BULL. MATH. de la Soc. Sci. Math. de la R. S. de Roumanie
Tome 15 (63), nr. 3, 1971

Στον αγαπητό Χρήστο Μασούρο,
με συγχ[illegible] [illegible]
και [illegible] [illegible]
με πολλή εκτίμηση

17-6-86

CERTAINS HYPERCORPS ET HYPERANNEAUX DÉFINIS À PARTIR DE CORPS ET ANNEAUX ORDONNÉS

PAR

JEAN MITTAS (Grèce)

Comme il est visible, dans tout corps k possédant des valuations ou des pseudo-valuations [2], [7], la relation binaire π telle que $a \equiv b\ (\pi)$ si, et seulement si, $|a| = |b|$ est une relation d'équivalence compatible avec la multiplication du corps. Par conséquent, si $C(a)$ est la classe de k à laquelle appartient son élément a, on a $C(a)\ C(b) = C(ab)$. D'autre part, l'ensemble K/π des classes est totalement ordonné moyennant la valuation ou pseudo-valuation comme suit : $C(a) < C(b)$, si, et seulement si, $|a| < |b|$. Quant à la somme $C(a) + C(b)$ on a $C(a) + C(b) = \{x + y \in K : |x| = |a|,\ |y| = |b|\}$. Nous verrons dans la suite que, si nous considérons comme corps k celui des nombres complexes, ou réels, nous obtenons des hypercorps [1], [3] qui ne sont pas isomorphes aux hypercorps résiduels d'un corps hypervalué par congruence multiplicative [1], [4], [6]. De cette manière même nous arrivons à la définition des hypercongruences arithmétiques, analogues aux congruences arithmétiques, grâce auxquelles nous parvenons à construire des hyperanneaux [3] et des hypercorps finis.

Soit, en effet, k le corps $\mathfrak{C}$ des nombres complexes. Vu la propriété générale suivante : $||a| - |b|| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|$ des corps pseudo-valués, il est facile de démontrer que $C(a) + C(b) = \{z \in \mathfrak{C} : ||a| - |b|| \leqslant \leqslant |a| + |b|\}$, d'où il vient $C(a) + C(b) = \bigcup\limits_{z \in \Gamma} C(z)$, où Γ est, évidemment, la couronne du plan complexe qui est bornée par les circonférences $S(0,\ ||a| - |b||) = C(||a| - |b||)$ et $S(0,\ |a| + |b|) = C(|a| + |b|)$. Ou, en vertu de l'ordre total de l'ensemble des classes (mod. π), $C(a) + {} + C(b) = \bigcup\limits_{C(||a| - |b||) \leqslant C(z) \leqslant C(||a| + |b||)} C(z)$. Il est clair que cette propriété n'est pas valable ~~ou~~ dans tout corps pseudo-valué, comme cela résulte du cas du corps R des nombres réels. En effet, dans ce corps, pour tout $a \in R$ on a $C(a) = \{-a, a\}$ et, donc, $C(a) + C(b) = {} = \{-a, a\} + \{-b, b\} = \{-a -b,\ a - b,\ -a + b,\ a + b\} = \{-a -b,\ a + b\} \cup \{a - b,\ -a + b\} = C(a + b) \cup C(a - b) = C(|a| + |b|) \cup {} \cup C(||a| - |b||)$. Cette dernière propriété est évidemment valable dans tout corps des nombres réels (sous-corps de R).

Nous voyons ainsi que nous pouvons organiser l'ensemble-quotient $\mathfrak{C}/\pi$ en structure par l'hyperopération $C(a) \dot{+} C(b) = (C(a) +$

$+C(b))/\pi=\{C(z)\in\mathfrak{C}/\pi:\ C(||a|-|b||)\leqslant C(z)\leqslant C(|a|+|b|)=[C(||a|-|b||),\ C(|a|+|b|)]$ — addition — et par l'opération $C(a)\cdot C(b)=C(a)\,C(b)=C(ab)$ — multiplication. Nous remarquons encore que entre l'ensemble des classes $\mathfrak{C}/\pi$ et l'ensemble R_+ des nombres réels non négatifs il existe la correspondance biunivoque suivante : $\mathfrak{C}/\pi\ni C(a)\to|a|\in R_+$. Il en résulte que nous pouvons aussi organiser l'ensemble R_+ en une nouvelle structure par l'hyperopération — additions — $a\ast b=[|1a-b|, a+b]$ et par la multiplication usuelle ab comme opération.

