ΜΕΡΟΣ Ι

.

.

ΧΩΡΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ και ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ
2. ΧΩΡΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
   - Διανυσματικοί χώροι με εσωτερικό γινόμενο
   - Ανισότητα Cauchy-Schwarz
   - Γραμμική ανεξαρτησία
   - Ορθογωνιοποίηση Gram-Schmidt
3. ΑΠΕΙΡΟΔΙΑΣΤΑΤΟΙ ΧΩΡΟΙ-ΣΕΙΡΕΣ FOURIER
   - Απειροδιάστατοι χώροι-πλήρεις χώροι (Hilbert)
   - Ανισότητα Bessel-Ισότητα Parseval
   - Σειρές Fourier
   - Μοναδικότητα της σειράς Fourier
4. ΤΕΛΕΣΤΕΣ
   - Γραμμικοί τελεστές σε πλήρεις χώρους
   - Γραμμικοί τελεστές σε χώρους πεπερασμένης διάστασης
   - Εξίσωση ιδιοτιμών-ιδιοανυσμάτων

.

.

.

ΜΕΡΟΣ ΙΙ

.

.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ και ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

1. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
   - Εισαγωγή
   - Ταξινόμηση των δ.ε.μ.π.
   - Μέθοδοι επίλυσης-Μέθοδος χωριζομένων μεταβλητών
2. ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ
   - Χορδή απείρου μήκους
   - Πεπερασμένη χορδή πακτωμένη στα άκρα
   - Ενέργεια πακτωμένης χορδής
   - Εξηναγκασμένη ταλάντωση χορδής
   - Κυκλική μεμβράνη
   - Κυματική εξίσωση σε σφαιρικές συντεταγμένες
3. ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΧΥΣΗΣ
   - Διάδοση θερμότητας σε μια διάσταση
   - Διάδοση θερμότητας σε πεπερασμένη ράβδο
   - Μοναδικότητα της λύσης
   - Διάδοση θερμότητας σε κύλινδρο
4. ΕΞΙΣΩΣΗ LAPLACE
   - Γενικά
   - Εξίσωση Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες (εσωτερικό και εξωτερικό πρόβλημα)

1 Εισαγωγή

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε να λύσουμε το παρακάτω πρόβλημα:

ΠρόβλημαΝα βρεθεί η θερμοκρασία $T(x,t)$, ομογενούς μεταλλικής ράβδου της οποίας τα άκρα , $(x=0, x=L)$, βρίσκονται σε λουτρό θερμοκρασίας μηδέν βαθμών και η επιφάνειά της είναι θερμικά μονωμένη. Επίσης γνωρίζουμε ότι η αρχική θερμοκρασία της ράβδου είναι:
$T(x,t=0) = T_0 \sin \frac{\pi x}{L}$.

Οπως ξέρουμε η εξίσωση διάδοσης θερμότητας για ομογενές μέσο είναι:

$$\nabla^2 T(\vec{\mathbf{x}},t) = \frac{1}{a^2}\frac{\partial T(\vec{\mathbf{x}},t))}{\partial t} \tag{1}$$

όπου

$$\nabla^2 T(\vec{\mathbf{x}},t) = [\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}]T(\vec{\mathbf{x}},t) \tag{2}$$

και a^2 o suntelest'hc jermik'hc agwgim'othtac. Gia mia r'abdo pou e'inai jermik'a monwm'enh sthn

$T_{\mu\epsilon\rho} = e^{-a^2\lambda t}u(x)$(3)αρκεί η συνάρτηση $u(x)$ να ικανοποιεί την απλή εξίσωση:

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \lambda u(x) = 0 \tag{4}$$

Η παράμετρος λ και η $u(x)$ θεωρούνται πραγματικές. Αν τώρα απαιτήσουμε η $T_{\mu\epsilon\rho}$ να ¨πλησιάζει' σε λύση του προβλήματος , δηλαδή να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες , τότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις.

1. $\boxed{\lambda = 0}$ τότε $u(x) = Ax + B$

   Για να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες θα πρέπει οι παράμετροι A=B=0.Στην περίπτωση αυτή οδηγούμαστε σε μηδενική λύση.

