MATHEMATICA BALKANICA

SEPARATUM

MITTAS JEAN

HYPERGROUPES CANONIQUES VALUÉS ET HYPERVALUÉS

BEOGRAD, 1971.

MATHEMATICA BALKANICA
1 (1971) 181—185

MITTAS JEAN (Salonique, Grèce)

HYPERGROUPES CANONIQUES VALUÉS ET HYPERVALUÉS

La notion d'hypergroupe introduite par Fr. MARTY [3] en 1933 est la suivante:

On appelle *hypergroupe* un ensemble non vide H muni d'une multiplication xy telle que

i) $xy \subseteq H$;

ii) $x(yz) = (xy)z$;

iii) $xH = Hx = H$,

quels que soient x, y, z dans H.

Le premier de ses axiomes exprime que la multiplication est une *hyperopération* sur H, c'est-à-dire une opération sur H à valeurs dans $P(H)$; en d'autres termes, le composé de deux éléments x, $y \in H$ est un sous-ensemble de H. On démontre très facilement que pour tout x, $y \in H$ on a $xy \neq \varnothing$. Si le sous-ensemble xy de H se réduit à un singleton $\{z\}$, on écrira $xy = z$.

Une classe particulière d'hypergroupes, que nous avons déjà étudiée, [4], est celle des hypergroupes canoniques, dont la définition est la suivante:

Un ensemble H muni d'une addition $x+y$ est appelé *hypergroupe canonique* si les axiomes suivants sont satisfaits:

1. $x+y \subseteq H$;

2. $x+(y+z) = (x+y)+z$;

3. $x+y = y+x$;

4. $(\exists\, o \in H)\ (\forall x \in H)\ [o+x = x]$ (o est appelé *zéro*)

5. Pour tout $x \in H$ il existe un et un seul $x' \in H$ tel que $o \in x+x'$ [x' sera noté aussi $-x$ et dit *opposé* de x et on posera $x-y = x+(-y)$];

6. $z \in x+y \Rightarrow y \in z-x$.

L'appellation „*hypergroupe*“ est justifiée, parce que ces axiomes impliquent la validité des axiomes *i-iii*.

Un hypergroupe canonique H est appelé *valué** s'il est muni d'une distance ultramétrique $d: H\times H \rightarrow R_+$ telle que les deux conditions suivantes soient satisfaites:

h_1: Pour tout $x, y \in H$ la somme $x+y$ est un cercle de l'espace ultramétrique (H, d) de rayon Max $(|x|, |y|)$, c'est-à-dire

$$x+y=c(z, \text{o Max } (|x|, |y|)),$$

où $z\in x+y$ est qulconque, $|x|=d(o, x)$ appelé *valuation de x associée à la distance d*, et ρ *est un nombre semi-réel* (3) (4) $\geqslant 0$ et d'espèce $\xi \neq +$;

h_2: Si $x, y, a \in H$ sont tels que $(x+a) \cap (y+a)=\varnothing$, on a $d(x+a, y+a)=d(x, y)$.

Les définitions précédentes des hypergroupes canoniques et des hypergroupes canoniques valués résultent de la notion de *l'hypercorps valué*, donné par MARC KRASNER dans un de ces travaux si en mettant de côté la partie multiplicative de cette structure, nous nous limitons à sa seule partie additive.

En partant de ces définitions, nous avons construit pour les hypergroupes canoniques une théorie analogue à celle des groupes valués.. Nous avons prouvé qu'étant donnée une fonction $|\cdot|: H\rightarrow R_+$, pour qu'elle soit la valuation associée à une distance ultramétrique sur H, il faut et il suffit qu'elle vérifie les cinq propriétés suivantes:

---

*) Pour définir les hypergroupes cononiques valués on utilise la notion de l'espace ultramétrique et certaines de ses propriétés [1]. On appelle *(distance) ultramétrique* sur un ensemble E toute application d de $E\times E$ dans R_+, où R_+ est l'ensemble des nombres réels non négatifs, telle que:

a) $d(x, y)=0$ si et seulement si $x=y$;

b) $d(x, y)=d(y, x)$;

c) $d(x, y)=\text{Max}\,[d(x, z), d(z, y)]$

quels que soient x, y, z das E. Le couple (E, d) est appelé *espace ultramétrique*.

Si on remplace dans cette définition le R_+ par un ensemble totalement ordonné Ω possédant un élément minimum o, dit *zéro*, d est appelé *(distance) hyperultramétrique* et le couple (E, d) *espace hyperultramétrique*.