Proposition 1. *La structure* $(\mathfrak{C}/\pi, \dot{+}, .)$ *est un hypercorps commutatif.*

Démonstration. Nous vérifions tous les axiomes de l'hypercorps. Ainsi :

I. *L'ensemble* $\mathfrak{C}/\pi$ *par rapport à l'addition est un hypergroupe canonique* [5]. En effet :

1. L'addition $C(a)+C(b)$ est associative, comme il résulte du fait que l'addition des sous-ensembles de $\mathfrak{C}$ l'est, donc $[C(a)+C(b)]+C(c)=C(a)+[(C(b)+C(c)]$, et que ces sommes sont des réunions des classes (mod. π). En effet, si on note $\Gamma=[||a|-|b|, |a|+|b|]$, on a $[C(a)+C(b)]+C(c)=[\bigcup\limits_{|z|\in\Gamma}C(z)]+C(c)=\bigcup\limits_{|z|\in\Gamma}[C(z)+C(c)]=\bigcup\limits_{|w|\in\Delta}C(w)$, où évidemment $\Delta=[0,\ |a|+|b|+|c|]$, si $|c|\in\Gamma$ et $\Delta=[||a|-|b||-|c||,\ |a|+|b|+|c|]$, si $|c|\notin\Gamma$.

2. L'addition $C(a)\dot{+}C(b)$ est commutative, car l'addition des sous-ensembles de $\mathfrak{C}$ l'est, donc $C(a)+C(b)=C(b)+C(a)$.

3. La classe $C(0)=\{0\}$ est un élément neutre pour l'addition : $C(0)\dot{+}C(a)=[C(||a|-|0||),\ C(|a|+|0||)]=\{C(|a|)\}=\{C(a)\}$.

4. Pour tout $a\in\mathfrak{C}$ la classe $C(a)$ elle même est l'élément opposé unique de la classe $C(a)$. En effet, $C(a)\dot{+}C(a)=\{C(z):0\leqslant|z|\leqslant|a|+|a|\}$, donc $C(0)\in C(a)\dot{+}C(a)$.

5. $C(c)\in C(a)\dot{+}C(b)\Rightarrow C(b)\in C(c)\dot{+}[-C(a)]=C(c)\dot{+}C(a)$.

Évidemment, cela résulte des implications :
$||a|-|b||\leqslant|c|\leqslant|a|+|b|\Rightarrow-|c|\leqslant|a|-|b|\leqslant|c|\leqslant|a|+|b|\Rightarrow-|c|-|a|\leqslant-|b|\leqslant|c|-|a|\leqslant|b|\Rightarrow||c|-|a||\leqslant|b|\leqslant|c|+|a|$.

II. *La classe* $C(0)$, *c'est-à-dire le zéro de l'hypergroupe canonique, est visiblement un élément bilateralement absorbant par rapport à la multiplication et son complément* $\mathfrak{C}/\pi\ \ \{C(0)\}$ *est un groupe multiplicatif commutatif*, comme il est aussi clair.

III. *La distributivité* $[C(a)\dot{+}C(b)]\,C(c)=C(a)\,C(c)\dot{+}C(b)\,C(c)$ *est aussi vérifiée*, car on a d'une part $[C(a)+C(b)]\,C(c)\subseteq C(a)\,C(c)+C(b)\,C(c)$ et d'autre part $[C(a)+C(b)]\,c=\{z\in\mathfrak{C}:||a|-|b||\leqslant|z|\leqslant|a|+|b|\}\ c=\{zc:||a|-|b||\leqslant|z|\leqslant|a|+|b|\}=\{w\in\mathfrak{C}:||ac|-|bc||\leqslant w||\leqslant|ac|+|bc|\}=C(ac)+C(bc)=C(a)\,C(c)+C(b)\,C(c)$, donc $[C(a)+C(b)]\,C(c)=C(a)\,C(c)+C(b)\,C(c)$.

De ce qui précéde nous concluons le corollaire important suivant :

Corollaire 1. *La structure* $(R_+, \ast, .)$ *est un hypercorps isomorphe à l'hypercorps* $(\mathfrak{C}/\pi, \dot{+}, .)$.