2. $\boxed{\lambda < 0}$ τότε $u(x) = A\cosh(\sqrt{|\lambda|}x) + B\sinh(\sqrt{|\lambda|}x)$

   Από την συνοριακή συνθήκη $T_{\mu\epsilon\rho}(x = 0, t) = 0$ συνεπάγεται ότι $A = 0$ και η λύση είναι της μορφής :

$$T_{\mu\epsilon\rho} = e^{-a^2|\lambda|t} B\sinh(\sqrt{|\lambda|}x) \tag{5}$$

   Η συνοριακή συνθήκη στο άλλο άκρο οδηγεί στο $\boxed{B = 0}$. Επομένως δεν έχουμε λύσεις για $\lambda < 0$.
   Παρατηρούμε ότι τέτοιες λύσεις δεν έχουν φυσική σημασία αφού προβλέπουν εκθετική αύξηση της θερμοκρασίας με το χρόνο .

3. $\boxed{\lambda > 0}$ τότε $u(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$

   Από την συνοριακή συνθήκη $T(x = 0, t) = 0$. συνεπάγεται $\boxed{A = 0}$
   Από την συνοριακή συνθήκη $T(x = L, t) = 0$ συνεπάγεται ότι $B\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$. Ομως $B \neq 0$ για να μην οδηγηθούμε σε μηδενική λύση , επομένως θα πρέπει :

   $\boxed{\sqrt{\lambda}L = n\pi}$, όπου $n = 1, 2, 3...$

   Βρήκαμε λοιπόν λύσεις της εξίσωσης διάχυσης που να ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες ,της μορφής [1] :

$$T_n(x,t) = T_0 e^{-a^2\frac{\pi^2 n^2}{L^2}t} \sin(\frac{\pi n}{L}x) \tag{6}$$

---

[1] Θα αναρωτηθεί καποιος αν υπάρχουν λύσεις με λ μιγαδικό. Η απάντηση είναι αρνητική.Πολλαπλασιάζουμε την $-\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \lambda u(x)$ με την μιγαδική συζυγή $u^*(x)$ και ολοκληρώνουμε από 0 έως L.

$$-\int_0^L dx u^*(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \lambda\int_0^L dx u^*(x)u(x)$$

Κατά παράγοντες ολοκλήρωση στο αριστερό μέρος οδηγεί στην εξίσωση:

$$u^*(x)\frac{du(x)}{dx})|_0^L + \int_0^L dx\frac{du^*}{dx}\frac{du}{dx} = \lambda\int_0^L dx u^*(x)u^*(x)$$

Όμως $u^*(L) = u^*(0) = 0$, συνεπάγεται ότι: $\lambda > 0$

όπου $n = 1, 2, 3...$

Για να ικανοποιείται και η αρχική συνθήκη

$T(x, t = 0) = T_0 \sin(\frac{\pi x}{L})$

θα πρέπει να επιλέξουμε $B_1 = T_0$ και $B_n = 0$ όταν $n \neq 0$.

Η λύση του προβλήματος έχει την μορφή

$\boxed{T(x,t) = T_0 e^{-a^2 \frac{\pi^2}{L^2} t} \sin(\frac{\pi}{L} x)}$

Αργότερα θα αποδείξουμε ότι προβλήματα σαν αυτό που περιγράψαμε, έχουν πάντα λύση και μάλιστα μοναδική. Αυτό άλλωστε περιμένουμε και από την Φυσική ενός προβλήματος .Τι θα συνέβαινε όμως αν τροποποιούσαμε την αρχική συνθήκη σε μια συνθήκη της μορφής:

$T(x, t = 0) = f(x)$ όπου $f(x)$ συνεχής συνάρτηση και $f(0) = f(L) = 0$·

Ας δούμε τι διαθέτουμε. Εχουμε μια απειρία μερικών λύσεων της μορφής :

$$T_n(x,t) = B_n e^{-a^2 \frac{\pi^2 n^2}{L^2} t} \sin(\frac{\pi n}{L} x) \tag{7}$$

που είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και η κάθε μία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες

$T_n(x = 0, t) = T_n(x = L, t) = 0$ για κάθε t.

