MATHEMATICA BALKANICA
2 (1972) 165—179

MITTAS JEAN (Athènes, Grèce)

HYPERGROUPES CANONIQUES[1]

0. Introduction

M. KRASNER a introduit, en 1956, dans un de ses travaux [1] la notion de *l'hypercorps* et de *l'hypercorps valué.* Un hypercorps est un ensemble muni d'une addition $x+y$ et d'une multiplication xy obéissant aux axiomes très proches de ceux des corps. La structure de l'hypercorps diffère de celle du corps parce que son addition est „multivoque", autrement dit, la somme $x+y$ de deux éléments x et y de l'hypercorrps n'est pas, en général, un élément, mais une partie. C'est M. KRASNER qui a introduit encore dans une conférence, faite à l'Université Nationale Technique d'Athènes en avril 1966, la notion de *l'hyperanneau*,, qui généralise celle de l'hypercorps, se trouvant dans le même rapport avec cette dernière que celle de l'anneau avec celle du corps. Si nous considérons isolément la structure additive de l'hypercorps ou de l'hyperanneau, nous voyons qu'elle est, de ce point du vue, un hypergroupe [2] (notion introduite par F. MARTY en 1933 [3]) d'un type spécial. Dans le présent travail j'étudie, en vue d'applications ultérieures, la structure de tels hypergroupes, que j'appelle *hypergroupes canoniques* et dont j'écris additivement l'hyperopération.

Nous citons d'abord ci-dessous quelques notions préliminaires de la théorie générale des hypergroupes [2].

Définition 1. On appelle *hyperopération* (binaire interne) sur un ensemble H une application $H\times H \to \mathcal{P}(H)$, où $\mathcal{P}(H)$ est l'ensemble des parties de H.

Tout ensemble non vide H muni d'une hyperopération sera appelé *hypergroupoïde.* On indentifie, quand rien ne s'y oppose, les éléments $x\in H$ et les singletons correspondants $\{x\}$. Comme d'habitude, on écrit l'hypercomposé de x, $y\in H$ soit comme produit xy (et on a $xy\subseteq H$ au lieu de $xy\in H$ pour le composé), soit, si l'hyperopération est désignée par un signe spécial $+$, $-$, 0, etc, comme $x+y$, $x-y$, $x\circ y$, etc. On étend l'hyperopération en une application "additive" de $\mathcal{P}(H)\times\mathcal{P}(H)$ dans $\mathcal{P}(H)$ en posant pour tout $A, B\in\mathcal{P}(H)$, $AB=\bigcup ab$, où (a, b) parcourt $A\times B$.

1) Dans ma Note [4] j'ai donné les notions et quelques résultats sans démostrations du présent travail, que je publie aujourd'hui sous forme complète.

Définition 2. a) Un élément s d'un hypergroupoïde H est dit *scalaire à droite* (resp *à gauche*) si, pour tout $x \in H$ xs (resp. sx) est un singleton.

b) Un élément e de l'hypergroupoïde H est dit *unité à droite* (resp. *à gauche*) si, pour tout $x \in H$, on a: $x \in xe$ (resp. $x \in ex$).

Relativement à ces éléments on a la

Proposition 1. *Soit H un hypergroupoïde. Si $e \in H$ est une unité bilatère, scalaire à droite, e est unique unité à gauche.*

Définition 3. Un hypergroupoïde H est appelé *hypergroupe* si son hyperopération est associative et reproductive, autrement dit telle que:

I. $(xy)z = x(yz)$

II. $xH = Hx = H$

quels que soient x, y, z dans H.

Si seulement le premier de ces axiomes a lieu, H est dit *demihypergroupe*. S'il est vérifié seulement le second, H sera appelé *quasihypergroupe*.

Il est évident que tout groupe est un hypergroupe. D'autre part on démontre facilement que dans tout hypergroupe H. pour tout x, $y \in H$, on a: $xy \neq \emptyset$.

Définition 4. Soit H un hypergroupe. Un sous-ensemble h de H est appelé *sous-hypergroupe* de H si lui même est un hypergroupe relativement à l'hyperopération définie dans l'hypergroupe H.

Visiblement un sous-ensemble non vide h de H est un soushypergroupe de H si, et seulement si, $xh = hx = h$, quel que soit $x \in h$. Il est encore facile de voir que l'intersection de deux sous-hypergroupes de H peut être vide. Si elle est non vide, ce n'est pas nécessairement un sous-hypergroupe.

Définition 5. Soit H un sous-hypergroupe d'un hypergroupe H.

a) h est dit *clos* (dans H) *à droite*, resp. *à gauche*, si pour tout $a \in H..h$[1] on a $ah \cap h = \emptyset$, resp. $ha \cap h = \emptyset$.

b) h est dit *clos* (dans H) s'il est clos à droite et à gauche.

Relativement aux sous-hypergroupes clos de H nous citons les propositions:

Proposition 2. *Soit h un sous-hypergroupe de H. Alors les propositions suivantes sont équivalentes:*

i) *h est clos à droite (resp. à gauche),*

ii) $ah \cap \neq \emptyset$ *(resp.* $ha \cap h \neq \emptyset$*)* $\Rightarrow a \in h$,

iii) $(H..h)h \cap h = \emptyset$ *[resp.* $h(H..h) \cap h = \emptyset$*]*,

iv) $(H..h)h = H..h$ *[resp.* $h(H..h) = H..h$*]*.

Proposition 3. *Soit H_2 un sous-hypergoupe d'un sous-hypergroupe H_1 de H. Alors si H_2 est clos dans H_1 et H_1 est clos dans H on a: H_2 est clos dans H.*

---

1) On va noter $A..B$ le complément de le l'ensemble A B dans l'ensemble A (qu'on ne suppose pas contenir B), c'est-à-dire $\{x \in A : x \notin B\}$

Proposition 4. *Si H_1 et H_2 sont deux sous-hypergroupes de H tels que $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$, alors, si H_1 est clos dans H, l'intersection $H_1 \cap H_2$ est un sous-hypergroupe clos dans H_2.*

Corollaire 1. *Si H_1 et H_2 sont deux sous-hypergroupes clos de H et tels que $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$, leur intersection $H_1 \cap H_2$ est un sous-hypergroupe clos dans H_1, H_2 et H.*

Définition 6. Soit h un sous-hypergroupe d'un hypergroupe H.

a) h est dit *inversible à droite* (dans H), resp. *à gauche*, si, pour tout a, $a' \in H$, $ah \neq a'h$ implique $ah \cap a'h = \emptyset$, resp. $ha \neq ha'$ implique $ha \cap ha' = \emptyset$.

b) h est dit *inversible* (dans H) s'il l'est à droite et à gauche.

Relativement on a les propositions:

Proposition 5. *Si h est un sous-hypergroupe de H inversible à droite (même chose à gauche) alors:*

i) Pour tout $a \in H$, $a \in ah$

ii) Pour tout $a, b \in H$, $a \in bh \Leftrightarrow b \in ah \Leftrightarrow ah = bh$.

Proposition 6. *Si h est inversible (dans H), les sous-ensembles hah, quand a parcourt H, forment une partition de H, notée $H \swarrow\!\!\nearrow h$.*

Remarques 1. a) Évidemment si h est inversible à droite (resp. à gauche) les sous-ensembles ah (resp. ha), quand a parcourt h, forment une partition de H, notée $H \nearrow h$ (resp. $H \swarrow h$).

b) Tout sous-hypergroupe inversible dans H est clos dans H. La réciproque n'est pas vraie.

