

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Π Ρ Α Κ Τ Ι Κ Α

Τ Η Σ

ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΤΟΣ 1973 : ΤΟΜΟΣ 48^{ΟΣ}

J. ΜΙΤΤΑΣ : CONTRIBUTION À LA THÉORIE DES STRU-
CTURES ORDONNÉES ET DES STRUCTURES VA-
LUÉES

ΙΩΑΝΝΟΥ ΜΗΤΤΑ : ΣΥΜΒΟΛΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑΝ ΤΩΝ
ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΔΙΑΤΙΜΗΜΕΝΩΝ ΔΟΜΩΝ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

1973

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.— **Contribution à la théorie des structures ordonnées et des structures valuées**, par *J. Mittas* *. Ἀνεκoinώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Φίλ. Βασιλείου.

Depuis l'introduction de la notion de l'hypercorps valué (1956), respectivement hypervalué [1], [7], [8], par M. Krasner, la question suivante avait été posée: Est-ce que tout hypercorps est isomorphe à un hypercorps résiduel d'un corps (qui n'est pas supposé commutatif) hypervalué [2] (c'est-à-dire muni d'une valuation de Krull) par congruence multiplicative¹? Ou, puisque tout tel hypercorps est hypervalué², la question: Est-ce que tout hypercorps est hypervaluable?

Desirant répondre à cette question nous avons l'idée d'examiner s'il existe des hypercorps possédant des «valuations archimédiennes» analogues aux valuations homonymes dans la théorie des corps [3] (appe-

* ΙΩΑΝΝΟΥ ΜΗΤΤΑ, Συμβολή εἰς τὴν θεωρίαν τῶν διατεταγμένων καὶ τῶν διατιμημένων δομῶν.

1. Si k est un corps hypervalué dont l'hypervaluation prend ses valeurs dans le presque-groupe totalement ordonné D [7], [8], [10] et ϱ est un élément arbitraire d'espèce 0 ou — du complété de Kurepa \hat{D} de D [2], alors la relation binaire Π_{ϱ} telle que

$x \equiv_0 (\Pi_{\varrho}) \iff 0 \equiv x (\Pi_{\varrho}) \iff x = 0$ et, si $x \neq 0$, $y \equiv x (\Pi_{\varrho}) \iff |y - x| \leq \varrho |x|$ est une relation d'équivalence dans k , appelée congruence multiplicative, et le quotient k/Π_{ϱ} est un hypercorps, appelé hypercorps résiduel de k par la congruence multiplicative Π_{ϱ} .

2. Si K est un hypercorps et D un presque-groupe totalement ordonné, on appelle hypervaluation de K une application $|\cdot| : K \rightarrow D$ telle que les axiomes suivants soient satisfaits [7], [8], [10]:

$$v_1. |x| = 0 \iff x = 0,$$

$$v_2. z \in x + y \implies |z| \leq \max \{ |x|, |y| \},$$

$$v_3. \text{ Si } 0 \notin x + y, \text{ alors l'ensemble } x + y \text{ est un singleton, autrement dit } z, z' \in x + y \implies |z| = |z'|,$$

$$v_4. \text{ Il existe un élément } \varrho \text{ du complété de Kurepa } \hat{D} \text{ de } D \text{ d'espèce } 0 \text{ ou } - \text{ tel que, si } z \in x + y, \text{ alors } z' \in x + y \text{ si, et seulement si pour tout } t \in z' - z \text{ on a } |t| \leq \varrho \max \{ |x|, |y| \},$$

$$v_5. |xy| = |x| |y|.$$

lées autrement pseudo-valuations [11]). Et comme tout corps ordonné peut-être normé par une valuation, prenant ses valeurs dans le corps lui-même, nous avons posé la question: Est-ce qu'il y a des hypercorps totalement ordonnés analogues aux corps totalement ordonnés [3], [4]? Le présent travail est consacré à l'étude de ces deux sujets.

