C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, p. 3-6 (4 janvier 1971). Série A

ALGÈBRE. — *Contributions à la théorie des hypergroupes, hyperanneaux et hypercorps hypervalués.* Note (*) de M. **Jean Mittas**, présentée par M. René Garnier.

1. Soit H un hypergroupe canonique hypervalué (1), donc fortement canonique (1). Soient $|a|$ la valeur d'un $a \in H$ et $\Delta(H) = \{|a|; a \in H\}$. Alors, *tout* $a \in H$, *qui n'est pas scalaire, est un point isolé de* H *par rapport à sa topologie induite par son hypervaluation.*

En effet, $a = a + o = C(a, \bar{a})$. Donc, si l'on considère l'hyperultramétrique induite par l'hypervaluation de H, il existe un cercle de centre a et de rayon $> o$, dont a est le seul élément. Il en résulte que $\{a\}$, si a n'est pas un scalaire, est un ensemble ouvert de la même topologie, donc, si W est l'ensemble des scalaires de H, H...W est ouvert et W est fermé. Par suite, si $\hat{W}$ est le complété de W (qui est un groupe abélien hypervalué), *le complété* $\hat{H}$ *de* H *est* $(H \ldots W) \cup \hat{W} = H \cup \hat{W}$. En particulier, *si* $W = \{o\}$, on a $\hat{W} = \{o\} = W$, d'où $\hat{H} = H$, autrement dit, H *est complet.*

2. Conservant les notations précédentes, on remarque que tout cercle $C(o, \rho)$ [où $C(a, \rho)$ est le cercle de centre $a \in H$ et de rayon ρ, où ρ est un élément d'espèce o ou — du complété de Kurepa $\hat{\Delta}(H)$ de $\Delta(H)$] de centre o est un sous-hypergroupe canonique de H et que, pour tout $a \in H$, on a $C(a, \rho) = a + C(o, \rho)$. Ainsi, comme dans le cas des groupes hypervalués, les diviseurs D_ρ de H sont complètement définis par leur classe $C(o, \rho)$ de o. En plus, H/D_ρ peut être organisée en hypergroupe quotient $H/C(o, \rho)$, dont on sait déjà (2) qu'il est canonique (on peut, d'ailleurs, montrer que dans le cas présent, il l'est fortement). Mais, contrairement au cas des groupes hypervalués, ici les classes (mod D_ρ) ne sont pas toutes isométriques (et, même, n'ont pas la même cardinalité). En effet si $\rho > o$, $C(o, \rho)$ n'est pas un singleton, tandis que, si $a \in H$ est tel que $\bar{a} = a - a \supseteq C(o, \rho)$, on a $C(a, \rho) = \{a\}$.

Soit $r \in \Delta(H)$, $r \neq o$. Alors, ou bien $C(a, r) = \{a\}$ [ceci a lieu si $\bar{a} = a - a \supseteq C(o, r)$], ou bien (dans le cas contraire), $C(x, r^-) \rightarrow a + C(x, r^-)$ est une bijection de cercles de rayon r^- dans H. Il en résulte que les cercles $C(a, r) \neq \{a\}$ se décomposent en ensembles de cercles de rayon r^- ayant tous un même cardinal, qui sera noté $O_r(H)$.

Soit $S(a, r)$ la circonférence de centre $a \in H$ et de rayon $r \in \Delta(H)$ dans H. Alors on montre que, si $r, r' \in \Delta(H)$, on a, comme dans les groupes hypervalués,

$$S(o, r) + S(o, r') = S(o, \operatorname{Max}(r, r')) \quad \text{si } r \neq r',$$

$$S(o, r) + S(o, r) = \begin{cases} C(o, r^-) & \text{si } O_r(H) = 2, \\ C(o, r) & \text{si } O_r(H) > 2. \end{cases}$$

On peut faire la remarque suivante : Soit $V = \{S(o, r) ; r \in \Delta(H)\}$. V est une partition de H et la somme de deux classes de cette partition est encore une réunion de telles classes. Ainsi, on peut organiser V en hypergroupe, lequel est visiblement commutatif. On voit facilement qu'il est canonique et même satisfait à la condition f_1. Si, pour tout $r \in \Delta(H)$, on a $O_r(H) = 2$, il satisfait aussi à f_2, donc il est fortement canonique.

Soit Π la partition de H en cercles $C(a, |a|^-)$, où a parcourt H. C'est un analogue du diviseur multiplicatif Π_1- de norme 1^- des corps et hypercorps hypervalués [3]. D'ailleurs, si, pour tout $r \in \Delta(H)$, on a $O_r(H) = 2$, la partition V coïncide avec la partition Π. $\Sigma = H/\Pi$ est encore un hypergroupe fortement canonique.

