ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

ΤΗΣ

ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΤΟΣ 1973 : ΤΟΜΟΣ 48^{ΟΣ}

J. MITTAS: SUR CERTAINES CLASSES DE STRUCTURES HYPERCOMPOSITIONNELES

ΙΩΑΝΝΟΥ ΜΗΤΤΑ : ΕΠΙ ΚΛΑΣΕΩΝ ΤΙΝΩΝ ΥΠΕΡΣΥΝΘΕΤΙΚΩΝ ΔΟΜΩΝ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ
1973

ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 18ΗΣ ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 1973

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΗΛΙΑ Γ. ΜΑΡΙΟΛΟΠΟΥΛΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.— **Sur certaines classes de structures hypercompositionnelles,** *par J. Mittas**. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Φίλ. Βασιλείου.

Sous le terme structure hypercompositionnelle (ou, encore, hyperstructure) on entend un ensemble muni d'une hyperopération[1] au moins. Comme exemples de ces structures on peut citer les hypergroupes et les hyperanneaux [**2**], [**4**], [**5**]. Dans le présent travail, et en vue d'applications ultérieures, nous allons définir et étudier de nouvelles classes de structures hypercompositionnelles, ayant comme point de départ les structures des hypergroupes canoniques et hyperanneaux.

---

* ΙΩΑΝΝΟΥ ΜΗΤΤΑ, **Ἐπὶ κλάσεών τινων ὑπερσυνθετικῶν δομῶν.**

1. On appelle hyperopération (binaire interne) sur un ensemble H une application $H \times H \rightarrow \mathcal{P}(H)$, où $\mathcal{P}(H)$ est l'ensemble des parties de H. Tout ensemble non vide H muni d'une hyperopération est appelé hypergroupoïde. On identifie, quand rien ne s'y oppose, les éléments $x \in H$ et les singletons correspondants $\{x\}$. Comme d'habitude, on écrit l'hypercomposé de $x, y \in H$ soit comme produit xy (et on a $xy \subseteq H$ au lieu de $xy \in H$ pour le composé), soit, si l'hyperopération est désignée par un signe spécial $+$, $*$, $\circ$, etc., comme $x+y$, $x_* y$, $x \circ y$, etc. On étend l'hyperopération en une application «additive» de $\mathcal{P}(H) \times \mathcal{P}(H)$ dans $\mathcal{P}(H)$ en posant pour tout $A, B \in \mathcal{P}(H)$, $AB = \bigcup ab$, où (a, b) parcourt $A \times B$ [**2**], [**5**].

§ 1. UNE GÉNÉRALISATION DES HYPERANNEAUX — — LES SUPERANNEAUX

Soit un hyperanneau A. Évidemment on peut définir les hyperpolynômes $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, $n \geqslant 0$, d'indéterminée x à coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ pris dans A et de degré n de la même manière que les polynômes d'une indéterminée à coefficient pris dans un anneau. Puis, à partir de l'addition et de la multiplication de A, nous définissons sur l'ensemble P des hyperpolynômes deux hyperopérations dites, respectivement, de même addition et multiplication, comme suit:

Soient les hyperpolynômes:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$$

et supposons que $n \geqslant m$. Si $n > m$, on pose $g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m + b_{m+1} x^{m+1} + \ldots b_n x^n$ en considérant $b_{m+1} = \ldots = b_n = o$.

On appelle somme de ces deux hyperpolynômes, et on la note additivement $f(x) + g(x)$, l'ensemble des hyperpolynômes $\left\{\sum_{i=0}^{n} c_i x^i : c_i \in a_i + b_i\right\}$, où les c_i décrivent les sommes $a_i + b_i$ pour les différentes valeurs de i entre 0 et n.

On appelle produit des f(x) et g(x), et on la note multiplicativement $f(x)g(x)$, l'ensemble des hyperpolynômes $\left\{\sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i : c_i \in \sum_{\varkappa+\lambda=i} a_\varkappa b_\lambda\right\}$, où les c_i décrivent les somes $\sum_{\varkappa+\lambda=i} a_\varkappa b_\lambda$ pour les différentes valeurs de i entre 0 et $m + n$.

On voit toute de suite que:

1) L'ensemble P des hyperpolynômes est, par rapport à leur addition, un hypergroupe canonique.

Le zéro de cet hypergroupe canonique est l'hyperpolynôme zéro dont tous les coefficients sont égaux à $o \in A$, (de degré indéterminé) et l'opposé d'un n'importe quel $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in P$ est visiblement $\sum_{i=0}^{n} (-a_i) x^i$.

D'autre part :

2) L'hyperpolynôme zéro est, comme il est clair, par rapport à la multiplication un élément bilatéralement absorbant et l'ensemble P est, comme il est facile de le vérifier, un demi-hypergroupe multiplicatif [5].

Enfin on démontre sans peine que :

3) La multiplication est doublement distributive par rapport à l'addition.