Proposition 7. *Si h est inversible à droite dans H et $C(x) = xh$, $C(y) = yh$ deux classes (mod. h) de H, le produit $C(x)\,C(y)$ est une réunion de classes (mod. h) et le quotient $H \nearrow h$ muni de la loi $C(x) \cdot C(y) = C(x)\,C(y) \nearrow h$ (hyperopération) est un hypergroupe* (même chose si h est inversible à gauche ou inversible).

Définition 7. Soient H un hypergroupoïde et R une relation d'équivalence dans H. R sera appelée *normale* si, $C(x)$ signifiant la classe (mod. R) de H à laquelle appartient l'élément x, pour tout $x, y, x', y' \in H$ tels que $x' \in C(x)$, $y' \in C(y)$, on a $C(x)\,C(y) \subseteq \bigcup\limits_{z' \in x'y'} C(z')$.

Évidemment l'ensemble des classes H/R est un hypergroupoïde par rapport à l'hyperopération $C(x) \cdot C(y) = \bigcup\limits_{z' \in x'y'} C(z')/R = \{C(z') : z' \in x'y'\}$ et on a que, si l'hypergroupoïde du départ H est un demi-hypergroupe, resp. un quasi-hypergroupe, H/R l'est aussi. Si, donc, H est un hypergroupe, H/R est aussi un hypergroupe.

1. Définitions et certaines propriétés

Définition (1.1). Un ensemble H organisé par une hyperopération $x+y$ est appelé *hypergroupe canonique* si son hyperopération satisfait aux axiomes suivants:

1. $(x+y)+z=x+(y+z)$;

2. $x+y=y+x$;

3. Il existe un $0\in H$ tel que, pour tout $x\in H$, on ait $x+0=x$ (un tel élément est évidemment unique et on va l'appeler *zéro* de H);

4. Pour tout $x\in H$ il existe un et un seul $x'\in H$ tel que, $0\in x+x'$ [un tel x' sera noté aussi $-x$ et dit l'opposé de x, et on posera $x-y=x+(-y)$];

5. $z\in x+y \Rightarrow y\in z-x$.

Nous concluons facilement que $-(-x)=x$ et $-(x+y)=-x-y$ [où si $A\subseteq H$, $-A=\{x\in H: -x\in A\}$]. D'autre part, pour tout $x, y\in H$, on a $x+y\neq\emptyset$, car $x+y=\emptyset \Rightarrow x+(y-y)=\emptyset-y=\emptyset \Rightarrow x\in\emptyset$, ce qui est inexact. Il s'ensuit que, pour tout $x, y\in H$, il existe un $z\in H$ tel que $y\in x+z$ (en effet il suffit considérer un $z\in y-x$) d'où il vient $H\subseteq x+H$. Donc, puisque évidemment $x+H\subseteq H$, on a $x+H=H$ et, en conséquence, H est un hypergroupe, étant ainsi justifié cette caractérisation dans la définition ci-dessus.

Proposition (1.1). *Pour tout* $x, y, z, t\in H$, $(x+y)\cap(z+t)\neq\emptyset$ *implique* $(x-z)\cap(t-y)\neq\emptyset$ *et, en particulier,* $x+y=x+z$ *implique* $(x-x)\cap(z-y)\neq\emptyset$.

Démonstration. En effet si $u\in(x+y)\cap(x+t)$, on a $u\in x+y$ et $u\in z+t$, donc $u-u\subseteq(x+y)-(z+t)=(x-z)-(t-y)$ d'où il vient $0\in(x-z)-(t-y)$. Il existe donc un élément $v\in H$ tel que $v\in z-z$ et $v\in t-y$, c'est-à dire $(x-z)\cap(t-y)\neq\emptyset$.

Il est clair que cette propriété est aussi valable dans $\mathcal{P}(H)$, donc, si $(A+B)\cap(\Gamma+\Delta)\neq\emptyset$, on a $(A-\Gamma)\cap(\Delta-B)\neq\emptyset$.

Remarque (1.1). De la proposition résulte que la règle de simplification n'a pas, en général, lieu dans hypergroupes canoniques. Toutefois si $x-x=0$. alors $x+y=x+z$ implique $y=z$.

Proposition (2.1). $x\in H$ *est un scalaire si, et seulement si,* $x-x=0$.

Démonstration. Évidemment si x est un scalaire, $x-x=0$. Inversement, si $x-x=0$, alors $z\in x+y$ implique successivement $z-x\subseteq(x-x)+y$, $z-x\subseteq y$, $z-x=y$, $z+(x-x)=x+y$, donc $x+y=z$ et x est, en effet, un scalaire.

Il en résulte que $x-x=0$ et $y\neq 0$ implique $x+y\neq x$.

Corollaire (1.1). *H est un groupe (forcément abelien) si, et seulement si, pour tout* $x\in H$, *on a* $x-x=0$

Proposition (3.1). *L'ensemble S des scalaires de H est un groupe abelien.*

Démonstration. En effet, pour tout $x, y\in S$ la somme $x+y$ est un singleton. Soit $x+y=z$. Alors $z-z=(x+y)-(x+y)=(x-x)+(y-y)=0$, donc $z\in S$. Il s'ensuit que S est une partie stable de H et la restrictiom de l'hyperopération de H sur S est une opération, évidemment associative et commutative. D'autre part $0\in S$ et si $x\in S_0-x\in S$.

Soient X un sous-ensemble non vide de H et $\Omega(X)$ la réunion de toutes les sommes $(x_1-x_1)+(x_2-x_2)+\cdots+(x_i-x_i)$, où i est un entier positif arbitraire et où $x_1, x_2, \ldots, x_i$ parcourent indépendamment X. En particulier si $X=H$, on va noter $\Omega=\Omega(H)$.

Proposition (4.1.). *$\Omega(X)$ est un sous-hypergroupe de H et $0 \in \Omega(X)$.*

Démonstration. Évidemment $0 \in \Omega(X)$. D'autre part, pour tout $x \in \Omega(X)$, il existe des éléments $x_1, \ldots, x_i \in X$ tels que $x \in (x_1 - x_1) + \cdots + (x_i - x_i)$, donc, $x + \Omega(X) \subseteq (x_1 - x_1) + \cdots + (x_i - x_i) + \Omega(X) \subseteq \Omega(X)$. Mais si $y \in \Omega(X)$ on aura $y - x \subseteq [(y_1 - y_1) + \cdots + (y_j - y_j)] - [(x_1 - x_1) + \cdots + (x_i - x_i)] \subseteq \Omega(X)$, donc $y \in x + \Omega(X)$ et, par conséquent, $\Omega(X) \subseteq x + \Omega(X)$. Il en résulte que, pour tout $x \in \Omega(X)$, on a $x + \Omega(X) = \Omega(X)$ et $\Omega(X)$ est bien un sous-hypergroupe de H.

Définition (2.1). Un sous-hypergroupe h de H sera dit *canonique* s'il l'est par rapport à l'hyperopération de H et avec le même zéro (donc, en particulier, $0 \in h$).