Remarque 1. Il est utile pour la suite de remarquer que l'on peut démontrer directement ce corollaire. La vérification en effet des axiomes d'un hypercorps par la structure $(R_+, \divideontimes, .)$ a lieu facilement, sauf l'associativité $(a \divideontimes b) \divideontimes c = a \divideontimes (b \divideontimes c)$ de l'addition, que nous réalisons par le calcul des sous-ensembles $(a \divideontimes b) \divideontimes c \subset a \divideontimes (b \divideontimes c)$, dependant évidemment de l'ordre des éléments a, b, c. Nous distinguons pour cela les cas suivants : $a = b < c$, $a = b > c$, $a < b = c$, $a > b = c$, $a < b < c$, $a < c < b$, $b < c < a$, $b < a < c$, $c < a < b$, $c < b < a$, qui, en raison de l'équivalence $(a \divideontimes b) \divideontimes c = a \divideontimes (b \divideontimes c) \Leftrightarrow (c \divideontimes b) \divideontimes a = c \divideontimes (a \divideontimes b)$, due à la commutativité de l'addition, se limitent aux cas : $a = b < c$, $a = b > c$, $a < b < c$, $a < c < b$, $b < a < c$.

Corollaire 2. *L'hypercorps $(R_+, \divideontimes, .)$ est de caractéristique 1.* [3]

En effet, $1 \divideontimes (1 \divideontimes 1) = 1 \divideontimes [0, 2] = \bigcup_{t \in [0,2]} (1 \divideontimes t) = [0, 3]$, c'est-à-dire $0 \in 1 \divideontimes (1 \divideontimes 1)$.

Corollaire 3. *L'hypercorps $(R_+, \divideontimes, .)$ n'est pas fortement canonique, donc n'est pas hypervaluable* [4], [5], [6].

En effet, la condition f_1 pour qu'un hypercorps $(K, +, .)$ soit fortement canonique [5], c'est-à-dire la condition : si $(x + y) \cap (z + t) \neq \neq \emptyset$, on a $x + y \subseteq z + t$ ou $z + t \subseteq x + y$, n'a pas toujours lieu, comme le montre l'exemple : $(3 \divideontimes 5) \cap (2 \divideontimes 9) = [2, 8] \cap [7, 11] \neq \emptyset$ mais on n'a ni $3 \divideontimes 5 \subseteq 2 \divideontimes 9$, ni $2 \divideontimes 9 \subseteq 3 \divideontimes 5$.

Remarque 2. Les deux autres conditions f_2, f_3 pour qu'un hypercorps $(K, +, .)$ soit supérieurement canonique (c'est-à-dire que son hypergroupe additif l'est [5], à savoir : $f_2 : x \in x + y$ implique $x + y = x$ et f_3 : si $x \in z - z$ et $y \notin z - z$ on a $\bar{x} = x - x \subseteq y - y = \bar{y}$, sont satisfaites par l'hypercorps considéré $(R_+, \divideontimes, .)$.

Considérons maintenant comme hypercorps k l'ensemble R des nombres réels. Pour les classes (mod. π) de R, nous avons vu que $C(a) = = \{-a, a\}$, $C(a) + C(b) = C(a - b) \cup C(a + b)$, $C(a)\, C(b) = C(ab)$ et par conséquent nous pouvons organiser l'ensemble R/π en structure par l'hyperopération $C(a) \dot{+} C(b) = (C(a) + C(b))/\pi = \{C(a - b), C(a + b)\}$ comme addition et par l'opération $C(a) \cdot C(b) = C(a)\, C(b) = C(ab)$ comme multiplication. Nous voyons encore que entre les ensembles R/π et R_+, comme auparavant entre $\mathfrak{C}/\pi$ et R_+, il existe la correspondance biunivoque $R/\pi \ni C(a) \leftrightarrow |a| \in R_+$, d'où il résulte que nous pouvons aussi organiser l'ensemble R_+ en une autre structure par l'hyperopération $a \circ b = \{|a - b|, a + b\}$ comme addition et par la multiplication usuelle ab comme multiplication.