Il se trouve ainsi que l'ensemble des hyperpolynômes muni de deux hyperopérations d'addition et de multiplication satisfaisant aux axiomes très proches de ceux des hyperanneaux, constitue un exemple d'une nouvelle hyperstructure que l'on va appeler superanneau. Généralisant nous posons la :

Définition (1.1). Un ensemble S organisé par deux hyperopérations $x+y$, xy, dites respectivement addition et multiplication, est appelé un superanneau s'il satisfait aux axiomes suivants :

I. S est un hypergroupe canonique par rapport à son addition (dite l'hypergroupe additif du superanneau), autrement dit :

1. $x+y \subseteq S$;
2. $(x+y)+z = x+(y+z)$;
3. $x+y = y+x$;
4. $(\exists o \in S)\ (\forall x \in S)\ [x+o = x]$;
5. Pour tous $x \in S$ il existe un et un seul $x' \in S$ tel que $o \in x+x'$ [un tel x' sera noté $-x$ et on posera $x-y = x+(-y)$] ;
6. $z \in x+y \Rightarrow y \in z-x$.

II. S est par rapport à sa multiplication un demi-hypergroupe (appelé demi-hypergroupe multiplicatif du superanneau), dont o est un élément doublement absorbant, autrement dit :

1. $xy \subseteq S$
2. $(xy)z = x(yz)$
3. $xo = ox = o$

III. La multiplication est bilatéralement distributive par rapport à l'addition, c'est-à-dire on a $(x+y)z = xz+yz$, $z(x+y) = zx+zy$.

Remarque (1.1). Dans un superanneau S on a : $-(xy) \cap x(-y) \neq \varnothing$ et $-(xy) \cap (-x)y \neq \varnothing$.

En effet $o \in x(y-y) = xy + x(-y)$, $o \in (x-x)y = xy + (-x)y$.

Un superanneau S est dit *fort* si, pour tout x, $y \in S$ on a $x(-y) = (-x)y = -(xy)$.

Il est facile de voir que le superanneau des hyperpolynômes est fort.

On voit que dans tout superanneau son zéro est un élément scalaire[1] par rapport à son addition — *scalaire additif* — et à sa multiplication — *scalaire multiplicatif* —. Mais un superanneau peut posséder encore d'autres scalaires différents de zéro additifs ou multiplicatifs. Si tous ses éléments sont des scalaires multiplicatifs bilatères le superanneau est évidemment un hyperanneau. Relativement aux scalaires d'un superanneau S on a la:

Proposition (1. 1). *Tout scalaire additif est aussi un scalaire multiplicatif bilatère.*

Démonstration. Si $a \in S$ est un scalaire additif, alors $a - a = o$ [5], donc, pour tout $x \in S$, $ax - ax = (a-a)x = o \cdot x = o$. Il en résulte que, pour tout $s, s' \in ax$, on a $s - s' = o$, donc $s = s'$ et, par conséquent $ax = s$, c'est-à dire que ax est un singleton. Nous démontrons de même que, pour tout $x \in S$, xa est aussi un singleton; a est, donc, un scalaire multiplicatif bilatère.

Conséquence. Si dans un superanneau l'addition est une opération, alors la multiplication l'est aussi et, par suite, le superanneau est un anneau. Autrement dit il n'existe pas des superanneaux propres (c'est-à dire qu'ils ne soient pas des hyperanneaux) tels que leur addition soit une opération et leur multiplication soit une hyperopération propre (c'est- à dire qui ne se réduit pas à une opération).

Corollaire (1. 1). *Pour qu'un superanneau S soit un anneau il faut et il suffit que, pour tout $x \in S$, l'on ait $x - x = o$.*

Soit un superanneau S.

Proposition (2. 1). *L'ensemble S_a des scalaires additifs de S est un anneau. L'ensemble S_m des*

---

1. Comme on le sait [5] un élément s d'un hypergroupoïde H est dit *scalaire à droite* (resp. *à gauche*) si, pour tout $x \in H$, xs (resp. sx) est un singleton.

scalaires multiplicatifs bilatères est une partie multiplicativemene fermée de S.

Démonstration. i) D'abord, comme on le sait, S_a est un groupe abelien [2]. D'autre part, par la proposition précédente, on a $S_a \subseteq S_m$. Donc, pour tout $x \in S_a$, on a $x \in S_m$ et par conséquent pour tout $y \in S$, les produits xy et yx sont des singletons et, puisque $xy - xy = (x - x) y = oy = o$, il s'ensuit que $xy \in S_a$ et, de même, $yx \in S_a$. S_a est, donc, un anneau [3].

ii) Soient $x, y \in S_m$. Alors les produits xy et yx sont des singletons. Soit, p. e., $xy=z$. Alors, pour tout $w \in S$, on aura $zw=(xy)w=x(yw)=xt$, puisque yw est un singleton en raison de $y \in S_m$. Mais, comme $x \in S_m$, xt est aussi un singleton et, par conséquent, zw l'est aussi. Nous démontrons de même que wz est aussi un singleton. Il en résulte, donc, que $z \in S_m$, c'est-à dire que $xy \in S_m$ et on trouve de même que $yx \in S_m$. Donc $S_m S_m \subseteq S_m$.

Remarque (2.1). De la démonstration précédente résulte que pour tout $x \in S_a$ et $y \in S$ on a $xy \cup yx \subseteq S_a$, c'est-à dire que l'anneau S_a vérifie la propriété $S_a S \cup SS_a \subseteq S_a$.