Lemme (1.1). *Un sous-ensemble h de H en est sous-hypergroupe canonique si, et seulement si, $x \in h$ et $y \in h$ implique $x - y \subseteq h$.*

Démonstration. La condition est visiblement nécessaire. Inversement on a que $x \in h$ implique $x - x \subseteq h$, donc $0 \in h$ et, par suite, $0 - x \in h$, donc $-x \in h$. Il en résulte que pour tout $x, y \in h$ on a $x - (-y) = x + y \subseteq h$, c'est-à dire que h est une partie stable pour l'hyperopération de H. Il suit de là la vérification immédiate des autres axiomes d'un hypergroupe canonique par le sous-ensemble h.

Remarque. (2.1). Il résulte que pour qu'une partie non vide h de H soit un sous-hypergroupe canonique de H il faut et il suffit qu'elle soit stable et contienne, en même temps qu'un élément x de H son opposé $-x$.

Proposition (5.1). *Tout sous-hypergroupe de H contenant le zéro de H est canonique.*

Démonstration. En effet h étant un sous-hypergroupe de H on a $x + h = h$, pour tout $x \in h$. Par conséquent $0 \in h$ implique $0 \in x + h$, donc $-x \in h$ et, par la remarque ci-dessus, h est canonique.

Il résulte ainsi que le sous-hypergroupe $\Omega(X)$ est canonique. De même les groupes $\{0\}$ et celui S des scalaires de H, considérés somme sous-hypergroupes de H, sont canoniques.

On sait qu'un sous-hypergroupe clos (et, à fortiori, inversible) d'un hypergroupe contient toutes ses unités, donc, en particulier, dans notre cas, 0 doit appartenir à un tel hypergroupe. C'est-à-dire on a:

Proposition (6.1). *Tout sous-hypergroupe clos de H est canonique.*

Mais pour le cas considéré des hypergroupes canoniques on a aussi la réciproque.

Proposition (7.1). *Tout sous-hypergroupe canonique* [*autrement dit, en vertu de la proposition* (5.1), *tel que* $0 \in h$] *h de H est inversible* (*donc clos*).

Démonstration. If suffit de démontrer que si $(x+h) \cap (y+h) \neq \emptyset$ on a $x + h = y + h$. En effet $(x+h) \cap (y+h) \neq \emptyset$ implique $(x-y) \cap (h-h) \neq \emptyset$, donc $(x-y) \cap h \neq \emptyset$. Il existe donc un $z \in h$ tel que $z \in x - y$ d'où il vient $x \in y + z$

et, par suite, $x+h \subseteq y+z+h=y+h$. Symétriquement on trouve $y+h \subseteq x+h$, donc $x+h=y+h$.

Ainsi les ensembles de sous-hypergroupes de H qui sont inversibles, clos, canoniques et contenant le zéro de H coïncdent. Il en résulte que deux sous-hypergroupes canoniques de H ont toujours une intersection non vide, qui, par la remarque (2.1), est aussi un sous-hypergroupe canonique de H, donc clos, inversible et contenant 0. L'ensemble donc des sous-hypergroupes canoniques de H est une famille de parties fermées de H, donc un treillis complet, qui coïncide avec le treillis complet des sous-hypergroupes de chacun de ces autres espèces. Il suit de là que, étant donné un sous-ensemble X de H, le sous--hypergroupe, p.e. clos, qui lui correspond par l'application de fermeture, c'est-à--dire le plus petit sous-hypergroupe clos $\overline{X}$ de H contenant X, est, en même temps, le plus petit sous-hypergroupe inversible, resp. canonique, resp. contenant $0 \in H$, qui contient X. Ce sous-hypergroupe $\overline{X}$ est le sous-hypergroupe de chacun de ces espèces *engendré par* X.

Si $X=\emptyset$, évidemment $\overline{X}=\{0\}$. Soit $X \neq \emptyset$. Alors on aura $X \subseteq \overline{X}$, $-X \subseteq \overline{X}$, donc $-X \cup X \subseteq \overline{X}$. Considérons l'ensemble $\hat{X}$ des éléments $x \in H$ tels que pour chacun d'eux il existe une somme $\sum x_k$ dont les termes, en nombre fini sont des éléments x de la réunion $-X \cup X$, telle que $x \in \sum x_k$. Alors pour tout $x', x'' \in \hat{X}$ on aura $x' \in \sum_{1=1}^{m} x_i$, $x'' \in \sum_{j=1}^{n} y_j$ d'où il vient $x'-x'' \subseteq \sum_{i=1}^{m} x_i - \sum_{j=1}^{n} = \sum_{k=1}^{m+n} z_k$, donc $x'-x'' \subseteq \hat{X}$. Par conséquent, selon le lemme précédent, $\hat{X}$ est un sous--hypergroupe canonique de H, qui même contient la réunion $-X \cup X$. Visiblement, $\overline{X} \subseteq \hat{X}$. D'autre part, on a $\hat{X} \subseteq \overline{X}$, car tout sous-hypergroupe canonique de H contenant X, en particulier $\overline{X}$, contient aussi comme sous-ensemble toute somme d'éléments, en nombre fini, de la réunion $-X \cup X$. Il s'ensuit donc $\overline{X}=\hat{X}$ et nous avons ainsi la

Proposition (8.1). *Le sous-hypergroupe canonique $\overline{X}$ de H, engendré par une partie non vide X de H, est la réunion des sommes d'un nombre fini d'éléments de la réunion — $X \cup X$.*

Remarques. (3.1) a) Il en résulte-comme dans la théorie classique, étant donnée une famille $\mathcal{F}$ de sous-hypergroupes canoniques, il existe les

$$\inf_{h \in \mathcal{F}} h \text{ et } \sup_{h \in \mathcal{F}} h \text{ et on a } \inf_{h \in \mathcal{F}} h = \bigcap_{h \in \mathcal{F}} h \text{ et } \sup_{h \in \mathcal{F}} h = \overline{\bigcap_{h \in \mathcal{F}} h}.$$

Ce dernier sous-hypergroupe est appelé *réunion complète* des sous-hypergroupes canoniques h appartenant à la famille $\mathcal{F}$, ou leur *somme* et on va la noter $\sum_{h \in \mathcal{F}} h$. Évidemment l'addition des sous-hypergroupes canoniques est associative, commutative et idempotente.

b) Nous concluons aussi que le sous-hypergroupe canonique $\Omega(X)$, défini précédemment à partir d'une partie non vide X de H, coïncide avec le sous-hypergroupe canonique de H engendré par la réunion $\bigcup_{x\in X} x-x$, c'est-à-dire on a $\Omega(X)=\overline{\bigcup_{x\in X} x-x}$, d'où $\Omega=\overline{\bigcup_{x\in X} x-x}$.

c) Tout sous-hypergroupe canonique h de H, étant inversible, définit une partition de H, appelée *partition* (mod h) dont les classes sont $C(x)=x+h, x\in H$. Evidement on a $x'\in C(x)$, c'est-à-dire $x'\equiv x$ (mod h) si et seulement si, $(x'-x)\cap h\neq\emptyset$. D'autre part, cette équivalence est normale dans H car, pour tout $x, y, x', y'\in H$ tels que $x'\in C(x)$, $y'\in C(y)$ on a:

$$C(x)+C(y)=(x'+h)+(y'+h)=x'+y'+h=\bigcup_{z'\in x+y} C(z').$$

En ce qui concerne les relations d'équivalences normales de H on a la

Proposition (9.1) *Si R est une relation d'équivalence normale dans H, l'ensemble des classes H/R est hypergroupe canonique.*