Évidemment si de tels hypercorps existent, ils seront des structures $(H, +, \cdot, <)$ dont le support H sera muni d'une hyperopération $x + y$, dite addition, d'une opération xy , dite multiplication, toutes les deux partout définies, et d'une relation $<$ d'ordre total satisfaisant aux axiomes convenables, analogues à ceux des corps totalement ordonnés. Ayant donc comme point de départ ces derniers nous posons:

Axiome I. L'ensemble H est, par rapport à l'addition $x + y$ et à la multiplication xy un hypercorps, autrement dit les axiomes suivants sont satisfaits [6]:

- I₁. 1. $(x + y) + z = x + (y + z)$,
2. $x + y = y + x$,
3. $(\exists o \in H) (\forall x \in H) [o + x = x]$ (l'élément o est évidemment unique est appelé le zéro de H),
4. Pour tout $x \in H$ il existe un et un seul $x' \in H$ tel que $o \in x + x'$ [le x' est noté $-x$ et appelé l'opposé de x et on écrira $x + (-y) = x - y$],
5. $z \in x + y \Rightarrow y \in z - x$.

I₂. Le zéro est un élément bilatéralement absorbant par rapport à la multiplication (autre-

1. On appelle hyperopération [5] (binaire interne) sur un ensemble E une application $E \times E \rightarrow \mathcal{P}(E)$, où $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E . On identifie, quand rien ne s'y oppose, les éléments $e \in E$ et les singletons correspondants $\{e\}$. Comme d'habitude, on écrit l'hypercomposé des $x, y \in E$ soit comme produit (et on a $xy \subseteq E$ au lieu de $xy \in E$ pour le composé), soit, si l'hyperopération est désignée par un signe spécial $+$, $*$, \circ , etc. comme $x + y$, $x * y$, $x \circ y$ etc. On étend l'hyperopération à l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ en posant, si $A, B \subseteq E$, $AB = \bigcup ab$.

$$(a, b) \in A \times B$$

ment dit $x_0 = ox = o$) et son complément¹ $H^* = H \dots \{o\}$ dans H est un groupe multiplicatif.

I₃. La multiplication est doublement distributive par rapport à l'addition.

$$(x + y)z = xz + yz \quad \text{et} \quad z(x + y) = zx + zy.$$

Axiome II. 1. Pour tout $x, y \in H$ fixés, a lieu une et une seule, des relations, $x < y, x = y, y < x$ (où $x = y$ est l'égalité naturelle, c'est-à-dire, signifie une relation satisfaite si, et seulement si x coïncide avec y).

2. Si $x < y$ et $y < z$ on a $x < z$.

Axiome III. 1. Si $x < y$ on a²

$$(x + a) \dots (y + a) < y + a, \quad \text{si} \quad (x + a) \dots (y + a) \neq \emptyset$$

$$x + a < (y + a) \dots (x + a), \quad \text{si} \quad (y + a) \dots (x + a) \neq \emptyset$$

2. $x < y$ et $o < a \Rightarrow ax < ay$ et $xa < ya$.

De ces axiomes résultent facilement les propriétés suivantes, correspondant aux propriétés analogues des corps totalement ordonnés.

a) Le réciproque de l'axiome III1 est encore vrai, c'est-à-dire :

$$(x + a) \dots (y + a) < y + a \quad \text{ou} \quad x + a < (y + a) \dots (x + a) \Rightarrow x < y.$$

b) Si $o < x$, alors $-x < o$, autrement dit il existe dans H des éléments positifs et des éléments négatifs.

c) Le produit de deux éléments d'un même signe est positif, le produit de deux éléments de signes différents est négatifs.

d) On a $o < 1$, donc $-1 < o$ (où 1 est l'unité de H).

e) $o < x \Rightarrow o < x^{-1}$, donc aussi $x < o \Rightarrow x^{-1} < o$.

f) Le réciproque de l'axiome III2 est aussi vrai, c'est-à-dire, si $o < a$ et $ax < ay$ ou $xa < ya$, alors $x < y$.

3. $x < y \Rightarrow -y < -x$. De même $o < x < y \Rightarrow y^{-1} < x^{-1}$.

1. On va noter $A \dots B$ le complément de l'ensemble B dans l'ensemble A (que l'on ne suppose pas contenir B), c'est-à-dire $\{x \in A : x \notin B\}$.

2. Si A, B sont deux sous-ensembles de H différents de vide, $A < B$ signifie que pour tout $a \in A$ et pour tout $b \in B$ on a $a < b$ [7].

Si nous définissons pour les éléments de H la valeur absolue comme dans le cas des anneaux totalement ordonnés, il est évident que

$$g) |x| = |-x|$$

et il résulte

$$h) |xy| = |x||y|.$$

De ces mêmes axiomes nous déduisons aussi les lemmes suivants:

Lemme 1. Pour tout $x, y \in H$ la somme $x + y$ est un sous-ensemble convexe de H .