Proposition 2. *La structure $(R/\pi, \dot{+}, .)$ est aussi un hypercorps commutatif.*

Démonstration. Nous vérifions facilement, comme dans le cas précédent, que la structure additive $(R/\pi, \dot{+})$ est un hypergroupe canonique et il est clair que la structure multiplicative $(R/\pi \ldots \{C(0)\} .)$ est un groupe commutatif et que la classe $C(0)$ est un élément bilatéralement absorbant pour la multiplication. Quant à la distributivité de l'addition par rapport à la multiplication on a directement $[C(a)\dot{+}C(b)]\times$ $\times C(c) = \{C(a-b), C(a+b)\}\, C(c) = \{C(ac-bc), C(ac+bc)\} = C(ac)\,\dot{+}$ $\dot{+}\, C(bc) = C(c) \dot{+} C(b)\, C(c)$.

Comme auparavant, nous avons le

Corollaire 4. *La structure* $(R_+, \circ, .)$ *est un hypercorps isomorphe à l'hypercorps* $(R/\pi, \dot{+}, .)$.

Remarque 3. Il est facile de démontrer directement le corollaire ci-dessus par la vérification simple des axiomes de l'hypercorps. En ce qui concerne l'associativité de l'addition voir Remarque 1.

Corollaire 5. *L'hypercorps* $\circ(R_+, \circ, .)$ *est de caractéristique* 2. En effet, $1 \circ 1 = 2 \circ 1 + 0 \cdot (1 \circ 1) = \{0, 2\}$, donc $0 \in 2.1 = 1 \circ 1$.

Corollaire 6. *L'hypercorps* $(R_+, \circ, .)$ *n'est pas fortement canonique, donc n'est pas hypervaluable.*

Nous vérifions en effet que, comme dans le cas de $(R_+, \divideontimes, .)$, la condition f_1 n'est pas satisfaite : $1 \circ 2 = \{1, 3\}, 1 \circ 4 = \{3, 5\}$, donc $(1 \circ 2) \cap \cap (1 \circ 4) \neq \emptyset$, mais on n'a ni $1 \circ 2 \subseteq 1 \circ 4$, ni $1 \circ 4 \subseteq 1 \circ 2$.

Remarque 4. On voit facilement que, comme dans l'hypercorps $(R_+, \divideontimes, .)$, les deux autres conditions f_2 et f_3 sont vérifiées.

De ce qui précéde, il résulte que, ayant comme point de départ n'importe quel corps totalement ordonnée $(k, +, ., <)$ nous pouvons définir dans l'ensemble k_+ de ses éléments non négatifs les deux hyperopérations $a \divideontimes b$, $a \circ b$ comme ci-dessus dans R_+ et démontrer que :

Proposition 3. *Les structures* $(k_+, \divideontimes, .)$, $(k_+, \circ, .)$ *sont des hypercorps (pas forcément commutatifs).*

De la définition des hyperopérations $a \divideontimes b$, $a \circ b$ il résulte que pour tout $a, b \in k_+$ on a $|a - b| \leqslant a \divideontimes b \leqslant a + b$ et $|a - b \leqslant a \circ b \leqslant$ $\leqslant a + b$ (où, si A, B sont des parties non vides d'un ensemble totalement ordonné, $A < B$, respect. $A \leqslant B$ signifie que pour tout $a \in A$, $b \in B$ on a $a < b$, respect. $a \leqslant b$. Si $B = \{b\}$, respect. $A = \{a\}$, on écrit $A < b$ au lieu de $A < \{b\}$, respect. $a < B$ au lieu de $\{a\} < B$ et on a des choses analogues pour la relation $\leqslant$). D'autre part il existe des $c \in a \divideontimes b$, respect. $c \in a \circ b$ tels que $c > \max\{a, b\}$. Ainsi nous sommes arrivés à poser la

Définition 1. Si $(K, T, .)$ est un hypercorps et $(k, +, ., <)$ est un corps totalement ordonné, on appelle *pseudo-valuation* de K à valeurs dans k, toute applications w de K dans k telle que les conditions suivantes soient satisfaites :

w_1. $w(a) \geqslant 0$; $w(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$;

w_2. $w(aTb) \leqslant w(a) + w(b)$;

w_3. Il existe des $a, b \in K$ et des $c \in aTb$ tels que l'on ait $|c| >$ $> \max\{|a|, |b|\}$;

w_4. $w(ab) = w(a) \, . \, w(b)$.