Démostration. D'abord comme nous le savons (voir introduction), R, étant normale, implique que le quotient H/R est un hypergroupe par rapport à l'hyperopération

$$C(x)+C(y)=[\bigcup_{z\in x+y} C(z)]/R=\{C(z): z\in x+y\}.$$

Cette hyperopération satisfait, donc, à l'axiome 1 de la définition (1.1) et, évidemment, de l'axiome 2. La vérification des axiomes 3 et 4 a lieu facilement, $C(0)$ étant le zéro dans H/R et, pour tout $C(x)\in H/R$ $C(-x)$ est l'élément opposé de $C(x)$. Enfin, pour l'axiome 5, soit $C(z)\in C(x)\dotplus C(y)$. Il suit de là qu'il existe des éléments $x'\in C(x)$, $y'\in C(y)$, $z'\in C(z)$ tels que $z'\in x'+y'$, donc $y'\in z-x'$ d'où il vient

$$C(y')=C(y)\in C(z')\dotplus C(-x')=C(z)\dotplus C(-x),$$

c'est-à-dire l'axiome 5 est aussi satisfait. H/R est, donc, un hypergroupe canonique.

Corollaire (2.1). *Pour tout sous-hypergroupe canonique h de H l'ensemble des classes (mod h), c'est-à-dire l'ensemble H/h, est un hypergroupe canonique appelé hypergroupe canonique-quotient de H par h.*

Dans des cas particulier l'hypergroupe canonique H/h est un groupe forcement abelien. Relativement on a la

Proposition (10.1). *L'hypergroupe canonique H/Ω est un groupe abélien et H/h est un groupe abélien si, et seulement si, $h\supseteq\Omega$.*

Démostration. i) Il suffit de démontrer que la somme de deux classes (mod Ω) est une seule classe. En effet on a

$$C(x)+C(y)=(x+\Omega)+(y+\Omega)=x+y+\Omega=\bigcup_{z\in x+y}(z+\Omega)$$

Soient $z, w\in x+y$ et les classes (mod Ω) $z+\Omega$, $w+\Omega$.

Si $(z+\Omega)\cap(w+\Omega)=\emptyset$, alors $(z-w)\cap\Omega=\emptyset$, mais ce dernier résultat n'est pas vrai, car

$$z-w\subseteq(x+y)-(x+y)=(x-x)+(y-y)\subseteq\Omega,$$

comme il résulte de la définition de Ω. Il s'ensuit, donc que $z+\Omega=w+\Omega$, d'où il suit $C(x)+C(y)=C(z)$.

ii) Supposons maintement que l'hypergroupe canonique H/h soit un groupe abélien. Alors on aura $C(x)+C(-x)=C(0)=h$, c'est-à-dire $(x+y)+(-x+h)=h$, d'où $(x-x)+h=h$. Mais h est un sous-hypergroupe clos dans H, ce qui implique $x-x\subseteq h$. Il en résulte que toute somme $(x_1-x_1)+\cdots+(x_i-x_i)$ est un sous ensemble de h, il en est ainsi pour toute réunion de telles sommes, pour tout entier positif i et quand $x_1,\ldots,x_i$ parcourent indépendamment H. C'est pour cela que $\Omega\subseteq h$.

iii) Inversement soit $\Omega\subseteq h$. Alors, pour tout $x\in H$, $x+\Omega\subseteq x+h$, c'est-à-dire $C_\Omega(x)\subseteq C_h(x)$ et, par conséquent, pour tout

$$x,y\in H, C_\Omega(x)+C_\Omega(y)\subseteq C_h(x)+C_h(y).$$

Mais la somme $C_\Omega(x)+C_\Omega(y)$ est une seule classe $(\mathrm{mod}\,\Omega)$, soit $C_\Omega(z)$ avec $z\in x+y$. On aura, donc,

$$x+y\subseteq C_\Omega(x)+C_\Omega(y),\quad \text{d'où}\quad x+y\subseteq C_\Omega(z),$$

ce qui implique $x+y\subseteq C_h(z)$ et, par conséquent,

$$C_h(x)+C_h(y)=\bigcup_{z\in x+y}C_h(z)=C_h(z),$$

c'est-à-dire une seule classe. Il s'ensuit donc que l'hypergroupe canonique-quotient H/h est un groupe.

Corollaire (3.1). *H est un groupe* (forcément abélien) *si, et seulement si,* $\Omega=\{0\}$

2. Homomorphismes.

Soient H et H' deux hypergroupes.

Définition (1.2). Une application $\varphi: H\to\mathcal{P}(H)$ (que l'on peut étendre par $\varphi.\ X=\bigcup\varphi\cdot x$, où x parcourt X, en est une application „additive" [c'est-à-dire telle que $\varphi.\ (X\cup Y)=(\varphi\cdot X)\cup(\varphi.\ Y)$] de $\mathcal{P}(H)$ dans $\mathcal{P}(H)$ est dite un *homomorphisme* de H dans H' si, pour tout x, $y\in H$, on a $\varphi\cdot xy\subseteq(\varphi\cdot x)(\varphi\cdot y)$. Si un homomorphisme φ est une application $\varphi: H\to H'$ de H dans H', il est dit *strict* et si l'on a $\varphi\cdot xy=(f\cdot x)(\varphi\cdot y)$ est dit *fort*. Un homomorphisme qui est, à la fois, strict et fort est dit *normal*[1]

Si donc les hypergroupes considérés H et H' sont canoniques et φ est un homomorphisme normal de H dans H', alors, pour tout x, $y\in H$, on a

$$f(x+y)=(\varphi\cdot x)+(\varphi\cdot y).$$

Un homomorphisme qui est une application biunivoque de H sur H' est un *isomorphisme*.

Si, plus généralement, H et H' sont deux hypergroupoïdes on définit de la même manière, comme ci-dessus l'homomorphisme de H dans H'.

---

[1] Cette terminologie a été introduite par M. KRASNER en 1952 dans un cour (non publié) de la théorie des groupes qu'il a fait à la Notre Dame University, U.S.A.