Lemme 2. On a $-1 < (1-1) \dots \{-1, 1\} < 1$.

Il en résulte qu'on peut poser pour achever la définition de la structure $(H, +, \cdot, <)$ l'axiome suivant, appelé

Axiome de l'existence de coefficient de proportionnalité: Il existe un élément ϱ d'espèce 0' ou - du complété de K urepa \hat{H} de H (par rapport à son ordre $<$) tel que $0 \leq \varrho \leq 1$, que

$$1-1 = \{z \in H : |z| \leq \varrho\},$$

d'où il résulte immédiatement la

Proposition 1. Pour tout $x \in H$ on a $x-x = (1-1)|x| = |x|(1-1) = \{z \in H : |z| \leq \varrho|x|\} = \{z \in H : |z| \leq |x|\varrho\}$.

Remarques 1. a) Il est évident que pour tout $x \in H$ on a $\varrho x = x\varrho$, c'est-à-dire le coefficient de proportionnalité ϱ est un élément permutable avec tout élément $x \in H$ et cette propriété, évidemment, aura aussi lieu pour la valeur d'appui de ϱ .

b) Si $\varrho = 0$ la structure $(H, +, \cdot, <)$ est visiblement un corps totalement ordonné (puisque tout élément $x \in H$ est un scalaire [5], [6]):

Proposition 2. Soient $x, y \in H$. Alors:

i) Si $|y| \leq \varrho|x|$, on a

$$0 \leq y \Rightarrow \min(x+y) = x, \quad y \leq 0 \Rightarrow \max(x+y) = x.$$

ii) Si $\varrho|x| < |y|$, on a

$$0 < y \Rightarrow x < x+y, \quad y < 0 \Rightarrow x+y < x.$$

Corollaire 1. Si $\varrho=1$, alors pour tout $x, y \in H$ un au moins de ces éléments est un élément extrême du sous-ensemble $x+y$.

En raison de l'universalité de cette propriété nous particularisons le problème en supposant que $\varrho=1$. Nous démontrons que pour cette valeur nous avons la propriété suivante :

Lemme 3. Pour tout $x, y \in H$ la somme $x+y$ est un sous-ensemble borné de H .

Après ce lemme et la particularisation du problème pour la valeur $\varrho=1$ il résulte que nous pouvons poser pour accomplir la définition de la structure $(H, +, \cdot, <)$ l'axiome suivant :

Axiome IV. 1. Pour tout $x, y \in H$ la somme $x+y$ est un segment de H .

2. On a $1-1 = \{z \in H : |z| \leq 1\} = [-1, 1]$.

Remarques 2. Il en résulte facilement que

a) Pour tout $x \in H$ on a $x-x = [-|x|, |x|]$,

b) $0 \notin x+y \Rightarrow 0 < x+y$ ou $x+y < 0$,

c) Si $|x| \neq |y|$, alors $x \in x+y \Leftrightarrow y \notin x+y$.

En remarquant maintenant que dans un corps totalement ordonné, en raison de la monotonie de l'addition, on a $x \neq y \Rightarrow x+a \neq y+a$, nous distinguons au fait, où les sommes $x+a, y+a$ sont des sous-ensembles de H , deux cas de structures $(H, +, \cdot, <)$, selon que l'implication ci-dessus a ou n'a pas lieu en général. Nous allons examiner dans la suite chacun de ces cas.

A) Au premier cas la définition de la structure $(H, +, \cdot, <)$ est accomplie par l'axiome :

Axiome V. Si $x \neq y$, alors $x+a \neq y+a$.

Il s'ensuit facilement la

Proposition 3. Pour tout $x, y \in H^*$ la somme $x+y$ n'est pas un singleton.

Une conséquence importante de ce qui précède est que nous pouvons définir moyennant des sommes $x+y$ une application $f: H \times H \rightarrow H$ telle que à tout couple d'éléments $(x, y) \in H^* \times H^*$ correspond comme image le bout $f(x, y)$ du segment $x+y$ qui est différent de x et de y , si

$o \notin x + y$, et $o \in x + y$; et si un des éléments x ou y est o , l'image $f(x, y)$ est l'autre élément. Ainsi est définie une opération binaire $x \circ y$ sur H , appelée addition dérivée de H , telle que $x \circ y = f(x, y)$. Pour l'addition dérivée évidemment on a la

Proposition 4. Pour $x, y \in H$ tels que $|y| \leq |x|$ on a

$$(o) \quad x \circ y = \begin{cases} \min(x + y), & \text{si } o \notin x + y \text{ et } y \leq o \\ \max(x + y), & \text{si } o \notin x + y \text{ et } o \leq y \\ o & , \text{ si } o \in x + y \end{cases}$$

Il est clair que cette proposition détermine la valeur de $x \circ y$ pour tout $x, y \in H$.