Επειδή η εξίσωση διάχυσης είναι γραμμική μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η γενική λύση προβλημάτων με αυτές τις συνοριακές συνθήκες, δίνεται από αυθαίρετο γραμμικό συνδυασμό αυτών των ανεξάρτητων λύσεων:

$$T_{\gamma\epsilon\nu}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-a^2 \frac{\pi^2 n^2}{L^2} t} \sin(\frac{\pi n}{L} x) \tag{8}$$

Αν τώρα η αρχική συνθήκη $T(x, t = 0) = f(x)$, εφαρμοστεί στην (;;) θα έχουμε :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\frac{\pi n}{L} x) \tag{9}$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δυό μέλη με $\sin(\frac{\pi m}{L}x)$, και ολοκληρώνουμε από 0 μέχρι L. Με τη βοήθεια του ολοκληρωτικού τύπου

$\int\limits_0^L dx \sin(\frac{\pi n}{L}x)\sin(\frac{\pi m}{L}x) = \frac{L}{2}\delta_{mn}$

βρίσκουμε ότι:

$$\boxed{B_n = \frac{2}{L}\int\limits_0^L dx \sin(\frac{\pi n}{L}x) f(x)}$$

Αρα η λύση του προβλήματος με την αυθαίρετη αρχική συνθήκη ορίζεται απο την (;;).

Πόσο αυθαίρετη όμως είναι η αρχική συνθήκη $f(x)$· Η σταθερά a^2 στην εξίσωση διάχυσης είναι:

$a^2 = \frac{k}{c\rho}$

όπου k συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας, c θερμοχωρητικότητα ανά μονάδα μάζας και ρ πυκνότητα της ράβδου. Το ποσόν θερμότητας με το οποίο θερμάναμε την ράβδο ώστε να βρεθεί σε θερμοκρασία $T(x, t = 0) = f(x)$ και το οποίο θα αποδοθεί στο λουτρό θερμοκρασίας μηδέν στο οποίο βρίσκονται τα άκρα της ράβδου είναι πεπερασμένο. Αρα θα πρέπει

$\int\limits_0^L dx|T(x, t = 0)| = \int\limits_0^L dx|f(x)| =$ πεπερασμένο.

και κατά συνέπεια

$\int\limits_0^L dx|f(x)|^2 =$ πεπερασμένο.

Αν παραλείψουμε το χρόνο βλέπουμε ότι οι συναρτήσεις $\sin(\frac{\pi n}{L}x)$ αποτελούν μια ¨βάση' στο χώρο των συναρτήσεων $f(x)$, στο διάστημα $0 \leq x \leq L$, που ικανοποιούν την συνθήκη:

$\int_0^L dx f^2(x) =$ πεπερασμένο [2].

Οι ΄προβολές ΄ της $f(x)$ σε αυτή την βάση δίνονται από τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{\pi n}{L}x)dx \tag{10}$$

Οι συναρτήσεις

$$\boxed{e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{\pi n}{L}x)}$$

αποτελούν μια ορθοκανονική βάση σε αυτόν τον συναρτησιακό χώρο ,με την έννοια ότι το ολοκλήρωμα :

$$\boxed{\int_0^L e_n(x)e_m(x)dx = \delta_{mn}}$$

(όπου $\delta_{mn} = 1$ για $m = n$ και $\delta_{mn} = 0$ για $m \neq n$) εκφράζει ένα έσωτερικό ΄ γινόμενο στον χώρο αυτό. Όταν $m \neq n$ οι συναρτήσεις

$e_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{\pi n}{L}x)$, $e_m = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{\pi m}{L}x)$ είναι ορθογώνιες:

Βέβαια δεν είναι η πρώτη φορά που συναντάμε τη δομή διανυσματικού χώρου για λύσεις μιας διαφορικής εξίσωσης. Ενα άλλο γνωστό μας παράδειγμα είναι ο χώρος των λύσεων μιας συνήθους ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης N-τάξης. Εάν γνωρίζουμε N γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις $u_1, u_2, u_3, ..$ τότε η γενική λύση εκφράζεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $u_i(x)$

[2] ο χώρος των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων

$u_{\gamma\epsilon\nu}(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + c_3 u_3(x)...$

Οι σταθερές $c_1, c_2, c_3, ...$ μπορούν να προσδιοριστούν έτσι ώστε η λύση να ικανοποιεί συγκεκριμμένες άρχικές' συνθήκες.