Divers termes et notations de la théorie des anneaux, exclusivement dépendant de la multiplication et qui ont été maintenus tels que pour les hyperanneaux doivent être modifiés quand il s'agit des superanneaux. La modification constiste, en général, au remplacement du signe = dans les définitions initiales par le signe $\in$. Il en est ainsi pour les définitions des diviseurs, des diviseurs du zéro, des éléments associés, des éléments-unités et inversibles (à droite, à gauche, bilatères).

Un superanneau S est appelé unitaire s'il posséde un et un seul élément unité bilatère, qui sera noté 1, c'est-à dire tel que $x \in 1x \cap x1$ quel que soit $x \in S$. Le superanneau S sera dit strictement unitaire ou unitaire au sens strict s'il posséde un élément-unité bilatère qui, en même temps, est un scalaire multiplicatif bilatère. Cet élément qui, comme on le sait de la théorie générale des hypergroupoïdes, est unique [3],]5] sera aussi noté 1 et, évidemment, on aura $x1 = 1x = x$, quel que soit x dans S.

Soit S un superanneau unitaire. Un élément $x \in S$ est appelé inversible à droite par rapport à 1, s'il existe un au moins

$x' \in S$ tel que $1 \in xx'$. Si, en particulier, on a $xx' = 1$, alors x est appelé strictement inversible à droite. L'élément x' s'appelle inverse à droite, respect. strictement inverse à droite. On définit de même un élément inversible à gauche, respect. strictement inversible à gauche. Si un $x \in S$ posséde des inverses x' et x'', respectivement à droite et à gauche, il ne résulte pas du tout que ceux-ci sont uniques, ni que l'on a $x' = x''$. Un élément $x \in S$ sera dit inversible s'il l'est à droite et à gauche, ayant le même inverse unique, qui sera noté x^{-1} et appelé inverse de x. Par conséquent on aura $1 \in xx^{-1} \cap x^{-1}x$. Si x est inversible et, même, tel que $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$, alors il est dit strictement inversible et x^{-1} sera appelé strictement inverse de x.

Comme dans le cas des anneaux et des hyperanneaux [**3**] on définit différentes sortes de superanneaux comme commutatif (si sa multiplication l'est $[xy = yx]$), sans diviseurs de zéro, intègres (sans diviseurs de zéro et commutatifs), superdomains (superanneaux intègres et unitaires) et supercorps (superanneaux S dont l'ensemble $S^* = S \ldots \{o\}$ est un hypergroupe multiplicatif). Mais, en ce qui concerne les supercorps, nous démontrerons dans la suite que ceux-ci coïncident avec les hypercorps. Nous démontrons d'abord pour cela les propositions suivantes, qui se rapportent aux superanneaux sans diviseurs de zéro.

Proposition (3. 1). Dans tout superanneau sans diviseurs de zéro $a \neq o$ et $ax \cap ay \neq \emptyset$ ou $xa \cap ya \neq \emptyset$ implique $x = y$ (la règle de simplification sous forme généralisée).

Démonstration. En effet $ax \cap ay \neq \emptyset$ implique $o \in ax - ay = a(x - y)$. Il existe, donc, un $z \in x - y$ tel que $o \in az$ d'où il vient $z = o$, donc $o \in x - y$ c'est-à dire $x = y$.

Corollaire (2. 1). Si S est un superanneau sans diviseurs de zéro, les produits ax, où $a \in S$ est constant et x parcourt S, forment une partition de l'ensemble aS.

Proposition (4. 1). Soit S un superanneau sans diviseurs de zéro. Alors $S_a = \{o\}$, où S est un anneau.

Démonstration. S'il existe un scalaire additif $b \in S_a$ tel que $b \neq o$, alors de $b - b = o$ on a, pour tout $x \in S$, $(b-b)x = bx - bx = b(x-x) = ox = o$, donc, pour tout $z \in x - x$, il vient que $bz = o$, d'où $z = o$ et, par suite, $x - x = o$, donc $x \in S_a$. Il en résulte donc que $S_a = S$ et S est bien un anneau.

Proposition (5. 1). Tout superanneau S sans dividents de zéro et unitaire est strictement unitaire.

Démonstration. En effet pour tout $x \in S$ et pour tout $z \in 1x$ on a $1x \cap 1z \neq \varnothing$, car $z \in 1z$, donc $x = z$ et, par conséquent $1x = x$. Nous démontrons aussi, pareillement, que $x1 = x$.

Proposition (6. 1). Soit S un superanneau sans diviseurs de zéro et unitaire, donc strictement unitaire. Alors, si $a \in S^*$ est un élément strictement inversible de quelque côté, a est un scalaire multiplicatif du même côté.

Démonstration. Soit p. e. $aa' = 1$ et $x', x'' \in xa$. Alors on a $x'a' \subseteq xaa' = x1 = x$, donc $x'a' = x$ et nous trouvons de même que $x''a' = x$. Il en résulte, que $x'a' = x''a'$, d'où $x' = x''$. L'ensemble donc, xa est, pour tout $x \in S$, un singleton, d'où la conclusion.

Proposition (7. 1). Tout supercorps S est un hypercorps.

