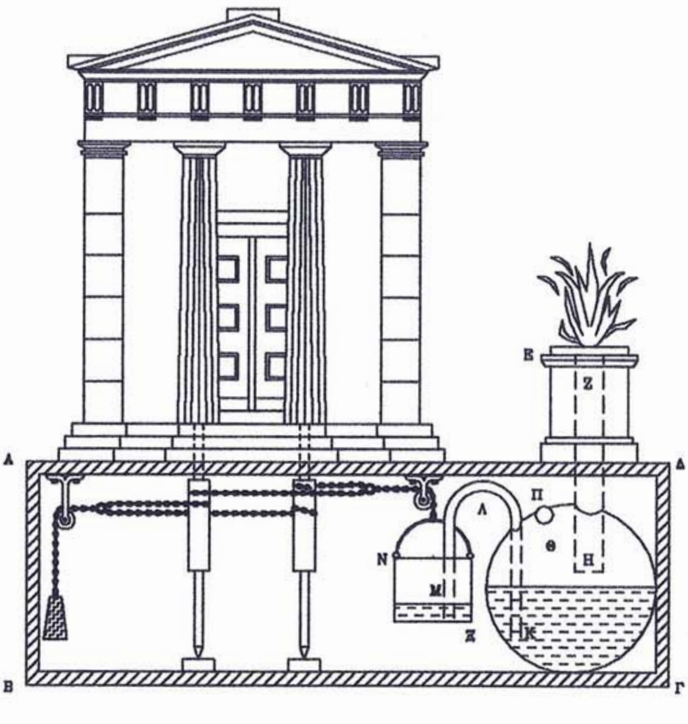
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΑΥΤΟΜΑΤΑ – ΓΛΩΣΣΕΣ
&
ΥΠΕΡΣΥΝΘΕΤΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΓΕΡΑΣΙΜΟΥ Γ. ΜΑΣΟΥΡΟΥ



ΑΘΗΝΑ 1993

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΑΥΤΟΜΑΤΑ – ΓΛΩΣΣΕΣ & ΥΠΕΡΣΥΝΘΕΤΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΓΕΡΑΣΙΜΟΥ Γ. ΜΑΣΟΥΡΟΥ

ΑΘΗΝΑ 1993

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η εκπόνηση μίας διδακτορικής διατριβής προϋποθέτει καταρχήν την ύπαρξη ενός καταλλήλου περιβάλλοντος μέσα στο οποίο θα μπορέσει κανείς να αναπτύξει την προσπάθειά του. Και επειδή το περιβάλλον το διαμορφώνουν πρώτα απ' όλα οι άνθρωποι, μέσα από αυτό το προλογικό σημείωμα θα ήθελα να αναφερθώ και να ευχαριστήσω όλους εκείνους που συμπαραστάθηκαν στην πορεία μου αυτή.

Ετσι, πρώτα απ' όλα απευθύνω ένα μεγάλο ευχαριστώ προς την οικογένειά μου για την πολύπλευρη και καθοριστική συμπαράστασή της. Αποτέλεσε το σταθερό και ακλόνητο σημείο στήριξής μου.

Στη συνέχεια ευχαριστώ βαθύτατα και ολόψυχα τον καθηγητή κ. Ι. Μήττα· τον δάσκαλο που κατηύθυνε τη μελέτη μου και τον ερευνητή που καθοδήγησε τις προσπάθειές μου στο χώρο της επιστημονικής αναζήτησης. Οι πολύωρες συζητήσεις μας θα αποτελούν για μένα πάντα πηγή εμπνεύσεως.

Επίσης θέλω να ευχαριστήσω θερμότατα τον αντιπρύτανη του ΕΜΠ καθηγητή κ. Κ. Παναγόπουλο· τον άνθρωπο που σε καθοριστικές στιγμές της προσπάθειάς μου με εμψύχωσε και με ενθάρρυνε. Η ηθική του συμπαράσταση υπήρξε πολύτιμη για μένα.

Ακόμα, εκφράζω τις ειλικρινείς ευχαριστίες μου προς τον πρόεδρο του τμήματος των Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του ΕΜΠ καθηγητή κ. Ν. Ουζούνογλου για την ουσιαστική συνδρομή του, την σταθερή υποστήριξή του και το αμέριστο ενδιαφέρον του.

Τέλος, ευχαριστώ θερμά και τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, την αν. καθηγήτρια κ. Φ. Αφράτη και τον καθηγητή κ. Ε. Πρωτονοτάριο για την συμβολή τους.

Την διατριβή μου αυτή την αφιερώνω στην ιερή μνήμη του πατέρα μου, ο οποίος θεμελίωσε μέσα μου τον επιστημονικό τρόπο σκέψης.

Αθήνα, 1993

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Υπάρχουν ιδέες τις οποίες ένας πολιτισμός καλλιεργεί εξ υπαρχής και προβλήματα τα οποία θέτει ήδη εν τη γενέσει του. Ετσι και ο αρχαίος ελληνικός πολιτισμός, ανάμεσα στην πλειάδα των ερωτημάτων που έθεσε τόσο στον εαυτό του, όσο και στις κατοπινές γενιές, έθεσε και το ζήτημα της δημιουργίας, όχι απλά μιάς μηχανής, αλλά μιάς "προγραμματισμένης" συσκευής, εξειδικευμένης στην παραγωγή κάποιου συγκεκριμένου έργου. Ο Ομηρος στην Ιλιάδα, το πρώτο ολοκληρωμένο γραπτό κείμενο της αρχαιότητας που έχουμε στα χέρια μας, έχει καταγράψει την ιδέα αυτή στη Σ Ραψωδία, όπου δίνει μιά περιγραφή του εργαστηρίου του Ηφαίστου. Ετσι λοιπόν για τα φυσερά του Ηφαίστου διαβάζουμε ότι:

"...Ώς ειπών τήν μέν λίπεν αὐτοῦ, βῆ δ' ἐπί φύσας·

τάς δ' ἐς πῦρ ἔτρεψε κέλευσέ τε ἐργάζεσθαι.
φῦσαι δ' ἐν χοάνοισιν ἐείκοσι πᾶσαι ἐφύσων,
παντοίην εὔπρηστον ἀϋτμήν ἐξανιεῖσαι,
ἄλλοτε μέν σπεύδοντι παρέμμεναι, ἄλλοτε δ' αὖτε,
ὅππως Ἥφαιστός τ' ἐθέλοι καί ἔργον ἄνοιτο..."

ενώ για τις υπηρέτριες που τον βοηθούν:

"...δῦ δέ χιτῶν', ἕλε δέ σκῆπτρον παχύ, βῆ δέ θύραζε
χωλεύων· ὑπό δ' ἀμφίπολοι ῥώοντο ἄνακτι
χρύσειαι, ζωῇσι νεήνισιν εἰοικυῖαι.
τῇς ἐν μέν νόος ἐστί μετά φρεσίν, ἐν δέ καί αὐδή
καί σθένος, ἀθανάτων δέ θεῶν ἄπο ἔργα ἴσασιν..."

Αλλά οι "προγραμματισμένες" μηχανές εμφανίζονται και σε πολύ αρχαιότερους μύθους από αυτούς της Ιλιάδας. Ετσι έχουμε τον Τάλω τον *"χαλκεῖον τρισγίγαντα"* [Ορφέας, Αργοναυτικά, 1349], για τον οποίο ο Απολλώνιος ο Ρόδιος στα Αργοναυτικά [4,1645] γράφει:

"...ἀλλ' ἤτοι τό μέν ἄλλο δέμας καί γυῖα
τέτυκτο χάλκεος ἠδ' ἄρρηκτος..."

Ο Τάλως είχε δοθεί στο Μίνωα από τον Ηφαιστο *"...διά φυλακήν τῆς νήσου Κρήτης..."* και ήταν "προγραμματισμένος" να περιπολεί κάθε μέρα *"...τρίς περί χαλκείοις Κρήτην ποσί δινεύοντα..."*, [Απολλώνιος ο Ρόδιος, 4, 1644], *"... διό καί προσπλέουσαν την Ἀργώ μετά Ἰάσονος ἐπιστρέφοντος ἀπό Κόλχων ἐκώλυε τῇ νήσῳ προσορμισθῆναι..."* [Ζηνόβιος].

Εξάλλου ο Αριστοτέλης στο απόσπασμα [Πολιτικά Α 1253b,35]

"...Εἰ γάρ ἠδύνατο ἕκαστον τῶν ὀργάνων κελευσθέν ἤ
προαισθανόμενον ἀποτελεῖν τό αὑτοῦ ἔργον, ὥσπερ τά

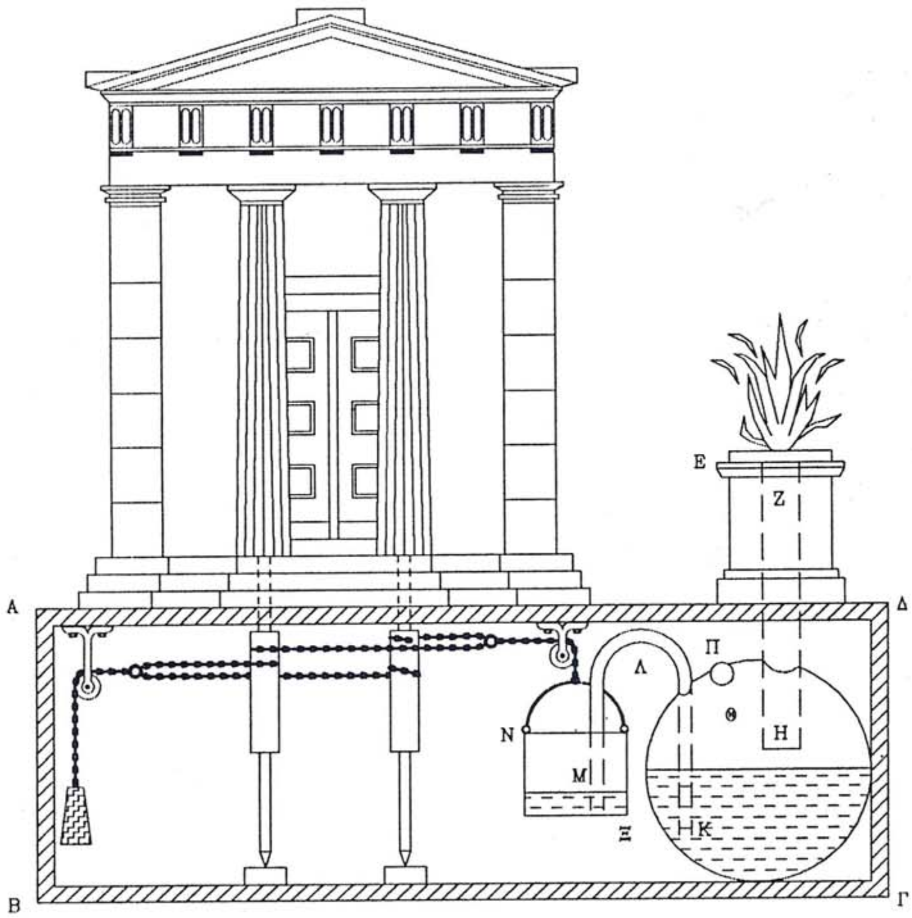
Δαιδάλου φασίν ἤ τούς τοῦ Ἡφαίστου τρίποδας, οὕς φησίν ὁ ποιητής αὐτομάτους θεῖον δύεσθαι ἀγῶνα, οὕτως αἱ κερκίδες ἐκέρκιζον αὐταί και τά πλῆκτρα ἐκιθάριζεν..."

χρησιμοποιώντας τους όρους "κελευσθέν" και "προαισθανόμενον" για να προσδιορίσει τη λειτουργία του "οργάνου", αποδίδει την έννοια του αυτοματισμού, όπως χρησιμοποιείται σήμερα.

Πάντως ο Ηρων ο Αλεξανδρεύς [19], ο ιδρυτής του πρώτου Πολυτεχνείου στην ιστορία της ανθρωπότητας, χρησιμοποίησε τον όρο "αυτόματο" με την έννοια περίπου που της αποδίδουμε σήμερα. Ετσι, στο κείμενο που παρατίθεται εδώ, περιγράφει ένα μηχανισμό με τη βοήθεια του οποίου ανοίγουν αυτόματα οι πόρτες ενός ναού όταν ξεκινάει η θυσία, και κλείνουν πάλι αυτόματα, με το τέλος της: [ΑΥΤΟΜΑΤΑ ΗΡΩΝΟΣ, Εκδ. W. Schmidt, τομ.I, σελ 174]

Ναΐσκου κατασκευή, ὥστε θυσίας γινομένης τάς θύρας αὐτομάτως ἀνοίγεσθαι, σβεσθείσης δέ τῆς θυσίας πάλιν κλείεσθαι.

Ἔστω ὁ προειρημένος ναΐσκος ἐπί βάσεως τῆς ΑΒΓΔ, ἐφ' ἧς ἐπικείσθω βωμίσκος ὁ ΕΔ· διά δέ τοῦ βωμίσκου διώσθω σωλήν ὁ ΗΖ, οὗ τό μέν Ζ στόμιον ἐντός ἔστω τοῦ βωμίσκου, το δέ Η ἐν σφαίρᾳ τινί περιειλήφθω τῇ Θ ἀπέχον ἀπό τοῦ κέντρου αὐτῆς βραχύ· συνεστεγνώσθω δέ καί ἡ σφαῖρα τῷ ΗΖ σωλῆνι. ἔστω δέ καί ἐν τῇ σφαίρᾳ καμπύλος σίφων ὁ ΚΛΜ. οἱ δέ στροφεῖς τῶν θυρῶν παρεκτετάσθωσαν εἰς τό κάτω μέρος καί στρεφέσθωσαν ἐν κνωδακίοις οὖσιν ἐν τῇ ΑΒΓΔ βάσει εὐλύτως. ἐκ δέ τῶν στροφέων ἁλυσείδια εἰς ἓν ἀποδεθέντα διά τροχίλου



ἀποδεδέσθω εἰς ἀγγεῖον κοῖλον τό ΝΞ κρεμάμενον· ἕτερα δέ ἁλυσείδια ἐπειληθέντα πρός τούς στροφεῖς τά ἐναντία τοῖς πρότερον εἰς ἓν ἀποδεθέντα διά τροχίλου εἰς βάρος μολιβοῦν ἀποδεδέσθω, δι' οὗ καταρρέποντος ἀποκεκλεισμέναι ἔσονται αἱ θύραι. ὁ δὲ ΚΛΜ σίφων τὸ ἐκτὸς σκέλος ἐχέτω φέρον εἰς τὸ κρεμαστὸν ἀγγεῖον. ἐμβεβλήσθω δὲ διά τινος τρυπήματος τοῦ Π ὕδωρ εἰς τὴν σφαῖραν, ὥστε δι' ἡμίσους γενέσθαι, ὃ μετὰ τὴν ἔγχυσιν ἐστεγνώσθω. συμβήσεται οὖν τοῦ πυρὸς θυμιαθέντος θερμαινόμενον τὸν ἐν τῷ βωμίσκῳ ἀέρα χεῖσθαι εἰς πλείονα τόπον· οὗτος δὲ διὰ τοῦ ΗΖ σωλῆνος εἰς τὴν σφαῖραν χωρῶν ἐκλίψει τὸ ἐν αὐτῇ ὑγρὸν διὰ τοῦ ΚΛΜ σίφωνος εἰς τὸ κρεμαστὸν ἀγγεῖον, ὃ δὴ καταβαρῆσαν ἐπισπάσεται τὰ ἁλυσείδια καὶ ἀνοίξει τὰς θύρας. πάλιν δὴ σβεσθέντος τοῦ πυρὸς ὁ μὲν λεπτυνθεὶς ἀὴρ ἐκχωρήσει διὰ τῶν ἀραιωμάτων τοῦ τεύχους τῆς σφαίρας. ὁ δὲ καμπύλος σίφων ἐπισπάσεται τὸ ὑγρὸν τὸ ἐκ τοῦ κρεμαστοῦ ἀγγείου, ὥστε ἀναπληρῶσαι τὸν τῶν ἐκκριθέντων ἀραιωμάτων τόπον· ἔσται γὰρ αὐτοῦ τὸ ἄκρον βαπτιζόμενον εἰς τὸ ἐν τῷ κρεμαστῷ ἀγγείῳ ὕδωρ. κουφισθέντος δὲ τοῦ ἀγγείου πάλιν τὸ ἐκκρεμάμενον βάρος καταρρέψαν κλείσει τὰς θύρας. ἔνιοι δὲ ἀντὶ ὕδατος ὑδραργύρῳ χρῶνται, ἐπειδήπερ βαρύτερός ἐστι τοῦ ὕδατος καὶ εὐκόπως ὑπὸ τῆς θερμότητος λύεται.

Η διατριβή αυτή αναφέρεται στη Θεωρητική Πληροφορική και ειδικότερα μελετώνται αφηρημένα μαθηματικά μοντέλα τα οποία στη συνέχεια εφαρμόζονται προκειμένου να σκιαγραφήσουν την δομή των αυτομάτων και των γλωσσών τους. Τα θεωρητικά μοντέλα που αναπτύσσει η αφηρημένη Θεωρία των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών αφορούν όλους του Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές που υπάρχουν, τους Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές που θα υπάρξουν, και τους Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές που είναι δυνατόν ποτέ να ονειρευτούμε ότι μπορεί να υπάρξουν. Η μαθηματική επιστήμη, όπως ορθά λέγεται, δίνει απαντήσεις πολύ πριν ο υπόλοιπος κόσμος ανακαλύψει το λόγο για τον οποίο θα έπρεπε να θέσει την ερώτηση. Η λειτουργία των δικτύων από ρελέ που χρησιμοποιήθηκαν στους πρώτους υπολογιστές, περιγράφεται επακριβώς από τις συναρτήσεις Boole. Ετσι λοιπόν ο George Boole έδωσε τη δική του συνεισφορά στην επιστήμη των ηλεκτρονικών υπολογιστών στά μέσα του δεκάτου ενάτου αιώνα [2] και η άλγεβρα Boole σήμερα χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει τα μοντέρνα TTL (transistor - transistor logic) κυκλώματα.

Η Θεωρία των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών δημιουργήθηκε σαν αποτέλεσμα τυχαίων συμπτώσεων εμπεριέχοντας διάφορους, φαινομενικά μη συσχετιζόμενους μεταξύ τους, κλάδους πνευματικής προσπάθειας. Η πιό προφανής συνιστώσα της Θεωρίας των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών είναι η Θεωρία της Μαθηματικής Λογικής. Με το ξεκίνημα του 20^{ου} αιώνα τα Μαθηματικά εμπλουτίστηκαν με την Θεωρία των Συνόλων του G. Cantor [4] αλλά ταυτόχρονα βρέθηκαν στη δύσκολη θέση να προσπαθούν να αντιμετωπίσουν τα παράδοξά της. O David Hilbert (1862 - 1943) ήθελε το σύνολο των μαθηματικών να μπεί στά ίδια σταθερά θεμέλια, όπως η Ευκλείδια Γεωμετρία, πιστεύοντας ότι άν τα μαθηματικά επανατοποθετούντο πίσω στα Ευκλείδια πρότυπα, τα παράδοξα του Candor θα εξαφανίζονταν. Στην ουσία ο Hilbert ήθελε να βρεί μεθόδους που με τρόπο εγγυημένο θα βοηθούσαν να κατασκευασθούν αποδείξεις όλων των αληθών Προτάσεων στα Μαθηματικά. Ο Hilbert ήθελε δηλαδή να αναπτύξει αλγόριθμους που θα μπορούσαν να λύσουν όλα τα μαθηματικά προβλήματα, (βλ. πχ. [18]).

Ο Kurt Gödel (1906 - 1978) όμως δεν έδειξε μόνο ότι δεν μπορεί να υπάρχει αλγόριθμος που να δίνει αποδείξεις σε όλες τις αληθείς προτάσεις στα Μαθηματικά, αλλά επίσης απέδειξε ότι δεν έχουν όλες οι αληθείς προτάσεις αποδείξεις, ώστε να μπορούν αυτές να βρεθούν (Incompleteness Theorem) [16]. Εξάλλου ο Alonzo Church [7] εισάγοντας έναν γενικό ορισμό του αλγορίθμου απέδειξε μαζί με τον Stephen Cole Kleene [24], καθώς επίσης και ανεξάρτητα από αυτούς ο Emil Post [65], [66], ότι υπάρχουν προβλήματα που κανένας αλγόριθμος δεν μπορεί να επιλύσει. Τέλος ο Alan Mathison Turing (1912 - 1954) ανέπτυξε την ιδέα της θεωρητικής "universal algorithm machine" [74] και εδειξε ότι υπάρχουν λειτουργίες που ακόμα και ένα τόσο αφηρημένο και γενικό μοντέλο δεν μπορεί να εκτελέσει. Το μοντέλο αυτό του Turing συνδέεται άμεσα με την ανακάλυψη του ηλεκτρονικού υπολογιστή. Στην πραγματικότητα, για εντελώς διαφορετικές αιτίες (σπάσιμο κωδίκων κατά τη διάρκεια του πολέμου), ο ίδιος ο Turing έπαιξε ένα σημαντικό ρόλο στην κατασκευή του πρώτου ηλεκτρονικού υπολογιστή, την οποία στήριξε στην δουλειά του πάνω στην αφηρημένη λογική.

Εξάλλου η ανακάλυψη του σωλήνα κενού έκανε τον John von Neumann (1903 - 1957) να αναπτύξει την ιδέα ενός υπολογιστή υπάρχουν, τους Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές που θα υπάρξουν, και τους Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές που είναι δυνατόν ποτέ να ονειρευτούμε ότι μπορεί να υπάρξουν. Η μαθηματική επιστήμη, όπως ορθά λέγεται, δίνει απαντήσεις πολύ πριν ο υπόλοιπος κόσμος ανακαλύψει το λόγο για τον οποίο θα έπρεπε να θέσει την ερώτηση. Η λειτουργία των δικτύων από ρελέ που χρησιμοποιήθηκαν στους πρώτους υπολογιστές, περιγράφεται επακριβώς από τις συναρτήσεις Boole. Ετσι λοιπόν ο George Boole έδωσε τη δική του συνεισφορά στην επιστήμη των ηλεκτρονικών υπολογιστών στά μέσα του δεκάτου ενάτου αιώνα [2] και η άλγεβρα Boole σήμερα χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει τα μοντέρνα TTL (transistor - transistor logic) κυκλώματα.

Η Θεωρία των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών δημιουργήθηκε σαν αποτέλεσμα τυχαίων συμπτώσεων εμπεριέχοντας διάφορους, φαινομενικά μη συσχετιζόμενους μεταξύ τους, κλάδους πνευματικής προσπάθειας. Η πιό προφανής συνιστώσα της Θεωρίας των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών είναι η Θεωρία της Μαθηματικής Λογικής. Με το ξεκίνημα του 20ου αιώνα τα Μαθηματικά εμπλουτίστηκαν με την Θεωρία των Συνόλων του G. Cantor [4] αλλά ταυτόχρονα βρέθηκαν στη δύσκολη θέση να προσπαθούν να αντιμετωπίσουν τα παράδοξά της. Ο David Hilbert (1862 - 1943) ήθελε το σύνολο των μαθηματικών να μπεί στά ίδια σταθερά θεμέλια, όπως η Ευκλείδια Γεωμετρία, πιστεύοντας ότι άν τα μαθηματικά επανατοποθετούντο πίσω στα Ευκλείδια πρότυπα, τα παράδοξα του Candor θα εξαφανίζονταν. Στην ουσία ο Hilbert ήθελε να βρεί μεθόδους που με τρόπο

Mealy [42].

Μαζί με την ιδέα του προγραμματισμού ενός υπολογιστή ήρθε η ερώτηση: Ποιά είναι η "καλύτερη" γλώσσα για να γράφουμε προγράμματα; Την εποχή που μιά γενική θεωρία πάνω στις γλώσσες των υπολογιστών αναπτυσσόταν, συνέβη μιά άλλη έκπληξη. Οι σύγχρονοι γλωσσολόγοι, άλλοι επηρρεασμένοι από τις διαδεδομένες τάσεις της μαθηματικής λογικής, και άλλοι από τις δημιουργούμενες θεωρίες της αναπτυσσόμενης ψυχολογίας, ερευνούσαν ένα πολύ παρόμοιο θέμα: Γενικά, τί είναι γλώσσα; Πώς αυτή αναπτύχθηκε; Πώς οι άνθρωποι καταλαβαίνουν την γλώσσα και με ποιό τρόπο την μαθαίνουν; Τι είδους ιδέες μπορούν να εκφρασθούν και κατά ποιούς τρόπους; Πως οι άνθρωποι μπορούν να δημιουργούν προτάσεις από τις ιδέες που έχουν στο μυαλό τους;

Ο Noam Chomsky, προκειμένου να απαντήσει σ' αυτές τις ερωτήσεις δημιούργησε διάφορα μαθηματικά μοντέλα για την περιγραφή των γλωσσών [5], [6]. Η θεωρία του αναπτύχθηκε τόσο, ώστε άρχισε να ρίχνει φώς στη μελέτη των γλωσσών των υπολογιστών. Οι γλώσσες που οι άνθρωποι ανέπτυξαν για να επικοινωνούν μεταξύ τους και οι γλώσσες που είναι απαραίτητες για να επικοινωνούν οι άνθρωποι με τις μηχανές έχουν πολλές κοινές ιδιότητες. Ετσι η θεωρία γλωσσών και αυτομάτων δίνει τεχνικές, χρήσιμες σε μιά μεγάλη ποικιλία εφαρμογών και βοηθάει στο να αναπτυχθεί ένας τρόπος σκέψης που οδηγεί στην κατανόηση της δομής, της συμπεριφοράς, των περιορισμών και των δυνατοτήτων των λογικών μηχανών.

Τα μαθηματικά που υπάρχουν στην εργασία αυτή προέρχονται από το χώρο της υπερσυνθετικής Αλγεβρας και οι δομές που αναπτύσονται και μελετώνται έχουν προκύψει στη θεωρία αυτή από την θεωρία των Αυτομάτων και των Γλωσσών.

Η Θεωρία των υπερσυνθετικών δομών εισήχθη στα Μαθηματικά το 1934 από τον F. Marty με την εισαγωγή της έννοιας της υπερομάδας [33]. Με τον όρο υπερσυνθετική δομή εννοούμε ένα μη κενό σύνολο εφοδιασμένο με μια τουλάχιστον υπερπράξη, ήτοι μια απεικόνιση του καρτεσιανού γινομένου του συνόλου με τον εαυτόν του στο δυναμοσύνολό του. Ειδικότερα τα αξιώματα επί των οποίων θεμελιώνεται η υπερομάδα επί ενός συνόλου H, εφοδιασμένου με ένα νόμο σύνθεσης " * ", είναι τα ακόλουθα.

i> το $\alpha * \beta$ είναι ένα υποσύνολο του H γιά κάθε $\alpha, \beta \in H$.

ii> $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$ γιά κάθε $\alpha, \beta \in H$
(προσεταιριστικότητα)

iii> $\alpha * H = H * \alpha = H$ γιά κάθε $\alpha \in H$
(αναπαραγωγικότητα)

Αποδεικνύεται ότι το αποτέλεσμα της υπερπράξης στην υπερομάδα είναι πάντοτε διάφορο από το κενό σύνολο [31], [51]

Στην εισαγωγή των ανωτέρω αξιωμάτων οδήγησαν φυσικά και αβίαστα διάφορα προβλήματα της μη αντιμεταθετικής Αλγεβρας, όπως γιά παράδειγμα τα σύμπλοκα (co-set) σε ομάδες που δημιουργούνται από μη αναλλοίωτες υποομάδες (πχ. βλ. [64]).

Το ερευνητικό ενδιαφέρον για τη νέα αυτή δομή εκδηλώθηκε άμεσα από πολλούς μαθηματικούς της περιόδου που αυτή εισήχθη στα Μαθηματικά και πολλά θέματα που αφορούσαν την υπερομάδα μελετήθηκαν αναλυτικά (π.χ. [14], [29]) και δόθηκαν αρκετές εφαρμογές της σ' αυτήν την ίδια την Αλγεβρα (πχ. [13], [28])

Πρέπει βέβαια να τονισθεί ότι τα αξιώματα της υπερομάδας είναι αρκετά γενικά με αποτέλεσμα κατά περίπτωση η δομή αυτή να εφοδιάζεται με νέα αξιώματα, άλλα λιγότερο και άλλα περισσότερο ισχυρά, πάντα βέβαια με γνώμονα την εκάστοτε μαθηματική αναγκαιότητα. Ετσι εμφανίσθησαν ειδικές μορφές υπερομάδων οι οποίες προέκυψαν είτε από την ίδια την Αλγεβρα, είτε από άλλους κλάδους των Μαθηματικών και οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν για την εξαγωγή συμπερασμάτων και αποτελεσμάτων τόσο λεπτών όσο και σημαντικών. Ετσι οι υπερομάδες χρησιμοποιήθηκαν για παράδειγμα στην Ανάλυση και την Αρμονική Ανάλυση (π.χ. [17], [21], [15], [72]) την Γεωμετρία (π.χ. [67], [68], [23], [37], [38]) την θεωρία κωδίκων και κρυπτογραφίας (π.χ. [1]) κ.λ.π. Εκτός όμως αυτών η υπερομάδα έδωσε γέννεση και σε άλλες πιό σύνθετες δομές, όπως αυτές του υπερδακτυλίου, του υπερσώματος, του διανυσματικού υπερχώρου, κ.λ.π.(π.χ. [30], [43], [54] [27]). Η μελέτη τόσο των υπερομάδων όσο και των υπολοίπων υπερσυνθετικών δομών είτε όσον αφορά καθαρά τη δομή τους και τις ιδιότητές τους, είτε όσον αφορά τις εφαρμογές τους, συνεχίζεται με αμείωτο και έντονο ενδιαφέρον (πχ. [78]). Η αφθονία από τα παρακλάδια της Θεωρίας των υπερσυνθετικών δομών καθιστά την έρευνα όλο και πιο περίπλοκη, ενώ συχνά εισάγονται νέα αποδεικτικά εργαλεία, μέθοδοι και τεχνικές, προκειμένου να καταστεί δυνατή η εξαγωγή καινούργιων συμπερασμάτων, να απαντηθούν ανοικτά ερωτήματα και να υπερπηδηθούν πρωτόγνωρες δυσκολίες.

Μια υπερομάδα, κλάσεις της οποίας μελετήθηκαν από διάφορους ερευνητές, είναι η κανονική υπερομάδα. Η υπερομάδα αυτή εμφανίζεται σε πολλές περιπτώσεις κατά ένα φυσικό τρόπο, η δε ονομασία της οφείλεται στον I. Μήττα ο οποίος και πρώτος την μελέτησε (βλ. πχ. [44], [45], [46], [51]). Τα αξιώματα τα οποία πληροί η κανονική υπερομάδα (σε προσθετική γραφή) είναι τα ακόλουθα:

Για κάθε χ, ψ, ω από ένα μη κενό σύνολο H:

CH1. $\chi + \psi = \psi + \chi$

CH2. $\chi + (\psi + \omega) = (\chi + \psi) + \omega$

CH3. υπάρχει ένα στοιχείο $0 \in H$ τέτοιο ώστε $\chi + 0 = \chi$
(το ουδέτερο -μηδέν- της H)

CH4. για κάθε στοιχείο $\chi \in H$ υπάρχει ένα και μόνον ένα χ' έτσι ώστε $0 \in \chi + \chi'$. Το χ' το συμβολίζουμε $-\chi$ και το καλούμε αντίθετο του χ.

CH5. $\omega \in \chi + \psi \implies \chi \in \omega - \psi$ και $\psi \in \omega - \chi$

Εξάλλου μια άλλη υπερομάδα η οποία παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον για τις εφαρμογές της στην Γεωμετρία είναι η συνδετική υπερομάδα, η οποία εισήχθει από τον W. Prenowitz [67], [68], με το όνομα συνδετικός χώρος. Η συνδετική υπερομάδα είναι μια αντιμεταθετική υπερομάδα H η οποία πληροί επιπλέον το συνδετικό αξίωμα, το οποίο σε προσθετική γραφή είναι τό ακόλουθο:

JS. $(\alpha/\beta) \cap (\gamma/\delta) \neq \emptyset \implies (\alpha + \delta) \cap (\beta + \gamma) \neq \emptyset$

όπου "/" είναι η επαγόμενη υπερπράξη στην υπερομάδα, που στην αντιμεταθετική περίπτωση, ορίζεται ως εξής [33]:

$$\alpha/\beta = \{ \chi \in H \mid \alpha \in \chi + \beta \}$$

Δομές άμεσα συνδεδεμένες με την κανονική υπερομάδα είναι το υπέρσωμα και ο υπερδακτύλιος. Οι έννοιες αυτές εισήχθησαν στα Μαθηματικά από τον M. Krasner. Συγκεκριμένα το υπέρσωμα εμφανίστηκε το 1956 στην εργασία [30] όπου και χρησιμοποιείται ως το κατάλληλο αλγεβρικό εργαλείο, προκειμένου να ορισθεί μία συγκεκριμένη προσέγγιση ενός πλήρους διατιμημένου σώματος από μιά ακολουθία διατιμημένων σωμάτων. Ενα υπέρσωμα είναι μια τριάδα (H,+,.) για την οποία ισχύει:

HF_1 Το (H,+) είναι μια κανονική υπερομάδα.

HF_2 $H = H^* \cup \{ 0 \}$, όπου το $(H^*,.)$ είναι μια πολλαπλασιαστική ομάδα και το 0 είναι το ουδέτερο στοιχείο της (H,+).

HF_3 Η πράξη "." είναι αμφίπλευρα επιμεριστική ως προς την υπερπράξη "+".

Μιά δομή που έχει με το υπέρσωμα την ίδια σχέση που έχει ο δακτύλιος με το σώμα ονομάσθηκε από τον M. Krasner υπερδακτύλιος (βλ. πχ. [32], [43], [52], [35]).

Στη διατριβή αυτή εισάγεται η θεωρία των υπερσυνθετικών δομών στη θεωρία των αυτομάτων και των γλωσσών. Πέραν των ήδη γνωστών υπερσυνθετικών δομών, όπως αυτή της συνδετικής υπερομάδας, που κατά ένα φυσικό τρόπο εμφανίζονται στη θεωρία των αυτομάτων και των γλωσσών, προκύπτουν και άλλες νέες υπερσυνθετικές δομές, οι οποίες για πρώτη φορά εισάγονται και μελετώνται, όπως αυτές της ενισχυμένης συνδετικής υπερομάδας, του υπερδακτυλιοειδούς, του υπερμοντουλοειδούς κ.λ.π.

Πιό συγκεκριμένα η διατριβή αποτελείται από πεντε κεφάλαια. Στο Πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια σύνδεση της θεωρίας των γλωσσών με τη θεωρία των υπερσυνθετικών δομών. Στη θεωρία γλωσσών χρησιμοποιούμε την έκφραση χ+ψ, όπου χ, ψ λέξεις υπεράνω ενός αλφαβήτου A, εννοώντας "ή το χ ή το ψ". Με αφετηρία το γεγονός ότι το χ+ψ είναι ουσιαστικά ένα δισύνολο, το σύνολο των λέξεων A^*, υπεράνω ενός αλφαβήτου A εφοδιάζεται με την δομή της συνδετικής υπερομάδας. Σε συνδυασμό δε με το γεγονός ότι το A^* είναι ημιομάδα ως προς την σύζευξη των λέξεων, το A^* εφοδιάζεται επιπλέον με μια νέα υπερσυνθετική δομή, η οποία για πρώτη φορά εισάγεται, αυτή του υπερδακτυλιοειδούς. Η ειδική συνδετική υπερομάδα η οποία προκύπτει κατ' αυτόν τον τρόπο από την θεωρία Γλωσσών ονομάσθηκε **Δ-υπερομάδα**, καθώς επίσης και το αντίστοιχο υπερδακτυλιοειδές, **Δ-υπερδακτυλιοειδές**.

Ειδικότερα στην πρώτη παράγραφο αυτού του κεφαλαίου εκτος από τη σύνδεση των γλωσσών με τις Δ-υπερομάδες, μελετώνται και οι γενικές ιδιότητες της Δ-υπερομάδος.

Στη δεύτερη παράγραφο γίνεται η εισαγωγή και η μελέτη των συνδετικών υπο-υπερομάδων ενώ στην τρίτη παράγραφο του κεφαλαίου αυτού εισάγονται και μελετώνται οι ομομορφικές σχέσεις, οι ομομορφικές σχέσεις ισοδυναμίας, και οι ομομορφισμοί.

Στο δεύτερο κεφάλαιο με αφετηρία την έννοια του κενού συνόλου λέξεων από τη θεωρία γλωσσών, η συνδετική υπερομάδα εμπλουτίζεται σε αξιώματα και εισάγεται έτσι μια νέα υπερσυνθετική δομή. Πράγματι η θεώρηση της "μηδενικής λέξης" οδήγησε στην εισαγωγή ενός μη βαθμωτού ουδετέρου στοιχείου στη συνδετική υπερομάδα, ως προς το οποίο κάθε στοιχείο έχει ένα μοναδικό αντίθετο. Ορίσθηκε έτσι η **ενισχυμένη συνδετική υπερομάδα**. Ειδικότερα για την περίπτωση των γλωσσών η ενισχυμένη συνδετική υπερομάδα η οποία αντιστοιχεί σ' αυτές και η οποια απετέλεσε το κίνητρο για τη δημιουργία της νέας αυτής δομής είναι η **διευρημένη Δ-υπερομάδα**. Στην τελευταία αυτή υπερομάδα κάθε στοιχείο είναι αυτοαντίθετο. Το δεύτερο κεφάλαιο αποτελείται από 4 παραγράφους.

Στην πρώτη παράγραφο μελετάται η σχέση των ενισχυμένων συνδετικών υπερομάδων με την θεωρία των γλωσσών και εξετάζονται διάφορες θεμελιώδεις ιδιότητές τους. Ανάμεσα σε αυτές αξίζει να σημειωθεί ότι αποδεικνύεται ότι αυτές αποτελούνται από δύο κατηγορίες στοιχείων τα κ και τα **ε-στοιχεία**, δηλαδή τα στοιχεία εκείνα για τα οποία ισχύει $\chi + 0 = \chi$, αντίστοιχα $\chi + 0 = \{\chi, 0\}$. Σημειώνουμε μάλιστα ότι η διευρημένη Δ-υπερομάδα αποτελείται μόνον από ε-στοιχεία.

Στην επόμενη παράγραφο μελετάται κατ' αρχήν η ιδιότητα της αναστρεψιμότητας, η οποία αποδεικνύεται ότι ισχύει κατά μερικό τρόπο. Στη συνέχεια μελετώνται άλλες ιδιότητες. Αξιοσημείωτο είναι ότι αποδεικνύεται πως εδώ δεν ισχύει εν γένει η ισότητα $-(\chi-\chi) = \chi-\chi$ και κατά συνέπεια ορίζονται δύο είδη στοιχείων, τα **ομαλά**, στα οποία ισχύει η ανωτέρω ισότητα, και τα **στρεβλά** στα οποία δεν ισχύει. Αποδεικνύεται ότι τα κ-στοιχεία είναι ομαλά, ενώ η διευρημένη Δ-υπερομάδα αποτελείται μόνον από ομαλά στοιχεία.

Η τρίτη παράγραφος αναφέρεται στις υπο-υπερομάδες της ενισχυμένης συνδετικής υπερομάδας, και συγκεκριμένα στις συνδετικές και τις συμμετρικές. Ανάμεσα σε άλλες ιδιότητες αποδεικνύεται ότι κάθε συνδετική υπο-υπερομάδα είναι συμμετρική και ότι η ελάχιστη συνδετική υπο-υπερομάδα είναι η υπο-υπερομάδα η οποία αποτελείται από όλα τα ε-στοιχεία και το 0 και είναι ίση με το 0:0. Επομένως μία ενισχυμένη συνδετική υπερομάδα που περιέχει μόνον ε-στοιχεία δεν έχει γνήσιες συνδετικές υπο-υπερομάδες. Αποδεικνύεται επίσης ότι οι συμμετρικές υπο-υπερομάδες οι οποίες δεν είναι συνδετικές αποτελούνται μόνον από ε-στοιχεία.

Η τέταρτη παράγραφος περιλαμβάνει τις μονογενείς συμμετρικές υπο-υπερομάδες. Ανάμεσα στα θέματα που μελετώνται συμπεριλαμβάνεται και ο ορισμός της κύριας και της προσηρτημένης τάξης. Οι ιδιότητες όλων αυτών των υπο-υπερομάδων μελετώνται αναλυτικά στις δύο αυτές παραγράφους.

Το τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται στα υπερδακτυλιοειδή. Ως γνωστόν το σύνολο των λέξεων υπεράνω ενός αλφαβήτου Α, είναι μονοειδές ως προς την σύζευξη των λέξεων. Αποδεικνύεται όμως ότι η πράξη αυτή είναι αμφίπλευρα επιμεριστική ως προς την υπερπράξη που ορίσαμε στο σύνολο των λέξεων. Ετσι κατά φυσικό τρόπο προέκυψε η πολλαπλασιαστικο-υπερπροσθετική δομή που ονομάσθηκε **υπερδακτυλιοειδές**. Το υπερδακτυλιοειδές όλων των λέξεων είναι ένα ειδικό συνδετικό υπερδακτυλιοειδές που ονομάσθηκε **Δ-υπερδακτυλιοειδές** ή **διευρημένο Δ-υπερδακτυλιοειδές**, αναλόγως της υπερομάδας που χρησιμοποιούμε. Το κεφάλαιο αυτό αποτελείται από έξι παραγράφους.

Η πρώτη παράγραφος αναφέρεται στη σχέση των υπερδακτυλιοειδών και των γλωσσών, καθώς επίσης και σε ορισμένες θεμελειώδεις ιδιότητές τους.

Στη δεύτερη παράγραφο μελετώνται τα **ενισχυμένα υπερδακτυλιοειδή** δηλαδή τα υπερδακτυλιοειδή εκείνα, στα οποία το προσθετικό τους μέρος είναι μια ενισχυμένη συνδετική υπερομάδα. Πολλές και ενδιαφέρουσες ιδιότητες παρουσιάζουν οι δομές αυτές, όπως για παράδειγμα ότι δεν ισχύει εν γένει σε αυτές, η ισότητα $(-\chi)(-\psi) = \chi\psi$.

Η τρίτη παράγραφος αναφέρεται στη χαρακτηριστική των υπερδακτυλιοειδών. Αποδεικνύεται ότι κάθε γνήσιο ομαλό ενισχυμένο υπερδακτυλιοειδές χωρίς διαιρέτες του 0, είναι χαρακτηριστικής 1 και επομένως κάθε διευρημένο Δ-υπερδακτυλιοειδές είναι χαρακτηριστικής 1.

Η τέταρτη παράγραφος αναφέρεται στα υπο-υπερδακτυλιοειδή. Ενα από τα συμπεράσματα στα οποία έχουμε οδηγηθεί εδώ είναι ότι το σύνολο των ε-στοιχείων και του 0 αποτελεί ένα αμφίπλευρο συνδετικό υπεριδεωειδές, το οποίο μάλιστα είναι το ελάχιστο συνδετικό υπο-υπερδακτυλιοειδές του ενισχυμένου

υπερδακτυλιοειδούς και ότι κάθε συμμετρικό υπο-υπερδακτυλιοειδές είναι υποσύνολο του ελαχίστου συνδετικού υπο-υπερδακτυλιοειδούς.
Στην πέμπτη παράγραφο μελετώνται οι ομομορφικές σχέσεις οι οποίες έχουν σημαντικές εφαρμογές για την εξαγωγή συμπερασμάτων στο πέμπτο κεφάλαιο.
Τέλος στην έκτη παράγραφο λύνονται στοιχειώδεις εξισώσεις, συστήματα και "ανισώσεις" και εισάγεται η έννοια των ρητών υποσυνόλων ενός υπερδακτυλιοειδούς.

Το τέταρτο κεφάλαιο, το οποίο αποτελείται από δύο παραγράφους, αναφέρεται σε άλλες υπερσυνθετικές δομές στενότατα συνδεδεμένες με τη θεωρία των αυτομάτων.
Στην πρώτη παράγραφο μελετάται η **πολυσυμμετρική συνδετική υπερομάδα**. Παρουσιάζονται ορισμένες θεμελιώδεις ιδιότητές της ενώ αποδεικνύεται ότι υπάρχουν τρεις κατηγορίες συνδετικής πολυσυμμετρικής υπερομάδας όσον αφορά την αναστρεψιμότητα και δίνονται παραδείγματα για κάθε μια κατηγορία.
Η δεύτερη παράγραφος αναφέρεται σε σύνολα με τελεστές και υπερτελεστές από υπερδακτυλιοειδή. Αποδεικνύεται ότι αν σε ένα σύνολο M το πεδίο των τελεστών είναι υπερδακτυλιοειδές, τότε το M μπορεί να εφοδιασθεί με μια κατάλληλη υπερπράξη και να αποκτήσει τη δομή της υπερομάδας. Ετσι το σύνολο των καταστάσεων ενός αυτομάτου αποκτά τη δομή μιας συγκεκριμένης υπερομάδας, αφού το πεδίο τελεστών του συνόλου των καταστάσεων είναι ένα υπερδακτυλιοειδές, το Δ-υπερδακτυλιοειδές της γλώσσας. Στη συνέχεια ορίζονται οι

έννοιες του υπερμοντουλοειδούς και του σουπερμοντουλοειδούς. Επίσης εισάγεται η έννοια του (s,F)-αποδεκτού υποσυνόλου του πεδίου των τελεστών, από το M, και μελετώνται οι ιδιότητες τέτοιων συνόλων.

Στο πέμπτο κεφάλαιο, αφού γίνεται μια ανακεφαλαίωση όλων των συμπερασμάτων που έχουν επιτευχθεί σε προηγούμενα κεφάλαια, επί της θεωρίας των αυτομάτων και των γλωσσών, αποδεικνύονται διάφορα θέματα της θεωρίας αυτής υπό το φως της θεωρίας των υπερσυνθετικών δομών με αποδεικτικά εργαλεία και μεθόδους που αναπτύξαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Το πέμπτο κεφάλαιο πιο συγκεκριμένα αποτελείται από τέσσερεις παραγράφους.

Η πρώτη παράγραφος αναφέρεται σε ένα ειδικό Δ-υπερδακτυλιοειδές το γλωσσικό υπερδακτυλιοειδές. Κάθε γλώσσα είναι υποσύνολο ενός γλωσσικού υπερδακτυλιοειδούς και επομένως η μελέτη των ιδιοτήτων της ανάγεται στην μελέτη του αντιστοίχου υπερδακτυλιοειδούς. Ετσι για μια ξεχωριστής σημασίας σχέση στη θεωρία γλωσσών, την ισοδυναμία μήκους, δίνονται ορισμένα συμπεράσματα στην παράγραφο αυτή. Στη συνέχεια αναφέρεται η σημασία της μηδενικής λέξης στα αυτόματα, που και πως αυτή εμφανίζεται και τι προκύπτει από αυτό. Αποδεικνύεται επίσης η σημασία της, προκειμένου να βρεθεί το ρητό υποσύνολο ενός υπερδακτυλιοειδούς τελεστών που είναι (s,F)-αποδεκτό από ένα πεπερασμένο σύνολο M και επομένως και η γλώσσα που δέχεται ένα αυτόματο.

Η δεύτερη παράγραφος αναφέρεται στην σχέση των υπερσυνθετικών δομών που έχουμε ήδη εισάγει με συστήματα που έχουν εσωτερική μνήμη και εξωτερικές εισόδους δεδομένων. Το σύνολο των συνθηκών οι οποίες μετατοπίζουν ένα τέτοιο σύστημα από κατάσταση σε κατάσταση μπορεί να λάβει την δομή ενός γλωσσικού υπερδακτυλιοειδούς και αυτό μας οδηγεί σε διάφορα συμπεράσματα. Ετσι δίνεται για παράδειγμα το γλωσσικό υπερδακτυλιοειδές που ορίζει ένα JK flip-flop. Εξάλλου, όπως έχει ήδη αποδειχθεί από προηγούμενα κεφάλαια, πηλίκα υπερδακτυλιοειδών με ομομορφικές σχέσεις ισοδυναμίας ορίζουν υπερμοντουλοειδή. Ετσι για παράδειγμα δίνεται ένας μετρητής που είναι το πηλίκο του γλωσσικού υπερδακτυλιοειδούς των φυσικών αριθμών ως προς την σχέση ισοδυναμίας mod n. Στη συνέχεια με τα συμπεράσματα προηγουμένων κεφαλαίων αποδεικνύεται το Θεώρημα του Nerode [61], [62].

Η επόμενη παράγραφος εισάγει στο σύνολο των καταστάσεων μια συγκεκριμένη υπερπράξη ως προς την οποία αυτό γίνεται υπερομάδα. Η θεώρηση αυτή εκτός των άλλων συμπερασμάτων μας οδηγεί και στην απόδειξη του Θεωρήματος του Kleen [25].

Η τελευταία παράγραφος εισάγει στο σύνολο των καταστάσεων του αυτομάτου διάφορες υπερπράξεις οι οποίες εφοδιάζουν το αυτόματο με τη δομή της υπερομάδας. Οι προσηρτημένες αυτές υπερομάδες του αυτομάτου περιγράφουν την δομή του, ορισμένες μάλιστα από αυτές, οι **προσηρτημένες υπερομάδες τάξης** και η **προσηρτημένη υπερομάδα βαθμίδας**, μας οδηγούν στην ελαχιστοποίηση του αυτομάτου. Αν η προσηρτημένη υπερομάδα βαθμίδας είναι συνδετική πολυσυμμετρική, τότε μετατρέποντάς την σε ενισχυμένη συνδετική, το αυτόματο που προκύπτει δέχεται την ίδια γλώσσα, αλλά έχει λιγότερες καταστάσεις.

Ορίζοντας δε την κατάλληλη υπερομάδα τάξης το αυτόματο ελαχιστοποιείται. Στη συνέχεια ορίζουμε μια υπερομάδα η οποία περιγράφει την λειτουργία του αυτομάτου. Για το σκοπό αυτό εισάγεται η έννοια του ενεργοποιούμενου στοιχείου. Με την βοήθεια της υπερπράξης που εισάγουμε μπορούμε να βρούμε για κάθε χρονική στιγμή όλους τους δυνατούς δρόμους που μπορεί να ακολουθήσει το αυτόματο. Τα αποτελέσματα της υπερπράξης δίνονται από μια συγκεκριμένη διαδικασία που αναπτύσσεται στην παράγραφο αυτή.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΣΥΜΒΟΛΗ ΣΤΗ ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΣΥΝΔΕΤΙΚΩΝ ΥΠΕΡΟΜΑΔΩΝ

I

- Γλώσσες και Δ-Υπερομάδες
- Συνδετικές Υπο-Υπερομάδες
- Ομομορφικές Σχέσεις

—1—

ΓΛΩΣΣΕΣ ΚΑΙ Δ—ΥΠΕΡΟΜΑΔΕΣ

Η πιό πάνω στην εισαγωγή αναφερόμενη θεώρηση των δισυνόλων στο A^* δεν είναι παρά μιά υπερπράξη ([33],[59],[12])

$$\chi + \psi = \{ \chi, \psi \} \tag{1.1}$$

σ' αυτό. Η υπερπράξη αυτή είναι προφανώς αντιμεταθετική, συνεπώς οι δύο επαγόμενες από αυτήν υπερπράξεις $\frac{\chi}{|\psi}$, $\frac{\chi}{\psi|}$ (βλ. [39]) είναι ταυτόσημες. Αν συμβολίσουμε λοιπόν με ":" την επαγόμενη υπερπράξη, θά έχουμε:

$$\chi : \psi = \{ \omega \in A^* \mid \chi \in \omega + \psi \} = \begin{cases} \chi & \text{αν } \chi \neq \psi \\ A^* & \text{αν } \chi = \psi \end{cases} \tag{1.2}$$

Εύκολα κανείς διαπιστώνει ότι η υπερπράξη "+" είναι προσεταιριστική και ότι

$$\chi + \psi + \omega = \{\chi, \psi, \omega\}$$

επειδή δε το $\chi : \psi$ είναι διάφορο του κενού για κάθε $\chi, \psi \in A^*$ έπεται ότι η $(A^*,+)$ είναι υπερομάδα (βλ. Πρόταση I.1.2 [37]). Είναι άλλωστε φανερό ότι η υπερπράξη "+" είναι και αναπαραγωγική.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι για $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in A^*$ έχουμε

$$(\alpha : \beta) \cap (\gamma : \delta) \neq \emptyset$$

τότε:

i) αν $\alpha \neq \beta$ και $\gamma \neq \delta$, έχουμε

$$\alpha : \beta = \alpha \quad , \quad \gamma : \delta = \gamma$$

άρα $\alpha = \gamma$. Συνεπώς

$$(\alpha + \delta) \cap (\beta + \gamma) = (\alpha + \delta) \cap (\beta + \alpha) = \alpha \ (\neq \emptyset)$$

ii) αν $\alpha = \beta$ και $\gamma \neq \delta$, τότε

$$\alpha + \delta = \{ \alpha, \delta \}$$

$$\beta + \gamma = \alpha + \gamma = \{ \alpha, \gamma \}$$

άρα

$$(\alpha + \delta) \cap (\beta + \gamma) = \{ \alpha, \delta \} \cap \{ \alpha, \gamma) = \alpha \ (\neq \emptyset)$$

ομοίως αν $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$, τότε

$$(\alpha + \delta) \cap (\beta + \gamma) = \alpha + \delta \quad (\neq \emptyset)$$

Αποδείξαμε δηλαδή και την ισχύ του αξιώματος JS των συνδετικών υπερομάδων και επομένως έχουμε την Πρόταση:

Πρόταση 1.1. *Το σύνολο των λέξεων A^* εφοδιασμένο με την υπερπράξη (1.1) αποτελεί συνδετική υπερομάδα.*

Τα παραπάνω ισχύουν προφανώς και αν αντί του A^* θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε μη κενό σύνολο Ε. Εχουμε δηλαδή γενικότερα την Πρόταση:

Πρόταση 1.2. *Κάθε μή κενό σύνολο Ε εφοδιασμένο με την υπερπράξη (1.1) αποτελεί συνδετική υπερομάδα.*

Οδηγούμεθα έτσι στην ιδιαίτερη θεώρηση τέτοιων υπερομάδων (Ε,+), δηλαδή τέτοιων ώστε για κάθε $\chi, \psi \in E$ να είναι $\chi + \psi = \{\chi, \psi\}$ και που θα τις χαρακτηρίζουμε ως δ ι σ τ ο ι χ ε ι α κ έ ς ή, συντομογραφικώς, Δ - υ π ε ρ ο μ ά δ ε ς και στις οποίες η επαγόμενη υπερπράξη είναι όπως η (1.2) στο A^*.

Κάθε τέτοια υπερομάδα (Ε,+) έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

<u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ 1.1.</u>

i. Στερείται βαθμωτού στοιχείου[1]

ii. Κάθε στοιχείο της χ είναι ουδέτερο και απορροφητικό (υπό ευρεία έννοια, δηλαδή για κάθε $\psi \in E$ ισχύει οτι $\psi \in \chi+\psi$ και $\chi \in \chi+\psi$)

iii. Κάθε μη κενό υποσύνολό της αποτελεί υπο-υπερομάδα της. Πράγματι, έστω $B \subseteq E$ και $\chi \in B$. Τότε,

$$\chi + B = \bigcup_{\beta \in B}(\chi+\beta) = \bigcup_{\beta \in B}\{\chi,\beta\} = B$$

Προκύπτει άρα ότι

iv. Κάθε μη κενό υποσύνολο του **Ε** είναι κ υ ρ τ ό[1] και

[1] Ενα στοιχείο s ενός υπερομαδοειδούς (Η,.) λέγεται **βαθμωτό**, όταν για κάθε $\chi \in H$ τα σύνολα $s\chi$ και $\chi.s$ είναι μονοστοιχειακά (βλ. [31],[44],[51]).

μάλιστα ε ν ι σ χ υ μ έ ν ο.

v. Καμμιά υπο-υπερομάδα της δεν είναι κ λ ε ι σ τ ή[2]
[Διότι, αν B υπο-υπερομάδα της E και χ ένα στοιχείο που δεν ανήκει στην B, τότε
$(\chi + B) \cap B = (\{\chi\} \cup B) \cap B = B \neq \emptyset$]
και επομένως

vi. Κανένα μη κενό γνήσιο υποσύνολό της δεν είναι γ ρ α μ μ ι κ ό[1].

Προκύπτει επίσης ότι

vii. Δεν έχει α ν τ ι σ τ ρ έ ψ ι μ ε ς[2] υπο-υπερομάδες

---

1 Ενα υποσύνολο A μιας υπερομάδας $(H,+)$ ονομάζεται **κυρτό (σταθερό)** [58], [68] αν για κάθε $\chi,\psi \in A$ ισχύει $\chi+\psi \subseteq A$ ενώ ονομάζεται γραμμικό [58], [68], αν $\chi+\psi \subseteq A$ και $\chi:\psi \subseteq A$. Προφανώς τα κυρτά υποσύνολα μιάς υπερομάδας είναι εξ'ορισμού οι ημι-υπουπερομάδες της ενώ, όπως έχει αποδειχθεί [38], τα γραμμικά της υποσύνολα είναι οι κλειστές υπουπερομάδες της. Σημειώνουμε ακόμη ότι ένα υποσύνολο της H λέγεται **ενισχυμένα κυρτό** όταν αυτό είναι υπο-υπερομάδα της H (όχι δηλ. μόνον ημι-υπουπερομάδα).

2 Μια υπο-υπερομάδα h μιας υπερομάδας $(H,.)$ ονομάζεται **κλειστή από δεξιά** (μέσα στην H), αντιστ. απο τα **αριστερά**, όταν για κάθε $a \in H \setminus h$(*) είναι $ah \cap h = \emptyset$ (αντιστ. $ha \cap h = \emptyset$). Η h ονομάζεται **κλειστή** αν είναι κλειστή από δεξιά και αριστερά. Ισχύει εξάλλου η πρόταση: **η h είναι κλειστή από τα δεξιά αν και μόνον αν από την σχέση $ah \cap h \neq \emptyset$ έπεται $a \in h$ (αντιστ. από αριστερά).** Μια υπο-υπερομάδα h μιας υπερομάδας $(H,.)$ ονομάζεται **αντιστρέψιμη από τα δεξιά** (στην H) (αντιστ. **από τα αριστερα**) αν για κάθε $a,a' \in H$ με $ah \neq a'h$ ισχύει $ah \cap a'h = \emptyset$ (αντιστ. $ha \neq ha'$ έπεται $ha \cap ha' = \emptyset$). Η h ονομάζεται **αντιστρέψιμη** αν είναι αντιστρέψιμη από τα δεξιά και από τα αριστερά (βλ. [31], [44], [51]).

* Θα συμβολίζουμε με $A \setminus B$ το συμπληρωματικό του συνόλου B μέσα στο σύνολο A (χωρίς να υποθέτουμε ότι το A περιέχει το B), δηλαδή $A \setminus B = \{ \chi \in A \mid \chi \notin B \}$.

[διότι κάθε τέτοια υπο-υπερομάδα είναι κλειστή].

Τέλος

viii. Αν $(\chi + \psi) \cap (\varphi + \omega) \neq \emptyset$, τότε

ή $(\chi + \varphi) \cap (\psi + \omega) \neq \emptyset$, ή $(\chi + \omega) \cap (\varphi + \psi) \neq \emptyset$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 1.1.

α) Η υπερομάδα αυτή (E,+) πληροί για κάθε $\chi \in E$ επί πλέον τις ιδιότητες

$$\chi + \chi = \chi \tag{1α}$$

$$\chi : \chi = E \tag{2α}$$

και, αν για $M \subseteq E$ το $[M]$ είναι το γενόμενο από το M κυρτό υποσύνολο[1] του E, ενώ το $\langle M \rangle$ είναι το γενόμενο από το M γραμμικό υποσύνολο[1] του E [68], [23], τότε για την προκειμένη περίπτωση έχουμε:

$$[\alpha, \beta] = \{ \alpha, \beta \} \text{ και } \langle \alpha, \beta \rangle = E$$

και για την κυρτότητα την ιδιότητα:

$$\chi \in [\alpha, \beta] \Longrightarrow \chi \in \alpha + \beta \quad \text{και}$$

$$\text{ή } \beta \in \alpha + \chi \ \text{ ή } \ \alpha \in \beta + \chi \tag{3α}$$

Αποτελεί λοιπόν παράδειγμα μιας ειδικής μορφής συνδετικού χώρου, ο οποίος εκτός από τα αξιώματα της συνδετικής υπερομάδας πληροί επιπλέον και τις συνθήκες (1α), (2α), (3α)

[1] Οταν δεν υπάρχει κίνδυνος συγχύσεως, προκειμένου να απλοποιηθεί η γραφή, αν $\{ a_1, \ldots, a_\nu \}$ είναι ένα υποσύνολο μιας υπερομάδας H, τότε γράφουμε $[a_1, \ldots, a_\nu]$ και $\langle a_1, \ldots, a_\nu \rangle$ αντί για $[\{ a_1, \ldots, a_\nu \}]$ και $\langle \{ a_1, \ldots, a_\nu \} \rangle$ αντιστοίχως.

β) Η Δ-υπερομάδα (Ε,+) έχει εξ' ορισμού την ιδιότητα:

$\chi \in \chi + \psi$ και $\psi \in \chi + \psi$, για κάθε $\chi, \psi \in E$

δηλαδή την πιο πάνω (ii). Υπάρχουν όμως συνδετικές υπερομάδες (Η,+) με στοιχεία $\chi \in H$ τέτοια ώστε $\chi \notin \chi + \psi$ για κάθε $\psi \in H$, με $\chi \neq \psi$, $\psi \neq 0$ (σε περίπτωση που υπάρχει βαθμωτό ή όχι 0 στο Η), όπως φανερώνει η εύκολα αποδεικνυόμενη ακόλουθη Πρόταση:

Πρόταση 1.3. *Κάθε ολικώς διατεταγμένο και πυκνό ως προς τη διάταξη σύνολο Η με υπερπράξη:*

$$x+y = \begin{cases} x & \text{γιά } x = y \\ ]\min\{x,y\},\ \max\{x,y\}[& \text{για } x \neq y \end{cases}$$

είναι συνδετική υπερομάδα, της οποίας το αποτέλεσμα της υπερπράξης δύο στοιχείων διαφορετικών μεταξύ τους δεν περιλαμβάνει τα δύο αυτά στοιχεία και συνεπώς δεν πληρούται η ανωτέρω ιδιότητα (ii).

Σχετικώς ισχύει η:

Πρόταση 1.4. *Σε μια συνδετική υπερομάδα (Η,+) αν για $x \in H$ είναι $x:x = x$, τότε $x \notin x + y$, για κάθε $y \in H$, με $x \neq y$, $x, y \neq 0$ (αν υπάρχει βαθμωτό η μη 0 ε Η). Και αντιστρόφως.*

Απόδειξη. Εστω ότι $\chi = \chi:\chi$ και έστω ότι το χ ανήκει στο υπεράθροισμα $\psi + \chi$, τότε το ψ ανήκει στο $\chi:\chi$, πράγμα που αληθεύει μόνον όταν $\psi = \chi$. Εξάλλου αν το χ δεν ανήκει στο υπεράθροισμα $\chi + \psi$, για κάθε ψ από το $H \setminus \{ \chi \}$, τότε $\psi \notin \chi:\chi$, για κάθε $\psi \in H \setminus \{ \chi \}$, και επομένως θα έχουμε $\chi = \chi:\chi$.

Πόρισμα 1.1. *Σε μια συνδετική υπερομάδα $(H,+)$ αν για κάθε $w \in H$ είναι $w:w = w$, τότε κανένα υπεράθροισμα $x + y$ με $x \neq y$, $x,y \neq 0$ (αν υπάρχει βαθμωτό ή μη $0 \in H$) δεν περιέχει τους δύο προσθετέους του. Και αντιστρόφως.*

Προκύπτει επομένως η:

Πρόταση 1.5. *Σε κάθε συνδετική υπερομάδα $(H,+)$ ένα τυχόν $x \in H$ ανήκει σε κάθε υπεράθροισμα $x + y$ τότε και μόνον αν $x:x = H$. Και αντιστρόφως.*

Το ανωτέρω προφανώς εξ ορισμού συμβαίνει σε κάθε Δ-υπερομάδα. Επίσης στην συνδετική υπερομάδα που αναφέρεται στην Πρόταση 1.3. ισχύει $\chi:\chi = \chi$ για κάθε $\chi \in H$ και συνεπώς, όπως φαίνεται και από τον ορισμό της υπερπράξης, στο υπεράθροισμα δύο στοιχειων της δεν ανήκουν τα αθροιζόμενα στοιχεία.

Προκύπτει ακόμα για τις κανονικές υπερομάδες η

Πρόταση 1.6. *Αν $(H,+)$ κανονική υπερομάδα τέτοια ώστε για κάθε $w \in H$*

ή $w - w = 0$ (οπότε και το w είναι βαθμωτό [51])

ή $w - w = \{ -w, 0, w \}$,

τότε για κάθε $\chi,\psi \in H\backslash\{0\}$, με $\psi \neq \chi,-\chi$, το υπεράθροισμα $\chi + \psi$ δεν περιέχει τους προσθετέους του. Και αντιστρόφως

Πράγματι $\omega \in \chi + (-\chi)$, άν και μόνον αν $\chi \in \omega + \chi$. Συνεπώς αν $\chi, \psi \notin \chi + \psi$ με $\psi \neq \chi, -\chi$, τότε $\psi \notin \chi - \chi$ και $\chi \notin \psi - \psi$ και έτσι έχουμε τις σχέσεις της πιο πάνω Πρότασης. Ανάλογη Πρόταση ισχύει, όπως θα δούμε αργότερα, και για την ενισχυμένη συνδετική υπερομάδα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.2.

Προφανώς και κάθε ολικώς διατεταγμένο σύνολο H αποτελεί συνδετική υπερομάδα αν εφοδιαστεί με την υπερπράξη

$$\chi + \psi = [\ \min\{\chi,\ \psi\},\ \max\{\chi,\ \psi\}\ ]$$

η οποία μάλιστα πληροί και τις συνθήκες (1α), (2α), (3α) και στο οποίο για κάθε χ, ψ είναι

$$[\chi,\ \psi] = \chi + \psi \quad \text{και} \quad \langle\chi,\ \psi\rangle = H$$

Εστω τώρα μια Δ-υπερομάδα (Ε, +) και R μια σχέση ισοδυναμίας στο Ε. Ας συμβολίσουμε με C_χ την κλάση $C(\chi)$ η οποία περιέχει το $\chi \in E$. Τότε επειδή προφανώς για κάθε $\chi,\psi \in E$, είναι

$$C_\chi + C_\psi = \bigcup_{\chi'\in C_\chi,\psi'\in C_\psi} (\chi' + \psi') =$$

$$= \bigcup_{\chi'\in C_\chi,\psi'\in C_\psi} \{\chi',\ \psi'\} = C_\chi \cup C_\psi,$$

δηλαδή μια ένωση κλάσεων και μάλιστα τέτοια ώστε

$$C_\chi + C_\psi = \bigcup_{z\in\chi'+\psi',\chi'\in C_\chi,\psi'\in C_\psi} C_z,$$

η R είναι σχέση ομαλής ισοδυναμίας[1] στο Ε και κατά συνέπεια

---

[1] Σε ένα υπερομαδοειδές (Η,.) μια σχέση ισοδυναμίας R (αντιστ. μια διαμέριση) καλείται **ομαλή** αν ισχύει

το σύνολο-πηλίκο E/R είναι υπερομάδα [51] με υπερπράξη:

$$C_x \dotplus C_y = \{ C_x, C_y \} \tag{1.3}$$

Δηλαδή είναι και αυτό μια Δ-υπερομάδα. Εχουμε επομένως την Πρόταση:

Πρόταση 1.7. *Αν (E,+) μια Δ-υπερομάδα, τότε:*

i) Κάθε σχέση ισοδυναμίας R επί του E είναι ομαλή

ii) Το πηλικοσύνολο E/R είναι Δ-υπερομάδα [με υπερπράξη προφανώς την (1.3)].