$u(x_0) = A_0, u'(x_0) = A_1, u''(x_0) = A_2, ..., u_{N-1}^{(N-1)}(x_0) = A_{N-1}$

Ο χώρος αυτός είναι πεπερασμένης διάστασης N. Ο χώρος των λύσεων στο πρόβλημα διάδοσης θερμότητας που εξετάσαμε , είναι απειροδιάστατος με ανύσματα βάση·

$$|e_m >= \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{\pi m}{L} x) \tag{11}$$

Παρακάτω θα ασχοληθούμε με διανυσματικούς χώρους συναρτήσεων με εσωτερικό γινόμενο καθώς και την δράση γραμμικών τελεστών , (κυρίως διαφορικών) στους χώρους αυτούς. Θα επισημάνουμε εκείνα τα στοιχεία και τις τεχνικές που θα μας είναι χρήσιμα στη μελέτη φυσικών προβλημάτων που σχετίζονται με με διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους.

2 Χώροι συναρτήσεων

2.1 Διανυσματικοί χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Σαν γενικό σύμβολο διανύσματος θα χρησιμοποιούμε το $|f>$. Διανυσματικός χώρος είναι ένα σύνολο S με στοιχεία τα διανύσματα $S = |f>, |g>, |h>, ...$ στο οποίο έχουμε ορίσει δυό πράξεις

1. Διανυσματική πρόσθεση:
   $|f> + |g> = |h>$

2. Βαθμωτός πολλαπλασιασμός:
   $\lambda |f> = |g>$, (λ=μιγαδικός)

που έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:

- $|f> + |g> = |g> + |f>$
- $|f> + (|g> + |h>) = (|f> + |g>) + |h>$
- Υπάρχει το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης $|0>$,(μηδενικό άνυσμα) , και για κάθε $|f>$ υπάρχει το αντίθετό του $(|-f>)$ ώστε: $|f> + |0> = |f>$

Για τον πολλαπλασιασμό διανύσματος με μιγαδικό αριθμό θα πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- $\lambda(k|f>) = (\lambda k)|f>$, $1.|f> = |f>$
- $\lambda.(|f> + |g>) = \lambda.|f> + \lambda.|g>$
  $(\lambda + k) > |f> = \lambda.|f> + k.|f>$

Οι πράξεις αυτές είναι γενίκευση των γνωστών πράξεων πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού που ισχύουν για τα ανύσματα του 3-διάστατου διανυσματικού χώρου. Γενίκευση του εσωτερικού γινομένου $\vec{a}.\vec{b}$ είναι εν γένει κάποιος μιγαδικός αριθμός, που τον συμβολίζουμε ως :

$$\boxed{<f|g>}$$

και θα πρέπει να έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $<f|g+h> = <f|g> + <f|h>$
2. $<f|\lambda g> = \lambda <f|g>$, (λ = μιγαδικός)
3. $<f|g> = (<g|f>)^*$,(μιγαδικός συζυγής)
4. $<f|f> \geq 0$, $<f|f> = 0 \Rightarrow |f> = |0>$

Στις παραπάνω σχέσεις (1-4) αναγνωρίζουμε όλες τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένουτου του 3-διάστατου χώρου.

$\vec{a}.\vec{b} = a_x.b_x + a_y.b_y + a_z.b_z$

με την διαφορά ότι το $\vec{a}.\vec{b}$ είναι πραγματικός αριθμός . Επίσης σαν μέτρο ενός ανύσματος $|f>$ ορίζουμε :

$$\boxed{||f|| \equiv \sqrt{<f|f>}}$$

και είναι η γενίκευση του τριδιάστατου μέτρου
$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
Παρατηρούμε ότι λόγω της (4) το μόνο άνυσμα που έχει μέτρο μηδέν είναι το μηδενικό άνυσμα.
$<f|f>= 0 \Rightarrow |f>= |0>$
Αμεση συνέπεια των ιδιοτήτων που ορίζουν το εσωτερικό γινόμενο , είναι οι παρακάτω ιδιότητες [3] .

1. $<f|\lambda g + kh>= \lambda <f|g> +k <f|h>$

2. $<\lambda.f|g>= \lambda^* <f|g>$, (λ μιγαδικός)

3. $<\lambda.f + k.g|h>= \lambda^* <f|h> +k^* <g|h>$

Μερικά περαδείγματα διανυσματικών χώρων με εσωτερικό γινόμενο είναι τα παρακάτω.