3. Considérons une loi de composition externe αx (ou $x\alpha$) des éléments α d'un ensemble A avec les éléments x de H précédent. α sera dit un *opérateur de* H à gauche (resp. à droite) si :

(1) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ [resp. $(x+y)\alpha = x\alpha + y\alpha$];

(2) $|\alpha x|$(resp. $|x\alpha|$) ne dépend que de $|x|$ et en est une fonction monotone [si α satisfait seulement à la condition (1), on dira qu'il est un opérateur de l'hypergroupe abstrait H]. En particulier, si $\Delta(H)$ est contenu dans un presque-groupe [4] totalement ordonné $\Gamma \cup \{o\}$, l'opérateur α sera dit *parfait* si (2) est remplacé par la condition plus forte :

(2*) Il existe un élément $\|\alpha\|$ de $\Gamma \cup \{o\}$, dit *norme* de α, tel que $|\alpha x| = \|\alpha\|\,|x|$ (resp. $|x\alpha| = |x| . \|\alpha\|$).

Soit A un hyperanneau, et soit $|\ldots|$ une hypervaluation de son hypergroupe additif, ce qui implique que cet hypergroupe est fortement canonique (on va, d'ailleurs, appeler *hyperanneaux fortement canoniques* les hyperanneaux dont l'hypergroupe additif l'est). Si $a \in A$, appelons a_g (resp. a_d) les opérateurs à gauche (resp. à droite) de l'hypergroupe additif abstrait de A tels que, pour tout $x \in A$, on ait $a_g x = ax$(resp. $xa_d = xa$). On dira que $|\ldots|$ est une *hypervaluation de l'hyperanneau* A si, pour tout $a \in A$, a_g et a_d sont des opérateurs gauche (resp. droit) non seulement de l'hypergroupe additif abstrait de A, mais du même hypergroupe hypervalué par $|\ldots|$.

Théorème 1. — *Si* A *est un hyperanneau possédant une hypervaluation* $|\ldots|$ (auquel cas, il est dit un hyperanneau *hyperultramétrique*), *il est ou bien autoannulant* ($A^2 = o$) *ou bien sans diviseurs de zéro.*

Si $\gamma \in \Gamma$, $|a|^* = |a|\gamma$ et $^*|a| = \gamma|a|$ sont des hypervaluations de l'hyperanneau A équivalentes à $|a|$ (c'est-à-dire y induisant des hyperultramétriques équivalentes). Or, si $A^2 \neq A$, on peut trouver un $\gamma \in \Gamma$ tel que $|a|^* = \|a_g\|$. Cette hypervaluation $|\ldots|^*$ satisfait, comme on peut montrer [5], aux conditions suivantes :

1° $|a|^* = o \Leftrightarrow a = o$;

2° $|a+b|^* \leq \operatorname{Max}(|a|^*, |b|^*)$;

3° $|ab|^* = |a|^*|b|^*$.

A muni d'une telle hypervaluation $|\ldots|^*$ sera dit hyperanneau *hypervalué*.

On voit facilement (en particulier, en utilisant l'alinéa 2 de la présente Note) que, comme dans le cas des anneaux hypervalués, on a

$$cS(a, r) \subseteq S(ca, |c|r), \qquad S(a, r)c \subseteq S(ac, r|c|),$$
$$cC(a, \rho) \subseteq C(ca, |c|\rho), \qquad C(a, \rho)c \subseteq C(ac, \rho|c|),$$
$$S(o, r)\,S(o, r') \subseteq S(o, rr').$$

Ceci montre, en particulier, qu'on peut définir sur l'ensemble V des circonférences $S(o, r)$ $[r \in \Delta(A)]$, en plus de structure d'hypergroupe canonique additif satisfaisant à la condition f_1, une loi de multiplication, qui peut, d'ailleurs, être identifiée avec celle de $\Delta(A) \subseteq \Gamma \cup \{o\}$ par l'application $\eta : S(o, r) \to r$. Mais, en général, cette multiplication n'est pas distributive par rapport à l'addition. L'application η précédente définit par transport sur $\Delta(A)$, en plus de sa multiplication, une addition d'hypergroupe commutatif canonique.

L'hypervaluation $|\ldots|$ de A prenant ses valeurs dans un presque-groupe $\Gamma \cup \{o\}$, on peut y définir la distance multiplicative

$$d_m(x, y) = \frac{d(x, y)}{\mathrm{Max}(|x|, |y|)}$$

si l'on n'a pas $x = y = o$,

$$d_m(o, o) = o$$

et définir, à l'aide de cette distance, les diviseurs multiplicatifs Π_ρ, $o \leqq \rho < 1$ par la condition $x \equiv y(\Pi_\rho) \Leftrightarrow d_m(x, y) \leqq \rho$. Et, dans ce cas, Π coïncide effectivement avec Π_{1-}.

4. Soit A un hyperanneau sans diviseurs de zéro qui n'est pas un anneau. Alors, o *est l'unique scalaire de* A. En particulier, si A est hypervalué, il est discret, donc complet.

Supposons maintenant que A est sans diviseurs de zéro et fortement canonique. Alors, il a des propriétés supplémentaires suivantes :

(1) *Parmi les hauteurs* $\bar{x} = x - x$ *des* $x \in A^* = A \ldots \{o\}$ *il n'y a pas de plus petite, ce qui implique que* A *est infini.*

(2) *Toutes les hauteurs* $\bar{x} = x - x$ *des* $x \in A^*$ *sont des sous-ensembles de* A *d'une même cardinalité* (qui est aussi infinie).