Αλλα και το ίδιο το E, εφοδιασμένο με υπερπράξη "$\dotplus$" που ορίζεται ως ακολούθως:

$$x \dotplus y = C_x \cup C_y \tag{1.4}$$

γίνεται υπερομάδα και μάλιστα συνδετική. Δηλαδή

Πρόταση 1.8. *Αν R μιά σχέση ισοδυναμίας στο E, τότε αυτό εφοδιασμένο με την υπερπράξη (1.4) είναι συνδετική υπερομάδα.*

Α π ό δ ε ι ξ η. Τα αξιώματα της υπερομάδας επαληθεύονται χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία. Εστω τώρα x, y ∈ E, τότε:

$C(\chi)C(\psi) \subseteq \bigcup_{\omega \in \chi'\psi'} C(\omega)$, για κάθε $\chi' \in C(\chi)$ και $\psi' \in C(\psi)$ [όπου C(z) η κλάση τυχόντος στοιχείου $z \in H$]. Το σύνολο πηλίκο, H/R γίνεται και αυτό υπερομαδοειδές άν ορίσουμε σε αυτό την υπερπράξη με τον ακόλουθο τρόπο: $C(\chi).C(\psi) = \{ C(\omega) \mid \omega \in \chi'\psi' \}$. Αν το H είναι ημι-υπερομάδα ή υπερομάδα, τότε το H/R γίνεται αντίστοιχα ημι-υπερομάδα ή υπερομάδα [51].

$$x : y = \{ z \in E \mid x \in z \dotplus y \} = \begin{cases} C_x & \text{αν } y \notin C_x \\ E & \text{αν } y \in C_x \end{cases}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι για $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in E$ έχουμε:

$$(\alpha : \beta) \cap (\gamma : \delta) \neq \emptyset$$

τότε

i. αν $\alpha \notin C_\beta$ και $\gamma \notin C_\delta$ έχουμε:

$\alpha : \beta = C_\alpha, \quad \gamma : \delta = C_\gamma$ άρα $C_\alpha = C_\gamma$

επομένως:

$$(\alpha \dotplus \delta) \cap (\beta \dotplus \gamma) = [C_\alpha \cup C_\delta] \cap [C_\beta \cup C_\alpha] = C_\alpha$$

και συνεπώς η τομή είναι διάφορη του κενού.

ii. αν $\alpha \in C_\beta$ και $\gamma \notin C_\delta$, τότε:

$$(\alpha \dotplus \delta) \cap (\beta \dotplus \gamma) = [C_\beta \cup C_\delta] \cap [C_\beta \cup C_\gamma] = C_\beta$$

το οποίο είναι διάφορο του κενού. Ομοίως αποδεικνύονται και οι λοιπές περιπτώσεις και επομένως ισχύει το αξίωμα JS των συνδετικών υπερομάδων.

—2—

ΣΥΝΔΕΤΙΚΕΣ ΥΠΟ—ΥΠΕΡΟΜΑΔΕΣ

Ως γνωστόν κάθε υποσύνολο μιας Δ-υπερομάδας (H,+) είναι υπο-υπερομάδα της, καμμιά όμως από τις υπο-υπερομάδες αυτές δεν είναι κλειστή (βλ. Ιδιότητες 1.1). Σε καμμιά επομένως υπο-υπερομάδα (h,+) της (H,+), η επαγόμενη υπερπράξη χ:ψ δεν είναι σταθερή (κλειστή) στο h και, κατά συνέπεια το συνδετικό αξίωμα δεν είναι δυνατόν να πληρούται μέσα στο h. Πληρούται όμως αυτό προφανώς κ α τ' ε π έ κ τ α σ η μέσα στο H, που είναι συνδετική υπερομάδα. Την ιδιότητα βέβαια αυτή προφανώς έχει και κάθε μη κλειστή υπο-υπερομάδα μιας οποιασδήποτε συνδετικής υπερομάδας. Υπάρχουν όμως συνδετικές υπερομάδες με υπο-υπερομάδες που το συνδετικό αξίωμα πληρούται μέσα σ' αυτές. Πριν όμως αναφερθούμε σε συγκεκριμένο παράδειγμα σε σχέση με την παρατήρηση αυτή, παραθέτουμε μερικές διευκρινίσεις, όσον αφορά την επαγόμενη υπερπράξη. Θεωρούμε γι' αυτό μια τυχούσα αντιμεταθετική υπερομάδα (H,+), την επαγόμενη υπερπράξη σε αυτή $\chi:\psi$ και μια τυχούσα υπο-υπερομάδα της h, έστω δε $\chi\div\psi$ ο περιορισμός της επαγόμενης υπερπράξης σ' αυτήν. Παρατηρούμε ότι, ενώ το υπεράθροισμα $\chi+\psi$ είναι το αυτό μέσα στην H και την h, δεν συμβαίνει το ίδιο και για το πηλίκο $\chi:\psi$, όπως στο παράδειγμα της Δ-υπερομάδας της αφετηρίας μας, όπου (Παρατηρηση 1.1.) έχουμε $\chi:\chi = H$ για κάθε $\chi \in H$ και $\chi\div\chi = h$, για κάθε $\chi \in h$. Είναι δηλαδή εν γένει $\chi\div\psi \neq \chi:\psi$, μάλιστα δε $\chi\div\psi \subseteq \chi:\psi$ και πιό συγκεκριμένα :

$$\chi\div\psi = \chi:\psi \cap h \tag{2.1}$$

Στις κλειστές όμως υπο-υπερομάδες, όπως είναι γνωστό [39], έχουμε πάντα $\chi:\psi \subseteq h$ και άρα $\chi\div\psi = \chi:\psi$

Εστω τώρα ότι η (H,+) είναι συνδετική και $\chi,\psi,\varphi,\omega \in h$. Εχουμε κατ' αρχήν τις συνεπαγωγές:

$$(\chi:\psi) \cap (\varphi:\omega) = \emptyset \implies (\chi\div\psi) \cap (\varphi\div\omega) = \emptyset$$

ενώ

$$(\chi:\psi) \cap (\varphi:\omega) \neq \emptyset \;\not\Longrightarrow\; (\chi\div\psi) \cap (\varphi\div\omega) \neq \emptyset$$

$$(\chi\div\psi) \cap (\varphi\div\omega) \neq \emptyset \implies (\chi:\psi) \cap (\varphi:\omega) \neq \emptyset$$

$$(\chi\div\psi) \cap (\varphi\div\omega) = \emptyset \;\not\Longrightarrow\; (\chi:\psi) \cap (\varphi:\omega) = \emptyset$$

Επειδή αφ' ετέρου λόγω της (2.1) είναι

$$(\chi\div\psi) \cap (\varphi\div\omega) = [(\chi:\psi) \cap h] \cap [(\varphi:\omega) \cap h] =$$
$$= [(\chi:\psi) \cap (\varphi:\omega)] \cap h$$

έχουμε την διάκριση:

ή $\quad [(\chi:\psi) \cap (\varphi:\omega)] \cap h \neq \emptyset$

ή $\quad [(\chi:\psi) \cap (\varphi:\omega)] \cap h = \emptyset$

οπότε προφανώς από τη δεύτερη ισότητα έχουμε:

$$(\chi:\psi) \cap (\varphi:\omega) \subseteq H\backslash h$$

Δεν είναι όμως δυνατόν το τελευταίο αυτό να συμβαίνει για κάθε $\chi,\psi,\varphi,\omega \in h$. Πράγματι αν π.χ. $\varphi = \chi$ και $\omega = \psi$ είναι

$$(\chi\div\psi) \cap (\varphi\div\omega) = (\chi:\psi) \cap (\varphi:\omega) \cap h = (\chi:\psi) \cap h \neq \emptyset$$

(και αυτό ισχύει για κάθε υπο-υπερομάδα μιας αντιμεταθετικής υπερομάδας).

Από την ανάλυση αυτή προκύπτει η διάκριση των υπο-υπερομάδων μίας συνδετικής υπερομάδας σε δύο κλάσεις. Στη μια που το συνδετικό αξίωμα πληρούται ε ν τ ό ς των υπο-υπερομάδων της και στην άλλη που αυτό πληρούται ε ν τ ό ς - ε κ τ ό ς αυτών. Δηλαδή αν h μια υπο-υπερομάδα της συνδετικής υπερομάδας τότε στην πρώτη περίπτωση έχουμε ότι για κάθε τετράδα στοιχείων $\chi,\psi,\varphi,\omega \in h$ ισχύει

$$(\chi:\psi) \cap (\varphi:\omega) \subseteq h$$

ενώ στη δεύτερη περίπτωση έχουμε ότι για άλλες τέτοιες τετράδες στοιχείων να ισχύει:

$$(\chi:\psi) \cap (\varphi:\omega) \subseteq h$$

και για άλλες

$$[(\chi:\psi) \cap (\varphi:\omega)] \cap [H\backslash h] \neq \emptyset$$

Οδηγούμεθα έτσι στον Ορισμό:

Ορισμός 2.1. Μιά υπο-υπερομάδα $(h,+)$ συνδετικής υπερομάδας $(H,+)$, που για κάθε τετράδα στοιχείων της πληρούται το συνδετικό αξίωμα ε ν τ ό ς αυτής, λέγεται συνδετική υπο-υπερομάδα.

Από τον Ορισμό 2.1, και την ιδιότητα 1.1.(iii) έχουμε την παρακάτω Πρόταση:

Πρόταση 2.1. *Κάθε μη κενό υποσύνολο μιάς Δ-υπερομάδας είναι μη συνδετική υπο-υπερομάδα της.*

Παράδειγμα συνδετικής υπο-υπερομάδας μιας συνδετικής υπερομάδας είναι το ακόλουθο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.

Εστω το σύνολο Z των σχετικών ακεραίων. Ας θεωρήσουμε την διαμέριση του $Z = Z_1 \cup Z_2$, όπου τα Z_1 και Z_2 τα σύνολα αντιστοίχως των περιττών και των αρτίων ακεραίων και ας ορίσουμε την ακόλουθη υπερπράξη σ' αυτό:

$$\chi \dotplus \psi = \begin{cases} Z_2, & \text{αν } \chi \equiv \psi \pmod 2 \\ Z_1, & \text{αν } \chi \not\equiv \psi \pmod 2 \end{cases}$$

Εύκολα βλέπει κανείς ότι η υπερδομή $(Z, \dotplus)$ είναι αντιμεταθετική υπερομάδα, ενώ, όσον αφορά την επαγόμενη υπερπράξη έχουμε:

$$\chi : \psi = \{ t \in Z \mid \chi \in t \dotplus \psi \} = \begin{cases} Z_2, & \text{αν } \chi \equiv \psi \pmod 2 \\ Z_1, & \text{αν } \chi \not\equiv \psi \pmod 2 \end{cases}$$

και επομένως για το συνδετικό αξίωμα

$$(\chi:\psi) \cap (\varphi:\omega) \neq \emptyset$$

σημαίνει ότι:

$$\chi \equiv \psi \pmod 2 \iff \varphi \equiv \omega \pmod 2$$
$$\chi \not\equiv \psi \pmod 2 \iff \varphi \not\equiv \omega \pmod 2,$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\chi \equiv \varphi \ (\mathrm{mod}\ 2) \iff \psi \equiv \omega \ (\mathrm{mod}\ 2)$$

$$\chi \not\equiv \varphi \ (\mathrm{mod}\ 2) \iff \psi \not\equiv \omega \ (\mathrm{mod}\ 2)$$

δηλαδή συνεπάγεται:

$$(\chi \dotplus \varphi) \cap (\psi \dotplus \omega) \neq \emptyset$$

και συνεπώς αυτό πληρούται και η υπερομάδα $(Z,\dotplus)$ είναι συνδετική.

Στη συνέχεια βλέπουμε ότι το υποσύνολο Z_2 του Z είναι κλειστό ως προς την υπερπράξη και την επαγόμενη υπερπράξη του Z και επομένως αποτελεί υπο-υπερομάδα, που είναι μάλιστα συνδετική.

Γενικότερα έχουμε την Πρόταση:

Πρόταση 2.2. Κάθε κλειστή υπο-υπερομάδα συνδετικής υπερομάδας είναι συνδετική υπο-υπερομάδα της. Και αντιστρόφως.

Απόδειξη: Το ευθύ απορρέει από τα προηγούμενα. Ως προς το αντίστροφο, αν $(H,+)$ συνδετική υπερομάδα και h είναι μια συνδετική υπο-υπερομάδα της, τότε, επειδή για κάθε $\chi,\psi,\varphi,\omega \in h$ με $(\chi:\psi) \cap (\varphi:\omega) \neq \emptyset$ είναι $(\chi:\psi) \cap (\varphi:\omega) \subseteq h$, έχουμε $(\chi:\psi) \cap (\chi:\psi) = (\chi:\psi) \subseteq h$, και η h είναι κλειστή [39].

Σε σχέση με την παραπάνω Πρόταση παρατηρούμε ότι **αν h είναι μια αντιστρέψιμη υπο-υπερομάδα της H**, τότε επειδή αυτή είναι κλειστή, **έπεται ότι θα είναι και συνδετική**. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει. Πράγματι έστω ότι η (H,.) είναι η συνδετική υπερομάδα του ευκλειδίου επιπέδου [37] και η h μια ευθεία του επιπέδου. Τότε η h είναι συνδετική υπο-υπερομάδα της H, ως κλειστή υπο-υπερομάδα, χωρίς όμως να είναι αντιστρέψιμη, αφού αν πάρουμε δύο σημεία a, $a' \in H \setminus h$, τα οποία να ανήκουν στο ίδιο ως προς την h ημιεπίπεδο, έχουμε $ah \neq a'h$ και $(ah) \cap (a'h) \neq \emptyset$.

Εστω στη συνέχεια (H,+) μια συνδετική υπερομάδα.

Πρόταση 2.3. *Για να είναι ένα μη κενό υποσύνολο h της H συνδετική υπο-υπερομάδα πρέπει και αρκεί να είναι σταθερό ως προς την υπερπράξη και την επαγόμενη υπερπράξη της H.*

Απόδειξη: Προφανώς αν η h είναι συνδετική, είναι κλειστή και η συνθήκη είναι αναγκαία. Αντιστρόφως, θα έχουμε $x+h \subseteq h$ και $h:x \subseteq h$ για κάθε $x \in h$. Από την δεύτερη προκύπτει ότι $h \subseteq x+h$ και επομένως $x+h = h$. Είναι λοιπόν το h υπερομάδα και μάλιστα σταθερή ως προς την επαγόμενη υπερπράξη, άρα συνδετική [39].

Πρόταση 2.4. *Κάθε συνδετική υπο-υπερομάδα h της H περιέχει όλες τα ουδέτερα στοιχεία της (αν έχει τέτοια).*

Απόδειξη: Πράγματι, αφού ως συνδετική είναι κλειστή και οι κλειστές υπο-υπερομάδες κάθε υπερομάδας, όπως είναι γνωστό [31], [51], περιέχουν τα ουδέτερα στοιχεία τους.

Το αντίστροφο όμως της ανωτέρω Πρότασης δεν ισχύει, όπως προκύπτει από το παρακάτω Παράδειγμα:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2.

Εστω (Ε,+) τυχούσα υπερομάδα και Θ τυχόν ξένο πρός το Ε σύνολο. Στο σύνολο $H = E \cup \Theta$ εισάγουμε μια υπερπράξη "$\dagger$" ορισμένη ως εξής:

$$\chi \dagger \psi = (\chi + \psi) \cup \Theta \qquad \text{αν } \chi, \psi \in E$$

$$\chi \dagger \vartheta = H \qquad \text{αν } \chi \in E \text{ και } \vartheta \in \Theta$$

$$\vartheta_1 \dagger \vartheta_2 = \Theta \qquad \text{αν } \vartheta_1, \vartheta_2 \in \Theta$$

Τότε το $(H,\dagger)$ είναι υπερομάδα, και μάλιστα συνδετική, αφού το Θ ανήκει σε κάθε υπεράθροισμα, και επομένως η τομή οποιονδήποτε δύο υπεραθροισμάτων περιέχει το Θ και συνεπώς είναι μη κενή. Υποθέτουμε τώρα ότι η Ε δεν περιέχει μονάδες. Τότε οι μονάδες της Η είναι τα στοιχεία του Θ. Η Θ είναι λοιπόν μια υπο-υπερομάδα της Η που περιέχει όλες τις μονάδες της Η χωρίς όμως αυτή να είναι συνδετική αφού

$$\vartheta_1 : \vartheta_2 = H \qquad \text{για κάθε } \vartheta_1, \vartheta_2 \in \Theta$$

Οι συνδετικές λοιπόν υπο-υπερομάδες h μιας υπερομάδας Η είναι κλειστές υπο-υπερομάδες και επομένως σύμφωνα με την Πρόταση I.4.2 [37] αν η h είναι συνδετική ισχύει για κάθε $\chi, \psi \in H$ η συνεπαγωγή:

$$h:\chi \cap h:\psi \neq \emptyset \implies h:\chi = h:\psi$$

και επομένως η h ορίζει μια διαμέριση της Η. Ωστε:

Πρόταση 2.5. *Κάθε συνδετική υπο-υπερομάδα h, μιας συνδετικής υπερομάδας H ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας mod h στην H ως εξής:*

$$x \equiv y \ (\mathrm{mod}\ h) \iff h:x = h:y$$

η οποία μάλιστα είναι και ομαλή.

Εχουμε κατά συνέπεια ότι το άθροισμα δύο κλάσεων $h:\chi$ και $h:\psi$ είναι ένωση κλάσεων και μάλιστα [37]

$$(h:\chi) + (h:\psi) = \bigcup_{\omega\in\chi+\psi}(h:\omega) = \bigcup_{\omega'\in\chi'+\psi'}(h:\omega')$$

όπου $\chi' = \chi\ (\mathrm{mod} h)$, $\psi' = \psi\ (\mathrm{mod} h)$

Ιδιαιτέρως για το άθροισμα $h + (h:\chi)$ έχουμε με χρήση του Πορίσματος I.4.1 [37]:

$$h + (h:\chi) = (h+h):\chi = h:\chi$$

Επομένως λαμβάνοντας υπόψη την κλειστότητα της h, αν H/h το σύνολο των κλάσεων mod h έχουμε την Πρόταση [37], [38]

Πρόταση 2.6. *Το σύνολο H/h με υπερπράξη:*

$$h:x \mathbin{\dot{+}} h:y = \{\, h:\omega \mid \omega \in x + y \,\}$$

είναι κανονική υπερομάδα, με ουδέτερο στοιχείο την υπερομάδα h.

Αν τώρα h μια συνδετική υπο-υπερομάδα της H, τότε κάθε υπο-υπερομάδα της h δεν είναι κατ' ανάγκη συνδετική. Σχετικά όμως έχουμε την Πρόταση (ως συνέπεια της 2.2):

Πρόταση 2.7. *Εστω h_1 μια συνδετική υπο-υπερομάδα της H και h_2 μια συνδετική υπο-υπερομάδα της h_1. Τότε η h_2 είναι συνδετική υπο-υπερομάδα της H.*

Είναι γνωστό ότι η τομή δύο υπο-υπερομάδων μιας τυχούσας υπερομάδας αν δεν είναι κενή, δεν είναι κατ' ανάγκην υπο-υπερομάδα. Αν όμως μια από τις δύο υπο-υπερομάδες είναι κλειστή η μη κενή τομή τους είναι υπο-υπερομάδα [31], [51]. Κατά συνέπεια:

Πρόταση 2.8. *Αν η τομή δύο υπο-υπερομάδων της Η, από τις οποίες η μία συνδετική, είναι διάφορη του κενού τότε αυτή είναι υπο-υπερομάδα της Η.*

Πόρισμα 2.1. *Αν η τομή δύο συνδετικών υπο-υπερομάδων της Η είναι διάφορη του κενού, τότε αυτή είναι μια συνδετική υπο-υπερομάδα της Η.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.1.

Υπενθυμίζουμε ότι σε τυχούσα υπερομάδα το σύνολο των κλειστών της υπο-υπερομάδων που περιέχουν ως κοινό υποσύνολο ένα υποσύνολό της Ε αποτελεί πλήρες δικτυωτό [31] και επομένως ορίζεται η γενόμενη από το Ε κλειστή υπο-υπερομάδα. Εχουμε άρα για την θεωρούμενη περίπτωση:

Πρόταση 2.9. *Το σύνολο των συνδετικών υπο-υπερομάδων μιας συνδετικής υπερομάδας που περιέχουν ένα μη κενό υποσύνολο Ε της υπερομάδας, αποτελούν πλήρες δικτυωτό (ως οικογένεια κλειστών υπο-υπερομάδων της).*

Προκύπτει κατά συνέπεια ότι αν μας δοθεί ένα μη κενό υποσύνολο Ε μιας συνδετικής υπερομάδας (Η,.) αντιστοιχεί σ' αυτό με την απεικόνιση της κλειστότητας η μικρότερη με την έννοια του εγκλεισμού συνδετική υπο-υπερομάδα, συμβολικά $E^{\sim}$, της H που περιέχει το E. Η $E^{\sim}$ είναι **η γενόμενη από το E συνδετική υπο-υπερομάδα** της H (που προφανώς το περιέχει). Ετσι αν E συνδετική υπο-υπερομάδα της H είναι $E^{\sim} = E$. Εστω $E \neq \phi$, ένα υποσύνολο της H. Προφανώς $E \subseteq E^{\sim}$ και $E:E \subseteq E^{\sim}$. Θεωρούμε το σύνολο $E^{\wedge}$ των στοιχείων $\chi \in H$, τέτοια ώστε για καθένα από αυτά

i) να υπάρχει ένα πεπερασμένο άθροισμα $\Sigma\chi_\kappa$ στοιχείων $\chi_\kappa \in E$ έτσι ώστε $\chi \in \Sigma\chi_\kappa$, ή

ii) να υπάρχουν πεπερασμένα αθροίσματα $\Sigma\chi_\kappa$ και $\Sigma\psi_\lambda$, στοιχείων χ_κ, ψ_λ από το E, έτσι ώστε $\chi \in \Sigma\chi_\kappa : \Sigma\psi_\lambda$.

Ετσι διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) αν $\chi \in \Sigma\chi_\kappa$ και $\psi \in \Sigma\psi_\lambda$, τότε προφανώς $\chi+\psi \subseteq E^{\wedge}$ και $\chi:\psi \subseteq E^{\wedge}$.

β) αν $\chi \in (\Sigma\chi_\kappa):(\Sigma\omega_\mu)$ και $\psi \in (\Sigma\psi_\lambda):(\Sigma\varphi_\nu)$ τότε, λόγω του Πορίσματος Ι.4.1.[37] έχουμε:

$$\chi+\psi \subseteq [(\Sigma\chi_\kappa):(\Sigma\omega_\mu)] + [(\Sigma\psi_\lambda):(\Sigma\varphi_\nu)] \subseteq$$
$$\subseteq [(\Sigma\chi_\kappa)+(\Sigma\psi_\lambda)] : [(\Sigma\omega_\mu)+(\Sigma\varphi_\nu)] \subseteq E^{\wedge}$$

και $$\chi:\psi \subseteq [(\Sigma\chi_\kappa):(\Sigma\omega_\mu)] : [(\Sigma\psi_\lambda):(\Sigma\varphi_\nu)] \subseteq$$
$$\subseteq [(\Sigma\chi_\kappa)+(\Sigma\varphi_\nu)] : [(\Sigma\psi_\lambda)+(\Sigma\omega_\mu)] \subseteq E^{\wedge}$$

γ) αν $\chi \in (\Sigma\chi_\kappa)$ και $\psi \in (\Sigma\psi_\lambda):(\Sigma\varphi_\nu)$ τότε, λόγω του Πορίσματος Ι.4.1.[37] έχουμε:

$$\chi+\psi \subseteq (\Sigma\chi_\kappa) + [(\Sigma\psi_\lambda):(\Sigma\varphi_\nu)] \subseteq$$
$$\subseteq [(\Sigma\chi_\kappa)+(\Sigma\psi_\lambda)] : (\Sigma\varphi_\nu) \subseteq E^{\wedge}$$

και $$\chi:\psi \subseteq (\Sigma\chi_\kappa) : [(\Sigma\psi_\lambda):(\Sigma\varphi_\nu)] \subseteq$$
$$\subseteq [(\Sigma\chi_\kappa)+(\Sigma\varphi_\nu)] : (\Sigma\psi_\lambda) \subseteq E^{\wedge}$$

ενώ λόγω της μεικτής προσεταιριστικότητας (Πρόταση Ι.2.8

[37]) για το $\psi:\chi$ έχουμε:

$$\psi:\chi \subseteq [(\Sigma\psi\lambda):(\Sigma\varphi\nu)] : (\Sigma\chi\kappa) =$$
$$= (\Sigma\psi\lambda) : [(\Sigma\varphi\nu) + (\Sigma\chi\kappa)] \subseteq E^{\wedge}$$

Θα έχουμε επομένως $\chi+\psi \subseteq E$ και $\chi:\psi \subseteq E$ για κάθε $\chi,\psi \in E^{\wedge}$. Είναι ώστε το $E^{\wedge}$ σταθερό ως προς την πράξη και την επαγόμενη υπερπράξη, και άρα κατά την Πρόταση 2.3 είναι συνδετική υπο-υπερομάδα της H. Προφανώς $E^{\sim} \subseteq E^{\wedge}$. Αφ' ετέρου είναι και $E^{\wedge} \subseteq E^{\sim}$, διότι κάθε συνδετική υπο-υπερομάδα της H που περιέχει το E, άρα και η $E^{\wedge}$, περιέχει ως υποσύνολο κάθε πεπερασμένο άθροισμα στοιχείων του E, καθώς επίσης και πηλίκα τέτοιων αθροισμάτων, είναι άρα $E^{\sim} = E^{\wedge}$, και συνεπώς έχουμε την Πρόταση:

Πρόταση 2.10. *Η συνδετική υπο-υπερομάδα $E^{\sim}$ μιας συνδετικής υπερομάδας $(H,+)$, που γεννάται από ένα μη κενό υποσύνολο E του H είναι η ένωση πεπερασμένων αθροισμάτων στοιχείων του E, καθώς επίσης και πηλίκων τέτοιων αθροισμάτων.*

Πόρισμα 2.2. *Αν $E = \{a\}$ η συνδετική υπο-υπερομάδα $\{a\}^{\sim}$ με γεννήτορα το a (μονογενής συνδετική) είναι η ένωση πεπερασμένων αθροισμάτων $\kappa a = a+\ldots+a$ (κ φορές) καθώς και πηλίκων $(\kappa a):(\lambda a)$.*

—3—

ΟΜΟΜΟΡΦΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Αν (Α,.) και (Β,.) δύο ομαδοειδή και $R \subseteq A x B$ μια διμελής σχέση από το Α στο Β, συμβιβαστή με τις πράξεις τους [δηλαδή αν $(\alpha_1,\beta_1) \in R$ και $(\alpha_2,\beta_2) \in R$ τότε $(\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2) \in R$], είναι προφανώς ένας ομομορφισμός από το Α στο Β στη περίπτωση που ορίζει μια απεικόνιση του Α στο Β [δηλαδή αν για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει $\beta \in B$ έτσι ώστε $(\alpha,\beta) \in R$ και αν $(\alpha,\beta) \in R$ και $(\alpha,\beta') \in R$ έπεται ότι $\beta = \beta'$]. Γιαυτό στη γενική περίπτωση η σχέση R χαρακτηρίζεται ως **ομομορφική σχέση**. Ο ορισμός αυτός επεκτείνεται και στην περίπτωση υπερσυνθετικών δομών ως εξής:

Ορισμός 3.1. Αν (Η,.) και (Η',.) δύο υπερομαδοειδή και $R \subseteq H x H'$ μια διμελής σχέση από το Α στο Β, αυτή λέγεται **ομομορφική**, όταν για κάθε $(\alpha_1,\beta_1) \in R$ και

$(\alpha_2, \beta_2) \in R$ έχουμε:

$$(\forall \chi \in \alpha_1\alpha_2)(\exists \psi \in \beta_1\beta_2)[(\chi, \psi) \in R]$$

και $\qquad (O_1)$

$$(\forall \psi' \in \beta_1\beta_2)(\exists \chi' \in \alpha_1\alpha_2)[(\chi', \psi') \in R]$$

που ισοδύναμα εκφράζεται και ως εξής:

γιά κάθε $\chi \in \alpha_1\alpha_2$ και γιά κάθε $\psi \in \beta_1\beta_2$ ισχύει:

$$[\{\chi\} \times (\beta_1\beta_2)] \cap R \neq \emptyset$$

και $\qquad (O_1')$

$$[(\alpha_1\alpha_2) \times \{\psi\}] \cap R \neq \emptyset$$

Από τον ορισμό προκύπτει ότι η αντίστροφη διμελής σχέση R^{-1} είναι επίσης ομομορφική.

Στην περίπτωση που η R ορίζει μια απεικόνιση $\varphi : H \longrightarrow H'$ από το H στο H', τότε αν $\alpha, \beta \in H$ για κάθε $\chi \in \alpha\beta$ έχουμε $\varphi(\chi) \in \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$, επομένως $\varphi(\alpha\beta) \subseteq \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$. Εξάλλου για κάθε $\psi \in \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$ υπάρχει $\chi \in \alpha\beta$ έτσι ώστε $\varphi(\chi) = \psi$, επομένως $\varphi(\alpha)\varphi(\beta) \subseteq \varphi(\alpha\beta)$, συνεπώς επαληθεύεται η συνθήκη:

$$\varphi(\alpha_1\alpha_2) = \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)$$

και έχουμε επομένως την Πρόταση:

Πρόταση 3.1. *Αν μια ομομορφική σχέση μεταξύ δύο υπερομαδοειδών ορίζει μια απεικόνιση τότε αυτή είναι ένας ομαλός ομομορφισμός*[1].

[1] Μια απεικόνιση φ από το υπερομαδοειδές H στο δυναμοσύνολο P(H') του υπερομαδοειδούς H' ονο-

Για τις ομομορφικές σχέσεις και τους ομαλούς ομομορφισμούς παραθέτουμε τις Προτάσεις:

Πρόταση 3.2. *Αν R, S είναι ομομορφικές σχέσεις μεταξύ των υπερομαδοειδών H', H και H, H'' αντιστοίχως, τότε η σύνθεσή τους SR είναι ομομορφική σχέση μεταξύ των H' και H''*

Απόδειξη. Εστω $(\alpha,\beta) \in SR$ και $(\alpha',\beta') \in SR$. Τότε υπάρχουν $\gamma, \gamma' \in H$ έτσι ώστε $(\alpha,\gamma) \in R$, $(\gamma,\beta) \in S$ $(\alpha',\gamma') \in R$, $(\gamma',\beta') \in S$, και επομένως για κάθε $\chi \in \alpha + \alpha'$ υπάρχει $\psi \in \gamma + \gamma'$ τέτοιο ώστε $(\chi,\psi) \in R$. Εξάλλου για κάθε $\psi \in \gamma + \gamma'$ υπάρχει $\omega \in \beta + \beta'$ έτσι ώστε $(\psi,\omega) \in S$. Αρα γιά κάθε $\chi \in \alpha + \alpha'$ υπάρχει $\omega \in \beta + \beta'$ έτσι ώστε $(\chi,\omega) \in SR$. Ομοια αποδεικνύεται ότι γιά κάθε $\omega \in \beta + \beta'$ υπάρχει $\chi \in \alpha + \alpha'$ έτσι ώστε $(\chi,\omega) \in SR$. Αρα η SR είναι ομομορφική σχέση.

Εστω και πάλι τα υπερομαδοειδή $(H,.)$, $(H',.)$ και R μια ομομορφική σχέση απο το H στο H'. Εστω δε και $h' \subseteq H'$ υπο-υπερομαδοειδές της H' και h το αρχέτυπό του (εικόνα της

μάζεται κατ' αναλογία με την περίπτωση των υπερομάδων [31] **ομομορφισμός**, αν για την φ ισχύει: $\varphi(\chi\psi) \subseteq \varphi(\chi)\varphi(\psi)$ για κάθε $\chi,\psi \in A$. Ενας ομομορφισμός ονομάζεται **ισχυρός** αν $\varphi(\chi\psi) = \varphi(\chi)\varphi(\psi)$, αν δε πρόκειται για απεικόνιση από το H στο H' ονομάζεται **αυστηρός** [με εν γένει $\varphi(\chi\psi) \subseteq \varphi(\chi)\varphi(\psi)$]. Ενας αυστηρός και ισχυρός ομομορφισμός ονομάζεται **ομαλός**. Προφανώς ένας ομομορφισμός επεκτείνεται στα δυναμοσύνολα P(H) και P(H') με $\varphi(X) = \cup\, \varphi(x)$ για κάθε $X \subseteq H$ ως απεικόνιση "προσθετική", δηλαδή $\varphi(X \cup \Psi) = \varphi(X) \cup \varphi(\Psi)$.

h' με την R^{-1}). Τότε:

Πρόταση 3.3. Αν το h' είναι σταθερό ως προς την υπερπράξη τότε και το h είναι επίσης σταθερό.

Απόδειξη. Αν $\chi \in h$, θα αποδείξουμε ότι $\chi + h \subseteq h$. Πράγματι, έστω $\psi \in h$. Τότε υπάρχουν τ_1, τ_2 από το h', έτσι ώστε τα (χ, τ_1), (ψ, τ_2) να ανήκουν στην R. Επειδή όμως η R είναι ομομορφική σχέση, έπεται ότι για κάθε $\omega \in \chi + \psi$ θα ισχύει

$$[\{\omega\} \times (\tau_1 + \tau_2)] \cap R \neq \phi.$$

Αλλά το h' είναι σταθερό ως προς την υπερπράξη και επομένως το $\tau_1 + \tau_2$ είναι υποσύνολο του h'. Συνεπώς για κάθε ω από το $\chi + \psi$, υπάρχει τ από το h' τέτοιο ώστε (ω, τ) να ανήκει στην R. Επομένως $\omega \in h$ και άρα για κάθε ψ από το h το $\chi + \psi$ είναι υποσύνολο του h. Συνεπώς το $\chi + h$ είναι υποσύνολο του h και άρα το h είναι σταθερό.

Πόρισμα 3.1. Η αντίστροφη εικόνα μιάς ημικανονικο-υπερομάδας, μέσω ενός ομομορφισμού μεταξύ δύο υπερομάδων, είναι ημικανονικο-υπερομάδα.

Πρόταση 3.4. Εστω φ αυστηρός ομομορφισμός μεταξύ δύο συνδετικών υπερομάδων H και H'. Αν h' είναι μία συνδετική υπο-υπερομάδα της H', τότε το αρχέτυπο h της h' αποτελεί μια συνδετική υπο-υπερομάδα της H.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Πόρισμα 3.1. η h είναι ημιυπο-υπερομάδα δηλαδή ισχύει $\chi + h \subseteq h$ για κάθε $\chi \in h$. Θα δείξουμε τώρα την αντίστροφη σχέση εγκλεισμού. Εστω ψ ένα τυχόν στοιχείο του h. Επειδή το H είναι υπερομάδα υπάρχει στοιχείο του ω, έτσι ώστε $\psi \in \chi + \omega$. Από εδώ έχουμε:

$$\varphi(\psi) \in \varphi(\chi + \omega) \subseteq \varphi(\chi) + \varphi(\omega)$$

απ' όπου έπεται ότι $\varphi(\omega) \in \varphi(\psi):\varphi(\chi)$. Επειδή όμως η υπο-υπερομάδα h' είναι συνδετική έπεται ότι το $\varphi(\psi):\varphi(\chi)$ είναι υποσύνολο του h', άρα το $\varphi(\omega)$ ανήκει στο h', και συνεπώς το ω ανήκει στο h. Από εδώ έπεται αφ' ενός μεν ότι το ψ ανήκει στο $\chi + h$, ώστε $h \subseteq \chi + h$ και επομένως $\chi + h = h$, αφ' ετέρου δε ότι το $\psi:\chi$ είναι υποσύνολο του h για κάθε $\chi,\psi \in h$. Αρα το h είναι μία συνδετική υπο-υπερομάδα του H (βλ. [37], Πόρισμα Ι.2.1)

Εστω στη συνέχεια H μία συνδετική υπερομάδα, h μία συνδετική υπο-υπερομάδα της, και E ένα υπερομαδοειδές με μη εκφυλισμένη υπερπράξη (δηλ. $\alpha + \beta \neq \emptyset$ για κάθε $\alpha,\beta \in E$). Αν R είναι μία ομομορφική σχέση από το H στο E, για την οποία να ισχύει ότι $(\chi,\psi) \in R$ και $(\chi,\psi') \in R \implies \psi = \psi'$ τότε:

Πρόταση 3.5. *Η εικόνα h' της h μέσω της R είναι μια υπο-υπερομάδα του E της οποίας τα στοιχεία πληρούν το συνδετικό αξίωμα εντός της E (δηλαδή εντός-εκτός της h').*

Απόδειξη. Εστω $(\chi,\psi) \in R$ με $\chi \in h$ και $\psi \in h'$. Θεωρούμε το $\psi + \tau$, $\tau \in h'$. Για το $\tau \in h'$ υπάρχει $\upsilon \in h$ τέτοιο ώστε $(\upsilon,\tau) \in R$. Συνεπώς λόγω της ιδιότητας της R για κάθε $\beta \in \psi + \tau$ υπάρχει $\alpha \in \chi + \upsilon$ τέτοιο ώστε $(\alpha,\beta) \in R$, άρα $\psi + \tau \subseteq h'$ και επομένως $\psi + h' \subseteq h'$. Εστω στη συνέχεια $\tau \in h'$. Τότε $(\upsilon,\tau) \in R$ για κάποιο $\upsilon \in h$. Για το υ τώρα υπάρχει $\alpha \in h$ τέτοιο ώστε $\upsilon \in \chi + \alpha$. Εστω β στοιχείο του h' τέτοιο ώστε $(\alpha,\beta) \in R$. Τότε

$$[\,\{\upsilon\} \times (\,\psi + \beta\,)\,] \cap R \neq \emptyset$$

άρα $\tau \in \psi + \beta$ και επομένως $h' \subseteq \psi + h'$. Συνεπώς $h' = \psi + h'$. Εστω στη συνέχεια ότι τα (α,α'), (β,β'), (γ,γ') ανήκουν στη R. Ας θεωρήσουμε το υπεράθροισμα

$$(\alpha' + \beta') + \gamma' = \bigcup_{\chi' \in \alpha' + \beta'}(\chi' + \gamma')$$

τότε για κάθε χ' από το $\alpha' + \beta'$ υπάρχει χ από το $\alpha + \beta$, τέτοιο ώστε $(\chi,\chi') \in R$, και αντιστρόφως. Επομένως και για κάθε ψ' από το $\chi' + \gamma'$ υπάρχει $\psi \in \chi + \gamma$ τέτοιο ώστε $(\psi,\psi') \in R$ και αντιστρόφως. Αρα για κάθε $\omega' \in (\alpha' + \beta') + \gamma'$ υπάρχει $\omega \in (\alpha + \beta) + \gamma$ έτσι ώστε $(\omega,\omega') \in R$ και το αντίστροφο. Ομοίως για κάθε $\psi' \in \alpha' + (\beta' + \gamma')$ υπάρχει $\psi \in \alpha + (\beta + \gamma)$ έτσι ώστε $(\psi,\psi') \in R$. Ομως $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ και επομένως

$$(\alpha' + \beta') + \gamma' = \alpha' + (\beta' + \gamma')$$

Συνεπώς έχει αποδειχθεί ότι το h' είναι μία υπερομάδα ως προς την υπερπράξη.

Εστω στη συνέχεια ότι τα $\alpha',\beta',\gamma',\delta'$ είναι στοιχεία του h' και ισχύει

$$(\alpha':\beta') \cap (\gamma':\delta') \neq \emptyset$$

Αν $\tau \in \alpha':\beta'$ και $\tau \in \gamma':\delta'$ τότε από τον ορισμό της επαγόμενης υπερπράξης έχουμε ότι $\alpha' \in \beta' + \tau$ και $\gamma' \in \delta' + \tau$. Επιλέγουμε στη συνέχεια τα στοιχεία $\upsilon \in H$, $\beta,\delta \in h$ έτσι ώστε τα (β,β'), (δ,δ') και (υ,τ) να ανήκουν στην R. Τότε για κάθε $\chi \in \beta + \upsilon$ και $\psi \in \delta + \upsilon$ ισχύει

$$[\ \{\chi\} \times (\beta' + \tau)\ ] \cap R \neq \emptyset$$

και

$$[\ \{\psi\} \times (\delta' + \tau)\ ] \cap R \neq \emptyset.$$

Συνεπώς για τα α', γ' που ανήκουν στα $\beta' + \tau$ και $\delta' + \tau$ αντίστοιχα, υπάρχουν α, γ αντίστοιχα, τέτοια ώστε τα (α,α'), (γ,γ') να ανήκουν στη R και $\alpha \in \beta + \upsilon$, $\gamma \in \delta + \upsilon$. Τότε $\upsilon \in (\alpha:\beta) \cap (\gamma:\delta)$ και επομένως $(\alpha:\beta) \cap (\gamma:\delta) \neq \emptyset$. Απο την τελευταία αυτή σχέση, επειδή η H είναι συνδετική έπεται ότι $(\alpha + \delta) \cap (\gamma + \beta) \neq \emptyset$. Εστω ω ένα στοιχείο της τομής $(\alpha + \delta) \cap (\gamma + \beta)$. Τότε

$$[\ \{\omega\} \times (\alpha' + \delta')\ ] \cap R \neq \emptyset$$

και

$$[\ \{\omega\} \times (\gamma' + \beta')\ ] \cap R \neq \emptyset$$

Αρα υπάρχει ω' που ανήκει στα υπεραθροίσματα $(\alpha' + \delta')$ και $(\gamma' + \beta')$ έτσι ώστε $(\omega,\omega') \in R$. Αρα

$$(\alpha' + \delta') \cap (\gamma' + \beta')\ ] \neq \emptyset$$

Αποδείχθηκε συνεπώς ότι το συνδετικό αξίωμα επαληθεύεται για την h' εντός-εκτός αυτής.

Πόρισμα 3.2. Εστω φ ένας ομαλός επιμορφισμός από την συνδετική υπερομάδα H στο υπερομαδοειδές E. Τότε το E είναι συνδετική υπερομάδα και η εικόνα μέσω του φ κάθε συνδετικής υπο-υπερομάδας της H είναι υπο-υπερομάδα της E.

Μια ομομορφική σχέση που είναι ταυτόχρονα και σχέση ισοδυναμίας [34] θα την καλούμε **" ομομορφική σχέση ισοδυναμίας "**

Πρόταση 3.6. *Κάθε ομομορφική σχέση ισοδυναμίας R επί μιας υπερομάδας H είναι σχέση ομαλής ισοδυναμίας και επομένως το σύνολο H/R είναι υπερομάδα.*

Απόδειξη. Εστω C_x η κλάση τυχόντος στοιχείου $x \in H$ ως πρός την ισοδυναμία R. Τότε, επειδή η ισοδυναμία R είναι ομομορφική, θα έχουμε για κάθε $x,y \in H$,

$$z' \in C_x + C_y \implies$$

$$\implies (\exists (x',y') \in C_x \times C_y)\,[\, z' \in x' + y' \,] \implies$$

$$\implies (\exists z \in x + y)\,[\, z'\, R\, z \,] \implies$$

$$\implies z' \in C_z \implies C_x + C_y \subseteq \bigcup_{z \in x+y} C_z$$

Αντιστρόφως:

$$z'' \in \bigcup_{z \in x+y} C_z \implies$$

$$\implies (\exists z \in x + y)\,[\, z''R\, z \,] \implies$$

$$\implies (\exists (x'',y'') \in H^2)\,[\, x''Rx \wedge y''Ry \wedge z'' \in x''+y'' \,]$$

$$\implies z'' \in C_x + C_y \implies \bigcup_{z \in x+y} C_z \subseteq C_x + C_y$$

Είναι ώστε $C_x + C_y = \bigcup_{z \in x+y} C_z$ και το πηλικοσύνολο H/R είναι υπερομάδα με υπερπράξη:

$$C_x \dotplus C_y = \{\, C_z \mid z \in x + y \,\}$$

Πρόταση 3.7. *Αν η υπερομάδα H είναι συνδετική τότε και η H/R είναι συνδετική.*

Απόδειξη. Εστω ότι η H είναι συνδετική. Τότε αν

$$C_x : C_y \cap C_z : C_w \neq \emptyset$$

έπεται ότι υπάρχουν x',y',z',w' αντίστοιχα από τα C_x, C_y, C_z, C_w έτσι ώστε

$$x':y' \cap z':w' \neq \emptyset$$

απ' όπου: $$x' + w' \cap z' + y' \neq \emptyset$$

και επομένως: $$(C_x + C_w) \cap (C_z + C_y) \neq \emptyset$$

δηλαδή η H/R είναι συνδετική.

ΜΙΑ ΕΙΔΙΚΗ ΚΛΑΣΗ ΣΥΝΔΕΤΙΚΩΝ ΥΠΕΡΟΜΑΔΩΝ

II

—1—

ΓΛΩΣΣΕΣ
ΕΝΙΣΧΥΜΕΝΕΣ ΣΥΝΔΕΤΙΚΕΣ
ΥΠΕΡΟΜΑΔΕΣ ΚΑΙ
ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Αλλες υπερσυνθετικές δομές σχετιζόμενες με την $(A^*,+)$ της θεωρίας γλωσσών προκύπτουν λαμβάνοντας υπόψη καταρχήν τη σχέση:

$$\phi X = X\phi = \phi\ , \quad \text{για κάθε } X \subseteq A^*$$

που για $X = \{\chi\}$ εκφράζει ότι το κενό σύνολο παίζει το ρόλο απορροφητικού στοιχείου στον πολλαπλασιασμό των λέξεων. Το γεγονός οδηγεί στη θεώρηση μιάς "απορροφητικής" για τον πολλαπλασιασμό λέξης, συμβολιζόμενης με 0, και χαρακτηριζόμενης ως **μηδενικής**. Το σύνολο τότε $A^* \cup \{0\} = \underline{A}^*$ το ονομάζουμε **κάλυμα του A^***. Η εισαγωγή άλλωστε της μηδενικής λέξης στο A^* ως στοιχείου απορροφητικού για τον πολλαπλασιασμό των λέξεων σχετίζεται, όπως θα δούμε, και με την θεωρία των αυτομάτων. Επεκτείνοντας λοιπόν στο σύνολο $\underline{A}^*$

την πράξη και υπερπράξη του A^* έχουμε ότι για κάθε $\chi \in \underline{A}^*$:

$$0\chi = \chi 0 = 0, \quad 0 + \chi = \chi + 0 = \{0, \chi\}$$

Με τις επεκτάσεις αυτές η δομή $(\underline{A}^*,.)$ εξακολουθεί να είναι μονοειδές με απορροφητικό όμως τώρα στοιχείο και η υπερδομή $(\underline{A}^*,+)$ υπερομάδα η οποία και παραμένει μία Δ-υπερομάδα εφόσον στην υπερπράξη δεν επήλθε καμμιά απολύτως μεταβολή και το πρόσθετο στοιχείο της 0, είναι όπως όλα τα άλλα στοιχεία της, δηλαδή μη βαθμωτό ουδέτερο και απορροφητικό (υπό ευρεία έννοια) [Ιδιότητες Ι.1.1]. Αν όμως θεωρήσουμε το σύνολο R+ (ή Q+ ή Z+) και το εφοδιάσουμε με την υπερπράξη:

$$\chi \dagger \psi = \begin{cases} \{\chi, \psi\} & \text{αν } \chi \neq \psi \\ [0, \chi] & \text{αν } \chi = \psi \end{cases}$$

η υπερσυνθετική δομή που προκύπτει εύκολα επαληθεύεται ότι είναι υπερομάδα με το 0 μη βαθμωτό ουδέτερο και απορροφητικό ως προς την υπερπράξη αυτή στοιχείο (το οποίο είναι και απορροφητικό ως προς τον πολλαπλασιασμό) δηλαδή όπως και η μηδενική λέξη στην υπερομάδα $(\underline{A}^*,+)$ με την διαφορά όμως ότι εδώ έχουμε $0 \in \chi + \chi$. Το παράδειγμα οδηγεί στην τροποποίηση της υπερπράξης στο κάλυμα του $\underline{A}^*$ ως εξής:

$$\chi \dagger \psi = \begin{cases} \{\chi, \psi\} & \text{αν } \chi \neq \psi \\ \{0, \chi\} & \text{αν } \chi = \psi \end{cases}$$

Η υπερσυνθετική δομή $(\underline{A}^*,\dagger)$ εξακολουθεί να είναι, όπως επαληθεύεται, συνδετική υπερομάδα και μάλιστα πλήρως ομαλή κατά Marty [33].

Γενικεύοντας, θεωρούμε συνδετικές υπερομάδες ειδικής μορφής, οι οποίες πληρούν ιδιότητες όπως οι πιο πάνω στο παράδειγμα που αναφέραμε. Οδηγούμεθα κατά συνέπεια στη θεώρηση της ενισχυμένης συνδετικής υπερ-ομάδας ή υπερομάδας ενισχυμένης συνδετικότητας σύμφωνα με τον ακόλουθο Ορισμό:

Ορισμός 1.1. Ονομάζουμε **ενισχυμένη συνδετική υπερομάδα** (Ε.Σ.Υ.) ή και **υπερομάδα ενισχυμένης συνδετικότητας** μια συνδετική υπερομάδα $(H,+)$, η οποία πληροί επιπλέον τα αξιώματα:

FJ1 Υπάρχει μοναδικό ουδέτερο στοιχείο, συμβολιζόμενο με 0 –το **μηδέν** της Η– τέτοιο ώστε για κάθε $x \in H$ να ισχύει

$$x \in x + 0 \quad \text{και} \quad 0 + 0 = 0$$

δηλαδή

$$(\exists! 0 \in H)\ (\forall x \in H)\ [\ (x \in 0 + x) \wedge (0 + 0 = 0)\ ]$$

FJ2 Για κάθε $x \in H \setminus \{0\}$ υπάρχει ένα και μόνον στοιχείο $x' \in H\setminus\{0\}$ – **αντίθετο** ή **συμμετρικό** του x (ως προς το 0) – συμβολιζόμενο με $-x$, τέτοιο ώστε

$$0 \in x + x'$$

δηλαδή:

$$(\forall x \in H\setminus\{0\})\ (\exists! x' \in H\setminus\{0\})\ [\ 0 \in x + x'\ ]\quad (x' = -x)$$

Παρατηρούμε ότι το 0 της Ε.Σ.Υ. είναι, σε περίπτωση που αυτή δεν ανάγεται σε κανονική, μη βαθμωτό ουδέτερο [31], [51] και επειδή $0 + 0 = 0$ είναι φυσικό να τεθεί $-0 = 0$. Προκύπτει επίσης ότι $-(-x) = x$ για κάθε $x \in H$.

Σύμφωνα λοιπόν με τον πιό πάνω ορισμό η συνδετική υπερομάδα ($\underline{A}^*$,$\dagger$) είναι ενισχυμένη, θα την καλούμε δε **διευρημένη Λ-υπερομάδα.** Προφανώς τα στοιχεία της ($\underline{A}^*$,$\dagger$) είναι αυτοαντίθετα. Υπάρχουν όμως και Ε.Σ.Υ. οι οποίες δεν έχουν αυτοαντίθετα στοιχεία. Πράγματι:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.

Εστω (G,+) μια οποιαδήποτε αβελιανή ομάδα. Αν στο G ορίσουμε μια υπερπράξη "$\dagger$" ως εξής:

$$\chi \dagger \psi = \{ \chi, \psi, \chi + \psi \}$$

τότε το (G,$\dagger$) είναι συνδετική υπερομάδα [37], η οποία μάλιστα είναι μια Ε.Σ.Υ., στην οποία το ουδέτερο στοιχείο 0 της προσθετικής ομάδας είναι και μη βαθμωτό ουδέτερο της υπερομάδας, ενώ το αντίθετο $-\chi$ ενός στοιχείου χ της ομάδας είναι και το μοναδικό αντίθετο του χ μέσα στην υπερομάδα.

Στις Προτάσεις που ακολουθούν παρατίθενται μια σειρά από θεμελιώδεις ιδιότητες που πληρούν οι Ε.Σ.Υ. Εστω λοιπόν (Η,+) μια Ε.Σ.Υ. Τότε:

Πρόταση 1.1. *Για κάθε* $x \in H$ *ισχύει*

$$0 + x \subseteq \{0, x\}$$

Απόδειξη. Εστω $\psi \in 0 + \chi$, τότε $\chi \in \psi:0$ (1). Εξάλλου $0 \in \chi - \chi$, συνεπώς $\chi \in 0:(-\chi)$ (2). Από τις (1) και (2) έχουμε

$$[\ \psi:0\ ] \cap [\ 0:(-\chi)\ ] \neq \emptyset$$

Από την οποία, λόγω του συνδετικού αξιώματος, έπεται ότι

$$(\psi - \chi) \cap (0 + 0) \neq \emptyset$$

Δηλαδή $0 \in \psi - \chi$ και πρέπει να υποθέσουμε ή ότι $\psi = \chi$, οπότε, αν αυτό το δεχθούμε για κάθε $\chi \in H$ το 0 είναι βαθμωτό και η υπερομάδα θα είναι κανονική [37], πράγμα που το αποκλείουμε, γιατί όπως φαίνεται από τα πιό πάνω παραδείγματα κάτι τέτοιο δεν ισχύει, ή ότι υπάρχουν $\chi \in H$ για τα οποία $0 \in 0 + \chi$, και επομένως για αυτά θα ισχύει $0 + \chi = \{0 , \chi\}$. Συνεπώς ισχύει εν γένει η σχέση: $0 + \chi \subseteq \{0, \chi\}$

Η ανωτέρω Πρόταση είναι θεμελειώδης. Συμφωνα με αυτή διακρίνουμε σε μία Ε.Σ.Υ. δύο κατηγορίες στοιχείων. Στοιχεία για τα οποία έχουμε $0 + \chi = \chi$ και άλλα για τα οποία ισχύει $0 + \chi = \{\chi, 0\}$. Εχουμε επομένως τον Ορισμό:

Ορισμός 1.2. Κάθε στοιχείο χ μιας Ε.Σ.Υ. που πληροί την σχέση

$$0 + \chi = \chi$$

ονομάζεται **κανονικό** ή **κ-στοιχείο**, ενώ αν πληροί την

$$0 + \chi = \{0, \chi\}$$

ευρέως κανονικό ή ε-στοιχείο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.1.

Επισημαίνουμε ότι σε μια Ε.Σ.Υ. το ουδέτερο στοιχείο είναι πάντοτε κ-στοιχείο. Στην περίπτωση της διευρημένης Λ-υπερομάδας καθώς και σε αυτή του Παραδείγματος 1.1 παρατηρούμε ότι η σχέση

$$0 + \chi = \chi$$

ισχύει μόνον για το 0 ενώ για κάθε άλλο χ ισχύει

$$0 + \chi = \{0, \chi\}$$

δηλαδή το μοναδικό κ-στοιχείο είναι το 0 ενώ όλα τα άλλα στοιχεία είναι ε-στοιχεία. Υπάρχουν όμως Ε.Σ.Υ. οι οποίες περιέχουν μη μηδενικά στοιχεία και των δύο κατηγοριών, όπως φαίνεται από το Παράδειγμα που ακολουθεί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2.

Σε κάθε ολικά διατεταγμένο σύνολο Η καί συμμετρικό αναφορικά ως προς ένα κέντρο $0 \in H$ μπορούμε να καθορίσουμε μιά διαμέριση

$$H = H_1 \cup \{0\} \cup H_2 = H^- \cup \{0\} \cup H^+$$

($H_1 = H^-$, $H_2 = H^+$) τέτοια ώστε $\chi < 0 < \psi$ για κάθε $\chi \in H^-$, $\psi \in H^+$, $\chi \leq \psi \Longrightarrow -\psi \leq -\chi$ για κάθε $\chi, \psi \in H$ όπου $-\chi$ το συμμετρικό του χ ως προς το 0.

Είναι γνωστό ότι αν στο σύνολο $H^+ \cup \{0\}$ ορίσουμε μια υπερπράξη "+" ώς εξής:

$$\chi + \psi = \begin{cases} \max\{\chi, \psi\} & \text{αν } \chi \neq \psi \\ [0, \chi] & \text{αν } \chi = \psi \end{cases}$$

τότε αυτό γίνεται κανονική υπερομάδα [48], [56].

Επίσης, αν ορίσουμε στο σύνολο $H^- \cup \{0\}$ μια υπερπράξη "+" ως εξής

$$\chi + \psi = \begin{cases} \{\chi, \psi\} & \text{αν } \chi \neq \psi \\ [\chi, 0] & \text{αν } \chi = \psi \end{cases}$$

τότε αποδεικνύεται ότι αυτό γίνεται ενισχυμένη συνδετική υπερομάδα.

Αν τώρα στο Η ορίσουμε μια υπερπράξη "+" ως ακολούθως:

$$\chi + \psi = \begin{cases} \max\{\chi, \psi\} & \text{αν } \chi \neq \psi \text{ και } \chi \in H^+ \text{ ή } \psi \in H^+ \\ \{\chi, \psi\} & \text{αν } \chi \neq \psi \text{ και } \chi, \psi \in H^- \\ \{\chi, 0\} & \text{αν } \psi = 0 \text{ και } \chi \in H^- \\ \chi & \text{αν } \psi = 0 \text{ και } \chi \in H^+ \\ [\chi, 0] & \text{αν } \chi = \psi \in H^- \cup \{0\} \\ [0, \chi] \cup H^- & \text{αν } \chi = \psi \in H^+ \end{cases}$$

τότε η $(H,+)$ είναι ενισχυμένη συνδετική υπερομάδα με αυτοαντίθετα στοιχεία. Τα στοιχεία της Η που ανήκουν στο $H^+ \cup \{0\}$ είναι κ-στοιχεία, ενώ όλα τα στοιχεία που ανήκουν στην H^- είναι ε-στοιχεία.

Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε με Κ και Ε τα σύνολα των κ και ε-στοιχείων της Η αντιστοίχως. Για τις δύο αυτές κατηγορίες στοιχείων έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες.

Πρόταση 1.2. Αν $x \in E$, τότε και $-x \in E$. Άρα, αν $x \in K$, τότε και $-x \in K$.

Απόδειξη. $0 \in 0 + \chi$ άρα $\chi \in 0:0$. Εξάλλου $0 \in \chi - \chi$ άρα $\chi \in 0:(-\chi)$. Συνεπώς

$$0:0 \cap 0:(-\chi) \neq \emptyset$$

απ' όπου λόγω του συνδετικού αξιώματος έπεται ότι

$$(-\chi + 0) \cap (0 + 0) \neq \emptyset \quad \text{ή} \quad (-\chi + 0) \cap \{0\} \neq \emptyset$$

επομένως $0 \in -\chi + 0$. Άρα

$$-\chi + 0 = \{-\chi, 0\}$$

και συνεπώς το $-\chi$ είναι ένα ε-στοιχείο.

Πρόταση 1.3. Αν $x \varepsilon E$, τότε:

i) $-x, x \varepsilon x - x$

ii) $x \varepsilon x + x$ *και* $-x \varepsilon -x - x$

Απόδειξη. i) Λόγω της Προτάσεως 1.1 ισχύει ότι $\chi - \chi = 0 + (\chi - \chi)$. Ετσι από την προσεταιριστική ιδιότητα και την Πρόταση 1.2 έχουμε:

$$\chi - \chi = (0 + \chi) - \chi = \{0, \chi\} - \chi = (0 - \chi) \cup (\chi - \chi) =$$
$$= \{-\chi, 0\} \cup (\chi - \chi) = \{-\chi\} \cup (\chi - \chi)$$

άρα $-\chi \in \chi - \chi$ (1). Εξάλλου

$$\chi - \chi = \chi + (-\chi + 0) = \chi + \{0, -\chi\} = (\chi + 0) \cup (\chi - \chi) =$$
$$= \{\chi, 0\} \cup (\chi - \chi) = \{\chi\} \cup (\chi - \chi)$$

άρα $\chi \in \chi - \chi$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται το (i).

ii) Αν το χ είναι αυτοαντίθετο, προκύπτει από το (i). Εστω $0 \notin \chi + \chi$. Από τη σχέση $\chi \in \chi - \chi$ συνεπάγεται ότι $-\chi \in \chi : \chi$ και επειδή $-\chi \in 0:\chi$, έπεται $(\chi:\chi) \cap (0:\chi) \neq \phi$

άρα $(0 + \chi) \cap (\chi + \chi) \neq \phi$

συνεπώς $\{ 0, \chi \} \cap \chi + \chi \neq \phi$

και επομένως $\chi \in \chi + \chi$. Ομοίως συνάγεται ότι $-\chi \in -\chi - \chi$.

Στην Ε.Σ.Υ. του παραδείγματος 1.1 η διαφορά $\chi - \chi$ περιλαμβάνει μόνον τα $-\chi$, 0, χ, ενώ στο παράδειγμα 1.2, το $\chi + \chi$ περιέχει και άλλα στοιχεία εκτός των 0, χ (τα στοιχεία εδώ είναι αυτοαντίθετα). Υπάρχουν όμως και Ε.Σ.Υ, χωρίς αυτοαντίθετα στοιχεία στις οποίες η διαφορά $\chi - \chi$ περιέχει και άλλα στοιχεία πλην των ανωτέρω τριών. Για παράδειγμα αν g είναι ένα συμμετρικό υποσύνολο μιας ολικά διατεταγμένης αβελιανής ομάδας G, τότε το g γίνεται Ε.Σ.Υ. αν το εφοδιάσουμε με την ακόλουθη υπερπράξη:

$$\chi + \psi = \{ \chi, \psi \} \quad \text{αν} \quad \psi \neq -\chi$$

$$\chi - \chi = [-|\chi|, |\chi|]$$

Στην υπερομάδα αυτή, αν **card** $g > 3$, η διαφορά $\chi - \chi$ εν γένει περιέχει και άλλα στοιχεία εκτός από τα $-\chi$, 0, χ.

Πρόταση 1.4. *Για κάθε $y \in K\backslash\{0\}$ ισχύει η σχέση*

$$E \subseteq y - y$$

Απόδειξη. Εστω χ ένα ε-στοιχείο. Επειδή η Η είναι υπερομάδα ισχύει $\psi + H = H$. Αρα υπάρχει $\omega \in H$ τέτοιο ώστε $\chi \in \psi + \omega$. Τότε έχουμε:

$$0 + \chi \subseteq 0 + (\psi + \omega) = (0 + \psi) + \omega = \psi + \omega.$$

Ομως $0 + \chi = \{ 0, \chi \}$ επομένως $0 \in \psi + \omega$. Αλλά το ω είναι διάφορο του 0, αφού για το ψ ισχύει $\psi + 0 = \psi$. Συνεπώς τα ω και ψ είναι αντίθετα, δηλαδή $\omega = -\psi$, και επομένως $\chi \in \psi - \psi$.

Πρόταση 1.5. *Για κάθε y, ω από το K με $\omega \neq -y$ έχουμε:*

$$\omega + y \subseteq K$$

Απόδειξη. Εστω $\chi \in \omega + \psi$ και έστω ότι $\chi \notin K$, δηλαδή ότι $\chi + 0 = \{ \chi, 0 \}$. Τότε

$$0 + \chi \subseteq 0 + (\omega + \psi)$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\{ \chi, 0 \} \subseteq (0 + \omega) + \psi$$

ή ισοδύναμα

$$\{ \chi, 0 \} \subseteq \omega + \psi$$

Επομένως $0 \in \omega + \psi$, πράγμα άτοπο.

Πρόταση 1.6. *Για κάθε y, w από το E ισχύει*

$$y + w \subseteq E \cup \{0\}$$

και επομένως $(y + w) \cap K \setminus \{0\} = \emptyset$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $\chi \in \psi + \omega$ και $\chi \notin E \cup \{0\}$. Τότε έχουμε $\psi \in \chi{:}\omega$. Ομως $\psi \in 0{:}(-\psi)$. Αρα:

$$\chi{:}\omega \cap 0{:}(-\psi) \neq \emptyset \implies (0 + \omega) \cap [\chi + (-\psi)] \neq \emptyset \implies$$

$$\implies \{0, \omega\} \cap [\chi + (-\psi)] \neq \emptyset$$

Επειδή όμως $\chi \neq \psi$ έπεται ότι $0 \notin \chi + (-\psi)$ και επομένως $\omega \in \chi + (-\psi)$. Αλλά τότε έχουμε:

$$0 + \omega \subseteq 0 + [\chi + (-\psi)]$$

ή ισοδύναμα

$$\{ 0, \omega \} \subseteq (0 + \chi) + (-\psi) = \chi - \psi.$$

Δηλαδή $0 \in \chi - \psi$, και άρα $\chi = \psi$, άτοπο.

Πρόταση 1.7. *Εστω $y \in K \setminus \{0\}$ και $x \in E$. Τότε:*

$$y = x + y$$

Απόδειξη. Καταρχήν θα αποδείξουμε ότι $\psi \in \chi + \psi$. Πράγματι $\psi + 0 = \psi$, άρα το 0 ανήκει στο $\psi{:}\psi$. Επίσης $0 \in \chi + 0$, επομένως το 0 ανήκει και στο $0{:}\chi$. Συνεπώς έχουμε

$$(\psi:\psi) \cap (0:\chi) \neq \emptyset \implies (\psi + \chi) \cap (0 + \psi) \neq \emptyset \implies$$
$$\implies (\chi + \psi) \cap \{ \psi \} \neq \emptyset$$

και έτσι $\psi \in \chi + \psi$.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι εκτός από το ψ, κανένα άλλο κ-στοιχείο δεν ανήκει στο $\chi + \psi$. Πράγματι, εστω $\psi' \in K$ και $\psi' \in \chi + \psi$. Τότε $\chi \in \psi':\psi$. Εξάλλου από τη σχέση $0 \in \chi + 0$ έπεται ότι $\chi \in 0:0$. Αρα $(\psi':\psi) \cap (0:0) \neq \emptyset$ και από το συνδετικό αξίωμα έχουμε ότι $(\psi' + 0) \cap (\psi + 0) \neq \emptyset$, δηλαδή $\{ \psi' \} \cap \{ \psi \} \neq \emptyset$ και έτσι $\psi = \psi'$.

Τέλος θα αποδείξουμε ότι κανένα ε-στοιχείο δεν ανήκει στο $\chi + \psi$. Πράγματι, έστω $\chi' \in \chi + \psi$. Τότε

$$0 + \chi' \subseteq 0 + (\chi + \psi)$$

απ' όπου έχουμε

$$\{ 0, \chi' \} \subseteq (0 + \chi) + \psi$$

ή ισοδύναμα

$$\{ 0, \chi' \} \subseteq \{ 0, \chi \} + \psi = (0 + \psi) \cup (\chi + \psi) =$$
$$= \{ \psi \} \cup (\chi + \psi)$$

το οποίο είναι ίσο με $\chi + \psi$, επειδή, όπως αποδείχθηκε προηγουμένως, $\psi \in \chi + \psi$. Αρα $0 \in \chi + \psi$, δηλαδή $\psi = -\chi$, άτοπο.

Συνεπώς $\psi = \chi + \psi$.

Η ανωτέρω σειρά των Προτάσεων επί των ιδιοτήτων των ε και κ-στοιχείων οδηγεί στην δημιουργία μιας σειράς από Ε.Σ.Υ. όπως αυτές παρουσιάζονται στα Παραδείγματα που ακολουθούν, και με την βοήθεια των οποίων καθίσταται πλέον εμφανής η σχέση των ε και κ-στοιχείων σε μια Ε.Σ.Υ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.

Εστω $(K,+)$ μια κανονική υπερομάδα, και α ένα στοιχείο που δεν ανήκει στην K. Στο σύνολο $H = K \cup \{\alpha\}$ εισάγουμε μιά υπερπράξη "$\dagger$" ως εξής:

$\chi \dagger \psi = (\chi + \psi) \cup \{\chi, \psi\}$ αν $\chi, \psi \in K$ και $\chi \neq -\psi, 0$

$\psi \dagger (-\psi) = H$ για κάθε $\psi \in K$

$\chi \dagger 0 = 0 \dagger \chi = \chi$ για κάθε $\chi \in K$

$\alpha \dagger \chi = \chi \dagger \alpha = \chi$ για κάθε $\chi \in K$

$\alpha \dagger \alpha = \{0, \alpha\}$

$\alpha \dagger 0 = \{0, \alpha\}$

Τότε το $(H,\dagger)$ είναι μία Ε.Σ.Υ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.

Εστω $(E,+)$ μια ενισχυμένη συνδετική υπερομάδα της οποίας όλα τα στοιχεία (πλήν του 0) είναι ε-στοιχεία. Εστω στη συνέχεια ένα στοιχείο α το οποίο δεν ανήκει στην E. Στο σύνολο $H = E \cup \{\alpha\}$ εισάγουμε μια υπερπράξη "$\dagger$" ορισμένη ως εξής:

$\chi \dagger \psi = \chi + \psi$ αν $\chi, \psi \in E$

$\chi \dagger \alpha = \alpha$ για κάθε $\chi \in E$

$\alpha \dagger \alpha = H$

και επομένως το α είναι κ-στοιχείο. Τότε το $(H,+)$ είναι επίσης μια Ε.Σ.Υ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.5.