A) **Ο χώρος R^N**,ο Ευκλείδιος χώρος των διατεταγμένων N-άδων πραγματικών αριθμών $|a>= (a_1, a_2, ..., a_N)$,όπου a_i πραγματικοί

$|a> +|b>= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, ..., a_N + b_N)$

[3] Σε όλα τα παραπάνω με ελληνικά γράμματα συμβολίζουμε μιγαδικούς και με λατινικά τα διανύσματα.Με αστερίσκο συμβολίζουμε το μιγαδικό συζυγές.

$\lambda|a>=(\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_N)$ όπου λ πραγματικός

$<a|b>=\sum\limits_{i=1}^{N} a_i b_i$=πραγματικός.

Ειδική περίπτωση είναι ο γνωστός μας 3-διάστατος R^3.

B) **Ο χώρος C^N**, ο χώρος των διατεταγμένων N-άδων μιγαδικών αριθμών $|a>=(a_1, a_2, ..., a_N)$ όπου a_i = μιγαδικοί. Οι πράξεις ορίζονται όπως και στον R^N, το δε εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως εξής:
$<a|b>=\sum\limits_{i=1}^{N} a_i^* b_i$ =μιγαδικός.

Γ) **Ο χώρος l^2**: Δηλαδή ο χώρος των τετραγωνικά συγκλινουσών ακολουθιών μιγαδικών αριθμών. Θα λέμε ότι μια ακολουθία αριθμών $|\xi>=(\xi_1, \xi_2, \xi_3, ...\xi_n, ...)$ είναι άνυσμα του χώρου αν :

$\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2$=πεπερασμένο

θα δείξουμε ότι αν ορίσουμε την πρόσθεση $|\xi>+|\eta>$ δυό τέτοιων ανυσμάτων ως :
$|\xi>+|\eta>=(\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \xi_3+\eta_3, ...\xi_i+\eta_i, ...)$
παίρνουμε μια τετραγωνικά συγκλίνουσα ακολουθία ,δηλαδή ένα άνυσμα του χώρου. Πράγματι αν ξ_i και η_i 2 τυχαίοι μιγαδικοί αριθμοί , ισχύει προφανώς

$|\xi_i+\eta_i|^2 \leq 2|\xi_i|^2+2|\eta_i|^2$

Αθροίζοντας τις N-πρώτες τέτοιες ανισότητες έχουμε :

$\sum_{i=1}^{N} |\xi_i + \eta_i|^2 \leq 2 \sum_{i=1}^{N} |\xi_i|^2 + 2 \sum_{i=1}^{N} |\eta_i|^2$

Στο όριο που το $N \to \infty$ και επειδή έχουμε υποθέσει ότι
$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2$=πεπερασμένο και $\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^2$=πεπερασμένο

βλέπουμε ότι και :

$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^2$ =πεπερασμένο

Ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός με μιγαδικό αριθμό λ, ορίζεται: $\lambda|\xi >= (\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, ..., \lambda\xi_i, ...)$
προφανώς
$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda\xi_i|^2 = |\lambda|^2 \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2$=πεπερασμένο

Αν $|\xi >$ και $|\eta >$ 2 διανύσματα του χώρου αυτού , το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως εξής:

$$< \xi|\eta >= \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^* . \eta_i$$

Το μέτρο ενός ανύσματος $||\xi||$ είναι κατά τα γνωστά

$$||\xi|| = (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{< \xi|\xi >}$$

Ο χώρος αυτός είναι ένα παράδειγμα απειροδιάστατου διανυσματικού χώρου και μάλιστα όπως θα δούμε παρακάτω τα διανύσματα :$e_1 = (1, 0, 0, ...), e_2 = (0, 1, 0, ...), e_3 = (0, 0, 1, 0, ..), ...$ συνιστούν μια ορθοκανονική βάση .
Τέλος να αναφέρουμε το γενικό παράδειγμα από τους χώρους των συναρτήσεων με τους οποίους θα ασχοληθούμε.
Δ) **Ο χώρος $L^2[a, b]$** Δηλαδή ο χώρος των συναρτήσεων $f(x)$ μιας πραγματικής μεταβλητής $a \leq x \leq b$, που εν γένει είναι μιγαδικές και τετραγ-