Démonstration. En effet on a $xS^* = S^*x = S^*$ quel que soit $x \in S^*$, car S^* est un hypergroupe. Par conséquent il existe un élément $e_x \in S^*$, évidemment unique, tel que $x \in x e_x$. Il résulte, donc, $xe_x \subseteq x(e_x e_x)$, qui entraîne $e_x \in e_x e_x$, car évidemment, il existe un $z \in e_x e_x$ tel que $xe_x \cap xz \neq \varnothing$ et, comme il est visible, S est sans diviseurs de zéro. Il suit de là que, pour tout $y \in S^*$, on a $ye_x \subseteq y(e_x e_x) = (ye_x)e_x$, d'où il résulte que $y \in ye_x$ (par les mêmes raisonnements comme ci-dessus). Nous avons ainsi démontré que l'élément e_x, défini à partir de n'importe quel $x \in S^*$, est un élément-unité à droite. Cet unité est, même, unique car si l'on considère e_y on a $y \in ye_x$ et $y \in ye_y$, donc $e_x = e_y = e_d$. Nous démontrons de même qu'il existe un élément-unité unique à gauche et soit e_g celui-ci. Mais on a $e_d \in e_d e_d$ et $e_d \in e_g e_d$, donc, par conséquent, $e_g = e_d = 1$ et le supercorps S est un superanneau unitaire qui, selon la proposition (5. 1), est unitaire en sens strict.

Ensuite soit un $x \in S^*$ et soit x' l'inverse de x, p. e. à droite, qui, évidemment, est unique. On aura, donc, $1 \in xx'$ et supposons qu'il existe un $a \in xx'$ tel que $a \neq 1$. Si a' est l'inverse à droite de a, alors $aa' \subseteq (xx')a'$ et, par conséquent, $1 \in x(x'a')$. Il existe, donc, un $z \in x'a'$ tel que $1 \in xz$ qui entraîne que $z = x'$, donc $x' \in x'a'$, et, puisque $x' \in x'1$, il résulte que $a' = 1$. Il s'ensuit que $1 \in a1$, qui donne $a = 1$, car $1 \in 1 . 1$. Il résulte ainsi que x est un élément strictement inversible à droite de S et nous démontrons de même que celui-ci est aussi strictement inversible à gauche, donc, par la proposition (6. 1), x est un scalaire multiplicatif bilatère de S, c'est-à dire $x \in S_m$. Par conséquent $S^* \subseteq S_m$, donc $S = S_m$, autrement dit tous les éléments de S sont des scalaires multiplicatifs bilatères. S est, donc, un hypercorps.

Sauf les supercorps qui, comme il a été demontré sont des hypercorps, nous allons demontrer dans le paragraphe suivant que les superanneaux d'une classe plus vaste que celle des supercorps sont aussi des hyperanneaux [voir proposition (5. 2)].

§ 2. SUR LES SUPERIDÉAUX DES SUPERANNEAUX

Soit un superanneau S. Nous définissons les *sous-superanneaux* de S de la même manière comme les sous-hyperanneaux d'un hyperanneau [**3**] et nous concluons facilement qu'un sous-ensemble non vide S' de S est un sous-superanneau si, et seulement si, $x, y \in S$ implique $x - y \subseteq S'$ et $xy \subseteq S'$.

De même, comme dans la théorie des anneaux et des hyperanneaux, nous définissons les *superidéaux* (à gauche, à droite, bilatère) de S et nous voyons facilement que l'intersection d'une famille de superidéaux (de quelque sorte) en est encore un. Ensuite, et moyennant cette propriété, nous définissons de même le superidéal *engendré* par un sous-ensemble de S et la *somme* d'une famille (finie ou infinie) des superidéaux. Quant au *produit* de deux superidéaux Q_1, Q_2, celui-ci est, par définition, le superidéal engendré par la réunion des sous-ensembles $a_1 a_2$, ou le couple (a_1, a_2) parcourt le produit cartesien $Q_1 \times Q_2$. On démontre sans peine que diverses propriétés relatives aux égalités et les inclusions de la théorie classique concernant les sommes, les intersections et les produits des idéaux des anneaux restent aussi valables pour ceux des superidéaux des superanneaux.

Un superidéal Q est appelé premier, si $xy \cap Q \neq \emptyset$ implique $x \in Q$ ou $y \in Q$ et il est dit maximal, si $Q \neq S$ et il n'existe aucun superidéal de même sorte Q' tel que $Q \subset Q' \subset A$.

Nous définissons aussi l'homomorphisme φ d'un superanneau S_1 dans un superanneau S_2 comme dans le cas des hyperanneaux [5] et on voit facilement que, ici aussi, le noyau de φ, $\mathcal{N}(\varphi) = \varphi^{-1} o = \{x \in S_1 : \varphi . x = o\}$, est un superidéal bilatère de S_1.