Εστω $(K,\dot{+})$ μια κανονική υπερομάδα και $(E,\ddagger)$ μιά ενισχυμένη συνδετική υπερομάδα, για κάθε στοιχείο της οποίας να ισχύει $\chi \ddagger 0 = \{0, \chi\}$. Ας υποθέσουμε ακόμη ότι το ουδέτερο στοιχείο είναι κοινό και για τις δύο υπερομάδες. Τότε το σύνολο $H = K \cup E$ γίνεται ενισχυμένη συνδετική υπερομάδα, αν ορίσουμε μια υπερπράξη "+" ως ακολούθως:

$$\chi + \psi = \chi \dotplus \psi \qquad \text{αν } \chi, \psi \in E$$

$$\chi + \psi = \chi \dot{+} \psi \qquad \text{αν } \chi, \psi \in K \text{ και } \chi \neq -\psi$$

$$\chi + (-\chi) = (\chi \dot{+} (-\chi)) \cup E \qquad \text{αν } \chi \in K\backslash\{0\}$$

$$\chi + \psi = \psi \qquad \text{αν } \chi \in E,\ \psi \in K\backslash\{0\}$$

Εστω τέλος μια διευρημένη Δ-υπερομάδα $(H,+)$, η οποία όπως ήδη αναφέρθηκε είναι ενισχυμένη συνδετική. Ως γνωστόν (Πρόταση I.1.7) κάθε σχέση ισοδυναμίας στην $H\backslash\{0\}$ είναι ομαλή. Η ιδιότητα αυτή ισχύει και στην H για όλες εκείνες τις σχέσεις ισοδυναμίας για τις οποίες ισχύει $C_0 = \{0\}$. Πράγματι,

$$C_x + C_x = \bigcup_{x_1, x_2 \in C_x}(x_1 + x_2) =$$

$$= [\ \bigcup_{\substack{x_1, x_2 \in C_x \\ x_1 \neq x_2}}\{x_1, x_2\}\ ] \cup [\ \bigcup_{x_1 = x_2 \in C_x}\{0, x_1\}\ ] =$$

$$= \{0\} \cup C_x = C_0 \cup C_x \qquad \text{και}$$

$$C_0 + C_x = \bigcup_{x \in C_x}(0 + x) = \bigcup_{x \in C_x}\{0, x\} = C_0 \cup C_x$$

Εχουμε επομένως την Πρόταση:

Πρόταση 1.8. *Εστω $(H,+)$ μια διευρημένη Δ-υπερομάδα. Τότε*

i) κάθε σχέση ισοδυναμίας R στην H τέτοια ώστε $C_0 = \{0\}$ είναι ομαλή.

ii) το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας H/R εφοδιασμένο με την υπερπράξη:

$$C_x \dotplus C_y = \begin{cases} \{ C_x, C_y \} & \text{αν } C_x \neq C_y \\ \{ C_x, C_o \} & \text{αν } C_x = C_y \end{cases}$$

είναι ενισχυμένη συνδετική υπερομάδα με μη βαθμωτό ουδέτερο στοιχείο την κλάση $C_o = \{ 0 \}$.

-2-

Η ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΟΤΗΤΑ ΣΤΙΣ ΕΝΙΣΧΥΜΕΝΕΣ ΣΥΝΔΕΤΙΚΕΣ ΥΠΕΡΟΜΑΔΕΣ ΚΑΙ ΑΛΛΕΣ ΘΕΜΕΛΕΙΩΔΕΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Ενα από τα αξιώματα της κανονικής υπερομάδας είναι αυτό της (πλήρους) αναστρεψιμότητας [51], δηλαδή ότι

$$\omega \in \chi + \psi \implies \chi \in \omega - \psi \text{ και } \psi \in \omega - \chi$$

Η ιδιότητα αυτή αποτελεί ένα σημαντικότατο εργαλείο για την εξαγωγή συμπερασμάτων (βλ. και [10], [11], [12]). Ετσι κατ' αρχήν στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την ισχύ της στην περίπτωση των Ε.Σ.Υ.

Λήμμα 2.1. *Αν $w \in x + y$, τότε*

$$(w - x) \cap (0 + y) \neq \emptyset \text{ και } (w - y) \cap (x + 0) \neq \emptyset$$

Απόδειξη. $\omega \in \chi + \psi \implies \chi \in \omega:\psi$ και $\psi \in \omega:\chi$. Αφετέρου, $\psi \in 0:(-\psi)$ και $\chi \in 0:(-\chi)$. Επομένως,

$(\omega:\psi) \cap [0:(-\chi)] \neq \emptyset$ και $(\omega:\chi) \cap [0:(-\psi)] \neq \emptyset$. Συνεπώς λόγω του συνδετικού αξιώματος έχουμε αντίστοιχα:

$$(\omega - \chi) \cap (0 + \psi) \neq \emptyset \quad \text{και} \quad (\omega - \psi) \cap (\chi + 0) \neq \emptyset$$

Λήμμα 2.2. *Αν $\omega \in x + y$, και $x, y \in K$, τότε*

$$y \in \omega - x \quad \text{και} \quad x \in \omega - y$$

Απόδειξη. Λόγω του Λήμματος 2.1 ισχύουν οι σχέσεις:

$$(\omega - \chi) \cap (0 + \psi) \neq \emptyset \quad \text{και} \quad (\omega - \psi) \cap (\chi + 0) \neq \emptyset \qquad (1)$$

Αλλά τα χ, ψ είναι κ-στοιχεία, συνεπώς:

$$0 + \chi = \chi \quad \text{και} \quad 0 + \psi = \psi \qquad (2)$$

Ετσι από τις (1) και (2) έχουμε:

$$\psi \in \omega - \chi \quad \text{και} \quad \chi \in \omega - \psi$$

Λήμμα 2.3. *Αν $\omega \in x + y$, και $x \in K$, $y \in E$, τότε*

$$y \in \omega - x \quad \text{και} \quad x \in \omega - y$$

ενώ $\quad 0 \in 0 + y \Longrightarrow 0 \in 0 - y$ *και* $y \notin 0 - 0$

Απόδειξη. Λόγω του Λήμματος 2.1 ισχύουν οι σχέσεις:

$$(\omega - \chi) \cap (0 + \psi) \neq \emptyset \quad \text{και} \quad (\omega - \psi) \cap (\chi + 0) \neq \emptyset \qquad (1)$$

Για τα χ, ψ όμως έχουμε:

$$0 + \chi = \chi \quad \text{και} \quad 0 + \psi = \{0, \psi\} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$(\omega - \chi) \cap \{0, \psi\} \neq \emptyset \;\; (3\alpha) \quad \text{και} \quad (\omega - \psi) \cap \{\chi\} \neq \emptyset \;\; (3\beta)$$

Από την (3β) έχουμε $\chi \in \omega - \psi$, ενώ για την (3α) έχουμε την παρακάτω ανάλυση:

i) αν $\psi \in \omega - \chi$, τότε το Λήμμα ισχύει.

ii) αν $0 \in \omega - \chi$, τότε $\omega = \chi$ ή $\omega = 0$.

α] αν $\omega = \chi$, τότε συμφωνα με την Πρόταση 1.4 $E \subseteq \chi - \chi$ και επομένως $\psi \in \chi - \chi$, άρα το Λήμμα πάλι ισχύει.

β] αν $\omega = 0$, έπεται ότι $\chi = 0$, διότι σύμφωνα με την Πρόταση 1.2, $\psi \neq -\chi$, αφού το χ είναι κ ενώ το ψ είναι ε-στοιχείο, άρα

$$0 \in 0 + \psi \implies 0 \in 0 - \psi = \{0, -\psi\}, \text{ ενώ } \psi \notin 0 - 0$$

και επομένως το Λήμμα επαληθεύθηκε.

Σε σχέση με το παραπάνω Λήμμα αναφέρουμε ότι στα Παραδείγματα Ε.Σ.Υ. 1.3, 1.4 και 1.5, ισχύει η σχέση: $\chi \in \chi + \psi$, για $\chi \in K$, $\psi \in E$.

Λήμμα 2.4. *Αν $\omega \in x + y$, και $x, y \in E$, τότε $y \in \omega - x$, αν $x \neq \omega$, και $x \in \omega - y$, αν $y \neq \omega$*

Α π ό δ ε ι ξ η. Λόγω του Λήμματος 2.1 ισχύουν οι σχέσεις:

$$(\omega - \chi) \cap (0 + \psi) \neq \emptyset \quad \text{και} \quad (\omega - \psi) \cap (\chi + 0) \neq \emptyset \qquad (1)$$

Για τα χ, ψ όμως έχουμε:

$$0 + \chi = \{0, \chi\} \quad \text{και} \quad 0 + \psi = \{0, \psi\} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$(\omega - \chi) \cap \{0, \psi\} \neq \emptyset \quad \text{και} \quad (\omega - \psi) \cap \{0, \chi\} \neq \emptyset$$

Ετσι από την πρώτη από αυτές, αν $\chi \neq \omega$, έχουμε ότι $\psi \in \omega - \chi$, ενώ από την δεύτερη, αν $\psi \neq \omega$, έχουμε $\chi \in \omega - \psi$.

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση μιας Ε.Σ.Υ. στην οποία υπάρχουν ε-στοιχεία χ, ψ τέτοια ώστε $\chi \in \chi + \psi$. Μια τέτοια μας προσφέρει το Παράδειγμα 1.1 όπου έχουμε την υπερπράξη:

$$\chi \dagger \psi = \{\chi, \psi, \chi+\psi\}$$

Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι όλα τα στοιχεία της υπερομάδας αυτής, πλήν του 0, είναι ε-στοιχεία και ότι

$$\chi \in \chi + \psi$$

Από την σχέση όμως αυτή έπεται ότι

$$\chi \in \chi - \psi = \{\chi,\ -\psi,\ \chi-\psi\}$$

αλλά $\quad \psi \notin \chi - \chi = \{\chi,\ -\chi,\ 0\}$

Αντίθετα στην Ε.Σ.Υ. (Η,+) του παραδείγματος 1.2 με αυτοαντίθετα στοιχεία είναι $E = H^-$ και για κάθε $\chi,\ \psi \in E$, με $\chi \neq \psi$ εχουμε $\chi,\ \psi \in \chi + \psi$, από την οποία

$$\chi \in \chi + \psi \implies \chi \in \chi - \psi = \chi + \psi$$

ενώ εν γένει

$$\psi \notin \chi - \chi = \chi + \chi = [\chi, 0]$$

εκτός αν $\chi < \psi$, οπότε έχουμε $\psi \in \chi - \chi$.

Ετσι έχουμε το

Λήμμα 2.5. *Αν $x \in x + y$, και $x, y \in E$, τότε για $x \neq y$ εν γένει δεν ισχύει η σχέση $y \in x - x$ (ενώ $x \in x - y$).*

Από την Πρόταση 1.3 έχουμε τέλος και το

Λήμμα 2.6. *Για κάθε $x \in E$ ισχύει:*

$$x \in x + x \iff x \in x - x$$

Από τη ανωτέρω σειρά των Λημμάτων προκύπτει η εξαιρετικής σημασίας ακόλουθη

Πρόταση 2.1. *Κάθε Ε.Σ.Υ. (Η,+) είναι εν γένει αναστρέψιμη. Δηλαδή για κάθε $x, y, \omega \in H$ έχουμε εν γένει* την συνεπαγωγή:

$$\omega \varepsilon x + y \implies y \varepsilon \omega - x$$

(άρα και $x \varepsilon \omega - y$) εκτός για $\omega = x \neq y$, οπότε:

$$x \varepsilon x + y \implies x \varepsilon x - y, \text{ ενώ εν γένει } y \not\varepsilon x - x$$

Πόρισμα 2.1. Για κάθε $x, y, \omega \varepsilon H$ ισχύει

$$\omega \varepsilon x + y \implies \text{ή } x \varepsilon \omega - y \text{ ή } y \varepsilon \omega - x$$

(μερική αναστρεψιμότητα).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.1.

Αν μία ΕΣΥ είναι πλήρως αναστρέψιμη, τότε είναι κανονική.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.2.

Ως γνωστόν από τα αξιώματα της κανονικής υπερομάδας προκύπτει η συνδετικότητα [37]. Αν όμως σε μια αντιμεταθετική υπερομάδα επαληθεύονται τα αξιώματα FJ_1, FJ_2 και η αναστρεψιμότητα, τότε δεν έπεται η συνδετικότητα, όπως αυτό εξάγεται από το παρακάτω Παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.

Εστω Η ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο και συμμετρικό αναφορικά ως προς ένα κέντρο $0 \in H$. Σύμφωνα με τα όσα έχουμε αναφέρει στο Παράδειγμα 1.2. και με βάση τους συμβολισμούς που έχουμε χρησιμοποιήσει εκεί, μπορούμε να εισάγουμε μια υπερπράξη "+" σε αυτό ορισμένη με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\chi + \psi = \{-\psi, \psi\} \quad \text{αν } |\chi| \leq |\psi| \text{ και } \psi \neq -\chi$$

$$\chi - \chi = [-|\chi|, |\chi|] \quad \text{αν } \chi \neq 0$$

$$0 + 0 = 0$$

όπου

$$|\chi| = \chi, \text{ αν } \chi \in H^+, \ -\chi, \text{ αν } \chi \in H^- \text{ και } 0, \text{ αν } \chi = 0$$

Τότε το $(H,+)$ είναι μια αντιμεταθετική υπερομάδα η οποία επαληθεύει τα αξιώματα FJ_1, FJ_2 καθώς και την αναστρεψιμότητα. Για την επαγόμενη υπερπράξη ":" στη υπερομάδα αυτή ισχύει:

$$\chi:\psi = \begin{cases} -\psi & \text{αν } |\chi| < |\psi| \\ [\,-|\chi|,\ |\chi|\,] & \text{αν } |\chi| = |\psi| \neq 0 \\ 0 & \text{αν } \chi = \psi = 0 \\ \{\chi,\ -\chi\} & \text{αν } |\chi| > |\psi| \end{cases}$$

Εστω τώρα η τομή $(\chi:\psi) \cap (\psi:\omega)$ για $|\psi| > |\omega|$ και $|\psi| > |\chi|$. Τότε $\chi:\psi = -\psi$ και $\psi:\omega = \{-\psi, \psi\}$ άρα

$$(\chi:\psi) \cap (\psi:\omega) \neq \emptyset$$

ενώ

$$(\chi + \omega) \cap (\psi + \psi) = (\chi + \omega) \cap \{-\psi, \psi\} = \emptyset$$

δηλαδή η υπερομάδα δέν είναι συνδετική.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι, όπως εύκολα συνάγεται από την Πρόταση 1.2,

$$-(0 + \chi) = 0 - \chi$$

για κάθε $\chi \in H$, όπου για $A \subseteq H$, $-A = \{\chi \in H \mid -\chi \in A\}$. Για το υπεράθροισμα όμως $\chi + \psi$, γενικότερα ισχύει η

Πρόταση 2.2. Για κάθε $x, y \in H$ με $y \neq -x$ έχουμε

$$-(x + y) = -x - y$$

ενώ δεν ισχύει εν γένει για $y = -x$.

Α π ό δ ε ι ξ η. Η Πρόταση κατά τα ανωτέρω ισχύει άν ένα από τα χ, ψ είναι 0. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $\chi, \psi \neq 0$. Εστω $\omega \in \chi + \psi$. Τότε, επειδή ισχύει η μερική αναστρεψιμότητα θα έχουμε ότι ή $\chi \in \omega - \psi$ ή $\psi \in \omega - \chi$. Αν π.χ. $\chi \in \omega - \psi$ έχουμε

$$\chi - \chi \subseteq (\omega - \psi) - \chi = \omega + (-\psi - \chi)$$

απ' όπου έπεται ότι $0 \in \omega + (-\psi - \chi)$. Επειδή όμως $\psi \neq -\chi$, έχουμε ότι $0 \notin -\psi - \chi$. Αρα $-\omega \in -\psi - \chi$ και συνεπώς $-(\chi + \psi) \subseteq -\chi - \psi$. Αντιστρόφως για $\omega \in -\chi - \psi$ θα έχουμε π.χ. $-\chi \in \omega + \psi$, άρα $\chi - \chi \subseteq \omega + (\chi + \psi)$, απ' όπου επειδή $\chi \neq -\psi$ έπεται ότι $\omega \in -(\chi + \psi)$ και επομένως $-\chi - \psi \subseteq -(\chi + \psi)$. Συνεπώς $-\chi - \psi = -(\chi + \psi)$ και η Πρόταση αποδείχθηκε για $\psi \neq -\chi$.

Για την περίπτωση $\chi = -\psi$ η ανωτέρω ιδιότητα δεν ισχύει εν γένει, όπως προκύπτει από το παράδειγμα που ακολουθεί, ενώ στα Παραδείγματα 1.1 και 1.2 όπως και σε Ε.Σ.Υ. με αυτοαντίθετα στοιχεία αυτή ισχύει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2.

Εστω και πάλι ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο Η καί συμμετρικό αναφορικά ως προς ένα κέντρο $0 \in H$. Εισάγουμε σε αυτό μια υπερπράξη "+" ορισμένη ως εξής:

$$\chi + \psi = \{\chi, \psi\} \quad \text{αν} \quad \psi \neq -\chi$$
$$\chi + (-\chi) = [0, |\chi|] \cup \{-|\chi|\}$$

Τότε η δομή (Η, +) είναι μιά ενισχυμένη συνδετική υπερομάδα (με ελαφρά παραλλαγή της υπερπράξης προκύπτει κανονική υπερομάδα, βλ. [48], [56]). Πράγματι η προσεταιριστική ιδιότητα ισχύει προφανώς αν κανένα από τα στοιχεία χ, ψ, ω δεν είναι αντίθετο άλλου. Πρέπει στη συνέχεια να ελεγχθούν οι περιπτώσεις για $\psi = -\chi$, $\omega = -\chi$, $\omega = -\psi$, δηλαδή:

$$(\chi - \chi) + \omega = \chi + (-\chi + \omega)$$

$$(\chi + \psi) - \chi = \chi + (\psi - \chi)$$

$$(\chi + \psi) - \psi = \chi + (\psi - \psi)$$

Παρατηρούμε ότι από την απόδειξη της πρώτης συμπεραίνεται η τρίτη και από αυτήν η δεύτερη. Αποδεικνύουμε λοιπόν την ισχύ της πρώτης.

Για $\omega = \chi$ φανερή. Για $\omega = -\chi$ είναι:

$$(\chi - \chi) - \chi = ([0, |\chi|] \cup \{-|\chi|\}) + (-\chi) =$$
$$= [0, |\chi|] \cup \{ -|\chi| \} = \chi - \chi =$$
$$= \chi + (-\chi - \chi)$$

Για $|\omega| < |\chi|$

Αν $\omega \in [0, |\chi|]$, τότε

$$(\chi - \chi) + \omega = ([0, |\chi|] \cup \{-|\chi|\}) + \omega =$$
$$= [0, |\chi|] \cup \{ -|\chi| \} = \chi - \chi$$

και

$$\chi + (-\chi + \omega) = \chi + \{ -\chi, \omega \} = (\chi - \chi) \cup (\chi + \omega) =$$
$$= [0, |\chi|] \cup \{ -|\chi| \} \cup \{ \chi, \omega \} = \chi - \chi$$

Αν τώρα $-\omega \in [0, |\chi|]$, τότε

$$(\chi - \chi) + \omega = ([0, |\chi|] \cup \{-|\chi|\}) + \omega =$$
$$= [0, |\chi|] \cup \{-|\omega|, -|\chi|, \omega\}$$

λόγω όμως της υπόθεσης που έχουμε κάνει για το ω, ισχύει ότι $-|\omega| = \omega$ και επομένως

$$(\chi - \chi) + \omega = [0, |\chi|] \cup \{-|\chi|, \omega\}$$

Εξάλλου:

$$\begin{aligned} \chi + (-\chi + \omega) &= \chi + \{-\chi,\ \omega\} = (\chi - \chi) \cup (\chi + \omega) = \\ &= [0,\ |\chi|] \cup \{-|\chi|\} \cup \{\chi,\ \omega\} = \\ &= [0,\ |\chi|] \cup \{-|\chi|,\ \omega\} \end{aligned}$$

επομένως $(\chi - \chi) + \omega = \chi + (-\chi + \omega)$

Για $|\omega| > |\chi|$

$$\begin{aligned} (\chi - \chi) + \omega &= ([0,\ |\chi|] \cup \{-|\chi|\}) + \omega = \\ &= [0,\ |\chi|] \cup \{ -|\chi| \} \cup \{ \omega \} = \\ &= (\chi - \chi) \cup \{ \omega \} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \chi + (-\chi + \omega) &= \chi + \{ -\chi,\ \omega \} = (\chi - \chi) \cup (\chi + \omega) = \\ &= [0,\ |\chi|] \cup \{ -|\chi| \} \cup \{ \chi,\ \omega \} = \\ &= (\chi - \chi) \cup \{ \omega \} \end{aligned}$$

επομένως $(\chi - \chi) + \omega = \chi + (-\chi + \omega)$

Για την επαγόμενη τώρα υπερπράξη έχουμε

$$\chi:\psi = \begin{cases} \{\chi\} & \text{αν } \chi \notin [0,\ |\psi|] \\ \{\chi,\ -\psi\} & \text{αν } \chi \in [0,\ |\psi|) \\ H & \text{αν } \chi = \psi \end{cases}$$

και επειδή αυτά είναι διάφορα του κενού για κάθε $\chi,\ \psi \in H$, έπεται ότι η υπερδομή $(H,+)$ είναι υπερομάδα [38].

Στη συνέχεια για να επαληθεύσουμε το συνδετικό αξίωμα διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

Εστω $\chi : \psi = \{\chi\}$. Τότε

$$(\chi : \psi) \cap (\chi : \omega) \neq \emptyset \Longrightarrow (\chi + \omega) \cap (\chi + \psi) \supseteq \{\chi\} \neq \emptyset$$

$$(\chi : \psi) \cap (\chi : \chi) \neq \emptyset \Longrightarrow (\chi + \chi) \cap (\chi + \psi) \supseteq \{\chi\} \neq \emptyset$$

$$(\chi : \psi) \cap (\psi : \psi) \neq \emptyset \Longrightarrow (\chi + \psi) \cap (\psi + \psi) \supseteq \{\psi\} \neq \emptyset$$

$$(\chi : \psi) \cap (\varphi : \varphi) \neq \emptyset \Longrightarrow (\chi + \varphi) \cap (\psi + \varphi) \supseteq \{\varphi\} \neq \emptyset$$

$$(\chi : \psi) \cap (\chi : -\chi) \neq \emptyset \Longrightarrow (\chi - \chi) \cap (\chi + \psi) \supseteq \{\chi\} \neq \emptyset$$

Αν $\omega \in [0,\ |\chi|]$ και $|\chi| = -\chi$. Τότε:

$$(\chi : \psi) \cap (\omega : -\chi) = \{\chi\} \ (\neq \emptyset) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (\chi - \chi) \cap (\omega + \psi) = ([0, |\chi|] \cup \{-|\chi|\}) \cap (\omega + \psi) \supseteq$$

$$\supseteq \{\omega\} \ (\neq \emptyset)$$

Εστω ότι $\chi : \psi = \{\chi, -\psi\}$. Τότε

$$(\chi : \psi) \cap (-\psi : \omega) = \{-\psi\} \Longrightarrow (\chi + \omega) \cap (\psi - \psi) \supseteq \{\chi\}$$

Αν $\omega \in [0, \psi)$. Τότε

$$(\chi : \psi) \cap (\omega : \psi) = \{-\psi\} \Longrightarrow (\chi + \psi) \cap (\omega + \psi) \supseteq \{\psi\}$$

Τέλος στην περίπτωση που $\chi : \psi = H$, δηλαδή όταν $\chi = \psi$ τότε για κάθε $\varphi, \omega \in H$, έχουμε:

$$(\chi : \chi) \cap (\varphi : \omega) \neq \emptyset \Longrightarrow (\chi + \omega) \cap (\chi + \varphi) \supseteq \{\chi\}$$

και επομένως το συνδετικό αξίωμα ισχύει σε κάθε περίπτωση.

Στην υπερομάδα αυτή παρατηρούμε ότι

$$\chi - \chi = [0, |\chi|] \cup \{-|\chi|\}$$

ενώ

$$-(\chi - \chi) = -([0, |\chi|] \cup \{-|\chi|\}) = [-|\chi|, 0] \cup \{|\chi|\}$$

Συνεπώς $\chi - \chi \neq -(\chi - \chi)$.

Αρα **σε μία ενισχυμένη συνδετική υπερομάδα γενικά δεν ισχύει η ισότητα $\chi - \chi = -(\chi - \chi)$.**

Ορισμός 2.1. Ενα στοιχείο χ μιας Ε.Σ.Υ. λέγεται **ομαλό** άν γι' αυτό ισχύει $-(\chi - \chi) = \chi - \chi$, άλλως λέγεται **στρεβλό**. Μια Ε.Σ.Υ. ονομάζεται **ομαλή**, άν όλα της τα στοιχεία είναι ομαλά και **στρεβλή** όταν περιέχει ένα τουλάχιστον στρεβλό στοιχείο.

Ως παράδειγμα στρεβλής Ε.Σ.Υ. έχουμε το προηγούμενο, ενώ ως παράδειγμα ομαλής αναφέρουμε την διευρημένη Δ-υπερομάδα, της οποίας τα στοιχεία είναι αυτοαντίθετα αλλά και το παράδειγμα 1.1, όπου τα στοιχεία της υπερομάδας δεν είναι αυτοαντίθετα. (Το ομαλό της Δ-υπερομάδας θα απαιτηθεί στην χαρακτηριστική των υπερδακτυλιοειδών).

Πρόταση 2.3. *Τα u-στοιχεία μιας Ε.Σ.Υ. είναι ομαλά.*

Απόδειξη. Εστω $\chi \in K$ και $\omega \in \chi - \chi$. Τότε, επειδή το χ είναι κ-στοιχείο, σύμφωνα με το Λήμμα 2.2, ισχύει η (πλήρης) αναστρεψιμότητα και συνεπώς $\chi \in \omega + \chi$. Οπότε έχουμε

$$\chi - \chi \subseteq (\omega + \chi) - \chi = \omega + (\chi - \chi)$$

απ' όπου έπεται ότι $0 \in \omega + (\chi - \chi)$.

Αν το ω είναι κ-στοιχείο θα πρέπει $-\omega \in \chi - \chi$, διότι μόνον για το $-\omega$ ισχύει $0 \in \omega - \omega$. Συνεπώς έχουμε:

$$\{ -\omega \mid \omega \in \chi - \chi \text{ καί } \omega \in K \} \subseteq \chi - \chi$$

Αν το ω είναι ε-στοιχείο τότε σύμφωνα με την Πρόταση 1.2 και το $-\omega$ είναι επίσης ε-στοιχείο και επειδή, λόγω της Προτάσεως 1.4, όλα τα ε-στοιχεία περιλαμβάνονται στο $\chi - \chi$ θα έχουμε $-\omega \in \chi - \chi$ και συνεπώς πάλι ισχύει:

$$\{ -\omega \mid \omega \in \chi - \chi \text{ καί } \omega \in E \} \subseteq \chi - \chi$$

Αρα $-(\chi - \chi) \subseteq \chi - \chi$.

Αντιστρόφως αν $\omega \in -(\chi - \chi)$ τότε $-\omega \in \chi - \chi$. Εργαζόμενοι εν συνεχεία ομοίως προς τα ανωτέρω συνάγουμε ότι $\chi - \chi \subseteq -(\chi - \chi)$ και συνεπώς προκύπτει η Πρόταση.

Πρόταση 2.4. *Αν τα x, y είναι δύο στοιχεία της*

Η ευ των οποίων το y να είναι ομαλό στοιχείο ή αν για το x ισχύει $x \notin y - y$, τότε έχουμε

$$-(x:y) = (-x):(-y)$$

Απόδειξη. Αν $\chi \notin \psi - \psi$, τότε $-\psi \notin \chi:\psi$. Ετσι για κάθε z από το $\chi:\psi$ ισχύει $-(z + \psi) = -z - \psi$ (Πρόταση 2.2). Αν το ψ είναι ομαλό στοιχείο τότε η ανωτέρω ισότητα πάντα ισχύει. Ετσι έχουμε

$$-(\chi:\psi) = \{ \omega \in H \mid -\omega \in \chi:\psi \} = \{ \omega \in H \mid \chi \in -\omega + \psi \} =$$
$$= \{ \omega \in H \mid -\chi \in -(-\omega + \psi) \} = \{ \omega \in H \mid -\chi \in \omega - \psi \} =$$
$$= (-\chi):(-\psi)$$

Αν βέβαια η H είναι ομαλή η ανωτέρω ιδιότητα ισχύει πάντοτε.

Πρόταση 2.5. Για κάθε $x, y \in H$ ισχύει

$$x - y \subseteq (x:y) \cup (-y):(-x)$$

Αν ένα από τα x, y είναι u-στοιχείο τότε

$$x - y = x:y = (-y):(-x)$$

Απόδειξη. Εστω $\omega \in \chi - \psi$. Τότε

ή $\chi \in \omega + \psi$ απ' όπου έπεται ότι $\omega \in \chi:\psi$

ή $-\psi \in \omega - \chi$ απ' όπου έπεται ότι $\omega \in (-\psi):(-\chi)$

Συνεπώς $\omega \in \chi:\psi \cup (-\psi):(\chi)$ και επομένως η ζητούμενη σχέση.

Αν τώρα ένα από τα χ, ψ είναι κ-στοιχείο, τότε λόγω του Λήμματος 2.3, έχουμε:

$$\chi:\psi = \{ \omega \in H \mid \chi \in \omega + \psi \} =$$
$$= \{ \omega \in H \mid \omega \in \chi - \psi \} = \chi - \psi$$

και

$$(-\psi):(-\chi) = \{ \omega \in H \mid -\psi \in \omega - \chi \} =$$
$$= \{ \omega \in H \mid \omega \in \chi - \psi \} = \chi - \psi$$

Αν βεβαίως η υπερομάδα Η είναι κανονική, τότε πάντοτε η Πρόταση ισχύει με ισότητα.

Τέλος σε αντιστοιχία με τα όσα ισχύουν στις κανονικές υπερομάδες έχουμε την

Πρόταση 2.6. Αν τα x,y,φ,ω είναι στοιχεία της Η διάφορα του μηδενός με $\varphi \neq -\omega, x$ και $y \neq \omega$, τότε

$$(x + y) \cap (\varphi + \omega) \neq \emptyset \implies (x - \varphi) \cap (\omega - y) \neq \emptyset$$

Η συνεπαγωγή αυτή ισχύει χωρίς κανένα περιορισμό για κάθε τετράδα κ-στοιχείων της Η.

Απόδειξη. Εστω $\tau \in (\chi + \psi) \cap (\varphi + \omega)$. Τότε $\tau \in \chi+\psi$ και $\tau \in \varphi + \omega$, συνεπώς

$$\tau - \tau \subseteq (\chi + \psi) - (\varphi + \omega)$$

Λόγω όμως της Προτάσεως 2.2. επειδή από υπόθεση $\varphi \neq -\omega$, ισχύει η ισότητα $-(\varphi + \omega) = -\varphi -\omega$ και επομένως η ανωτέρω σχέση γίνεται:

$$\tau - \tau \subseteq (\chi - \varphi) + (\psi - \omega)$$

Επειδή όμως $\psi \neq \omega$ έχουμε $\psi - \omega = -(\omega - \psi)$, συνεπώς

$$\tau - \tau \subseteq (\chi - \varphi) - (\omega - \psi) \qquad \text{(i)}$$

Σημειώνουμε ότι η παραπάνω σχέση (i) ισχύει παντοτε, για κάθε τετράδα χ,ψ,φ,ω ομαλών στοιχείων άρα, σύμφωνα με την Πρόταση 2.3, για κάθε τετράδα κ-στοιχείων. Από τη σχέση λοιπόν (i) προκύπτει ότι

$$0 \in (\chi - \varphi) - (\omega - \psi) \qquad \text{(ii)}$$

Αν τα χ,ψ,φ,ω είναι κ-στοιχεία, τότε από την σχέση (ii) έπεται, ότι τα $\chi - \varphi$ και $\omega - \psi$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό στοιχείο. Επιπλέον αν τα $\chi, \psi, \varphi, \omega$ είναι ε-στοιχεία, τότε από την (ii) έπεται ότι:

$0 \in \chi - \varphi$

ή $0 \in \omega - \psi$

ή ότι τα $\chi - \varphi$ και $\omega - \psi$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό στοιχείο.

Αφού όμως έχουμε υποθέσει ότι $\chi \neq \varphi$, $\omega \neq \psi$, ισχύει το τελευταίο και επομένως:

$$(\chi - \varphi) \cap (\omega - \psi) \neq \emptyset$$

—3—

ΥΠΟ—ΥΠΕΡΟΜΑΔΕΣ ΤΗΣ ΕΝΙΣΧΥΜΕΝΗΣ ΣΥΝΔΕΤΙΚΗΣ ΥΠΕΡΟΜΑΔΑΣ

Επειδή η ενισχυμένη συνδετική υπερομάδα είναι μία συνδετική υπερομάδα, κατ' αντιστοιχία με τα όσα ισχύουν στις συνδετικές υπερομάδες θα έχουμε και πάλι συνδετικές και μη συνδετικές υπο-υπερομάδες. Εστω λοιπόν (H,+) μία ενισχυμένη συνδετική υπερομάδα. Τότε, λόγω της Προτάσεως I.2.2, έχουμε αφενός, ότι κάθε συνδετική της υπο-υπερομάδα είναι κλειστή μέσα στην H, και αντιστρόφως, αφετέρου δε, επειδή ως γνωστόν [31], [51], κάθε κλειστή υπο-υπερομάδα μιας οποιασδήποτε υπερομάδας περιέχει όλα τα ουδέτερα στοιχεία της, αν h μία κλειστή υπο-υπερομάδα της H θα είναι $0 \in h$ και επομένως κάθε συνδετική υπο-υπερομάδα της περιέχει το 0. Επιπλέον όμως έχουμε ότι για κάθε $x \in h$ και το $-x \in h$. Διότι, αφού η h είναι κλειστή, η επαγόμενη υπερπράξη σ' αυτή είναι σταθερή [39], και άρα $0:\chi \subseteq h$. Αλλά $-\chi \in 0:\chi$ και επομένως $-\chi \in h$. Εχουμε έτσι την ακόλουθη πολύ σημαντική Πρόταση:

Πρόταση 3.1. Κάθε συνδετική υπο - υπερομάδα μιας Ε.Σ.Υ. είναι αυτή η ίδια Ε.Σ.Υ. με το ίδιο μηδέν.

Εξάλλου, είναι γνωστό [51], ότι άν μιά υπο-υπερομάδα κανονικής υπερομάδας περιέχει το μηδέν της, τότε αυτή είναι κανονική υπο-υπερομάδα της. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο στις Ε.Σ.Υ. Δηλαδή αν μία υπο-υπερομάδα ενισχυμένης συνδετικής υπερομάδας περιέχει το μηδέν της, δεν είναι κατ' ανάγκη συνδετική, όπως το βλέπουμε στο επόμενο παράδειγμα που αποτελεί ειδική περίπτωση του Παραδείγματος 1.1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.

Τό σύνολο Z των σχετικών ακεραίων αποτελεί Ε.Σ.Υ. (Παράδειγμα 1.1) με την υπερπράξη:

$$\chi + \psi = \{\chi, \psi, \chi+\psi\}$$

Διαπιστώνεται ότι το υποσύνολό του Z_2 των αρτίων ακεραίων (συμπεριλαμβανομένου και του μηδενός) αποτελεί υπο-υπερομάδα του, η οποία μάλιστα περιέχει το 0, αλλά δεν είναι συνδετική, ως μη κλειστή. Είναι πράγματι για $\chi \in Z_1 (= Z \setminus Z_2)$, $(\chi + Z_2) \cap Z_2 \neq \emptyset$, επειδή για κάθε $\psi \in Z_2$ έχουμε ότι $\chi + \psi = \{\chi, \psi, \chi+\psi\}$ και $\{\chi, \psi, \chi+\psi\} \cap Z_2 = \{\psi\} \neq \emptyset$. Αλλωστε η επαγόμενη υπερπράξη στο Z_2 δεν είναι σταθερή, αφού για κάθε $\chi \in Z_2$ ισχύει $\chi:\chi = Z$. Παρατηρούμε δηλαδή ότι για την υπο-υπερομάδα Z_2 ισχύουν τα εξής:

i) $0 \in Z_2$

ii) αν $\chi \in Z_2$ τότε και $-\chi \in Z_2$

Είναι όμως φανερό ότι από το (ii) μόνο έπεται το (i). Ετσι από το Παράδειγμα αυτό προκύπτει μιά ευρύτερη από τις συνδετικές κατηγορία υπο-υπερομάδων μιας Ε.Σ.Υ. σύμφωνα με τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 3.1. Μια υπο-υπερομάδα h της H θα καλείται **συμμετρική** αν $-\chi \in h$ για κάθε $\chi \in h$.

Αμεσο επακόλουθο του Ορισμού είναι ότι $0 \in h$, όπως επίσης:

Πρόταση 3.2. Κάθε συνδετική υπο-υπερομάδα μιας Ε.Σ.Υ. είναι συμμετρική.

Με βάση λοιπόν τα προηγούμενα διακρίνουμε τούς εξής τρείς τύπους ειδικών υπο-υπερομάδων μιας Ε.Σ.Υ.

i> υπο-υπερομάδες συνδετικές.

ii> υπο-υπερομάδες συμμετρικές, μη συνδετικές και

iii> υπο-υπερομάδες μη συμμετρικές, άρα και μη συνδετικές.

Στην πορεία θα ασχοληθούμε μόνο με υπο-υπερομάδες των δύο πρώτων κατηγοριών.

I. ΣΥΝΔΕΤΙΚΕΣ ΥΠΟ-ΥΠΕΡΟΜΑΔΕΣ

Από την Πρόταση I.2.3 που παρέχει μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ένα υποσύνολο μιας συνδετικής υπερομάδας, συνδετική υπο-υπερομάδα της, έχουμε για την περίπτωση των Ε.Σ.Υ. την Πρόταση (αντίστοιχη με αυτήν των κανονικών υπερομάδων):

Πρόταση 3.3. *Για να είναι ένα μη κενό υποσύνολο h της H συνδετική υπο-υπερομάδα της, πρέπει και αρκεί για κάθε $x, y \in h$ να είναι $x:y \subseteq h$ και $x - y \subseteq h$.*

Απόδειξη. Η συνθήκη είναι προφανώς αναγκαία. Αντιστρόφως, $\chi \in h$ συνεπάγεται $\chi - \chi \subseteq h$, άρα $0 \in h$ κατά συνέπεια $0 - \chi \subseteq h$ εξού $-\chi \in h$. Προκύπτει ότι $\chi + h = \chi - (-h) = \chi - h \subseteq h$. Αφετέρου για κάθε $\psi \in h$ έχουμε $\psi - \chi \subseteq h$, άρα $\psi - \chi + \chi = \psi + (\chi - \chi) \subseteq \chi + h$ από την οποία έχουμε $\psi \in \chi + h$, δηλαδή $h \subseteq \chi + h$. Άρα $\chi + h = h$ και η h είναι υπερομάδα, η οποία λόγω της $\chi:\psi \subseteq h$ είναι κλειστή, άρα συνδετική.

Πόρισμα 3.1. *Ενα υποσύνολο h της H είναι συνδετική υπο-υπερομάδα αν και μόνον αν είναι σταθερή ως προς την υπερπράξη και την επαγόμενη υπερπράξη της H και περιέχει συγχρόνως με κάθε στοιχείο $x \in h$ το αντίθετό του.*

Για τις συνδετικές υπο-υπερομάδες μιας Ε.Σ.Υ. έχουμε, όπως προκύπτει από την Πρόταση 1.4, την Πρόταση:

Πρόταση 3.4. *Καμμία (γνήσια) συνδετική υπο-υπερομάδα μιας Ε.Σ.Υ.*

i) δεν έχει μόνον u-στοιχεία.

ii) δεν είναι κανονική υπο-υπερμάδα ($\neq 0$).

καθώς επίσης και τις προτάσεις:

Πρόταση 3.5. *Αν $h \neq \{0\}$ συνδετική υπο-υπερ-ομάδα της H και $h \cap K\setminus\{0\} = \phi$ τότε $h = E \cup \{0\}$.*

Απόδειξη. Προφανώς είναι $h \subseteq E \cup \{0\}$. Εξάλλου για τυχόν $\chi \in E \cup \{0\}$, θα είναι

$$(\chi+h) \cap h \supseteq (\chi + 0) \cap h = \{\chi, 0\} \cap h = \{0\}$$

Αρα $(\chi+h) \cap h \neq \phi$ και επειδή η h ως συνδετική είναι κλειστή, έπεται ότι $\chi \in h$ και επομένως $E \cup \{0\} \subseteq h$.

Πόρισμα 3.2. *Οι Ε.Σ.Υ. οι οποίες αποτελούνται μόνον από e-στοιχεία, δεν έχουν γνήσιες συνδετικές υπο-υπερ-ομάδες.*

Πόρισμα 3.3. *Οι Ε.Σ.Υ. οι οποίες αποτελούνται μόνον από e-στοιχεία, δεν έχουν αντιστρέψιμες υπο-υπερ-ομάδες.*

(διότι κάθε αντιστρέψιμη υπο-υπερομάδα είναι κλειστή [31])

Πρόταση 3.6. *Η $E^{\wedge} = E \cup \{0\}$ είναι συνδετική υπό-υπερομάδα της H.*

Α π ό δ ε ι ξ η. Από την Πρόταση 1.2 έχουμε ότι άν το χ είναι ένα ε-στοιχείο, τότε και το $-\chi$ είναι επίσης ε-στοιχείο. Αρα αν $\chi \in E^{\wedge}$ τότε και $-\chi \in E^{\wedge}$. Από την Πρόταση τώρα 1.6 προκύπτει ότι $\chi + E^{\wedge} \subseteq E^{\wedge}$ για κάθε $\chi \in E^{\wedge}$. Εστω τώρα ψ ένα στοιχείο της $E^{\wedge}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει στοιχείο ω της $E^{\wedge}$ τέτοιο ώστε το ψ να ανήκει στο υπεράθροισμα $\chi + \omega$. Πράγματι θεωρούμε το σύνολο $-\chi + \psi$. Τότε έχουμε:

$$\chi + (-\chi + \psi) = (\chi - \chi) + \psi \supseteq 0 + \psi = \{ 0, \psi \}$$

Συνεπώς υπάρχει στοιχείο ω του υπεραθροίσματος $-\chi + \psi$, τέτοιο ώστε το ψ να ανήκει στο $\chi + \omega$. Αρα $E^{\wedge} \subseteq \chi + E^{\wedge}$ και συνεπώς η $E^{\wedge}$ είναι υπο-υπερομάδα της Η. Εστω στη συνέχεια ένα στοιχείο z του συνόλου $H \backslash E^{\wedge}$. Τότε το z είναι ένα κ-στοιχείο. Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο χ από το $E^{\wedge}$ η τομή $(z + \chi) \cap E^{\wedge}$ είναι διάφορη του κενού. Δηλαδή έστω ψ στοιχείο της $E^{\wedge}$ τέτοιο ώστε το ψ να ανήκει στο $z + \chi$. Τότε $0 + \psi \subseteq 0 + (z + \chi)$, ή ισοδύναμα

$$\{ 0, \psi \} \subseteq (0 + z) + \chi = z + \chi$$

Επομένως το 0 ανήκει στό $z + \chi$ και συνεπώς $\chi = -z$, πράγμα άτοπο (Πρόταση 1.2). Αρα $(z + E^{\wedge}) \cap E^{\wedge} = \emptyset$ για κάθε $z \in H \backslash E^{\wedge}$ και συνεπώς η $E^{\wedge}$ είναι κλειστή και άρα συνδετική υπο-υπερομάδα της Η.

Από την ανωτέρω Πρόταση και το Πόρισμα 3.2 προκύπτει η ακόλουθη Πρόταση:

Πρόταση 3.7. *Η υπο-υπερομάδα $E^{\wedge}$ είναι η ελάχιστη, με την έννοια του εγκλεισμού, συνδετική υπο-υπερομάδα* *της H.*

Εστω χ ένα ε-στοιχείο. Τότε $0 \in 0 + \chi$ και επομένως $\chi \in 0{:}0$. Επιπλέον έχουμε ότι $0 = 0 + 0$, άρα $0 \in 0{:}0$. Αν όμως ψ ένα κ-στοιχείο, τότε $0 \notin 0 + \psi$ και άρα $\psi \notin 0{:}0$. Ετσι έχουμε την

Πρόταση 3.8. Η ελάχιστη συνδετική υπο-υπερομάδα $E^{\wedge}$ ισούται με το υπλίμο 0:0

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.1.

Στο Παράδειγμα 1.5 κατασκευάσαμε μία Ε.Σ.Υ. Η, χρησιμοποιώντας μία κανονική υπερομάδα Κ και μια Ε.Σ.Υ. Ε, που όλα τα στοιχεία της πλήν του ουδετέρου (το οποίο είναι κοινό με αυτό της Κ) είναι ε-στοιχεία. Από τα ανωτέρω συμπεράσματα προκύπτουν τα εξής:

α) η Ε είναι η ελάχιστη συνδετική (άρα και αντιστρέψιμη) υπο-υπερομάδα της Η.

β) αν k μία κανονική υπο-υπερομάδα της Κ, τότε η $h = k \cup E$ είναι συνδετική υπο-υπερομάδα της Η.

γ) Οι συμμετρικές υπο-υπερομάδες της Ε δεν είναι συνδετικές.

Πρόταση 3.9. Κάθε συνδετική υπο-υπερομάδα της (H,+) είναι αντιστρέψιμη και αντιστρόφως.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι αν ισχύει η σχέση $(\chi + h) \cap (\psi + h) \neq \emptyset$ τότε $\chi + h = \psi + h$. Εστω κατ' αρχήν

$\chi \in h$ και $\omega \in (\chi + h) \cap (\psi + h) = h \cap (\psi + h)$. Τότε υπάρχει $\varphi \in h$ έτσι ώστε $\omega \in \psi + \varphi$, απ' όπου $\psi \in \omega:\varphi$. Επειδή όμως η h είναι συνδετική υπο-υπερομάδα έπεται ότι $\omega:\varphi \subseteq h$, άρα $\psi \in h$ και επομένως $\chi + h = \psi + h$. Εστω στη συνέχεια ότι $\chi, \psi \notin h$ και έστω ότι υπάρχουν $\varphi, \omega \in h$ έτσι ώστε $\tau \in (\chi + \varphi) \cap (\psi + \omega)$. Το τ δεν ανήκει στην h, διότι τότε θα είχαμε, για παράδειγμα, $\psi \in \tau:\omega \subseteq h$, πράγμα άτοπο, και συνεπώς $\tau \neq \varphi, \omega$. Αρα στη σχέση $\tau \in \chi + \varphi$ ισχύει η αναστρεψιμότητα του φ (Πρόταση 2.1) και συνεπώς έχουμε $\chi \in \tau - \varphi$ ή $\chi \in \psi + \omega - \varphi$ ή $\chi \in \psi + h$. Επομένως $\chi + h \subseteq \psi + h$. Ομοίως $\chi + h \subseteq \psi + h$. Αρα $\chi + h = \psi + h$. Επειδή δε κάθε αντιστρέψιμη είναι κλειστή, έπεται ότι είναι συνδετική, και συνεπώς η Πρόταση.

Σύμφωνα με τα όσα αναφέραμε στην Πρόταση Ι.2.5, αν h είναι μία συνδετική υπο-υπερομάδα της H, τότε αυτή ορίζει μία σχέση ισοδυναμίας, έστω $\equiv_\sigma$, ως εξής:

$$\chi \equiv_\sigma \psi \iff h:\chi = h:\psi$$

Επειδή όμως η h, σύμφωνα με την Πρόταση 3.9, είναι και αντιστρέψιμη, ορίζει μία άλλη σχέση ισοδυναμίας $\equiv_\alpha$, ως εξής:

$$\chi \equiv_\alpha \psi \iff \chi + h = \psi + h$$

για τις κλάσεις της οποίας ισχύει $C_\chi = \chi + h$ για κάθε $\chi \in H$ και η οποία προφανώς είναι ομαλή.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η h, σύμφωνα με την Πρόταση 3.7 περιλαμβάνει όλα τα ε-στοιχεία της H, επομένως αν $C_\chi \in H/h$, τότε το χ είναι κ-στοιχείο και έτσι για τη C_o έχουμε:

$$C_o + C_\chi = (0 + h) + (\chi + h) = (0 + \chi) + (h + h) =$$
$$= \chi + h = C_\chi$$

Ας θεωρήσουμε τώρα την κλάση $h:\chi$ με $\chi \notin h$. Επειδή $-\chi \in 0:\chi$ έπεται ότι $-\chi \in h:\chi$. Τότε με την βοήθεια του Πορίσματος Ι.3.1 από την [37] θα έχουμε:

$$-\chi \in h:\chi \implies -\chi + h \subseteq (h:\chi) + h = (h + h):\chi = h:\chi$$

άρα $-\chi + h \subseteq h:\chi$ (i). Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια ένα στοιχείο ω από την κλάση $h:\chi$. Τότε $(\omega + \chi) \cap h \neq \emptyset$. Υπάρχει συνεπώς $\psi \in h$ έτσι ώστε $\psi \in \omega + \chi$ και επειδή $\psi \neq \chi$, αφού $\chi \notin h$, ισχύει η αναστρεψιμότητα του χ και συνεπώς έχουμε $\omega \in -\chi + \psi$ ή $\omega \in -\chi + h$. Άρα $h:\chi \subseteq -\chi + h$ (ii). Από τις (i) και (ii) προκύπτει ότι $h:\chi = -\chi + h$ και άρα:

$$h:\chi = h:\psi \iff -\chi + h = -\psi + h \iff \chi + h = \psi + h$$

Επομένως ισχύει η Πρόταση:

Πρόταση 3.10. *Οι σχέσεις ισοδυναμίας $\equiv_\alpha$ και $\equiv_\sigma$ συμπίπτουν.*

Προκύπτει επομένως, σύμφωνα και με την Πρόταση Ι.2.6 η

Πρόταση 3.11. *Το σύνολο H/h με υπερπράξη*

$$C_x \dotplus C_y = \{ C_\omega \in H/h \mid \omega \in x + y \}$$

είναι κανονική υπερομάδα, με ουδέτερο στοιχείο το $C_o(=h)$

Σχετικά τώρα με την γέννεση συνδετικών υπο-υπερομάδων μιας Ε.Σ.Υ. $(H, +)$ παρατηρούμε ότι, επειδή η τομή δύο συνδετικών υπο-υπερομάδων είναι πάντοτε διάφορη του κενού, έχουμε, σύμφωνα με το Πόρισμα Ι.2.1 και την Πρόταση 3.9, την Πρόταση:

Πρόταση 3.12. *Το σύνολο των συνδετικών υπο-υπερομάδων της Η αποτελεί πλήρες δικτυωτό, το οποίο συμπίπτει με τα πλήρη δικτυωτά των κλειστών και των αντιστρέψιμων υπο-υπερομάδων της.*

Έστω τώρα Χ ένα μη κενό υποσύνολο της Η. Στην Πρόταση Ι.2.10 έχουμε αναφέρει τον τρόπο με τον οποίο παράγεται η γενόμενη από το Χ συνδετική υπο-υπερομάδα. Επίσης με το Πόρισμα Ι.2.2 έχουμε κάνει ειδική μνεία για την περίπτωση που το Χ είναι μονοσύνολο. Στις Ε.Σ.Υ., σύμφωνα με τα όσα μέχρι στιγμής έχουμε αναφέρει, η συνδετική υπο-υπερομάδα η γενόμενη από το Χ :

α) θα περιέχει όλα τα ε-στοιχεία της Η, αφού όπως αποδείξαμε η $E^{\wedge}$ είναι η ελάχιστη συνδετική υπο-υπερομάδα της Η.

β) αν το Χ περιέχει κ-στοιχεία, έστω τα x_i, $i \in I$, και επειδή σύμφωνα με την Πρόταση 2.5, $x_i:\psi = x_i - \psi$ θα έχουμε σύμφωνα με την Πρόταση 8.1 του [51], ότι η υπο-υπερομάδα η γενόμενη από το Χ θα περιέχει και τις ενώσεις πεπερασμένων αθροισμά- των από στοιχεία του $-(X\setminus E) \cup (X\setminus E)$.

Έτσι έχουμε την:

Πρόταση 3.13. *Η συνδετική υπο-υπερομάδα $\underline{X}$ η γενόμενη από ένα μη κενό σύνολο Χ αποτελείται από όλα τα ε-στοιχεία, καθώς επίσης και από τις ενώσεις όλων των πεπερασμένων αθροισμάτων των κ-στοιχείων που περιέχονται στην ένωση $-X \cup X$.*

II. ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΥΠΟ-ΥΠΕΡΟΜΑΔΕΣ

Το γεγονός ότι μία συμμετρική υπο-υπερομάδα μιάς Ε.Σ.Υ. ορίζεται με ολιγότερες συνθήκες εν σχέσει με την συνζετική, συνεπάγεται, όπως είναι φανερό, αντίστοιχες προς την συνδετική ιδιότητες με πιό περιορισμένες συνθήκες. Παρατίθενται αφετέρου και ιδιότητες σχετικές με τα δύο αυτά είδη υπο-υπερομάδων σε συνδυασμό. Εχουμε καταρχήν την ακόλουθη, εύκολα συναγόμενη Πρόταση:

Πρόταση 3.14. *Οι υπο-υπερομάδες της διευρημένης Δ-υπερομάδας είναι συμμετρικές (με αυτοαντίθετα στοιχεία).*

Εστω στη συνέχεια (H,+) μιά Ε.Σ.Υ. και h μιά υπο-υπερομάδα της H τέτοια ώστε για $\chi \in H$ να είναι:

$$[\chi + (h\setminus\{0\})] \cap h \neq \emptyset \implies \chi \in h$$

τότε η h είναι συμμετρική. Πράγματι, έστω $\chi \in h$, οπότε $\chi + h = h$. Αρα για κάθε $\psi \in h$ είναι $\chi + \psi \subseteq h$ και $\chi - \chi + \psi \subseteq -\chi + h$, ώστε $\psi \in -\chi + h$ και για κατάλληλο $\psi \in h$, $\psi \in -\chi + (h\setminus\{0\})$. Επομένως $[-\chi + (h\setminus\{0\})] \cap h \neq \emptyset$, από τα οποία $-\chi \in h$.

Επιπλέον γιαυτήν την συμμετρική υπο-υπερομάδα, αν χ, ψ δύο στοιχεία της, τότε για το $\psi:\chi$ έχουμε:

i) αν $\chi = 0$ και $\psi \neq 0$, τότε:

$\psi:0 = \{ \omega \mid \psi \in \omega + 0 \} = \{ \psi \}$

άρα $\psi:0 \subseteq h$.

ii) αν $\chi \neq 0$, τότε:

$\psi{:}\chi = \{ \omega \mid \psi \in \omega + \chi \}$, άρα $[\omega + (h \setminus \{0\})] \cap h \neq \emptyset$,

επομένως $\omega \in h$ και συνεπώς $\psi{:}\chi \subseteq h$.

Εχουμε δηλαδή την Πρόταση:

Πρόταση 3.15. *Αν για μιά υπο-υπερομάδα h της H ισχύει, για κάθε $x \in H$, η συνεπαγωγή:*

$$[x + (h \setminus \{0\})] \cap h \neq \emptyset \implies x \in h$$

τότε αυτή είναι συμμετρική και περιέχει όλα τα πηλίκα της μορφής $x{:}y$ με $x, y \in h$ πλήν του $0{:}0$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.1.

Με αντιπαραβολή με την αντίστοιχη Πρόταση της θεωρίας των κανονικών υπερομάδων [51] που αναφέρεται στην κλειστότητά τους, και του Πορίσματος I.2.2 του [37] μπορούμε να θεωρούμε συμμετρικές υπο-υπερομάδες **σχεδόν κλειστές** και αντιστρόφως, ύστερα από ακριβή προσδιορισμό του όρου για υπο-υπερομάδες υπερομάδων με μοναδιαία στοιχεία.

Πρόταση 3.16. *Ενα μη κενό υποσύνολο h της $(H,+)$ είναι μια συμμετρική υπο-υπερομάδα της H αν και μόνον αν για κάθε $x, y \in h$ έπεται ότι $x - y \subseteq h$.*

Απόδειξη. Η ανωτέρω συνθήκη προφανώς ισχύει αν το h είναι μία συμμετρική υπο-υπερομάδα του H. Αντιστρόφως τώρα, έστω $\chi \in h$. Τότε $\chi - \chi \subseteq h$ και συνεπώς το 0 ανήκει στο h. Εξάλλου $0 - \chi \subseteq h$, συνεπώς το $-\chi \in h$. Εν συνεχεία, επειδή το h είναι υποσύνολο του H το μόνο αξίωμα που θα πρέπει να αποδείξουμε είναι αυτό της αναπαραγωγικότητας. Εστω $\chi \in h$. Τότε: $\chi + h = \chi - (-h) \subseteq h$. Εστω στη συνέχεια $t \in h$, τότε:

$$t - \chi \subseteq h \implies t - \chi + \chi \subseteq \chi + h \implies t + 0 \subseteq \chi + h \implies$$
$$\implies t \in \chi + h$$

δηλαδή $h \subseteq \chi+h$. Αρα $\chi + h = h$.

Πόρισμα 3.4. *Ενα μη κενό υποσύνολο h της H είναι μία συμμετρική υπο-υπερομάδα της H αν και μόνον αν είναι σταθερή ως προς την υπερπράξη και περιέχει ταυτόχρονα με κάθε στοιχείο του $x \in h$ και το αντίθετό του $-x$.*

(Πράγματι αν $\chi,\psi \in h$ τότε $\chi,-\psi \in h$ και επομένως αφού η h είναι σταθερή $\chi - \psi \subseteq h$ και συνεπώς σύμφωνα με την Πρόταση 3.16 η h είναι μία συμμετρική υπο-υπερομάδα).

Πρόταση 3.17. *Αν μία συμμετρική υπο-υπερομάδα h της H περιέχει ένα κ-στοιχείο διάφορο του 0, τότε αυτή είναι συνδετική.*

Απόδειξη. Αν χ ένα κ-στοιχείο της h τότε $-\chi \in h$ και συνεπώς $\chi - \chi \subseteq h$. Ομως σύμφωνα με την Πρόταση 1.4 το $\chi - \chi$ περιέχει όλα τα ε-στοιχεία της Η, δηλαδή $E^{\wedge} \subseteq h$ και συνεπώς $\chi:\psi \subseteq h$ για κάθε $\chi,\psi \in E^{\wedge}$, λόγω της Προτάσεως 3.6. Εξάλλου αν τα χ,ψ είναι κ-στοιχεία τότε συμφωνα με την Πρόταση 2.5 $\chi:\psi = \chi - \psi \subseteq h$ (λόγω της Προτάσεως 3.16) και επομένως πάλι $\chi:\psi \subseteq h$. Τέλος αν χ ένα κ-στοιχείο και ψ ένα ε-στοιχείο, τότε:

$\chi:\psi = \{ \omega \mid \chi \in \omega + \psi \}$ και επειδή $\chi \neq \psi$ έπεται ότι

$\chi:\psi = \{ \omega \mid \omega \in \chi - \psi \}$ άρα $\chi:\psi \subseteq h$. Ομοίως $\psi:\chi \subseteq h$ και συνεπώς για κάθε $\chi,\psi \in h$ έχουμε $\chi:\psi \subseteq h$, άρα η h είναι συνδετική.

Πόρισμα 3.5. Οι συμμετρικές υπο-υπερομάδες που δεν είναι συνδετικές, αποτελούνται μόνον από ε-στοιχεία.

Είναι γνωστό από το Πόρισμα I.2.1 ότι η μη κενή τομή δύο συνδετικών υπο-υπερομάδων είναι συνδετική υπο-υπερομάδα. Το αντίστοιχο όμως ισχύει και για τις συμμετρικές υπο-υπερομάδες. Εχουμε δηλαδή την:

Πρόταση 3.18. Η τομή δύο συμμετρικών υπο-υπερ-ομάδων της Η είναι συμμετρική υπο-υπερομάδα της Η.

Απόδειξη. Εστω h_1, h_2 δύο συμμετρικές υπο-υπερομάδες της Η τότε $0 \in h_1 \cap h_2$ και αν $\chi \in h_1 \cap h_2$ με $\chi \neq 0$ έχουμε και $-\chi \in h_1 \cap h_2$. Εστω στη συνέχεια χ ένα στοιχείο από την τομή $h_1 \cap h_2$. Τότε

$$\chi + (h_1 \cap h_2) \subseteq \chi + h_1 = h_1$$

και
$$\chi + (h_1 \cap h_2) \subseteq \chi + h_2 = h_2$$

άρα
$$\chi + (h_1 \cap h_2) \subseteq h_1 \cap h_2$$

Εστω τώρα $\psi \in h_1 \cap h_2$, τότε

$$\psi \in \psi + 0 \subseteq \psi + (\chi - \chi) = \chi + (\psi - \chi) \subseteq \chi + (h_1 \cap h_2)$$

άρα
$$h_1 \cap h_2 \subseteq \chi + (h_1 \cap h_2)$$

έτσι
$$\chi + (h_1 \cap h_2) = h_1 \cap h_2$$

και επομένως η Πρόταση.

Από την παραπάνω τώρα Πρόταση και επειδή η τομή δύο συμμετρικών υπο-υπερομάδων είναι πάντοτε διάφορη του κενού, αφού αυτή περιέχει το 0, προκύπτει η:

Πρόταση 3.19. *Το σύνολο των συμμετρικών υπο-υπερομάδων μιας ενισχυμένης συνδετικής υπερομάδας, αποτελούν πλήρες δικτυωτό.*

Επειδή δε κάθε συνδετική υπο-υπερομάδα της H είναι και συμμετρική, για τα δικτυωτά τους ισχύει η:

Πρόταση 3.20. *Το δικτυωτό των συνδετικών υπο-υπερομάδων μιας ενισχυμένης συνδετικής υπερομάδας, είναι υποδικτυωτό του δικτυωτού των συμμετρικών.*

Ας δούμε τώρα ποιά είναι η συμμετρική υπο-υπερομάδα η οποία γεννάται από ένα υποσύνολο X της H. Εδώ θα εξετάσουμε μόνον την περίπτωση που η H είναι ομαλή. Θεωρούμε λοιπόν όλα τα στοιχεία $\chi \in H$ τα οποία ανήκουν σε αθροίσματα της μορφής $\Sigma\chi_i$ όπου τα χ_i ανήκουν στο $-X \cup X$ και έστω $X^{\wedge}$ το σύνολο αυτών των στοιχείων. Αν ψ_1, ψ_2 είναι δύο στοιχεία από το $X^{\wedge}$ τότε $\psi_1 \in \Sigma\chi_i$, $\psi_2 \in \Sigma\chi_j$ και επομένως, επειδή η H είναι ομαλή έχουμε:

$$\psi_1 - \psi_2 \subseteq \Sigma\chi_i - \Sigma\chi_j = \Sigma\omega_k \subseteq X^{\wedge}$$

Αρα η $X^{\wedge}$ είναι μία συμμετρική υπο-υπερομάδα της H, η οποία περιέχει το $-X \cup X$. Αν λοιπόν $h(X)$ η γενόμενη από το X συμμετρική υπο-υπερομάδα, τότε $h(X) \subseteq X^{\wedge}$. Ομως η $h(X)$ περιέχει όλα τα αθροίσματα στοιχείων από το $-X \cup X$, άρα

$X^\wedge \subseteq h(X)$. Συνεπώς έχουμε την:

Πρόταση 3.21. Η συμμετρική υπο-υπερομάδα μιας ομαλής Ε.Σ.Υ. που γεννάται από ένα μη κενό σύνολο X αποτελείται από τις ενώσεις όλων των πεπερασμένων αθροισμάτων των στοιχείων που περιέχονται στην ένωση $-X \cup X$

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε ορισμένες συμμετρικές υπο-υπερομάδες, οι οποίες υπάρχουν εν γένει σε κάθε Ε.Σ.Υ. Ετσι γίνεται φανερό ότι, ενώ μια Ε.Σ.Υ. είναι δυνατόν να μην έχει γνήσιες συνδετικές υπο-υπερομάδες, ($\neq \{0\}$), για παράδειγμα όταν αυτή αποτελείται μόνον από ε-στοιχεία, έχει πάντοτε συμμετρικές υπο-υπερομάδες. Εστω λοιπόν Η μια τυχούσα Ε.Σ.Υ. και X τυχόν υποσύνολό της. Αν συμβολίσουμε με $\underline{X}$ την ένωση $-X \cup X$ και αν $Q(\underline{X})$ είναι η ένωση των αθροισμάτων $(\chi_1:\chi_1) + \ldots + (\chi_\nu:\chi_\nu)$ όπου ν αυθαίρετος μη αρνητικός ακέραιος και το χ_i, $i = 1,\ldots,\nu$ διαγράφει το $\underline{X}$, τότε

Πρόταση 3.22. Το $Q(\underline{X})$ είναι μια συμμετρική υπο-υπερομάδα της Η, αν τα στοιχεία του X είναι ομαλά.

Απόδειξη. Εστω $\chi \in Q(\underline{X})$. Τότε υπάρχουν $\chi_1, \ldots, \chi_\nu$ τέτοια ώστε $\chi \in (\chi_1:\chi_1) + \ldots + (\chi_\nu:\chi_\nu)$. Συνεπώς

$$\chi + Q(\underline{X}) \subseteq (\chi_1:\chi_1) + \ldots + (\chi_\nu:\chi_\nu) + Q(\underline{X}) \subseteq Q(\underline{X})$$

Εστω τώρα ότι $\psi \in Q(\underline{X})$. Τότε προφανώς για κάθε $\chi \in Q(\underline{X})$ έχουμε:

$$\psi - \chi \subseteq [(\psi_1:\psi_1) + \ldots + (\psi_\mu:\psi_\mu)] - [(\chi_1:\chi_1) + \ldots + (\chi_\nu:\chi_\nu)]$$

και επειδή για κάθε στοιχείο $\chi \in X$ ισχύει $\chi - \chi = -(\chi-\chi)$ σύμφωνα με την Πρόταση 2.4 και 2.2 η ανωτέρω σχέση γίνεται:

$$\psi - \chi \subseteq$$
$$\subseteq (\psi_1:\psi_1) + \ldots + (\psi_\mu:\psi_\mu) +$$
$$+ [(-\chi_1):(-\chi_1)] + \ldots + [(-\chi_\nu):(-\chi_\nu)] \subseteq Q(\underline{X}).$$

Επομένως, $\psi - \chi \subseteq Q(\underline{X})$ απ' όπου έχουμε:

$$\psi - \chi \subseteq Q(\underline{X}) \Longrightarrow (\psi - \chi) + \chi \subseteq \chi + Q(\underline{X}) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \psi + (-\chi + \chi) \subseteq \chi + Q(\underline{X}) \Longrightarrow \psi + 0 \subseteq \chi + Q(\underline{X}) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \psi \in \chi + Q(\underline{X})$$

Αρα $\chi + Q(\underline{X}) = Q(\underline{X})$. Συνεπώς η $Q(\underline{X})$ είναι υπο-υπερομάδα της Η και σύμφωνα με την Πρόταση 3.16 η $Q(\underline{X})$ είναι συμμετρική υπο-υπερομάδα της.

Αν τώρα συμβολίσουμε με $\Omega(X)$ την ένωση των αθροισμάτων $(\chi_1-\chi_1) + \ldots + (\chi_\nu-\chi_\nu)$ όπου ν αυθαίρετος μη αρνητικός ακέραιος και το χ_i, $i = 1,\ldots,\nu$ διαγράφει το Χ, τότε, επισημαίνοντας ότι εν γένει είναι $\chi:\chi \neq \chi - \chi$ (Πρόταση 2.5) κατ' αντιστοιχία πρός την Πρόταση (3.1) του [51], αποδεικνύεται ανάλογα η

Πρόταση 3.23. Το $\Omega(X)$ είναι μια συμμετρική υπερομάδα της Η, αν τα στοιχεία του Χ είναι ομαλά.
Προφανώς για την $\Omega(X)$ ισχύει $\Omega(X) = \Omega(\underline{X})$.