ωνικά ολοκληρώσιμες,δηλαδή το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b dx|f(x)|^2$$

να είναι πεπερασμένο. Σαν εσωτερικό γινόμενο στο χώρο αυτό ορίζουμε:

$$\boxed{< f|g >= \int_a^b dx f^*(x)g(x)}$$

Αν $|f >= f(x)$ και $|g >= g(x)$ δύο ανύσματα του χώρου αυτού η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός με μιγαδικό αριθμό λ ορίζεται ως :

$$|f > +|g >\equiv f(x) + g(x)$$

$$\lambda.|f >\equiv \lambda.f(x)$$

Το μέτρο μιας συνάρτησης $f(x)$ είναι κατά τα γνωστά

$$||f|| = \sqrt{< f|f >} = (\int_a^b dx|f(x)|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Γενικώτερα το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται

$$< f|g >= \int_a^b w(x)f^*(x)g(x)dx$$

όπου $w(x)$ θετική συνάρτηση που ονομάζεται συνάρτηση βάρους . Ο χώρος στην περίπτωση αυτή συμβολίζεται ως $L^2_w[a, b]$ και περιέχει τι συναρτήσεις για τις οποίες

$$\int_a^b w(x)|f(x)|^2 dx = \pi\epsilon\pi\epsilon\rho\alpha\sigma\mu\epsilon\nu\o$$

Ενδεικτικά έχουμε σημειώσει σαν πεδίο ορισμού το διάστημα $[a, b]$ που μπορεί να είναι και όλη η πραγματική ευθεία. Το εσωτερικό γινόμενο όπως ορίστηκε μέσω των σχέσεων (1,2,3,4) συνεπάγεται δυό σπουδαίες σχέσεις

.

2.2 Ανισότητα Cauchy-Schwarz

Αν $|f>$ και $|g>$ δυό τυχαία ανύσματα ενός διανυσματικού χώρου με εσωτερικό γινόμενο τότε ισχύει η σχέση

$$< f|g >=\leq ||f||||g|| \tag{12}$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> Θεωρούμε τυχαίο μιγαδικό αριθμό λ. Προφανώς ισχύει η σχέση:

$$0 \leq ||f - \lambda g||^2 =< f - \lambda g|f - \lambda g > \tag{13}$$

Αναπτύσουμε το εσωτερικό γινόμενο στο δεξιό μέλος

$$\begin{aligned} 0 &\leq< f|f > -\lambda < f|g > -\lambda^*(< f|g >)^* + \lambda^*\lambda < g|g >= \\ &= ||f||^2 + |\lambda|^2||g||^2 - \lambda < f|g > -\lambda^*(< f|g >)^* = \\ &= ||f||^2 + |\lambda|^2||g||^2 - 2Re(\lambda < f|g >) \end{aligned} \tag{14}$$

Αν γράψουμε τους μιγαδικούς αριθμούς λ και $< f|g >$ ως

$$\lambda = |\lambda|e^{i\theta}, < f|g >= | < f|g > |e^{i\phi}$$

, τότε η ανισότητα γράφεται ως εξής:

$$0 \leq ||f||^2 + |\lambda|^2||g||^2 - 2.|\lambda|.| < f|g > | \cos(\theta + \phi)$$

Η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε $|\lambda| \geq 0$ και για κάθε $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Ειδικά για $\theta = -\phi$ παίρνει την μορφή:

$$0 \leq ||f||^2 + |\lambda|^2||g||^2 - 2.|\lambda|.| < f|g > |$$

ενώ για ϑ=π-φ γίνεται

$$0 \leq ||f||^2 + |\lambda|^2||g||^2 + 2.|\lambda|.| < f|g > |$$

Οι δυό προηγούμενες ανισότητες υποδηλώνουν ότι το τριώνυμο

$$||f||^2 + x^2||g||^2 + 2x| < f|g > |$$

είναι μη αρνητικό για κάθε πραγματική τιμή του x. Αυτό σημαίνει ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι μη θετική, δηλαδή

$$\boxed{|<f|g>|^2 \leq ||f||^2.||g||^2}$$

Η ισότητα ισχύει όταν υπάρχει μιγαδικός λ τέτοιος ώστε : $|f>=\lambda.|g>$, δηλαδή όταν τα $|f>$ και $|g>$ είναι συγγραμμικά. Η εφαρμογή της ανισότητας των Cauchy-Schwarz στο χώρο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $L^2[a,b]$ μας οδηγεί στην γνωστή από την ανάλυση ανισότητα

$$\left|\int_a^b w(x)f^*(x)g(x)dx\right| \leq (\int_a^b w(x)|f(x)|^2dx)^{\frac{1}{2}}(\int_a^b w(x)|g(x)|^2dx)^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