Soit Q un superidéal bilatère d'un superanneau S. La partition (mod. Q) de S [5], c'est-à dire la partition défine par la relation $x \equiv y$ (mod. Q) si, et seulement si, $(x - y) \cap Q \neq \emptyset$ qui, comme on le sait, est normale par rapport à l'addition, est aussi normale par rapport à la multiplication. En effet, si $C(x)$, $C(y)$ sont deux classes (mod. Q) de S, on a $C(x)\,C(y) = (x + Q)\,(y + Q) = (x' + Q)\,(y' + Q)$, où $x' \in C(x)$, $y' \in C(y)$ sont quelconques, donc $C(x)\,C(y) \subseteq x'y' + x'Q + Qy' + QQ \subseteq x'y' + Q = \bigcup_{z' \in x'y'} (z' + Q) = \bigcup_{z' \in x'y'} C(z')$. L'ensemble donc des classes (mod. Q) de S, qui, par rapport à l'addition $C(x) + C(y) = \{C(z) : z \in x + y\}$, est un hypergroupe canonique [5], est, par rapport à la multiplication $C(x) . C(y) = \{C(z) : z \in xy\}$, un demi-hypergroupe [5], dont la classe $C(o) = Q$ est, évidemment, un élément absorbant. Enfin on voit que la multiplication est doublement distributive par rapport à l'addition. En effet $[C(x) \dotplus C(y)] . C(z) = \{C(w) : w \in x + y\} . C(z) = \{C(t) : t \in wz, w \in x + y\} = \{C(t) : t \in xz + yz\}$ et, de même, $C(x) . C(z) \dotplus C(y) . C(z) = \{C(w_1) : w_1 \in xz\} \dotplus \{C(w_2) : w_2 \in yz\} = \{C(t) : t \in w_1 + w_2,\ w_1 \in xz, w_2 \in yz\} = \{C(t) : t \in xz + yz\}$ et on démontre pareillement la distributivité à gauche. L'ensemble donc des classes (mod. Q) de S est un superanneau, noté S/Q et appelé superanneau quotient de S par le superidéal Q.

Nous remarquons ensuite que l'application $\eta(Q) : x \to C(x) = x + Q$ est un homomorphisme (canonique) dont le noyau est le superidéal Q. Inversement tout homomorphisme $\varphi : S \to S'$ d'un superanneau

S dans un superanneau S′ se factorise en composé $\varphi = \xi\eta\,(\mathcal{N}(\varphi))$, où $\eta(\mathcal{N}(\varphi))$ est l'homomorphisme canonique de S sur $S/\mathcal{N}(\varphi)$ et où ξ est un isomorphisme de $S/\mathcal{N}(\varphi)$ sur $\varphi.S$ (on vérifie facilement que l'image homomorphe $\varphi.S$ est un sous-superanneau de S′).

Tout superanneau S possède deux superidéaux remarquables comme cela résulte des propositions suivantes:

Proposition (1.2). L'anneau S_a des scalaires additifs, considéré comme sous-superanneau de S, est un superidéal bilatère de S.

Démonstration. Voir remarque (2.1).

D'autre part, comme on le sait [**5**], si X est un sous-ensemble non vide de S, la réunion $\Omega(X)$ de toutes les sommes $(x_1 - x_1) + \ldots +$ $(x_i - x_i)$, où i est un entier positif arbitraire et où $x_1, x_2, \ldots x_i$ parcourent indépendamment X, est un sous-hypergroupe canonique de l'hypergroupe additif de S. Et il est visible que, si X est une partie multiplicativement fermée de S, $\Omega(X)$ est un sous-superanneau de S tandis que si X est permise (de quelque côté), alors $\Omega(X)$ est un superidéal (de même sorte de S. Il en résulte, donc, la

Proposition (2.2). $\Omega(S) = \Omega$ est un superidéal bilatère de S.

Enfin, vu la proposition (2.1), l'ensemble $\Omega(S_m)$ est un sous-superanneau de S.

Soit un superidéal bilatére Q de S. Nous remarquons d'abord que, comme dans la théorie des hyperanneaux, il est possible que le superanneau-quotient S/Q soit un anneau. En effet d'après une proposition relative concernant les hypergroupes canoniques-quotient [3] nous concluons facilement la

Proposition (3.2). S/Ω est un anneau et S/Q est un anneau si, et seulement si, $\supseteq \Omega$.

D'autre part nous avons, comme dans la théorie classique, les propriétés suivantes, dont les démonstrations résultent de celles du cas des anneaux par une modification convenable.

1) Le superanneau S/Q est sans diviseurs de zéro si, et seulement si, le superidéal Q est premier.

2) i) Si le superanneau S/Q est un supercorps (donc, par la proposition (2.1), un hypercorps), le superidéal Q est maximal.

ii) Si le superanneau S est commutatif et unitaire et le superidéal Q est maximal, alors le superanneau S/Q est un hypercorps.

Évidemment, comme dans les cas correspondants des anneaux, le superanneau lui-même est un superidéal premier, le superidéal (o) est premier si, et seulement si, le superanneau est sans diviseurs de zéro et tout superidéal maximal d'un superanneau commutatif et unitaire est premier.

Considérons un superanneau commutatif et unitaire S. De la propriété, ci- dessus 2ii résulte que si Q est un superidéal maximal de S, alors pour deux classes (mod. Q) quelconques de S on a $C(x).C(y) = \{C(z) : z \in xy\} = \{C(z)\}$ donc, pour tout z, $z' \in xy$, on a $C(z) = C(z')$. Il en résulte donc pour les superanneaux de ce type la :

Proposition (4. 2). Quels que soient x, $y \in S$ et pour tout z, $z' \in xy$ on a $z \equiv z'$ (mod. Q), où Q est un n'importe quel superidéal maximal de S.