Πρόταση 3.24. Αν Χ υποσύνολο της Η, του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ομαλά, τότε για τις υπο-υπερομάδες $\Omega(X)$ και $Q(\underline{X})$ ισχύει η σχέση $\Omega(X) \subseteq Q(\underline{X})$

Α π ό δ ε ι ξ η. Από την Πρόταση 2.5 έχουμε $x - x \subseteq x:x \cup [(-x):(-x)]$. Συνεπώς αν $x \in \Omega(X)$ τότε υπάρχουν $x_1, \ldots, x_\nu$ τέτοια ώστε

$$x \in (x_1 - x_1) + \ldots + (x_\nu - x_\nu)$$

Ετσι έχουμε:

$$
\begin{aligned}
x \in (x_1-x_1) + \ldots + (x_\nu - x_\nu) &\subseteq \\
&\subseteq [(x_1:x_1) \cup ((-x_1):(-x_1))] + \ldots + \\
&\quad + [(x_\nu:x_\nu) \cup ((-x_\nu):(-x_\nu))] = \\
&= [\ (x_1:x_1)+(x_2:x_2) + \ldots + (x_\nu:x_\nu)\ ] \cup \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad \cup [((-x_1):(-x_1))+((-x_2):(-x_2)) + .. + ((-x_\nu):(-x_\nu))] \subseteq
\end{aligned}
$$

[επειδή $0 \in x:x \cup (-x):(-x)$]

$$
\begin{aligned}
&\subseteq [\ (x_1:x_1)+(x_2:x_2) + \ldots + (x_\nu:x_\nu)\ ] + \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad + [((-x_1):(-x_1))+((-x_2):(-x_2)) + \ldots + ((-x_\nu):(-x_\nu)) \\
&\subseteq Q(\underline{X})
\end{aligned}
$$

Πρόταση 3.25. Αν ένα υποσύνολο X της H περιέχει ένα τουλάχιστον κ-στοιχείο, τότε $\Omega(X) = Q(\underline{X})$ και η υπο-υπερομάδα αυτή είναι συνδετική, και συνεπώς αντιστρέψιμη.

Α π ό δ ε ι ξ η. Από την Πρόταση 2.5 έχουμε ότι άν το x είναι κ-στοιχείο τότε $x:x = x - x$ και από την Πρόταση 1.4 ότι το $x - x$ περιέχει όλα τα ε-στοιχεία της H, δηλαδή η υπο-υπερομάδα $E^\wedge$ των ε-στοιχείων είναι υποσύνολο της $\Omega(X)$.

Συνεπώς αν ψ ε-στοιχείο ψ:ψ $\subseteq \Omega(X)$. Αρα $Q(\underline{X}) \subseteq \Omega(X)$ και λόγω της Προτάσεως 3.24 έχουμε ότι $Q(\underline{X}) = \Omega(X)$. Από την Πρόταση όμως 3.17 γνωρίζουμε ότι άν μια συμμετρική υπο-υπερομάδα της H περιέχει ένα κ-στοιχείο τότε αυτή είναι συνδετική και επομένως και αναστρέψιμη.

Αν η H είναι κανονική τότε για κάθε στοιχείο της είναι κ-στοιχείο και συνεπώς έχουμε ως Πόρισμα:

Πόρισμα 3.6. *Αν η H είναι κανονική τότε*

$$\Omega(X) = Q(\underline{X})$$

Θεωρούμε τα σύνολα $[\chi:\chi] = -(\chi:\chi) \cup (\chi:\chi)$ με $\chi \in H$. Αν συμβολίσουμε με $Q^{\wedge}$ το σύνολο όλων των πεπερασμένων αθροισμάτων τέτοιων συνόλων, τότε

Πρόταση 3.26. *Η $Q^{\wedge}$ είναι μια συμμετρική υπο-υπερομάδα της H.*

Απόδειξη. Εστω $\chi \in Q^{\wedge}$. Τότε υπάρχουν $\chi_1, \ldots, \chi_\nu$ τέτοια ώστε $\chi \in [\chi_1:\chi_1] + \ldots + [\chi_\nu:\chi_\nu]$. Συνεπώς

$$\chi + Q^{\wedge} \subseteq (\chi_1:\chi_1) + \ldots + (\chi_\nu:\chi_\nu) + Q^{\wedge} \subseteq Q^{\wedge}$$

Εστω τώρα ότι $\psi \in Q^{\wedge}$. Τότε προφανώς για κάθε $\chi \in Q^{\wedge}$ έχουμε:

$\psi - \chi \subseteq$

$$\subseteq ([\psi_1:\psi_1] + \ldots + [\psi_\mu:\psi_\mu]) - ([\chi_1:\chi_1] + \ldots + [\chi_\nu:\chi_\nu])$$

Στο υπεράθροισμα $([\chi_1:\chi_1] + \ldots + [\chi_\nu:\chi_\nu])$ είναι ενδεχόμενο να ευρίσκονται σύνολα της μορφής $\omega - \omega$ όπου $\omega \in [\chi_i:\chi_i]$, $-\omega \in [\chi_j:\chi_j]$, επομένως η ανωτέρω παράσταση είναι υποσύνολο της:

$$[\psi_1:\psi_1] + \ldots + [\psi_\mu:\psi_\mu] - [\chi_1:\chi_1] - \ldots - [\chi_\nu:\chi_\nu] \cup$$

$$\cup_{\omega \in [x_i:x_i], -\omega \in [x_j - x_j]} -(\omega - \omega)$$

Ομως από την Πρόταση 2.5 έχουμε $\omega - \omega \subseteq -(\omega:\omega) \cup (\omega:\omega)$ δηλαδή $\omega - \omega \subseteq [\omega:\omega]$ απ' όπου $-(\omega - \omega) \subseteq [\omega:\omega]$ και επομένως η ανωτέρω σχέση γίνεται

$$[\psi_1:\psi_1] + \ldots + [\psi_\mu:\psi_\mu] - [\chi_1:\chi_1] - \ldots - [\chi_\nu:\chi_\nu] \cup$$

$$\cup_{\omega \in [x_i:x_i], -\omega \in [x_j - x_j]} [\omega:\omega]$$

Η παράσταση όμως αυτή είναι υποσύνολο της $Q^\wedge$ και επομένως $\psi - \chi \subseteq Q^\wedge$. Ετσι έχουμε:

$$\psi - \chi \subseteq Q^\wedge \Longrightarrow (\psi - \chi) + \chi \subseteq \chi + Q^\wedge \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \psi + (-\chi + \chi) \subseteq \chi + Q^\wedge \Longrightarrow \psi + 0 \subseteq \chi + Q^\wedge \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \psi \in \chi + Q^\wedge$$

Αρα $\chi + Q^\wedge = Q^\wedge$. Επομένως η $Q^\wedge$ είναι υπο-υπερομάδα της Η και μάλιστα, σύμφωνα με την Πρόταση 3.16 είναι συμμετρική.

Θεωρούμε στη συνέχεια τα σύνολα $[\chi-\chi] = -(\chi-\chi) \cup (\chi-\chi)$ με $\chi \in H$ (θεώρηση βέβαια που έχει έννοια, όταν η Η περιέχει στοιχεία μη ομαλά). Αν συμβολίσουμε με $\Omega^\wedge$ το σύνολο όλων των πεπερασμένων αθροισμάτων τέτοιων συνόλων, τότε αντίστοιχα προς τα παραπάνω αποδεικνύεται η Πρόταση:

Πρόταση 3.27. *Η $\Omega^\wedge$ είναι μια συμμετρική υπο-υπερομάδα της Η.*

Πόρισμα 3.7. *Η $\Omega^\wedge$ είναι μια συμμετρική υπο-υπερομάδα της $Q^\wedge$.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.2.

α) Αν η H είναι ομαλή, τότε $\Omega\hat{} = \Omega(H)$ και $Q\hat{} = Q(H)$.

β) Αν η H περιέχει κ-στοιχεία τότε $\Omega\hat{} = Q\hat{}$.

γ) Αν η H είναι κανονική τότε οι $\Omega\hat{}$ και $Q\hat{}$ είναι μεταξύ τους ίσες και μάλιστα ίσες προς την καρδιά[1] Ω της H [51]

[1] Καρδιά είναι η ελάχιστη υπο-υπερομάδα h της H, τέτοια ώστε το H/h να είναι ομάδα.

—4—

ΜΟΝΟΓΕΝΕΙΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΥΠΟ—ΥΠΕΡΟΜΑΔΕΣ

Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθούμε στη μονογενή συμμετρική υπο-υπερομάδα, δηλαδή την συμμετρική εκείνη υπο-υπερομάδα που γεννάται από ένα μόνο στοιχείο. Εστω λοιπόν (H, +) μιά Ε.Σ.Υ., χ τυχόν στοιχείο της H και έστω h(χ) η μονογενής συμμετρική υπο-υπερομάδα που γεννάται από το στοιχείο αυτό. Τότε, κατ' αναλογία προς την θεωρία των μονογενών κανονικών υπερομάδων [44], [51], χρησιμοποιώντας τους εκεί συμβολισμούς έχουμε:

$$n.\chi = \begin{cases} \chi + \chi + \ldots + \chi & (n \text{ φορές}) \text{ αν } n>0 \\ 0 & \text{αν } n=0 \\ (-\chi) + (-\chi) + \ldots + (-\chi) & (-n \text{ φορες}) \text{ αν } n<0 \end{cases} \qquad (1)$$

Σημειώνουμε ότι αν η H δεν είναι ομαλή τότε $-(n\chi) \neq (-n)\chi$ διότι αν π.χ. $n>0$ τότε είναι δυνατόν να μην ισχύει η ισότητα:

-4-

ΜΟΝΟΓΕΝΕΙΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΥΠΟ-ΥΠΕΡΟΜΑΔΕΣ

Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθούμε στη μονογενή συμμετρική υπο-υπερομάδα, δηλαδή την συμμετρική εκείνη υπο-υπερομάδα που γεννάται από ένα μόνο στοιχείο. Εστω λοιπόν (H, +) μιά Ε.Σ.Υ., χ τυχόν στοιχείο της H και έστω h(χ) η μονογενής συμμετρική υπο-υπερομάδα που γεννάται από το στοιχείο αυτό. Τότε, κατ' αναλογία προς την θεωρία των μονογενών κανονικών υπερομάδων [44], [51], χρησιμοποιώντας τους εκεί συμβολισμούς έχουμε:

$$n.\chi = \begin{cases} \chi + \chi + \ldots + \chi & (n \text{ φορές}) \text{ αν } n>0 \\ 0 & \text{αν } n=0 \\ (-\chi) + (-\chi) + \ldots + (-\chi) & (-n \text{ φορες}) \text{ αν } n<0 \end{cases} \qquad (1)$$

Σημειώνουμε ότι αν η H δεν είναι ομαλή τότε $-(n\chi) \neq (-n)\chi$ διότι αν π.χ. n>0 τότε είναι δυνατόν να μην ισχύει η ισότητα:

$$-(\chi + \chi + \ldots + \chi) = (-\chi) + (-\chi) + \ldots + (-\chi)$$

Στη συνέχεια εύκολα κανείς βλέπει ότι

$$m.\chi + n.\chi = \begin{cases} (m+n).\chi & \text{αν } mn>0 \\ (m+n).\chi + \min\{|m|, |n|\}.(\chi - \chi) & \text{αν } mn<0 \end{cases} \qquad (2)$$

ενώ πάλι για την περίπτωση των μη ομαλών Ε.Σ.Υ. δεν ισχύει η ισότητα $(-n)(\chi - \chi) = n(\chi - \chi)$, όταν $n>0$. Γιαυτό στη συνέχεια θα περιορισθούμε σε ομαλές Ε.Σ.Υ. (Η,+).

Από τα παραπάνω προκύπτει

$$(m+n).\chi \subseteq m.\chi + n.\chi \qquad (3)$$

Για τις μονογενείς συμμετρικές υπο-υπερομάδες ισχύει η

Πρόταση 4.1. *Για κάθε $x \in H$ είναι:*

$$h(x) = \bigcup_{(m,n)\in Z^2} m.x + n.(x-x)$$

Α π ό δ ε ι ξ η. Πράγματι, από την Πρόταση 3.21 και τον τύπο (1) έχουμε:

$$h(\chi) = \bigcup_{(k,l)\in N^2} k.\chi + l.(-\chi) = \bigcup_{(k,l)\in N^2} k.\chi - l.\chi$$

και επειδή κατά τον τύπο (2) είναι

$$k.\chi - l.\chi = (k-l).\chi + \min\{k,l\}.(\chi-\chi)$$

προκύπτει η Πρόταση.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4.1.

α) Επειδή χ ομαλό είναι $-(\chi-\chi) = \chi-\chi$, άρα

$$(-n).(\chi-\chi) = n(\chi-\chi)$$

και άρα στο προηγούμενο άθροισμα μπορούμε να θεωρήσουμε αντί $(m,n) \in Z^2$ το $(m,n) \in Z x N$.

β) Επειδή $0 \in \chi-\chi$ έχουμε

$$m.\chi + n.(\chi-\chi) \subseteq m.\chi + n'.(\chi-\chi) \quad \text{για} \quad n < n'$$

γ) Για $\chi = 0$, είναι $h(0) = \{0\}$.

Ορίζουμε τώρα ένα σύμβολο $\omega(\chi)$ (που μπορεί να είναι το $+\infty$), που θα το ονομάσουμε **τάξη** του χ και της μονογενούς υπο-υπερομάδας $h(\chi)$. Δύο περιπτώσεις μπορεί να παρουσιασθούν, που η μία αναιρεί την άλλη:

I. Για οποιοδήποτε $(m,n) \in Z\times N$, με $m \neq 0$, έχουμε:

$$0 \notin m.\chi + n.(\chi-\chi)$$

Ορίζουμε τότε την τάξη του χ και της $h(\chi)$ το άπειρο και θέτουμε $\omega(\chi) = +\infty$. Παρατηρούμε ότι $0 \notin m.\chi + n.(\chi-\chi)$ συνεπάγεται ότι το χ δεν είναι ε-στοιχείο, το $m.\chi$, για κάθε $m \in Z$ δεν έχει ε-στοιχεία και ότι

$$m.\chi \cap n.(\chi-\chi) = m.\chi \cap (n.\chi - n.\chi) = \emptyset$$

Αλλά όπως προκύπτει από την (2)

$$m.\chi \cap (n.\chi - n.\chi) = \emptyset \implies \begin{cases} (m+n).\chi \cap n.\chi = \emptyset & \text{αν } m>0 \\ (n-m).\chi \cap n.\chi = \emptyset & \text{αν } m<0 \end{cases}$$

Αν $n = 0$, τότε $0 \notin m.\chi$ και αν υποθέσουμε $m = m_1 + m_2$ με $m_1 m_2 > 0$, τότε:

$$\{0\} \cap m.\chi = \emptyset \implies 0 \notin m_1.\chi + m_2.\chi \implies -m_1.\chi \cap m_2.\chi = \emptyset$$

Εχουμε δηλαδή γενικώς

$$0 \notin m.\chi + n.(\chi-\chi) \quad \text{για } (m,n) \in Z\times N \implies$$

$$\implies m'.\chi \cap m''.\chi = \emptyset \quad \text{για κάθε } m',m'' \in Z, \text{ με } m' \neq m''$$

Αλλά και αντιστρόφως, αν για κάθε $m \in Z\setminus\{0\}$ το $m.\chi \cap E = \emptyset$ και $m'.\chi \cap m''.\chi = \emptyset$ για κάθε $m',m'' \in Z$ με $m' \neq m''$, τότε

$0 \notin m'.\chi - m''.\chi$ και επομένως

$0 \notin (m' - m'').\chi$ αν $m'm'' < 0$

και

$0 \notin (m' - m'').\chi + \min\{|m'|, |m''|\}.(\chi - \chi)$ αν $m'm'' > 0$

δηλαδή γενικώς

$0 \notin m.\chi + n.(\chi - \chi)$ για κάθε $(m,n) \in Z \times N$

Εχουμε δηλαδή την Πρόταση:

Πρόταση 4.2. *Εχουμε $\omega(\chi) = +\infty$ τότε και μόνον όταν για κάθε $m \in Z\setminus\{0\}$ το $m.\chi \cap E = \emptyset$ και για κάθε $m', m'' \in Z$ με $m' \neq m''$ είναι $m'.\chi \cap m''.\chi = \emptyset$.*

II. Υπάρχουν $(m,n) \in Z \times N$ με $m \neq 0$ τέτοια ώστε

$$0 \in m.\chi + n.(\chi - \chi)$$

Εστω p ο μικρότερος θετικός ακέραιος, τέτοιος ώστε να υπάρχει $n \in N$ ώστε να έχουμε $0 \in p.\chi + n.(\chi - \chi)$

Πρόταση 4.3. *Για δοθέν $m \in Z\setminus\{0\}$ υπάρχουν $n' \in N$ τέτοια ώστε*

$$0 \in m.\chi + n'.(\chi - \chi)$$

αν και μόνον αν το m διαιρείται από το p.

Απόδειξη. Εστω $m = kp$, $k \in Z$. Επειδή

$$0 \in p.\chi + n.(\chi - \chi)$$

έπεται ότι

$$0 \in kp.\chi + kn.(\chi - \chi) = m.\chi + kn.(\chi - \chi)$$

και επομένως το $n' = kn$ επαληθεύει την Πρόταση.

Αντίστροφα τώρα. Αν το χ είναι ένα ε-στοιχείο τότε $p = 1$, αφού ισχύει $0 \in \chi + n.(\chi - \chi)$ για κάθε $n \in N$, και επομένως η Πρόταση επαληθεύεται. Εστω τώρα ότι το χ είναι ένα κ-στοιχείο, και $0 \in m.\chi + n'.(\chi - \chi)$ με $m = kp + r$, $k \in Z$, $0<r<p$. Τότε θα έχουμε:

$$m.\chi + n'.(\chi - \chi) = (kp + r).\chi + n'.(\chi - \chi) \subseteq$$
$$\subseteq kp.\chi + r.\chi + n'.(\chi - \chi)$$

Επομένως $0 \in kp.\chi + r.\chi + n'.(\chi - \chi)$.

Ομως $0 \in p.\chi + n.(\chi - \chi)$, και επειδή στο $p.\chi$, λόγω της Προτάσεως 1.5, δεν υπάρχουν ε-στοιχεία, έπεται ότι

$$-p.\chi \subseteq -p.\chi + p.\chi + n.(\chi - \chi) = p.(\chi - \chi) + n.(\chi - \chi) =$$
$$= (p + n).(\chi - \chi)$$

Αρα $\quad kp.\chi \subseteq -k(p + n).(\chi - \chi) = |k|(p + n).(\chi - \chi)$

και συνεπώς $0 \in r.\chi + [|k|(p + n) + n'].(\chi - \chi)$, πράγμα το οποίο αντιβαίνει προς την υπόθεση μας, αφού θεωρήσαμε ότι το p είναι το ελάχιστο στοιχείο με την ιδιότητα:

$$0 \in p.\chi + n.(\chi - \chi)$$

Επομένως $r = 0$, και συνεπώς $m = kp$.

Αν $m = kp$ $(k \in Z)$, έστω $q(k)$ ο ελάχιστος μη αρνητικός ακέραιος, τέτοιος ώστε $0 \in kp.\chi + q(k).(\chi - \chi)$. Ετσι ορίζεται μία συνάρτηση $q : Z \longrightarrow N$ με την αντιστοίχιση $k \longrightarrow q(k)$ και ονομάζουμε **τάξη** του χ και της $h(\chi)$ το ζεύγος $\omega(\chi) = (p, q)$, τον αριθμό p **κύρια τάξη** και την συνάρτηση q **προσηρτημένη**.

Ετσι σύμφωνα με τα ανωτέρω, αν το χ είναι ένα ε-στοιχείο, τότε (Προταση 1.1)

$$0 \in \chi + (\chi - \chi)$$

και επομένως $\omega(\chi) = (1, q)$ με $q(k) = 1$ για κάθε $k \in Z\backslash\{0\}$.
Ακόμη, αν το χ είναι ένα αυτοαντίθετο κ-στοιχείο, τότε

$$0 \in 2.\chi + 0.(\chi - \chi), \text{ αν } \chi \notin \chi - \chi$$

και

$$0 \in \chi + (\chi - \chi), \quad \text{αν } \chi \in \chi - \chi$$

και επομένως $\omega(\chi) = (2, q)$ με $q(k) = 0$ στην πρώτη περίπτωση και $\omega(\chi) = (1, q)$ με $q(k) = 1$ στη δεύτερη (για κάθε $k \in Z$).

Τέλος σημειώνουμε ότι η τάξη του μηδενός είναι $\omega(0) = (1,q)$, με $q(k) = 0$, για κάθε $k \in Z$, αφού $0 \in 1.0 + 0.(0 - 0)$ και είναι το μόνο στοιχείο που έχει αυτήν την ιδιότητα. Είναι όμως δυνατό να υπάρχουν στοιχεία $\chi \in H$, $\chi \neq 0$ με κύρια τάξη 1, που για να συμβαίνει αυτό πρέπει και αρκεί να υπάρχει ακέραιος n τέτοιος ώστε $-\chi \in n(\chi - \chi)$ [όπως π.χ. στην πιό πάνω δεύτερη περίπτωση των κ-αυτοαντιθέτων στοιχείων].

Αντίστοιχα προς τις μονογενείς συμμετρικές υπο-υπερομάδες έχουμε, όπως είδαμε και μονογενείς συνδετικές για τις οποίες έχουμε ανάλογα με τα πιό πάνω συμπεράσματα, εφαρμόζοντας την Πρόταση 3.13 και οι οποίες, σύμφωνα και με το Πόρισμα I.2.2 (που ισχύει και για $\kappa = 0$) περιλαμβάνουν και το πηλίκο $0{:}0 = E^{\wedge}$ κατά την Πρόταση 3.8. Από τα προηγούμενα και την Πρόταση 1.3 καταλήγουμε στην ακόλουθη Πρόταση:

Πρόταση 4.4. *Σε κάθε Ε.Σ.Υ. $(H,+)$ η μονογενής συμμετρική υπο-υπερομάδα με γεννήτορα ένα ε-στοιχείο της x είναι:*

$$S(x) = \bigcup_{n \in Z} n.(x - x)$$

η δε μονογενής συνδετική:

$$J(x) = E^{\wedge} = E \cup \{0\}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4.2.

Η $E^{\wedge}$ είναι μονογενής συνδετική με γεννήτορα κάθε στοιχείο της.

Σύμφωνα τώρα με την Πρόταση 2.5 αν χ ένα κ-στοιχείο, τότε, $\chi:\psi = \chi - \psi$ (για κάθε $\psi \in H$) και επιπλέον λόγω της Προτάσεως 1.4 έχουμε $E^{\wedge} \subseteq \chi - \chi$. Προκύπτει επομένως λαμβάνοντας υπόψη και την Πρόταση 3.3, η:

Πρόταση 4.5. *Σε κάθε Ε.Σ.Υ. $(H,+)$ η μονογενής συμμετρική υπο-υπερομάδα με γεννήτορα ένα κ-στοιχείο της x είναι συνδετική. Ισχύει δηλαδή:*

$$J(x) = S(x) = \bigcup_{(m,n)\in Z^2} [m.x + n.(x - x)]$$

και επιπλέον: $E^{\wedge} \subseteq J(x)$.

Τέλος όσον αφορά το $\Omega(\chi)$, με την βοήθεια των Προτάσεων 3.23 και 3.25 προκύπτει η

Πρόταση 4.6. *Για κάθε ομαλό ε-στοιχείο $x \in H$ το*

$$\Omega(x) = \bigcup_{n\in N} n.(x - x)$$

είναι συμμετρική υπο-υπερομάδα της $S(x)$. Αν το x είναι κ-στοιχείο, τότε $\Omega(x) = Q(\underline{x})$ και η υπο-υπερομάδα είναι συνδετική.

ΥΠΕΡΔΑΚΤΥΛΙΟΕΙΔΗ III

- Γλώσσες και Υπερδακτυλιοειδή – Εισαγωγικά στοιχεία
- Ενισχυμένα Υπερδακτυλιοειδή
- Χαρακτηριστική Υπερδακτυλιοειδών
- Υπο – Υπερδακτυλιοειδή
- Ομομορφικές Σχέσεις και Ομομορφισμοί
- Στοιχειώδεις Εξισώσεις και Συστήματα

—1—

ΓΛΩΣΣΕΣ ΚΑΙ ΥΠΕΡΔΑΚΤΥΛΙΟΕΙΔΗ (ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ)

Στα προηγούμενα δύο κεφάλαια μελετήθηκαν υπερσυνθετικές δομές οι οποίες σχετίζονται άμεσα με τη θεωρία των Γλωσσών. Οπως όμως είναι γνωστό το σύνολο των λέξεων A^* υπεράνω ενός αλφαβήτου A, είναι μονοειδές ως προς την σύζευξη των λέξεων. Ας θεωρήσουμε λοιπόν αυτό το μονοειδές, δηλαδή το $(A^*,.)$. Παρατηρούμε ότι η πράξη με την οποία αυτό είναι εφοδιασμένο είναι αμφίπλευρα επιμεριστική ως προς την υπερπράξη. Πράγματι:

$$\chi.(\psi + \omega) = \chi.\{\psi, \omega\} = \{\chi.\psi, \chi.\omega\} = \chi.\psi + \chi.\omega$$

Ομοίως:

$$(\psi + \omega).\chi = \psi.\chi + \omega.\chi$$

Ετσι έχουμε υπερσυνθετική δομή με μια υπερπράξη και μια πράξη συνδεόμενες μεταξύ τους, στην οποία το προσθετικό μέρος είναι και πάλι υπερομάδα. Αυτή η δομή είναι πολύ πιο γενική από τις ήδη γνωστές του υπερσώματος και γενικότερα του υπερδακτυλίου [30], [32], [43], [50], [52], [35]. Οδηγούμεθα έτσι στο να εισάγουμε τον Ορισμό:

Ορισμός 1.1. Ενα μη κενό σύνολο Y εφοδιασμένο με μια πράξη "." και μια υπερπράξη "+" θα καλείται **υπερδακτυλιοειδές** αν:

i) το (Y,+) είναι υπερομάδα

ii) το (Y,.) είναι ημιομάδα

iii) η πράξη είναι αμφίπλευρα επιμεριστική ως προς την υπερπράξη.

Αν ειδικότερα η υπερομάδα (Y,+) είναι συνδετική, το υπερδακτυλιοειδές (Y,+,.) θα λέγεται **συνδετικό**.

Σύμφωνα με τον ανωτέρω Ορισμό ο πολλαπλασιασμός είναι επιμεριστικός ως προς την υπερπράξη. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και για την επαγόμενη υπερπράξη όπου η επιμεριστικότητα ισχύει κατά ασθενή τρόπο. Συγκεκριμένα, σε ένα υπερδακτυλιοειδές Y, έχουμε την Πρόταση:

Πρόταση 1.1. Αν $x, \alpha, \beta \in Y$ *ισχύει:*

i) $x(\alpha:\beta) \subseteq x\alpha:x\beta$

ii) $(\alpha:\beta)x \subseteq \alpha x:\beta x$

Απόδειξη. i) Εστω $\omega \in \chi(\alpha:\beta)$. Τότε υπάρχει $\psi \in \alpha:\beta$ τέτοιο ώστε $\omega = \chi\psi$. Ομως από τη σχέση $\psi \in (\alpha:\beta)$ έπεται ότι $\alpha \in \psi + \beta$, άρα $\chi\alpha \in \chi\psi + \chi\beta$ απ' όπου έπεται ότι

$\chi\psi \in \chi\alpha:\chi\beta$ επομένως $\omega \in \chi\alpha:\chi\beta$ και συνεπώς αποδείχθηκε το (i). Ομοίως αποδεικνύεται και το (ii).

Πόρισμα 1.1. *Αν A, B υποσύνολα του Y και $x \in Y$, τότε:*

$$i)\quad x(A:B) \subseteq xA:xB$$

$$ii)\quad (A:B)x \subseteq Ax:Bx$$

Σε ένα υπερδακτυλιοειδές ο πολλαπλασιασμός σε σχέση με τις υπερπράξεις έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ 1.1.

Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \chi \in Y$ έχουμε:

- $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) \subseteq \alpha\gamma + \beta\delta + \alpha\delta + \beta\delta$
- $\chi[(\alpha + \beta):(\gamma + \delta)] \subseteq (\chi\alpha + \chi\beta):(\chi\gamma + \chi\delta)$
- $[(\alpha + \beta):(\gamma + \delta)]\chi \subseteq (\alpha\chi + \beta\chi):(\gamma\chi + \delta\chi)$
- $(\alpha:\beta)(\gamma:\delta) \subseteq (\alpha\gamma:\beta\gamma):(\alpha\delta:\beta\delta)$
- $(\alpha + \beta)(\gamma:\delta) \subseteq (\alpha\gamma + \beta\gamma):(\alpha\delta + \beta\delta)$
- $(\alpha:\beta)(\gamma + \delta) \subseteq (\alpha\gamma:\beta\gamma) + (\alpha\delta:\beta\delta)$
- $\chi[(\alpha:\beta):\gamma] \subseteq \chi\alpha:(\chi\beta + \chi\gamma)$
- $\chi[(\alpha + \beta):\gamma] \subseteq (\chi\alpha + \chi\beta):\chi\gamma$
- $\chi[\alpha + (\beta:\gamma)] \subseteq (\chi\alpha + \chi\beta):\chi\gamma$

Η επαλήθευση των ιδιοτήτων αυτών γίνεται με την βοήθεια των γνωστών αποδεικτικών διαδικασιών που χρησιμοποιούνται για την επαλήθευση αντιστοίχων ιδιοτήτων σε άλλες υπερσυνθετικές δομές (πχ. βλ. [43], [37], [12]).

Στη συνέχεια και χωρίς ρητή δήλωση του αντιθέτου τα θεωρούμενα υπερδακτυλιοειδή θα είναι συνδετικά.

Από τον ορισμό του υπερδακτυλιοειδούς και την Πρόταση I.1.2, συνάγεται η παρακάτω Πρόταση:

Πρόταση 1.2. *Εστω $(Y,.)$ μια ημιομάδα και έστω "+" μια υπερπράξη επί του Y ορισμένη ως εξής:*

$$a + b = \{ a, b \} \text{ για κάθε } a, b \in Y$$

Τότε το $(Y,+,.)$ είναι ένα υπερδακτυλιοειδές.

Τα υπερδακτυλιοειδή που προκύπτουν από την ανωτέρω Πρόταση, δηλαδή εκείνα στα οποία η υπερομάδα είναι Δ-υπερομάδα, θα τα ονομάζουμε Δ-υπερδακτυλιοειδή. Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση των Δ-υπερδακτυλιοειδών, στις ιδιότητες 1.1 ο εγκλεισμός "$\subseteq$" ισχύει ως ισότητα.

Πρόταση 1.3. *Εστω μια ημιομάδα $(Y,.)$ και R μία ομαλή ως πρός την πράξη σχέση ισοδυναμίας στό Y. Τότε το σύνολο πηλίκο $(Y/R, \dot{+}, .)$ είναι υπερδακτυλιοειδές με υπερπράξη την (I.1.3) (δηλαδή ένα Δ-υπερδακτυλιοειδές).*

Απόδειξη. Είναι ήδη γνωστό από την Πρόταση I.1.7 ότι η R είναι ομαλή και ως προς την υπερπράξη και ότι το πηλικοσύνολο Y/R είναι Δ-υπερομάδα. Για το επιμεριστικό αξίωμα τώρα έχουμε:

$$C_w(C_x \dot{+} C_y) = C_w\{C_x, C_y\} = \{ C_wC_x, C_wC_y\} = C_wC_x \dot{+} C_wC_y$$
$$(= C_{wx} \dot{+} C_{wy})$$

Εκτός από τα Δ-υπερδακτυλιοειδή υπάρχουν και άλλα, όπως για παράδειγμα αυτά που το προσθετικό τους μέρος πληροί τη συνθήκη του Πορίσματος Ι.1.1. και που παράδειγμα εύκολα μπορεί να κατασκευασθεί με αφετηρία την Πρόταση Ι.1.3. Πράγματι άν το ολικά διατεταγμένο και πυκνό σύνολο Η είναι π.χ. το σύνολο των μη αρνητικών ρητών αριθμών Q+, τότε η δομή (Q+,+,.), όπου "+" η υπερπράξη όπως αυτή ορίζεται στη Πρόταση Ι.1.3, και "." ο συνήθης πολλαλασιασμός στο Q, είναι υπερδακτυλιοειδές.

Εξάλλου όπως αναφέραμε στην εισαγωγή της παραγράφου ΙΙ.1. από τους εκεί αναγραφόμενους τύπους που ισχύουν στη θεωρία γλωσσών, προκύπτουν υπερσυνθετικές δομές άμεσα σχετιζόμενες με τη θεωρία των γλωσσών. Στο κεφάλαιο ΙΙ μελετήθηκε η ενισχυμένη συνδετική υπερομάδα, η οποία προέκυψε με αφετηρία την θεώρηση ενός ουδετέρου μη βαθμωτού στοιχείου επί του συνόλου των λέξεων υπεράνω ενός αλφαβήτου Α, το οποίο όμως είναι ταυτόχρονα και απορροφητικό ως προς την πράξη της σύζευξης των λέξεων. Η πλήρης λοιπόν δομή η οποία εμφανίζεται στο συγκεκριμένο παράδειγμα της θεωρίας γλωσσών, είναι μια δομή εφοδιασμένη με μια υπερπράξη ως προς την οποία είναι Ε.Σ.Υ. και μια πράξη ως προς την οποία είναι ημιομάδα. Επιπλέον δε η πράξη είναι αμφίπλευρα επιμεριστική ως προς την υπερπράξη, ενώ το ουδέτερο στοιχείο της υπερπράξης είναι αμφίπλευρα απορροφητικό στοιχείο ως προς την πράξη. Γενικότερα μια τέτοια δομή προκύπτει από την Πρόταση 1.2 αν θεωρήσουμε ότι η ημιομάδα (Υ,.) έχει ένα αμφίπλευρα απορροφητικό στοιχείο 0 το οποίο να είναι επίσης μη βαθμωτό ουδέτερο στοιχείο ως προς την υπερπράξη και τέτοιο ώστε

$$\alpha + \alpha = \{0, \alpha\} \quad \text{για κάθε } \alpha \in Y$$

Η δομή που κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτει είναι ένα υπερδακτυλιοειδές ειδικής μορφής, του οποίου η υπερομάδα είναι Ε.Σ.Υ. Ετσι έχουμε τον ορισμό:

Ορισμός 1.3. Ενα υπερδακτυλιοειδές $(Y,+,.)$ του οποίου η υπερομάδα $(Y,+)$ είναι ενισχυμένη συνδετική και το ουδέτερο στοιχείο της είναι αμφίπλευρα απορροφητικό ως προς τον πολλαπλασιασμό ονομάζεται **ενισχυμένο** υπερδακτυλιοειδές (συμβολ. Ε.Υ.)

Σύμφωνα λοιπόν με τον ανωτέρω ορισμό το υπερδακτυλιοειδές $(Y,+,.)$ που αναφέραμε πιο πάνω είναι ένα Ε.Υ. με αυτοαντίθετα στοιχεία, το οποίο και θα καλούμε διευρημένο Δ-υπερδακτυλιοειδές. Ενα άλλο Ε.Υ. χωρίς αυτοαντίθετα στοιχεία, είναι το υπερδακτυλιοειδές $(P,\dagger,.)$ που κατασκευάζεται στην ακόλουθη Πρόταση:

Πρόταση 1.4. *Εστω $(P,+,.)$ ένας δακτύλιος. Επί του P ορίζουμε μία υπερπράξη "$\dagger$" ως εξής:*

$$a \dagger b = \{ a, b, a+b \} \quad \text{για κάθε } a, b \in P$$

Τότε το $(P,\dagger,.)$ είναι ένα Ε.Υ. με προσθετικό ουδέτερο στοιχείο το μηδέν του δακτυλίου.

Απόδειξη. Το $(P,\dagger)$ ως γνωστόν [37] είναι συνδετική υπερομάδα, όσον δε αφορά το επιμεριστικό αξίωμα έχουμε:

$$(\alpha \dagger \beta).\gamma = \{ \alpha, \beta, \alpha+\beta \}.\gamma = \{ \alpha.\gamma, \beta.\gamma, (\alpha+\beta).\gamma \} =$$
$$= \{ \alpha.\gamma, \beta.\gamma, \alpha.\gamma+\beta.\gamma \} = \alpha.\gamma \dagger \beta.\gamma$$

Ομοίως το επιμεριστικό αξίωμα ισχύει και από τα αριστερά. Εξάλλου παρατηρούμε ότι το ουδέτερο (μη βαθμωτό) στοιχείο 0, είναι αμφίπλευρα απορροφητικό ως προς τον πολλαπλασιασμό. Σημειώνουμε ότι για την επαγόμενη υπερπράξη ":" στην υπερομάδα $(P,\dagger)$ ισχύει [37]:

$$\alpha:\beta = \{ \alpha, \alpha-\beta \}$$

Αλλα Ε.Υ. μπορούν να προκύψουν με την βοήθεια της Παρατηρήσεως I.1.2. Ετσι για παράδειγμα το Q+ με την εκεί οριζόμενη υπερπρόσθεση και πολλαπλασιασμό τον συνήθη είναι ένα Ε.Υ. στο οποίο το απορροφητικό ως πρός τον πολλαπλασιασμό 0 είναι μη βαθμωτό ουδέτερο ως προς την υπερπράξη.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.1.

Αν η προσθετική υπερομάδα ενός υπερδακτυλιοειδούς (H,+,.) έχει ένα βαθμωτό ουδέτερο στοιχείο 0 (και συνεπώς μοναδικό [32], [52]), οπότε η υπερομάδα (H, +) είναι κανονική [51], και αν επιπλέον αυτό είναι αμφιπλεύρως απορροφητικό ως πρός τον πολλαπλασιασμό (δηλαδή $0\chi = \chi 0 = 0$ για κάθε $\chi \in H$), τότε **το υπερδακτυλιοειδές είναι υπερδακτύλιος.**

Ας έλθουμε στη συνέχεια στο υπερδακτυλιοειδές $(A^*,+,.)$. Ετσι αν π.χ. το αλφάβητο είναι $A = \{ \alpha, \beta \}$ και θεωρήσουμε το υποσύνολο Ε του A^*, το οποίο αποτελείται από όλες τις λέξεις οι οποίες περιέχουν άρτιες φορές τα γράμματα α, β. Δηλαδή

E = { λ, αα, ββ, ααββ, αβαβ, αββα, βααβ, βαβα, ββαα,
αααaββ, αααβαβ, ... }

Το σύνολο αυτό είναι ως γνωστόν υπο-υπερομάδα μη κλειστή (Ιδιότητες I.1.1.iii,v), άρα όχι συνδετική, του A*, και καθώς πληρούνται τα αξιώματα i, ii, και iii του ορισμού 1.1 του υπερδακτυλιοειδούς για το E, μπορούμε να μιλούμε για ένα **υπο-υπερδακτυλιοειδές** του υπερδακτυλιοειδούς A*. Είναι φανερό ότι αν το E ήταν συνδετική υπο-υπερομάδα της προσθετικής υπερομάδας ενός συνδετικού υπερδακτυλιοειδούς, τότε η υπερδομή (E,+,.) θα ήταν αυτή η ίδια συνδετικό υπερδακτυλιοειδές. Ορίζουμε λοιπόν:

Ορισμός 1.3. Ενα μη κενό υποσύνολο Y' ενός υπερδακτυλιοειδούς (Y, + ,.), όχι αναγκαστικά συνδετικού θα καλείται **υπο-υπερδακτυλιοειδές** του Y, αν το Y' είναι υπερδακτυλιοειδές ως προς τον περιορισμό της πράξης και της υπερπράξης στο Y', δηλαδή αν το (Y', +) είναι υπο-υπερομάδα της (Y, +) και η (Y', .) υπο-ημιομάδα της (Y ,.). Αν το υπερδακτυλιοειδές (Y,+,.) είναι συνδετικό και η (Y', +) είναι συνδετική υπο-υπερομάδα της (Y, +), τότε το (Y', +, .) θα καλείται **συνδετικό υπο-υπερδακτυλιοειδές** του (Y, +,.). Ακόμη αν το (Y,+,.) είναι Ε.Υ. και η (Y',+) είναι συμμετρική υπο-υπερομάδα της (Y,+), τότε το (Y',+,.) θα καλείται **συμμετρικό υπο-υπερδακτυλιοειδές** του (Y,+,.).

Από τα παραδείγματα που ακολουθούν βλέπουμε ότι υπάρχουν συνδετικά υπο-υπερδακτυλιοειδή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 1.1.

α) Εστω το Ε.Υ. της Προτάσεως 1.4. Παρατηρούμε ότι αν Γ είναι μία υποομάδα της (P,+) τότε η (Γ,$\dagger$) είναι μία υπο-υπερομάδα της (P,$\dagger$) και επιπλέον για κάθε α,β ∈ Γ ισχύει α:β ⊆ Γ, δηλαδή είναι μία συνδετική υπο-υπερομάδα της (P,$\dagger$). Εύκολα επαληθεύεται στη συνέχεια ότι η υπερδομή (Γ,$\dagger$,.) είναι ένα συνδετικό υπο-υπερδακτυλιοειδές.

β) Η συνδετική υπερομάδα (Z,$\dot{+}$) του παραδείγματος I.2.1 παρέχει, με πράξη τον συνήθη πολλαπλασιασμό, την υπερσυνθετική δομή (Z,$\dot{+}$,.) που είναι ένα ενισχυμένο υπερδακτυλιοειδές. Εύκολα επαληθεύεται ότι το υποσύνολο Z_2 παρέχει την υπερδομή (Z_2,$\dot{+}$,.) που είναι ένα συνδετικό υπο-υπερδακτυλιοειδές του Z.

Ειδικότερες μορφές υπο-υπερδακτυλιοειδών είναι τα υπεριδεωειδή που ορίζονται κατά τρόπο ανάλογο προς τα ιδεώδη των δακτυλίων στη κλασική **θεωρία** [22], και **τα υπεριδεώδη** των υπερδακτυλίων [52]. Εστω πράγματι το υπερδακτυλιοειδές (Y,+,.) και έστω (A,+,.) ένα υπο-υπερδακτυλιοειδές του. Αν το A είναι δεξιά, αριστερά, ή αμφίπλευρα πολλαπλασιαστικά απορροφητικό δηλαδή αν έχουμε YA ⊆ A, αντιστ. AY ⊆ A, αντιστ. YA ∪ AY ⊆ A, ορίζεται αντίστοιχα το **δεξιό, αριστερό ή αμφίπλευρο υπεριδεωειδές ή συνδετικό υπεριδεωειδές** ανάλογα με το αν το A είναι υπο-υπερδακτυλιοειδές, ή συνδετικό υπο-υπερδακτυλιοειδές συνδετικού υπερδακτυλιοειδούς. Επιπλέον αν το (Y,+,.) είναι Ε.Υ. και το (A,+,.) είναι συμμετρικό υπο-υπερδακτυλιοειδές, τότε το υπεριδεωειδές θα καλείται **συμμετρικό.**

Ετσι στο Παράδειγμα 1.1.α. αν το (Γ,+,.) είναι δεξιό, αριστερό ή αμφίπλευρο ιδεώδες, τότε το (Γ,$\dagger$,.) είναι αντίστοιχα δεξιό αριστερό ή αμφίπλευρο συνδετικό υπεριδεωειδές.

Οπως στην θεωρία των υπερδακτυλίων έτσι και στην παρούσα οι όροι και οι έννοιες της θεωρίας των δακτυλίων, που δεν εξαρτώνται π α ρ ά μ ό ν ο ν από τις πολλαπλασιαστικές τους ιδιότητες, όπως διαιρέτης, μονάδα, διαιρέτης του μηδενός, συσχετισμένα στοιχεία, ακέραιος, μοναδιαίος κ.λ.π. διατηρούνται εκτός από τον όρο "πεδίο" που θα αντικατασταθεί με το "υπερπεδιοειδές". Δηλαδή **υπερπεδιοειδές** είναι ένα ακέραιο Ε.Υ. (δηλαδή χωρίς διαιρέτες του μηδενός και αντιμεταθετικό) και μοναδιαίο. Ενα υπερδακτυλιοειδές (γενικά) είναι αντιμεταθετικό, όταν ο πολλαπλασιασμός είναι τέτοιος. Ενα Ε.Υ. (Υ,+,.) τέτοιο ώστε το Υ \ {0} να είναι ομάδα λέγεται **συνδετικό υπερσωματοειδές** ή απλώς **υπερσωματοειδές**. Παρατηρούμε ακόμη ότι προτάσεις των δακτυλίων που εξαρτώνται α π ο κ λ ε ι σ τ ι κ ώ ς από τον πολλαπλασιασμό και αποδεικνύονται χ ω ρ ί ς τ η ν π α ρ ε μ β ο λ ή της προσθέσεως ισχύουν και στην παρούσα θεωρία.

Προφανώς κάθε υπερδακτύλιος είναι Ε.Υ. Ενα Ε.Υ. ανάγεται σε υπερδακτύλιο αν, όπως είδαμε ήδη (Παρατήρηση 1.1), το ουδέτερο ως προς την πρόσθεση στοιχείο του είναι βαθμωτό. Ενα Ε.Υ. που δεν είναι υπερδακτύλιος λέγεται **γνήσιο Ε.Υ.**

Στη συνέχεια και λόγω της ιδιαίτερης σημασίας για τη θεωρία γλωσσών και αυτομάτων τα θεωρούμενα υπερδακτυλιοειδή θα είναι, χωρίς ρητή δήλωση του αντιθέτου, ενισχυμένα.

—2—

ΕΝΙΣΧΥΜΕΝΑ ΥΠΕΡΔΑΚΤΥΛΙΟΕΙΔΗ

Εστω $(Y,+,.)$ ένα Ε.Υ. Η διάκριση των στοιχείων της προσθετικής υπερομάδας του Y σε κ και ε-στοιχεία συνεπάγεται και για τον πολλαπλασιασμό του Y ορισμένες ιδιότητες. Ετσι έχουμε τις Προτάσεις :

Πρόταση 2.1. *Το γινόμενο δύο u-στοιχείων είναι ένα u-στοιχείο, ενώ το γινόμενο ενός u-στοιχείου με ένα ε-στοιχείο είναι 0.*

Απόδειξη. Εστω ότι τα α, β είναι κ-στοιχεία. Τότε:

$$\alpha\beta + 0 = \alpha\beta + 0\beta = (\alpha + 0)\beta = \alpha\beta$$

Εστω στη συνέχεια ότι το α είναι ένα κ-στοιχείο και το χ ένα ε-στοιχείο. Τότε:

$$\alpha\chi + 0 = \alpha\chi + 0\chi = (\alpha + 0)\chi = \alpha\chi$$

Εξάλλου

$$\alpha\chi + 0 = \alpha\chi + \alpha 0 = \alpha(\chi + 0) = \alpha\{\ \chi,\ 0\ \} = \{\ \alpha\chi,\ \alpha 0\ \} = $$
$$= \{\ \alpha\chi,\ 0\ \}$$

Συνεπώς πρέπει $\{\ \alpha\chi\ \} = \{\ \alpha\chi,\ 0\ \}$, και επομένως $\alpha\chi = 0$.

Πόρισμα 2.1. Αν ένα γνήσιο Ε.Υ. είναι χωρίς διαιρέτες του μηδενός, τότε δεν περιέχει υ-στοιχεία (εκτός από το 0).

Πρόταση 2.2. Αν ένα Ε.Υ. περιέχει ένα υ-στοιχείο διάφορο του μηδενός, τότε το γινόμενο δύο ε-στοιχείων του είναι το 0.

Απόδειξη. Εστω ότι το α είναι ένα κ-στοιχείο, ενώ τα χ, ψ είναι ε-στοιχεία. Τότε, σύμφωνα με την ανωτέρω Πρόταση 2.1, το γινόμενο $\alpha\chi$ είναι 0. Ετσι έχουμε:

$$\psi\chi \in 0 + \psi\chi = \alpha\chi + \psi\chi = (\alpha + \psi)\chi$$

Λόγω όμως της Πρότασης II.1.7 το άθροισμα $\alpha + \psi$ είναι ίσο με α και επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 2.1, το γινόμενο $(\alpha + \psi)\chi = \alpha\chi$ είναι ισο με το 0, συνεπώς $\psi\chi = 0$.

Οπως είναι γνωστό σ' έναν υπερδακτύλιο ισχύουν οι γνωστές και από τη στοιχειώδη αριθμητική σχέσεις:

$$\begin{aligned} &\text{i)} \quad \chi(-\psi) = (-\chi)\psi = -\chi\psi \\ &\text{ii)} \quad (-\chi)(-\psi) = \chi\psi \qquad (1) \\ &\text{iii)} \quad \omega(\chi - \psi) = \omega\chi - \omega\psi,\ (\chi - \psi)\omega = \chi\omega - \psi\omega \end{aligned}$$

(αποδεικνυόμενες όμως και με την παρεμβολή της πρόσθεσης).

Αλλά αυτές δεν ισχύουν εν γένει σε κάθε Ε.Υ., όπως δείχνει το επόμενο Παράδειγμα:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.

Εστω μια πολλαπλασιαστική ημιομάδα S με ένα αμφίπλευρα απορροφητικό στοιχείο 0. Θεωρούμε το σύνολο:

$$P = \{0\} \times S \cup S \times \{0\}$$

Στο σύνολο αυτό εισάγουμε μια υπερπράξη "+" ως εξής:

$$(\chi,0) + (\psi,0) = \{ (\chi,0), (\psi,0) \}$$

$$(0,\chi) + (0,\psi) = \{ (0,\chi), (0,\psi) \}$$

$$(\chi,0) + (0,\psi) = (0,\psi) + (\chi,0) = \{ (\chi,0), (0,\psi) \} \quad \text{για} \quad \chi \neq \psi$$

και

$$(\chi,0) + (0,\chi) = (0,\chi) + (\chi,0) = \{ (\chi,0), (0,\chi), (0,0) \}$$

Η δομή (P,+) η οποία προκύπτει κατ' αυτόν τον τρόπο είναι μια Ε.Σ.Υ. με ουδέτερο στοιχείο το (0,0) και αντίθετο κάθε στοιχείου της (χ,0) το στοιχείο, (0,χ). Πράγματι για τυχόντα στοιχεία από το P και θέτοντας συντομογραφικά χ', $-\chi'$, $0'$ αντί (χ,0), (0,χ) και (0,0), για την προσεταιριστικότητα ενδεικτικά έχουμε

$$(\chi' - \chi') + \chi' = \{ -\chi', 0', \chi' \} + \chi' =$$
$$= (-\chi' + \chi') \cup (0' + \chi') \cup (\chi' + \chi') =$$
$$= \{ -\chi', 0', \chi' \} \cup \{ \chi', 0' \} \cup \{ \chi' \} =$$
$$= \{ -\chi', 0', \chi' \}$$

και $-\chi' + (\chi' + \chi') = -\chi' + \chi' = \{ -\chi', 0', \chi' \}$

Αν $\psi' \neq -\chi', \chi'$, τότε

$$(\chi' - \chi') + \psi' = \{ -\chi', 0', \chi' \} + \psi' =$$
$$= (-\chi' + \psi') \cup (0' + \psi') \cup (\chi' + \psi') = \{ -\chi', 0', \chi', \psi' \}$$

και

$$\chi' + (-\chi' + \psi') = \chi' + \{ -\chi', \psi' \} = (\chi' - \chi') \cup (\chi' + \psi') =$$
$$= \{ -\chi', 0', \chi' \} \cup \{ \chi', \psi' \} =$$
$$= \{ -\chi', 0', \chi', \psi' \}$$

Στη συνέχεια για την επαγόμενη υπερπράξη έχουμε:

$$\chi' : \psi' = \chi' \qquad \text{αν} \quad \chi' \neq 0', \psi'$$
$$0' : \chi' = \{ -\chi', 0' \} \qquad \text{αν} \quad \chi' \neq 0'$$
$$\chi' : \chi' = P$$

Είναι επομένως [39] η $(P,+)$ υπερομάδα, προφανώς αντιμεταθετική. Ετσι αν χ', ψ', ω' τυχόντα στοιχεία από P, τότε για το συνδετικό αξίωμα έχουμε τις περιπτώσεις:

$$\omega' : \psi' \cap \chi' : \chi' \neq \phi \implies \omega' + \chi' \cap \chi' + \varphi' \supseteq \{\chi'\} \neq \phi$$
$$\chi' : \psi' \cap \chi' : \omega' \neq \phi \implies \chi' + \psi' \cap \chi' + \omega' \supseteq \{\chi'\} \neq \phi$$
$$0' : \chi' \cap (-\chi') : \chi' \neq \phi \implies \chi' - \chi' \cap \chi' + 0' = \{ \chi', 0' \} \neq \phi$$

Συνεπώς το συνδετικό αξίωμα επαληθεύεται και η υπερδομή $(P,+)$ είναι πράγματι Ε.Σ.Υ. και προφανώς χωρίς κ-στοιχεία. Στη συνέχεια εισάγουμε στο P και μια πολλαπλασιαστική πράξη ".", ορισμένη ως εξής:

$$(\chi_1, \psi_1)(\chi_2, \psi_2) = (\chi_1\chi_2, \psi_1\psi_2)$$

Ο πολλαπλασιασμός αυτός είναι προσεταιριστικός με αμφίπλευρα απορροφητικό στοιχείο το $(0,0)$ και επίσης είναι επιμεριστικός ως προς την υπερπράξη. Πράγματι για την επιμεριστικότητα διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α> $$(\chi,0) [(\psi,0) + (\omega,0)] = (\chi,0) \{ (\psi,0), (\omega,0) \} =$$
$$= \{ (\chi,0)(\psi,0), (\chi,0)(\omega,0) \} =$$
$$= \{ (\chi\psi,0), (\chi\omega,0) \} =$$
$$= (\chi,0)(\psi,0) + (\chi,0)(\omega,0)$$

β> $(\chi,0)\ [(\psi,0) + (0,\omega)] = (\chi,0)\ \{\ (\psi,0),\ (0,\omega)\ \} =$

$= \{\ (\chi,0)(\psi,0),\ (\chi,0)(0,\omega)\ \} =$

$= \{\ (\chi\psi,0),\ (0,0)\ \} =$

$= (\chi\psi,0) + (0,0) =$

$= (\chi,0)(\psi,0) + (\chi,0)(0,\omega)$

γ> $(\chi,0)\ [(\psi,0) + (0,\psi)] = (\chi,0)\ \{\ (\psi,0),\ (0,\psi),\ (0,0)\ \}$

$= \{\ (\chi,0)(\psi,0),\ (\chi,0)(0,\psi),\ (\chi,0)(0,0)\ \} =$

$= \{\ (\chi\psi,0),\ (0,0)\ \} = (\chi\psi,0) + (0,0) =$

$= (\chi,0)(\psi,0) + (\chi,0)(0,\psi)$

Ομοια αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες περιπτώσεις και επομένως η δομή $(P,+,.)$ είναι ένα Ε.Υ.

Για τον πολλαπλασιασμό όμως αυτό, παρατηρούμε τα εξής

$$(\chi,0)(\psi,0) = (\chi\psi,0)$$

ενώ $(\chi,0)(0,\psi) = (0,0)$ και $(0,\chi)(\psi,0) = (0,0)$

Δηλαδή αν $\chi' = (\chi,0)$ και $\psi' = (\psi,0)$, είναι $\chi'\psi' \neq 0'$, άρα και $-\chi'\psi' \neq 0'$ ενώ $\chi'(-\psi') = (-\chi')\psi' = 0'$.

Ακόμη $(0,\chi)(0,\psi) = (0,\chi\psi)$, που είναι το αντίθετο του $(\chi\psi,0)$, δηλαδή έχουμε ότι:

$$(-\chi')(-\psi') = -\chi'\psi'$$

Προέκυψε λοιπόν η μη ισχύς στο Παράδειγμα των (i) και (ii) της (1), από τις οποίες προκύπτει και η μη ισχύς της (iii).

Οι πιό πάνω σχέσεις (1) ισχύουν όμως στα Ε.Υ. υπό συνθήκες. Εχουμε πράγματι:

Πρόταση 2.3. *Αν τα $-x$, $-y$, x, ω δεν είναι διαιρέτες του μηδενός, τότε ισχύουν οι σχέσεις (1).*

Απόδειξη. i) Το 0 ανήκει στο $\psi - \psi$ και συνεπώς έχουμε

$$0 \in \chi(\psi - \psi) = \chi[\psi + (-\psi)] = \chi\psi + \chi(-\psi)$$

Επειδή όμως τα $\chi\psi$, $\chi(-\psi)$ είναι διάφορα του 0, και αφού το 0 ανήκει στο άθροισμά τους, έπεται ότι αυτά είναι μεταξύ τους αντίθετα, άρα $\chi(-\psi) = -\chi\psi$. Ομοίως $(-\chi)\psi = -\chi\psi$.

ii) Εχουμε

$$0 \in \chi(\psi - \psi) = \chi\psi + \chi(-\psi)$$

$$0 \in (\chi - \chi)(-\psi) = [\chi + (-\chi)](-\psi) = \chi(-\psi) + (-\chi)(-\psi)$$

Επειδή τα $\chi(-\psi)$, $(-\chi)(-\psi)$, $\chi\psi$ είναι διάφορα του 0, έπεται ότι τα $\chi\psi$, $(-\chi)(-\psi)$ είναι αντίθετα του $\chi(-\psi)$. Ομως το αντίθετο κάθε στοιχείου σε ένα Ε.Υ. είναι μονοσήμαντα ορισμένο, άρα $\chi\psi = (-\chi)(-\psi)$.

iii) Εχουμε

$$\omega(\chi - \psi) = \omega[\chi + (-\psi)] = \omega\chi + \omega(-\psi)$$

Ομως το $\omega(-\psi)$, λόγω του (i) ισούται με $-\omega\psi$, άρα

$$\omega(\chi - \psi) = \omega\chi - \omega\psi$$

Ομοίως αποδεικνύεται η επιμεριστικότητα και από τα δεξιά.

Πόρισμα 2.2. *Σε κάθε Ε.Υ. χωρίς διαιρέτες του μηδενός επαληθεύονται οι σχέσεις (1).*

Πρόταση 2.4. *Σε ένα τυχόν Ε.Υ. οι σχέσεις (1) ισχύουν αν ένα τουλάχιστον από τα συμμετέχοντα στοιχεία είναι u.*

Απόδειξη. Εστω ότι το χ είναι κ-στοιχείο. Τότε σύμφωνα με την Πρόταση ΙΙ.1.2 το $-\chi$ είναι επίσης κ-στοιχείο.

Ετσι για τα (i) και (ii) έχουμε:

α) αν το ψ είναι ε-στοιχείο, τότε και το $-\psi$ είναι ε-στοιχείο (Πρόταση II.1.2) και συνεπώς λόγω της Προτάσεως 2.1 έχουμε:

$$\chi(-\psi) = (-\chi)\psi = -\chi\psi = 0 \quad \text{και} \quad (-\chi)(-\psi) = \chi\psi = 0$$

β) αν το ψ είναι κ-στοιχείο, τότε επειδή το γινόμενο δύο κ-στοιχείων είναι κ-στοιχείο (Πρόταση 2.1) από τη σχέση:

$$0 \in \chi(\psi - \psi) = \chi\psi + \chi(-\psi)$$

έπεται ότι: $\chi(-\psi) = -\chi\psi$.

Ομοίως,

$$0 \in (\chi - \chi)\psi = \chi\psi + (-\chi)\psi$$

και επομένως $(-\chi)\psi = -\chi\psi$.

Αρα $\chi(-\psi) = (-\chi)\psi = -\chi\psi$

Ακόμη, με την βοήθεια της ανωτέρω σχέσης έχουμε:

$$(-\chi)(-\psi)-\chi\psi = (-\chi)(-\psi)+(-\chi)\psi = (-\chi)(-\psi+\psi) \ni (-\chi)0 = 0$$

και συνεπώς $(-\chi)(-\psi) = \chi\psi$.

Για το (iii) τώρα διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) αν τα χ, ψ, ω είναι κ-στοιχεία τότε με τη βοήθεια των (i) και (ii) που αποδείξαμε ανωτέρω έχουμε:

$$\omega(\chi - \psi) = \omega[\chi + (-\psi)] = \omega\chi + \omega(-\psi) = \omega\chi - \omega\psi$$

β) αν το ω είναι κ-στοιχείο και τα χ, ψ ε-στοιχεία, τότε σύμφωνα με την Πρόταση II.1.6, έχουμε $\chi - \psi \subseteq E \cup \{0\}$ Ομως σύμφωνα με την Πρόταση 2.1 το γινόμενο ενός κ-στοιχείου με ε-στοιχείο είναι 0, άρα:

$$\omega(\chi - \psi) = 0, \quad \omega\chi = 0 \quad \text{και} \quad \omega(-\psi) = -\omega\psi = 0$$

Επομένως, $\omega(\chi - \psi) = \omega\chi - \omega\psi$.

γ) αν το ω είναι κ-στοιχείο και ένα από τα χ, ψ είναι επίσης κ-στοιχείο για παράδειγμα το χ, ενώ το άλλο είναι ε, τότε, λόγω της Προτάσεως II.1.7, χ - ψ = χ και ω(-ψ) = -ωψ = 0, επομένως:

$$ω(χ - ψ) = ωχ = ωχ + 0 = ωχ - ωψ$$

δ) αν το ω είναι ε-στοιχείο και τα χ, ψ κ-στοιχεία, τότε ωχ = ωψ = 0. Αν τώρα $χ \neq ψ$, τότε $χ - ψ \subseteq K$ και επομένως $ω(χ - ψ) \subseteq ωK = 0$. Εξάλλου αν χ = ψ τότε το χ - χ εκτός από κ-στοιχεία περιέχει και το Ε. Σύμφωνα όμως με την Πρόταση 2.2, αφού υπάρχει ένα κ-στοιχείο ωΕ = 0. Αρα ω(χ - χ) = 0. Επομένως

$$ω(χ - ψ) = 0 = ωχ - ωψ.$$

ε) αν ένα από τα χ, ψ είναι κ-στοιχείο, έστω το χ, ενώ τα ω, ψ είναι ε-στοιχεία, τότε λόγω των Προτάσεων 2.1 και 2.2 έχουμε αντίστοιχα, ωχ = 0 και ωψ = 0. Ετσι έχουμε:

$$ω(χ - ψ) = ωχ = 0 = ωχ - ωψ$$

Αποδείχθηκε συνεπώς το πρώτο σκέλος της (iii). Ομοίως αποδεικνύεται και το δεύτερο σκέλος της και συνεπώς η Πρόταση.

Από το Παράδειγμα 2.1 προκύπτει ακόμη ότι στα Ε.Υ. δεν ισχύει εν γένει ο κανόνας της απλοποιήσεως. Εχουμε πράγματι:

$$(χ,0)(0,ψ) = (χ,0)(0,0) \;\not\Rightarrow\; (0,ψ) = (0,0)$$

για $ψ \neq 0$. Εχουμε όμως την Πρόταση:

Πρόταση 2.5. *Σε κάθε Ε.Υ. χωρίς διαιρέτες του* *μηδενός ισχύει ο κανόνας της απλοποιήσεως ως προς τον πολλαπλασιασμό (με στοιχείο διάφορο του 0). Και αντιστρόφως.*

Α π ό δ ε ι ξ η. Εστω ένα Ε.Υ. χωρίς διαιρέτες του μηδενός και έστω α, χ, ψ, με $\alpha \neq 0$, στοιχεία του, έτσι ώστε $\alpha\chi = \alpha\psi$. Αν $\chi = 0$, τότε $0 = \alpha\psi$, επομένως $\psi = 0$ και άρα $\chi = \psi$. Εστω τώρα $\chi, \psi \neq 0$. Τότε

$$0 \in \alpha\chi - \alpha\psi = \alpha\chi + \alpha(-\psi) = \alpha(\chi - \psi)$$

Επομένως $0 \in \chi - \psi$ και συνεπώς $\chi = \psi$.

Αντίστροφα. Αν σε ένα Ε.Υ. ισχύει ο κανόνας της απλοποιήσεως, και $\alpha\chi = 0$, τότε $\alpha\chi = \alpha 0$ απ' όπου $\chi = 0$ και συνεπώς η Πρόταση.

Ενα Ε.Υ. με ομαλή την προσθετική του υπερομάδα λέγεται αυτό το ίδιο ομαλό. Σχετικά έχουμε την ακόλουθη Πρόταση:

Πρόταση 2.6. Κάθε Ε.Υ. χωρίς διαιρέτες του μηδενός είναι ομαλό.

Α π ό δ ε ι ξ η. Εστω α, χ δύο στοιχεία του Ε.Υ. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha[-(\chi - \chi)] &= \{\ \alpha(-\psi)\ |\ \psi \in \chi - \chi\ \} = \\ &= \{\ (-\alpha)\psi\ |\ \psi \in \chi - \chi\ \} = \\ &= (-\alpha)(\chi - \chi) = (-\alpha)\chi + (-\alpha)(-\chi) = \\ &= \alpha(-\chi) + \alpha\chi = \alpha(\chi - \chi)\end{aligned}$$

Ωστε για κάθε $z \in -(\chi - \chi)$ υπάρχει ένα $\omega \in \chi - \chi$, τέτοιο ώστε $\alpha z = \alpha\omega$, άρα, λόγω της Πρότασης 2.5, $z = \omega$ και επομένως $-(\chi - \chi) \subseteq \chi - \chi$. Ομοίως έχουμε $\chi - \chi \subseteq -(\chi - \chi)$ και επομένως $\chi - \chi = -(\chi - \chi)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.1.

Σημειώνουμε ότι το αντίστροφο της ανωτέρω Προτάσεως δεν ισχύει, αφού, όπως προκύπτει από το Παράδειγμα 2.1, ένα Ε.Υ. μπορεί να είναι ομαλό και να έχει διαιρέτες του μηδενός.

Πρόταση 2.7. *Αν ένα υπερπεδιοειδές είναι πεπερασμένο, τότε είναι υπερσωματοειδές*

Απόδειξη. Εστω ότι το πεπερασμένο Ε.Υ. $P = \{0, \chi_1, \ldots, \chi_\nu\}$ δεν έχει διαιρέτες του μηδενός. Τότε το $P\setminus\{0\}$ είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό. Αν τώρα ψ είναι τυχόν στοιχείο από το $P\setminus\{0\}$, τότε τα στοιχεία $\psi\chi_i$, $i = 1,\ldots,\nu$ είναι διάφορα μεταξύ τους. Πράγματι, επειδή ισχύει ο κανόνας της απλοποιήσεως (Πρόταση 2.5), αν $\psi\chi_i = \psi\chi_j$, τότε $\chi_i = \chi_j$. Επομένως για το $P\setminus\{0\}$ ισχύει:

$$\psi[P\setminus\{0\}] = [P\setminus\{0\}]\psi = P\setminus\{0\}$$

Αρα η $P\setminus\{0\}$ είναι ομάδα ως προς τον πολλαπλασιασμό και συνεπώς η Πρόταση αποδείχθηκε.

επομένως $-(\chi - \chi) \subseteq \chi - \chi$. Ομοίως έχουμε $\chi - \chi \subseteq -(\chi - \chi)$ και επομένως $\chi - \chi = -(\chi - \chi)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.1.

Σημειώνουμε ότι το αντίστροφο της ανωτέρω Προτάσεως δεν ισχύει, αφού, όπως προκύπτει από το Παράδειγμα 2.1, ένα Ε.Υ. μπορεί να είναι ομαλό και να έχει διαιρέτες του μηδενός.

Πρόταση 2.7. Αν ένα υπερυπεδιοειδές είναι πεπερασμένο, τότε είναι υπερσωματοειδές

Απόδειξη. Εστω ότι το πεπερασμένο Ε.Υ. $P = \{0, \chi_1, \ldots, \chi_\nu\}$ δεν έχει διαιρέτες του μηδενός. Τότε το $P\setminus\{0\}$ είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό. Αν τώρα ψ είναι τυχόν στοιχείο από το $P\setminus\{0\}$, τότε τα στοιχεία $\psi\chi_i$, $i = 1,\ldots,\nu$ είναι διάφορα μεταξύ τους. Πράγματι, επειδή ισχύει ο κανόνας της απλοποιήσεως (Πρόταση 2.5), αν $\psi\chi_i = \psi\chi_j$, τότε $\chi_i = \chi^j$. Επομένως για το $P\setminus\{0\}$ ισχύει:

$$\psi[P\setminus\{0\}] = [P\setminus\{0\}]\psi = P\setminus\{0\}$$

Αρα η $P\setminus\{0\}$ είναι ομάδα ως προς τον πολλαπλασιασμό και συνεπώς η Πρόταση αποδείχθηκε.