Si nous appelons maintenant presque-corps la structure vérifiant tous les axiomes d'un corps sauf l'associativité de l'addition et presque-corps multiplicativement monotone le presque-corps qui est muni d'un ordre total tel que la multiplication soit monotone, nous avons la

Proposition 5. La structure $(H, \circ, \cdot, <)$ qui résulte de la structure $(H, +, \cdot, <)$ par le remplacement de l'addition $x + y$ par l'addition dérivée $x \circ y$ est un presque-corps multiplicativement monotone.

Ce résultat permet de résoudre le problème de compatibilité du système des axiomes I-V. En effet si $(H, +, \cdot, <)$ est une structure satisfaisante à ces axiomes et si $(H, \circ, \cdot, <)$ est le presque-corps correspondant, vice versa on peut définir l'hyperopération $x + y$ à partir de l'opération $x \circ y$ et de l'ordre $<$. Cette définition s'applique à un presque-corps arbitraire muni d'un ordre total $(H, \circ, \cdot, <)$ et permet de lui faire correspondre une structure $(H, +, \cdot, <)$. Les axiomes I-V sont compatibles si, et seulement si, parmi les structures ainsi obtenues il y a une qui satisfait à ces axiomes. Et nous prouvons qu'il n'y en a pas.

Considérons en effet un presque-corps totalement ordonné $(p, \circ, \cdot, <)$, qui, par définition, est une structure vérifiant tous les axiomes d'un corps totalement ordonné, sauf celui de l'associativité de l'addition, et définissons sur p une hyperopération $x * y$, appelée hyperaddition, en posant pour tout $x, y \in p$ tels que $|y| \leq |x|$,

$$(*) \quad x * y = \begin{cases} [x \circ y, x], & \text{si } y \neq -x \text{ et } y \leq 0 \\ [x, x \circ y], & \text{si } y \neq -x \text{ et } 0 \leq y \\ [-|x|, |x|], & \text{si } y = -x \end{cases}$$

ce qui définit la valeur de l'hyper-somme $x * y$ pour tout $x, y \in p$ [On voit facilement que si $x \circ y$ est l'addition dérivée de celle d'un hypercorps totalement ordonné $(H, +, \cdot, <)$, $x * y$ coïncide avec celle $x + y$ de cet hypercorps]. Nous constatons alors que la nouvelle structure $(p, *, \cdot, <)$ qui résulte de $(p, \circ, \cdot, <)$ par le remplacement de l'addition $x \circ y$ par l'hyperaddition $x * y$ vérifie tous les axiomes I-V, sauf, le I. I, 1 (c'est-à-dire l'associativité de l'addition), qui n'est jamais satisfait quel que soit le presque-corps de départ. Nous avons abouti ainsi au théorème important suivant :

Théorème 1. Le système des axiomes I-V n'est pas compatible. En particulier l'axiome I. I, 1 est incompatible avec le système des autres axiomes, qui est compatible.

Il résulte donc que des hypercorps totalement ordonnés définis par les axiomes I-V n'existent pas. Au contraire nous pouvons considérer les structures suivantes, définies comme suit :

Définition 1. On appelle presque-hypercorps la structure $(P, +, \cdot)$, plus générale que celle de l'hypercorps $(H, +, \cdot)$, définie par les mêmes axiomes I. I, I, I, I, sauf le I. I, 1 qui est remplacé par l'axiome :

I, 1'. Quels que soient $x, y \in P$ on a $x + y \neq \emptyset$.

Définition 2. Un presque-hypercorps dont le support est muni en plus par une relation d'ordre total $<$ et qui est tel que les axiomes II-V précédents soient vérifiés est appelé presque-hypercorps totalement ordonné.

Nous vérifions facilement qu'un presque-hypercorps totalement ordonné jouit de toutes les propriétés que nous avons déjà trouvées avec l'admission de l'associativité et nous avons encore la

Proposition 6. La structure $(p, *, \cdot, <)$ résultant

d'un presque-corps totalement ordonné $(p, o, \cdot, <)$ si nous remplaçons son addition xoy par son hyperaddition $x*y$ est un presque-hypercorps totalement ordonné, dont l'addition dérivée coïncide avec l'addition du presque-corps de départ.