Proposition (1.2): *L'image homomorphe $\varphi.H$ d'un hypergroupe canonique H dans un homomorphisme normal est un hypergroupe canonique. Le noyau $\mathcal{N}(\varphi)=\varphi^{-1}.(\varphi.0)$ de l'homomorphisme est un sous-hypergroupe canonique de H et l'application $x+\mathcal{N}(\varphi)\rightarrow\varphi.x$ est un isomorphisme de l'hypergroupe quotient $H/\mathcal{N}(\varphi)$ sur $\varphi.H$.*

Démonstration. En ce qui concerne la première partie, nous vérifions facilement que l'hyperopération $(\varphi\cdot x)+(\varphi\cdot y)=\varphi.(x+y)$, définie sur $\varphi\cdot H$ à partir de celle de H, vérifie tous les axiomes de l'hypergroupe canonique. Il se trouve ainsi que $\varphi\cdot 0$ est le zéro de $\varphi\cdot H$ et que, pour tout $x\in H$, $\varphi\cdot(-x)$ est l'élément opposé de $\varphi\cdot x$. Quant à la deuxième partie, pour tout $x, y, \in\mathcal{N}(\varphi)$, on a $\varphi\cdot(x+y)=(\varphi\cdot x)+(\varphi\cdot y)=(\varphi\cdot 0)+(\varphi\cdot 0)=\varphi\cdot 0$, d'où il vient $x+y\subseteq\mathcal{N}(\varphi)$. D'autre part, pour tout $x\in\mathcal{N}(\varphi)$, on a

$$\varphi\cdot 0\in\varphi\cdot(x-x)=(\varphi\cdot x)+(\varphi\cdot(-x))=(\varphi\cdot 0)+(\varphi\cdot(-x))=\varphi\cdot(-x),$$

donc $\varphi\cdot(-x)=\varphi\cdot 0$, d'où $-x\in\mathcal{N}(\varphi)$ et, donc, par la remarque (2.1), le noyau $\mathcal{N}(\varphi)$ est un sous-hypergroupe canonique de H.

Enfin, l'application $\psi: H/\mathcal{N}(\varphi)\rightarrow\varphi\cdot H$ telle que, pour tout $x+\mathcal{N}(\varphi)=$ $=C(x)\in H/\mathcal{N}(\varphi)$, on ait $\psi(x+\mathcal{N}(\varphi))=\varphi\cdot x$, est un isomorphisme, car

$$\psi[(x+\mathcal{N}(\varphi))\dotplus(y+\mathcal{N}(\varphi))]=\psi\{z+\mathcal{N}(\varphi): z\in x+y\}=\{\varphi\cdot z: z\in x+$$

$$+y\}=\varphi\cdot(x+y)=(\varphi\cdot x)+(\varphi\cdot y)=\psi(x+\mathcal{N}(\varphi))+\psi(y+\mathcal{N}(\varphi))$$

et cette application est, évidemment une surjection et, même, biunivoque, car

$$C(x)\neq C(y)$$

implique $\psi(X(x))\neq\psi(C(y)$. En effet, si $\psi(C(x)=\psi(C(y)$, c'est-à-dire $\psi(x+\mathcal{N}(\varphi))=\psi(y+\mathcal{N}(\varphi))$, alors $\varphi\cdot x=\varphi\cdot y$, donc $\varphi\cdot 0\in\varphi\cdot x-\varphi\cdot y=\varphi\cdot(x-y)$, d'où résulte $(x-y)\cap\mathcal{N}(\varphi)\neq\emptyset$ et par la remarque (3c. 1), $x\equiv y$ (mod $\mathcal{N}(\varphi)$), c'est-à-dire $C(x)=C(y)$, ce qui est inexact. Ainsi:

Corollaire (1.2). *Tout homomorphisme normal φ d'un hypergroupe canonique H se factorise en $\varphi=\psi\eta$, où η est l'homomorphisme canonique $x\rightarrow x+\mathcal{N}(\varphi)$ de H sur $H/\mathcal{N}(\varphi)$, tandis que ψ est un isomorphisme de $H/\mathcal{N}(\varphi)$ sur $\varphi\cdot H$.*

Proposition (2.2). *Pour tout sous-hypergroupe canonique h de H l'homorphisme canonique $x\rightarrow x+h$ est un homomorphisme normal de H sur H/h.*

Démonstration. En effet l'homomorphisme canonique est d'une part, évidemment, strict et d'autre part il est fort, car si nous l'appelons φ, nous aurons

$$\varphi\cdot(x+y)=\{\varphi\cdot z: z\in x+y\}=\{z+h: z\in x+y\})=[\bigcup_{z\in x+y}(z+h)]/h=$$

$$=(x+y+h)/h=[(x+h)+(y+h)]/h=(x+h)\dotplus(y+h)=\varphi\cdot x+\varphi\cdot y$$

(voir corollaire (2.1)].

Remarques (1.2). a) Comme on le sait (Remarques (3c. 1) tout sous-hypergroupe canonique h d'un hypergroupe canonique H définit une relation d'équivalence normale dans H, dont la classe contenant le zéro est h lui-même. La réciproque est aussi vraie. En effet, pour toute relation d'équivalence normale R l'application canonique $\varphi : H \rightarrow H/R$ est un homomorphisme normal dont le noyau $\mathcal{N}(\varphi) = \{x \in H : \varphi \cdot x = C(0)\}$ est la classe de H pour l'équivalence R à laquelle appartient zéro. Par conséquent, la classe $C(0)$ (mod R) est un sous-hypergroupe canonique de H. Nous notons encore que la relation d'équivalence (mod $C(0)$) et la relation R coïncident.

b) Il en résulte que pour tout homomorphisme normal $\varphi : H \rightarrow H'$ la relation d'équivalence R_φ définie par φ dans H est la relation d'équivalence (mod $\mathcal{N}(\varphi)$), où $\mathcal{N}(\varphi)$ est le noyau du φ.

c) Comme dans la théorie classique des groupes ainsi qu'en théorie présente des hypergroupes canoniques un homomorphisme normal $\varphi : H \rightarrow H'$ est un isomorphisme si, et seulement si, $\mathcal{N}(\varphi) = \{0\}$.

Proposition (3.2). *Soient* 0 *et* 0′ *les zéros des hypergroupes canoniques* H *et* H' *et* φ *un homomorphisme normal de* H *dans* H'. *Alors*:

i) *L'hypergroupe canonique* $\varphi . H$ *est un sous-hypergroupe de* H, *qui, en général, n'est pas sous-hypergroupe canonique de* H'.

ii) $\varphi \cdot H$ *est un sous-hypergroupe canonique de* H' *si, et seulement si,* $\varphi \cdot 0 = 0'$.

Démonstration i) Évidente.

ii) Si $\varphi \cdot H$ est un sous-hypergroupe canonique de H', on a $0' \in \varphi \cdot H$, donc, par l'unicité de zéro, $0' = \varphi \cdot 0$. Réciproquement si $\varphi \cdot 0 = 0'$, alors, pour tout $x \in H$, $0' \in (\varphi \cdot x) + (\varphi \cdot (-x))$ et, par conséquent, l'élément opposé de $\varphi \cdot x$ dans $\varphi \cdot H$ coïncide avec l'opposé de $\varphi \cdot x$ dans H' et, donc, par la remarque (2.1), on a que l'hypergroupe canonique $\varphi \cdot H$ est sous-hypergroupe canonique de H'.