—3—

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΥΠΕΡΔΑΚΤΥΛΙΟΕΙΔΩΝ

Οπως στη θεωρία των δακτυλίων και υπερδακτυλίων, έτσι και στην παρούσα η έννοια της χαρακτηριστικής παίζει σημαντικό ρόλο στη μελέτη της προσθετικής υπερομάδας των Ε.Υ. Εστω πράγματι $(Y,+,.)$ ένα Ε.Υ., τυχόν $x \in Y$, η μονογενής του συμμετρική υπο-υπερομάδα $h(x)$ και η τάξη του $\omega(x)$. Επειδή τα τελευταία αυτά στοιχεία ορίστηκαν και μελετήθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο υπό την προυπόθεση ότι η θεωρούμενη Ε.Σ.Υ. ήταν ομαλή, θεωρούμε το υπερδακτυλιοειδές $(Y,+,.)$ ομαλό και επιπλέον χωρίς διαιρέτες του μηδενός. Με βάση λοιπόν τη θεωρία της χαρακτηριστικής στους δακτυλίους [22] και τη γενίκευσή της στους υπερδακτυλίους [43], [52], ορίζουμε:

Ορισμός 3.1. Ονομάζουμε **χαρακτηριστική** $\chi(x)$ του στοιχείου $x \in Y$ την κύρια τάξη του x στην προσθετική υπερομάδα του Y, εάν η τάξη του $\omega(x) \neq +\infty$, θέτουμε δε $\chi(x) = 0$ αν $\omega(x) = +\infty$.

Παρατηρούμε άμεσα ότι και εδώ ισχύει το επόμενο:

Λήμμα 3.1. *Αν για $x, y \in Y$ το x διαιρεί (από τα δεξιά ή αριστερά) το y, η χαρακτηριστική $\chi(y)$ διαιρεί την $\chi(x)$.*

Απόδειξη. Η ιδιότητα είναι προφανής αν $\chi(x) = 0$. Εστω $\chi(x) \neq 0$ (επομένως $\omega(x) \neq +\infty$) και ας υποθέσουμε πχ. ότι $y = ax$. Θα είναι άρα

$$0 \in \chi(x).x + m.(x - x)$$

και επομένως (βάσει του συμβ. (1) της II.4 και της επιμεριστικότητας)

$$0.a = 0 \in \chi(x).ax + m.(ax - ax),$$

που συνεπάγεται

$$0 \in \chi(x).y + m.(y - y),$$

από την οποία συμπεραίνουμε (Πρόταση II.4.3) ότι

$$\chi(x) = \text{πολ}\ \chi(y)$$

Ορισμός 3.2. Ονομάζουμε **χαρακτηριστική** $\chi(Y)$ του Y το Ε.Κ.Π. των χαρακτηριστικών $\chi(x)$ των στοιχείων x του Y. Αν δεν υπάρχει κανένα κοινό πολλαπλάσιο των $\chi(x)$ θέτουμε $\chi(Y) = 0$.

Στους δακτυλίους και υπερδακτυλίους ως γνωστόν, αν y είναι στοιχείο τους μη διαιρέτης του μηδενός, ισχύει $\chi(Y) = \chi(y)$. Το αυτό ισχύει και στην προκειμένη περίπτωση. Ισχύει δηλαδή η:

Πρόταση 3.1. Για κάθε $y \in Y$ μη διαιρέτη του μηδενός, ισχύει

$$\chi(Y) = \chi(y)$$

Απόδειξη. Το y είναι μη διαιρέτης του μηδενός και αν $\chi(y) = 0$ η Πρόταση ισχύει. Είναι δηλαδή και $\chi(Y) = 0$. Εστω $\chi(y) \neq 0$. Θα έχουμε άρα

$$0 \in \chi(y).y + \Omega(y)$$

και επομένως για κάθε $x \in Y$

$$0 \in [\chi(y).y].x + \Omega(y).x = y[\chi(y).x] + y\Omega(x),$$

διότι

$$\Omega(y)x = [\mathbf{U}_{n\in N}\ n.(y - y)]x = \mathbf{U}_{n\in N}\ n.(yx - yx) =$$
$$= y[\mathbf{U}_{n\in N}\ n.(x - x)] = y\Omega(x),$$

άρα

$$0 \in y[\chi(y).x + \Omega(x)],$$

η οποία συνεπάγεται (αφού το y δεν είναι διαιρέτης του μηδενός)

$$0 \in \chi(y).x + \Omega(x)$$

Προκύπτει ότι για κάθε $x \in Y$ η τάξη του στην προσθετική υπερομάδα του Y δεν είναι το άπειρο και ότι η κύρια τάξη $\chi(x)$ του x διαιρεί το $\chi(y)$ [Πρόταση II.4.3]. Είναι λοιπόν το $\chi(y)$ το Ε.Κ.Π. των $\chi(x)$ και επομένως:

$$\chi(Y) = \chi(y)$$

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε και την ακόλουθη σημαντική Πρόταση:

Πρόταση 3.2. *Ολα τα μη μηδενικά στοιχεία ενός Ε.Υ. χωρίς διαιρέτες του 0 (άρα ομαλού), έχουν τάξη το άπειρο, όταν το υπερδακτυλιοειδές είναι χαρακτηριστικής μηδέν, ή η κύρια τάξη τους είναι ίση με την χαρακτηριστική, αν αυτή είναι διάφορη του μηδενός.*

Με άλλα λόγια έχουμε:

$$\chi(Y) = 0 \iff (\forall y \in Y)[\omega(y) = +\infty]$$

$$\chi(Y) = \lambda \neq 0 \iff (\forall y \in Y)[\omega(y) = \lambda]$$

Γνωρίζουμε ότι κάθε γνήσιο Ε.Υ. έχει ε-στοιχεία και ότι η κύρια τάξη κάθε τέτοιου στοιχείου είναι 1 (ΙΙ.4). Από την ιδιότητα αυτή, την προηγούμενη Πρόταση και την 2.6 οδηγούμεθα στο ακόλουθο θεμελιώδες για την θεωρία των Ε.Υ. Θεώρημα:

Θεώρημα 3.1. *Κάθε γνήσιο Ε.Υ. χωρίς διαιρέτες του 0, είναι χαρακτηριστικής 1.*

Πόρισμα 3.1. *Κάθε διευρυμένο Δ-υπερδακτυλιοειδές είναι χαρακτηριστικής 1.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.1.

Αντίθετα λοιπόν προς τους δακτυλίους, όπου μόνο ο {0} είναι χαρακτηριστικής 1 έχουμε και εδώ, όπως και στους υπερδακτυλίους [52], γνήσια ομαλά Ε.Υ. με χαρακτηριστική 1.

—4—

ΥΠΟ—ΥΠΕΡΔΑΚΤΥΛΙΟΕΙΔΗ

Εστω $(Y,+,.)$ ένα συνδετικό υπερδακτυλιοειδές. Σε σχέση με τα όσα έχουμε αναφέρει για τις συνδετικές υπερομάδες εύκολα συνάγεται ότι

Πρόταση 4.1. *Ενα μη κενό υποσύνολο Y' του Y είναι υπο-υπερδακτυλιοειδές του Y, αν και μόνον αν,*

$$x+Y' = Y' \text{ και } xy \in Y'$$

για κάθε $x,y \in Y'$ ενώ το Y' είναι συνδετικό υπο-υπερδακτυλιοειδές αν και μόνον αν

$$x+y \subseteq Y',\ x:y \subseteq Y' \text{ και } xy \in Y'.$$

για κάθε $x,y \in Y'$

Ας ονομάσουμε στη συνέχεια S το σύνολο των υπο-υπερδακτυλιοειδών του Y, S_Σ το σύνολο των συνδετικών υπο-υπερδακτυλιοειδών του Y, S_I το σύνολο των συνδετικών υπεριδεωειδών του Y, P το σύνολο των σταθερών μερών του Y σε σχέση με τον πολλαπλασιασμό και I το υποσύνολο του P που αποτελείται από τα απορροφητικά ως προς τον πολλαπλασιασμό υποσύνολα του Y. Ας ονομάσουμε ακόμη H_M, H, H_Σ τα σύνολα αντιστοίχως των ημιυπο-υπερομάδων, υπο-υπερομάδων και συνδετικών υπο-υπερομάδων της προσθετικής υπο-υπερομάδας του Y. Τότε θα έχουμε ότι

$$S = P \cap H,\ S_\Sigma = P \cap H_\Sigma,\ S_I = I \cap H_\Sigma$$

ενώ το

$$S_M = P \cap H_M$$

θα είναι το σύνολο των **ημιυπο-υπερδακτυλιοειδών** υπο την έννοια ότι το υπερσυνθετικό τμήμα της δομής τους είναι εν γένει ημιυπο-υπερομάδα. Επειδή δε $H_\Sigma \subseteq H \subseteq H_M$ και $I \subseteq P$ έπεται άμεσα ότι

$$S_I \subseteq S_\Sigma \subseteq S \subseteq S_M$$

Ομως είναι γνωστό ότι αν η τομή δύο ημιομάδων είναι μη κενή τότε αυτή είναι επίσης ημιομάδα. Εξάλλου όπως ήδη έχουμε αναφέρει (Πόρισμα I.2.1.) η μη κενή τομή δύο συνδετικών υπο-υπερομάδων είναι επίσης συνδετική υπο-υπερομάδα. Ετσι η τομή δυο συνδετικών υπο-υπερδακτυλιοειδών, αν δεν είναι κενή, είναι ένα συνδετικό υπο-υπερδακτυλιοειδές. Εξάλλου, επειδή η (μη κενή) τομή δύο υπερομάδων είναι εν γένει ημι-υπερομάδα, έπεται ότι η (μη κενή) τομή δύο υπο-υπερδακτυλιοειδών είναι ένα ημιυπο-υπερδακτυλιοειδές. Οδηγούμεθα λοιπόν στην Πρόταση:

Πρόταση 4.2. Το σύνολο S_I των συνδετικών υπο-υπερδακτυλιοειδών, αντίστοιχως το σύνολο S_I των συνδετικών υπεριδεωειδών, αντιστοίχως το σύνολο S_H των ημιυπο-υπερδακτυλιοειδών που περιέχουν ένα μη κενό υποσύνολο A του υπερδακτυλιοειδούς αποτελεί πλήρες δικτυωτό.

Εξάλλου στην περίπτωση των Ε.Υ. επειδή η τομή δύο συμμετρικών υπο-υπερομάδων μιας Ε.Σ.Υ. είναι, σύμφωνα με την Πρόταση II.3.18, συμμετρική υπο-υπερομάδα, έπεται ότι και η τομή δύο συμμετρικών υπο-υπερδακτυλιοειδών ή δύο συμμετρικών υπεριδεωειδών είναι αντίστοιχα ένα συμμετρικό υπο-υπερδακτυλιοειδές ή ένα συμμετρικό υπεριδεώδες. Ετσι έχουμε την Πρόταση:

Πρόταση 4.3. Το σύνολο των συμμετρικών υπο-υπερδακτυλιοειδών και το σύνολο των συμμετρικών υπεριδεωειδών ενός Ε.Υ. αποτελούν πλήρες δικτυωτό.

Από την Πρόταση 4.2 προκύπτει ότι αν μας δοθεί ένα μη κενό υποσύνολο A ενός τυχόντος υπερδακτυλιοειδούς Y, αντιστοιχεί σ' αυτό με την απεικόνιση της κλειστότητας το μικρότερο με την έννοια του εγκλεισμού συνδετικό υπο-υπερδακτυλιοειδές, συμβολικά $A^\wedge$, του Y που περιέχει το A. Το $A^\wedge$ είναι **το γενόμενο από το A υπο-υπερδακτυλιοειδές** του Y που το περιέχει. Αντίστοιχα ισχύουν για το **γενόμενο ημιυπο-υπερδακτυλιοειδές** του Y, συμβολικά $A^\sim$ που περιέχει το A και για την περίπτωση των Ε.Υ. για το συμμετρικό υπο-υπερδακτυλιοειδές που περιέχει το A. Ετσι σε σχέση με την Πρόταση 4.2

έχουμε τις ακόλουθες Προτάσεις:

Πρόταση 4.4. *Το ημιυπο-υπερδακτυλιοειδές ενός υπερδακτυλιοειδούς Υ, που παράγεται από ένα σύνολο Α, αποτελείται από την ένωση πεπερασμένων αθροισμάτων από γινόμενα της μορφής*

$$\Pi_{i=1}^{k} e_i \quad \text{όπου} \quad e_i \in A, \ i = 1,\ldots,k$$

Αν τα ανωτέρω αθροίσματα παράγουν υπο-υπερομάδα της (Υ, +), τότε το $A^{\sim}$ είναι υπο-υπερδακτυλιοειδές. Σχετικά έχουμε την:

Πρόταση 4.5. *Σε ένα υπερδακτυλιοειδές Υ που για την υπερπράξη ισχύει:*

$$a, b \in a + b, \quad \text{για κάθε } a, b \in Y$$

κάθε ημιυπο-υπερδακτυλιοειδές είναι υπο-υπερδακτυλιοειδές.

Απόδειξη. Εστω Υ' ένα ημιυπο-υπερδακτυλιοειδές του Υ και $\alpha \in Y'$. Τότε $\alpha + Y' \subseteq Y'$. Εξάλλου:

$$\alpha + Y' = \bigcup_{\beta \in Y'} (\alpha + \beta) \supseteq \bigcup_{\beta \in Y'} \{\alpha, \beta\} = Y'$$

Αρα $Y' \subseteq \alpha + Y'$, και επομένως η Πρόταση.

Πρόταση 4.6. *Το συνδετικό υπο-υπερδακτυλιοειδές ενός υπερδακτυλοειδούς Υ, που παράγεται από ένα σύνολο Α, αποτελείται από την ένωση πεπερασμένων αθροισμάτων από γινόμενα της μορφής*

$$\Pi_{i=1}^{k} e_i \quad \text{όπου} \quad e_i \in A, \ i = 1,\ldots,k$$

και από πηλίκα τέτοιων αθροισμάτων.

Ειδικά για την περίπτωση των Ε.Υ. για το υπο-υπερδακτυλιοειδές που παράγεται από τα ε-στοιχεία, έχουμε:

Πρόταση 4.7. Εστω Ε το σύνολο των ε-στοιχείων ενός υπερδακτυλιοειδούς Υ. Τότε το σύνολο $E^\wedge = E \cup \{0\}$ είναι ένα αμφίπλευρο συνδετικό υπεριδεωειδές του Υ.

Απόδειξη. Από την Πρόταση II.3.6 γνωρίζουμε ότι η $E^\wedge$ είναι μια συνδετική υπο-υπερομάδα. Εξάλλου στις Προτάσεις 2.1 και 2.2 έχουμε αποδείξει ότι το γινόμενο δύο ε-στοιχείων αν δεν είναι το 0 είναι ένα ε-στοιχείο, ενώ το γινόμενο ενός κ-στοιχείου με ένα ε-στοιχείο είναι το 0. Συνεπώς η $E^\wedge$ είναι κλειστή ως προς τον πολλαπλασιασμό και μάλιστα απορροφητική ως προς αυτόν. Συνεπώς το $Y^\wedge$ είναι ένα υπεριδεωειδές του Υ.

Από την ανωτέρω Πρόταση και την Πρόταση II.3.7 προκύπτει η

Πρόταση 4.8. Το υπεριδεωειδές $E^\wedge$ είναι το ελάχιστο συνδετικό υπεριδεωειδές του Υ, και μάλιστα το ελάχιστο συνδετικό υπο-υπερδακτυλιοειδές του Υ.

Εξάλλου από την Πρόταση II.3.17 συνάγουμε ότι

Πρόταση 4.9. Αν ένα συμμετρικό υπο-υπερδακτυλιοειδές περιέχει ένα κ-στοιχείο διάφορο του 0, τότε αυτό είναι συνδετικό υπο-υπερδακτυλιοειδές.

Επομένως από τις Προτάσεις 4.8 και 4.7 έχουμε ότι:

Πρόταση 4.10. Κάθε συμμετρικό υπο-υπερδακτυλιοειδές είναι υποσύνολο του ελάχιστου συνδετικού υπο-υπερδακτυλιοειδούς.

Ακόμη για την περίπτωση των Ε.Υ. είναι γνωστό σύμφωνα με τα όσα έχουμε αναφέρει στην παράγραφο II.3 και ιδιαιτέρως στην Πρόταση II.3.23 ότι αν X είναι ένα μη κενό υποσύνολο του Y, τότε το $\Omega(X)$ το οποίο αποτελείται από ένωση αθροισμάτων της μορφής:

$$(\chi_1 - \chi_1) + \ldots + (\chi_\nu - \chi_\nu)$$

είναι συμμετρική υπο-υπερομάδα της (Y,+), αν τα στοιχεία του X είναι ομαλά. Αν θεωρήσουμε στη συνέχεια δύο στοιχεία $\chi, \psi \in \Omega(X)$ τότε:

$$\chi\psi \in [(\chi_1-\chi_1) +\ldots+ (\chi_\nu-\chi_\nu)]\ [(\psi_1-\psi_1) +\ldots+ (\psi_\mu - \psi_\mu)] \subseteq$$

$$\subseteq \sum(\chi_i-\chi_i)(\psi_j-\psi_j) \subseteq$$

$$\subseteq \sum[\chi_i\psi_j + (-\chi_i)\psi_j + \chi_i(-\psi_j) + (-\chi_i)(-\psi_j)]$$

Αν τώρα τα στοιχεία του $-X \cup X$ δεν είναι διαιρέτες του 0, τότε το ανωτέρω υπεράθροισμα, λόγω της Πρότασης 2.3 λαμβάνει την μορφή:

$$\sum[(\chi_i\psi_j - \chi_i\psi_j) + (\chi_i\psi_j - \chi_i\psi_j)]$$

Το υπεράθροισμα αυτό είναι υποσύνολο του $\Omega(X)$ μόνον όταν το X είναι πολλαπλασιαστικά κλειστό, γιατί τότε το $\chi_i\psi_j$ είναι ένα στοιχείο του X. Επομένως τα ανωτέρω μας οδηγούν στην Πρόταση:

Πρόταση 4.11. Εστω X ένα μη κενό υποσύνολο *ενός ενισχυμένου υπερδακτυλιοειδούς Y, το οποίο:*

i) να είναι πολλαπλασιαστικά κλειστό

ii) να αποτελείται από ομαλά στοιχεία

iii) τα στοιχεία του $-X \cup X$ να μην είναι διαιρέτες του μηδενός.

Τότε το $\Omega(X)$ είναι ένα συμμετρικό υπο-υπερδακτυλιοειδές του Y. Αν το X είναι επιπλέον πολλαπλασιαστικά απορροφητικό, τότε το $\Omega(X)$ είναι ένα συμμετρικό υπεριδεωειδές.

Πόρισμα 4.2. *Αν A ένα ακέραιο υπερδακτυλιοειδές, τότε το $\Omega(A)$ είναι ένα συμμετρικό υπεριδεωειδές του.*

Ολοκληρώνουμε την παράγραφο αυτή με ένα ακόμη συμπέρασμα που αφορά τα υπερδακτυλιοειδή.

Πρόταση 4.12. *Τα υπερδακτυλιοειδή χωρίς διαιρέτες του μηδενός, που δεν είναι υπερδακτύλιοι, δεν έχουν γνήσια συνδετικά υπο-υπερδακτυλιοειδή.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Πόρισμα 2.1 τα χωρίς διαιρέτες του μηδενός Ε.Υ. που δεν είναι υπερδακτύλιοι αποτελούνται μόνον από ε-στοιχεία. Λόγω όμως του Πορίσματος II.3.2 οι Ε.Σ.Υ. οι οποίες αποτελούνται μόνον από ε-στοιχεία δεν έχουν γνήσιες συνδετικές υπο-υπερομάδες. Συνεπώς τα ακέραια Ε.Υ. δεν έχουν γνήσια συνδετικά υπο-υπερδακτυλιοειδή.

-5-

ΟΜΟΜΟΡΦΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΜΟΜΟΡΦΙΣΜΟΙ

Εστω Υ και Υ' δύο υπερδακτυλιοειδή και έστω $R \subseteq Y \times Y'$ μιά διμελής σχέση από το Υ στο Υ'.

Ορισμός 5.1. Η R θα λεγεται ομομορφική σχέση αν πληροί τα αξιώματα του Ορισμού I.3.1. και επιπλέον αν για κάθε $(\alpha_1,\beta_1) \in R$ και $(\alpha_2,\beta_2) \in R$ ισχύει:

$$(\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2) \in R \qquad (O_2)$$

Η έννοια του ομομορφισμού καθώς επίσης και οι διάφορες ειδικές μορφές ομομορφισμών που υπάρχουν στις υπερομάδες ορίζονται και στην περίπτωση των υπερδακτυλιοειδών με το επιπλέον αξίωμα:

$$\varphi(\chi.\psi) = \varphi(\chi).\varphi(\psi)$$

για κάθε χ, ψ από το πεδίο ορισμού του φ.

Στα συνδετικά υπερδακτυλιοειδή, ισχύουν οι αντίστοιχες προς τις συνδετικές υπερομάδες Προτάσεις. Ετσι αν K και K' δύο συνδετικά υπερδακτυλιοειδή, τότε:

Πρόταση 5.1. *Αν φ ένας αυστηρός ομομορφισμός μεταξύ των K και K', τότε το αρχέτυπο ενός συνδετικού υπο-υπερδακτυλιοειδούς του K' μέσω του φ είναι συνδετικό υπο-υπερδακτυλιοειδές του K.*

Εστω στη συνέχεια E ένα υπερομαδοειδές με μη εκφυλισμένη υπερπράξη εφοδιασμένο και με μια πράξη. Αν R είναι μια ομομορφική σχέση μεταξύ του υπερδακτυλιοειδούς K και του E, τότε:

Πρόταση 5.2. *Η εικόνα κάθε συνδετικού υπο-υπερδακτυλιοειδούς k, του K μέσω της R είναι ένα υπο-υπερδακτυλιοειδές k' του E.*

Απόδειξη. Λόγω της Πρότασης I.3.5. το k' είναι μια ευρέως συνδετική υπο-υπερομάδα της E. Για το επιμεριστικό αξίωμα έχουμε:

Εστω $(\alpha,\alpha'), (\beta,\beta'), (\gamma,\gamma') \in R$ και έστω το $\alpha'(\beta' + \gamma')$. Τότε για κάθε $\chi' \in \beta' + \gamma'$ υπάρχει $\chi \in \beta + \gamma$ έτσι ώστε $(\alpha\chi,\alpha'\chi') \in R$. Ομως $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$, συνεπώς $\alpha\chi \in \alpha\beta + \alpha\gamma$ Αλλά για κάθε $\psi \in \alpha\beta + \alpha\gamma$ υπάρχει $\psi' \in \alpha'\beta' + \alpha'\gamma'$ έτσι ώστε $(\psi,\psi') \in R$, άρα $\alpha'\chi' \in \alpha'\beta' + \alpha'\gamma'$ και συνεπώς εχουμε $\alpha'(\beta' + \gamma') \subseteq \alpha'\beta' + \alpha'\gamma'$.

Αντιστροφα τώρα. Αν $\omega' \in \alpha'\beta' + \alpha'\gamma'$ υπάρχει $\omega \in \alpha\beta + \alpha\gamma$

έτσι ώστε $(\omega,\omega') \in R$. Ομως επειδή $\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma)$, έπεται ότι $\omega = \alpha\delta$, $\delta \in \beta + \gamma$. Αρα $\omega' = \alpha'\delta'$ με $\delta' \in \beta' + \gamma'$ Επομένως $\omega' \in \alpha'(\beta' + \gamma')$ δηλαδή $\alpha'\beta' + \alpha'\gamma' \subseteq \alpha'(\beta' + \gamma')$ και συνεπώς

$$\alpha'(\beta' + \gamma') = \alpha'\beta' + \alpha'\gamma'$$

δηλαδή η επιμεριστικότητα της πράξης ως πρός την υπερπράξη και άρα το k' είναι ένα υπο-υπερδακτυλιοειδές.

Πόρισμα 5.1. *Εστω φ ένας ισχυρός επιμορφισμός από το K στο σύνολο E. Τότε το E είναι συνδετικό υπερδακτυλιοειδές και η εικόνα μέσω του φ κάθε συνδετικού υπο-υπερδακτυλιοειδούς του K είναι υπο-υπερδακτυλιοειδές του E.*

Πρόταση 5.3. *Κάθε ομομορφική σχέση ισοδυναμίας R επί ενός υπερδακτυλιοειδούς Y είναι σχέση ομαλής ισοδυναμίας και επομένως το σύνολο Y/R είναι υπερδακτυλιοειδές.*

Απόδειξη. Εστω C_x η κλάση τυχόντος στοιχείου $x \in Y$ ως πρός την ισοδυναμία R. Τότε για κάθε $x,y \in Y$, θα έχουμε, λόγω του ότι η ισοδυναμία R είναι ομομορφική:

$$z' \in C_xC_y \implies$$
$$\implies (\exists (x',y') \in C_x \times C_y)\,[\, z' = x'y' \,] \implies$$
$$\implies (\exists z = xy)\,[\, z' R z \,] \implies$$
$$\implies z' \in C_z \implies C_xC_y \subseteq C_z$$

Αντιστρόφως, έστω $z = xy$. Τότε αν $z'' \in C_z$ θα έχουμε $z'' R z$ και επομένως:

$$(\exists (x'',y'') \in Y^2)\ [\, x''Rx \wedge y''Ry \wedge z''= x''y''] \implies$$
$$\implies z''\in C_xC_y \implies C_z \subseteq C_xC_y$$

Είναι ώστε $C_xC_y = C_z$ δηλαδή το γινόμενο δύο κλάσεων είναι μια κλάση. Επίσης σύμφωνα με την Πρόταση I.3.6 τό άθροισμα δύο κλάσεων είναι μια ένωση κλάσεων και επομένως η R είναι ομαλή. Συνεπώς το πηλικοσύνολο Y/R είναι υπερδακτυλιοειδές με υπερπράξη:

$$C_x \dagger C_y = \{ C_z \mid z \in x + y \}$$

και πράξη

$$C_x . C_y = C_{xy}$$

Πρόταση 5.4. Αν το υπερδακτυλιοειδές Y είναι συνδετικό τότε και το Y/R είναι συνδετικό.

Πρόταση 5.5. Εστω (Y,+,.) συνδετικό υπερδακτυλιοειδές και A ενα αμφίπλευρο υπεριδεωειδές του. Ορίζουμε μια σχέση R επί του Y ως εξής:

$$(u,\lambda) \in R \text{ αν } (u:\lambda) \cap A \neq \emptyset \text{ και } (\lambda:u) \cap A \neq \emptyset$$

Τότε η R είναι μια ομομορφική σχέση.

Απόδειξη. Εστω ότι $(\kappa_1,\lambda_1) \in R$ και $(\kappa_2,\lambda_2) \in R$ Τότε από τον ορισμό της R έχουμε:

$$(\kappa_1:\lambda_1) \cap A \neq \emptyset, \quad (\lambda_1:\kappa_1) \cap A \neq \emptyset$$

και

$$(\kappa_2:\lambda_2) \cap A \neq \emptyset, \quad (\lambda_2:\kappa_2) \cap A \neq \emptyset$$

Αρα υπάρχουν χ, χ' που ανήκουν στο A και τέτοια ώστε $\chi \in \kappa_1:\lambda_1$ και $\chi' \in \lambda_1:\kappa_1$. Από εδώ έπεται ότι $\kappa_1 \in \chi + \lambda_1$ και $\lambda_1 \in \chi' + \kappa_1$, απ' όπου $\kappa_1 \in \lambda_1 + A$ (1) και

$\lambda_1 \in \kappa_1 + A$ (2). Ομοια υπάρχουν ψ, ψ' που ανήκουν στο A και τέτοια ώστε $\psi \in \kappa_2:\lambda_2$ και $\psi' \in \lambda_2:\kappa_2$, απ' όπου $\kappa_2 \in \lambda_2 + A$ (3) και $\lambda_2 \in \kappa_2 + A$ (4). Από τις (1) και (3) έχουμε:

$$\kappa_1 + \kappa_2 \subseteq (\lambda_1 + \lambda_2) + A$$

δηλαδή γιά κάθε $\alpha \in \kappa_1 + \kappa_2$ υπάρχει $\beta \in \lambda_1 + \lambda_2$ έτσι ώστε $\alpha \in \beta + A$ ή ισοδύναμα $(\alpha:\beta) \cap A \neq \emptyset$, απ' όπου λόγω του ορισμού της R, $(\alpha,\beta) \in R$ άρα:

$$[\ \{\ \alpha\ \} \times (\lambda_1 + \lambda_2)\ ] \cap R \neq \emptyset$$

γιά κάθε $\alpha \in \kappa_1 + \kappa_2$. Ομοια από τις (2) και (4) έπεται ότι για κάθε $\beta \in \lambda_1 + \lambda_2$ υπαρχει $\alpha \in \kappa_1 + \kappa_2$ έτσι ώστε $(\alpha,\beta) \in R$ άρα:

$$[\ (\kappa_1 + \kappa_2) \times \{\ \beta\ \}\ ] \cap R \neq \emptyset$$

Ακόμη από τις σχέσεις $\kappa_1 \in \chi + \lambda_1$ και $\kappa_2 \in \psi + \lambda_2$ έπεται ότι:

$$\kappa_1.\kappa_2 \in (\chi + \lambda_1).(\psi + \lambda_2)$$

και λόγω των Ιδιοτήτων 1.1

$$(\chi + \lambda_1).(\psi + \lambda_2) \subseteq \chi.\psi + \chi.\lambda_2 + \lambda_1.\psi + \lambda_1.\lambda_2$$

άρα

$$\kappa_1.\kappa_2 \in \chi.\psi + \chi.\lambda_2 + \lambda_1.\psi + \lambda_1.\lambda_2$$

Λόγω όμως της πολλαπλασιαστικής ιδιότητας που έχει το A $\chi.\lambda_2$, $\lambda_1.\psi$, $\chi.\psi \in A$, άρα $\kappa_1.\kappa_2 \in \lambda_1.\lambda_2 + A$ ή

$$(\kappa_1.\kappa_2:\lambda_1.\lambda_2) \cap A \neq \emptyset$$

άρα

$$(\kappa_1.\kappa_2,\lambda_1.\lambda_2) \in R$$

Συνεπώς αποδείξαμε ότι η R είναι ομομορφική σχέση.

Πρόταση 5.6. *Εστω R μια ομομορφική σχέση* ισοδυναμίας επί ενός συνδετικού υπερδακτυλιοειδούς Y. Τότε η απεικόνιση φ από το Y στο Y/R που ορίζεται ως εξής:

$$\varphi(x) = C_x \quad \text{για κάθε} \quad x \in Y$$

είναι ένας ομαλός ομομορφισμός του Y επί του Y/R.

Πρόταση 5.7. Εστω φ ένας ομαλός ομομορφισμός ενός συνδετικού υπερδακτυλιοειδούς Y επί ενός συνδετικού υπερδακτυλιοειδούς Y'. Ορίζουμε επί του Y μια σχέση R ως εξής:

$$(x,y) \in R \quad \text{αν και μόνον αν} \quad \varphi(x) = \varphi(y)$$

Τότε η R είναι μια ομομορφική σχέση ισοδυναμίας επί του Y και το Y/R είναι ισόμορφο με το Y'.

Απόδειξη. Η σχέση R είναι προφανώς μια σχέση ισοδυναμίας. Εστω στη συνέχεια ότι (α,β), $(\gamma,\delta) \in R$ δηλαδή ισχύει $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ και $\varphi(\gamma) = \varphi(\delta)$. Τοτε

$$\varphi(\alpha\gamma) = \varphi(\alpha)\varphi(\gamma) = \varphi(\beta)\varphi(\delta) = \varphi(\beta\delta)$$

και επομένως $(\alpha\gamma,\beta\delta) \in R$. Ακόμη

$$\varphi(\alpha + \gamma) = \varphi(\alpha) + \varphi(\gamma) = \varphi(\beta) + \varphi(\delta) = \varphi(\beta + \delta)$$

Συνεπώς για κάθε $\chi \in \alpha + \gamma$, $\psi \in \beta + \delta$ ισχύει:

$$[\ \{\chi\} \times (\beta + \delta)\ ] \cap R \neq \emptyset$$

και

$$[\ (\alpha + \gamma) \times \{\psi\}\ ] \cap R \neq \emptyset$$

Αρα η R είναι και ομομορφική σχέση.

Εστω στη συνέχεια C_α η κλάση ισοδυναμίας της R η οποία ορίζεται από το α. Αν σ η απεικόνιση από το Y/R στο Y' η οποία ορίζεται ως εξής: $\sigma(C_\alpha) = \varphi(\alpha)$ τότε η σ είναι καλά ορισμένη, 1-1 και απεικονίζει το Y/R επί του Y'. Ακόμη

$$\sigma(C_\alpha . C_\beta) = \sigma(C_{\alpha\beta}) = \varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\ \varphi(\beta) = \sigma(C_\alpha)\ \sigma(C_\beta)$$

και

$$\begin{aligned} \sigma(C_\alpha + C_\beta) &= \sigma\{\ C_\chi \mid \chi \in \alpha + \beta\ \} = \{\ \sigma(C_\chi) \mid \chi \in \alpha + \beta\ \} \\ &= \{\ \varphi(\chi) \mid \chi \in \alpha + \beta\ \} = \varphi\{\ \chi \mid \chi \in \alpha + \beta\ \} = \\ &= \varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta) = \sigma(C_\alpha) + \sigma(C_\beta) \end{aligned}$$

Αρα ο σ είναι πράγματι ένας ισομορφισμός.

Πόρισμα 5.2. *Εστω φ ένας ομαλός ομομορφισμός ενός συνδετικού υπερδακτυλιοειδούς Y σε ένα συνδετικό υπερδακτυλιοειδές Y'. Τότε υπάρχει μια ομομορφική σχέση ισοδυναμίας R επί του Y, ένας φυσιολογικός επιμορφισμός $\varpi : Y \text{-----}> Y/R$ και ένας μονομορφισμός $u : Y/R \text{-----}> Y'$ έτσι ώστε $\varphi = u \circ \varpi$.*

Παρατηρούμε στη συνέχεια ότι αν μια σχέση ισοδυναμίας R επί ενός υπερδακτυλιοειδούς Y πληροί την ιδιότητα:

$$\chi R\psi \text{ και } \omega \in Y \implies \chi\omega R\psi\omega \text{ και } \omega\chi R\omega\psi \qquad [O_2']$$

τότε αυτή επαληθεύει το αξίωμα $[O_2]$ του Ορισμού 5.1 και αντίστροφα. Είναι δυνατόν όμως μια σχέση ισοδυναμίας να πληροί μόνον μια από τις δύο συνθήκες του δευτέρου μέλους της $[O_2']$. Τότε θα λέμε ότι αυτή είναι δεξιά, αντίστοιχα αριστερά, συμβιβαστή με την πράξη.

Πρόταση 5.8. *Εστω L ένα υποσύνολο ενός υπερδακτυλιοειδούς Y. Τότε η σχέση R_L που ορίζεται από την*

$$\begin{aligned} xR_Ly \iff (\forall\ a, b \in Y)[\, & x.a \in L \iff y.a \in L \quad (i) \quad \text{και} \\ & b.x \in L \iff b.y \in L \quad (ii)\,] \end{aligned}$$

είναι σχέση ισοδυναμίας επί του Y, που πληροί το αξίωμα $[O_2]$

(Ορισμός 5.1). Αν πληροί μόνον το (i) (συμβ. R_L') ή το (ii) (συμβ. 'R_L) είναι δεξιά, αντίστοιχα αριστερά, συμβιβαστή. Τέλος αν το Y είναι Δ-υπερδακτυλιοειδές, τότε η R_L είναι ομομορφική.

Απόδειξη. Η σχέση αυτή είναι προφανώς ανακλαστική και συμμετρική. Εστω στη συνέχεια ότι $\chi\, R_L\, \psi$ (1) και $\psi\, R_L\, \omega$ (2). Τότε αν $\chi.\alpha \in L$ έπεται από την (1) ότι $\psi.\alpha \in L$ και από την (2) ότι $\omega.\alpha \in L$. Ομοια αν $\beta.\chi \in L$ τότε $\beta.\omega \in L$ και επομένως $\chi\, R_L\, \omega$. Αρα η R_L είναι μεταβατική. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι αν $\chi\, R_L\, \psi$ τότε $(\chi.\alpha)\, R_L\, (\psi.\alpha)$ και $(\alpha.\chi)\, R_L\, (\alpha.\psi)$. Πράγματι, έστω $u \in Y$ και $\chi.\alpha.u \in L$. Θέτοντας $\alpha.u = t$ έχουμε $\psi.t \in L$ και συνεπώς $(\chi.\alpha)\, R_L\, (\psi.\alpha)$. Ομοίως $(\alpha.\chi)\, R_L\, (\alpha.\psi)$. Εστω στη συνέχεια $\chi_1 R_L \psi_1$ και $\chi_2 R_L \psi_2$. Από την $\chi_2 R_L \psi_2$ έπεται ότι $\chi_1\chi_2 R_L \chi_1\psi_2$ (1). Εστω τώρα ότι $\chi_1\psi_2\alpha \in L$ για κάποιο $\alpha \in Y$. Επειδή $(\chi_1,\psi_1) \in R_L$ έπεται ότι $\psi_1\psi_2\alpha \in L$ άρα $\chi_1\psi_2 R_L \psi_1\psi_2$ (2). Ετσι τώρα από τις δύο τελευταίες σχέσεις (1) και (2) λόγω της μεταβατικότητας έπεται $\chi_1\chi_2 R_L \psi_1\psi_2$. Επομένως πληρούται το αξίωμα $[O_2]$. Εστω στη συνέχεια ότι το Y είναι ένα Δ-υπερδακτυλιοειδές. Αν $\omega \in \chi_1 + \chi_2$. Τότε $\omega \in \{ \chi_1, \chi_2 \}$. Ετσι έχουμε

$$[\{\omega\}x(\psi_1+\psi_2)] \cap R_L = [\{\omega\}x\{\psi_1,\psi_2\}] \cap R_L$$

και επομένως η τομή αυτή είναι διάφορη του κενού. Ομοια για τη $z \in \psi_1 + \psi_2$ έχουμε:

$$[(\chi_1 + \chi_2)\ x\ \{z\}] \cap R_L \neq \emptyset$$

Πληρούται δηλαδή και το αξίωμα (O_1) του Ορισμού Ι.3.1 και συνεπώς αποδείχθηκε η Πρόταση.

Από την ανωτέρω Πρόταση και την Πρόταση I.1.7, αν το Y είναι Δ-υπερδακτυλιοειδές έχουμε το:

Πόρισμα 5.3. *Το πηλικοσύνολο Y/R_L είναι Δ-υπερδακτυλιοειδές.*

Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει μία σχέση ισοδυναμίας R στο Y ως προς την οποία το υποσύνολό του L να είναι μία ένωση κλάσεων. Αν η R είναι δεξιά συμβιβαστή ως προς τον πολλαπλασιασμό, τότε απο την $\chi R\psi$, έπεται ότι $\chi\alpha R\psi\alpha$ για κάθε $\alpha \in Y$. Συνεπώς οι κλάσεις $(\chi\alpha)_R$ και $(\psi\alpha)_R$ είναι ίσες για κάθε $\alpha \in Y$ και επειδή το L είναι μιά ένωση κλάσεων έπεται ότι $\chi\alpha \in L \iff \psi\alpha \in L$ για κάθε $\alpha \in Y$ Σύμφωνα λοιπόν με την Πρόταση 5.8 η ανωτέρω σχέση ορίζει μιά ισοδυναμία R_L' στο Y για την οποία, σύμφωνα με τα ανωτέρω ισχύει η συνεπαγωγή $\chi R\psi \implies \chi R_L'\psi$, και συνεπώς κάθε κλάση της R περιέχεται σε μία κλάση της R_L'. Επομένως κάθε κλάση της R_L' είναι ένωση μιάς ή περισσοτέρων κλάσεων της R και επομένως $rk(R_L') \leq rk(R)$. Αντίστοιχα συμπεράσματα έχουμε αν η R είναι αριστερά συμβιβαστή ή αν είναι ομομορφική. Συνεπώς έχουμε την Πρόταση:

Πρόταση 5.9. *Αν υπάρχει μία ομομορφική σχέση ισοδυναμίας R στό Y ως προς την οποία το L να είναι μια ένωση κλάσεων, τότε $rk(R_L) \leq rk(R)$ και επομένως, αν $rk(R) < \infty$ τότε $rk(R_L) < \infty$. Αντίστοιχα ισχύουν για τις R_L' και $'R_L$ αν η R είναι δεξιά ή αριστερά συμβιβαστή ως προς τον πολλαπλασιασμό.*

—6—

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Οπως είναι γνωστό από την θεωρία των Ομάδων σε μία (προσθετική) ομάδα η εξίσωση $\gamma = x + \beta$ έχει πάντοτε μια μονοσημάντως ορισμένη λύση, την $x = \gamma - \beta$ για κάθε δύο στοιχεία β, γ της ομάδας. Εξάλλου στη περίπτωση των υπερομάδων η σχέση $\gamma \in x + \beta$ έχει ως λύση το σύνολο των στοιχείων x της υπερομάδας που ανήκουν στο $\gamma{:}\beta$, το οποίο, ως γνωστόν (βλ. [37]) είναι πάντοτε διάφορο του κενού. Σ' ένα υπερδακτυλιοειδές όμως ή ακόμη και σ' ένα υπερδακτύλιο, η σχέση $\gamma \in \alpha x + \beta$ δεν έχει πάντοτε λύση, όπως άλλωστε και στην κλασική περίπτωση των δακτυλίων δεν υπάρχει πάντα λύση για την εξίσωση $\gamma = \alpha x + \beta$. Υπάρχουν όμως εξισώσεις σ' ένα υπερδακτυλιοειδές που έχουν πάντοτε λύση. Μερικές από αυτές θα εξετάσουμε στα επόμενα. Σε ότι ακολουθεί θα υποθέσουμε ότι το Y είναι μοναδιαίο και το α^o καθώς και το A^o, όπου $\alpha \in Y$ και $A \subseteq Y$ θα συμβολίζουν την μονάδα 1, του υπερδακτυλιοειδούς.

Πρόταση 6.1. *Το σύνολο $\Sigma_{n=o}^{\infty} a^n b$ είναι λύση της εξίσωσης*

$$aX + b = X \qquad (1)$$

όπου $a, b \in Y$ και $X \subseteq Y$

Απόδειξη. Αντικαθιστώντας έχουμε :

$$\alpha\Sigma_{n=o}^{\infty} \alpha^n\beta + \beta = (\alpha\Sigma_{n=o}^{\infty} \alpha^n + 1)\beta = (\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha^n + 1)\beta =$$
$$= \Sigma_{n=o}^{\infty} \alpha^n\beta$$

Αν τώρα αντί για το στοιχείο β του Y έχουμε το υποσύνολο B του Y, τότε το σύνολο $(\Sigma_{n=o}^{\infty} \alpha^n)B$ επαληθεύει τη σχέση $X \subseteq \alpha X + B$. Πράγματι επειδή στην περίπτωση των συνόλων για την επιμεριστική ιδιότητα, εν γένει ισχύει $(A + B)\Gamma \subseteq A\Gamma + B\Gamma$ έχουμε

$$\alpha(\Sigma_{n=o}^{\infty} \alpha^n)B + B \supseteq (\alpha\Sigma_{n=o}^{\infty} \alpha^n + 1)B = (\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha^n + 1)B =$$
$$= (\Sigma_{n=o}^{\infty} \alpha^n)B$$

και συνεπώς ισχύει η

Πρόταση 6.2. *Το σύνολο $(\Sigma_{n=o}^{\infty} a^n)B$ επαληθεύει την σχέση*

$$X \subseteq aX + B \qquad (2)$$

όπου $a \in Y$ και $B, X \subseteq Y$.

Πόρισμα 6.1. *Σε ένα Δ-υπερδακτυλιοειδές το σύνολο $\Sigma_{n=o}^{\infty} A^n B$ είναι λύση της εξίσωσης*

$$AX + B = X \qquad (3)$$

όπου $A, B, X \subseteq Y$.

Η λύση όμως της εξίσωσης (1) που δόθηκε από την Πρόταση 6.1. δεν είναι η μοναδική. Πράγματι :

Πρόταση 6.3. *Αν στο Y το υπεράθροισμα κάθε δύο στοιχείων περιλαμβάνει τα δύο αυτά στοιχεία, τότε το σύνολο* $\{1, \alpha\}^{\sim}\beta$ *είναι επίσης λύση της (1).*

Απόδειξη. Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\alpha(\{1, \alpha\}^{\sim}\beta) + \beta = (\alpha\{1, \alpha\}^{\sim} + 1)\beta$$

Από την Πρόταση 4.4 όμως γνωρίζουμε ότι το $\{1, \alpha\}^{\sim}$ ειναι η ένωση όλων των αθροισμάτων της μορφής:

$$\Sigma\alpha = \alpha^{\kappa 1} + \alpha^{\kappa 2} + \ldots + \alpha^{\kappa \nu}$$

όπου $\kappa 1, \ldots, \kappa\nu \in N_0$.

Επομένως το $\alpha\{1, \alpha\}^{\sim}$ περιλαμβάνει όλα τα αθροίσματα $\Sigma\alpha$ που δεν περιέχουν την μονάδα, συνεπώς προσθέτοντας στο σύνολο αυτό τη μονάδα λαμβάνουμε ολόκληρο το υπο-υπερδακτυλιοειδές $\{1, \alpha\}^{\sim}$. Αρα $\alpha\{1, \alpha\}^{\sim} + 1 = \{\alpha, 1\}^{\sim}$ και επομένως

$$[\alpha\{1, \alpha\}^{\sim} + 1]\beta = \{1, \alpha\}^{\sim}\beta$$

Αντίστοιχα προς την Πρόταση 6.2. έχουμε την

Πρόταση 6.4. *Αν στο Y το υπεράθροισμα κάθε δύο στοιχείων περιλαμβάνει τα δύο αυτά στοιχεία, τότε το σύνολο* $\{1, \alpha\}^{\sim}B$ *επαληθεύει τη σχέση (2).*

Πρόταση 6.5. *Αν στο Y το υπεράθροισμα κάθε* *δύο στοιχείων περιλαμβάνει τα δύο αυτά στοιχεία, τότε το σύνολο $\{1, a\}^{\sim} b$ είναι λύση και της εξίσωσης:*

$$\sum_{i=0}^{n} a^{i}X + b = X$$

όπου $a, b \in Y$ και $X \subseteq Y$.

Α π ό δ ε ι ξ η. Λόγω της Πρότασης 4.5. το Y δεν έχει ημιυπο-υπερδακτυλιοειδή παρά μόνο υπο-υπερδακτυλιοειδή. Επομένως το $\{1, \alpha\}^{\sim}$ είναι υπο-υπερδακτυλιοειδές του Y. Αντικαθιστώντας τώρα έχουμε :

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha^{i}\{1, \alpha\}^{\sim} \beta + \beta = [\sum_{i=0}^{n} \alpha^{i}\{1, \alpha\}^{\sim} + 1]\beta =$$
$$= [\sum_{i=1}^{n}\alpha^{i}\{1, \alpha\}^{\sim} + \{1, \alpha\}^{\sim} + 1]\beta$$

Επειδή όμως $\alpha^{i} \in \{1, \alpha\}^{\sim}$ έπεται ότι $\alpha^{i}\{1, \alpha\}^{\sim} \subseteq \{1, \alpha\}^{\sim}$, έτσι $\sum_{i=1}^{n}\alpha^{i}\{1, \alpha\}^{\sim} \subseteq \{1, \alpha\}^{\sim}$ και επειδή $A + \{1, \alpha\}^{\sim} = \{1, \alpha\}^{\sim}$, για κάθε $A \subseteq \{1, \alpha\}^{\sim}$, αφού το $\{1, \alpha\}^{\sim}$ είναι υπο-υπερδακτυλιοειδές, θα έχουμε:

$$[\sum_{i=1}^{n}\alpha^{i}\{1, \alpha\}^{\sim} + \{1, \alpha\}^{\sim} + 1]\beta = [\{1, \alpha\}^{\sim} + 1]\beta =$$
$$= \{1, \alpha\}^{\sim}\beta$$

Πόρισμα 6.2. *Αν στο Y το υπεράθροισμα κάθε δύο στοιχείων περιλαμβάνει τα δύο αυτά στοιχεία, τότε το σύνολο $[A \cup \{1\}]^{\sim} b$ είναι λύση της εξίσωσης*

$$\sum_{i=0}^{n} A^{i}X + b = X$$

όπου $A, X \subseteq Y$ και $b \in Y$.

Ακόμη επειδή $(\sum_{i=0}^{n} A^{i})X \subseteq \sum_{i=0}^{n} A^{i}X$ έχουμε το:

Πόρισμα 6.3. *Αν στο Y το υπεράθροισμα κάθε δύο στοιχείων περιλαμβάνει τα δύο αυτά στοιχεία, τότε το* *σύνολο* $[A \cup \{1\}]^{\sim} B$ *επαληθεύει τη σχέση*

$$X \subseteq \left(\sum_{i=0}^{n} A^{i}\right) X + B$$

όπου $A,\ B,\ X \subseteq Y$.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε μία σχέση στο P(Y). Επειδή όμως η σχέση αυτή μπορεί να ορισθεί πιο γενικά σε κάθε υπερομάδα θα ξεκινήσουμε από μία τυχούσα υπερομάδα H. Εισάγουμε λοιπόν στο P(H) μία σχέση "$\leq$" ορισμένη ως εξής:

$$A \leq B \iff A + B = B$$

για κάθε $A,\ B \subseteq H$. Σημειώνουμε ότι αν το A είναι μονοσύνολο π.χ. $A = \{\alpha\}$ τότε για απλοποίηση των συμβολισμών θα γράφουμε $\alpha \leq B$.

Λήμμα 6.1. Η "$\leq$" είναι μεταβατική και αντισυμμετρική.

Απόδειξη. Εστω $A \leq B$ και $B \leq \Gamma$. Τότε $A + B = B$ και $B + \Gamma = \Gamma$. Ετσι έχουμε:

$$A + \Gamma = A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma = B + \Gamma = \Gamma$$

και επομένως $A \leq \Gamma$, δηλαδή η "$\leq$" είναι μεταβατική. Αν στη συνέχεια $A \leq B$ και $B \leq A$, τότε $A + B = B$ και $B + A = A$, επομένως $A = B$ και άρα η αντισυμμετρικότητα. Αξίζει να σημειωθεί ότι η σχέση $A \leq B$ δεν έπεται την $A \subseteq B$. Πραγματι αν $(J,+)$ η συνδετική υπερομάδα του Ευκλειδίου επιπέδου [68], B ένα κυρτό ανοικτό υποσύνολο του και A το σύνορο του, τότε $A + B \subseteq B$ και $A \cap B = \emptyset$.

Εστω στη συνέχεια $\mathcal{O}$ η οικογένεια των υποσυνόλων της H με την ιδιότητα $A + A = A$. Τότε για την οικογένεια αυτή προκύπτει άμεσα το:

Λήμμα 6.2. *Η "$\leq$" είναι σχέση διατάξεως στην $\mathcal{O}$*

Παρατηρούμε ότι η σχέση "$\leq$" που ορίσαμε μπορεί να εισαχθεί και σε ένα υπερδακτυλιοειδές Y. Ισχύει μάλιστα η

Πρόταση 6.6. *Αν $A \leq B$ και $\Gamma \leq \Delta$, τότε*

i) $A + \Gamma \leq B + \Delta$

και *ii)* $A\lambda \leq B\lambda$ *για τυχόν* $\lambda \in Y$.

Α π ό δ ε ι ξ η. Από τις σχέσεις $A \leq B$ και $\Gamma \leq \Delta$ έπεται ότι $A + B = B$ και $\Gamma + \Delta = \Delta$. Προσθέτοντας τις ισότητες αυτές κατά μέλη έχουμε:

$$(A + B) + (\Gamma + \Delta) = B + \Delta \iff$$
$$\iff (A + \Gamma) + (B + \Delta) = B + \Delta \iff$$
$$\iff A + \Gamma \leq B + \Delta$$

Εξάλλου αν πολλαπλασιάσουμε αμφότερα τα μέλη $A + B = B$ με το $\lambda \in Y$ έχουμε:

$$(A + B)\lambda = B\lambda \iff A\lambda + B\lambda = B\lambda \iff A\lambda \leq B\lambda$$

Πρόταση 6.7. *Στην οικογένεια* $\mathcal{O}$ των υποσυνόλων του Y η εξίσωση (1) έχει ελάχιστη λύση ως προς την διάταξη "$\leq$" την $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n\beta$.

Α π ό δ ε ι ξ η. Εστω Ψ μία λύση της (1). Τότε

$$\Psi + \beta = (\alpha\Psi + \beta) + \beta = \alpha\Psi + (\beta + \beta) = \alpha\Psi+\beta = \Psi$$

επομένως $\beta \leq \Psi$ (1).

Εξάλλου:

$$\Psi + \alpha\Psi = (\beta + \alpha\Psi) + \alpha\Psi = \beta + (\alpha\Psi + \alpha\Psi) = \beta + \alpha\Psi = \Psi$$

επομένως $\alpha\Psi \leq \Psi$ (2).

Εχουμε συνεπώς για την Ψ ότι $\beta \leq \Psi$, από όπου πολλαπλασιάζοντας επί α λαμβάνουμε $\alpha\beta \leq \alpha\Psi$, η οποία λόγω της (2) γίνεται $\alpha\beta \leq \Psi$. Μετά λοιπόν από "n" πολλαπλασιασμούς της (1) με το α και αντίστοιχη εφαρμογή της (2) έχουμε $\alpha^n\beta \leq \Psi$. Προσθέτοντας τις ανισώσεις αυτές για όλα τα $n \in N_0$ έχουμε:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n\beta \leq \Psi$$

Πόρισμα 6.4. *Σε ένα Δ-υπερδακτυλιοειδές η εξίσωση (3) έχει ελάχιστη ως προς την διάταξη "$\leq$" λύση την $\sum_{n=0}^{\infty} A^n B$.*

Ας έλθουμε τώρα στην περιπτωση ορισμένων συστημάτων, και ας αναζητήσουμε γιαυτά κάποιες λύσεις. Ας θεωρήσουμε λοιπόν κατ' αρχήν το σύστημα

$$\Psi = \alpha\Psi + 1$$
$$X = \Psi B \qquad (1)$$

όπου $\alpha \in Y$ και $X, \Psi, B \subseteq Y$

Τότε λόγω της Προτάσεως 6.1 μία λύση της πρώτης εξίσωσης είναι η $\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n$. Αντικαθιστώντας αυτή στη δεύτερη έχουμε $X = (\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n)B$. Εξάλλου αν το Y έχει την ιδιότητα ότι στο άθροισμα κάθε δύο στοιχείων του περιλαμβάνονται τα δύο αυτά στοιχεία, τότε λόγω της Προτάσεως 6.3 το $\{1,\alpha\}^{\sim}$ αποτελεί λύση της πρώτης εξίσωσης του (1) και συνεπώς

$\Psi = \{1,\alpha\}^{\sim}$ και $X = \{1,\alpha\}^{\sim}B$. Ετσι έχουμε την :

Πρόταση 6.8. *Το σύστημα των εξισώσεων (1) έχει ελάχιστη λύση την*

$$(X,\Psi)=([\Sigma_{n=0}^{\infty} a^n]B,\ \Sigma_{n=0}^{\infty} a^n)$$

η οποία είναι η ελάχιστη, όταν οι συντελεστές προέρχονται από την O. Αν το Y έχει την ιδιότητα το άθροισμα κάθε δύο στοιχείων του να περιλαμβάνει τα προστιθέμενα στοιχεία έχει επίσης ως λύση την $(X,\Psi)=(\{1,\alpha\}^{\sim}B,\ \{1,\alpha\}^{\sim})$.

Παρατηρούμε ότι αν το B είναι μονοσύνολο τότε το X επαληθεύει την εξίσωση (1) ενώ αλλοιώς την σχέση (2).

Πόρισμα 6.5. *Σε ένα Δ-υπερδακτυλιοειδές το σύστημα:*

$$\Psi = A\Psi + 1$$

$$X = \Psi B$$

έχει ως ελάχιστη λύση την

$$(X,\Psi) = (\Sigma_{n=0}^{\infty} A^n B,\ \Sigma_{n=0}^{\infty} A^n)$$

Πρόταση 6.9. *Σε ένα Δ-υπερδακτυλιοειδές Y το σύστημα των εξισώσεων:*

$$X_1 = A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \ldots + A_{1n}X_n + B_1$$

$$X_2 = A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \ldots + A_{2n}X_n + B_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_n = A_{n1}X_1 + A_{n2}X_2 + \ldots + A_{nn}X_n + B_n$$

με αγνώστους τα υποσύνολα X_i, $i=1,\ldots n$ του Y και με $A_{ij} \subseteq Y$, $B_i \subseteq Y$, $i,j=1,\ldots n$ έχει πάντοτε λύση.

Απόδειξη. Η απόδειξη της Πρότασεως αυτής συντελείται με την βοήθεια του Πορίσματος 6.1. Η τελευταία από τις n εξισώσεις, μπορεί να θεωρηθεί ως μια εξίσωση με άγνωστο το X_n, συντελεστή του το $A = A_{nn}$, και

$$B = A_{n1}X_1 + A_{n2}X_2 + \ldots + A_{n(n-1)}X_{n-1} + B_n$$

Η λύση της εξίσωσης αυτής μπορεί να αντικατασταθεί στις υπόλοιπες n-1 εξισώσεις και συνεπώς να προκύψει ένα νέο σύστημα n-1 εξισώσεων με n-1 αγνώστους. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για τον επόμενο άγνωστο X_{n-1} κ.ο.κ έως ότου προσδιορισθούν όλοι οι άγνωστοι.

Παρατηρούμε ότι οι λύσεις των εξισώσεων και των συστημάτων που αναφέραμε ανωτέρω είναι υπο-υπερδακτυλιοειδή ή σύνολα που προκύπτουν από πεπερασμένες αθροίσεις ή από πεπερασμένα γινόμενα υποσυνόλων του Y ή ακόμη από άπειρες σειρές της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$. Τα σύνολα αυτά, που έχουν ειδικό ενδιαφέρον και στη θεωρία των Γλωσσών, θα ονομάζονται ρητά υποσύνολα όταν προκύπτουν από πεπερασμένα υποσύνολα του Y, σύμφωνα με τους τρόπους που αναφέραμε. Ετσι έχουμε τον Ορισμό:

Ορισμός 6.1. **Ρητά υποσύνολα** ενός μοναδιαίου υπερδακτυλιοειδούς Y είναι:

i) Τα πεπερασμένα του υποσύνολα.

ii) Τα πεπερασμένα αθροίσματα και τα πεπερασμένα γινόμενα ρητών υποσυνόλων.

iii> Σειρές της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$, όπου A ρητό υποσύνολο

Επειδή όπως ήδη έχουμε αποδείξει το σύνολο των λέξεων έχει τη δομή ενός ειδικού υπερδακτυλιοειδούς, σειρές της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ θα τις συμβολίζουμε με A^*, γενικεύοντας έτσι σε τυχόν υπερδακτυλιοειδές το συμβολισμό που εισήγαγε ο Kleene [70] στη Θεωρία Γλωσσών.

ΑΛΛΕΣ ΥΠΕΡΣΥΝΘΕΤΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΕΣ ΜΕ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΓΛΩΣΣΩΝ ΚΑΙ ΑΥΤΟΜΑΤΩΝ

IV

- Συνδετικές πολυσυμμετρικές Υπερομάδες
- Υπερομάδες με τελεστές – Υπερμοντουλοειδή και Σουπερμοντουλοειδή

—1—

ΣΥΝΔΕΤΙΚΕΣ ΠΟΛΥΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΥΠΕΡΟΜΑΔΕΣ

Θα εισάγουμε εδώ μια ειδικής μορφής υπερομάδα, η οποία παίζει σημαντικό ρόλο στην θεωρία των αυτομάτων, όπως θα αναφέρουμε στο επόμενο κεφάλαιο. Εκεί θα δείξουμε ότι η προσηρτημένη υπερομάδα ενός τυχόντος αυτομάτου είναι εν γένει μία συνδετική πολυσυμμετρική υπερομάδα, (συμβ. Σ.Π.Υ.) την οποία όταν την μετατρέψουμε σε Ε.Σ.Υ., τότε το αντίστοιχο αυτόματο μετατρέπεται στο ελάχιστο αυτόματο που δέχεται την ίδια γλώσσα με το αρχικό.

Εχουμε πράγματι, ότι η με αφετηρία το σύνολο A^* των λέξεων επί ενός αλφαβήτου θεωρηθείσα αρχικά κατά την Πρόταση I.1.2 Δ-υπερομάδα με φορέα ένα τυχόν σύνολο E και η οποία στη συνέχεια οδήγησε στη διευρημένη μορφή με την προσθήκη του στοιχείου 0 και υπερπράξη την (I.1.1), οδηγεί στη θεώρηση και άλλων νέων υπερσυνθετικών δομών. Εστω πράγματι $(H,+)$ μια διευρημένη Δ-υπερομάδα και R μια σχέση ισοδυναμίας σ' *αυτή με* $C_0 = \{0\}$. *Αν κατ' αντιστοιχία προς την Πρόταση II.1.8 θεωρήσουμε επί του H την υπερπράξη:*

$$x \mp y = \begin{cases} C_x \cup C_y, & \text{άν } C_x \neq C_y \\ C_x \cup C_0, & \text{άν } C_x = C_y \end{cases} \qquad (1.1)$$

τότε το $(H,\mp)$ *αποτελεί, όπως επαληθεύεται, μιά Σ.Π.Υ., σύμφωνα με τον ακόλουθο ορισμό, (εισαγόμενο με αφετηρία την ενισχυμένη συνδετική υπερομάδα κατ' αναλογία προς εκείνον της κανονικής πολυσυμμετρικής υπερομάδας [57], που εισήχθη με αφετηρία την κανονική, βλ. και [47], [79]).*

Ορισμός 1.1. Μια συνδετική υπερομάδα (H,+) η οποία πληροί επιπλέον τα αξιώματα:

JP1 Υπάρχει μ ο ν α δ ι κ ό ουδέτερο στοιχείο, συμβολιζόμενο με 0 - το **μηδέν** της H - τέτοιο ώστε για κάθε $\chi \in H$ να ισχύει

$$\chi \in 0 + \chi \quad \text{και} \quad 0 + 0 = 0$$

δηλαδή

$$(\exists! 0 \in H)\ (\forall \chi \in H)\ [\ (\chi \in 0 + \chi) \wedge (0 + 0 = 0)\ ]$$

JP2 Για κάθε στοιχείο $\chi \in H\setminus\{0\}$ υπάρχει ένα τ ο υ λ ά χ ι σ τ ο ν $\chi' \in H$ - **αντιθέτο** ή **συμμετρικό** του χ - , δηλαδή:

$$(\forall \chi \in H\setminus\{0\})\ (\exists \chi' \in H\setminus\{0\})\ [\ 0 \in \chi + \chi'\ ]$$

Το σύνολο των αντιθέτων του στοιχείου χ το συμβολίζουμε με S(χ) και το ονομάζουμε **συμμετρικό** (σύνολο) του χ.

JP3 $S(0) = \{0\}$

ονομάζεται **συνδετική πολυσυμμετρική υπερομάδα**.

Παραδείγματα τέτοιας υπερομάδας, που αποτελούν γενίκευση και του πιο πάνω εισαγωγικού μας, παρέχει η ακόλουθη:

Πρόταση 1.1. *Εστω E ένα μη κενό σύνολο και R μια σχέση ισοδυναμίας σε αυτό. Αν 0 είναι ένα στοιχείο του E με $C_0^R = \{0\}$, τότε το E γίνεται μια Σ.Π.Υ. αν εφοδιασθεί με την ακόλουθη υπερπράξη "+":*

$$x + y = \begin{cases} C_x \cup C_y, & \text{αν } C_x \neq C_y \\ C_x \cup C_0, & \text{αν } C_x = C_y \end{cases}$$

Αφετέρου έχουμε για τις Σ.Π.Υ. την ακόλουθη Πρόταση, ανάλογη προς την Πρόταση ΙΙ.1.1.

Πρόταση 1.2. *Για κάθε $x \in H$ ισχύει*

$$0 + x \subseteq \{0\} \cup S(S(x))$$

και προφανώς για κάθε $x' \in S(x)$ έχουμε

$$(0 + x) \cap S(x') \neq \emptyset$$

Απόδειξη. Αν $\psi \in 0 + \chi$ τότε $\chi \in \psi{:}0$. Εξάλλου για κάθε $\chi' \in S(\chi)$ ισχύει $\chi \in 0{:}\chi'$. Συνεπώς $0{:}\chi' \cap \psi{:}0 \neq \emptyset$ άρα $0 \in \chi' + \psi$, και επομένως $\psi \in S(\chi') \subseteq S(S(\chi))$. Τέλος η σχέση $0 \in 0 + \chi$ δεν αντιβαίνει προς κανένα από τα αξιώματα του ορισμού και σύμφωνα με το παραδείγμα που προαναφέραμε αυτή είναι δυνατόν να ισχύει.

Παρατηρούμε ότι στο παράδειγμα αυτό της Πρότασης 1.1 η σχέση της Πρότασης 1.2 ισχύει ως ισότητα, διότι

$$0 + \chi = C_0 \cup C_\chi = \{0\} \cup C_\chi, \quad \text{και} \quad C_\chi = S(S(\chi))$$

ενώ σε παραδείγματα που θα ακολουθήσουν ισχύει καθαρά ως εγκλεισμός. Οδηγούμεθα έτσι στο συμπέρασμα ότι και στην περίπτωση της Σ.Π.Υ. διακρίνουμε **ε-στοιχεία** δηλαδή εκείνα για τα οποία ισχύει $0 \in 0 + \chi$.

Ακόμη, ανάλογα προς την Πρόταση II.1.2, ισχύει η

Πρόταση 1.3. Αν το x είναι ένα ε-στοιχείο μιάς Σ.Π.Υ, τότε και τα στοιχεία του $S(x)$ είναι επίσης ε-στοιχεία.

Απόδειξη. $0 \in 0 + \chi$ άρα $\chi \in 0:0$. Εξάλλου αν χ' τυχόν στοιχείο από το $S(\chi)$ τότε $0 \in \chi + \chi'$ άρα $\chi \in 0:\chi'$. Συνεπώς $0:0 \cap 0:\chi' \neq \emptyset$ απ' όπου, λόγω του συνδετικού αξιώματος, έπεται ότι $(\chi' + 0) \cap (0 + 0) \neq \emptyset$ και επομένως $0 \in \chi' + 0$. Αρα χ' είναι ένα ε-στοιχείο.

Σχετικώς τώρα με τις διαμερίσεις σε μια Σ.Π.Υ. έχουμε:

Λήμμα 1.1. Αν σε μία Σ.Π.Υ. H τα σύνολα $S(x)$, $x \in H$, ορίζουν μία διαμέριση, τότε αυτή είναι ομαλή.

Απόδειξη. Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι το $S(S(\chi))$ είναι μια κλάση. Πράγματι αν $\chi', \chi'' \in S(\chi)$, τότε $\chi \in S(\chi')$ και $\chi \in S(\chi'')$. Αρα $S(\chi') \cap S(\chi'') \neq \emptyset$. Επειδή όμως τα συμμετρικά σύνολα διαμερίζουν την Η έπεται ότι $S(\chi') = S(\chi'')$

Εστω στη συνέχεια $\omega' \in \chi' + \psi'$, όπου $\omega' \in S(\omega)$, $\chi' \in S(\chi)$, $\psi' \in S(\psi)$. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $\chi'' \in S(\chi)$, $\psi'' \in S(\psi)$, υπάρχει $\omega'' \in S(\omega)$, έτσι ώστε $\omega'' \in \chi'' + \psi''$. Από τη σχέση $\omega' \in \chi' + \psi'$, έπεται ότι

$$0 \in \omega + (\chi' + \psi') = (\omega + \chi') + \psi'$$

Αρα υπάρχει ψ_ι από το $S(\psi') = S(S(\psi))$ τέτοιο ώστε $\psi_\iota \in \omega + \chi'$. Τότε όμως $0 \in (\omega + \chi') + \psi''$ ή ισοδύναμα $0 \in (\omega + \psi'') + \chi'$. Αρα υπάρχει $\chi_\iota \in S(\chi') = S(S(\chi))$ τέτοιο ώστε $\chi_\iota \in \omega + \psi'$. Επομένως $0 \in (\omega + \psi'') + \chi''$, από όπου προκύπται ότι $0 \in \omega + (\psi'' + \chi'')$ και άρα υπάρχει ω'' από το $S(\omega)$ τέτοιο ώστε $\omega'' \in \chi'' + \psi''$. Είναι επομένως για κάθε $\chi, \psi, \chi', \psi' \in H$ με $\chi' \in S(\chi)$ και $\psi' \in S(\psi)$

$$S(\chi) + S(\psi) \subseteq \bigcup_{\omega \in \chi' + \psi'} S(\omega)$$

και συνεπώς το Λήμμα.