Théorème 2. — A *peut être plongé dans un hypercorps* K *de façon que tout* $a \in K$ *puisse être mis à la fois sous la forme* ab^{-1} *et* $b'^{-1}a'$, *où* a, a', b, b' *sont* $\in A$ *et* $b \neq o$, $b' \neq o$ (un tel hypercorps K sera dit *hypercorps de fractions* de A).

[On montre, d'ailleurs, facilement, que si un hyperanneau fortement canonique A possède un hypercorps de fractions, ce dernier est aussi fortement canonique.]

Supposons que A soit, en plus, unitaire. Alors, on a :

(3) *Si parmi les hauteurs* $\bar{x} = x - x$ *des* $x \in A$ *il y en a une maximale, elle est nécessairement* $= \bar{1} = 1 - 1$.

(4) *Si tout* $x \in A$ *tel que* $\bar{x} \subset \bar{1}$ *est inversible,* A *est un hypercorps.*

5. Supposons que K soit un hypercorps fortement canonique. Alors, on a les théorèmes suivants :

Théorème 3. — *Si* K *est un hypercorps fortement canonique, son hypergroupe additif satisfait aussi à la condition* f_3 *stricte : Si* $x, y, z \in K$ *sont tels que* $x \in \bar{z} = z - z$ *et* $y \notin \bar{z}$, *on a* $\bar{x} = x - x \subset \bar{y} = y - y$ [$\subset$ signifie l'inclusion stricte].

Soit $\mathfrak{H} = \{\bar{x}; x \in K\}$. On peut montrer que

$$\bar{x} \star \bar{y} = \bar{x}y = x\bar{y} = \overline{xy}$$

ne dépend que des $\bar{x}, \bar{y} \in \mathfrak{H}$ et pas du choix des $x, y \in K$. En effet, si $\bar{x} = \bar{x}'$, on a $\bar{x}y = \bar{x}'y$ et si $\bar{y} = \bar{y}'$, on a $x'\bar{y} = x'\bar{y}'$, d'où, puisque

$$\bar{x}'y = (x' - x')\,y = x'y - x'y = x'(y - y) = x'\bar{y},$$

on a $\bar{x}y = x'\bar{y}' = \bar{x}'y'$. Ainsi $(\bar{x}, \bar{y}) \to \bar{x} \star \bar{y}$ est une loi de composition sur $\mathfrak{H}$, qui est visiblement associative [car $\bar{x} \star (\bar{y} \star \bar{z})$ et $(\bar{x} \star \bar{y}) \star \bar{z}$ sont égaux tous les deux à $\overline{xyz}$]. $\bar{0} = 0 - 0 = \{0\}$ est bilatéralement absorbant pour cette loi, $1 = 1 - 1$ est un élément neutre et, si $x \neq 0$, $\overline{x^{-1}}$ est l'inverse de $\bar{x}$. Ainsi $\mathfrak{H}$ est un presque-groupe par rapport à cette loi.

Théorème 4. — $|a| = \bar{a}$ *est une hypervaluation de* K *à l'aide du presque-groupe* $(\mathfrak{H}, \star)$. *Cette hypervaluation de* K *est la moins fine possible* [autrement dit, si $|\ldots|' : K \to \Gamma \cup \{0\}$ est une autre hypervaluation de K, on a $|a|' = |b|' \Rightarrow |a| = |b|$].

(*) Séance du 9 décembre 1970.

(1) I. Mittas, *Comptes rendus*, 271, série A, 1970, p. 4.

(2) I. Mittas, *Comptes rendus*, 269, série A, 1969, p. 485.

(3) M. Krasner, *Approximation des corps valués complets de caractéristique* $p \neq 0$ *par ceux de caractéristique* 0, Colloque d'Algèbre supérieure, C. B. R. M., Bruxelles, 19-22 décembre 1956.

(4) On appellera *presque-groupe* un demi-groupe D, où il existe un élément bilatéralement absorbant 0 et qui est tel que $D^* = D \ldots \{0\}$ soit un groupe. Ce presque-groupe sera dit *totalement ordonné* s'il est muni d'un ordre $a < b$ tel que 0 soit le plus petit élément par rapport à cet ordre et que, si $\gamma \in D^*$, $a < b$ implique $a\gamma < b\gamma$ et $\gamma a < \gamma b$.

(5) La démonstration est analogue à celle qui a été faite dans le cas des anneaux par M. Krasner et qu'on ne trouve actuellement que dans la polycopie de son cours de la Faculté des Sciences de Paris (Paris VI) : *Introduction à la théorie des valuations*, 1er semestre de l'année scolaire 1970-1971. (La démonstration pour le cas de Γ commutatif se trouve dans la polycopie du même cours de l'année 1965-1966.)

(85, rue Kyprou, Athènes, 804 Grèce).

183111. — Imp. Gauthier-Villars. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.