Soit maintenant $(P, +, \cdot, <)$ un presque-hypercorps totalement ordonné quelconque. La valeur absolue de ses éléments vérifie, comme nous avons vu, les propriétés:

$$V_1. \quad 0 \leq |x|; \quad |x| = 0 \iff x = 0,$$

$$V_2. \quad |xy| = |x| |y|,$$

et nous démontrons qu'elle vérifie aussi les:

$$V_3. \quad z \in x + y \implies |z| \leq |x| \circ |y|,$$

$V_4.$ Il existe des éléments $x, y, z \in P$ avec $z \in x + y$ tels que $|z| \geq \max\{|x|, |y|\}$.

Définition 3. Soient P un presque-hypercorps et k un corps totalement ordonné. Une application $w: P \rightarrow k$ sera appelée valuation archimédienne (ou pseudo-valuation) de P à valeurs dans k si elle vérifie les axiomes suivantes:

$$i) \quad 0 \leq w(x), \quad w(x) = 0 \iff x = 0,$$

$$ii) \quad w(xy) = w(x) w(y),$$

$$iii) \quad z \in x + y \implies w(z) \leq w(x) + w(y),$$

iv) Il existe au moins un couple d'éléments $x, y \in P$ et au moins un $z \in x + y$ tels que $w(z) > \max\{w(x), w(y)\}$.

Si donc nous appelons presque-hypercorps parfait tout presque-hypercorps totalement ordonné qui provient par la construction (*) d'un corps totalement ordonné il résulte de ce qui précède la

Proposition 7. Tout presque-hypercorps parfait $(P, +, \cdot, <)$ peut être pseudo-valué à valeurs dans son corps $(P, o, \cdot, <)$ de départ.

Remarque 3. Évidemment si un presque-hypercorps parfait est commutatif (c'est-à-dire sa multiplication est commutative) et tel que son support soit saturé par rapport à sa relation d'ordre alors son corps de départ est isomorphe à l'ensemble R des nombres réels.

B) Dans ce cas, où l'axiome V n'a pas lieu, il n'est pas assuré que la proposition 3 est valable et, par conséquent, il ne faut pas exclure l'éventualité que la somme $x + y$, pour $x, y \in H^*$, soit un singleton. De cas possible à présenter, celui, selon lequel pour tout $x, y \in H$ tels que $0 \notin x + y$ la somme $x + y$ est un singleton, amène à la solution du problème posé au commencement:

Soit en effet la structure $(H, +, \cdot, <)$ définie par les axiomes:

$$I^* - III^* \equiv I - III$$

$$IV^* \equiv IV 2$$

V*. Pour tout $x, y \in H$ tels que $0 \notin x + y$ la somme $x + y$ est un singleton.

De la proposition 2 et du corollaire 1, qui évidemment ont aussi lieu au cas présent, il résulte immédiatement la

Proposition 8. Pour tout $x, y \in H$ tels que $|y| \leq |x|$ et $0 \notin x + y$ on a $x + y = x$.

Ensuite nous démontrons le théorème important suivant:

Théorème 2. L'axiome I.1.1, concernant l'associativité de l'hyperopération de la structure $(H, +, \cdot, <)$, résulte des autres axiomes. Autrement dit tout presque-hypercorps vérifiant les axiomes $II^* - V^*$ est un hypercorps.

Nous remarquons que, comme auparavant, nous pouvons définir sur H une addition dérivée $x \circ y$, qui, évidemment, maintenant sera:

$$x \circ y = \begin{cases} x & , \text{ si } 0 \notin x + y \text{ et } |y| \leq |x| \\ y & , \text{ si } 0 \notin x + y \text{ et } |x| < |y| \\ 0 & , \text{ si } 0 \in x + y \end{cases}$$

et nous démontrons facilement que la structure $(H, \circ, \cdot, <)$ est aussi un presque-corps multiplicativement monotone. Nous démontrons aussi que, inversement, si nous prenons comme point de départ un presque-corps multiplicativement monotone quelconque $(p, \circ, \cdot, <)$ et nous définissons sur p , comme précédemment une hyperaddition $x * y$, qui sera donc

$$x * y = \begin{cases} x, & \text{ si } y \neq -x \text{ et } |y| \leq |x| \\ y, & \text{ si } y \neq -x \text{ et } |x| < |y| \\ [-|x|, |x|], & \text{ si } y = -x \end{cases}$$

la structure résultante $(p, *, \cdot, <)$ satisfait aux axiomes $I^* - V^*$. Par conséquent on a le

Théorème 3. Le système des axiomes $I^* - V^*$ est compatible.