Πρόταση 1.4. *Αν σε μια Σ.Π.Υ. H, τα σύνολα $S(x)$, $x \in H$ ορίζουν μια διαμέριση του H, τότε το σύνολο πηλίκο:*

$$H/S = \{\ S(x)\ |\ x \in H\ \}$$

γίνεται Ε.Σ.Υ., αν το εφοδιάσουμε με την ακόλουθη υπερπράξη:

$$S(x) \dotplus S(y) = \{\ S(w)\ |\ w' \in x'+y',\ \text{με}\ w' \in S(w),\ x' \in S(x),\ y' \in S(y)\ \}$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Λήμμα 1.1 η S είναι ομαλή και επομένως η H/S είναι υπερομάδα [51]. Εξάλλου το $S(0) = \{0\}$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της H/S, ενώ το $S(S(\chi))$, το οποίο σύμφωνα πάλι με το ανωτέρω Λήμμα αποτελεί μία κλάση, είναι το συμμετρικό του $S(\chi)$.

Πρόταση 1.5. *Αν σε μια Σ.Π.Υ. H, τα σύνολα $S(x)$, $x \in H$ ορίζουν μια διαμέριση του H, τότε το σύνολο πηλίκο:*

$$H/S = \{ S(x) \mid x \in H \}$$

γίνεται διευρημένη Δ-υπερομάδα αν ορίσουμε:

$$S(x) + S(y) = \{ S(x), S(y) \}, \quad \text{αν } S(x) \neq S(y)$$

και $$S(x) + S(x) = \{ S(x), S(0) \}$$

Στην παράγραφο ΙΙ.2 αποδείξαμε ότι στις Ε.Σ.Υ. ισχύει η (μερική) αναστρεψιμότητα. Αντίστοιχο ερώτημα τίθεται και για την περίπτωση των Σ.Π.Υ. Η (μερική) αναστρεψιμότητα στην περίπτωση των Σ.Π.Υ. αν λάβουμε υπόψη τον γενικό ορισμό της στις πλήρως ομαλές (κατά **Marty**) υπερομάδες [33], [57] είναι προφανώς η συνθήκη:

Για κάθε $\chi,\psi,\omega \in H$ υπάρχει ή $\chi'\in S(\chi)$ ή $\psi'\in S(\psi)$ τέτοιο ώστε να ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\omega \in \chi+\psi \implies \text{ή } \psi \in \omega+\chi' \text{ ή } \chi \in \omega+\psi'$$

Αν στην ανωτέρω συνεπαγωγή ισχύουν και οι δύο σχέσεις του περιέχεσθαι, τότε η αναστρεψιμότητα είναι πλήρης. Η πλήρης αναστρεψιμότητα χρησιμοποιήθηκε από τον Ι. Μήττα προκειμένου να ορισθούν οι κανονικές πολυσυμμετρικές υπερομάδες [57]. Η μελέτη των Σ.Π.Υ. απέδειξε ότι υπάρχουν τρεις κατηγορίες Σ.Π.Υ.

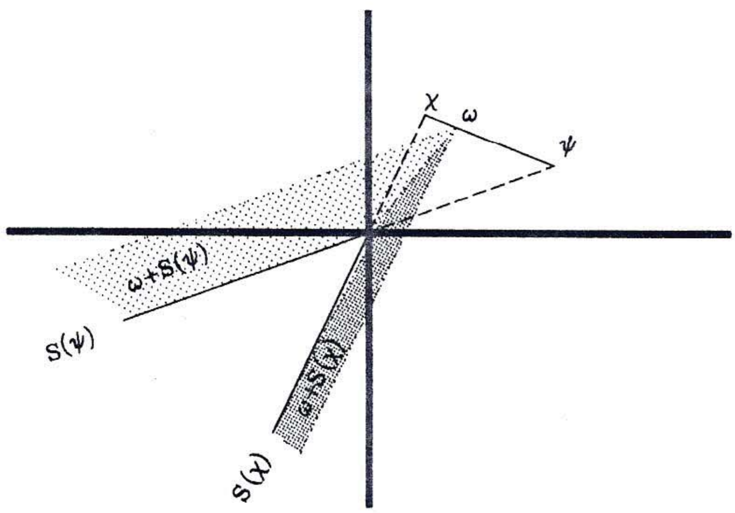
α) Εκείνες στις οποίες δεν ισχύει η αναστρεψιμότητα

β) Εκείνες στις οποίες ισχύει η μερική αναστρεψιμότητα γ) Εκείνες στις οποίες ισχύει η π λ ή ρ η ς αναστρεψιμότητα

Στα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν θα παρουσιάσουμε μια Σ.Π.Υ. από κάθε κατηγορία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.

Ας θεωρήσουμε το Καρτεσιανό επίπεδο. Τότε αυτό γίνεται Σ.Π.Υ., αν ως υπεράθροισμα δύο στοιχείων του θεωρήσουμε το κλειστό ευθύγραμμο τμήμα που αυτά ορίζουν, αν είναι διάφορα μεταξύ τους, και το ίδιο το στοιχείο, αν αυτά είναι ίσα μεταξύ τους. Ως ουδέτερο στοιχείο αυτής της υπερομάδας μπορούμε να θεωρήσουμε το (0,0) ενώ το S(χ) για κάθε χ διάφορο του ουδετέρου είναι τα σημεία της αντικείμενης του χ ανοικτής ημιευθείας με αρχή το σημείο (0,0). Η αναστρεψιμότητα στην περίπτωση αυτής της υπερομάδας δεν ισχύει, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Το παράδειγμα αυτό αποτελεί μερική περίπτωση γραμμικού χώρου με δομή γενικευμένης κανονικής πολυσυμμετρικής υπερομάδας [38], [58]. Ας σημειωθεί εδώ ότι στην καρτεσιανή ευθεία η ίδια πράξη:

$$\chi + \psi = [\ \min\{\chi,\ \psi\},\ \max\{\chi,\ \psi\}\ ]$$

συνεπάγεται ορισμό Σ.Π.Υ. με μερική αναστρψιμότητα.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2.</u>

Εστω μια οικογένεια ολικώς διατεταγμένων σύνολων Δ_i, $i \in I$, με κοινό το ελάχιστο στοιχείο 0 της καθεμιάς. Στο σύνολο $\Delta = \bigcup_{i\in I}\Delta_i$ ορίζουμε μια υπερπράξη "+" ως εξής

$$\chi + \psi = \begin{cases} [\ \min\{\chi,\psi\},\ \max\{\chi,\psi\}\ ] & \text{αν } \chi,\ \psi \in \Delta_i,\ i \in I \\ [\ 0,\ \chi\ ] \cup [\ 0,\ \psi\ ] & \text{αν } \chi \in \Delta_i,\ \psi \in \Delta_j \\ & \text{και } i \neq j,\ \ i,j \in I \end{cases}$$

Τότε η $(\Delta,+)$ είναι μια Σ.Π.Υ.

Πράγματι, για την απόδειξη της προσεταιριστικής ιδιότητας διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

ι) αν $\chi,\ \psi,\ \omega \in \Delta_i$ τότε

$$\chi + \psi + \omega = [\ \min\{\chi,\psi,\omega\},\ \max\{\chi,\psi,\omega\}\ ]$$

ιι) αν $\chi,\ \psi \in \Delta_i$ και $\omega \in \Delta_j$ με $i\neq j$, τότε

$$\chi + \psi + \omega = [\ 0,\ \max\{\chi,\psi\}\ ] \cup [\ 0,\ \omega\ ]$$

ιιι) αν τα $\chi,\ \psi,\ \omega$ ανήκουν σε διαφορετικά σύνολα τότε

$$\chi + \psi + \omega = [\ 0,\ \chi\ ] \cup [\ 0,\ \psi\ ] \cup [\ 0,\ \omega\ ]$$

Για την επαγόμενη υπερπράξη ισχύει:

$$\chi:\psi = \begin{cases} [\ 0,\ \chi\ ] \cup (\bigcup_{i\neq j}\Delta_i) & \text{αν } \chi,\psi \in \Delta_j \text{ και } \chi<\psi \\ \{\ \omega \in \Delta_j \mid \omega > \chi\ \} & \text{αν } \chi,\psi \in \Delta_j \text{ και } \chi>\psi \\ \{\ \omega \in \Delta_j \mid \omega > \chi\ \} & \text{αν } \chi \in \Delta_j \text{ και } \psi \in \Delta_i \end{cases}$$

Ειναι συνεπώς $\chi:\psi \neq \emptyset$ και επομένως η υπερσυνθετική δομή είναι υπερομάδα.

Η ισχύς του συνδετικού αξιώματος επαληθεύται σε όλες τις περιπτώσεις. Για παράδειγμα αν τα χ,ψ,ω,φ ανήκουν στο ίδιο διατεταγμένο σύνολο και $\chi<\psi<\omega<\varphi$ τότε $\chi:\psi \cap \omega:\varphi \neq \emptyset$ απ' οπου

$$(\chi+\varphi) \cap (\omega+\psi) = [\ \psi,\ \omega\ ] \neq \emptyset.$$

Τέλος, αν $\chi \in \Delta_j$ τότε $S(\chi) = \bigcup_{i \neq j}\Delta_i$. Ετσι όσον αφορά την αναστρεψιμότητα έχουμε για παράδειγμα:

Αν $\chi,\ \psi \in \Delta_i$ με $\chi < \psi$ και $z \in \chi + \psi$, με $z \neq \psi$ τότε $z \in \chi + \psi \implies \chi \in z + \psi'$ για κάθε ψ' από το $S(\psi)$ ενώ για κάθε $\chi' \in S(\chi)$ έχουμε $\psi \notin z + \chi'$. Ισχύει συνεπώς η μερική αναστρεψιμότητα. Αντίστοιχα επαληθεύεται η ισχύς της αναστρεψιμότητας σε όλες τις περιπτώσεις.

Η ακόλουθη Πρόταση μας δίνει ένα παράδειγμα μιας Σ.Π.Υ. στην οποία ισχύει η πλήρης αναστρεψιμότητα, ενώ ταυτόχρονα συνδέει τις Σ.Π.Υ. με τις P-υπερομάδες [76], [77], δηλαδή υπερομάδες που ορίζονται με αφετηρία μια αβελιανή ομάδα (G,+), ένα υποσύνολό της P που περιέχει το ουδέτερο στοιχείο της, και υπερπράξη "$+^P$" ορισμένη ως ακολούθως:

$$\chi +^P \psi = \chi + \psi + P \quad \text{για κάθε } \chi,\psi \in G$$

Πρόταση 1.6. Οι P-υπερομάδες είναι Σ.Π.Υ.

Απόδειξη. Εστω (G,+) μια οποιαδήποτε αντιμεταθετική ομάδα και P ένα υποσύνολό της που περιέχει το 0. Θεωρούμε την P-υπερομάδα $(G,+^P)$. Η υπερομάδα αυτή είναι συνδετική. Πράγματι, για την επαγόμενη υπερπράξη έχουμε

$$\chi:\psi = \{\ \omega \in G \mid \chi \in \omega +^P \psi\ \} =$$
$$= \{\ \omega \in G \mid \chi = \omega + \psi + \gamma,\ \gamma \in P\ \} =$$
$$= \{\ \chi - \psi - \gamma \mid \gamma \in P\ \}$$

Εστω τώρα ότι $\chi:\psi \cap \varphi:\omega \neq \emptyset$. Τότε

$$\{\ \chi-\psi-\gamma \mid \gamma \in P\ \} \cap \{\ \varphi-\omega-\gamma' \mid \gamma' \in P\ \} \neq \emptyset$$

Δηλαδή υπάρχουν $\alpha,\beta \in P$ έτσι ώστε $\chi-\psi-\alpha = \varphi-\omega-\beta$, απ' όπου $\chi+\omega+\beta = \varphi+\psi+\alpha$ και επομένως

$$(\chi +^P \omega) \cap (\varphi +^P \psi) \neq \emptyset$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι το 0 είναι ουδέτερο μη βαθμωτό στοιχείο, διότι

$$\chi \in \chi +^P 0 = \{\ \chi + \gamma \mid \gamma \in P\ \},$$

ενώ, αν χ είναι ένα τυχόν στοιχείο της G, τότε $S(\chi) = -\chi - P$

Τέλος αν $\chi \in \psi +^P \omega$ τότε $\chi = \psi + \omega + \gamma$ για κάποιο στοιχείο γ από το P. Αν λοιπόν $\psi' = -\psi - \gamma$, τότε το ψ' ανήκει στο $S(\psi)$ και $\omega \in \chi +^P (-\psi') = \chi -^P \psi'$. Ομως το αντίστοιχο ισχύει και για το ψ. Δηλαδή υπάρχει ω' που ανήκει στο $S(\omega)$ έτσι ώστε $\psi \in \chi -^P \omega'$.

Από την ανωτέρω Σ.Π.Υ. μπορεί να προκύψει μια άλλη Σ.Π.Υ., στην οποία ισχύει η αναστρεψιμότητα, σύμφωνα με την ακόλουθη Πρόταση, της οποίας ομως η απόδειξη, (με επαλήθευση των αξιωμάτων) παραλείπεται.

Πρόταση 1.7. *Εστω $(G,+^P)$ μια P-υπερομάδα. Στο G ορίζουμε μια νέα υπερπράξη "$\dot{+}$" ως ακολούθως:*

$$x \dot{+} y = (x +^P y) \cup \{x,\ y\}$$

Τότε η $(G,\dot{+})$ είναι Σ.Π.Υ. στην οποία ισχύει εν γένει η μερική αναστρεψιμότητα. Συγκεκριμένα ισχύει η μερική *αναστρεψιμότητα των x, y στο υπεράθροισμα x ∔ y, ενώ ισχύει η πλήρης αναστρεψιμότητα των λοιπών στοιχείων του x ∔ y.*

Η Σ.Π.Υ. παρουσιάζει πλήθος ολόκληρο από ενδιαφέρουσες ιδιότητες, όπως αντίστοιχα η κανονική πολυσυμμετρική υπερομάδα. Η μελέτη τους όμως, που εκφεύγει από το σκοπό της παρούσης διατριβής, αποτελεί λόγω μείζονος μαθηματικού ενδιαφέροντος, αντικείμενο άλλων εργασιών μου.

—2—

ΥΠΕΡΟΜΑΔΕΣ ΜΕ ΤΕΛΕΣΤΕΣ ΥΠΕΡΜΟΝΤΟΥΛΟΕΙΔΗ ΚΑΙ ΣΟΥΠΕΡΜΟΝΤΟΥΛΟΕΙΔΗ

Οπως είναι γνωστό από τη θεωρία των αυτομάτων αν $\mathcal{A}$ = (A,S,so,δ,F) ένα ντετερμινιστικό αυτόματο, τότε η συνάρτηση δ είναι μία απεικόνιση από το SxA στο S. Αν όμως το $\mathcal{A}$ είναι ένα μη ντετερμινιστικό αυτόματο τότε η δ είναι μία απεικόνιση από το SxA στο P(S). Προκειμένου, όπως είναι γνωστό, να απαντηθεί το ερώτημα αν το αυτόματο δέχεται μια λέξη του A, η συνάρτηση δ επεκτείνεται στην δ* από το SxA* στο S ή στο P(S) ανάλογα με το είδος του αυτόματου ως εξής (λ κενή λέξη)

$$\delta^*(s,\lambda) = s \qquad \text{για κάθε } s \in S$$

και $$\delta^*(s, \alpha\omega) = \delta^*(\delta(s, \alpha), \omega)$$

$$\text{για κάθε } s \in S,\ \alpha \in A,\ \omega \in A^*$$

αν το αυτόματο είναι ντετερμινιστικό, ενώ

$\delta^*(s, \omega\alpha) = \bigcup_{q \in \delta^*(s,\omega)} \delta(q, \alpha)$, για κάθε $\alpha \in A$, $\omega \in A^*$ αν το αυτόματο ειναι μη ντετερμινιστικό.

Ακόμη είναι γνωστό ότι κάθε αυτόματο ορίζει μία γλώσσα, δηλαδή ένα υποσύνολο του A^* και με βάση τους ανωτέρω ορισμούς μία λέξη ω ανήκει στη γλώσσα αν $\delta^*(s_0, \omega) \in F$ στην περίπτωση των ντετερμινιστικών και $\delta^*(s_0,\omega) \cap F \neq \emptyset$ στην περίπτωση των μη ντετερμινιστικών αυτομάτων.

Με αφετηρία λοιπον τα ανωτέρω, καθώς επίσης γενικεύοντας και τις αντίστοιχες έννοιες της κλασικής θεωρίας των τελεστών ή και υπερτελεστών επί ενός συνόλου και ιδιαίτερα τελεστών ή υπερτελεστών από δακτυλίους ή υπερδακτυλίους υπεράνω συνόλων, και επιπλέον τις σχετικές έννοιες των υπερμόντουλων και υπερδιανυσματικών χώρων από εργασίες των Ι. Μήττα, Χρ. Μασούρου και P. Corsini [53], [54], [36], [9] αναπτύσσουμε την παρακάτω θεώρηση τελεστών από υπερδακτυλιοειδή σε σύνολα.

Ορισμός 2.1. Εστω Μ ένα τυχόν σύνολο και $(Y,+,.)$ ένα υπερδακτυλιοειδές. Θα λέμε ότι **το Y είναι ένα σύνολο τελεστών επί του Μ**, αν υπάρχει μια εξωτερική πράξη από το $M \times Y$ στο M, η οποία να πληροί το αξίωμα:

$$(s\alpha)\beta = s(\alpha\beta) \qquad s \in M \text{ και } \alpha,\ \beta \in Y$$

Αν υπάρχει μία εξωτερική υπερπράξη από το $M \times Y$ στο $P(M)$ που πληροί το ανωτέρω αξίωμα θα λέμε ότι **το Y είναι ένα σύνολο υπερτελεστών**. Στην πρώτη περίπτωση θα λέμε ότι το Y **δρά** μέσα από μία πράξη ενώ στη δεύτερη μέσα από μία υπερπράξη.

Επανερχόμενοι στη θεωρία των αυτομάτων παρατηρούμε ότι, αν το υπερδακτυλιοειδές Y είναι ένα Δ-υπερδακτυλιοειδές παραγόμενο από ένα πεπερασμένο σύνολο A και το M ένα πεπερασμένο σύνολο, τότε ανάλογα με το αν έχουμε μια εξωτερική πράξη ή υπερπράξη, έχουμε ορίσει το ντετερμινιστικό ή το μη ντετερμινιστικό αυτόματο. Αν το Y είναι ένα μοναδιαίο υπερδακτυλιοειδές, τότε μπορούμε να εφοδιάσουμε το M με τη δομή της υπερομάδας. Πριν όμως συνεχίσουμε με αυτό ας δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.2. Το στοιχείο s_2 του M θα ονομάζεται **συνδεδεμένο** με το στοιχείο s_1 αν υπάρχει $\omega \in Y$ τέτοιο ώστε $s_2 = s_1\omega$ ή $s_2 \in s_1\omega$ ανάλογα αν έχουμε εξωτερική πράξη ή υπερπράξη.

Από τον ανωτέρω ορισμό παρατηρούμε ότι αν το s_1 είναι συνδεδεμένο με το s_2 δεν έπεται ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ότι και το s_2 είναι συνδεδεμένο με το s_1.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το Y είναι μοναδιαίο πεδίο τελεστών. Εισάγουμε τότε στο M μία υπερπράξη "+" ορισμένη ως εξής:

$$s_1 + s_2 = \begin{cases} \{ s \in M \mid s=s_1\omega \text{ και } s_2=s\psi, \text{ με } \omega,\psi \in Y \} \\ \qquad \text{αν το } s_2 \text{ είναι συνδεδεμένο με το } s_1 \\ \{ s_1, s_2 \} \\ \qquad \text{αν το } s_2 \text{ δεν είναι συνδεδεμένο με το } s_1 \end{cases} \tag{2.1}$$

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα της υπερπράξης περιλαμβάνει πάντα τα δύο συμμετέχοντα σε αυτή στοιχεία, επειδή το Y είναι μοναδιαίο, και επομένως $s + M = M$ για κάθε $s \in M$. Αλλά η υπερπράξη αυτή δεν είναι αντιμεταθετική και δεν επαληθεύει το συνδετικό αξίωμα. Επαληθεύεται όμως το προσεταιριστικό αξίωμα. Πράγματι για την προσεταιριστικότητα έχουμε :

Αν τα s_2 και s_3 είναι συνδεδεμένα με το s_1 και το s_3 είναι συνδεδεμένο με το s_2, τότε:

$$(s_1 + s_2) + s_3 =$$

$$= \{ t \in M \mid t = s_1\omega \text{ και } s_2 = (s_1\omega)\psi, \text{ με } \omega,\psi \in Y \} + s_3 =$$

$$= \{ s \in M \mid s = (s_1\omega)\chi,\ s_2 = (s_1\omega)\psi \text{ και } s_3 = (s_1\omega\chi)\upsilon \text{ με } \chi,\psi,\omega,\upsilon \in Y \} =$$

$$= s_1 + s_3$$

και

$$s_1 + (s_2 + s_3) =$$

$$= s_1 + \{ t \in M \mid t = s_2\omega \text{ και } s_3 = (s_2\omega)\psi, \text{ με } \omega,\psi \in Y \} =$$

$$= \{ s \in M \mid s = s_1\upsilon \text{ και } (s_1\upsilon)\chi = s_2\omega,\ (s_2\omega)\psi = s_3, \text{ ή } (s_1\upsilon)w = s_3, \text{ με } \chi,\psi,\omega,\upsilon,w \in Y \} =$$

$$= s_1 + s_3$$

Ομοια αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες περιπτώσεις. Εχουμε συνεπώς την Πρόταση

Πρόταση 2.1. Αν το σύνολο των τελεστών Y είναι μοναδιαίο υπερδακτυλιοειδές, τότε το M εφοδιασμένο με την υπερπράξη (2.1) είναι υπερομάδα.

Παρατηρούμε ότι αν το Y είναι ένα Δ-υπερδακτυλιοειδές τότε για την εξωτερική πράξη ισχύει:

$$s(\kappa + \lambda) \subseteq s\kappa + s\lambda$$

Πράγματι,

$$s(\kappa + \lambda) = s\{\kappa, \lambda\} = \{s\kappa, s\lambda\} \subseteq s\kappa + s\lambda$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι το υπερδακτυλιοειδές των τελεστών δρά σε ένα σύνολο M εφοδιασμένο με την δομή της υπερομάδας. Τότε, σε αντιστοιχία με τα όσα ισχύουν στην κλασική θεωρία [22] αλλά και την θεωρία των υπερσυνθετικών δομών [53], [54], [36], [12] έχουμε:

Ορισμός 2.3. Αν το M είναι μια υπερομάδα και το Y είναι ένα υπερδακτυλιοειδές τελεστών επί του M τέτοιο ώστε

i> $(s + t)\lambda = s\lambda + t\lambda$

ii> $s(\lambda + \kappa) \subseteq s\lambda + s\kappa$

iii> $s(\lambda\kappa) = (s\lambda)\kappa$

για κάθε $\kappa, \lambda \in Y$ και $s, t \in M$,

τότε το M θα ονομάζεται **(δεξιό) υπερμοντουλοειδές** υπεράνω του Y. Αν το Y είναι ένα πεδίο υπερτελεστών, τότε το M θα ονομάζεται **σουπερμοντουλοειδές** (συμβ. Y-υπερμοντουλοειδές, Y-σουπερμοντουλοειδές). Αν $(Y,+,.)$ Ε.Υ. και $(M,+)$ Ε.Σ.Υ. τότε το M θα ονομάζεται **συνδετικό υπερμόντουλο**, αντιστ. **συνδετικό σουπερμόντουλο**, αν ισχύει επιπλέον το αξίωμα:

iv> $s0 = 0$, αντιστ. iv'> $0 \in s0$

Παρατηρούμε ότι το δεύτερο αξίωμα του ανωτέρω ορισμού απαιτεί η εκεί επιμεριστικότητα να ισχύει κατά ασθενή τρόπο. Αν το αξίωμα αυτό ισχύει με ισότητα τότε το υπερμοντουλοειδές θα ονομάζεται **ισχυρώς επιμεριστικό** και συμβολικά ι.ε. υπερμοντουλοειδές. Αντίστοιχα έχουμε ι.ε. σουπερμοντουλοειδές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.

Ας υποθέσουμε ότι το M είναι ένα σύνολο και το Y ένα Δ-υπερδακτυλιοειδές. Αν στο M ορίσουμε την γνωστή υπερπράξη I.1.1 που στο άθροισμα κάθε δύο στοιχείων α,β αντιστοιχεί το δισύνολο {α, β}, τότε, ανάλογα με το αν το Y είναι ένα πεδίο τελεστών ή υπερτελεστών, το M γίνεται ένα ι.ε. υπερμοντουλοειδές ή ένα ι.ε. σουπερμοντουλοειδές. Πράγματι σύμφωνα με την Πρόταση I.1.2 το M γίνεται υπερομάδα και μάλιστα συνδετική. Εξάλλου αν $\kappa, \lambda \in Y$ και $s, t \in M$ τότε

i) αν το Y είναι ένα πεδίο τελεστών έχουμε

$$s(\kappa + \lambda) = s\{\kappa, \lambda\} = \{s\kappa, s\lambda\} = s\kappa + s\lambda$$

και $$(s + t)\kappa = \{s, t\}\kappa = \{s\kappa, t\kappa\} = s\kappa + t\kappa$$

ii) αν το Y είναι ένα πεδίο υπερτελεστών έχουμε

$$s(\kappa + \lambda) = s\{\kappa, \lambda\} = s\kappa \cup s\lambda = s\kappa + s\lambda$$

και $$(s + t)\kappa = \{s, t\}\kappa = s\kappa \cup t\kappa = s\kappa + t\kappa$$

Κατ' αντιστοιχία με τα όσα έχουμε ορίσει μέχρι στιγμής το M θα καλείται **Δ-υπερμοντουλοειδές** ή **Δ-σουπερμοντουλοειδές** αντίστοιχα. Ακόμη από την ανωτέρω επαλήθευση των αξιωμάτων προκύπτουν οι Προτάσεις:

Πρόταση 2.2. *Κάθε Δ-υπερδακτυλιοειδές είναι Δ-υπερμοντουλοειδές επί του εαυτού του.*

Πρόταση 2.3. *Τα Δ-υπερμοντουλοειδή και τα Δ-σουπερμοντουλοειδή είναι ισχυρώς επιμεριστικά.*

Στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι όλα τα υπερδακτυλιοειδή στα οποία αναφερόμαστε, είναι μοναδιαία.

Πρόταση 2.4. *Αν τα M_1, M_2 είναι δύο Y-υπερμοντουλοειδή, τότε το $M = M_1 \times M_2$ γίνεται ένα Y-υπερμοντουλοειδές, το οποίο δεν είναι ισχυρώς επιμεριστικό, έστω και αν τα M_1, M_2 είναι ισχυρώς επιμεριστικά.*

Απόδειξη. Στο σύνολο M ορίζουμε μία υπερπράξη ως εξής:

$$(s_1,t_1) + (s_2,t_2) = \{ (s,t) \mid s \in s_1 + s_2,\ t \in t_1 + t_2 \}$$

και μία εξωτερική πράξη από το MxY στο M ως ακολούθως

$$(s,t)\lambda = (s\lambda,t\lambda)$$

Το (M,+) είναι προφανώς υπερομάδα και μάλιστα αν οι M_1, M_2 είναι συνδετικές τότε και η M είναι συνδετική. Για τα αξιώματα της εξωτερικής πράξης έχουμε τώρα:

$$[(s_1,t_1) + (s_2,t_2)]\lambda =$$

$$= [\bigcup_{\substack{s\in s_1+s_2\\ t\in t_1+t_2}} (s,t)]\lambda = \bigcup_{\substack{s\in s_1+s_2\\ t\in t_1+t_2}} (s,\ t)\lambda = \bigcup_{\substack{s\in s_1+s_2\\ t\in t_1+t_2}} (s\lambda,\ t\lambda) =$$

$$= (s_1\lambda,\ t_1\lambda) + (s_2\lambda,\ t_2\lambda) = (s_1,t_1)\lambda + (s_2,t_2)\lambda.$$

Εξάλλου

$$(s,t)(\kappa + \lambda) =$$

$$= \bigcup_{\mu\in\kappa+\lambda}(s,t)\mu = \bigcup_{\mu\in\kappa+\lambda}(s\mu,t\mu) \subseteq \bigcup_{\mu,\nu\in\kappa+\lambda}(s\mu,t\nu) =$$

$$= (s\kappa,t\kappa) + (s\lambda,t\lambda) = (s,t)\kappa + (s,t)\lambda.$$

Εστω στη συνέχεια τυχόν σύνολο M με τελεστές ή υπερτελεστές από ένα υπερδακτυλιοειδές Y και s ένα στοιχείο του M. Σε κάθε στοιχείο α του Y απεικονίζουμε το sα. Αν το Y είναι πεδίο τελεστών, τότε η απεικόνιση αυτή, την οποία και θα συμβολίσουμε με φ_s, είναι μία συνάρτηση από το Y στο M, ενώ αν το Y είναι πεδίο υπερτελεστών, τότε η φ_s είναι μία συνάρτηση από το Y στο P(M). Εισάγουμε λοιπόν τον Ορισμό:

Ορισμός 2.4. Θα λέμε ότι ένα υποσύνολο L του του Y γίνεται **(s,F)-αποδεκτό** από το M, ή απλούστερα **αποδεκτό** όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, αν υπάρχει s ∈ M και $F \subseteq M$ αν έχουμε εξωτερική πράξη, ή $F \subseteq P(M)$ αν έχουμε εξωτερική υπερπράξη, έτσι ώστε:

$$\varphi_s^{-1}(F) = L$$

Σύμφωνα λοιπόν με τον ορισμό αυτό, για κάθε διαφορετικό s και F που θα επιλέξουμε θα έχουμε και ένα διαφορετικό εν γένει αποδεκτό από το M υποσύνολο του Y. Τίθεται συνεπώς το ερώτημα: για δεδομένο $F \subseteq M$ μπορούν να βρεθούν όλα τα αποδεκτά από το M υποσύνολα του Y;

Σχετικώς έχουμε την Πρόταση:

Πρόταση 2.5. *Εστω πεπερασμένο σύνολο M με cardM = n και τελεστές από ένα Δ-υπερδακτυλιοειδές Y. Τότε για δεδομένο F τα αποδεκτά από το M υποσύνολα του Y αποτελούν τη λύση ενός n x n συστήματος.*

Απόδειξη. Εστω M = { si | i=1,...,n } και $\underline{Y}$ το διευρημένο Δ-υπερδακτυλιοειδές που προκύπτει από το Y. Σε κάθε si ∈ M αντιστοιχούμε το σύνολο

$$Xi\hat{} = \{ \omega \in Y \mid si\omega \in F \}$$

το οποίο προφανώς είναι το (si,F)-αποδεκτό από το M υποσύνολο το Y. Αν $Xi\hat{} = \emptyset$ τότε ορίζουμε το $Xi \subseteq \underline{Y}$ να είναι το μονοσύνολο {0}, ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση θέτουμε το Xi ίσο με το $Xi\hat{}$.

Ορίζουμε στη συνέχεια τα σύνολα $Aij\hat{}$ ως εξής:

$$Aij\hat{} = \{ \omega \in Y \mid si\omega = sj \text{ και } \omega \text{ ανάγωγο} \}$$

Θεωρούμε πάλι τα υποσύνολα Aij του $\underline{Y}$ ορισμένα ως εξής:

$$Aij = \begin{cases} Aij\hat{}, & \text{αν } Aij\hat{} \neq \emptyset \\ 0, & \text{αν } Aij\hat{} = \emptyset \end{cases}$$

Επίσης ορίζουμε τα Bi ως εξής:

$$Bi = \begin{cases} 0, & \text{αν } si \notin F \\ 1, & \text{αν } si \in F \end{cases}$$

και στη συνέχεια καταρτίζουμε το επόμενο σύστημα

$$X_1 = A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \ldots + A_{1n}X_n + B_1$$

$$X_2 = A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \ldots + A_{2n}X_n + B_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_n = A_{n1}X_1 + A_{n2}X_2 + \ldots + A_{nn}X_n + B_n$$

Λύνοντας το σύστημα αυτό, σύμφωνα με τα όσα έχουμε αναφέρει στην III.6 προσδιορίζουμε τα $X_1,\ldots,X_n$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.1.

Πρέπει να σημειωθεί ότι τα (s,F)-αποδεκτά υποσύνολα ενός υπερδακτυλιοειδούς Y δεν είναι κατ' ανάγκη αριθμήσιμα.

Πράγματι ας θεωρήσουμε το σύνολο R των πραγματικών αριθμών εφοδιασμένο με τον συνήθη πολλαπλασιασμό και την υπερσυνθετική δομή της Δ-υπερομάδας. Τότε το R είναι ένα Δ-υπερδακτυλιοειδές. (υπερσωματοειδές ακριβέστερα). Θεωρούμε στη συνέχεια το σύνολο R^2 εφοδιασμένο με τη δομή της Δ-υπερομάδας. Τότε το R^2 είναι ένα Δ-υπερμοντουλοειδές επί του R. Εστω $s = (1,1)$ και $F = \{ (\chi,\chi) \in R^2 \mid \chi \geq \alpha \}$. Τότε το (s,F)-αποδεκτό υποσύνολο του R είναι το διάστημα $[\alpha, +\infty)$, σύνολο μη αριθμήσιμο.

Πρόταση 2.6. Εστω ότι τα M_1 και M_2 είναι σύνολα με τελεστές από ένα υπερδακτυλιοειδές Y. Αν τα L_1 και L_2 είναι υποσύνολα του Y αποδεκτά από τα M_1 και M_2 αντίστοιχα, τότε υπάρχει σύνολο M με τελεστές από το Y τέτοιο ώστε το $L_1 \cup L_2$ να είναι αποδεκτό από το M.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι:

$$L_1 = \varphi_{s1}^{-1}(F_1) \quad \text{και} \quad L_2=\varphi_{s2}^{-1}(F_2)$$

όπου $s_1 \in M_1$, $s_2 \in M_2$, $F_1 \subseteq M_1$, $F_2 \subseteq M_2$.

Θεωρούμε τώρα το σύνολο $M = M_1 x M_2$ και θέτουμε

$$F = (F_1 x M_2) \cup (M_1 x F_2) \quad \text{και} \quad s = (s_1, s_2).$$

Ορίζουμε στη συνέχεια μία εξωτερική πράξη από το MxY στο M ως εξής:

$$(m_1,m_2)\omega = (m_1\omega,m_2\omega)$$

Εύκολα κανείς παρατηρεί ότι η πράξη αυτή επαληθεύει τις απαιτήσεις του Ορισμού 2.1. Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι το $L_1 \cup L_2$ είναι (s,F)-αποδεκτό από το M. Πράγματι αν $\omega \in L_1$ τότε $s_1\omega \in F_1$ και επομένως

$$(s_1, s_2)\omega \in F_1 x M_2 \subseteq F$$

Ομοίως αν $\omega \in L_2$ τότε $(s_1, s_2)\omega \in F$. Επομένως

$$L_1 \cup L_2 \subseteq \varphi_s^{-1}(F)$$

Αντίστροφα τώρα. Αν $\omega \in \varphi_s^{-1}(F)$ τότε $s_1\omega \in F_1$ ή $s_2\omega \in F_2$ και επομένως $\omega \in L_1 \cup L_2$, δηλαδή $\varphi_s^{-1}(F) \subseteq L_1 \cup L_2$ και άρα $L_1 \cup L_2 = \varphi_s^{-1}(F)$.

Πόρισμα 2.1. Αν τα M_1 και M_2 είναι σύνολα με τελεστές από ένα Δ-υπερδακτυλιοειδές Υ και τα L_1, L_2 είναι υποσύνολα του Υ αποδεκτά από τα M_1 και M_2 αντίστοιχα, τότε υπάρχει σύνολο Μ με τελεστές από το Υ, τέτοιο ώστε το $L_1 + L_2$ να είναι αποδεκτό από το Μ.

Πρόταση 2.7. Εστω ένα σύνολο Μ και έστω ότι το Υ είναι ένα πεδίο υπερτελεστών με υπερπράξη την "°". Αν L είναι ένα υποσύνολο του Υ αποδεκτό από το Μ, τότε υπάρχει σύνολο Ν επί του οποίου το Υ είναι πεδίο τελεστών μέ πράξη την "." και τέτοιο ώστε το L να είναι αποδεκτό από το Ν.

Α π ό δ ε ι ξ η. Θεωρούμε το σύνολο P(M). Τότε η δράση των τελεστών του Υ στο P(M) ορίζεται μέσω της πράξης

$$P(M) \times Y \text{ ----> } P(M)$$

με $$S\alpha = \bigcup_{s \in S} s^\circ\alpha, \quad \text{όπου } S \in P(M) \text{ και } \alpha \in Y$$

Με βάση τον ορισμό αυτό παρατηρούμε ότι αν $s \in M$ ισχύει $\{s\}\alpha = s^\circ\alpha$. Ετσι έχουμε:

$$(\{s\}\alpha)\beta = (s^\circ\alpha)\beta = \bigcup_{q \in s^\circ\alpha} q^\circ\beta =$$

$$= (s^\circ\alpha)^\circ\beta = s^\circ(\alpha\beta) = \{s\}\alpha\beta$$

Εστω στη συνέχεια ότι $L = \varphi_s^{-1}(F)$ όπου $F \subseteq P(M)$. Θεωρούμε τότε τη συνάρτηση

$$\psi_{(s)} : Y \text{----}> P(M)$$

ορισμένη ως εξής:

$$\psi_{(s)}(\alpha) = \{s\}\alpha = s^\circ\alpha \quad \text{για κάθε} \quad \alpha \in Y$$

Από τον ορισμό αυτό έχουμε $\psi_{(s)}(\alpha) = \varphi_s(\alpha)$ για κάθε $\alpha \in Y$, και επομένως η Πρόταση.

Πρόταση 2.8. Εστω τα M_1 και M_2 είναι σύνολα με τελεστές από ένα υπερδακτυλιοειδές Y. Αν L_1 και L_2 είναι υποσύνολα του Y αποδεκτά από τα M_1 και M_2 αντίστοιχα, τότε υπάρχει σύνολο M με τελεστές από το Y τέτοιο ώστε το L_1L_2 να είναι αποδεκτό από το M.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι

$$L_1 = \varphi_{s1}^{-1}(F_1) \quad \text{και} \quad L_2 = \varphi_{s2}^{-1}(F_2)$$

όπου $s_1 \in M_1$, $s_2 \in M_2$, $F_1 \subseteq M_1$, $F_2 \subseteq M_2$.

Θεωρούμε τώρα το σύνολο $M = M_1 \cup M_2$ και ορίζουμε την παρακάτω εξωτερική υπερπράξη "°" από το $M\times Y$ στο M. Ετσι, αν $m_1 \in M_1$ και $m_2 \in M_2$ τότε:

$$m_1{}^\circ\omega = \begin{cases} m_1\omega, & \text{αν } m_1\omega \notin F_1 \\ \{ m_1\omega, s_2 \}, & \text{αν } m_1\omega \in F_1 \end{cases}$$

και $$m_2{}^\circ\omega = m_2\omega$$

Θα δείξουμε ότι το L_1L_2 είναι (s_1, F_2)-αποδεκτό από το M. Εστω λοιπόν L το (s_1,F_2)-αποδεκτό από το M υποσύνολο του Y. Θεωρούμε το $\omega = \omega_1\omega_2 \in L_1L_2$ με $\omega_1 \in L_1$ και $\omega_2 \in L_2$. Τότε,

$$s_1{}^\circ\omega = s_1{}^\circ(\omega_1\omega_2) = (s_1{}^\circ\omega_1)^\circ\omega_2 \supseteq \{s_1\omega_1, s_2\}^\circ\omega_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_2\omega_2 \in F_2$$

Επομένως $\omega \in L$ άρα $L_1L_2 \subseteq L$. Αντίστροφα τώρα αν $\omega \in L$ τότε $s_1°\omega \cap F_2 \neq \emptyset$. Ομως σύμφωνα με τον ορισμό της εξωτερικής υπερπράξης για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει το ω να γράφεται ως γινόμενο δύο παραγόντων ω_1, ω_2, για τους οποίους να ισχύει $s_2 \in s_1°\omega_1$, και $s_2°\omega_2 \in F$. Για να συμβαίνει όμως το πρώτο πρέπει $\omega_1 \in L_1$ ενώ για το δεύτερο $\omega_2 \in L_2$. Και επομένως $\omega = \omega_1\omega_2 \in L_1L_2$ άρα $L \subseteq L_1L_2$ και συνεπώς $L = L_1L_2$.

Πόρισμα 2.2. Αν τα L_1 και L_2 είναι αποδεκτά από πεπερασμένα σύνολα τότε το L_1L_2 είναι αποδεκτό από πεπερασμένο σύνολο.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το υποσύνολο L του Y είναι (s,F)-αποδεκτό από ένα σύνολο M. Θεωρούμε το σύνολο $P = M\times\{0,1\}$ και ορίζουμε μια εξωτερική πράξη από το $P \times Y$ στο P ως εξής:

$$(t,1)w = (tw,1)$$
$$(t,0)w = (tw,1) \quad \text{αν} \quad w \neq 1$$
$$(t,0)w = (tw,0) \quad \text{αν} \quad w = 1$$

Επομένως $(s,0)w \in F\times\{1\}$ αν και μόνον αν $w \in L\setminus\{1\}$. Αρα το $L\setminus\{1\}$ είναι $(s,F\times\{1\})$-αποδεκτό από το $M\times\{0,1\}$ υποσύνολο του Y. Ισχύει επομένως η:

Πρόταση 2.9. Αν το L είναι ένα υποσύνολο του Y αποδεκτό από ένα σύνολο M, τότε το $L\setminus\{1\}$ είναι επίσης αποδεκτό από το σύνολο $M\times\{0,1\}$.

Αμεσα από την ανωτέρω Πρόταση παρατηρούμε ότι αν το L είναι αποδεκτό από πεπερασμένο σύνολο, τότε το ίδιο συμβαίνει και για το $L\backslash\{1\}$.

Πρόταση 2.10. Εστω Y ένα υπερδακτυλιοειδές το οποίο παράγεται από ένα σύνολο B, και κάθε στοιχείο του παραγοντοποιείται μονοσήμαντα από τα στοιχεία του B. Αν L είναι ένα υποσύνολο του Y που δεν περιέχει το 1, (s,F)-αποδεκτό από ένα σύνολο M, τότε το $L^*\backslash\{1\}$ είναι επίσης αποδεκτό υποσύνολο του Y.

Απόδειξη. Θεωρούμε την εξωτερική υπερπράξη "∘" ορισμένη στο B ως εξής:

$$t\circ\beta = \begin{cases} t\beta, & \text{αν } t\beta \notin F \\ \{t, t\beta\}, & \text{αν } t\beta \in F \end{cases}$$

για κάθε $t \in M$, $\beta \in B$

Αν επομένως $\omega \in Y$ και $\omega = \beta\omega'$, τότε $t\circ\omega = (t\circ\beta)\circ\omega'$. Αν λοιπόν $\omega = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\kappa$ με $\omega \in L^*\backslash\{1\}$ και $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\kappa \in \in L$ τότε το $s\circ\omega$ περιέχει το s και ένα στοιχείο του F, άρα τα στοιχεία του $L^*\backslash\{1\}$ ανήκουν στο (s,F)-αποδεκτό από το M υποσύνολο του Y, ως προς την εξωτερική υπερπράξη "∘".

Αντίστροφα τώρα, έστω ω στοιχείο του (s,F)-αποδεκτού από το M υποσυνόλου του Y, ως προς την "∘", και έστω $\alpha_1 \neq 1$ ο αριστερός παράγοντας του ω για τον οποίο ισχύουν: $\omega = \alpha_1\omega_1$, $s\circ\alpha_1 \cap F \neq \emptyset$ και δεν υπάρχει παράγοντας α_0 του α_1 με την ιδιότητα $s\circ\alpha_0 \cap F \neq\emptyset$. Τότε $s\circ\alpha_1 = \{s, s\alpha_1\}$ και $\alpha_1 \in L$. Αν $\alpha_1 = \omega$, τότε $\omega \in L^*\backslash\{1\}$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. Αν

$\alpha_1 \neq \omega$, τότε $\omega_1 \neq 1$, και εστω $\omega_1 = \alpha_2\omega_2$ με $s^\circ\alpha_1\alpha_2 \cap F \neq \emptyset$, και με το α_2 να μην έχει παράγοντα α_0 τέτοιον ώστε $s^\circ\alpha_1\alpha_0 \cap F \neq \emptyset$. Τότε

$$s^\circ\alpha_1\alpha_2 = \{s,\ s\alpha_2,\ s\alpha_1\alpha_2\}$$

Επομένως $\alpha_1\alpha_2 \in L$ ή $\alpha_2 \in L$. Και στις δύο περιπτώσεις $\alpha_1\alpha_2 \in L^*\backslash\{1\}$. Αν $\alpha_1\alpha_2 = \omega$, τότε $\omega \in L^*\backslash\{1\}$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. Αν $\alpha_1\alpha_2 \neq \omega$, συνεχίζουμε με την ίδια διαδικασία, η οποία είναι πεπερασμένη, αφού το ω έχει πεπερασμένο το πλήθος παράγοντες, και επομένως $\omega \in L^*\backslash\{1\}$.

Από τις ανωτέρω Προτάσεις και το Πόρισμα 2.1 προκύπτει η ακόλουθη Πρόταση:

Πρόταση 2.11. *Αν το L είναι ένα αποδεκτό από ένα σύνολο M υποσύνολο ενός Δ-υπερδακτυλιοειδούς Y, τότε το L^* είναι επίσης αποδεκτό υποσύνολο του Y.*

Ας επανέλθουμε τώρα στην συνάρτηση φ_s. Από τον ορισμό της προκύπτει ότι αν $s_1 \neq s_2$ τότε $\varphi_s^{-1}(s_1) \neq \varphi_s^{-1}(s_2)$. Συνεπώς η φ_s^{-1} διαμερίζει το υπερδακτυλιοειδές Y στις ξένες μεταξύ τους κλάσεις $\varphi_s^{-1}(s_i)$, $s_i \in M$. Ετσι αν το M είναι πεπερασμένο, τότε το Y διαμερίζεται σε πεπερασμένες το πλήθος κλάσεις, δηλαδή $rk(R)<\infty$. Ακόμη παρατηρούμε ότι αν το L είναι ένα (s,F)-αποδεκτό από το M υποσύνολο του Y τότε αυτό είναι μία ένωση κλάσεων, δηλαδή

$$L = \bigcup_{s_i \in F} \varphi_s^{-1}(s_i)$$

Εχουμε λοιπόν

Πρόταση 2.12. *Αν το L είναι ένα αποδεκτό από το M υποσύνολο του Y, τότε υπάρχει μία σχέση ισοδυναμίας R στο Y ως προς την οποία το L είναι ένωση κλάσεων (κορεσμένο). Αν το M είναι πεπερασμένο, τότε $rk(R)<\infty$.*

Σχετικώς τώρα με τις σχέσεις ισοδυναμίας έχουμε τις Προτάσεις:

Πρόταση 2.13. *Αν R μία σχέση ισοδυναμίας στο Y ομομορφική ως προς την υπερπράξη και δεξιά συμβιβαστή ως προς τον πολλαπλασιασμό, τότε το σύνολο πηλίκο Y/R γίνεται (δεξιό) υπερμοντουλοειδές επί του Y.*

Απόδειξη. Πράγματι ας θεωρήσουμε το σύνολο πηλίκο Y/R. Ορίζεται τότε μία εξωτερική πράξη από το Y/R x Y στο Y/R ως εξής:

$$[x]\alpha = [x\alpha], \text{ για κάθε } [x] \in Y/R,\ \alpha \in Y$$

Σύμφωνα όμως με την Πρόταση I.3.6. η R είναι σχέση ομαλής ισοδυναμίας συνεπώς το Y/R είναι υπερομάδα. Εξάλλου έχουμε:

$$\begin{aligned}[\alpha]\kappa+[\beta]\kappa &= [\alpha\kappa] + [\beta\kappa] = \bigcup_{\tau\in\alpha\kappa+\beta\kappa} [\tau] = \\ &= \bigcup_{\tau\in(\alpha+\beta)\kappa} [\tau] = \bigcup_{x\in\alpha+\beta} [\kappa x] = \\ &= \Big(\bigcup_{x\in\alpha+\beta} [x] \Big)\kappa = ([\alpha] + [\beta])\kappa\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}[\alpha]\kappa + [\alpha]\lambda &= [\alpha\kappa] + [\alpha\lambda] = \bigcup_{\tau\in\alpha\kappa+\alpha\lambda} [\tau] = \\ &= \bigcup_{\tau\in\alpha(\kappa+\lambda)} [\tau] = \bigcup_{\mu\in\kappa+\lambda} [\alpha\mu] = \\ &= \bigcup_{\mu\in\kappa+\lambda} [\alpha]\mu = [\alpha](\kappa + \lambda)\end{aligned}$$

Επομένως το Y/R είναι (δεξιό) υπερμοντουλοειδές επί του Y. Κατ' αντίστοιχο τρόπο το Y/R μπορεί να γίνει αριστερό υπερμοντουλοειδές ή αμφίπλευρο, αν το Y είναι αντιμεταθετικό

Εστω στη συνέχεια ένα υποσύνολο L του Y το οποίο είναι μία ένωση κλάσεων μιας δεξιά συμβιβαστής ως προς τον πολλαπλασιασμό και ομομορφικής ως προς την υπερπράξη σχέσης ισοδυναμίας R. Αν θεωρήσουμε το υποσύνολο

$$F = \{ [x] \mid x \in L \}$$

του Y/R και το στοιχείο [1] του Y/R, τότε το L είναι ([1],F)-αποδεκτό από το Y/R υποσύνολο του Y. Εξάλλου αν θεωρήσουμε την ομομορφική σχέση ισοδυναμίας R_L' που ορίσαμε στην Πρόταση III.5.8 έχουμε:

$$(\chi,\psi) \in R \implies$$
$$(\forall \alpha \in Y)\ [(\chi\alpha,\psi\alpha) \in R] \iff$$
$$(\forall \alpha \in Y)\ ([\chi\alpha] = [\psi\alpha])$$

Επειδή όμως το L είναι μια ένωση κλάσεων της R από την ανωτέρω έπεται ότι:

$$(\forall \alpha \in Y)\ (\chi\alpha \in L \iff \psi\alpha \in L)$$

και συνεπώς λόγω του ορισμού της R_L' έχουμε ότι $(\chi,\psi) \in R_L'$. Προκύπτει επομένως η:

Πρόταση 2.14. *Αν R σχέση ισοδυναμίας στο Y ομομορφική ως προς την υπερπράξη και δεξιά συμβιβαστή ως προς τον πολλαπλασιασμό, και L ένα υποσύνολο του Y, το οποίο να είναι μία ένωση κλάσεων του R, τότε υπάρχει υπερμοντουλοειδές M ως προς το οποίο το L είναι αποδεκτό και για την R ισχύει:*

$$rk(R_L') \leq rk(R).$$

Πρόταση 2.15. Αν L υποσύνολο ενός Δ-υπερδαυτυλιοειδούς τότε υπάρχει υπερμοντουλοειδές M ως προς το οποίο το L είναι αποδευτό.

Απόδειξη. Θεωρούμε την σχέση R_L' που αναφέραμε στην Πρόταση III.5.8 και λαμβάνουμε το σύνολο πηλίκο Y/R_L'. Αν συμβολίσουμε με [x] την κλάση τυχόντος στοιχείου του x τότε ισχύει:

$$[x]\alpha = [x\alpha], \quad \text{για κάθε } \alpha \in Y,\ [x] \in Y/R_L'$$

Αν θεωρήσουμε συνεπώς το υποσυνολο

$$F = \{ [x] \mid x \in L \}$$

και το στοιχείο [1] του Y/R_L' τότε

$$\varphi_{[1]}^{-1}(F) = L$$

Εξάλλου το Y/R_L' είναι ένα Δ-υπερμοντουλοειδές (Πρόταση 2.13) και συνεπώς η Πρόταση.

Πόρισμα 2.3. Αν $rk(R_L') < \infty$, τότε το L είναι αποδευτό από πεπερασμένο υπερμοντουλοειδές M.

Σημειώνουμε ότι αντίστοιχα συμπεράσματα προς τα ανωτέρω έχουμε για την 'R_L όταν η δράση των τελεστών ορισθεί από τα αριστερά (αριστερά υπερμοντουλοειδή) ή για την R_L όταν οι τελεστές δρουν αμφίπλευρα και η δράση τους εκ δεξιών και εξ αριστερών ταυτίζεται (αμφίπλευρα υπερμοντουλοειδή).

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια την σχέση τ στο Y ορισμένη ως εξής:

$$\tau = \{ (\lambda,\lambda') \in Y\times Y \mid (\forall s \in M)\ s\lambda = s\lambda' \}$$

Τότε:

Πρόταση 2.16. Αν το M είναι ένα ι.ε. υπερμοντουλοειδές τότε η σχέση τ είναι ομομορφική σχέση ισοδυναμίας.

Απόδειξη. Παρατηρούμε άμεσα ότι η τ είναι ανακλαστική και συμμετρική. Εξάλλου αν $s\lambda_1 = s\lambda_2$ και $s\lambda_2 = s\lambda_3$ τότε $s\lambda_1 = s\lambda_3$ άρα η τ είναι και μεταβατική. Στη συνέχεια αν $(\lambda_1,\lambda_2) \in \tau$ και $(\lambda_3,\lambda_4) \in \tau$ τότε από την $(\lambda_1,\lambda_2) \in \tau$ έπεται ότι $s\lambda_1 = s\lambda_2$ για κάθε $s \in M$, και αφού $(\lambda_3,\lambda_4) \in \tau$ συνεπάγεται ότι $(s\lambda_1)\lambda_3 = (s\lambda_2)\lambda_4$ για κάθε $s \in M$ ή ισοδύναμα $s(\lambda_1\lambda_3) = s(\lambda_2\lambda_4)$ για όλα τα $s \in M$ άρα $(\lambda_1\lambda_3,\lambda_2\lambda_4) \in \tau$.

Εξάλλου από τις

	$s\lambda_1 = s\lambda_2$	για κάθε $s \in M$
και	$s\lambda_3 = s\lambda_4$	για κάθε $s \in M$
έπεται ότι	$s\lambda_1 + s\lambda_3 = s\lambda_2 + s\lambda_4$	για κάθε $s \in M$
ή ισοδύναμα	$s(\lambda_1 + \lambda_3) = s(\lambda_2 + \lambda_4)$	για κάθε $s \in M$

Αρα η τ είναι ομομορφική σχέση ισοδυναμίας.

Πρόταση 2.17. Αν το M είναι πεπερασμένο τότε το Y/τ είναι επίσης πεπερασμένο.

ΑΛΛΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΓΛΩΣΣΩΝ ΚΑΙ ΑΥΤΟΜΑΤΩΝ

V

- Γλώσσες και Υπερδακτυλιοειδή – Γλωσσικά Υπερδακτυλιοειδή
- Υπερμοντουλοειδή και Αυτόματα
- Γλωσσικά Υπερδακτυλιοειδή και Αυτόματα
- Αυτόματα και προσηρτημένες Υπερομάδες

—1—

ΓΛΩΣΣΕΣ ΚΑΙ ΥΠΕΡΔΑΚΤΥΛΙΟΕΙΔΗ
ΓΛΩΣΣΙΚΑ ΥΠΕΡΔΑΚΤΥΛΙΟΕΙΔΗ

Εστω A ένα αλφάβητο και A* το σύνολο των λέξεων επί του A. Οπως είδαμε στην παράγραφο I.1 με τη θεώρηση των δισυνόλων των λέξεων, μορφώνεται η υπερσυνθετική δομή (A*, +) η οποία είναι μια ειδικής μορφής συνδετική υπερομάδα, που ονομάσθηκε Δ-υπερομάδα. Εξάλλου με την εισαγωγή της μηδενικής λέξης, όπως αυτή ορίσθηκε στη παράγραφο II.1 μορφώνεται η υπερσυνθετική δομή $\underline{A}^*$ που αποτελεί μια ειδικής μορφής ενισχυμένη συνδετική υπερομάδα, που ονομάσθηκε διευρημένη Δ-υπερομάδα. Αφετέρου, όπως είναι γνωστό [26], [70], το A* με την σύζευξη των λέξεων εφοδιάζεται με μία πράξη (σε πολλαπλασιαστική γραφή), ως προς την οποία είναι ένα μη αντιμεταθετικό μονοειδές, (εκτός από την περίπτωση που το A είναι μονοσύνολο) η μονάδα του οποίου είναι η κενή λέξη. Ομοίως μονοειδές είναι και το $\underline{A}^*$. Οπως δείξαμε όμως στη παράγραφο III.1 ο πολλαπλασιασμός αυτός, δηλαδή η σύζευξη, είναι επιμεριστικός ως προς την υπερπράξη. Σχετικώς δε ισχύει η

Πρόταση 1.1. *Το σύνολο A^* των λέξεων αποτελεί ένα Δ-υπερδακτυλιοειδές, το δε $\underline{A}^* = A^* \cup \{0\}$ ενισχυμένο Δ-υπερδακτυλιοειδές.*

Το υπερδακτυλιοειδές A^* θα το ονομάζουμε γλωσσικό υπερδακτυλιοειδές και το $\underline{A}^*$ διευρημένο γλωσσικό υπερδακτυλιοειδές. Κατά συνέπεια, τόσο για τις υπερπροσθετικές δομές $(A^*, +)$, $(\underline{A}^*, +)$ όσο και για τα γλωσσικά υπερδακτυλιοειδή, ισχύουν οι ιδιότητες οι οποίες έχουν εκτεθεί στα προηγούμενα κεφάλαια. Πρέπει να σημειωθεί βέβαια ότι κάθε Δ-υπερδακτυλιοειδές δεν είναι γλωσσικό. Πράγματι στο γλωσσικό υπερδακτυλιοειδές κάθε στοιχείο του (λέξη) παραγοντοποιείται μονοσήμαντα από τα στοιχεία του αλφαβήτου (γράμματα). Εχει επομένως το γλωσσικό υπερδακτυλιοειδές ένα πεπερασμένο πρώτο υποσύνολο, δηλαδή ένα πεπερασμένο σύνολο π ρ ώ τ ω ν ή α ρ χ ι κ ώ ν και α ν ά γ ω γ ω ν στοιχείων, τέτοιο ώστε κάθε στοιχείο του να παραγοντοποιείται μονοσήμαντα από τα στοιχεία του πρώτου υποσυνόλου του. Παρατηρούμε δηλαδή ότι έχει μια ιδιότητα αντίστοιχη με αυτή που έχουν οι δακτύλιοι του Gauss [22]. Σχετικά λοιπόν με το πότε ένα Δ-υπερδακτυλιοειδές είναι γλωσσικό ισχύει η:

Πρόταση 1.2. *Κάθε μοναδιαίο Δ-υπερδακτυλιο-*

δές το οποίο έχει ένα πεπερασμένο πρώτο υποσύνολο P, και είναι μη αντιμεταθετικό (για card P > 1), είναι γλωσσικό υπερδακτυλιοειδές.

Επομένως βλέπουμε ότι από κάθε μη αντιμεταθετικό ελεύθερο μονοειδές, με πεπερασμένη βάση, προκύπτει ένα γλωσσικό υπερδακτυλιοειδές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.

Θεωρούμε τα μητρώα 2ας τάξεως που παράγονται από γινόμενα μητρών με στοιχεία 0, 1, εξαιρουμένης της μηδενικής μήτρας, δηλαδή θεωρούμε τα μητρώα που παράγονται από τις ακόλουθες μήτρες:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Gamma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Gamma_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Θεωρώντας το συνήθη πολλαπλασιασμό των μητρών, παρατηρούμε ότι οι μήτρες A_1, B_6, Γ_4 είναι "ανεξάρτητες" υπό την έννοια ότι καμμία από αυτές δεν προκύπτει ως το γινόμενο των άλλων δύο. Επιπλέον επαληθεύεται ότι όλες οι ανωτέρω μήτρες προκύπτουν από γινόμενα αυτών των τριών μητρών. Ετσι το Δ-υπερδακτυλιοειδές που προκύπτει από τα μητρώα 2ας τάξεως με στοιχεία 0 και 1 είναι ένα γλωσσικό υπερδακτυλιοειδές το πρώτο υποσύνολο του οποίου αποτελείται από τα μητρώα A_1, B_6, Γ_4. Η κενή λέξη εδώ είναι η μοναδιαία μήτρα.

Είναι γνωστό ότι διάφορα μοντέλα που περιγράφουν γλώσσες καθώς και άλλα που τις αναγνωρίζουν αποτελούν ειδικές περιπτώσεις ενός **ημι-Thue συστήματος** [73], ή άλλως συστήματος αντικατάστασης (rewriting system). Ενα τέτοιο σύστημα είναι ένα ζεύγος (A,R) όπου A είναι ένα αλφάβητο και R μια πεπερασμένη σχέση στό A^*, δηλαδή στο γλωσσικό υπερδακτυλιοειδές που παράγεται από το A, σύμφωνα με τα όσα έχουμε αναφέρει ανωτέρω. Αν η σχέση αντικατάστασης R είναι συμμετρική τότε έχουμε ένα **σύστημα Thue**. Το σύστημα Thue μπορεί να ορίσει μια σχέση ισοδυναμίας στο υπερδακτυλιοειδές A^*, αφού μπορούμε να θεωρήσουμε την ανακλαστική και αντιμεταθετική κλειστότητα της R στο A^*. Οι σχέσεις ισοδυναμίας λοιπόν στο γλωσσικό υπερδακτυλιοειδές παρουσιάζουν ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Μια ξεχωριστής σημασίας τέτοια σχέση είναι αυτή της **ισοδυναμίας μήκους**. Είναι γνωστό ότι το μήκος $l(\omega)$ μιας λέξης ω είναι ο αριθμός των γραμμάτων που την απαρτίζουν, είναι δηλαδή το μήκος l μια απεικόνιση της μορφής:

$$l : A^* \text{ ----> } N$$

Αμεση συνέπεια αυτού του ορισμού είναι ότι αν ω και ψ είναι δύο λέξεις, τότε ισχύει η ισότητα

$$l(\omega\psi) = l(\omega) + l(\psi) \quad (1)$$

Επειδή δε $\lambda\omega = \omega\lambda = \omega$, όπου λ η κενή λέξη, έχουμε ότι $l(\lambda) = 0$, ενώ από την $0\omega = \omega 0 = 0$, προκύπτει ότι η μηδενική λέξη στερείται μήκους. Σύμφωνα λοιπόν με τα ανωτέρω και επιπλέον, επειδή έχουμε θεωρήσει τη σύζευξη των λέξεων ως την πολλαπλασιαστική πράξη στο γλωσσικό υπερδακτυλιοειδές, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση του μήκους είναι αντίστοιχη της λογαριθμικής συνάρτησης των πραγματικών αριθμών. Επαληθεύονται δηλαδή για την l όλες οι αντίστοιχες ιδιότητες που ισχύουν για την log. Επειδή μάλιστα στο γλωσσικό υπερδακτυλιοειδές έχει ορίσθει (πχ. [70]) ότι $\chi^0 = \lambda$ (το μοναδιαίο στοιχείο) και $\chi^\nu = \chi\chi^{\nu-1}$ από την (1) έπεται άμεσα ότι $l(\omega^\nu) = \nu l(\omega)$. Σε αντίθεση όμως με την λογαριθμική συνάρτηση, η συνάρτηση μήκους δεν είναι 1-1. Διαμερίζει συνεπώς η l το πεδίο ορισμού της σε ξένες μεταξύ τους κλάσεις, κάθε μία από τις οποίες περιέχει στοιχεία του ιδίου μήκους. Επομένως η l ορίζει στο A^* μια σχέση ισοδυναμίας R_l ως εξής:

$$\chi \equiv \psi \; (R_l) \iff l(\chi) = l(\psi)$$

Η ισοδυναμία αυτή ονομάζεται **ισοδυναμία μήκους.** Αν συμβολίσουμε με C_l^k την κλάση των στοιχείων μήκους k, τότε έχουμε:

$$C_l^0 = \{ \lambda \}, \quad C_l^1 = A, \quad C_l^2 = AA = A^2, \; \ldots, \; C_l^k = A^k$$

Αν τώρα $X \subseteq A^*$, ορίζουμε

$$l(X) = \{ l(\chi) \mid \chi \in X \}$$

Οταν το $l(X)$ είναι μονοστοιχιακό, για απλοποίηση του συμβολισμού, όπως έχουμε αναφέρει για αντίστοιχες περιπτώσεις στο Κεφάλαιο I, θα γράφουμε $l(X) = l(\chi)$ αντί για $\{l(\chi)\}$, και επομένως για τις κλάσεις που ορίζει η R_l έχουμε $l(C_l^k) = k$ αντί $\{k\}$.

Στη συνέχεια, χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία μπορεί κανείς να αποδείξει το

Λήμμα 1.1. *Η R_l είναι ομαλή ως προς την πράξη της σύζευξης.*

και επομένως επειδή το γλωσσικό υπερδακτυλιοειδές είναι ένα Δ-υπερδακτυλιοειδές, σύμφωνα με την Πρόταση III.1.3 ισχύει η

Πρόταση 1.3. *Το πηλικοσύνολο A^*/R_l είναι ένα Δ-υπερδακτυλιοειδές*

Τα στοιχεία του A^*/R_l είναι οι κλάσεις C_l^i, $i \in N$, και επομένως, λόγω της μορφής που έχουν οι κλάσεις αυτές, όπως αναφέραμε παραπάνω, το A^*/R_l γράφεται ως ακολούθως:

$$A^*/R_l = \{ \lambda, A, A^2, \dots \}$$

Αρα το A^*/R_l έχει πρώτο υποσύνολο, το οποίο είναι το μονοστοιχειακό σύνολο $\{ A \}$. Επομένως:

Πρόταση 1.4. *Το A^*/R_l είναι ένα γλωσσικό υπερδακτυλιοειδές με πρώτο υποσύνολο το $\{A\}$.*

Η l όμως τώρα είναι μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του A^*/R_l επί του N, που πληροί την σχέση $l(A^m A^n) = m + n$ για κάθε $m,n \in N$, και επομένως:

Πρόταση 1.5. Το N είναι ένα γλωσσικό υπερδακτυλιοειδές με πρώτο υποσύνολο το μονοσύνολο $\{1\}$ και με πράξη (σύζευξη) την

$$xy = x + y$$

και υπερπράξη την

$$x \dagger y = \{x, y\}$$

για κάθε $x, y \in N$

Οπως αναφέραμε και στην αρχή της παραγράφου με αφορμή το $\underline{A}^*$, αν η υπερομάδα ενός γλωσσικού υπερδακτυλιοειδούς είναι ενισχυμένη συνδετική, τότε λαμβάνουμε ένα Ε.Υ. ειδικής μορφής, το διευρημένο γλωσσικό υπερδακτυλιοειδές. Το διευρημένο γλωσσικό υπερδακτυλιοειδές εμφανίζεται άμεσα στην κατασκευή του αυτομάτου. Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι ισχύει η Πρόταση:

Πρόταση 1.6. Το σύνολο των καταστάσεων ενός αυτομάτου μπορεί να εφοδιασθεί με τη δομή της διευρημένης Δ-υπερομάδας με μηδέν την αρχική κατάσταση (και στοιχεία αυτοαντίθετα).