Quant aux popriétés de ces espaces, nous citons les suivantes concernant leurs cercles:

i) Deux cercles de E sont disjoints ou l'un est contenu dans l'autre.

ii) Tout point d'un cercle est un centre pour ce cercle.

iii) Soient C un cercle et x un point de E n'appartenant pas à C. Pour tout y, y' dans C on a $d(x, y)=d(x, y')$.

iv) Soient C et C' deux cercles disjoints. Pour tout $x, x' \in C$ et $y, y' \in C'$ on a $d(x, y)=d(x', y')$.

A partir de ces dernières propriétés on peut évidemment définir la distance entre un point n'appartenant pas à un cercle et ce cercle et la distance entre deux cercles disjoints.

ν_1: $|x|=0$ si et seulement si $x=0$;

ν_2: $|x|=|-x|$;

ν_3: Si $x \neq y$ l'ensemble $|x-y|$ est un singleton $\{r\}$ et sera noté r;

ν_4: Pour tout $z \in x+y$ on a $|z| \leqslant \mathrm{Max}\ (|x|, |y|)$ et on écrira $|x+y| \leqslant \mathrm{Max}\ (|x|, |y|)$;

ν_5: Il existe un nombre semi-réel $\rho \geqslant 0$ d'espèce $\xi \neq +$ tel que

$$z \in x+y \text{ et } |z'-z| \leqq \rho \,\mathrm{Max}\ (|x|, |y|) \Leftrightarrow z' \in x+y.$$

Nous avons aussi prouvé que tout hypergroupe canonique valué H vérifie les trois propriétés suivantes de nature purement algébrique:

f_1: Pour tout $x, y, z, t \in H$, $(x+y) \cap (z+t) \neq \varnothing$ implique $x+y \subseteq z+$ ou $z+t \subseteq x+y$.

f_2: Si $x \in x+y$, on a $x+y=x$

f_3: $x \in z-z$ et $y \notin z-z$ implique $x-x \subseteq y-y$.

Un hypergroupe canonique satisfaisant en outre aux conditions f_1 et f_2 est appelé *fortement canonique*. S'il remplit en plus toutes les trois f_1-f_3, il est appelé *supérieurement canonique*.

Un hypergroupe fortement canonique F possède, entre autres, les trois propriétés très importantes suivantes:

i) Si $x \in F$ est fixe, les sommes $x+y$, où y parcourt F, forment une partition de F, dite *partition* (mod. x).

ii) L'ensemble $\bar{x}=\lambda-x$ (où $\lambda \in F$), dite *hauteur* de x, est un sous-hypergroupe canonique de F et l'ensemble des hauteurs $F_0=\{\bar{x};\ x \in F\}$ est totalement ordonné par l'inclusion des sous-ensembles de F et a l'élément $\bar{o}=o-o=\{o\}$ comme l'élément minimum.

iii) Si $z \in x+y$, on a $x+y=z+(x-x)=z+(y-y)$.

À l'aide de ces propriétés nous avons démontré que, si on adjoint à l'ensemble F_0 des hauteurs toutes leurs intersections et, également, l'ensemble F lui-même, on obtient une chaîne Ω_0 de sous-hypergroupes canoniques de F, ayant le $\bar{o}=\{o\}$ comme élément minimum et l'application $|\cdot\ \cdot|: F \to \Omega_0$ faisant correspondre à tout $x \in F$ le plus petit élément de Ω_0 auquel x appartient, vérifie les propriétés $\nu_1-\nu_4$ de la valuation et, au lieu de ν_5, la suivante:

ν'_5: $z \in x+y$ et $|z'-z| \leqslant \mathrm{Max}\ (\bar{x}, \bar{y}) \Leftrightarrow z' \in x+y$.

Cette application $|\cdot\ \cdot|$ est appelé *hypervaluation naturelle* de F et nous démontrons que la fonction $d(x, y)=|x-y|$, si $x \neq y$ et $d(x, x)=0$ est une distance hyperultramétrique sur F. Nous sommes ainsi amenés à concidérer les hypergroupes canoniques hypervalués [5] que nous avons définis comme suit:

Un hypergroupe canonique H sera appelé *hypervalué* s'il existe une distance hyperultramétrique $d: H\times H\rightarrow\Omega$ (où Ω est un ensemble totalement ordonné et possédant un élément minimum o, dit zéro) qui satisfait aux conditions suivantes:

1°. Pour tout $x, y\in H$ la somme $x+y$ est un cercle de H par rapport à cette distance;

2°. Si $x\in x+y$, on a $x+y=x$ (cette condition coincïde avec la condition précédente f_2);

3°. Si $(x+a)\cap(y+a)=\varnothing$, on a $d(x+a, y+a)=d(x, y)$.