Remarques (2.2). a) Il existe des homomorphismes $\varphi : H \rightarrow H'$, où H et H' sont des hypergroupes canoniques, tels que $\varphi \cdot 0 \neq 0'$ [Pour cela, il suffit, par exemple, qu'il existe un élément idempotent $x' \in H'$, c'est-à-dire que $x' + x' = x'$ et qu'on ait $\varphi \cdot H = \{x'\}$. Un tel hypergroupe canonique est par exemple $H' = \{0', x', -x'\}$ où $0'$ est son zéro, $x' + x' = x'$ et $x' - x' = H'$] Alors, H est un sous-hypergroupe de H' qui est un hypergroupe canonique sans être un sous-hypergroupe canonique de H'. Un tel $\varphi \cdot H$ ne contient pas $0'$, donc n'est pas clos.

b) L'image homomorphe $\varphi \cdot S$ du groupe S des scalaires de H dans un homomorphisme normal $\varphi : H \rightarrow H'$ et tel que $\varphi \cdot 0 = 0'$ est un sous-groupe du groupe S' des scalaires de H'. En effet, pour tout $x \in S$ on a

$$\varphi(x - x) = (\varphi \cdot x) + (\varphi \cdot (-x)) = \varphi \cdot 0 = 0', \text{ donc } \varphi \cdot x \in S'.$$

3. Sous-hypergroupes monogènes d'un hypergroupe canonique.

Définition (1.3). H étant un hypergroupe canonique et $x \in H$ le sous-hypergroupe canonique $\overline{\{x\}}$ engendré par x est dit le sous-hypergroupe *monogène* de H engendré par x. Un sous-hypergroupe canonique h de H est dit *monogène* s'il existe un $x \in H$ tel que $h = \overline{\{x\}}$ et H est dit un *hypergroupe monogène* s'il existe un $x \in H$ tel que $H = \overline{\{x\}}$

Posons

$$n\cdot x=\begin{cases}x+x+\cdots+x & (n \text{ fois si } n>0\\ 0 & \text{si } n=0\\ (-x)+(-x)+\cdots+(-x) & (-n \text{ fois}) \text{ si } n<0\end{cases}\qquad(1)$$

Il résulte facilement que

$$m\cdot x+n\cdot x=\begin{cases}(m+n)\cdot x & \text{si } mn\geqslant 0\\ (m+n)\cdot x+\min\{|m|,\,|n|\}\cdot(x-x) & \text{si } mn<0\end{cases}\qquad(2)$$

ce qui donne

$$(m+n)\cdot x\subseteq m\cdot x+n\cdot x.\qquad(3)$$

Proposition (1.3). *Quel que soit $x\in H$ on a $\overline{\{x\}}=m\cdot x+n\cdot(x-x)$, où $(m\cdot n)$ parcourt le carré cartésien Z^2 de l'ensemble Z des entiers rationnels.*

Démonstration. En effet, par la proposition (8.1) et par la formule (1) ci-dessus on a: $\overline{\{x\}}\ \bigcup\limits_{(k,\,1)\in N2} k\cdot x-1\cdot x$, où N est l'ensemble des entiers rationnels non négatifs. Or, selon la formule (2) précédente, $k\cdot x-1\cdot x=(k-1)\cdot x+$ $+\min\{k,\,1\}\cdot(x-x)$, d'où la conclusion.

Remarques (1.3). a) Comme $-(x-x)=x-x$, on a $(-n)\cdot(x-x)=n\cdot(x-x)$. Donc, dans la somme précédente, on peut remplacer la condition $(m,\,n)\in Z\times Z$ par $(m\cdot n)\in Z\times N$.

b) Puisque $0\in x-x$ on a $m\cdot x+n\cdot(x-x)\subseteq m\cdot x+n'\cdot(x-x)$, si $n\leqslant n'$.

Nous allons définir maintenant un symbole $\omega(x)$ (pouvant être $+\infty$) que nous appellerons *ordre* de x ainsi que du sous-hypergroupe monogène $\overline{\{x\}}$. Deux cas pouvent se présenter, qui s'excluent mutuellement.

I. Quels que soient $(m\cdot n)\in Z\times N$ tels que $m\neq 0$, on a $0\notin m\cdot x+n\cdot(x-x)$.

On dit alors que x, ainsi que $\{x\}$, est d'ordre infini et on pose $\omega(x)=+\infty$.

Nous remarquons que $0\notin m\cdot x+m\cdot(x-x)$ implique $m\cdot x\cap(n\cdot x-n\cdot x)=\varnothing$ qui, en vertu de (2), donne $(m+n)\cdot x\cap n\cdot x=\varnothing$, si $m>0$ et $(n-m)\cdot x\cap n\cdot x=\varnothing$, si $m\cdot<0$. En particulier si $n=0$, $0\notin m\cdot x$ implique $\{0\}\cap m\cdot x=\varnothing$ et si on suppose $m=m_1+m_2$, on a $-m_1\cdot x\cap m_2\cdot x=\varnothing$. Inversement, il est visible que si $m'\cdot x\cap m''\cdot x=\varnothing$, alors $0\notin m'\cdot x-m''\cdot x$ donc $0\notin(m'-m'')\cdot x+\min\{|m'|,\,|m''|\}\cdot$ $\cdot(x-x)$. Il en résulte donc que, si pour tout $(m,\,n)\in Z\times N$ tels que $m\neq 0$ on a $0\notin m\cdot x+n\cdot(x-x)$, alors pour tout $(m',\,m'')\in Z\times Z$ tels que $m'\neq m''$ on a $m'\cdot x\cap m''\cdot x=\varnothing$, c'est-à-dire la

Proposition (2.3). *On a $\omega(x)=+\infty$ si, et seulement si, pour tout $m',\,m''\in Z$ tels que $m'\neq m''$ on a $m'\cdot x\cap m''\cdot x=\varnothing$.*

II. Il existe des $(m,\,n)\in Z\times N$, $m\neq 0$ tels que $0\in m\cdot x+n\cdot(x-x)$.

Soit h le plus petit entier positif tel qu'il existe un $n\in N$ de manière que $0\in h\cdot x+n\cdot(x-x)$.

Proposition (3.3). *Pour un $m\in Z$ donné il existe des $n'\in N$ tels que $0\in m\cdot$ $\cdot x+n'\cdot(x-x)$ si, et seulement si, m se divise par h.*

Démonstration. Soit $m=kh$, $k\in Z$. Alors $0\in h\cdot x+n\cdot(n-x)$ entraîne $0\in kh\cdot x+kn\cdot(x-x)=m\cdot x+kn\cdot(x-x)$, d'où il résulte que des entiers $n'\in N$ ayant la propriété indiquée existent [Même, selon la remarque (1b.3), tout entier $n'\geqslant|k|n$ en est tel].

Réciproquement, soit $0\in m\cdot x+n'\cdot(x-x)$ et que $m=kh+r$, $k\in Z$, $0<r<h$. Alors, vu de (3), $m\cdot x+n\cdot(x-x)=(kh+r)\cdot x+n'\cdot(x-x)\subseteq kh\cdot x+r\cdot x+n'\cdot(x-x)$, donc $0\in kh\cdot x+r\cdot x+n\cdot(x-x)$. Mais de $0\in h\cdot x+n\cdot(x-x)$ on a $-h\cdot x\subseteq h\cdot(x-x)+n\cdot(x-x)=(h+n)\cdot(x-x)$, ce qui donne $kh\cdot x\subseteq -k(h+n)\cdot(x-x)=|k|(h+n)\cdot(x-x)$ et, par conséquent, $0\in r\cdot x+[|k|(h+n)+n']\cdot(x-x)$, ce qui est contradictoire, car h est le plus petit entier positif tel que $0\in h\cdot x+n\cdot(x-x)$. On aura donc $r=0$, c'est-à-dire $m=k\cdot h$.