Ακόμη παρατηρούμε ότι ισχύει η

Πρόταση 1.7. *Το σύνολο των καταστάσεων ενός αυτομάτου εφοδιασμένο με τη δομή της διευρημένης Δ-υπερομάδας, γίνεται υπερμοντουλοειδές επί του διευρημένου γλωσσικού υπερδακτυλιοειδούς ($\underline{A}^*$,+,.) που ορίζει το αλφάβητο A του αυτομάτου (Δ-υπερμοντουλοειδές) [και όπου, προφανώς, η εξωτερική πράξη S x $\underline{A}^*$ ---> S ορίζεται από τη συνάρτηση δ*]*

Οταν λοιπόν κατασκευάζεται το λογικό κύκλωμα, που αποτελεί την ηλεκτρονική πραγματοποίηση ενός αυτομάτου, χρησιμοποιούμε ένα ειδικό σύμβολο, το <EOS> (End Of String), προκειμένου να φανερώσουμε το τέλος μιας λέξης. Το <EOS> έχει την ιδιότητα δ*(s,<EOS>) = s για κάθε κατάσταση s του αυτομάτου. Βλέπουμε λοιπόν ότι το <EOS> αντιστοιχεί στο μοναδιαίο στοιχείο του υπερδακτυλιοειδούς, αφού στο υπερμοντουλοειδές του αυτομάτου ισχύει:

$$s1 = s, \quad \text{για κάθε } s \in S$$

Είναι δηλαδή $\delta^*(s,\langle EOS\rangle) = \delta^*(s,\lambda) = s\lambda = s$

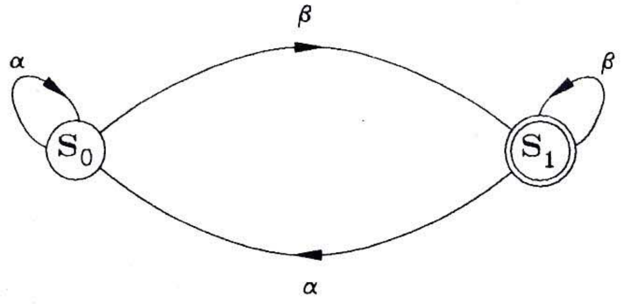
Ενα άλλο σύμβολο το οποίο χρησιμοποιείται στην ηλεκτρονική πραγμάτωση του αυτομάτου είναι το <SOS> (Start Of String). Το σύμβολο αυτό δρά σαν ένας μηδενιστής, αφού με το σύμβολο αυτό οδηγούμεθα από κάθε κατάσταση στην αρχική. Είναι λοιπόν το αντίστοιχο του μηδενός στο διευρημένο γλωσσικό υπερδακτυλιοειδές, αφού στο υπερμοντουλοειδές του αυτομάτου ισχύει:

$$s0 = s_o \quad \text{για κάθε } s \in S$$

και επομένως:

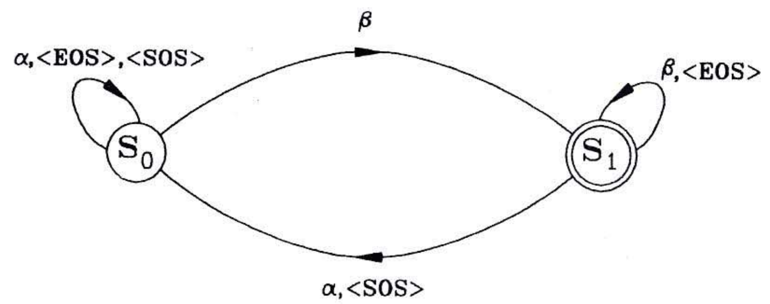
$$\delta^*(s,\langle SOS\rangle) = \delta^*(s,0) = s0 = s_o$$

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα το παρακάτω αυτόματο:



Σχήμα 1.

Οπως αναφέραμε παραπάνω, οταν κατασκευάζουμε το λογικό κύκλωμα, ξεκινώντας από τον ορισμό του αυτομάτου, μεταχειριζόμαστε το στοιχείο <EOS>, το οποίο δηλώνει το τέλος της λέξης με την οποία τροφοδοτούμε το αυτόματο κάθε φορά, καθώς και το στοιχείο <SOS> το οποίο από κάθε κατάσταση μας επαναφέρει στην αρχική. Κατ' αυτόν τον τρόπο το αυτόματο του σχήματος 1 μετασχηματίζεται σε αυτό του σχήματος 2.



Σχήμα 2.

Προκειμένου τώρα να προχωρήσουμε στον ηλεκτρονικό σχεδιασμό του αυτομάτου που επιλέξαμε ως Παράδειγμα, πρέπει πρώτα να περιγράψουμε με τον κατάλληλο αριθμό από bits [8], τις καταστάσεις του και τα γράμματα του αλφαβήτου του. Ετσι αφού το αυτόματο έχει δύο καταστάσεις, αρκεί ένα bit για να περιγράψουμε κάθε μία από αυτές, δηλαδή $t = 0$ για την κατάσταση s_0 και $t = 1$ για την κατάσταση s_1. Στη συνέχεια, επειδή το αλφάβητο αποτελείται από δύο γράμματα, τα α και β, και επιπλέον έχουμε το <EOS> = 1 = λ και το <SOS> = 0, παρατηρούμε ότι απαιτούνται δύο bits για κάθε σύμβολο. Ακολουθώντας τη συνθήκη να χρησιμοποιείται ο "χαμηλότερος" δυαδικός κώδικας για το <EOS> και ο "υψηλοτερος" για το <SOS>, θέτουμε <EOS> = 00 και <SOS> =11. Χρησιμοποιώντας τους υπόλοιπους συνδιασμούς από bits για να προσδιορίσουμε τα α και β έχουμε:

00 = <EOS>

01 = α

10 = β

11 = <SOS>

Μετά την ανάλυση αυτή οδηγούμεθα στον παρακάτω πίνακα ο οποίος περιγράφει την δράση της συνάρτησης δ του αυτομάτου:

t	a_1	a_2	t'
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1

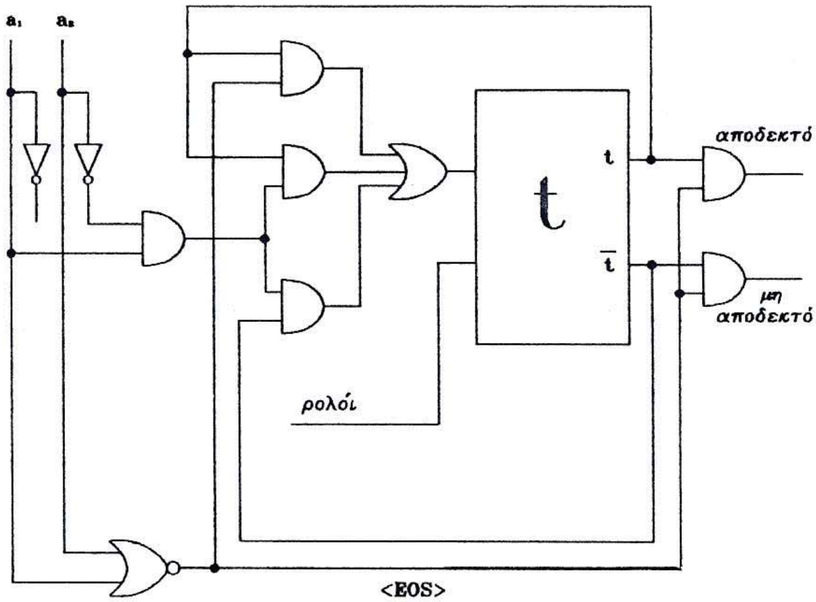
Προσθέτοντας λοιπόν στον προηγούμενο πίνακα τα δύο σύμβολα <EOS> και <SOS> δημιουργούμε τον πλήρη πίνακα αληθείας για την t':

t	a_1	a_2	t'
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Στον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι το t' λαμβάνει την τιμή 1 στη 3η, 5η και 7η σειρά. Προκύπτει επομένως η ακόλουθη αλγεβρική έκφραση:

$$(\bar{t}\wedge a_1\wedge\bar{a}_2)\vee(t\wedge\bar{a}_1\wedge\bar{a}_2)\vee(t\wedge a_1\wedge\bar{a}_2)$$

Για να σχεδιάσουμε το κύκλωμα θα πρέπει εκτός των άλλων να χρησιμοποιήσουμε και ένα D flip-flop [3], [8] διότι το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται μόνον από την είσοδο του γράμματος αλλά και από την προηγούμενη κατάσταση του κυκλώματος, καθώς άλλο πχ. είναι το αποτέλεσμα αν εισαχθεί το γράμμα β όταν είμαστε στην κατάσταση s_0 και άλλο όταν είμαστε στην κατάσταση s_1. Πρέπει δηλαδή το κύκλωμα να θυμάται την προηγούμενη κατάστασή του, γιαυτό απαιτείται ένα κύτταρο μνήμης. Το ηλεκτρονικό κύκλωμα που πραγματώνει το αυτόματο είναι το παρακάτω.



Σχήμα 3

Στο συγκεκριμένο αυτόματο το υπερμοντουλοειδές αποτελείται από δύο στοιχεία, τα s_0 και s1, ενώ το διευρημένο γλωσσικό υπερδακτυλιοειδές έχει μοναδιαίο στοιχείο το <EOS>, μηδενικό το <SOS> και πρώτα στοιχεία, τα α και β.

Επίσης η εισαγωγή του μηδενός είναι αναγκαία στο γλωσσικό υπερδακτυλιοειδές, προκειμένου να βρεθεί το ρητό υποσύνολο που είναι (s,F)-αποδεκτό από ένα πεπερασμένο σύνολο M με τελεστές από το υπερδακτυλιοειδές. Αν card M = k, εισάγεται η $k \times k$ "μήτρα" R_0 όπου κάθε στοιχείο της $R_0[s_i,s_j]$ είναι ένα υπεράθροισμα που ορίζεται ως εξής:

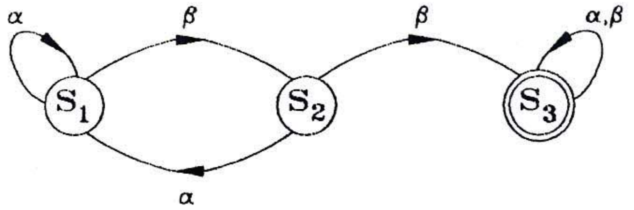
$$R_0[s_i,s_j] = \begin{cases} \text{το άθροισμα όλων των πρώτων στοιχείων του διευρημένου γλωσσικού υπερδακτυλιοειδούς} \\ \text{για τα οποία ισχύει } s_i\chi = s_j, \text{ αν } s_i \neq s_j \\ \\ \text{το άθροισμα του μοναδιαίου στοιχείου του διευρημένου γλωσσικού υπερδακτυλιοειδούς με} \\ \text{ολα τα πρώτα του στοιχεία για τα οποία ισχύει } s_i\chi = s_j, \text{ αν } s_i = s_j \\ \\ 0, \text{ αν δεν υπάρχει πρώτο στοιχείο του γλωσσικού υπερδακτυλιοειδούς που να οδηγεί} \\ \text{απευθείας από την κατάσταση } s_i \text{ στην } s_j \end{cases}$$

Στη συνέχεια ορίζεται μια ακολουθία από k τέτοιες μήτρες R_l, $1 \leq l \leq k$, όπου τα στοιχεία τους δίνονται από την σχέση

$$R_l[s_i,s_j]=R_{l-1}[s_i,s_j]+R_{l-1}[s_i,s_l]R_{l-1}[s_l,s_l]^*R_{l-1}[s_l,s_j]$$

Τα $R_l[s_i,s_j]$ είναι ρητά υποσύνολα του ενισχυμένου γλωσσικού υπερδακτυλιοειδούς, και το (s,F)-αποδεκτό υποσύνολο προκύπτει από το άθροισμα των $R_k[s,s_t]$, όπου $s_t \in F$, στοιχείων της R_k μήτρας.

Για παράδειγμα έστω ότι το M είναι το παρακάτω αυτόματο και η δράση των τελεστών είναι έτσι όπως συμβολίζεται στο σχήμα:



Σχήμα 4

Η μήτρα R_0 είναι η

$$R_0 = \begin{bmatrix} 1+\alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1+\alpha+\beta \end{bmatrix}$$

και από τον προηγούμενο τύπο για την R_3 προκύπτει:

$$R_3[s_1,s_3] = \alpha^*\beta(\alpha\alpha^*\beta)^*\beta(\alpha+\beta)^*$$

—2—

ΥΠΕΡΜΟΝΤΟΥΛΟΕΙΔΗ ΚΑΙ ΑΥΤΟΜΑΤΑ

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα με εσωτερική μνήμη (για παράδειγμα ένα flip-flop) και με εξωτερικές εισόδους δεδομένων. Εστω M το σύνολο των καταστάσεων στις οποίες μπορεί να βρεθεί το σύστημα και οι οποίες είναι προφανώς συναρτήσεις των εσωτερικών και εξωτερικών δεδομένων. Το σύστημα αυτό μετατωπίζεται από κατάσταση σε κατάσταση κάτω από την επίδραση ορισμένων συνθηκών. Εστω A το σύνολο των συνθηκών αυτών. Επί του A μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα γλωσσικό υπερδακτυλιοειδές Y, θεωρώντας το A ως το πρώτο υποσύνολο του Y. Τότε το Y αποτελεί ένα σύνολο τελεστών ή υπερτελεστών επί του M, αναλόγως με το αν μια δεδομένη συνθήκη μας οδηγεί σε μια ή πλείονες της μιας καταστάσεις. Ας δούμε για παράδειγμα ένα JK flip-flop [3], [8].

Ολα τα JK flip - flops έχουν "ρολόι" και η πλειοψηφία τους δουλεύει με βάση την αρχή του MS flip-flop [3], [8]. Ας θεωρήσουμε σχηματικά το παρακάτω JK flip - flop:

```
        ┌──────────────┐
J ---> |J            Q| ---> Q
C ---> |C             |
K ---> |K            Q̄| ---> Q̄
        └──────────────┘
```

και τον πίνακα αλήθειας του:

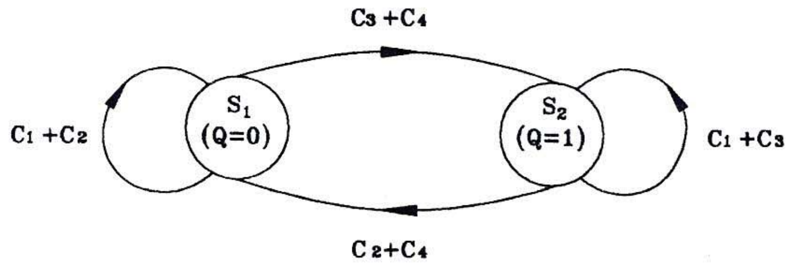
ΕΙΣΟΔΟΣ		ΕΞΟΔΟΣ			ΕΙΣΟΔΟΣ		ΕΞΟΔΟΣ
J	K	Q	Q^+		J	K	Q^+
0	0	0	0	καμμία αλλαγή	0	0	Q
0	0	1	1	" "	0	1	0
0	1	0	0	reset Q	1	0	1
0	1	1	0	" Q	1	1	$\bar{Q}$
1	0	0	1	set Q			
1	0	1	1	" Q			
1	1	0	1	αλλαγή Q			
1	1	1	0	" Q			

Το σύνολο των καταστάσεων του JK flip-flop είναι το δισύνολο S = {0, 1}. Παρατηρούμε ότι για όλες τις τιμές των J και K, το JK flip-flop συμπεριφέρεται ακριβώς σαν RS flip-flop με το J να δρα σαν "set" και το K σαν "reset", εκτός από την περίπτωση που αμφότερα τα J και K έχουν λάβει την τιμή 1. Στην περίπτωση αυτή το JK flip-flop αλλάζει κατάσταση σε κάθε χρονικό παλμό. Δηλαδή αν το Q ήταν 0 γίνεται 1 και αντίστροφα και εξαιτίας αυτής της ιδιότητός του το JK flip-flop αποτελεί την "καρδιά" σχεδόν κάθε κυκλώματος μετρητή.

Οι συνθήκες τώρα που μας οδηγούν από μια κατάσταση σε μια άλλη, είναι το αλφάβητο που χρησιμοποιείται από το JK flip-flop. Τις συνθήκες αυτές, θα τις συμβολίσουμε με C_1, C_2, C_3 και C_4, και μπορούμε να τις ορίσουμε με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα.

ΕΙΣΟΔΟΣ		ΣΥΝΘΗΚΗ
J	K	C
0	0	C_1
0	1	C_2
1	0	C_3
1	1	C_4

Μπορούμε λοιπόν τώρα να σχηματίσουμε το παρακάτω διάγραμμα του JK flip-flop



Παρατηρούμε ότι στο γλωσσικό υπερδακτυλιοειδές C^* του JK flip-flop, που ορίζεται με πρώτο υποσύνολο το $C = \{ C_2, C_3, C_4 \}$, το στοιχείο C_1 είναι το μοναδιαίο στοιχείο του πολλαπλασιασμού.

Σύμφωνα με τα όσα έχουμε αναφέρει στην Πρόταση IV.2.13, αν σε ένα υπερδακτυλιοειδές Y ορίσουμε μια ομομορφική σχέση ισοδυναμίας R, τότε το σύνολο πηλίκο Y/R γίνεται ένα υπερμοντουλοειδές υπεράνω του Y. Συνεπώς, αναλόγως με το αν το rk(R) είναι πεπερασμένο ή όχι και το υπερμοντουλοειδές που θα προκύψει θα είναι πεπερασμένο ή όχι. Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι το Y είναι ένα γλωσσικό υπερδακτυλιοειδές και για την R ισχύει ότι $rk(R) < +\infty$ τότε το Y/R είναι πεπερασμένο υπερμοντουλοειδές. Τα στοιχεία ενός τέτοιου υπερμοντουλοειδούς μπορούν να αποτελέσουν και τις καταστάσεις ενός αυτομάτου, το οποίο όμως θα ορισθεί πλήρως αν ορίσουμε μια κλάση του Y/R ως την αρχική κατάσταση και ένα σύνολο κλάσεων ως τις τελικές καταστάσεις.

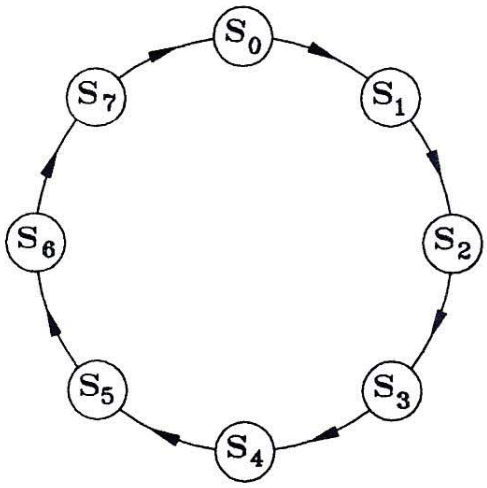
Ας δούμε όλα αυτά σε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα, τον δυαδικό μετρητή. Το σύνολο των φυσικών αριθμών γίνεται γλωσσικό υπερδακτυλιοειδές σύμφωνα με την Πρόταση 1.5. Θεωρούμε στο N τη γνωστή σχέση ισοδυναμίας mod n, [34], ήτοι

$$\chi = \psi \pmod n \iff |\chi - \psi| = kn, \quad k \in N$$

Ευκολα μπορεί κανείς να επαληθεύσει ότι αυτή η σχέση ισοδυναμίας είναι ομομορφική. Εξάλλου, κατά τα γνωστά [34], η σχέση mod n διαμερίζει το N σε n κλάσεις και επομένως το

N/mod n είναι ένα υπερμοντουλοειδές με n στοιχεία. Μπορούμε λοιπόν, σύμφωνα με τα ανωτέρω, να ορίσουμε ένα σύνολο n καταστάσεων.

Οι μετρητές είναι σημαντικά δομικά στοιχεία ενός ψηφιακού συστήματος και λαμβάνουν κατά περίπτωση διάφορες μορφές, ανάλογα με την εφαρμογή στην οποία χρησιμοποιούνται. Μια από τις μορφές αυτές είναι οι δυαδικοί μετρητές. Ενας δυαδικός μετρητής ο οποίος μπορεί να μετράει στο δυαδικό σύστημα από το 0 ως το $2^n - 1$ αποτελείται από n καταστάσεις, οι οποίες πραγματοποιούνται μέσα από n flip-flop. Ο δυαδικός μετρητής είναι το υπερμοντουλοειδές που προέκυψε από τη διαμέριση του υπερδακτυλιοειδούς των φυσικών αριθμών ως πρός τη σχέση mod 2^n. Για παράδειγμα ο δυαδικός μετρητής ο οποίος μετρά από το 0 έως το 7 είναι το υπερμοντουλοειδές N/mod 2^3 και αποτελείται από 8 καταστάσεις, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



Είναι δυνατόν όμως το υπερμοντουλοειδές που θα προκύψει από ορισμένες σχέσεις ισοδυναμίας να μας οδηγήσει σε αυτόματο. Ετσι στη Πρόταση III.5.8 δείξαμε ότι με αφετηρία τυχόν υποσύνολο L ενός υπερδακτυλιοειδούς Y μπορούμε να ορίσουμε ειδικές σχέσεις ισοδυναμίας, πού συμβολίζουμε με R_L', $'R_L$, και R_L, η οποίες είναι αντίστοιχα δεξιά συμβιβαστές, αριστερά συμβιβαστές ή ομομορφικές, αν το Y είναι ένα Δ-υπερ δακτυλιοειδές. Επειδή λοιπόν σύμφωνα με την Πρόταση 1.1 το γλωσσικό υπερδακτυλιοειδές είναι ένα Δ-υπερδακτυλιοειδές, έχουμε:

Πρόταση 2.1. *Αν L είναι μια γλώσσα του γλωσσικού υπερδακτυλιοειδούς, τότε η σχέση R_L που ορίζεται από την Πρόταση III.5.8 είναι μια ομομορφική σχέση ισοδυναμίας σε αυτό, ενώ οι R_L' και $'R_L$ είναι δεξιά και αριστερά συμβιβαστές ως προς την σύζευξη.*

Εξάλλου στη Πρόταση III.5.9 δείξαμε ότι αν υπάρχει μια δεξιά συμβιβαστή σχέση ισοδυναμίας R στο Y ως προς την οποία το L να είναι μια ένωση κλάσεων, τότε $rk(R_L') \leq rk(R)$ και επομένως αν το rk(R) είναι πεπερασμένο, τότε και το $rk(R_L')$ είναι επίσης πεπερασμένο. Συνεπώς,

Πρόταση 2.2. *Αν η γλώσσα L αποτελείται από μια ένωση κλάσεων μιας δεξιά συμβιβαστής σχέσης ισοδυναμίας R, για την οποία ισχύει $rk(R) < \infty$, τότε έχουμε $rk(R_L') < \infty$. Αντίστοιχα συμπεράσματα ισχύουν για αριστερά συμβιβαστή ή ομομορφική σχέση ισοδυναμίας.*

Ακόμη με την Πρόταση IV.2.14 ανάμεσα στα άλλα δείξαμε ότι αν R είναι μια δεξιά συμβιβαστή σχέση ισοδυναμίας στο Y και το L είναι μία ένωση κλάσεων του R, τότε υπάρχει (δεξιό) υπερμοντουλοειδές M ως προς το οποίο το L είναι αποδεκτό, ειδικά δε, σύμφωνα με τη Πρόταση IV.2.15, αν το L είναι υποσύνολο ενός Δ-υπερδακτυλιοειδούς, τότε υπάρχει (δεξιό) υπερμοντουλοειδές M ως προς το οποίο το L είναι αποδεκτό και αν $rk(R_L') < \infty$, τότε από το Πόρισμα IV.2.3 έχουμε ότι το M είναι πεπερασμένο υπερμοντουλοειδές. Επομένως έχουμε:

Πρόταση 2.3. *Αν για τη γλώσσα L ισχύει $rk(R_L') < \infty$, τότε υπάρχει αυτόματο A, το οποίο δέχεται ώς γλώσσα την L.*

Τέλος με την Πρόταση IV.2.12 δείξαμε ότι αν το L είναι αποδεκτό από ένα υπερμοντουλοειδές M, τότε υπάρχει μία σχέση ισοδυναμίας R στο Y ως προς την οποία το L είναι μία ένωση κλάσεων, και αν το M είναι πεπερασμένο τότε $rk(R) < \infty$. Επομένως έχουμε την

Πρόταση 2.4. *Αν η γλώσσα L είναι δεκτή από ένα αυτόματο, τότε υπάρχει μία σχέση ισοδυναμίας R ως προς την οποία το L είναι μία ένωση κλάσεων, και $rk(R) < \infty$.*

Τώρα από τις Προτάσεις 2.1 - 2.4 προκύπτει το γνωστό Θεώρημα του Nerode [62] (παρόμοιο αποτέλεσμα με αυτό του Nerode είχε πετύχει λίγο πριν από αυτόν και ο Myhill [61], γιαυτό το θεώρημα αυτό συχνά αναφέρεται και ως θεώρημα των Myhill-Nerode).

Θεώρημα του Nerode *Αν L είναι μία γλώσσα υπεράνω ενός αλφαβήτου A, τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

i) η L είναι γλώσσα ενός αυτομάτου.

ii) υπάρχει μια δεξιά συμβιβαστή σχέση ισοδυναμίας R στο A^* ως προς την οποία η L είναι μια ένωση ορισμένων κλάσεων ισοδυναμίας και $rk(R) < \infty$.

iii) $rk(R_L) < \infty$.

—3—

ΓΛΩΣΣΙΚΑ ΥΠΕΡΔΑΚΤΥΛΙΟΕΙΔΗ ΚΑΙ ΑΥΤΟΜΑΤΑ

Οπως αναφέραμε στο κεφάλαιο IV και συγκεκριμένα με την Πρόταση IV.2.1, ένα σύνολο M επί του οποίου δρούν τελεστές από ένα υπερδακτυλιοειδές Y μπορεί να λάβει τη δομή της υπερομάδας με την εκεί οριζόμενη υπερπράξη (IV.2.1). Το υπεράθροισμα όμως $s_i + s_j$ σχετίζεται άμεσα με το υπερδακτυλιοειδές Y, ορίζοντας το ακόλουθο υποσύνολό του:

$$\Gamma[s_i+s_j] = \{ \omega \in Y \mid s_i\omega = s_j \}$$

Αν το Y έχει ένα πρώτο υποσύνολο και δεν είναι αντιμεταθετικό, τότε όλα τα στοιχεία του $\Gamma[s_i+s_j]$ έχουν την ιδιότητα:

$$\omega \in \Gamma[s_i+s_j] \implies s_iz \in s_i+s_j, \text{ για κάθε } z \in \mathrm{Prefix}(\omega)$$

όπου $\mathrm{Prefix}(\omega) = \{ \psi \in Y \mid \psi\chi = \omega, \text{ για κάποιο } \chi \in Y \}$ [70]

Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι το σύνολο των τελεστών του M είναι ένα γλωσσικό υπερδακτυλιοειδές με πρώτο υποσύνολο το A. Αν $P \subseteq M$, τότε θα αποδείξουμε ότι το σύνολο:

$$\Gamma[(s_1+s_2)\cap P] = \{ \omega \in Y \mid s_1 z \in (s_1+s_2) \cap P, \text{ για κάθε } z \in \mathrm{Prefix}(\omega) \}$$

είναι ρητό υποσύνολο του Y, για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο P του M.

Θεωρούμε το σύνολο $B(s_1+s_2) = \Gamma[s_1+s_2] \cap A$. Το σύνολο αυτό είναι πεπερασμένο υποσύνολο του Y και σύμφωνα με τον Ορισμό III.6.1 είναι ρητό. Εξάλλου το $(s_1+s_2) \cap P$ είναι μονοσύνολο όταν $s_1 = s_2$ και $P = \{s_1\}$, αλλά τότε έχουμε

$$\Gamma[(s_1+s_1) \cap \{s_1\}] = [B(s_1+s_1)]^*$$

που είναι ρητό σύνολο.

Αν τώρα $P = \{ s_1, s_2, s \}$ τότε

$$\Gamma[(s_1+s_2) \cap P] = B(s_1+s)[B(s+s)]^*B(s+s_2)$$

τό οποίο πάλι είναι ρητό σύνολο. Ας υποθέσουμε τώρα ότι για $\mathrm{card}P < n$ το $\Gamma[(s_1+s_2) \cap P]$ είναι ρητό και ας θεωρήσουμε ένα υποσύνολο P του M με $\mathrm{card}P = n$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) Εστω $s_1, s_2 \in P$. Θεωρούμε ένα στοιχείο ω από το $\Gamma[(s_1+s_2)\cap P]$. Τότε

$$\omega = \chi_1\chi_2\ldots\chi_\kappa\omega' \text{ με } \kappa \geq 0$$

και $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\kappa \in \Gamma[(s_1+s_1)\cap(P\setminus\{s_1\})]$

Ετσι αν $s_1 = s_2$, τότε $\omega' = 1$ και επομένως

$$\Gamma[(s_1+s_1)\cap P] = (\Gamma[(s_1+s_1)\cap(P\setminus\{s_1\})])^*$$

το οποίο λόγω της υποθέσεως που κάναμε στην επαγωγή είναι ρητό.

Αν τώρα $s_1 \neq s_2$ θεωρούμε τη λέξη ψ με το μικρότερο μήκος για την οποία να ισχύει $s_1\psi = s_2$ και $\omega' = \psi z$. Τότε

$$\psi \in \Gamma[(s_1+s_2)\cap(P\setminus\{s_1,s_2\})]$$

$$\omega = \chi_1\chi_2\ldots\chi_\kappa\psi z \quad \mu\varepsilon \quad z \in \Gamma[(s_2+s_2)\cap(P\setminus\{s_1\})]$$

Ετσι έχουμε

$$\Gamma[(s_1+s_2)\cap P] =$$

$$= (\Gamma[(s_1+s_1)\cap(P\setminus\{s_1\})])^*\Gamma[(s_1+s_2)\cap(P\setminus\{s_1,s_2\})]$$

$$\Gamma[(s_2+s_2)\cap(P\setminus\{s_1\})]$$

και συνεπώς το $\Gamma[(s_1+s_2)\cap P]$ είναι ρητό

ii> Εστω s_1, $s_2 \notin P$. Αν $\omega \in \Gamma[(s_1+s_2)\cap P]$ τότε $\omega = \psi\omega' z$ με $\psi, z \in B$ όπου $s_1\psi = s_3$ με $s_3 \neq s_1$, $s_4 z = s_2$ με $s_4 \neq s_2$ και $s_3\omega' = s_4$. Επομένως, $\omega' \in \Gamma[(s_3+s_4)\cap P]$ και συνεπώς

$$\Gamma[(s_1+s_2)\cap P] = \Sigma_{s_3,s_4\in P}\, B(s_1+s_3)\Gamma[(s_3+s_4)\cap P]B(s_4+s_2)$$

Λόγω όμως του <i> το $\Gamma[(s_3+s_4)\cap P]$ είναι ρητό και επομένως το $\Gamma[(s_1+s_2)\cap P]$ είναι ρητό. Εξετάζοντας ομοίως και τις λοιπές περιπτώσεις οδηγούμεθα στην Πρόταση:

Πρόταση 3.1. Το υποσύνολο $\Gamma[(s_1+s_2)\cap P]$ του Υ είναι πάντοτε ρητό.

Αν λοιπόν θεωρήσουμε ότι το σύνολο M είναι το σύνολο S των καταστάσεων ενός αυτομάτου (A,S,s_o,δ,F) και ορίσουμε σε αυτό την υπερπράξη (IV.2.1), δηλαδή το υπεράθροισμα $s_i + s_j$ δύο στοιχείων του S να είναι τα δύο αυτά στοιχεία και το σύνολο των στοιχείων του S που περιέχονται σε καθε δυνατό δρόμο από το s_i στο s_j ενώ να είναι μόνο τα s_i και s_j, όταν δεν υπάρχει τέτοιος δρόμος, τότε, σύμφωνα με την Πρόταση IV.2.1:

Πρόταση 3.2. Το σύνολο των καταστάσεων ενός αυτομάτου εφοδιασμένο με την υπερπράξη (IV.2.1) αποτελεί υπερομάδα.

Αξίζει να σημειωθεί ότι αντίστοιχη προς την ανωτέρω Πρόταση μπορούμε να συμπεράνουμε και για τους κόμβους των προσανατολισμένων γραφημάτων, δηλαδή:

Πρόταση 3.3. Το σύνολο των κόμβων ενός προσανατολισμένου γραφήματος εφοδιάζεται με την δομή της υπερομάδας αν ορίσουμε το υπεράθροισμα $v_i + v_j$, δύο κόμβων v_i, v_j να είναι το σύνολο των κόμβων που υπάρχουν σε όλους τους δυνατούς δρόμους που ενώνουν το v_i με το v_j και αν δεν υπάρχουν τέτοιοι, το δυσύνολο $\{v_i, v_j\}$.

Εχουμε συνεπώς, με την Προταση 3.2, προσαρτήσει στο σύνολο των καταστάσεων ενός αυτομάτου μια υπερομάδα, την οποία ονομάζουμε **προσηρτημένη υπερομάδα των δρόμων**. Η υπερομάδα αυτή θα μας απασχολήσει και στην επόμενη παράγραφο, όπου θα ασχοληθούμε με τις προσηρτημένες υπερομάδες.

Σύμφωνα λοιπόν με την Πρόταση 3.1, αν s_0 είναι η αρχική κατάσταση ενός αυτομάτου $\mathcal{A}$ και s_τ μια τελική κατάσταση του, τότε το $\Gamma[s_0+s_\tau]$ είναι ρητό υποσύνολο του A^*. Αν λοιπόν F είναι το σύνολο των τελικών καταστάσεων του $\mathcal{A}$, τότε το

$$L = \Sigma_{\tau\in F}\, \Gamma[s_0+s_\tau]$$

είναι επίσης ρητό υποσύνολο του A^*. Ομως το L είναι η γλώσσα του αυτομάτου $\mathcal{A}$, επομένως

Πρόταση 3.4. *Η γλώσσα ενός αυτομάτου είναι ρητό υποσύνολο του A^*.*

Επειδή όμως τα ρητά υποσύνολα του A^* προκύπτουν από κανονικές εκφράσεις [70] και κάθε κανονική έκφραση ορίζει ένα ρητό υποσύνολο του A^* αντιλαμβάνεται κανείς αμέσως, ότι η ανωτέρω Πρόταση αποτελεί το ευθύ μέρος του Θεωρήματος του Kleene [25].

Πρέπει όμως στο σημείο αυτό να σημειώσουμε ότι ή Πρόταση 3.4 μπορεί να προκύψει και ως άμεση συνέπεια των Προτάσεων III.6.9 και IV.2.5. Πράγματι έστω το υπερδακτυλιοειδές των λέξεων A^* που ορίζεται από ένα αλφάβητο A, και η γλώσσα $L \subseteq A^*$, ενός αυτομάτου $\mathcal{A}$ με αρχική κατάσταση την s_1 και με F το σύνολο των τελικών του καταστάσεων. Θεωρούμε τα σύνολα:

$$X_i\hat{} = \{ \omega \in A^* \mid s_i\omega \in F \}$$

και θέτουμε:

$$X_i = \begin{cases} X_i\hat{}, & \text{αν } X_i\hat{} \neq \emptyset \\ 0, & \text{αν } X_i\hat{} = \emptyset \end{cases}$$

Ορίζουμε στη συνέχεια τα σύνολα $A_{ij}\hat{}$ ως εξής:

$$A_{ij}\hat{} = \{ \alpha \in A \mid s_i\alpha = s_j \}$$

και θέτουμε

$$A_{ij} = \begin{cases} A_{ij}\hat{}, & \text{αν } A_{ij}\hat{} \neq \emptyset \\ 0, & \text{αν } A_{ij}\hat{} = \emptyset \end{cases}$$

Επίσης ορίζουμε τα B_i ως εξής:

$$B_i = \begin{cases} 0, & \text{αν } s_i \notin F \\ 1, & \text{αν } s_i \in F \end{cases}$$

και στη συνέχεια καταρτίζουμε το επόμενο σύστημα

$$\begin{aligned} X_1 &= A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \dots + A_{1n}X_n + B_1 \\ X_2 &= A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \dots + A_{2n}X_n + B_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_n &= A_{n1}X_1 + A_{n2}X_2 + \dots + A_{nn}X_n + B_n \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τα όσα έχουμε αναφέρει στην IV.2.5 και στην III.6.9 η λύση του συστήματος αυτού υπάρχει και τα $X_1,\dots,X_n$ είναι ρητά υποσύνολα του A^* και ότι κάθε σύνολο X_i είναι (s_i,F)-αποδεκτό υποσύνολο του A^*. Ειδικά η λύση του X_1 είναι η γλώσσα L του αυτομάτου, η οποία συνεπώς είναι ρητό σύνολο.

Εχουμε λοιπόν δώσει δύο αποδείξεις για το ευθύ του Θεωρήματος του Kleene. Ας συγκεντρώσουμε στη συνέχεια μια σειρά από συμπεράσματα που έχουμε μέχρι στιγμής επιτύχει, προκειμένου να αποδείξουμε και το αντίστροφο. Στο Κεφάλαιο IV με την Πρόταση IV.2.7 δείξαμε ότι αν για ένα σύνολο M με τελεστές από ένα τυχόν υπερδακτυλιοειδές Y των οποίων η δράση στο M γίνεται μέσα από μία υπερπράξη και αν το L είναι ένα υποσύνολο του Y αποδεκτό από το M, τότε υπάρχει σύνολο N επί του οποίου η δράση των τελεστών του Y γίνεται μέσα από μία πράξη και τέτοιο ώστε το L να είναι αποδεκτό από το N. Οπως δε φάνηκε από την απόδειξη, αν το M είναι πεπερασμένο, τότε και το N είναι πεπερασμένο. Εχουμε συνεπώς την γνωστή για τα αυτόματα Πρόταση [69]:

Πρόταση 3.5. Για κάθε μη ντετερμινιστικό αυτόματο υπάρχει ντετερμινιστικό αυτόματο που δέχεται την ίδια γλώσσα.

Ακόμη με το Πόρισμα IV.2.1 αποδείξαμε ότι αν τα M_1 και M_2 είναι σύνολα με τελεστές από ένα Δ-υπερδακτυλιοειδές Y και τα L_1, L_2 είναι υποσύνολα του Y αποδεκτά από τα M_1 και M_2 αντίστοιχα, τότε υπάρχει σύνολο M με τελεστές από το Y, τέτοιο ώστε το $L_1 + L_2$ να είναι αποδεκτό από το M. Αν μάλιστα τα M_1 και M_2 είναι πεπερασμένα, τότε και το M είναι πεπερασμένο. Από αυτό προκύπτει άμεσα η γνωστή για τα αυτόματα Πρόταση:

Πρόταση 3.6. Αν L_1 και L_2 είναι οι γλώσσες δύο αυτομάτων M_1 και M_2, τότε υπάρχει αυτόματο M που να δέχεται ως γλώσσα το $L_1 \cup L_2$.

Εξάλλου σύμφωνα με το Πόρισμα IV.2.2 αν τα L_1 και L_2 είναι υποσύνολα ενός υπερδακτυλιοειδούς Y, αποδεκτα από πεπερασμένα σύνολα M_1 και M_2, τότε το L_1L_2 είναι αποδεκτό απο ένα πεπερασμένο σύνολο. Επομένως

Πρόταση 3.7. Αν L_1 και L_2 είναι οι γλώσσες δύο αυτομάτων M_1 και M_2 τότε υπάρχει αυτόματο M που δέχεται ως γλώσσα την L_1L_2.

Από την απόδειξη της Πρότασης IV.2.8 βλέπουμε ότι αν τα M_1

και M_2 της ανωτέρω Πρότασης είναι ντετερμινιστικά αυτόματα, τότε το αυτόματο που δέχεται ώς γλώσσα το L_1L_2 δεν είναι ντετερμινιστικό. Ομως όπως προκύπτει από τις Προτάσεις 3.5 και IV.2.7, από ένα μη ντετερμινιστικό αυτόματο μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ντετερμινιστικό αυτόματο που να δέχεται την ίδια γλώσσα με το μη ντετερμινιστικό, οπότε υπάρχει ντετερμινιστικό αυτόματο που να δέχεται ως γλώσσα το γινόμενο των γλωσσών δύο ντετερμινιστικών αυτομάτων.

Τέλος, στην Πρόταση IV.2.11 δείξαμε ότι αν ένα υποσύνολο L του Y είναι αποδεκτό από ένα πεπερασμένο σύνολο M, τότε το L^* είναι επίσης αποδεκτό υποσύνολο του Y από ένα πεπερασμένο σύνολο N. Επομένως προκύπτει η

Πρόταση 3.8. *Αν L είναι η γλώσσα ενός αυτομάτου M τότε υπάρχει αυτόματο N που δέχεται ως γλώσσα την L^*.*

Είναι γνωστό από την Θεωρία των Αυτομάτων ότι κάθε πεπερασμένο σύνολο λέξεων αποτελεί γλώσσα ενός αυτομάτου. Συνεπώς από τις ανωτέρω Προτάσεις 3.5 - 3.8 προκύπτει η

Πρόταση 3.9. *Κάθε ρητό υποσύνολο του A^* είναι δεκτό από ένα αυτόματο.*

Η ανωτέρω Πρόταση αποτελεί το αντίστροφο του θεωρήματος του Kleene [25] και επομένως από τις Προτάσεις 3.4 και 3.9 έχουμε:

Θεώρημα του Kleene Ενα υποσύνολο του A^* είναι δεκτό από ένα αυτόματο A, αν και μόνον αν ορίζεται από μια κανονική έκφραση.

—4—

ΑΥΤΟΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΣΗΡΤΗΜΕΝΕΣ ΥΠΕΡΟΜΑΔΕΣ

Στην προηγουμένη παράγραφο και συγκεκριμένα με την Πρόταση 3.2 εφοδιάσαμε το σύνολο των καταστάσεων του αυτομάτου με την δομή της υπερομάδας, εισάγοντας σε αυτό μια κατάλληλη υπερπράξη. Ετσι προσαρτήσαμε στο αυτόματο μια υπερομάδα, την οποία λόγω του τρόπου ορισμού της, την αποκαλέσαμε προσηρτημένη υπερομάδα των δρόμων και η οποία μας οδήγησε στην απόδειξη του Θεωρήματος του Kleene. Το σύνολο όμως των καταστάσεων ενός αυτομάτου μπορεί να εφοδιασθεί και με άλλες υπερπράξεις, με αποτέλεσμα να ορισθούν και άλλες προσηρτημένες υπερομάδες οι οποίες με τη σειρά τους μας οδηγούν επίσης σε αξιοσημείωτα συμπεράσματα της θεωρίας των αυτομάτων.

Εστω λοιπόν $M = (A,S,s_o,\delta,F)$ ένα αυτόματο, ντετερμινιστικό ή μή. Εισάγουμε την ακόλουθη έννοια:

Ορισμος 4.1. Ονομάζουμε τάξη μιας κατάστασης $s \in S$ και τη συμβολίζουμε με ord s τον φυσικό αριθμό l, όπου το l είναι το ελάχιστο μήκος λέξης που μας οδηγεί από την αρχική κατάσταση s_o στην s.

Προφανώς $\text{ord } s_o = 0$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4.1.

Είναι δυνατόν σε ένα αυτόματο να υπάρχουν καταστάσεις στις οποίες να μην είναι δυνατή η μετάβαση με καμμία λέξη, από την αρχική κατάσταση. Επειδή οι καταστάσεις αυτές δεν έχουν καμμία απολύτως σημασία για την λειτουργία του αυτομάτου, θεωρούμε ότι σε αυτές η τάξη δεν ορίζεται. Σε ότι ακολουθεί θεωρούμε αυτόματα στα οποία η τάξη κάθε κατάστασης ορίζεται.

Μέσω της έννοιας της τάξεως ορίζουμε στο σύνολο S των καταστάσεων την **ισοδυναμία τάξεως** O ως εξής:
Για $s_1, s_2 \in S$ είναι:

$$s_1 \; O \; s_2, \text{ αν } \text{ord } s_1 = \text{ord } s_2$$

(βλ. και [40]).

Η ισοδυναμία αυτή μέσα στο σύνολο των καταστάσεων έχει τις ακόλουθες ιδιότητες που οδηγούν σε μία κατάλληλη γενίκευση:

i) Τό σύνολο των κλάσεων είναι ισόμορφο προς ένα απόκομμα του N (ή δυνατόν με επέκταση του ορισμού του αυτομάτου και προς το ίδιο το N)

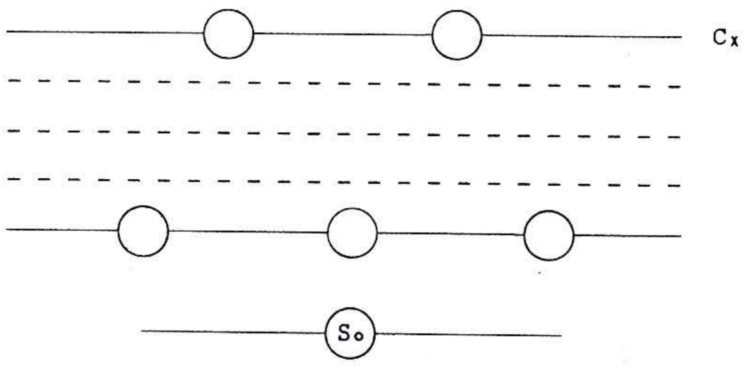
και επομένως

ii) Το σύνολο των κλάσεων mod O είναι ολικά διατεταγμένο.

iii) Υπάρχει ελαχιστική κλάση

iv) Κάθε κλάση καλύπτει μιάν άλλη εκτός από την αρχική που δεν καλύπτει καμμιά.

Αν λοιπόν θεωρήσουμε ένα σύνολο S και μιά σχέση ισοδυναμίας R σ' αυτό που να πληροί τις πιό πάνω ιδιότητες μπορούμε μέσω αυτής και της ιδιότητος (i) να ορίσουμε τάξη των στοιχείων $\chi \in S$ την τάξη της αντίστοιχης κλάσης της R, που είναι ο αντίστοιχος φυσικός αριθμός βάσει του θεωρουμένου ισομορφισμού. Υποθέτουμε ακόμη ότι η ελάχιστη κλάση του S ως προς την ισοδυναμία είναι μονοστοιχειακή. Τό σύνολο λοιπόν S μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει την παρακάτω σχηματική παράσταση:



όπου C_x συμβολίζει τη κλάση του S αναφορικά προς την R που περιέχει το $\chi \in S$.

Εν συνεχεία παρατηρούμε ότι είναι δυνατόν μέσω της εννοίας αυτής της τάξης να εισάγουμε στο S (άρα και στο σύνολο των καταστάσεων [40]) υπερσυνθετική δομή και μάλιστα κατά διάφορους τρόπους, ορίζοντας κατάλληλα υπερπράξεις σ' αυτό. Παραθέτουμε μερικές περιπτώσεις που παρέχουν διάφορους τύπους α ν τ ι μ ε τ α θ ε τ ι κ ώ ν (εξ ορισμού) υπερομάδων.

Πράγματι αν για κάθε χ, ψ ∈ S ορίσουμε:

1η.

$$\chi + \psi = \begin{cases} \psi, & \text{αν } \operatorname{ord} x < \operatorname{ord} \psi \\ \bigcup_{\operatorname{ord} z \leq \operatorname{ord} x} C_z, & \text{αν } \operatorname{ord} x = \operatorname{ord} \psi \end{cases}$$

η προκύπτουσα δομή (S,+) αποτελεί κανονική πολυσυμμετρική υπερομάδα [57] με ουδέτερο στοιχείο το ελαχιστικό στοιχείο του S (η αρχική κατάσταση) και στην οποία για κάθε $\chi \in S$ είναι $S(x) = C_x$, άρα και $\chi \in S(x)$ (αυτοαντίθετο, και όπου $S(x)$ το συμμετρικό σύνολο του χ)

2η. Αν στον πιό πάνω ορισμό τεθεί αντί $\leq$ η διάταξη υπό στενή έννοια <, δηλαδή αν

$$\chi + \chi' = \bigcup_{\operatorname{ord} z < \operatorname{ord} x} C_z \qquad \text{γιά } \chi' \in C_x$$

η δομή τότε (S,+) δεν είναι υπερομάδα παρά μόνο αν το S είναι ολικά διατεταγμένο, διότι πράγματι για να ισχύει η προσεταιριστικότητα

$$(\chi + \chi) + \chi' = \chi + (\chi + \chi')$$

για κάθε $\chi \in S$ και $\chi' \in C_x$, θα έχουμε

$$\bigcup_{\operatorname{ord} w < \operatorname{ord} x} C_w + x' = x + \bigcup_{\operatorname{ord} z < \operatorname{ord} x} C_z$$

άρα $\chi = \chi'$ και επομένως $C_x = \{ x \}$. Εχουμε τότε την εξόχως κανονική υπερομάδα [55], [56] με

$$\chi + \psi = \begin{cases} \max \{x, \psi\}, & \text{αν } \chi \neq \psi \\ [s_o, \chi[, & \text{αν } \chi = \psi \end{cases}$$

Αυτό λοιπόν συμβαίνει όταν οι καταστάσεις αποτελούν αλυσίδα.

3η.

$$\chi + \psi = \begin{cases} \psi, & \text{αν } \operatorname{ord} x < \operatorname{ord} \psi \\ \bigcup_{o \neq \operatorname{ord} z < \operatorname{ord} x} C_z & \text{όταν } \operatorname{ord} x = \operatorname{ord} \psi \\ & \text{και } s_o \neq \chi \neq \psi \neq s_o \\ \bigcup_{\operatorname{ord} z \leq \operatorname{ord} x} C_z & \text{όταν } \chi = \psi \end{cases}$$

εχουμε τότε κανονική υπερομάδα με αυτοαντίθετα στοιχεία.

4η.

$$\chi + \psi = \begin{cases} C_\psi, & \text{αν } \operatorname{ord} x < \operatorname{ord} \psi \\ \bigcup_{\operatorname{ord} z \leq \operatorname{ord} x} C_z, & \text{αν } \operatorname{ord} x = \operatorname{ord} \psi \end{cases}$$

η δομή $(S,+)$ είναι γενικευμένη κανονική πολυσυμμετρική υπερομάδα [57] με μη βαθμωτό ουδέτερο στοιχείο το s_o και στην οποία για κάθε $\chi \in S$ το $S(x) = C_x$.

5η. Αν στον πιό πάνω ορισμό και για την περίπτωση $\operatorname{ord} x \neq \operatorname{ord} \psi$ τεθεί

$$\chi + \psi = C_\psi, \quad \text{αν } s_o \neq \operatorname{ord} x < \operatorname{ord} \psi$$

και προστεθεί για κάθε $\chi \in S$

$$s_o + \chi = \chi + s_o = \chi$$

η δομή είναι τότε και πάλι κανονική πολυσυμμετρική υπερομάδα με $S(x) = C_x$

6η.
$$\chi + \psi = \begin{cases} C_\psi, & \text{αν } \operatorname{ord} x = \operatorname{ord} \psi \\ \bigcup_{\operatorname{ord} z \leq \operatorname{ord} \psi} C_z, & \text{αν } \operatorname{ord} x < \operatorname{ord} \psi \end{cases}$$

έχουμε επίσης γενικευμένη κανονική πολυσυμμετρική υπερομάδα με μη βαθμωτό ουδέτερο στοιχείο το s_o και στην οποία για κάθε $\chi \in S$, $\chi \neq 0$, είναι $S(x) = S \setminus C_x$.

Αν στον Ορισμό αυτό, αντί, στην περίπτωση $\operatorname{ord} x \neq \operatorname{ord} \psi$, να είναι $\operatorname{ord} z \leq \max(\operatorname{ord} x, \operatorname{ord} \psi)$, ληφθεί $\operatorname{ord} z \leq \min(\operatorname{ord} x, \operatorname{ord} \psi)$ το υπερμονοειδές δεν πληροί την αναπαραγωγικότητα και επομένως η υπερπράξη δεν οδηγεί σε υπερομάδα.

7η.
$$\chi + \psi = \begin{cases} C_\psi, & \text{αν } 0 \neq \operatorname{ord} x < \operatorname{ord} \psi \\ \bigcup_{0 \neq \operatorname{ord} z \leq \operatorname{ord} x} C_z, & \text{όταν } \operatorname{ord} x = \operatorname{ord} \psi \\ & \text{και } s_o \neq \chi \neq \psi \neq s_o \\ \bigcup_{\operatorname{ord} z \leq \operatorname{ord} x} C_z, & \text{όταν } s_o \neq \chi = \psi \end{cases}$$

και $s_o + \chi = \chi + s_o = \chi$ για κάθε $\chi \in S$

τότε η υπερδομή είναι κανονική υπερομάδα με αυτοαντίθετα στοιχεία.

Τις πιο πάνω υπερομάδες θα τις ονομάζουμε **προσηρτημένες υπερομάδες τάξης του αυτομάτου**. Από τις πιό πάνω περίπτωσεις ξεχωρίζουμε την 2η, 3η και 7η στις οποίες η υπερσυνθετική δομή (S,+) είναι κανονική υπερομάδα.

Η υπερομάδα αυτή στην περίπτωση 2 είναι, όπως είναι γνωστό [55], [56], ως εξόχως κανονική, υπερδιατιμημένη με τιμές της υπερδιατιμήσεως μέσα στο ίδιο το S, ή, λόγω του ισομορφισμού με υποσύνολο του N, μέσα στο R (άρα διατιμημένη) και συγκεκριμένα, αν $||\chi||$ η διατίμηση του $\chi \in S$, $||\chi|| = \text{ord } x$.

Για τις περιπτώσεις 3 και 7 (όπως άλλωστε προκύπτει και για την 2) η απεικόνιση:

$$d : S \times S \longrightarrow R$$

τέτοια ώστε

$$d(x, \psi) = \begin{cases} \max\{\text{ord } x, \text{ord } \psi\}, & \text{για } \chi \neq \psi \\ 0, & \text{για } \chi = \psi \end{cases}$$

είναι προφανώς μιά υπεραπόσταση στο S [για την οποία δηλαδή, ισχύουν οι:

$d(x,x) = 0$, $d(x,\psi) = d(\psi,x)$, $d(x,\psi) \leq \max\{ d(x,z), d(z,\psi) \}$ για κάθε χ, ψ, $z \in S$] και πρέπει να εξεταστεί αν πληροί τις συνθήκες h_1 και h_2 των διατιμημένων (αυστηρώς ή ασθενώς) – ή και υπερδιατιμημένων – κανονικών υπερομάδων [49], όπως πιό κάτω. Ετσι

---

1 Μία κανονική υπερομάδα (H,+) λέγεται **εξόχως κανονική** όταν είναι ισχυρώς κανονική και επαληθεύει και επιπλέον τις συνθήκες:

S_1: Γιά κάθε $\chi,\psi,z,\omega \in H$ τέτοια ώστε $0 \notin \chi + \psi$ και $z,\omega \in \chi + \psi$, να έχουμε $z - z = \omega - \omega$

S_2: Αν $\chi \in z - z$ και $\psi \notin z - z$, τότε $\chi - \chi \subseteq \psi - \psi$

λέγεται δε **ισχυρώς κανονική** όταν

F_1: Γιά κάθε $\chi,\psi,z,\omega \in H$ τέτοια ώστε $(\chi + \psi) \cap (z + \omega) \neq \emptyset$, νά έχουμε ή $\chi + \psi \subseteq z + \omega$ ή $z + \omega \subseteq \chi + \psi$

F_2: Αν για $\chi,\psi \in H$ έχουμε $\chi \in \chi + \psi$, τότε $\chi + \psi = \chi$

I. Για την περίπτωση 3.

α) Για την h_1 ή h_1':

Ελέγχεται καταρχήν αν για κάθε χ, ψ ∈ S το άθροισμα χ + ψ είναι κύκλος του υπερμετρικού χώρου (S, d).

Οι υπερομάδες αυτές είναι στενά συνδεδεμένες με τις **διατιμημένες** και **υπερδιατιμημένες** (ασθενώς ή ισχυρώς) **κανονικές υπερομάδες**. Παραθέτουμε στοιχεία από τη σχετική θεωρία [29], [45], [46], [48], [49], [50], [55], [56], [59].

Ονομάζουμε **υπερμετρική απόσταση** ή και **υπεραπόσταση** επί ενός συνόλου E κάθε απεικόνιση $d : E \times E \longrightarrow R_+$ που επαληθεύει τις συνθήκες:

i) $d(\chi, \chi) = 0$, αν και μόνο αν $\chi = \psi$

ii) $d(\chi, \psi) = d(\psi, \chi)$

iii) $d(\chi, \psi) \le \max \{ d(\chi, z), d(\psi, z) \}$ για κάθε $\chi, \psi, z \in E$

Αν στον ορισμό αυτό, αντί του R_+ έχουμε τυχόν ολικώς διατεταγμένο σύνολο Ω με ελαχιστικό στοιχείο (συμβολιζόμενο με 0), μιλούμε τότε για **υπερυπερμετρική απόσταση** ή **υπερυπεραπόσταση**. Το ζεύγος (E, d) λέγεται κατά περίπτωση **υπερμετρικός** ή **υπερυπερμετρικός χώρος**.

Μιά κανονική υπερομάδα (H,+) λέγεται **διατιμημένη**, αντιστ. **υπερδιατιμημένη**, αν είναι εφοδιασμένη με μία υπεραπόσταση, αντιστ. υπερυπεραπόσταση d, που επαληθεύει επιπλέον τις συνθήκες:

h_1: Για κάθε $\chi, \psi \in H$, το υπεράθροισμα $\chi + \psi$ είναι κύκλος του χώρου (H, d) με ακτίνα ανάλογη προς το $\max \{ d(0, \chi), d(0, \psi) \}$.

h_2: Για κάθε $\chi, \psi, \alpha \in H$ τέτοια ώστε $(\chi + \alpha) \cap (\psi + \alpha) = \emptyset$ είναι: $d(\chi + \alpha, \psi + \alpha) = d(\chi, \psi)$

(όπου, αν A και B δύο υποσύνολα του H, η $d(A, B) = \{ d(a, b) \mid (a, b) \in A \times B \}$).

Η υπεραπόσταση, αντιστ. υπερυπεραπόσταση, $d(0, \chi)$, συμβολιζόμενη με $|\chi|$ (ή, όταν υπάρχει κίνδυνος να δημιουργηθεί σύγχυση, και με $||\chi||$) λέγεται **διατίμηση**, αντίστ. **υπερδιατίμηση**, του χ και η απεικόνιση $|.| : H \longrightarrow \overline{R_+}$, αντίστ. $|..| : H \longrightarrow \Omega$ **διατίμηση**, αντιστ. **υπερδιατίμηση**, της H συσχετισμένη με την υπεραπόσταση, αντίστ. υπερυπεραπόσταση, d.

Η αναλογικότητα της ακτίνας του κύκλου $\chi + \psi$ προς το $\max \{ |\chi|, |\psi| \}$, που αναφέρεται στο h_1, εκφράζεται

Εστω ord x < ord ψ. Είναι τότε χ + ψ = ψ = C(ψ, 0) κύκλος κέντρου ψ και με γνήσια ακτίνα 0. Επειδή 0 ∉ χ + ψ η ημιπραγματική ακτίνα r θα είναι:

$$r \leq d(0, \psi) = \text{ord } \psi = \rho \max\{d(0, x), d(0, \psi)\}$$

και η μέγιστη τιμή της θα είναι προφανώς ή για ρ = 1 ή για $\rho = 1^-$.

Για ρ = 1 τα στοιχεία z ∈ S με d(ψ, z) = ord ψ για ord z ≤ ord ψ (άρα και το 0) ανήκουν στον κύκλο C (ψ, ord ψ) και άρα το χ + ψ δεν είναι ο κύκλος αυτός.

στην περίπτωση υπερμετρικής αποστάσεως (διατιμήσεως) με την ύπαρξη ενός **ημιπραγματικού αριθμού** ρ > 0 είδους 0 ή -, δηλαδή ενός στοιχείου του συνόλου $S = \overline{R} \times \{ -, 0, + \} \setminus \{ (-\infty, +), (+\infty, -) \}$ (που συμπίπτει με την κατά Kurepa "πλήρωση" του $\overline{R}$). Εχουμε επομένως χ + ψ = { z, ρmax {|χ|, |ψ|} } για κάθε χ,ψ ∈ H και όπου z ∈ χ + ψ τυχόν (στους υπερμετρικούς και υπερυπερμετρικούς χώρους κάθε σημείο κύκλου είναι και κέντρο του). Η αναλογικότητα αυτή στην περίπτωση υπερυπερμετρικής απόστασης (υπερδιατιμήσεως) εκφράζεται με την ύπαρξη μιάς κατάλληλης απεικόνισης ρ : Ω ---> Ω˙, που είναι αύξουσα υπό ευρεία έννοια και τέτοια ώστε ρ0 = 0 και όπου Ω˙ το "συμπλήρωμα" Kurepa του Ω.

Εκτός από την διατίμηση αυτή, αντίσ. υπερδιατίμηση, ορίζεται στην H και άλλη χαρακτηριζόμενη ως **ασθενής** (οπότε, προς αντιδιαστολή, η προηγούμενη λέγεται και **ισχυρή**). Ετσι: Μιά κανονική υπερομάδα (H,+) λέγεται **ασθενώς διατιμημένη**, αντιστ. **ασθενώς υπερδιατιμημένη**, όταν είναι εφοδιασμένη με μιά υπερμετρική, αντιστ. υπερυπερμετρική, απόσταση d, που πληροί και πλέον τις συνθήκες:

h_1': Γιά κάθε χ,ψ ∈ H το άθροισμα χ + ψ είναι κύκλος του (H, d).

$h_2' \equiv h_2$

$h_3' \equiv f_2$

Αποδεικνύεται ότι κάθε **ισχυρώς υπερδιατιμημένη κανονική υπερομάδα είναι εξόχως κανονική, και αντιστρόφως**

Κάθε δε ασθενώς υπερδιατιμημένη είναι ισχυρώς κανονική, και αντιστρόφως.

Για $\rho = 1^-$ τα στοιχεία $z \neq \psi$ με $\text{ord } z \geq \text{ord } \psi$, οπότε $d(\psi, z) = \text{ord } z$ προφανώς δεν ανήκουν στον κύκλο (αν υπάρχουν τέτοια). Αλλά και για εκείνα για τα οποία $\text{ord } z < \text{ord } \psi$ επίσης δεν ανήκουν, διότι για τα τελευταία αυτά είναι $d(\psi, z) = \text{ord } \psi > (\text{ord } \psi)^-$ αντιφατικό. Είναι άρα

$$\chi + \psi = C(\psi, \rho \max \{d(0, x), d(0, \psi)\}$$

με $\rho = 1^-$.

Αν τώρα $\text{ord } \chi = \text{ord } \psi$ τότε επειδή $\chi \in \chi + \psi$ γιά κάθε $z \in C(\chi, \text{ord } \chi)$ είναι $d(\chi, z) \leq \text{ord } \chi$, άρα $\text{ord } z \leq \text{ord } \chi$ και επομένως

$$C(x, \text{ord } \chi) = \{z \in S : \text{ord } z \leq \text{ord } \chi\} = \chi + \psi$$

είναι ώστε στην περίπτωση αυτή

$$\chi + \psi = C(z, \rho \max \{d(0,x), d(0, \psi)\})$$

με $\rho = 1$ και οποιοδήποτε $z \in \chi + \psi$. Αρα το αξίωμα h_1' πληρούται, δηλαδή $\chi + \psi$ κύκλος του (S,d), όχι όμως το h_1, δηλαδή κύκλος $\chi + \psi = C(z, \rho\max\{ d(0, x), d(0, \psi) \})$ με $z \in \chi + \psi$ τυχόν, επειδή δεν υπάρχει ενιαίος συντελεστής αναλογικότητας ρ, αλλά είναι κατά περίπτωση $\rho = 1$ και $\rho = 1^-$

β) Για το h_2:

Για κάθε $\chi, \psi, \alpha \in S$ τέτοια ώστε

$$(\chi + \alpha) \cap (\psi + \alpha) = \emptyset$$

είναι

$$d(\chi + \alpha, \psi + \alpha) = d(\chi, \psi).$$

Πληρούται πράγματι και αυτό. Διότι από τη σχέση $(\chi + \alpha) \cap (\psi + \alpha) = \emptyset$ συνεπάγεται ότι αποκλείεται να είναι $\max \{\text{ord } x, \text{ord } \psi\} \leq \text{ord } \alpha$, όπως επίσης και η περίπτωση $\text{ord } \alpha < \text{ord } x = \text{ord } \psi$. Οι μόνες αρα δυνατές περιπτώσεις είναι

$$\text{ord } \alpha < \text{ord } x < \text{ord } \psi$$

και

$$\text{ord } x < \text{ord } \alpha < \text{ord } \psi$$

και οι προκύπτουσες με εναλλαγή των χ και ψ, για τις οποίες εύκολα συμπεραίνεται το ζητούμενο.

Προκύπτει ότι η κανονική υπερομάδα $(S, +)$ είναι ασθενώς διατιμημένη. Η συσχετισμένη προς την υπεραπόσταση d υπερδιατίμηση για κάθε $\chi \in S$ είναι:

$$|\chi| = d(0, x) = \text{ord } x$$

και ισχύει ότι

$$0 \notin \chi + \psi \Longrightarrow d(x, \psi) = |\chi + \psi|$$

(όπου, προφανώς, αν $A \subseteq S$, $|A| = \{ |z| \in R : z \in A \}$).

II. Για την περίπτωση 7

Παρατηρούμε αμέσως ότι, όταν $\text{ord } x < \text{ord } \psi$ το άθροισμα $\chi + \psi = C_\psi$ δεν είναι κύκλος παρά μόνο όταν το $C_\psi = \{\psi\}$. Διότι άν ήταν η ημιπραγματική του ακτίνα θα ήταν η ord ψ, που αποκλείεται για τον ίδιο όπως πιό πάνω λόγο, ή $(\text{ord } \psi)^-$, οπότε κανένα $z \neq \psi$ δεν θα υπάρχει στον κύκλο $C(\psi, (\text{ord } \psi)^-)$ και θα είναι, άρα, $C(\psi, (\text{ord } \psi)^-) = \{\psi\}$.

Προκύπτει λοιπόν ότι από τις τρείς περιπτώσεις που η δομή $(S, +)$ είναι κανονική υπερομάδα, στις 2 και 3 ορίζεται διατίμηση και έτσι οδηγούμαστε στις ακόλουθες για τη θεωρία των αυτομάτων προτάσεις:

Πρόταση 4.1. Αν το σύνολο S των καταστάσεων ενός αυτομάτου είναι ολικά διατεταγμένο, τότε αυτό με την ακόλουθη εξ ορισμού αντιμεταθετική υπερπράξη:

$$s_1 + s_2 = \begin{cases} \max\{s_1, s_2\}, & \text{αν } s_1 \neq s_2 \\ [0, s[, & \text{αν } s_1 = s_2 = s \end{cases}$$

είναι αυστηρώς διατιμημένη κανονική υπερομαδα.

Πρόταση 4.2. Σε κάθε αυτόματο το σύνολο S των καταστάσεων αποτελεί ασθενώς διατιμημένη κανονική υπερομάδα αν εφοδιαστεί με την εξής, εξ ορισμού αντιμεταθετική, υπερπράξη:

$$s_1 + s_2 = \begin{cases} s_2, & \text{αν } \operatorname{ord} s_1 < \operatorname{ord} s_2 \\ \bigcup_{0 \neq \operatorname{ord} s < \operatorname{ord} s_1} C_s & \text{αν } \operatorname{ord} s_1 = \operatorname{ord} s_2 \\ & \text{και } 0 \neq s_1 \neq s_2 \neq 0 \\ \bigcup_{\operatorname{ord} s \leq \operatorname{ord} s_1} C_s & \text{αν } s_1 = s_2 \end{cases}$$

Πρόταση 4.3. Και στις δύο πιο πάνω περιπτώσεις η υπεραπόσταση στο S είναι η απεικόνιση

$$d : S \times S \longrightarrow R_+$$

με

$$d(s_1, s_2) = \begin{cases} \max\{\operatorname{ord} s_1, \operatorname{ord} s_2\}, & \text{αν } s_1 \neq s_2 \\ 0, & \text{αν } s_1 = s_2 \end{cases}$$

και η συσχετισμένη προς αυτή υπερδιατίμηση

$$|\ | : S \longrightarrow R_+, \quad \text{για κάθε } s \in S$$

$$|s| = d(0, s) = \operatorname{ord} s$$

Ισχύει επίσης

$$d(s_1, s_2) = |s_1 - s_2| = |s_1 + s_2|$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4.2

Και στις δύο πιο πάνω περιπτώσεις κανονικών υπερομάδων ουδέτερο στοιχείο είναι η αρχική κατάσταση (εδεχομένως η συμβατική) και κάθε κατάσταση είναι αυτοαντίθετη.