La distance $d(0, x)=|x|$ est appelé *hypervaluation* de x. Nous avons démontré que, pour qu'un hypergroupe canonique H soit hypervaluable, il faut et il suffit qu'il soit fortement canonique. L'hypervaluation naturelle d'un tel hypergroupe correspond à l'hypervaluation triviale dans le cas des groupes et est la moins fine possible (ce qui veut dire que, si $|\cdot\cdot|$ est l'hypervalution naturelle et $|\cdot\cdot|'$ une autre hypervaluation, alors $|a|'=|b|'\Rightarrow|a|=|b|$). D'autre part, à toute hypervalution $|\cdot\cdot|: H\rightarrow\Omega$ correspond la chaîne

$$\mathcal{G}=\{T\omega=\{x\in H;\ \ |x|\leqslant\omega\},\ \omega\in\Omega\}$$

de sous-hypergroupes canoniques de H, qui a les propriétés:

a) Pour tout $x\in H$ $\mathcal{G}$ contient l'intersection de tous les $T\in\mathcal{G}$ tels que $x\in T$,

b) $\mathcal{G}$ contient, de même, pour tout $x\in H$ l'intersection de tous les $\omega\in\Omega_0$ tels que $x\in\omega$, autrement dit $\mathcal{G}$ contient l'ensemble des valeurs de 'hypervaluation naturelle de H et

c) $\mathcal{G}$ est compatible avec toute la chaine Ω_0, c'est-à-dire la réunion $\mathcal{G}\cup\Omega_0$ de deux chaînes $\mathcal{G}$ et Ω_0 en est encore une.

Inversement, en partant d'une chaine de sous-hypergroupes canoniques ayant ces propriétés, on obtient toujours une hypervalution de H.

Supposons enfin que l'hypergroupe fortement canonique F consideré plus haut est supérieurement canonique et considérons l'ensemble $G_0=\{g_x=\{z\in F;\ \bar{z}\subseteq\bar{x}\}\ x\in F\}$. Nous avons démontré d'abord que G_0 est une chaine (par inclusion) de sous-hypergroupes canoniques de F et que la réunion $F_0\cup G_0$ de deux chaînes F_0 et G_0 est encore une chaîne. Ensuite, à l'aide de ces propriétés, nous trouvons que, si Ω_1 est l'ensemble des intersections de toutes les sous familles de $F_0\cup G_0$, l'application $|\cdot\cdot|: F\rightarrow\Omega_1$, définie comme auparavant, vérifie toutes les propriétés $\nu_1-\nu_5$ de la valuation, mais où maintenant à la place du nombre semi-réel ρ on a une fonction convenable. Cette application est appelé *hypervaluation naturelle stricte* de F. Nous arrivons ainsi à la définition d'un cas particulier des hypergroupes canoniques hypervalués. C'est l'hypergroupe canonique *strictement hypervalué* [6], H, qui, en plus des axiomes 1°—3° précédents, satisfait encore à l'axiome que voici:

4°. Pour tout $x, y\in H$ le cercle $x+y$ (en vertu de 1°) admet le rayon $\rho.\mathrm{Max}(|x|, |y|)$, où ρ est une application convenable croissante au sens large de Ω dans $\Omega\cup\hat{\Omega}^-$ telle que $\rho\cdot 0=0$, Ω^- étant l'ensemble des éléments d'espèce du complété—de KUREPA $\hat{\Omega}$ de Ω.

Nous avons démontré, que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un hypergroupe cannonique H soit strictement hypervaluable, est qu'il soit supérieurement canonique. Quant aux autres hypervaluations, elles s'obtiennent comme dans le cas précédent en partant d'une chaîne $\mathcal{G}$ de sous-hypergroupes canoniques de H ayant les propriétés a), b), c), l'ensemble Ω_0 étant maintenant remplacé par l'ensemble Ω_1.

Bibliographie

1. KRASNER M. *Introduction à la théorie des valuations,* Polycopie de son cours de la Faculté des Sciences de Paris (Paris VI). année scolaire 1970—71.
2. KRASNER M. *Approximation des corps valués complets de caractéristique $p \neq 0$ par ceux de caractéristique 0,* Colloque d'Algèbre Supérieure, C. B. R. M., Bruxelles, 19—22 décembre 1956.
3. MARTY F. Actes du Congrès des Math Scand. Stockholm 1935, p. 45.
4. MITTAS J. Comptes rendus, t. 269, série A', 1969, p. 485.
5. MITTAS J., Comptes rendus, t. 271, série A, 1970, p.4.
6. MITTAS J. Comptes rendus, t. 271, série A, 1970, p. 69.

(Reçu le 11. 06. 1971)

Salonique, chaire mathématique, Grèce