Si $m=kh\,(k\in Z)$ soit $q(k)$ le plus petit entier non négatif tel que $0\in kh\cdot x+q(k)\cdot(x-x)$. Ainsi $q:k\rightarrow q(k)$ est une fonction $q:Z\rightarrow N$ et on appellera *ordre* de x et de $\overline{\{x\}}$ le couple $\omega(x)=(h,q)$; h est dit *l'ordre principal* de x et de $\overline{\{x\}}$ et la fonction q *l'ordre associé.*

La proposition suivante contient diverses propriétés de cet ordre.

Proposition (4.3). *Pour tout* $x\in H$ *d'ordre* $\omega(x)=(h,g)$:

i) $0\in m\cdot x+n\cdot(x-x)\Leftrightarrow m\equiv 0 \pmod h$ *et* $|n|\geqslant q(mh^{-1})$,

ii) $m\cdot x\cap m''\cdot x\neq\emptyset\Leftrightarrow m'\equiv m'' \pmod h$ *et*

$$\min\{|m'|,\ |m'|\}\geqslant q[(m'-m'')h^{-1}]$$

iii) $q(0)=0$, $q(-k)=q(k)$ *et, si* $x\neq 0$, $h=1$ *implique* $q(1)>0$.

iv) *Si* $kk'\geqslant 0$ *on a*: $\leqslant q(k+k')\leqslant q(k)+q(k)$. *Si* $kk'<0$, *on a*

$$q(k+k')\leqslant h\max\{|k|,\ |k'|\}+q(k)+q(k');$$

v) $q(k)\leqslant kq(1)$.

Démonstration. i) En effet, selon la proposition (3.3), la définition de la fonction d'ordre associée et la remarque (1 b.3), on a $0\in m\cdot x+n\cdot(x-x)$ si, et seulement si, $m=kh$, c'est-à-dire $m\equiv 0$ (mod h), et $|n|\geqslant q(k)=q(mh^{-1})$.

ii) $m'\cdot x\cap m''\cdot x\neq\emptyset\Leftrightarrow 0\in m'\cdot x-m''\cdot x=(m'-m'')\cdot x+\min\{|m'|,\ |m''|\}\cdot(x-x)$ c'est-à-dire $m'-m''=kh$, ou, autrement, dit $m'\equiv m''$ (mod$\cdot h$) et

$$\min\{|m'|,\ |m''|\}\geqslant q(k)=q[(m'-m'')h^{-1}];$$

iii) $q(0)=0$, car $0\in h\cdot x+q(1)\cdot(x-x)\Rightarrow 0\in 0h\cdot x+0q(1)(x-x)=0h\cdot x+0(x-x)$, donc $0\geqslant q(0)$, d'où $q(0)=0$.

De même, $0\in h\cdot x+q(1)\cdot(x-x)$ implique $0\in kh\cdot x+q(k)\cdot(x-x)$ et $0\in -kh\cdot x+q(-k)\cdot(x-x)$. Mais de $0\in kh\cdot x+q(k)\cdot(x-x)$ on a $0\in -kh\cdot x-q(k)\cdot(x-x)=-kh\cdot x+q(k)\cdot(x-x)$ ce qui donne $q(k)\geqslant q(-k)$ et on trouve de même $q(-k)\geqslant q(k)$.

Enfin, soit $n=0$. Alors $h=1$ entraîne $0\in x+q(1)\cdot(x-x)$ d'où $q(1)>0$, car, autrement, si $q(1)=0$ on aurait $x=0$, ce qui est contradictoire.

iv) Si $kk'\geqslant 0$, alors de $0\in kh\cdot x+q(k)\cdot(x-x)$ et $0\in k'h\cdot x+q(k')\cdot(x-x)$ on a $0\in(k+k')h\cdot x+[q(k)+q(k')]\cdot(x-x)$ ce qui donne $q(k+k')\leqslant q(k)+q(k')$. Par contre, si $kk'<0$, alors $0\in kh\cdot x+q(k)\cdot(x-x)$ et $0\in k'h\cdot x+q(k)\cdot(x-x)$

entraînent $0 \in kh \cdot x + k'h \cdot x + [q(k) + q(k')] \cdot (x-x)$, donc $0 \in (k+k') \cdot h \cdot x + \max\{|kh|, |k'h|\} \cdot (x-x) + [q(k) + q(k')] \cdot (x-x) = (k+k')h \cdot x + [h \max\{|k|, |k'|\} + q(k) + q(k')] \cdot (x-x)$ d'où il résulte que $q(k+k') \leqslant h \max\{|k|, |k'|\} + q(k) + q(k')$.

v) Enfin $0 \in hx + q(1) \cdot (x-x) \Rightarrow 0 \in kh \cdot x + k \cdot q(1) \cdot (x-x)$, donc $q(k) \leqslant k \cdot q(1)$.

Remarques (2.3). a) L'élément $0 \in H$ est d'ordre $\omega(0) = (1, q)$, où $q(k) = 0$ pour tout $k \in Z$, et c'est le seul élément de H ayant cette propriété. Mais il est possible qu'il y ait dans H d'éléments $x \neq 0$ ayant comme ordre principal 1 et pour qu'il soit ainsi il faut et il suffit qu'il existe un entier n tel que $x \in n \cdot (x-x)$.

Exemple. De l'étude de l'hypergroupe fortement canonique [5], [6] il résulte que tout ensemble totalement ordonné E, possedant un élément minimum 0, est un hypergroupe canonique par rapport à l'hyperopération $x+y$ définie à partir de l'ordre total de E comme suit: $x+y = \max\{x, y\}$, si $x \neq y$ et $x+x = \{z \in E : z \leqslant x\}$. Il est facile de voir que tout élément de cet hypergroupe différent de 0', est d'ordre $(1, q)$, où, pour tout $k \in Z$, $k \neq 0$, on a $q(k) = 1$.

b) Si $x-x=0$, alors $q(k)=0$, pour tout $k \in Z$. Si donc l'hypergroupe canonique H est un groupe, alors, pour tout $x \in H$ la fonction d'ordre associée est la fonction nulle. La réciproque n'est pas vraie [6].

c) De la proposition (1.3) résulte que, si $x-x=0$, l'hypergroupe monogène $\overline{\{x\}}$ est un groupe, sous-groupe du groupe S des scalaires de H.

d) Quel que soit $x \in H$ l'ensemble $a_0 = \bigcup_{k \in Z} k \cdot (x-x) = \Omega(\{x\})$. [et pour abus d'écriture, $\Omega(x)$] est, selon les propositions (4.1) et (5.1), un sous hypergroupe de l'hypergroupe monogène $\overline{\{x\}}$, ainsi que de H.