Corollaire (1. 2). Pour tout x, $y \in S$ et pour tout z, $z' \in xy$ on a $z \equiv z'$ (mod. $\bigcap\limits_{Q \in M} Q$), où $\mathcal{M}$ est l'ensemble de superidéaux maximaux de S.

Par conséquent si $\bigcap\limits_{Q \in M} Q = (o)$, alors pour tout x, $y \in S$ et pour tout z, $z' \in xy$ on a $z \equiv z'$ (mod. (o)), donc $z = z'$, c'est-à dire le produit xy est un singleton. Ainsi nous sommes arrivés à la proposition importante suivante.

Proposition (5. 2). Tout superanneau commutatif est unitaire et tel que $\bigcap\limits_{Q \in M} Q = (o)$ est un hyperanneau.

Remarque (1. 2). Comme le superanneau S est commutatif et unitaire, $Q \in \mathcal{M}$ implique $Q \in \mathcal{P}$, où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des superidéaux premiers de S. Par conséquent si $\bigcap_{Q \in M} Q = (o)$, alors $\bigcap_{Q \in \mathcal{P}} Q = (o)$. Mais, il se démontre que, en général, le radical de S, rad. S (qui par définition est l'ensemble $\{a \in S : (\exists\, n \in N)\ [o \in a^n]\}$, où N est l'ensemble des entiers naturels), vérifie, comme dans le cas des anneaux, la propriété: rad. $S = \bigcap_{Q \in \mathcal{P}} Q$. Si donc nous définissons, comme dans le cas classique, un superanneau S comme semi-simple si rad. $S = (o)$, on a que les superanneaux de la proposition (5. 2) sont semi-simples.

§ 3. HYPERGROUPES CANONIQUES AVEC HYPEROPÉRATEURS

Définition (1. 3). Soit E un ensemble. Un deuxième ensemble Ω est appelé domain d'hyperopérateurs, s'il y a une application de l'ensemble-produit $\Omega \times E$ dans $\mathcal{P}(E) . . \{\emptyset\}$. Cette application sera appelée hyperopération externe à gauche sur E et l'image du couple $(\omega, x) \in \Omega \times E$ sera notée, en général, en notation multiplicative ωx.

Nous définissons de même une hyperopération externe à droite sur l'ensemble E.

A tout hyperopérateur $\omega \in \Omega$ est associée l'application φ_ω de E dans $\mathcal{P}(E)$ telle que $\varphi_\omega(x) = \omega x$, $x \in E$. Un hyperopérateur $\varepsilon \in \Omega$ est appelé hyperopérateur-unité, si l'application φ_ε coïncide avec l'application identique I_E de E sur lui-même (si on identifie, comme d'habitude dans le cas d'hyperopération, pour tout $x \in E$ l'élément x avec le singleton correspondant $\{x\}$). C'est-à dire si $\varepsilon x = x$, quel que soit x dans E.

Définition (2. 3). On appelle hypergroupe canonique avec hyperopérateurs un hypergroupe canonique H qui est muni d'un domain d'hyperopérateurs Δ tel que:

i) Δ soit distributif par rapport à l'addition de l'hypergroupe canonique de H, autrement dit, pour tout $a \in \Delta$ et pour tout $x, y \in H$, $a(x + y) = ax + ay$.

ii) $o \in ao$, quel que soit $a \in \Delta$ et

iii) Pour tout $a \in \Delta$ et pour tout $x \in H$, $a(-x) = -(ax)$.

On appelle aussi H d'une manière abrégée et commode Δ-hypergroupe canonique.

Remarques (1. 3). a) Evidemment si Δ est un domain d'opérateurs (c'est le cas particulier où le produit $\Delta \times H$ s'applique dans H) la condition ii) est $ao = o$ et iii) résulte de i) et de ii) [En effet $a(x-x) = ax + a(-x)$ et d'autre part $o \in x - x$ implique $ao \in a(x-x)$ d'où $o \in ax + a(-x)$, donc $a(-x) = -(ax)$].

b) L'application φ_a associée à l'hyperopérateur $a \in \Delta$ est, en raison de la distrivité, un endomorphisme fort [5] de H dans H.

c) Pour tout $a \in \Delta$ l'ensemble ao est un sous-hypergroupe canonique de H.

En effet $a(o+o) = ao + ao = ao$, donc ao est stable par rapport à l'hyperopération de H. D'autre part $x \in ao$ implique $-x \in -(ao) = a(-o) = ao$.

d) Pour tout $a \in \Delta$ et pour tout $x \in H$ l'ensemble ax est une réunion de classes (mod ao) de H.

En effet $ax = a(x+o) = ax + ao = \bigcup_{z \in ax} (z + ao) = \bigcup_{z \in ax} C(z)$.

Exemples. On a des exemples remarquables de Δ-hypergroupes canoniques si on considère un hypergroupe canonique quelconque H et comme domain d'hyperopérateurs :

1) L'ensemble Δ_1 de tous les homomorphismes canoniques [Ces homomorphismes sont, comme on le sait [5] des homomorphismes normaux de H sur l'hypergroupe canonique-quotient $H/\mathcal{N}(\varphi)$, où $\mathcal{N}(\varphi)$ est le noyau de φ].

