a' - ax) \cap Q \neq \emptyset$. Il en résulte donc que $a' \equiv ax$ (mod Q) d'où, en passant aux classes (mod. Q') et en désignant par X la classe à laquelle c appartient, on a $C' = C \cdot X$.

Références

1. KRASNER M., *Approximation des corps valués complets de caractéristique $p \neq 0$ par ceux de caractéristique* 0 (Actes du Colloque d'Algèbre supérieure, C.B.R.M, Bruxelles, 19—22 décembre 1956).

2. MITTAS J., *Sur une classe d'hypergroupes commutatifs* (C.R.Acad. Sc. Paris, t. **269**, p. 485—488, 29 Septembre 1969, Série A').

3. MITTAS J., *Hypergroupes canoniques* (Mathematica Balkanica, t. **2**, Beograd 1972).

4. MITTAS J., *Hyperanneaux et certaines de leurs propriétés* (C. R. Acad. Sc. Paris, t. **269**, p. 623—626, 13 Octobre 1969, Série A').

5. MITTAS J., *Hypergroupes values et hypergroupes fortement canoniques* (Πρακτικά τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν, ἔτος 1969, τόμος 44ος Ἀθῆναι, 1971).

(Received 05. 10. 1972)

MITTAS JEAN
Université de Thessaloniki
Faculté de Technologie
Chaire de mathématiques supérieures
Thessaloniki — Grèce