Les structures satisfaisantes à ces axiomes seront appelées hypercorps faiblement ordonnés et, évidemment, puisque nous avons $x \in x - x$ sans que ce dernier implique que $x - x = x$, car $0 \in x - x$, il résulte que ces hypercorps ne sont pas fortement canoniques [8], [9], [10] et, par conséquent, nous avons la

Proposition 9. Aucun hypercorps faiblement ordonné n'est hypervaluable.

Soit $(H, +, \cdot, <)$ un hypercorps faiblement ordonné et $(H^* \cup \{0\}, \cdot, <)$ le presque-groupe de ces éléments positifs avec le zéro. Moyennant la valeur absolue des éléments de l'hypercorps donné nous avons évidemment l'application $|\cdot| : H \rightarrow H^+ \cup \{0\}$, qui vérifie, comme il est clair, des conditions $v_1 - v_3$ de l'hypervaluation (voir page 1, note de pied 2) les $v_1 - v_3, v_3$. Si donc, nous introduisons la

Définition 4. Si K est un hypercorps et D un presque-groupe totalement ordonné, on appelle hypervaluation faible de K (à valeur dans D) toute application $|\cdot| : K \rightarrow D$ telle que les conditions $v_1 - v_3, v_3$ soient vérifiées nous concluons facilement la

Proposition 10. Tout hypercorps faiblement ordonné est faiblement hypervalué par la valeur absolue de ses éléments.

R É F É R E N C E S

1. Krasner, M.—Approximation des corps valués complets de caractéristique $p \neq 0$ par ceux de caractéristique 0, Actes du Colloque d'Algèbre supérieure, C.B.R.M., Bruxelles, 19 - 22 Décembre 1956.
2. — Introduction à la théorie des valuations, Cours de la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, 1967.
3. Kurosh, A. G.—Algèbre générale. Paris 1967.
4. MacLane, S., Birkoff, G.—Algèbre, 1971.

5. M i t t a s, J.— Sur une classe d'hypergroupes commutatifs, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A' 269 (1969), pp. 485 - 488.
6. — Hyperanneaux et certaines de leurs propriétés, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A' 269 (1969), pp. 623 - 626.
7. — Hypergroupes canoniques hypervalués, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A' 271 (1970), pp. 4 - 7.
8. — Contribution à la théorie des hypergroupes, hyperanneaux et hypercorps hypervalués, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A' 272 (1971), pp. 3 - 6.
9. — Hypergroupes canoniques valués et hypervalués, Mathematica Balkanica, (Beograd), 1, (1971), pp. 181 - 186.
10. — Hypergroupes valués et hypergroupes fortement canoniques, Πρακτικά τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν, 44 (1969), σσ. 304 - 310.
11. S c h i l l i n g, O. F. G., The theory of valuations. N. Y. 1950.

Π Ε Ρ Ι Λ Η Ψ Ι Σ

Ἀπὸ τῆς εἰσαγωγῆς τῆς ἐννοίας τοῦ διατιμημένου, ἀντιστοίχως τοῦ ὑπερδιατιμημένου, ὑπερσώματος [1], [8], [10], εἶχε τεθῆ τὸ ἐρώτημα, ἐὰν κάθε ὑπερσῶμα εἶναι ἰσόμορφον πρὸς ἓν ὑπερσῶμα ὑπολοίπων ἐνὸς ὑπερδιατιμημένου σώματος (δηλαδὴ ἐνὸς σώματος ἐφωδιασμένου μὲ μίαν διατίμησιν τοῦ Krull) διὰ πολλαπλασιαστικῆς ἰσοδυναμίας. Ἐπιθυμοῦντες νὰ ἀπαντήσωμεν εἰς τὸ ἐρώτημα τοῦτο εἴχομεν τὴν ἰδέαν νὰ ἐξετάσωμεν, ἐὰν ὑπάρχουν ὑπερσώματα «ἀρχιμηδεῖως διατιμημένα» ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀρχιμηδεῖως διατιμημένα σώματα. Ἐπειδὴ δέ, ὡς γνωστόν, κάθε ὀλικῶς διατεταγμένον σῶμα δύναται νὰ διατιμηθῆ ἀρχιμηδεῖως μὲ τιμὰς ἐντὸς αὐτοῦ τοῦ ἰδίου, ἐθέσαμεν τὸ ἐρώτημα: Ὑπάρχουν ὑπερσώματα ὀλικῶς διατεταγμένα ἀνάλογα τῶν ὀλικῶς διατεταγμένων σωμάτων; Ἡ παροῦσα ἐργασία εἶναι ἀφιερωμένη εἰς τὴν μελέτην τῶν δύο ὡς ἄνω θεμάτων.