2) L'ensemble Δ_2 de tous les endomorphismes forts de H.

3) L'ensemble Δ_3 de tous les automorphismes de H.

4) L'ensemble $\Delta_4 = \{\varepsilon\}$, où est l'automorphisme identique.

Remarque (2. 3). L'application qui correspond à l'automorphisme intérieur : $x \to axa^{-1}$ du cas classique est pour le cas considéré φ_a : $x \to x + (a - a)$ et, évidemment, il est un hyperopérateur vérifiant les conditions i-iii de la définition (2.3) si, et seulement si $(a-a)+(a-a)= = a-a$. Sous cette condition la différence $a-a$ est un sous-hypergroupe canonique de H et, par conséquent, l'ensemble Δ_3 de tous les φ_α correspondants est un sous-ensemble de Δ_1. Il est visible que si H est un hypergroupe fortement canonique [**4**] le domain Δ_3 coïncide, à un isomorphisme près, avec l'ensemble H_0 des hauteurs des éléments de H [**4**].

Définition (3.3). On appelle Δ-sous-hypergroupe canonique d'un Δ-hypergroupe canonique H tout sous-hypergroupe canonique h de H possédant Δ comme domain d'hyperopérateurs.

Évidemment pour qu'un sous-hypergroupe canonique h de H soit un Δ-sous-hypergoupe canonique il faut et il suffit qu'il soit stable par rapport à l'hyperopération externe de H, autrement dit que, pour tout $a \in \Delta$ et $x \in H$ on ait $ax \subseteq h$. Donc il faut et il suffit que l'on ait $ah \subseteq h$.

Il est clair que, si Δ' est un sous-ensemble non vide de Δ, tout Δ--sous-hypergroupe canonique de H est un Δ'-sous-hypergroupe de H.

Si le domain d'hyperopérateurs Δ est muni d'hyperopérations on a de cas spéciaux des Δ-hypergroupes canoniques, dont les plus intéressants, par analogie à ceux de la théorie classique, résultent si on considère comme domain Δ un superanneau ou un supercorps (hypercorps).

Dans la suite tous les superanneaux considerés seront forts [remarque (1.1)].

Définition (4.3). Si S est un superanneaux on appelle S-supermodule à gauche (respec. à droite) un S-hypergroupe canonique M tel que pour tout $a, b \in S$, $x \in M$ on ait:

i) $(a+b)x \subseteq ax+bx$

ii) $a(bx)=(ab)x$

iii) $o \in ox$

et où, si $S' \subseteq S$ et $M' \subseteq M$, on a $S'M' = \bigcup_{a \in S',\ x \in M'} ax$

Un S-supermodule M est dit unitaire si S est un superanneau unitaire dont l'élément-unité 1 est l'hyperopérateur-unité de M, c'est-à-dite si l'on a encore la condition.

iv) $1x = x$.

quel que soit $x \in M$.

Au cas particulier où le superanneau S est un supercorps, donc un hypercorps, le S-supermodule unitaire (à gauche) M est appelé s u p e r e-s p a c e v e c t o r i e l (à gauche). Si, en plus, au lieu que l'hypercorps S soit un domain d'hyperopérateurs de M est un domain d'opérateurs [autrement dit que le domain d'hyperopérateurs est non propre, voir remarque (1a. 3)], alors le superespace vectoriel M est dit h y p e r-e s p a c e v e c t o r i e l.

Plus généralement un S-supermodule M est dit S-h y p e r m o d u l e si le superanneau S est un hyperanneau qui, en plus, est un domain, d'opérateurs pour M (tandis que nous gardons le terme de supermodule aux cas, où S est un hyperanneau qui est un domaine d'hyperopérateurs propre pour M, ou si S est un superanneau propre, mais qui est un domain d'opérateurs pour M).

Citons encore le deux cas particuliers suivants de Δ-hypergroupes canoniques :

Soit K un hypercorps.

a) un K-hyperespace vectoriel M est appelé K-s u p e r a l g è b r e a s s o c i a t i v e o u s y s t è m e s u p e r c o m p l e x e s u r K si l'hypergoupe canonique M est en plus un superanneau propre et si encore la condition suivante est satisfaite : $a(xy) = (ax)y$, quels que soient $a \in K$ et $x, y \in M$.

b) Un K-hyperespace vectoriel est appelé K-h y p e r a l g è b r e a s s o c i a t i v e o u s y s t è m e h y p e r c o m p l e x e s u r K si l'hypergroupe canonique M est, en particulier, un hyperanneau et si, comme auparavant, pour tout $a \in K$ et $x, y \in M$ on a $a(xy) = (ax)y$.

Nous énonçons ci-dessous quelques propositions concernant les Δ-hypergroupes canoniques, dont les démonstrations résultent de celles de propositions respectives du cas classique des Δ-groupes [**1**] par une modification convenable plus ou moins simple.

1. L e s Δ-s o u s-h y p e r g r o u p e s c a n o n i q u e s d'u n Δ-h y p e r g r o u p e c a n o n i q u e H f o r m e n t u n e f a m i l l e d e p a r t i e s f e r m é e s d e H q u i e s t Δ-i n d u c t i v e.