Proposition (5.3). *Pour tout $x \in H$ les ensembles $a_m = \bigcup_{k \in Z} m \cdot x + k \cdot (x-x) = m \cdot x + \bigcup_{k \in Z} k \cdot (x-x) = m \cdot x + a_0 = m \cdot x + \Omega(x)$, quand m décrit Z, forment une partition du sous-hypergroupe monogène $\overline{\{x\}}$, qui coïncide avec la partition $(\mathrm{mod}\, a_0)$ de $\overline{\{x\}}$.*

Démonstration. Évidemment $\bigcup_{m \in Z} a_m = \bigcup_{m \in Z} m \cdot x + a_0 = \bigcup_{(m,k) \in Z^2} m \cdot x + k \cdot (x-x) = \overline{\{x,\}}$ selon la proposition (1.3). Ensuite.

i) Si x est d'ordre infini $[\omega(x) = +\infty]$, alors, pour tout $m, m' \in Z$ tels que $m \neq m'$, on a $a_m \cap a_{m'} = \emptyset$, car, autrement, si $a_m \cap a_{m'} \neq \emptyset$, on aurait

$$0 \in a_m - a_{m'} = m \cdot x - m' \cdot x + a_0 = (m-m') \cdot x + \min\{|m|, |m'|\} \cdot (x - x + a_0$$

$$= (m-m') \cdot x + a_0, \text{ puisque } \min\{|m,| \; |m'|\} \cdot (x-x) \subseteq a_0,$$

et, par conséquent, il existerait un nombre n tel que $0 \in (m-m') \cdot x + n \cdot (x-x)$, ce qui est inexacte parce que $\omega(x) = +\infty$.

ii) Si x est d'ordre $\omega(x)=(h, q)$, alors, pour tout $m, m' \in N$ tels que $0<m'<m<h$, on a $a_m \cap a_{m'} = \emptyset$ car, autrement, comme ci-dessus, $a_m \cap a_{m'} \neq \emptyset$ impliquerait $0 \in (m-m') \cdot x + n \cdot (x-x)$, ce qui est absurde, car on aurait $0<m-m'<h$ et h est l'ordre principal de x. Soit maintenant $m<0$ ou $m \geqslant h$ et soit $m=kh+r$ où $k \in Z$ et $0<r<h$. Alors $0 \in hx+a_0$ implique $0 \in kh \cdot x + k \cdot a_0 = (m-r) \cdot x + a_0$. Mais, selon (3), $(m-r) \cdot x \subseteq m \cdot x - r \cdot x$, donc $0 \in m \cdot x - r \cdot x + a_0$ d'où $r \cdot x + a_0 \subseteq m \cdot x + r \cdot (x-x) + a_0 = m \cdot x + a_0$, c'est-à-dire $ar \subseteq a_m$. De même $0 \in hx + a_0$ implique $0 \in = kh \cdot x - k \cdot a_0 = -kh \cdot x + a_0$, d'où $m \cdot x + a_0 \subseteq m \cdot x - kh \cdot x + a_0 = (m-kh) \cdot x + \min\{|m|, |k|h\}(x-x) + a_0 = r \cdot x + 0$, c'est-à-dire $a_m \subseteq a_r$. Il résulte donc que pour tout $m \in Z$ l'ensemble a_m coïncide avec un des ensembles $a_0, a_1, \ldots, a_{h-1}$, qui sont deux à deux disjoints, d'où la conclusion.

Si nous notons R cette partition de $\overline{\{x\}}$, nous aurons que zRz' implique $(\exists m \in Z)[z, z' \in a_m = m \cdot x + a_0]$, d'où $z'-z = (m \cdot x + a_0) - (m \cdot x + a_0) = m \cdot (x-x) + a_0 = a_0$, donc $z \equiv z' \pmod{a_0}$. Réciproquement, si $z \equiv z' \pmod{a_0}$, alors $z' \in z + a_0$ et, si $a_m = m \cdot x + a_0$ la classe de $\overline{\{x\}}$ pour la relation R à laquelle appartient l'élément z, on a $z' \in (m \cdot x + a_0)\, a_0$ d'où $z' \in m \cdot x + a_0$, donc zRz'.

Proposition. (6.3) i) *On a* $\Omega(x) = \Omega(\overline{\{x\}})$ *et par conséquent* [Proposition (10.2)], *l'hypergroupe canonique* $\overline{\{x\}}/\Omega(x)$ *est un groupe.*

ii) Si x est d'ordre infini, le groupe $\overline{\{x\}}/\Omega(x)$ est isomorphe au groupe additif Z des entiers rationnels. Si x est d'ordre (h, p), $\overline{\{x\}}/\Omega(x)$ est isomorphe au groupe additif $Z/(h)$ des classes $\pmod h$ *de Z.*

Démonstration. i) Évidemment on a $\Omega(x) \subseteq \Omega(\overline{\{x\}})$. D'autre part, $\Omega(\overline{x\}})$ étant la réunion de toutes les sommes de la forme $(x_1-x_1)+\cdots(x_i-x_i)$, où $x_1, \ldots, x_i \in \overline{\{x\}}$, on aura, par la proposition (8.1),

$$x_1 \in m_1 \cdot x - n_1 \cdot x, \ldots x_i \in m_i \cdot x - n_i \cdot x_i \quad \text{et où } m_1, \ldots, m_i,\ n_1, \ldots, n_i \in N,$$

$$\text{donc } (x_1-x_1)+\cdots+(x_i-x_i) \subseteq [(m_1 \cdot x - n_1 x) - (m_1 \cdot x - n_1 \cdot x)] +$$

$$\cdots + [(m_i \cdot x - n_i x) - (m_i \cdot x - n_i \cdot x)] = m_1 \cdot (x-x) + n_1 \cdot (x-x) + \cdots + m_i \cdot (x-x) +$$

$$+ n_i \cdot (x-x) = (m_1 + \cdots + m_i + n_1 + \cdots n_i) \cdot (x-x) \subseteq \Omega(x) \quad \text{et, par conséquent,}$$

$$\Omega(\overline{\{x\}}) \subseteq \Omega(x), \text{ donc } \Omega(x) = \Omega(\overline{\{x\}}).$$

ii) C'est une conséquence immédiate de la proposition (5.3).

Remarques (3.3). a) Si, en particulier, l'ordre principal de x est 1, alors $\overline{\{x\}}/\Omega(x) \simeq Z/(1) = (0)$. Dans ce cas, il est visible que $\overline{\{x\}} = \Omega(x)$.

b) Évidemment $\overline{\{x\}}/\Omega(x) \subseteq H/\Omega(x)$. Le groupe, même, $\overline{\{x\}}/\Omega(x)$ est un sous-groupe du groupe des scalaires de l'hypergroupe canonique $H/\Omega(x)$.

c) De la remarque (3b. 1) résulte que $\Omega(x)$ est le sous-hypergroupe canonique engendré par la différence $x-x$, c'est-à-dire on a $\Omega(x) = \overline{x-x}$.

Références

[1] KRASNER M., *Approximation des corps valués complets de caractéristique* $p \neq 0$ *par ceux de caractéristique* 0 (Actes du Colloque d'Algèbre, C. B. R. M., Bruxelles, 19—22 décembre, 1956).

[2] — *Théorie de Galois* (Cours de la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, 1967—68).

[3] MARTY F., Actes du Congrès des Math. Scand., 1934, p. 45.

[4] MITTAS J., *Sur une classe d'hypergroupes commutatifs* (C. R. Acad. Sc. Paris, t. 269, p. 485—488, 29 septembre 1969, Série A')

[5] — *Hypergrouoes valués et hypergroupes fortement canoniques* (Πρακτικά τῆς 'Ακαδημίας 'Αθηνῶν. ἔτος 1969 τόμ. 44, 'Αθῆναι, 1971).

[6] — *Hypergroupes canoniques valués et hypervalués* (Mathematica Balkanica, I (1971) p. 181—185, Beograd 1971).

(Reçu le 06. 07. 1972).

Athènes (804)
85, Rue Kyprou
Grèce