Dans ce cas, K est appelé hypercorps *pseudo-valué*. En particulier, les hypercorps $(k_+, \divideontimes, .)$ et $(k_+, \circ, .)$ sont pseudo-valués à valeurs dans leur corps de départ $(k, +, \circ, <)$. Évidemment la pseudo-valuation dans chacun de ces cas n'est d'autre que l'application identique correspondante. Nous remarquons encore que ces deux hypercorps vérifient la propriété : $a \neq b \Rightarrow aTz \neq bTz$, où T est respectivement l'hyperopération $*$ ou $\circ$. Tout ce qui précéde nous amène à poser la définition suivante :

Définition 2. On appelle hypercorps totalement ordonné à éléments auto-opposés une structure $(H, +, ., <)$ dont le support H est muni d'une hyperopération $a + b$-addition — d'nue opération ab-multiplication — et d'une relation $<$, telles que les axiomes suivants soient satisfaits :

I. *H est un hypercorps par rapport à son addition et à sa multiplication*;

II. *$a < b$ est un ordre total*;

III. 1. *Pour tout a, $b \in H$ la somme $a + b$ est une partie de H possédant des éléments extrêmes*;

2. $1 = -1$;

IV. 1. *Pour tout a, b, $z \in H$, $a < b \Rightarrow \max (a + z) < \max (b + z)$.*

2. *Pour tout a, b, $\in H$, $a < b$ et $0 \neq z \Rightarrow az < bz$ et $za < zb$.*

Si l'on remplace l'axiome I par l'axiome plus général

I'. *H est par rapport à l'addition $a + b$ et à la multiplication ab un hyperanneau, alors on parle d'hyperanneau totalement ordonné.*

Remarque 5. Des axiomes III, IV 1 résulte que tout hypercorps totalement ordonné vérifie la propriété : *Quels que soient a, b, z dans H on a : $a \neq b \Rightarrow a + z \neq b + z$.*[1]) De même, on a : $0 \neq a \Rightarrow 0 < a$.

De la définition précédente résulte que les hypercorps ci-dessus, $(k_+, *, . <)$, $(k_+, \circ, ., <)$ sont totalement ordonnés.

Remarques 6. a) Si nous définissons sur l'ensemble N des entiers rationnels non négatifs l'hyperopération $a \mathbin{\bar{\circ}} b$ comme dans R_+, la structure résultante $(N, \circ ., <)$ est évidemment un hyperanneau totalement ordonné, intègre et avec unité, donc un hyperdomain totalement ordonné, appelé *hyperdomain des entiers rationnels non négatifs.*

b). L'hypercorps des fractions de l'hyperdomain $(N, \dot{\circ}, ., <)$ n'est d'autre que l'hypercorps totalement ordonné $(Q_+, \circ, ., <)$, où le support Q_+ est l'ensemble des nombres rationnels non négatifs, appelé *hypercorps d'hypercomposés finis des nombres rationnels non négatifs.* Evidemment, on, a encore la structure $(Q_+, *, \circ, <)$ appelée *hypercorps d'hypercomposés infinis des nombres rationnels non négatifs.* De même nous avons *l'hypercorps d'hypercomposés finis, respect. infinis, des nombres réels non négatifs* et, généralement, nous appelerons les hypercorps $(k_+, \circ, ., <)$, $(k_+, *, ., <)$ *hypercorps d'hypercomposés finis. respectiv. infinis, des éléments non négatifs* du corps totalement ordonné $(k_+, +, ., <)$.

c). Il est facile de voir que l'hypercorps $(k_+, *, .)$ n'a pas de sous-hypercorps [3]. Par conséquent, l'hypercorps $(Q_+, * .)$ n'est pas un sous-hypercorps de l'hypercorps $(R_+, *, .)$. Par contre, $(Q_+, \circ, .)$ est un sous-hypercorps de $(R_+, \circ, .)$, même il est son sous-hypercorps premier.

Soient l'hyperdomain $(N, \circ, .)$ et un $p \in N$ fixé. Il est clair que l'ensemble $N_p = \{z \in N : z = kp,\ k \in N\}$ des multiples de p est un hy-

[1]). Nous rappelons qu'il existe des hypercorps faiblement ordonnés [6], oü l'implication $a \neq b \Rightarrow a + x \neq b + z$ n'a pas toujours lieu.