Ὡς πρὸς τὸ δεύτερον ἐκ τῶν θεμάτων τούτων διεκρίναμεν δύο περιπτώσεις δομῶν $(H, +, \cdot, <)$ ἐπὶ τοῦ φορέως H τῶν ὁποίων ἔχει ὁρισθῆ μία ὑπερπρᾶξις [5] $x + y$, μία πρᾶξις xy καὶ μία σχέσις $<$ τοῦ «μικροτέρου». Ἡ διάκρισις αὕτη προέκυψε ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι μεταξὺ τῶν ἀξιωματικῶν τῆς δομῆς τῶν σχετικῶν μὲ τὸ ἰσότονον τῆς ὑπερπρᾶξεως ὡς πρὸς τὴν σχέσιν $<$ περιλαμβάνετο ἢ ὄχι ἡ συνεπαγωγή: $x \neq y \rightarrow x + a \neq y + a$, διὰ τυχόντα στοιχεῖα x, y, a τοῦ H . Ἀπεδείξαμεν ὅτι εἰς τὴν πρώτην ἐκ τῶν ἐξετασθεισῶν περιπτώσεων δὲν ὑπάρχουν ὑπερσώματα, ἀλλὰ σ χ ε δ ὂ ν ὑ π ε ρ σ ῶ μ α τ α ὀλικῶς διατεταγμένα, ὀνομασθέντα οὕτω διότι ἡ ὑπερπρᾶξις των δὲν εἶναι προσεταιριστική.

Εἰς τὴν δευτέραν ὁμως περίπτωσιν ὑπάρχουν τοιαῦτα, ἀποκληθέντα ἀσθενῶς διατεταγμένα ὑπερσώματα, τὰ ὁποῖα μάλιστα, ὡς ἀπεδείξαμεν, δὲν εἶναι ἰσόμορφα πρὸς οὐδὲν ὑπερσῶμα ὑπολοίπων ὑπερδιατιμημένου σώματος διὰ πολλαπλασιαστικῆς ἰσοδυναμίας, ἐπιλύσαντες οὕτω καὶ τὸ πρῶτον, τὸ ἀρχικῶς τεθὲν πρόβλημα.

★

Ὁ Ἀκαδημαϊκὸς κ. Φίλ. Βασιλείου παρουσιάζων τὰς ἀνωτέρω ἀνακοινώσεις λέγει τὰ ἑξῆς :

Ἔχω τὴν τιμὴν νὰ ἀνακοινώσω εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν δύο ἔργασίας τοῦ τακτικοῦ καθηγητοῦ τῆς Πολυτεχνικῆς Σχολῆς τοῦ Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης κ. Ι. Μήττα, συντεταγμένας γαλλιστί.