όπου $w(x)>0$ η συνάρτηση βάρους στο εσωτερικό γινόμενο. <u>Τριγωνική ανισότητα</u>: Αν $|f>$ και $|g>$ δυό τυχαία ανύσματα του χώρου τότε αποδεικνύεται εφαρμόζοντας την ανισότητα των Cauchy-Schwarz ότι ισχύει η ανισότητα :

$$||f+g|| \leq ||f|| + ||g||$$

η οποία ονομάζεται τριγωνική ανισότητα. (Η απόδειξη γίνεται εύκαλα αν θεωρήσουμε Την σχέση: $0 \leq ||f+g||^2$

2.3 Γραμμική ανεξαρτησία

Τα διανύσνατα $|f_1>, |f_2>, |f_3>, ...|f_N>, ...$ ονομάζονται γραμμικώς ανέξάρτητα εάν η μόνη λύση της διανυσματικής εξίσωσης

$$\lambda_1|f_1> + \lambda_2|f_2> + \lambda_3|f_3> + ... + \lambda_N|f_N> + |0>$$

είναιτετριμμένη , $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = ... = \lambda_N = |0>$ Εάν τα ανύσματα αυτά ανήκουν σε χώρο διάστασης N τότε αποτελούν βάση στο χώρο αυτό με την έννοια ότι το τυχαίο άνυσμα $|h>$ του χώρου εκφράζεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $|f_i>$.

$$|h>= \lambda_1|f_1> + \lambda_2|f_2> + \lambda_3|f_3> + ... + \lambda_N|f_N>$$

Εάν ο χώρος είναι εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο τότε οι ορθοκανονικές βάσεις

$$|e_1>, |e_2>, |e_3>, ...|e_N>$$

έχουν το εξής πλεονέκτημα . Αν $|h>$ τυχαίο άνυσμα τότε

$$|h> = \lambda_1|e_1> + \lambda_2|e_2> + \lambda_3|e_3> + ... + \lambda_N|e_N>$$

Για να υπολογίσουμε το $|\lambda_1>$ πολλαπλασιάζουμε εσωτερικά με $|e_1>$

$$<e_1|h> = \lambda_1 <e_1|e_1> + \lambda_2 <e_1|e_2> + \lambda_3 <e_1|e_3> + ... + \lambda_N <e_1|e_N>$$

Στο δεξιό μέλος όλα τα εσωτερικά γινόμενα είναι μηδέν εκτός απο το $<e_1|e_1> = 1$. Αρα

$$\boxed{\lambda_1 = <e_1|h>}$$

Ομοίως

$$\boxed{\lambda_2 = <e_2|h>, \lambda_3 = <e_3|h>, ...\lambda_N = <e_N|h>}$$

Δηλαδή οι συνιστώσες του $|h>$ στις διάφορες ¨διευθήνσεις' υπολογίζονται από τις προβολές του πάνω στην ορθοκανονική βάση .

$$|h> = \sum_{i=0}^{N}(<e_i|h>)|e_i> = \sum_{i=0}^{N}|e_i><e_i|h> \tag{16}$$

2.4 Ορθογωνοποίηση Gram-Schmidt

Θα θέλαμε όταν γνωρίζουμε μια τυχαία βάση (όχι ορθοκανονική) $|f_1>$ $, |f_2>, |f_3>, ...|f_N>$ σ'ενα διανυσματικό χώρο , να μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ορθοκανονική

$$(|e_1>, |e_2>, |e_3>, ...|e_N>), (<e_i|e_j> = \delta_{ij})$$

Μια τέτοια μέθοδος υπάρχει και ονομάζεται

<u>**Ορθογωνοποίηση Gram-Schmidt**</u> Ας θεωρήσουμε N-πλήθους γραμμικώς ανεξάρτητα ανύσματα $|f_1>, |f_2>, |f_3>, ...|f_N>$. Από αυτά