peridéal de N et, par conséquent, le quotient N/N_p est un hyperanneau [3]. Évidemment, pour tout $a \in Z$ la classe (mod. N_p) à laquelle appartient l'élément $a \in Z$ est $C(a) = a \circ N_p$ et on a $a \equiv b$ (mod N_p) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (a \circ b) \cap N_p \neq \emptyset \Leftrightarrow a + b \in N_p$ ou $|a - b| \in N_p$, c'est-à-dire $a + b =$ $=$ mult. p ou $a - b =$ mult. p. Nous nous sommes amenés ainsi de considérer dans l'ensemble Z des entiers rationnels la relation H_p telle que $a \equiv b(H_p)$ si, et seulement si, $a + b =$ mult. p ou $a - b =$ mult. p, donc, si et seulement si, $a - \varepsilon b \equiv 0\ (H_p)$, où $\varepsilon^2 = 1$, pour laquelle nous avons la

Proposition 3. *Pour tout $p \in N$ la relation H_p est une relation d'équivalence dans Z, compatible par rapport à la multiplication et par rapport à l'addition, telle que, si $C_p(a)$ est la classe de Z qui contient $a \in Z$, on a $C_p(a) + C_p(b) = C_p(a + b) \cup C_p(a - b)$.*

La relation H_p sera appelée *hypercongruence arithmétique et* notée [mod. p]. (Les congruences arithmétiques habituelles seront notées (mod. p)).

Démonstration. La relation H_p est évidemment reflexive et symétrique. Mais elle est encore transitive. En effet, $a \equiv b$ [mod. p] et $b \equiv c$[mod. p] implique $a - \varepsilon_1 b \equiv 0$[mod. p] et $b - \varepsilon_2 c \equiv 0$ [mod p] où $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$, donc $a - \varepsilon_1\varepsilon_2 c \equiv 0$ [mod. p] et, par conséquent, $a \equiv$ $\equiv b$ [mod. p], car $(\varepsilon_1\varepsilon_2)^2 = \varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 = 1$.

Ensuite on a : $x \in C_p(a) \Rightarrow x - \varepsilon a =$mult. p, donc $C_p(a) = \{x \in Z : x =$ $= k_p - \varepsilon a,\ k \in z\}$ d'où visiblement il résulte $C_p(a)\ C_p(b) \subseteq C_p(ab)$. L'hypercongruence donc [mod. p] est compatible par rapport à la multiplication. Quant à l'addition, on a

$$C_p(a) + C_p(b) = \{x + y \in Z : x \in C_p(a), y \in C_p(b)\} =$$

$$= \{z \in Z : x = kp - \varepsilon(a + b) \text{ ou } x = lp - \varepsilon(a - b), k, l \in Z\} =$$

$$= \{z_1 \in Z : x = kp - \varepsilon(a + b), k \in Z\} \cup \{z_2 \in z : z_2 =$$

$$= lp - \varepsilon(a - b), l \in Z\} = C_p(a + b) \cup C_p(a - b).$$

Proposition 4. *L'ensemble quotient Z/H_p est un hyperanneau isomorphe à l'hyperanneau N/N_p.*

Démonstration. Nous remarquons d'abord que, si $C(a)$ est la classe (mod. N_p) dans N à laquelle appartient $a \in Z$, alors $C(a) \circ C(b) =$ $= (a \circ N_p) \circ (b \circ N_p) = (a \circ b) \circ N_p = \{a + b, |a - b|\} \circ N_p = C(a + b) \cup$ $\cup C(|a - b|)$ et $C(a)\ C(b) \subseteq C(ab)$. Donc l'hyperopération et l'opération de l'hyperanneau-quotient N/N_p respectivement sont [3] $C(a) \circ C(b) =$ $= \{C(a + b), C|a - b|\}$ et $C(a) \cdot C(b) = C(ab)$. D'autre part Z/H_p est une structure additivo-multiplicative par rapport à l'addition $C_p(a) +$ $+ C_p(b) = \{C_p(a + b), C_p(a - b)\}$ et à la multiplication $C_p(a) \cdot C_p(b) =$ $= C_p(ab)$. On voit encore que pour tout $a \in Z$, $-a \in C_p(a)$. Si donc nous considérons l'application $\varphi : N/N_p \to Z/H_p$ telle que $\varphi[C(a)] = C_p(a)$, nous remarquons qu'elle est une bijection de N/N_p sur Z/H_p et que

$\varphi[C(0)] = C_p(0)$, $\varphi[C(a) \circ C(b)] = \varphi\{C(a+b), C(|a-b|)\} = \{\varphi[C(a+b)],$ $\varphi[C(|a - b|)]\} = \{C_p(a + b), C_p(a - b)\} = C_p(a) + C_p(b) = \varphi[C(a)] +$

$\dotplus \varphi[C(b)]$ et $\varphi[C(a) \cdot C(b)] = \varphi[C_p(ab)] = C_p(ab) = C_p(a) \cdot C_p(b) = \varphi[C(a)] \cdot \varphi[C(b)]$. L'application, donc, φ est un isomorphisme de N/N_p sur Z/H_p et Z/H_p est bien un hyperanneau.