Στη συνέχεια εισάγουμε την ακόλουθη νέα έννοια, τη β ά θ μ ί δ α, συμβ. grad s μιας κατάστασης s ενός αυτομάτου: (βλ. και [40])

Ορισμός 4.2. Εστω s μια κατάσταση ενός αυτομάτου (A,S,s_0,δ,F). Θα ονομάζουμε **βάθμίδα της κατάστασης** το σύνολο

$$\text{grad } s = \{ x \in A^* \mid sx \in F \}$$

Παρατηρούμε ότι grad $s_i = X_i\hat{}$, σύμφωνα με τον ορισμό του $X_i\hat{}$ στην παράγραφο 3, και επομένως το grad s_i είναι το (s_i,F)-αποδεκτό υποσύνολο του Y. Προκύπτει συνεπώς ότι το grad s_0 είναι η γλώσσα του αυτομάτου.

Στό σύνολο τώρα των καταστάσεων S ενός αυτομάτου ορίζουμε την σχέση R ως εξής:

$$s_1 R s_2 \quad \text{όταν} \quad \text{grad } s_1 = \text{grad } s_2$$

Η σχέση αυτή αποτελεί προφανώς μία σχέση ισοδυναμίας επί του S. Εστω δε $C(s)^R = C_s^R$ η κλάση του S ως προς την R η περιέχουσα την κατάσταση s. Επί του S θεωρούμε τώρα την υπερπράξη "+" (I.1.4) της πρότασης I.1.8, δηλαδή:

$$s_1 + s_2 = C_{s1}^R \cup C_{s2}^R$$

Οπότε η δομή (S,+) σύμφωνα με την αναφερθείσα πρόταση είναι μιά συνδετική υπερομάδα. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το θεωρούμενο αυτόματο (A,S,s_o,δ,F) έχει μία μόνο τελική κατάσταση, την s_T, (ή το εφοδιάζουμε με μία συμβατική τέτοια). Τότε στο S ορίζουμε την υπερπράξη "+" με τον ακόλουθο τρόπο:

$$s_1 + s_2 = \begin{cases} C_{s1}^R \cup C_{s2}^R & \text{άν } C_{s1}^R \neq C_{s2}^R \\ & \text{και } s_1,\ s_2 \neq s_T \\ C_{s1}^R \cup \{s_T\} & \text{άν } C_{s1}^R = C_{s2}^R \end{cases}$$

Τότε η υπερομάδα (S,+) γίνεται συνδετική πολυσυμμετρική. Την υπερομάδα αυτή θα την ονομάσουμε **προσηρτημένη υπερομάδα βαθμίδας του αυτομάτου.**

Η έννοιες της τάξης και της βαθμίδας σχετίζονται άμεσα με την δημιουργία του ελάχιστου αυτομάτου, το οποίο δέχεται την ίδια γλώσσα με το αρχικό. Ετσι άν σε ένα αυτόματο υπάρχουν δύο καταστάσεις με την ιδία βαθμίδα, μας είναι ουσιαστικά αδιάφορο σε πια απο τις δύο αυτές καταστάσεις ευρισκόμεθα προκειμένου να φθάσουμε στην τελική κατάσταση. Συνεπώς αν σε ένα αυτόματο η προσηρτημένη υπερομάδα βαθμίδας είναι πολυσυμμετρική τότε σύμφωνα με τα όσα αναφέραμε στην Πρόταση IV.1.4, μπορούμε από την πολυσυμμετρική αυτή υπερομάδα να κατασκευάσουμε μια Ε.Σ.Υ. και το αυτόματο το οποίο έχει την τελευταία αυτή υπερομάδα ως προσηρτημμένη θα έχει λιγότερες καταστάσεις από το αρχικό και θα δέχεται την ίδια γλώσσα με αυτό. Αν μάλιστα θεωρήσουμε την προσηρτημένη υπερομάδα βαθμίδας, μόνο επί του συνόλου των καταστάσεων των οποίων η τάξη ορίζεται, τότε το αυτόματο αυτό θα είναι το ελάχιστο.

Ενας άλλος τρόπος ελαχιστοποίησης του αυτομάτου μπορεί να προέλθει με τη χρήση της σχέσης ισοδυναμίας R_L που ορίσθηκε στο κεφάλαιο III. Πράγματι, στο προηγούμενο κεφάλαιο με την Πρόταση IV.2.12 αν το M είναι ένα Y-υπερμοντουλοειδές και L ένα αποδεκτό από το M υποσύνολο του Y, τότε υπάρχει μιά σχέση ισοδυναμίας R στο Y ως προς την οποία το L είναι μιά ένωση κλάσεων. Η σχέση ισοδυναμίας R ορίστηκε με την βοήθεια της συνάρτησης φ_s. Συγκεκριμένα οι αντίστροφες εικόνες $\varphi_s^{-1}(s_i)$ ορίζουν μία διαμέριση επί του Y από την οποία προκύπτει η σχέση ισοδυναμίας σε αυτό. Αν η φ_s δεν είναι επί του M, τότε $\varphi_s^{-1}(s_i) = \emptyset$ για κάθε $s_i \notin \mathrm{Im}\varphi_s$. Επομένως εν γένει έχουμε:

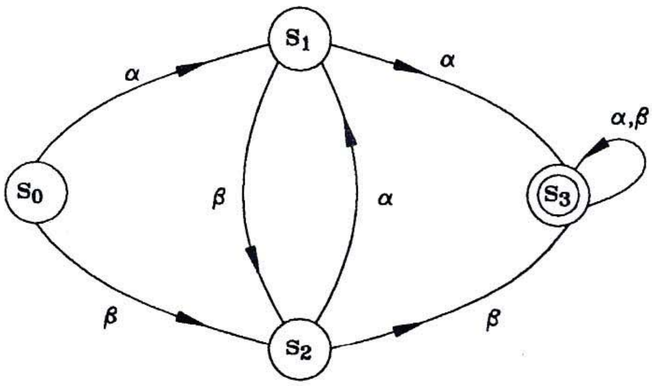
$$rk(R) \leq \mathrm{card}\, M$$

Ετσι αν το M είναι το σύνολο των καταστάσεων ενός αυτομάτου, το οποίο σύμφωνα με το Παράδειγμα IV.2.1 μπορεί να θεωρηθεί ως ένα Δ-υπερμοντουλοειδές, τότε υπάρχει μιά σχέση ισοδυναμίας R στο γλωσσικό υπερδακτυλιοειδές ως προς την οποία η γλώσσα του αυτομάτου να είναι μιά ένωση απο κλάσεις της και μάλιστα, σύμφωνα με τα όσα αναφέραμε ανωτέρω, αυτή θα έχει μικρότερο, ή το πολύ ίσο αριθμό κλάσεων από αυτόν των καταστάσεων του αυτομάτου. Εξάλλου, από τις Προτάσεις IV.2.13 και IV.2.14 προκύπτει ότι αυτή η σχέση ισοδυναμίας μπορεί να ορίσει ένα αυτόματο, και συγκεκριμένα το Y/R το οποίο να δέχεται την ίδια γλώσσα με το M. Επειδή δε, σύμφωνα με την Πρόταση IV.2.14, για την R_L ισχύει

$rk(R_L) \leq rk(R)$, έπεται ότι το υπερμοντουλοειδές Y/R_L είναι το ελάχιστο υπερμοντουλοειδές το οποίο δέχεται την L ως γλώσσα.

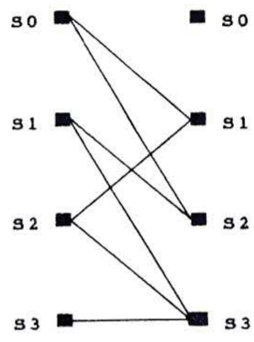
Σε όλες τις ανωτέρω περιπτώσεις οι προσηρτημένες υπερομάδες αφορούσαν το σύνολο των καταστάσεων του αυτομάτου. Ομως η λειτουγία ενός αυτομάτου εμπεριέχει και τον παράγοντα του χρόνου. Ετσι στη συνέχεια θα αναζητήσουμε μια υπερομάδα η οποία να περιγράφει κατά κάποιο τρόπο το αυτόματο σε λειτουργία.

Πράγματι, ας θεωρήσουμε ένα αυτόματο (A,S,s_0,δ,F), για παράδειγμα αυτό του σχήματος 1.



Σχήμα 1

Θα λέμε ότι η κατάσταση s_j είναι **διαδοχική** της s_i αν υπάρχει $\chi \in A$ έτσι ώστε $\delta(s_i, \chi) = s_j$. Είναι προφανές ότι αν η s_j είναι διαδοχική της s_i δεν έπεται ότι και η s_i είναι διαδοχική της s_j (χωρίς όμως να αποκλείεται). Ετσι με το παρακάτω διάγραμμα φαίνονται οι διαδοχικές καταστάσεις του ανωτέρω αυτομάτου.

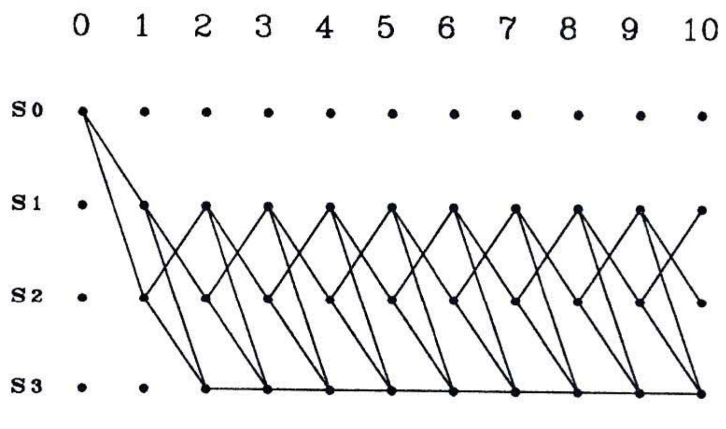


Σχήμα 2

Θα λέμε ακόμη ότι η κατάσταση s_j είναι **συνδεδεμένη** με την κατάσταση s_i αν υπάρχει λέξη $\chi \in A^*$ τέτοια ώστε $\delta^*(s_i, \chi) = s_j$.

Το αυτόματο αρχίζει πάντα τη λειτουργία του από την αρχική κατάσταση s_0 και διαβάζοντας σε κάθε χρονική στιγμή από ένα γράμμα μεταφέρεται στην επόμενη διαδοχική κατάσταση. Είναι όμως δυνατόν το αυτόματο κατά τη διάρκεια της λειτουργίας του να βρεθεί στην ίδια κατάσταση σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Ετσι για παράδειγμα το αυτόματο του σχήματος 1 μπορεί να βρεθεί στην κατάσταση s_1 με τη λέξη α, με τη λέξη βα, με τη λέξη αβα κ.ο.κ. Δηλαδή στην κατάσταση s_1 μπορεί να βρεθεί κατά την πρώτη χρονική στιγμή της λειτουργίας του, κατά την δεύτερη, κατά την τρίτη κ.ο.κ.

Για να περιγράψουμε στη συνέχεια τη λειτουργία ενός αυτομάτου, μπορούμε να θεωρήσουμε το καρτεσιανό γινόμενο S x N όπου S το σύνολο των καταστάσεων του αυτομάτου και N το σύνολο των μη αρνητικών ακεραίων. Θα χρησιμοποιούμε τη γραφή si^k για να συμβολίσουμε το διατεταγμένο ζεύγος (si, k) που καταδεικνύει την κατάσταση si στην χρονική στιγμή k. Η γραφική παράσταση αυτών των διατεταγμένων ζευγών μπορεί να γίνει με το παρακάτω διάγραμμα το οποίο αναφέρεται στο αυτόματο του σχήματος 1. Στο διάγραμμα αυτό που ο οριζόντιος άξονας, ο οποίος είναι το N, παριστάνει τις χρονικές στιγμές, ενώ ο κατακόρυφος άξονας τις καταστάσεις, έχουμε ενώσει όλες τις διαδοχικές καταστάσεις μέχρι τη χρονική στιγμή 10.



Σχήμα 3

Από το διάγραμμα αυτό παρατηρούμε ότι, κάθε χρονική στιγμή, μας ενδιαφέρουν οι καταστάσεις στις οποίες είναι δυνατόν να βρεθεί το αυτόματο. Ετσι εισάγουμε τον ορισμό:

Ορισμός 4.3. Ενα στοιχείο si^t του καρτεσιανού γινομένου SxN ονομάζεται **ενεργοποιούμενο**, αν την χρονική στιγμή t το αυτόματο μπορεί να βρεθεί στην κατάσταση si.

Οταν θέλουμε να τονισθεί ιδαιτέρως η χρονική στιγμή ενεργοποίησης, τότε προτάσουμε τη χρονική στιγμή και μιλάμε για **t-ενεργοποιούμενο** στοιχείο.

Ας συμβολίσουμε στη συνέχεια με E το σύνολο των ενεργοποιούμενων στοιχείων. Στο σύνολο αυτό γενικεύονται οι έννοιες των συναρτήσεων δ και δ* θέτοντας

$$\delta_E(si^t,x) = \delta(si,x)^{t+1}$$

και

$$\delta_E^*(si^t,x) = \delta^*(si,x)^{t+|x|}$$

Στη συνέχεια θα λέμε ότι το στοιχείο sj^r είναι **διαδοχικό** του si^t αν η κατάσταση sj είναι διαδοχική της si και r=t+1. Ακόμη θα λέμε ότι το στοιχείο sj^r είναι **συνδεδεμένο** με το si^t αν η κατάσταση sj είναι συνδεδεμένη με την κατάσταση si και $t<r$. Ετσι καθίσταται προφανές ότι στην περίπτωση ενός ντετερμινιστικού αυτομάτου δύο t-ενεργοποιούμενα στοιχεία δεν μπορεί να είναι συνδεδεμένα.

Στο σύνολο των ενεργοποιούμενων στοιχείων παρατηρούμε ότι τα στοιχεία είναι δυνατόν:

α) να μην συνδέονται μεταξύ τους

(όπως για παράδειγμα οι $s2^1$ και $s2^2$ του σχ. 3).

β) να συνδέονται μεταξύ τους με μία λέξη

(όπως για παράδειγμα οι s_1^1 και s_3^3 του σχ. 3).

γ) να συνδέονται μεταξύ τους με περισσότερες από μία λέξεις

(όπως για παράδειγμα οι s_0^0 και s_3^4 του σχ. 3).

Οι παρατηρήσεις αυτές μας οδηγούν στο να εισάγουμε επί του συνόλου E των ενεργοποιούμενων στοιχείων του καρτεσιανού γινομένου SxN μια υπερπράξη "+", άμεσα σχετιζόμενη με την υπερπράξη (IV.2.1), ως εξής:

$$s_i^m + s_j^n = \begin{cases} \{\delta_E^*(s_i^m,x) \mid x \in \mathrm{Prefix}(r),\ \delta_E^*(s_i^m,r)=s_j^n\} & \text{αν το } s_j^n \text{ είναι συνδεδεμένο με το } s_i^m \\ \{\, s_i^m,\ s_j^n \,\} & \text{αν το } s_j^n \text{ δεν είναι συνδεδεμένο με το } s_i^m \end{cases}$$

Η υπερπράξη αυτή είναι προσεταιριστική. Πράγματι έστω ότι τα στοιχεία s_j^n και s_k^p είναι συνδεδεμένα με το s_i^m και το s_k^p με το s_j^n και έστω $m<n<p$. Τότε

$(s_i^m + s_j^n) + s_k^p =$

$= \{\ \delta_E^*(s_i^m,x) \mid x \in \mathrm{Prefix}(r),\ \delta_E^*(s_i^m,r)=s_j^n\ \} \ + \ s_k^p \ =$

$= \{\ \delta_E^*(\ \delta_E^*(s_i^m,x),\ y\ ) \mid x \in \mathrm{Prefix}(r),\ \delta_E^*(s_i^m,r)=s_j^n,$

$y \in \mathrm{Prefix}(q),\ \delta_E^*(\ \delta_E^*(s_i^m,x),\ q\ )=s_k^p\ \} =$

$= \{\ \delta_E^*(s_i^m,v) \mid v \in \mathrm{Prefix}(w),\ \delta_E^*(s_i^m,w)=s_k^p\ \}$

Εξάλλου

$s_i^m + (s_j^n + s_k^p) =$

$= s_i^m + \{\ \delta_E^*(s_j^n,x) \mid x \in \mathrm{Prefix}(r),\ \delta_E^*(s_j^n,r)=s_k^p\ \} =$

$= \{\ \delta_E^*(s_i^m,z) \mid z \in \mathrm{Prefix}(u),\ \delta_E^*(s_i^m,u) = s_k^p$ ή

$\delta_E^*(s_i^m,u) = \delta_E^*(s_j^n,x),\ x \in \mathrm{Prefix}(r),\ \delta_E^*(s_j^n,r)=s_k^p\ \} =$

$= \{ \delta_E^*(s_i^m,v) \mid v \in \mathrm{Prefix}(w),\ \delta_E^*(s_i^m,w)=s_k^p \}$

Εστω στη συνέχεια ότι τα στοιχεία s_i^m, s_j^n και s_i^m, s_k^p είναι μεταξύ τους συνδεδεμένα ενώ τα s_j^n, s_k^p δεν είναι. Τότε

$(s_i^m + s_j^n) + s_k^p =$

$= \{ \delta_E^*(s_i^m,x) \mid x \in \mathrm{Prefix}(r),\ \delta_E^*(s_i^m,r)=s_j^n \} + s_k^p$

$= (s_i^m + s_j^n) + (s_i^m + s_k^p)$

Εξάλλου

$s_i^m + (s_j^n + s_k^p) = s_i^m + \{ s_j^n,\ s_k^p \} =$

$= (s_i^m + s_j^n) + (s_i^m + s_k^p)$

Αν τώρα τα στοιχεία s_i^m, s_j^n είναι μεταξύ τους συνδεδεμένα ενώ το s_k^p δεν συνδέεται με κανένα από τα δύο, τότε

$(s_i^m + s_j^n) + s_k^p =$

$= \{ \delta_E^*(s_i^m,x) \mid x \in \mathrm{Prefix}(r),\ \delta_E^*(s_i^m,r)=s_j^n \} + s_k^p$

Ομως το στοιχείο s_k^p δεν συνδέεται με κανένα από τα $\delta_E^*(s_i^m,x)$ γιατί αν συνέβαινε κάτι τέτοιο τότε το s_i^m, θα ήταν συνδεδεμένο με το s_k^p, πράγμα άτοπο. Ετσι έχουμε

$(s_i^m + s_j^n) + s_k^p =$

$= \{ \delta_E^*(s_i^m,x) \mid x \in \mathrm{Prefix}(r),\ \delta_E^*(s_i^m,r)=s_j^n \} \cup \{ s_k^p \}$

Εξάλλου

$s_i^m + (s_j^n + s_k^p) = s_i^m + \{s_j^n,\ s_k^p\} =$

$= (s_i^m + s_j^n) + (s_i^m + s_k^p) =$

$= \{ \delta_E^*(s_i^m,x) \mid x \in \mathrm{Prefix}(r),\ \delta_E^*(s_i^m,r)=s_j^n \} \cup \{ s_k^p \}$

Τέλος αν τα στοιχεία s_i^m, s_j^n, s_k^p δέν είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους, τότε

$(s_i^m + s_j^n) + s_k^p = \{s_i^m,\ s_j^n\} + s_k^p =$

$= (s_i^m + s_k^p) \cup (s_j^n + s_k^p) = \{ s_i^m,\ s_j^n,\ s_k^p\}$

Ομοίως

$s_i^m + (s_j^n + s_k^p) = \{ s_i^m, s_j^n, s_k^p\}$

Ακόμη για κάθε στοιχείο s_i^m από το Ε ισχύει

$s_i^m + E = E + s_i^m = E$

και συνεπώς έχουμε την Πρόταση

Πρόταση 4.4. *Το σύνολο Ε των ενεργοποιούμενων στοιχείων του καρτεσιανού γινομένου SxN, όπου S το σύνολο των καταστάσεων ενός αυτομάτου, αποτελεί υπερομάδα αν σ' αυτό εισαχθεί η υπερπράξη "+" πού ορίσθηκε ανωτέρω.*

Ομως η υπερπράξη αυτή δεν είναι αντιμεταθετική και επομένως ορίζονται δύο επαγόμενες υπερπράξεις [39], οι ":" και "..", για τις οποίες έχουμε:

$$s_i^m : s_j^n = \begin{cases} \{s_k^p \mid \exists\, x \in A^* \text{ έτσι ώστε } \delta_E^*(s_k^p, x) = s_i^m\} \\ \quad \text{αν } m<n \text{ και τα } s_i^m,\ s_j^n \text{ είναι συνδεδεμένα} \\ \{ s_i^m \} \\ \quad \text{αν τα } s_i^m,\ s_j^n \text{ δεν είναι συνδεδεμένα} \end{cases}$$

$$s_i^m .. s_j^n = \begin{cases} \{s_k^p \mid \exists\, x \in A^* \text{ έτσι ώστε } \delta_E^*(s_j^n, x) = s_k^p\} \\ \quad \text{αν } m>n \text{ και τα } s_i^m,\ s_j^n \text{ είναι συνδεδεμένα} \\ \{ s_i^m \} \\ \quad \text{αν τα } s_i^m,\ s_j^n \text{ δεν είναι συνδεδεμένα} \end{cases}$$

Ετσι παρατηρούμε ότι η υπερομάδα (Ε, +) δεν πληροί το συνδετικό αξίωμα.

Στη συνέχεια θα δούμε έναν αλγόριθμο με τη βοήθεια του οποίου μπορούμε να υπολογίσουμε το αποτέλεσμα της υπερπράξης που ορίστηκε παραπάνω, μπορούμε δηλαδή να βρούμε αν το s_i^t είναι t-ενεργοποιούμενο στοιχείο και από ποιά ενδιάμεσα στοιχεία έχει περάσει το αυτόματο μέχρι να φτάσει στό s_i^t. Πράγματι, η διαδικασία έχει ως εξής:

Αρχικά ορίζεται ο "πίνακας δυνατών καταστάσεων" Πδ, ο οποίος είναι ένας nxn πίνακας, που έχει στήλες τις n καταστάσεις του αυτομάτου και γραμμές επίσης τις n καταστάσεις του αυτομάτου. Κάθε στοιχείο $\pi\delta_{ij}$ αυτού του πίνακα υπολογίζεται από τον κανόνα:

$$\pi\delta_{ij} = \begin{cases} \text{η κατάσταση } s_j\text{, αν είναι δυνατόν το αυτόματο να φτάσει σε αυτήν την κατάσταση την επόμενη χρονική στιγμή, ξεκινώντας από την κατάσταση } s_i. \\ 0 \text{ σε κάθε άλλη περίπτωση.} \end{cases}$$

Στη συνέχεια ορίζεται ο "πίνακας της πρώτης χρονικής στιγμής" Π[1], ο οποίος είναι επίσης nxn, που έχει στήλες τα στοιχεία s_i^1, i=1,2,...,n και γραμμές τα στοιχεία s_i^0, i=1,2,...,n, δηλαδή τα στοιχεία της προηγούμενης χρονικής στιγμής. Κάθε θέση $\pi 1_{ij}$ αυτού του πίνακα γεμίζει σύμφωνα με τον κανόνα:

$$\pi 1_{ij} = \begin{cases} \text{η κατάσταση } s_o{}^o s_j{}^1\text{, αν είναι δυνατόν το αυτόματο} \\ \text{να φτάσει στην κατάσταση } s_j \text{ την πρώτη χρονική} \\ \text{στιγμή.} \\ 0 \text{ σε κάθε άλλη περίπτωση.} \end{cases}$$

Στον πίνακα Π[1] μόνο η γραμμή του στοιχείου $s_o{}^o$ αναμένεται να έχει θέσεις διάφορες του μηδενός, γιατί σε αυτή τη φάση το αυτόματο ξεκινά την λειτουργία του προφανώς από την κατάσταση s_o.

Τέλος ο πίνακας κάθε επόμενης χρονικής στιγμής προκύπτει από τον πίνακα της προηγούμενης χρονικής στιγμής με την βοήθεια του Πδ. Ετσι για την i γραμμή του "πίνακα της t χρονικής στιγμής" Π[t], [ο οποίος έχει n στήλες (τα στοιχεία $s_i{}^t$, i=1,2,...,n) και n γραμμές (τα στοιχεία $s_i{}^{t-1}$, i=1,1,...,n)] έχουμε:

- Προέρχεται από την i στήλη του πίνακα Π[t-1] και την i γραμμή του Πδ.
- Εχει παντού μηδέν αν ολόκληρη η i γραμμή του Πδ ή ολόκληρη η i στήλη του Π[t-1] είναι μηδέν, διαφορετικά:
- Εχει μηδέν σε όλες τις θέσεις που υπάρχει μηδέν στην i γραμμή του Πδ και
- Σε κάθε μία από τις υπόλοιπες θέσεις γράφεται το σύνολο των δρόμων που προκύπτει αν στο τέλος κάθε δρόμου ο οποίος αναγράφεται σε ολόκληρη τη στήλη (ανεξαρτήτως θέσεως) του πίνακα Π[t-1] γραφεί το στοιχείο που προκύπτει από την

κατάσταση, η οποία αναφέρεται στην συγκεκριμμένη θέση του πίνακα Πδ, την χρονική στιγμή t.

Οπως φαίνεται στην διαδικασία κατασκευής του πίνακα Π[t], σε κάθε θέση του μπορεί να υπάρχουν περισσότεροι από ένας δρόμοι. Επίσης η θέση στην οποία θα αναγραφεί το κάθε ένα από τα σύνολα των δρόμων που προκύπτουν, όπως περιγράφεται παραπάνω, καθορίζεται από την αντίστοιχη θέση της κατάστασης στον πίνακα Πδ, η οποία θα αποτελέσει το τελευταίο στοιχείο του δρόμου.

Ακόμα σημειώνεται ότι:

- Το αντίστοιχο στοιχείο s_i^t στην στήλη του πίνακα Π[t], η οποία έχει παντού 0, είναι ένα μή ενεργοποιούμενο στοιχείο.
- Το αντίστοιχο στοιχείο s_j^t στην γραμμή του πίνακα Π[t], η οποία έχει παντού 0, είναι ένα μή ενεργοποιούμενο στοιχείο.
- Τα αντίστοιχα στοιχεία στις θέσεις του ο Π[t] έχει μηδενικά είναι μη συνδεδεμένα στοιχεία.

Αν εφαρμόσουμε τα παραπάνω στο αυτόματο που έχουμε θεωρήσει στο Σχήμα 1, ο πίνακας Πδ είναι ο ακόλουθος:

Πδ =

	s0	s1	s2	s3
s0	0	s1	s2	0
s1	0	0	s2	s3
s2	0	s1	0	s3
s3	0	0	0	s3

Επίσης οι 4 πρώτοι πίνακες είναι οι:

Π[1] =

	s_0^1	s_1^1	s_2^1	s_3^1
s_0^0	0	$s_0^0 s_1^1$	$s_0^0 s_2^1$	0
s_1^0	0	0	0	0
s_2^0	0	0	0	0
s_3^0	0	0	0	0

Π[2] =

	s_0^2	s_1^2	s_2^2	s_3^2
s_0^1	0	0	0	0
s_1^1	0	0	$s_0^0 s_1^1 s_2^2$	$s_0^0 s_1^1 s_3^2$
s_2^1	0	$s_0^0 s_2^1 s_1^2$	0	$s_0^0 s_2^1 s_3^2$
s_3^1	0	0	0	0

Π[3] =

	s_0^3	s_1^3	s_2^3	s_3^3
s_0^2	0	0	0	0
s_1^2	0	0	$s_0^0 s_2^1 s_1^2 s_2^3$	$s_0^0 s_2^1 s_1^2 s_3^3$
s_2^2	0	$s_0^0 s_1^1 s_2^2 s_1^3$	0	$s_0^0 s_1^1 s_2^2 s_3^3$
s_3^2	0	0	0	$s_0^0 s_1^1 s_3^2 s_3^3$ $s_0^0 s_2^1 s_3^2 s_3^3$

Π[4]=

	s_0^4	s_1^4	s_2^4	s_3^4
s_0^3	0	0	0	0
s_1^3	0	0	$s_0^0 s_1^1 s_2^2 s_1^3 s_2^4$	$s_0^0 s_1^1 s_2^2 s_1^3 s_3^4$
s_2^3	0	$s_0^0 s_2^1 s_1^2 s_2^3 s_1^4$	0	$s_0^0 s_2^1 s_1^2 s_2^3 s_3^4$
s_3^3	0	0	0	$s_0^0 s_2^1 s_1^2 s_3^3 s_3^4$ $s_0^0 s_1^1 s_2^2 s_3^3 s_3^4$ $s_0^0 s_1^1 s_3^2 s_3^3 s_3^4$ $s_0^0 s_2^1 s_3^2 s_3^3 s_3^4$

Ερμηνεύοντας τα αποτελέσματα πχ. του πίνακα Π[4] βλέπουμε ότι κατά την τέταρτη χρονική στιγμή της λειτουργίας του το αυτόματο του παραδείγματος μπορεί να βρεθεί:

- στην κατάσταση s_1 έχοντας ακολουθήσει το δρόμο $s_0s_2s_1s_2s_1$,
- στην κατάσταση s_2 έχοντας ακολουθήσει το δρόμο $s_0s_1s_2s_1s_2$,
- στην κατάσταση s_3 έχοντας ακολουθήσει έναν από τους δρόμους: $s_0s_1s_2s_1s_3$, ή $s_0s_2s_1s_2s_3$, ή $s_0s_2s_1s_3s_3$, ή $s_0s_1s_2s_3s_3$, ή $s_0s_1s_3s_3s_3$, ή $s_0s_2s_3s_3s_3$.

Ετσι τα 4-ενεργοποιούμενα στοιχεία αποτελούν το σύνολο $\{s_1{}^4, s_2{}^4, s_3{}^4\}$ και τα αποτέλεσμα της υπερπράξης πχ. $s_0{}^0 + s_1{}^4$ είναι:

$s_0{}^0 + s_1{}^4 = \{s_0{}^0, s_2{}^1, s_1{}^2, s_2{}^3, s_1{}^4\}$, ενώ

$s_1{}^2 + s_1{}^4 = \{s_1{}^2, s_2{}^3, s_1{}^4\}$

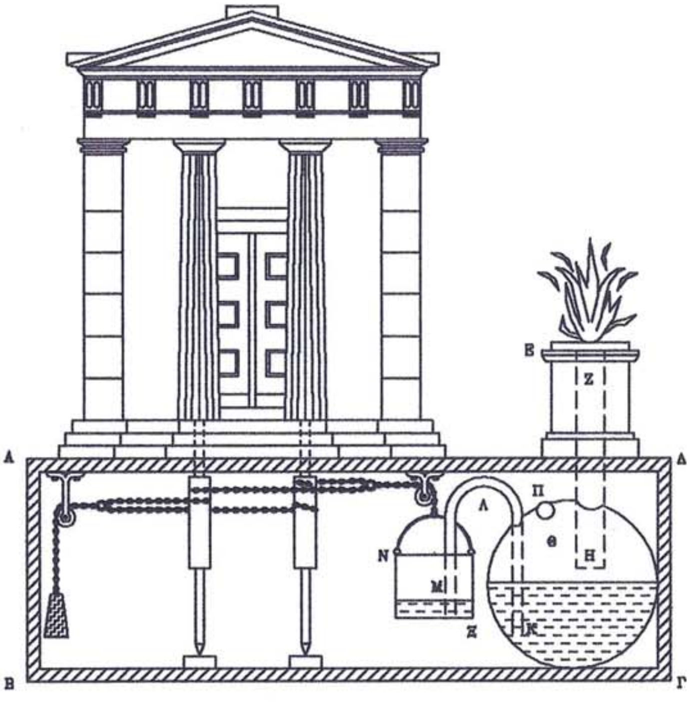
NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS

DEPARTMENT OF ELECTRICAL ENGINEERING
AND COMPUTER ENGINEERING

AUTOMATA – LANGUAGES
&
HYPERCOMPOSITIONAL STRUCTURES

DOCTORAL THESIS

GERASIMOS G. MASSOUROS



ATHENS 1993

ABSTRACT

In this dissertation the Theory of Hypercompositional Structures is being introduced into the Theory of Automata and Languages. Beyond the already known hypercompositional structures such as the join hypergroup, that in a natural way appear into the Theory of Automata and Languages, other, new ones (like the fortified join hypergroup, the hyperringoid, the hypermoduloid etc.), come into being, for the first time, and they are being studied as well.

More specifically, this dissertation consists of five chapters. The **First Chapter** proves the association of the theory of languages with the theory of hypercompositional structures. Indeed, in the theory of languages the

expression $\chi+\psi$ is used, where χ, ψ are words over an alphabet A, to state "either χ or ψ". Thus, beginning with the fact that $\chi+\psi$ is basically a biset, the set of the words A^* over an alphabet A, endowed with the hypercomposition $w_1+w_2 = \{w_1, w_2\}$ becomes, as it is being proved here, a join hypergroup. Furthermore, combining the above with the fact that A^* is a semigroup with regard to the concatenation of the words, A^* is endowed with a new hypercompositional structure, the hyperringoid.

A **hyperringoid** is a non void set Y with an operation "." and a hyperoperation "+" that satisfy the axioms: [Def.III.1.1, p.94]

i. (Y, +) is a hypergroup
ii. (Y, .) is a semigroup
iii. the operation is bilaterally distributive to the hyperoperation.

If (Y, +) is a join hypergroup, then the hyperringoid is called **join hyperringoid.**

The special join hypergroup which derives in this way from the theory of languages, is named B-hypergroup, and the respective hyperringoid, B-hyperringoid. In particular, in the first paragraph of this chapter, apart from the connection of the languages to B-hypergroups, the general properties of B-hypergroups are being studied.

The join sub-hypergroups are being introduced and studied in the second paragraph. A **join sub-hypergroup** is a sub-hypergroup of a join hypergroup that satisfies the join axiom inside it [Def.I.2.1, p.14].

In the third paragraph of this chapter the homomorphic relations, the homomorphic equivalence relations are being introduced and studied along with the several types of homomorphisms.

In the **Second Chapter**, starting with the notion of the empty set of words from the theory of languages, the join hypergroup is being enriched with axioms and so a new hypercompositional structure is being introduced. Actually, the use of the "**null word**" has led to the introduction of a non scalar neutral element in the join hypergroup with regard to which, every element has a unique opposite. Thus the **fortified join hypergroup** was defined. This new hypercompositional structure (H, +) satisfies the axioms: [Def.II.1.1, p.37]

FJ_1 There exists a u n i q u e neutral element, denoted 0, -the zero element of H- such that for every $x \in H$:

$$x \in x + 0 \quad \text{and} \quad 0 + 0 = 0$$

FJ_2 For every $x \in H\backslash\{0\}$ there exists one and only one element $x' \in H\backslash\{0\}$ -opposite or symmetrical of x- denoted by $-x$, such that

$$0 \in x + x'$$

Especially for the case of languages, the fortified join hypergroup which corresponds to them and which motivated the development of this new structure is the **dilated B-hypergroup**. In this hypergroup every element is self opposite. More precicely the hypercomposition of this structure is being defined in the following way:

$$x + y = \begin{cases} \{x, y\} & \text{if } x \neq y \\ \{0, x\} & \text{if } x = y \end{cases}$$

The second chapter consists of four paragraphs. The first paragraph deals with the relation of the fortified join hypergroups to the theory of languages, and examins several of their fundamental properties. Among them it is worth mentioning that, as it is being proved, they consist of two kinds of elements, the **canonical** and the **attractive elements**, that is, those elements for which $\chi + 0 = \chi$ (c-elements), or $\chi + 0 = \{\chi, 0\}$ (a-elements) holds respectively. It is especially being notified that the dilated B-hypergroup consists only of a-elements.

In the beginning of the next paragraph the property of reversibility is studied, and it is being proved partially valid. Other properties follow. It is remarkable that it is being proved that the equality $-(\chi-\chi) = \chi-\chi$ does not hold in general and therefore two kinds of elements are being defined: the **normal** for which the above equality is valid and the **abnormal** for which it is not valid. It is being proved that the c-elements are normal, while the dilated B-hypergroup consists only of normal elements.

The third paragraph refers to the sub-hypergroups of the fortified join hypergroup, and especially to the join and the symmetrical ones. The definition of the join sub-hypergroup has been given above, while **symmetrical** is a sub-hypergroup which contains the opposite of every one of its elements. Among other properties it is being proved

that every join sub-hypergroup is symmetrical and that the minimum join sub-hypergroup is the sub-hypergroup which consists of all the a-elements and the 0 element (and it is equal to 0:0). Therefore the fortified join hypergroups that contain only a-elements do not have proper join sub-hypergroups. Also it is being proved that symmetrical sub-hypergroups which are not join, consist only of a-elements.
The fourth paragraph contains the monogene symmetrical sub-hypergroups. Among the aspects being studied are the definitions of the order and the attached order. The properties of all these sub-hypergroups are being studied in depth in these two paragraphs.

The **Third Chapter** refers to the hyperringoids. As it has already been mentioned, the set of the words over an alphabet A is a monoid with regard to the concatenation of the words. Beyond that, it is being proved that this operation is bilaterally distributive as for the hyper-composition defined in the set of words. Thus in a natural way, there derived the multiplicative-hyperadditive structure which was named **hyperringoid**. The hyperringoid of all the words is a special, join hyperringoid which was named **B-hyperringoid** or **dilated B-hyperringoid**, depending on the additive hypergroup which is being used. This chapter consists of six paragraphs.
The first paragraph refers to the relation between hyperringoids and languages and also to some fundamental

that every join sub-hypergroup is symmetrical and that the minimum join sub-hypergroup is the sub-hypergroup which consists of all the a-elements and the 0 element (and it is equal to 0:0). Therefore the fortified join hypergroups that contain only a-elements do not have proper join sub-hypergroups. Also it is being proved that symmetrical sub-hypergroups which are not join, consist only of a-elements.

The fourth paragraph contains the monogene symmetrical sub-hypergroups. Among the aspects being studied are the definitions of the order and the attached order. The properties of all these sub-hypergroups are being studied in depth in these two paragraphs.

The **Third Chapter** refers to the hyperringoids. As it has already been mentioned, the set of the words over an alphabet A is a monoid with regard to the concatenation of the words. Beyond that, it is being proved that this operation is bilaterally distributive as for the hyper-composition defined in the set of words. Thus in a natural way, there derived the multiplicative-hyperadditive structure which was named **hyperringoid**. The hyperringoid of all the words is a special, join hyperringoid which was named **B-hyperringoid** or **dilated B-hyperringoid**, depending on the additive hypergroup which is being used. This chapter consists of six paragraphs.

The first paragraph refers to the relation between hyperringoids and languages and also to some fundamental properties of this structure.

In the second paragraph the **fortified hyperringoids** are being studied, that is those hyperringoids in which the additive part is a fortified join hypergroup. These structures present many and interesting properties, one of them being that the equality $(-\chi)(-\psi) = \chi\psi$ is generally not valid in them.

The third paragraph refers to the characteristic of the hyperringoids. It is being proved that every proper normal fortified hyperringoid without divisors of 0, is of characteristic 1 and therefore every dilated B-hyperringoid is of characteristic 1.

The fourth paragraph refers to the sub-hyperringoids. One of the conclusions that have been reached here is that the set of the a-elements and 0, form a bilaterally join hyperideal which is the minimum join sub-hyperringoid of the fortified hyperringoid and that every symmetrical sub-hyperringoid is a subset of the minimum join sub-hyperringoid.

The fifth paragraph refers to the homomorphic relations, which have significant applications to the deductions we arrive at, in the fifth chapter.

Finally in the sixth paragraph elementary equations, systems and "inequalities" are being solved and the notion of the **rational subset** of a hyperringoid is being introduced.

The **Fourth Chapter**, which consists of two paragraphs refers to other hypercompositional structures that are in close relation to the theory of automata. In the first paragraph the **join polysymmetrical hypergroup** (J.P.H) is being defined and studied. A J.P.H. is a join hypergroup that additionally satisfies the axioms: [Def.IV.1.1, p.148]

JP_1 There exists a u n i q u e neutral element, denoted 0, -the zero element of H- such that for every $x \in H$:

$$x \in x + 0 \quad \text{and} \quad 0 + 0 = 0$$

JP_2 For every $x \in H\backslash\{0\}$ there exists at least one element $x' \in H\backslash\{0\}$ -opposite or symmetrical of x- denoted by $-x$, such that: $0 \in x + x'$

Here appear several of its fundamental properties while it is being proved that there exist three kinds of J.P.H. regarding the reversibility. Furthermore examples are given for each kind.

The second paragraph refers to sets with operators and hyperoperators from hyperringoids. It is being proved that if in a set M the set of operators forms a hyperringoid, then M can be endowed with a certain hypercomposition and thus acquire the structure of the hypergroup. Therefore the set of the states of an automaton acquires the structure of a certain hypergroup, since the operators of the set of states is a hyperringoid, the B-hyperringoid of the language. Next the notions of the hypermoduloid and the supermoduloid are being defined, i.e. [Def.IV.2.3, p. 162] if M is a hypergroup and Y is a hyperringoid of operators over M such that:

$$\text{i.} \quad (s + t)\lambda = s\lambda + t\lambda$$

$$\text{ii.} \quad s(\lambda + \kappa) \subseteq s\lambda + s\kappa$$

$$\text{iii.} \quad s(\lambda\kappa) = (s\lambda)\kappa$$

for every κ, $\lambda \in Y$ and s, $t \in M$, then M is named **hypermoduloid** over Y. In the case that Y is a set of hyperoperators, M is called **supermoduloid.** If Y is a fortified hyperringoid and M a fortified join hypergroup, then M is called **join hypermoduloid**, resp. **join supermoduloid** if in addition to the above, the next axiom holds:

iv. $s0 = 0$, resp. iv'. $0 \in s0$

Also the notion of the (s,F)-acceptable subset of the set of operators from M, is being introduced and the properties of such sets are being studied. Thus [Def.IV.2.4, p.165] a subset L of Y becomes **(s,F)-acceptabe** from M, (or simply is (s,F)-acceptable) if there exists $s \in M$ and $F \subseteq M$ (in the case of external operation) or $F \subseteq P(M)$ (in the case of external hyperoperation), such that: $\varphi_s^{-1}(F) = L$, where φ_s is a function from Y to M (or P(M) in the case of hyperoperation) for which $\varphi_s(\lambda) = s\lambda$.

It worth mentioning that, as it has been proved here, if M is a finite set with cardM = n and Y a B-hyperringoid then for any given F the acceptable from M subsets of Y are the solution of an $n \times n$ system which is being defined and solved here.

In the **Fifth Chapter**, after a brief review of all the conclusions that have been reached up to this point on the theory of languages and automata, several aspects of this theory are being viewed through the theory of hypercompositional structures and are being proved with the use of tools and methods developed in the previous chapters.

More precicely the fifth chapter consists of four paragraphs.

The first paragraph deals with a special kind of B-hyperringoid, the linguistic hyperringoid. Every language is a subset of a linguistic hyperringoid and therefore the study of its properties can be achieved through the study of the corresponding hyperringoid. Thus in this paragraph appear results regarding a relation of great importance in the theory of languages, the equivalence of length. Next, the significance of the null word in automata is being mentioned, when and where it appears and what derives from it. Also the extent of its involvement in the formation of a rational subset of the hyperringoid of operators which is (s,F)-acceptable from a finite set M, and thus in the definition of the language that is acceptable by an automaton is being shown.

The second paragraph refers to the relation of the hypercompositional structures that have already been introduced, to systems endowed with internal memory and external inputs of data. The set of the conditions that cause such a system to move from state to state can acquire the structure of a linguistic hyperringoid and this leads to several interesting results. As an a example of a linguistic hyperringoid we present the linguistic hyperringoid which is defined by a JK flip-flop. On the other hand, as it has already been proved in the previous chapters, quotients of hyperringoids with homomorphic equivalence relations define hypermoduloids. Thus a counter, which is the quotient of the

More precicely the fifth chapter consists of four paragraphs.

The first paragraph deals with a special kind of B-hyperringoid, the linguistic hyperringoid. Every language is a subset of a linguistic hyperringoid and therefore the study of its properties can be achieved through the study of the corresponding hyperringoid. Thus in this paragraph appear results regarding a relation of great importance in the theory of languages, the equivalence of length. Next, the significance of the null word in automata is being mentioned, when and where it appears and what derives from it. Also the extent of its involvement in the formation of a rational subset of the hyperringoid of operators which is (s,F)-acceptable from a finite set M, and thus in the definition of the language that is acceptable by an automaton is being shown.

The second paragraph refers to the relation of the hypercompositional structures that have already been introduced, to systems endowed with internal memory and external inputs of data. The set of the conditions that cause such a system to move from state to state can acquire the structure of a linguistic hyperringoid and this leads to several interesting results. As an a example of a linguistic hyperringoid we present the linguistic hyperringoid which is defined by a JK flip-flop. On the other hand, as it has already been proved in the previous chapters, quotients of hyperringoids with homomorphic equivalence relations define hypermoduloids. Thus a counter, which is the quotient of the

linguistic hyperringoid of the natural numbers by the equivalence relation mod n is presented as an example. Next, using conclusions that have been reached in the previous chapters, the theorem of Nerode is being proved.
In chapter IV has been proved that a set M with operators from a hyperringoid Y, can be endowed, using its operators, with the structure of the hypergroup. In the paragraph which follows, considering M to be the set of states of an automaton, the **attached hypergroup of the paths** is being defined. Also it is being proved that certain subsets of the hyperringoid, defined through the hyperoperation in M, are rational. This approach, apart from other results, leads to the proof of the theorem of Kleene.
In the last paragraph the set of states of an automaton is being endowed with several hyperoperations, which give the structure of the hypergroup to it. These **attached hypergoups**, describe its structure while some of them, the **attached order hypergroup** and the **attached grade hypergroup**, lead to the minimization of the given automaton. Thus, if the attached grade hypergroup is join polysymmetrical, then, based on it and according to the results developed in the previous chapters, the construction of a fortified join hypergroup leads to an automaton that accepts the same language, but has fewer, states. Furthermore, through the definition of the appropriate order hypergroup, the automaton is being minimized. Next a hypergroup which describes the operation of the automaton is being defined

linguistic hyperringoid of the natural numbers by the equivalence relation mod n is presented as an example. Next, using conclusions that have been reached in the previous chapters, the theorem of Nerode is being proved.

In chapter IV has been proved that a set M with operators from a hyperringoid Y, can be endowed, using its operators, with the structure of the hypergroup. In the paragraph which follows, considering M to be the set of states of an automaton, the **attached hypergroup of the paths** is being defined. Also it is being proved that certain subsets of the hyperringoid, defined through the hyperoperation in M, are rational. This approach, apart from other results, leads to the proof of the theorem of Kleene.

In the last paragraph the set of states of an automaton is being endowed with several hyperoperations, which give the structure of the hypergroup to it. These **attached hypergoups**, describe its structure while some of them, the **attached order hypergroup** and the **attached grade hypergroup**, lead to the minimization of the given automaton. Thus, if the attached grade hypergroup is join polysymmetrical, then, based on it and according to the results developed in the previous chapters, the construction of a fortified join hypergroup leads to an automaton that accepts the same language, but has fewer, states. Furthermore, through the definition of the appropriate order hypergroup, the automaton is being minimized. Next a hypergroup which describes the operation of the automaton is being defined

through the notion of the **activated element**, that is being introduced. By means of the hyperoperation being introduced, all the possible paths that the automaton can follow at any given moment during its operation can be described. The results of this hyperoperation are being calculated through a technique developed in this paragraph.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] L. BERARDI - F. EUGENI - S. INNAMORATI : *Generalized designs, linear spaces, hypergroupoids and algebraic cryptography.*
Proceedings of the 4th Internat. Cong. in Algebraic Hyperstructures and Applications. pp. 55-66, Xanthi 1990. World Scientific.

[2] G. BOOLE : *An investigation of the laws of thought.*
Dover Publications, Inc., New York, 1854.

[3] T. BOOTH : *Introduction to Computer Engineering Hardware and Software Design.*
Third edition. Wiley, 1984.

[4] G. CANTOR : *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre.*
Λειψία 1883.

[5] N. CHOMSKY : *Three models for the description of language.*
IRE Trans. of Information Theory 2:3, pp. 113-124, 1956.

[6] N. CHOMSKY : *On certain formal properties of grammars.*
Information and Control, 2:2, pp. 137-167, 1959.

[7] A. CHURCH : *An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory.*
Amer. Journal of Math., 58, pp. 345-363, 1936.

[8] A. CLEMENTS : *The principles of Computer hardware.*
Oxford Science Publications, 1985.

[9] P. CORSINI : *Hypergroupes reguliers et hyper-modules.*
Ann. Univ. Ferrara, Sc. Math. 1975.

[10] P. CORSINI : *Resenti risultati in teoria degli ipergruppi.*
Bollettino U.M.I. 1983.

[11] P. CORSINI : *Sugli ipergruppi canonici finiti conidentica parziali scalari.*
Rendiconti del circolo Matematico di Palermo, Serie II, Tomo XXXVI, pp. 205-219, 1987.

[12] **P. CORSINI** : *Prolegomena of hypergroup theory.*
Aviani Editore, 1993.

[13] **A.P. DIETZMAN** : *On the multigroups of complete conjugate sets of elements of a group.*
C. R. (Doklady) Acad. Sci. USSR (N. S.), 49, pp. 315-317, 1946.

[14] **M. DRESHER-O. ORE** : *Theory of multigroups.*
Amer. J. Math. 60, pp. 705-733, 1938.

[15] **C.F. DUNKL** : *The measure algebra of a locally compact hypergroup.*
Trans. Amer. Math. Soc. 179, pp. 33-348, 1973.

[16] **K. GODEL** : *Uber formal unentscheidbare Satze der Principia Mathematica und verwandter Systeme.*
Monatshefte fur Math. und Phys., pp. 173-189, 1931.

[17] **E. HEWITT - K.A. ROSS** : *Abstract harmonic analysis. Vol. II.*
Springer - Verlag, 1970.

[18] **D. HILBERT** : *Sur les problemes futurs des mathematiques.*
Comptes Rendus du Deuxieme Congres International des Mathematiciens, Gauthier-Villars, pp. 58-114, 1902.

[19] **ΗΡΩΝ ο ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΥΣ** : *Περί Αυτοματοποιητικής.*
Ε. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ, Ανθολογία Αρχαίων Κειμένων, Αθήνα 1960

[20] **D.A. HUFFMAN** : *The synthesis of sequential switching circuits.*
J. Franklin Institute, 257:3, pp. 161-190, 257:4, pp. 257-303, 1954.

[21] **R. ILTIS** : *Some algebraic structures in the dual of a compact group.*
Can. Jr. Math. 20, pp. 1499-1510, 1968.

[22] **N. JACOBSON** : *Lectures in Abstract Algebra.*
Springer - Verlag, 1951.

[23] **J. JANTOSCIAK** : *Classical geometries as hypergroups.*
Conv. su Ipergruppi altre Structure Multivoche e loro Applicazioni. Udine 1985.

[24] **S.C. KLEENE** : *General recursive functions of Natural Numbers.*
Mathematische Annalen 112, pp. 727-742, 1936.

[25] **S.C. KLEENE** : *Representation of events in nerve nets and finite automata.*
Automata Studies, Princeton Univ. Press, Princeton N.J, pp. 3-42, 1956.

[26] **Z. KOHANI** : *Swiching and finite Automata theory.*
Second Edition, McGRAW HILL.

[27] **L. KONGUETSOF** : *Structures a operations multiformes. L' hypergroupe a operateurs.*
Bull. Soc. Math. Belgique t. XIX, 1967.

[28] **M. KRASNER** : *La loi de Jordan - Holder dans les hypergroupes et les suites generatrices des corps de nombres P - adiqes.*
(I) Duke Math. J. 6, pp. 120-140, 1940.
(II) Duke Math. J. 7, pp. 121-135, 1940.

[29] **M. KRASNER** : *La characterisation de hypergroupes de classes et le probleme de Schreier dans ces hypergroupes.*
C. R. Acad. Sci. (Paris), 212, pp. 948-950 1941, 218, pp. 483-484 et pp. 542-544, 1944.

[30] **M. KRASNER** : *Approximation des corps values complets de caracteristique p ≠ 0 par ceux de caracteristique 0 .*
Colloque d' Algebre Superieure (Bruxelles, Decembre 1956), CBRM, Bruxelles, 1957.

[31] **M. KRASNER** : *Une nouvelle presentation de la theorie des groupes de permutations et ses applications a la theorie de Galois et de produit d' entrelaceent ("Wreath Product") de groupes.*
Math. Balk. 3, pp. 229-280, 1973.

[32] **M. KRASNER** : *A class of hyperrings and hyperfields.*
Internat. J. Math. and Math. Sci. 6:2, pp. 307-312, 1983.

[33] **F. MARTY** : *Sur un generalisation de la notion de groupe.*
Huitieme Congres des matimaticiens Scad., pp. 45-49, Stockholm 1934.

[34] Γ.Χ. **ΜΑΣΟΥΡΟΣ** : *Τα Σύνολα και οι Φυσικοί Αριθμοί.*
Αθήνα 1966.

[35] C.G. **MASSOUROS** : *On the theory of hyperrings and hyperfields.*
АЛГЕБРА И ЛОГИКА 24:6, pp. 728-742, 1985.

[36] C.G. **MASSOUROS** : *Free and cyclic hypermodules.*
Annali Di Mathematica Pura ed Applicata, Vol. CL. pp. 153-166, 1988.

[37] Χ.Γ. **ΜΑΣΟΥΡΟΣ** : *Υπερομάδες και Εφαρμογές τους.*
Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα 1988.

[38] C.G. **MASSOUROS** : *Hypergroups and convexity.*
Riv. di Mat. pura ed applicata 4, pp. 7-26, 1989.

[39] C.G. **MASSOUROS** : *On the semi-sub-hypergroups of a hypergroup.*
Internat. J. Math. & Math. Sci. Vol. 14, No 2, pp. 293-304, 1991.

[40] G.G. **MASSOUROS - J. MITTAS** : *Languages - Automata and hypercompositional structures.*
Proceedings of the 4th Internat. Cong. in Algebraic Hyperstructures and Applications. pp. 137-147, Xanthi 1990. World Scientific.

[41] W.S. **McCULLOCH - W. PITTS** : *A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity.*
Bull. Math. Biophysics 5, 115-133, 1943.

[42] G.H. **MEALY** : *A method for synthesizing sequential circuits.*
Bell System Techn. J. 34:5, pp. 1045-1079, 1955.

[43] J. MITTAS : *Hyperanneaux et certaines de leurs proprietes.*
C. R. Acad. Sci. (Paris) 269, Serie A, pp. 623-626, 1969.

[44] J. MITTAS : *Sur une classe d' hypergroupes commutatifs.*
C. R. Acad. Sci. (Paris) 269, Serie A, pp. 485-488, 1969.

[45] J. MITTAS : *Hypergroupes canoniques hypervalues.*
C. R. Acad. Sci. (Paris) 271, Serie A, pp. 4-7, 1970.

[46] J. MITTAS : *Les hypervaluations strictes des hypergroupes canoniques.*
C. R. Acad. Sci. (Paris) 271, Serie A, pp. 69-72, 1970.

[47] J. MITTAS : *Hypergroupes et hyperanneaux polysymetriques - Contributions a la theorie des hypergroups, hyperanneaux, et les hypercorps hypervalues.*
C. R. Acad. Sc. Paris, |t. 271, Serie A, pp. 290-293, 1970 | - |t. 272, Serie A, pp. 3-6, 1971.

[48] J. MITTAS : *Hypergroupes values et hypergroupes fortement canoniques.*
Πρακτικά της Ακαδημίας Αθηνών έτους 1969, τομ. 44, σ. 304 - 312, Αθήναι, 1971.

[49] J. MITTAS : *Hypergroupes canoniques values et hypervalues.*
Math. Balk, 1, pp. 181-185, 1971.

[50] J. MITTAS : *Contributions a la theorie des hypergroupes, hyperanneaux et hypercorps hypervalues.*
C. R. Acad. Sci. (Paris) 272, Serie A, pp. 3-4, 1971.

[51] J. MITTAS : *Hypergroupes canoniques.*
Mathematica Balkanica, 2, pp. 165-179, 1972.

[52] J. MITTAS : *Sur les hyperanneaux et les hypercorps.*
Math. Balk. 3, 1973.

[53] J. MITTAS : *Sur certains classes de structures hypercompositionnelles.*
Πρακτικά της Ακαδημίας Αθηνών, 48, σελ. 298-318, Αθήναι 1973.

[54] J. MITTAS : *Espaces vectoriels sur un hypercorps - Introduction des hyperspaces affines et Euclidiens.*
Mathematica Balkanica 5, pp. 199-211, 1975.

[55] J. MITTAS : *Hypergroupes fortement canoniques et superieurement canoniques.*
Proceedings II of the Inter. Symp. on applications of Mah. in Syst. theory pp. 27-30, December 1978.

[56] J. MITTAS : *Hypergroupes canoniques values et hypervalues - Hypergroupes fortement et superieurement canoniques.*
Bull. of the Greek Math. Soc. 23, pp. 55- 88, Athens, 1982.

[57] J. MITTAS : *Hypergroupes polysymetriques canoniques.*
Atti del convegno su ipergruppi, altre strutture multivoche e loro applicazioni, pp. 1-25, Udine 1985.

[58] J. MITTAS - C.G. MASSOUROS : *Hypergroups defined from a linear space.*
Bull. Greek Math. Soc., 30, pp. 64-78, 1989.

[59] J. MITTAS : *Sur les structures hypercompositionnelles.*
Proceedings of the 4th Internat. Cong. in Algebraic Hyperstructures and Applications. pp. 137-147, Xanthi 1990. World Scientific.

[60] E.F. MOORE : *Gedanken experiments on sequential machines.*
Automata Studies, pp. 129-153, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J, 1956.

[61] J. MYHILL : *Finite automata and the representation of events.*
WADD TR-57-624, pp.112-137, Wright Patterson AFB, Ohio, 1957.

[62] A. NERODE : *Linear automaton transformations.*
Proc. AMS 9, pp. 541-544, 1958.

[63] J. NEUMANN : *The General and Logical Theory of Automata.*
The World of Mathematics, Tempus, 1988.

[64] O. ORE : *Structures and group theory (I).*
Duke Math. J. 7, pp. 149-174, 1937.

[65] **E.L. POST** : *A Variant of a Recursively Unsolvable Problem.*
Bulletin of the American Mathematical Society, 52, pp.264-268, 1946.

[66] **E.L. POST** : *Recursive Unsolvability of a problem of Thue.*
Journal of Symbolic Logic, 12, pp. 1-11, 1947.

[67] **W. PRENOWITZ** : *Projective Geometries as multigroups.*
Amer. J. Math. 65, pp. 235-256, 1943.

[68] **W. PRENOWITZ - J. JANTOSCIAK** : *Join Geometries. A Theory of convex Sets and Linear Geometry.*
Springer - Verlag, 1979.

[69] **M.O. RABIN - D. SCOTT** : *Finite Automata and their decision problems.*
IBM J. Res. 3:2 pp. 115-125, 1959.

[70] **S.SIPPU, SOISALON - E.SOININEN** : *Parsing Theory.*
Springer - Verlag, 1988.

[71] **Σ. ΣΠΑΡΤΑΛΗΣ** : *Συμβολή στη Μελέτη των Υπερδακτυλίων.*
Διδακτορική διατριβή, Ξάνθη 1991.

[72] **R. SPECTOR** : *Apercu de la theorie des hypergroupes.*
Analyse harmonique sur les groupes de Lie, 643-673 (Seminaire Nancy - Strasburg 1973-75. Lectures Notes in Mathematics, 497. Springer - Verlag, 1975).

[73] A. THUE : *Probleme uber Veranderungen von Zeichenreihen nach gegebenen Regeln.* Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiana, I. Matematisk-natturvidenskabelig klasse 1914, 10 (1914), 34 pp.

[74] A.M. TURING : *On computable numbers with an application to the Entscheidungs-promlem.* Proc. London Math. Soc., 2:42, pp. 230-265. A corection, ibid 43 pp. 544-546, 1936.

[75] A.M. TURING : *Can a Machine Think?* The World of Mathematics, Tempus, 1988.

[76] Θ. ΒΟΥΓΙΟΥΚΛΗΣ : *Κυκλικότητα υπερομάδων.* Διδακτορική Διατριβή, Ξάνθη 1980.

[77] T. VOUGIOUKLIS - L. KONGUETSOF : *P-hypergroups.* Acta Universitatis Carolinae - Mathematica et Physica, 28:1 pp. 15-20, 1987.

[78] T. VOUGIOUKLIS (ed.) : *Algebraic Hyperstructures and Applications.* Proceedings of the 4th International Congress. Xanthi 1990. World Scientific.

[79] C.N. YATRAS : *M-polysymmetrical hypergroups.* Riv. di Mat. pura ed applicata 11, pp. 81-92, 1992.

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΟΡΩΝ

Υ

ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΕΣ

Δ-υπερομάδα	Διστοιχειακή Υπερομάδα
ΕΣΥ	Ενισχυμένη Συνδετική Υπερομάδα
ΕΥ	Ενισχυμένο Υπερδακτυλιοειδές
ι.ε. σουπερμοντουλο	Ισχυρώς Επιμεριστικό Σουπερμοντουλο
ι.ε. υπερμοντουλο	Ισχυρώς Επιμεριστικό Υπερμόντουλο
ι.ε. υπερμοντουλοειδές	Ισχυρώς Επιμεριστικό Υπερμοντουλοειδές
ΣΠΥ	Συνδετική Πολυσυμμετρική Υπερομάδα
κ-στοιχείο	κανονικό στοιχείο μιάς ΕΣΥ
ε-στοιχείο	ευρέως κανονικό στοιχείο μιας ΕΣΥ

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ
ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ
ΕΠΙΤΡΟΠΗ

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΠΡΑΚΤΙΚΟ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

του Υποψηφίου Διδάκτορα κ. Γερασίμου Γ. Μασούρου

Η επταμελής Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους κκ. Ι. Μήττα, ομ. Καθηγητή της Πολυτεχνικής Σχολής του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, Σ. Νεγρεπόντη, Καθηγητή του Μαθηματικού Τμήματος του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών, Ε. Πρωτονοτάριο Καθηγητή του ΕΜΠ, Φ. Αφράτη, Αν. Καθηγήτρια του ΕΜΠ, Ν. Ουζούνογλου, Καθηγητή του ΕΜΠ, Κ. Παναγόπουλο, Καθηγητή του ΕΜΠ, και Μ. Αναγνώστου, Επικ. Καθηγητή του ΕΜΠ, που ορίσθηκε από τη Γενική Συνέλευση του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών για την εξέταση του ως άνω υποψηφίου Διδάκτορος, συνήλθε σήμερα 17/06/93 στην αίθουσα συνεδριάσεων του Τομέα Πληροφορικής του ΕΜΠ.

Ο υποψήφιος παρουσίασε την διατριβή του μπροστά στην Εξεταστική Επιτροπή και απάντησε επιτυχώς στις ερωτήσεις της.

Η Διατριβή έχει τον τίτλο:

ΑΥΤΟΜΑΤΑ - ΓΛΩΣΣΕΣ ΚΑΙ ΥΠΕΡΣΥΝΘΕΤΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ

Η εργασία εισάγει την Θεωρία των Υπερσυνθετικών Δομών στη Θεωρία των Αυτομάτων και των Γλωσσών. Απο την σύνδεση αυτή εξάγονται νέα συμπεράσματα και προκύπτουν νέα αποτελέσματα τα οποία προάγουν τη γνώση και στις δύο Θεωρίες. Η δημοσίευση της διατριβής εμπλουτίζει ουσιαστικά τη σχετική βιβλιογραφία. Ειδικότερα με αφετηρία τα Αυτόματα και τις Γλώσσες επινούνται νέες υπερσυνθετικές δομές, οι οποίες μελετώνται αναλυτικά, ενώ ήδη υπάρχουσες υπερσυνθετικές δομές που αποδεικνύεται ότι σχετίζονται με τη Θεωρία Αυτομάτων και Γλωσσών ερευνώνται σε μεγαλύτερο βάθος. Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την μελέτη αυτή εφαρμόζονται στη Θεωρία των Αυτομάτων και των Γλωσσών η οποία εξετάζεται υπό το φώς των νέων αυτών μεθόδων. Ετσι εκτός των άλλων το σύνολο των λέξεων επί ενός αλφαβήτου εφοδιάζεται με μια συγκεκριμένη υπερσυνθετική δομή (Δ-υπερδακτυλιοειδές) και μέσα από αυτή μελετάται, ενώ στα αυτόματα προσαρτήθηκαν υπερομάδες οι οποίες περιγράφουν τη δομή και τη λειτουργία τους. Ακόμη η απόδειξη επωνύμων θεωρημάτων επιτυγχάνεται με τα νέα αυτά εργαλεία.

Ο υποψήφιος παρακολούθησε τον Μεταπτυχιακό κύκλο μαθημάτων, τον οποίο ολοκλήρωσε με γενικό βαθμό Αριστα. Εχει αξιόλογο επιστημονικό έργο με διεθνείς αναφορές σε αυτό, και πλήρη γνώση των επιστημονικών περιοχών στις οποίες εργάσθηκε.

Η Εξεταστική Επιτροπή συμφωνεί με την συνημμένη Εισηγητική Εκθεση της Συμβουλευτικής Επιτροπής και ψηφίζει ομόφωνα το σκεπτικό της Εισηγητικής Εκθεσης με το οποίο προτείνεται η αποδοχή της Διδακτορικής Διατριβής του υποψηφίου και η αναγόρευση του κ. Γερασίμου Γ. Μασούρου σε Διδάκτορα του Εθνικού

Μετσοβίου Πολυτεχνείου, διότι η διατριβή του είναι πρωτότυπη και αποτελεί ουσιαστική συμβολή στην επιστήμη. Επίσης η Εξεταστική Επιτροπή ομόφωνα βαθμολογεί με Αριστα την Διδακτορική Διατριβή λόγω της σημασίας της συμβολής της και της ποιότητάς της.

Συμπερασματικά η Εξεταστική Επιτροπή αποφαίνεται ομόφωνα ότι ο κ. Γεράσιμος Γ. Μασούρος εκπληρώνει όλες τις προυποθέσεις για την αναγόρευσή του σε Διδάκτορα του ΕΜΠ από τη Γενική Συνέλευση του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών.

Ι. ΜΗΤΤΑΣ
ομ. Καθηγητής ΑΠΘ

Σ. ΝΕΓΡΕΠΟΝΤΗΣ
Καθηγητής Πανεπ. Αθηνών

Ε. ΠΡΩΤΟΝΟΤΑΡΙΟΣ
Καθηγητής ΕΜΠ

Φ. ΑΦΡΑΤΗ
Αν. Καθηγήτρια ΕΜΠ

Ν. ΟΥΖΟΥΝΟΓΛΟΥ
Καθηγητής ΕΜΠ
Πρόεδρος Τμήματος
Ηλ. Μηχ. & Μηχ. Υπολ.

Κ. ΠΑΝΑΓΟΠΟΥΛΟΣ
Καθηγητής ΕΜΠ
Αντιπρύτανης ΕΜΠ

Μ. ΑΝΑΓΝΩΣΤΟΥ
Επικ. Καθηγητής ΕΜΠ

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΓΕΡΑΣΙΜΟΥ Γ. ΝΑΣΟΥΡΟΥ

Διπλωματούχου Μηχανολόγου Μηχανικού ΕΜΠ

ΑΥΤΟΜΑΤΑ - ΓΛΩΣΣΕΣ ΚΑΙ ΥΠΕΡΣΥΝΘΕΤΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια:

φ. Αφράτη

Συμβουλευτική Επιτροπή

φ. Αφράτη

Ν. Ουζούνογλου

Ε. Πρωτονοτάριος

Εγκρίθηκε από την Εξεταστική Επιτροπή την 17η Ιουνίου 1993

Ι. ΜΙΤΤΑΣ

ομ. Καθηγητής ΑΠΘ

Σ. ΝΕΓΡΕΠΟΝΤΗΣ

Καθηγητής Πανεπ. Αθηνών

Ε. ΠΡΩΤΟΝΟΤΑΡΙΟΣ

Καθηγητής ΕΜΠ

Φ. ΑΦΡΑΤΗ

Αν. Καθηγήτρια ΕΜΠ

Ν. ΟΥΖΟΥΝΟΓΛΟΥ

Καθηγητής ΕΜΠ

Πρόεδρος Τμήματος

Ηλ. Μηχ. & Μηχ. Υπολ.

Κ. ΠΑΝΑΓΟΠΟΥΛΟΣ

Καθηγητής ΕΜΠ

Αντιπρύτανης ΕΜΠ

Μ. ΑΝΑΓΝΩΣΤΟΥ

Επικ. Καθηγητής ΕΜΠ