Ἡ πρώτη τῶν ἐργασιῶν αὐτῶν ἔχει, ἐν μεταφράσει, τὸν συμπληρωμένον τίτλον «Συμβολὴ εἰς τὴν θεωρίαν τῶν διατεταγμένων καὶ διατιμημένων δομῶν». Ὡς δομαὶ θεωροῦνται ἐδῶ τὰ καλούμενα ἀλγεβρικά ὑπερσώματα. Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἐν ὑπερσῶμα διαφέρει ἀπὸ ἐν σύνητες ἀλγεβρικὸν σῶμα κατὰ τοῦτο, ὅτι ἢ εἰς τὸ πρῶτον πρόσθεσις εἶναι πολυσήμαντος, δηλαδὴ ὅτι τὸ ἄθροισμα δύο στοιχείων τοῦ ὑπερσώματος δὲν εἶναι, γενικῶς, ἐν στοιχεῖον ἀλλὰ ἐν μὴ κενὸν ὑποσύνολον τοῦ ὑπερσώματος. Ἡ ἔννοια τοῦ ὑπερσώματος, καὶ μάλιστα τοῦ διατιμημένου, προέρχεται ἀπὸ ἐκείνην ἐνὸς διατιμημένου σώματος κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον : Εἰς διατιμημένον σῶμα ὀρίζομεν κατάλληλον σχέσιν ἰσοδυναμίας, καλουμένην «πολλαπλασιαστικὴν ἰσοδυναμίαν» τοιαύτην, ὥστε τὸ μὲν γινόμενον δύο κλάσεων τῆς ἐν λόγῳ ἰσοδυναμίας νὰ εἶναι πάλιν κλάσις αὐτῆς, ἐνῶ τὸ ἄθροισμα δύο κλάσεων νὰ εἶναι συνένωμα κλάσεων αὐτῆς. Καὶ ἢ μὲν ἔννοια τοῦ ὑπερσώματος ὀρίζεται ἀπὸ τὰς ιδιότητες τοῦ πηλίκου - κλάσεων τοῦ θεωρουμένου σώματος, ὡς πρὸς τὴν ἐκλεγείσαν ἰσοδυναμίαν, ἢ δὲ ἔννοια τοῦ διατιμημένου ὑπερσώματος ὀρίζεται, μὲ κατάλληλον τρόπον, ἀπὸ ἐκείνην τοῦ ἀρχικοῦ διατιμημένου σώματος.

Εἰς τὸ τιθέμενον τώρα πρόβλημα, ἂν δηλαδὴ κάθε ὑπερσῶμα εἶναι ἰσόμορφον πρὸς ἐν ὑπερσῶμα - ὑπολοίπων ἐνὸς σώματος ἐφωδιασμένου μὲ διατιμησιν κατὰ Krull, ὁ συγγραφεὺς τῆς παρούσης ἀνακοινώσεως ἐξετάζει τὴν περίπτωσιν κατὰ πόσον ὑπάρχουν ὑπερσώματα διατιμημένα ἀρχιμηδείως, κατὰ τὸν ὑπὸ τοῦ Ρώσου μαθηματικοῦ Kurosh δοθέντα ὅρον, τὰ ὁποῖα νὰ εἶναι ἀνάλογα τῶν ἀρχιμηδείως διατιμημένων σωμάτων.

Ἡ παρούσα ἀγακείνωσις ἀφιερώνεται εἰς τὴν μελέτην τοῦ ἄνω τιθεμένου ὑπὸ τοῦ συγγραφέως ἐρωτήματος, τὰ ἐξαγόμενα δὲ τῆς μελέτης αὐτῆς, χρήζοντα εἰδικοῦ μαθηματικοῦ συμβολισμοῦ, θέλει εὔρη ὁ ἐνδιαφερόμενος εἰς τὰ «Πρακτικά» τῆς ἡμετέρας Ἀκαδημίας.

Ἡ δευτέρα τῶν ἀνακοινώσεων τοῦ κ. Ι. Μήττα ἔχει, ἐν μεταφράσει, τὸν τίτλον «Ἐπὶ κλάσεών τινων ὑπερσυνθετικῶν δομῶν». Μὲ τὸν ὄρον «ὑπερσυνθετική δομή», ἢ καὶ ἀπλῶς «ὑπερδομή», ἐννοεῖ ὁ συγγραφεὺς ἓν σύνολον ἐφωδιασμένον μὲ μίαν τοῦλάχιστον διμελῆ «ὑπερπρᾶξιν». Ὁ ἤδη καὶ ἐνωρίτερον γνωστὸς εἰς τὴν μαθηματικὴν βιβλιογραφίαν ὄρος τῆς ὑπερπράξεως, ἐπεξηγεῖται εἰς τὴν ἐργασίαν τοῦ κ. Μήττα, ὅπου οὗτος, ἐκτὸς τῶν ἤδη γνωστῶν ὑπερδομῶν, ὀρίζει καὶ νέας κατηγορίας ὑπερσυνθετικῶν δομῶν. Εἰς λεπτομερῆ μελέτην τῶν ἐν λόγῳ νέων ὑπερδομῶν προβαίνει εἰς τὴν παρούσαν ἐργασίαν τοῦ ὁ συγγραφεὺς ἀποδεικνύων ὠρισμένας ἐνδιαφερούσας προτάσεις.