R e m a r q u e s 7. a) Si $p = 0$, on a $C_0(a) = \{-a, a\}$, $N_0 = \{0\}$ et $C(a) = \{a\}$. Donc l'hyperanneau Z/H_0 est isomorphe à l'hyperanneau $(N, \circ, .)$.

b) Si $p = 1$, alors $C_1(a) = Z$ et $N_1 = N$, donc Z/H_1 est isomorphe à l'hypernneau $\{0\}$ (cas trivial). Ainsi la proposition précédente et la remarque ci-dessus impliquent le

C o r o l l a i r e 7. *Pour tout $p \in N \ldots \{1\}$ l'hyperanneau Z/H_p est de caracteristique* 2.

Soit $a \in Z$. Si $a = kp + r$, $0 \leqslant r < p$, on a $a - r = \text{mult} \cdot p$, donc $a \equiv r$ [mod. p] et, par conséquent, $C_p(a) = C_p(r)$. De même, si $a = kp + r \in N$ et $0 \leqslant r < p$, alors $C(a) = C(r)$. D'autre part, pour tout $r \in N$, on a $r \equiv p - r$ [mod. N_p], donc $C(r) = C(p - r)$ et de même, $r \equiv p - r$ [mod. p], donc $C_p(r) = C_p(p - r)$. Il en résulte ainsi la

P r o p o s i t i o n 5. *Pour tout $p \in N \ldots \{0\}$ l'hyperanneau Z/H_p est fini ayant $\frac{p}{2} + 1$ ou $\frac{p-1}{2} + 1$ éléments, selon que p est pair ou impair.*

Soit l'hyperdomain (N, $\circ$, .).

P r o p o s i t i o n 6. *Tout hyperidéal de l'hyperanneau N est principal.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\mathfrak{M}$ un hyperidéal propre de N et soit $m \in \mathfrak{M}$ le plus petit des éléments différents de 0 de $\mathfrak{M}$. Évidemment tous les multiples de m appartiennent à $\mathfrak{M}$. Si $a \in \mathfrak{M}$ n'est pas un multiple de m. soit $a = lm + r$, $0 < r < m$, alors $a - lm = r \in \mathfrak{M}$, ce qui est inexact, car m est le plus petit élément différent de 0 de $\mathfrak{M}$. Donc on a $r = 0$, et $\mathfrak{M}$ est l'ensemble N_m des multiples de m, donc un hyperidéal principal de N.

C o r o l l a i r e 8. *L'hyperidéal N_p est maximal* [3] *si, et seulement si, p est premier.*

En effet, $N_p \subset N \Rightarrow p \in N_m \Rightarrow p = lm$, ce qui est impossible, si p est premier. Il en résulte le

C o r o l l a i r e 9. *L'hyperanneau-quotient N/N_p, donc de même l'hyperanneau Z/H_p, est un hypercorps si, et seulement si, p est premier.*

Enfin la construction d'hyperanneaux à partir de l'anneau Z des entiers rationnels par le procédé précédent, c'est-à-dire comme quotient de Z par hypercongruences arithmétiques, peut être généralisée dans n'importe quel anneau d'après la proposition suivante :

P r o p o s i t i o n 7. *Soient A un anneau et $\mathfrak{M}$ un idéal de A. La relation binaire $a \equiv b\ (H)$ si, et seulement si, $a - b \in \mathfrak{M}$ ou $a + b \in \mathfrak{M}$ est une relation d'équivalence dans A et l'ensemble des classes A/H est un hyperanneau.*