Il en résulte que cet ensemble est un treillis complet dont les bornes inférieure de toute famille $\mathcal{F}$ de Δ-sous-hypergroupes canonique est l'intersection ensembliste. Le borne supérieure de $\mathcal{F}$ est la réunion complète des sous-hypergroupes de $\mathcal{F}$, autrement dit leur somme [5], pour la quelle la proposition suivante a lieu:

2) La somme de sous-hypergroupes d'une famille de Δ-sous-hypergroupes canoniques de M est un Δ-sous-hypergoupe canonique de H. Il vient que

3) Le treillis de Δ-sous-hypergroupes canoniques de H est un sous-treillis du treillis de tous ces sous-hypergroupes canoniques.

4) Le treillis de Δ-sous-hypergroupes canoniques d'un Δ-hypergroupe canonique est modulaire. Comme corollaire on a que

5) Le treillis des sous-supermodules d'un supermodule, respect. des sous-hypermodules d'un hypermodule, respect. des superespaces vectoriels d'un superespace vectoriel, respect. de sous-hyperespaces vectoriels d'un hyperespace vectoriel est modulaire.

RÉFÉRENCES

1. Dubreil P., Dubreil-Jacotin M. L.— Leçons d'Algèbre moderne. Paris 1964.
2. Krasner M.— Théorie de Galois (Cours de la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, 1967 - 68).
3. Mittas J.— Hyperanneaux et certaines de leurs propriétés, C. R. Acad. Sc Paris, Série A', 269 (1969), pp. 623 - 626.
4. —— Hypergroupes valués et hypergroupes fortement canoniques, Πρακτικὰ τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν, 44 (1969) σσ. 304 - 310.
5. —— Hypergroupes canoniques, Mathematica Balkanica (Beograd), 2 (1971), pp. 165 - 179.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Διὰ τοῦ ὅρου ὑπερσυνθετικὴ δομὴ ἢ καὶ ὑπερδομὴ ἐννοοῦμεν ἓν σύνολον ἐφωδιασμένον διὰ μιᾶς τοὐλάχιστον ὑπερπράξεως [2]. Ὡς παραδείγματα τοιούτων δομῶν ἀναφέρομεν τὰς ὑπερομάδας καὶ τοὺς ὑπερδακτυλίους [2], [4], [5]. Εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν, καὶ ἐν ὄψει περαιτέρω ἐφαρμογῶν,

ὁρίζομεν νέας κλάσεις τοιούτων δομῶν ἔχοντες ὡς ἀφετηρίαν τὰς ὑπερσυνθετικὰς δομὰς τῶν κανονικῶν ὑπερομάδων καὶ τῶν ὑπερδακτυλίων.

Οὕτως εἰσάγομεν κατ᾽ ἀρχάς, ἀναχωροῦντες ἐκ τῆς θεωρήσεως τῶν «ὑπερπολυωνύμων», τ. ἔ. πολυωνύμων μιᾶς μεταβλητῆς μὲ συντελεστὰς ἔκ τινος ὑπερδακτυλίου, τὴν δομὴν τοῦ σουπερδακτυλίου, γενικωτέραν ἐκείνης τοῦ ὑπερδακτυλίου καὶ διαφέρουσαν αὐτῆς μόνον ὡς πρὸς τὸ ὅτι καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐδῶ εἶναι ὑπερπρᾶξις.

Ἐκ τοῦ γεγονότος αὐτοῦ προκύπτουν ἐνδιαφέρουσαι ἰδιότητες τῆς δομῆς, τὰς ὁποίας καὶ μελετῶμεν λεπτομερῶς. Εἰδικῶς δὲ ὅσον ἀφορᾷ τὰ σουπερσώματα ἀποδεικνύομεν ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς εἰς αὐτὰ εἶναι πρᾶξις, ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ὅτι κάθε σουπερσῶμα εἶναι ὑπερσῶμα. Ἀκολούθως, καὶ μετὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πεδίου ὑπερεκτελεστῶν καὶ τῆς ἐξωτερικῆς ὑπερπράξεως συνόλου, μελετῶμεν τὴν δομὴν τῶν Δ-κανονικῶν ὑπερομάδων, τ. ἔ. κανονικῶν ὑπερομάδων μετὰ ὑπερεκτελεστῶν, εἰδικαὶ περιπτώσεις τῶν ὁποίων εἶναι τὰ supermodules καὶ οἱ διανυσματικοὶ σουπερχῶροι, τῶν ὁποίων τὰ πεδία ὑπερεκτελεστῶν εἶναι ἀντιστοίχως σουπερδακτύλιοι καὶ σουπερσώματα (ὑπερσώματα), ὡς καὶ τὰ hypermodules καὶ οἱ διανυσματικοὶ ὑπερχῶροι, δομαὶ προκύπτουσαι ἐκ τῶν προηγουμένων, ὅταν, ἀντὶ τῶν πεδίων ὑπερεκτελεστῶν των, θεωρήσωμεν ἀντιστοίχως ὑπερδακτυλίους καὶ ὑπερσώματα ὡς πεδία ὅμως ἐκτελεστῶν. (Διεξοδικὴν μελέτην τῶν τελευταίων αὐτῶν ὑπερσυνθετικῶν δομῶν πραγματοποιοῦμεν εἰς ἑτέραν ἐργασίαν).