D é m o n s t r a t i o n. La relation H est évidemment reflexive et symétrique. Quant à la transitivité, on a : $a \equiv b\,(H)$ et $b \equiv c\,(H)$ impliquent ($a + b \in \mathfrak{M}$ ou $a - b \in \mathfrak{M}$) et ($b + c \in \mathfrak{M}$ ou $b - c \in \mathfrak{M}$) et si on a $a + b \in \mathfrak{M}$ et $b + c \in \mathfrak{M}$ respect. $b - c \in \mathfrak{M}$, alors $a - c \in \mathfrak{M}$, respect. $a + c \in \mathfrak{M}$, donc $a \equiv c\,(H)$. De même, si $a - b \in \mathfrak{M}$ et $b + c \in \mathfrak{M}$, respect. $b - c \in \mathfrak{M}$, alors $a + c \in \mathfrak{M}$, respect. $a - c \in \mathfrak{M}$, donc $a \equiv c\,(H)$ et, par conséquent, la transitivité est aussi valable. Ensuite soit $C\,(a)$ la classe de A pour la relation H qui contient $a \in A$. Évidemment on a $C\,(a) = (\mathfrak{M} + a) \cup (\mathfrak{M} - a)$ et, par conséquent, $C\,(a) + C\,(b) = (\mathfrak{M} + a) \cup (\mathfrak{M} - a) + (\mathfrak{M} + b) \cup (\mathfrak{M} - b) = [[(\mathfrak{M} + a) \cup (\mathfrak{M} - a)] + (\mathfrak{M} + b)] \cup [[(\mathfrak{M} + a) \cup (\mathfrak{M} - a)] + (\mathfrak{M} - b)] = [\mathfrak{M} + (a + b)] \cup [\mathfrak{M} - (a - b)] \cup [\mathfrak{M} + (a - b)] \cup [\mathfrak{M} - (a + b)] = C\,(a + b) \cup C(a - b)$ et $C\,(a)\,C\,(b) = [(\mathfrak{M} + a) \cup (\mathfrak{M} - a)]\,[(\mathfrak{M} + b) \cup (\mathfrak{M} - b)] \subseteq (\mathfrak{M} + ab) \cup (\mathfrak{M} - ab) = C\,(ab)$. Nous obtenons ainsi une structure additivo-multiplicative (A/H, $\dot{+}$, .) avec comme addition $C\,(a) \dot{+} C\,(b) = \{C\,(a + b),\ C\,(a - b)\}$ et comme multiplication $C\,(a) \cdot C\,(b) = C\,(ab)$ et nous démontrons sans peine qu'elle vérifie tous les axiomes d'un hyperanneau. Nous notons simplement que le zéro de l'hyperanneau est la classe $C\,(0)$ de zéro, qui n'est d'autre que l'idéal $\mathfrak{M}$ lui-meme et pour tout $a \in A$ l'opposé unique de la classe $C\,(a)$ est la classe $C\,(a)$ elle-même, ce qui entraîne le

C o r o l l a i r e 10. *Si $\mathfrak{M} \neq A$, l'hyperanneau A/H est de caractéristique* 2.

R e m a r q u e 8. Si $\mathfrak{M} = (0)$, alors pour tout $a \in A$ la classe $C\,(a)$ de A pour l'équivalence H est $\{-a,\ a\}$. Donc, en d'autres termes, l'ensemble $B = \{\{-a,\ a\} : a \in A\}$, défini à partir de n'importe quel anneau A, est un hyperanneau de caracteristique, évidemment, de même 2.

Reçu 31 V 1972

RÉFÉRENCES

1. KRASNER, M., *Approximation des corps valués complets de caractéristique* $p \neq 0$ *par ceux de caractéristique* 0. Actes du Colloque d'Algebre supérieure, C.B.R.M., Bruxelles, 19—22 Décembre 1956.
2. — *Introduction à la théorie des valuations.* Cours de la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, 1967.
3. MITTAS, J. *Hyperanneaux et certaines de leurs propriétés.* C. R. Acad. Sc. Paris, série A, 269, pp. 623—626, 13 Octobre 1969.
4. — *Contributions à la théorie des hypergroupes, hyperanneaux et hypercorps hypervalués.* C. R. Acad. Sc. Paris, série A 272, p.p. 3—4, 4 Janvier 1971.
5. — *Hypergroupes canoniques valués et hypervalués.* Mathematica Balkanica, 1, pp. 181—185, Beograd, 1971.
6. — Συμβολή εἰς τήν θεωρίαν τῶν διατεταγμένων καί διατιμημένων δομῶν (Διατριβή ἐπί ὑφηγεσία ὑποβληθεῖσα εἰς ΕΜΠ Ἀθῆνα, 1972).
7. SCHILLING, O. G., *Theory of valuations*, N. Y. 1950.