κατασκευάζουμε N-πλήθους ορθοκανονικά ως εξής:
Ορίζουμε το $|g_1 >= |f_1 >$. Το διάνυσμα αυτό θα αποτελέσει την πρώτη ορθογώνια διεύθηνση . Το μοναδιαίο άνυσμα κατα την διεύθηνση αυτή είναι

$$|e_1 >= \frac{|g_1 >}{||g_1||}$$

Από το $|F_2 >$ αφαιρούμε τη προβολή του πάνω στο $|e_1 >$ και
$|g_2 >= |f_2 > -(< e_1|f_2 >)|e_1 >$
Διαιρούμε με το μέτρο του και έτσι ορίζουμε το $|e_2 >$

$$|e_2 >= \frac{|g_2 >}{||g_2}$$

Προφανώς το $|g_2 >\neq |0 >$ γιατί αλλιώς το $|F_2 >$ θα ήταν συγραμμικό του $|e_1 >$ δηλαδή του $|f_1 >$ και δεν θα ήταν γραμμικώς ανεξάρτητα.

Επιπλέον $< e_1|e_2 >= \frac{1}{||g_2||} < e_1|g >$

$= \frac{1}{||g_2||}(< e_1|f_2 > -(< e_1|f_2 >) < e_1|e_1 >) = 0$

Δηλαδή τα $|e_1 >$, $|e_2$ είναι ορθογώνια. Συνεχίζοντα· από τα $|f_2 >$ αφαιρούμε τις προβολές του στα $|e_1 >, |e_2 >$ και

$$|g_3 >= |f_3 > -(< e_1|f_3 >)|e_1 > -(< e_2|f_3 >)|e_2 >$$

Ετσι έχουμε το

$$|e_3 >= \frac{|g_3 >}{||g_3||}$$

που είναι ορθογώνιο στα $|e_1 >, |e_2 >$. Η διαδικασία συνεχίζεται με τα υπόλοιπα διανύσματα και καταλήγουμε έτσι σε μια ορθοκανονική βάση

$$|e_1 >, |e_2 >, |e_3 >, ..., |e_N >$$

3 Απειροδιάστατοι χώροι-Σειρές Fourier

3.1 Απειροδιάστατοι χώροι

Στο χώρο $L^2[-\pi,\pi]$ όπου το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως:

$$< f|g >= \int_{\pi}^{\pi} dx f^*(x) g(x) \tag{17}$$

η ακολουθία των συναρτήσεων :

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \pm n = 0, 1, 2, 3,$$

είναι μια ορθοκανονική ακολουθία.Πράγματι

$$\begin{aligned} < e_m|e_n > &= \int_{\pi}^{\pi} dx (\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx})^* (\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}) = \\ &= \int_{\pi}^{\pi} dx \frac{1}{2\pi} e^{i(n-m)x} \end{aligned} \tag{18}$$

Από τον υπολογισμό του ολοκληρώματος (;;) , βρίσκουμε

$$< e_n|e_m >= \begin{cases} 1 & : \quad m = n \\ 0 & : \quad m \neq n \end{cases}$$

Επειδή τα ανύσματα $|e_m >= e_m(x)$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους είναι προφανώς γραμμικώς ανεξάρτητα. Αρα ο χώρος αυτός είναι απειροδιάστατος αφού περιέχει μια ακολουθία από γραμμικώς ανεξάρτητα ανύσματα. Αλλο παράδειγμα απειροδιάστατου χώρου που περιέχει ορθοκανονική ακολουθία χρήσιμη στις εφαρμογές είναι το εξής.Στο χώρο $L^2[-1,1]$ η ορθοκανονική ακολουθία

$$e_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x) \tag{19}$$

όπου

$P_0(x) = 1, P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

τα πολυώνυμα Legendre. Δηλαδή ισχύει:

$$\int_{-1}^{1} e_m^*(x).e_n(x) = \delta_{mn}$$

, και όπως προκύπτει από τον ολοκληρωτικό τύπο , η σχέση ορθοκανονικότητας των πολυωνύμων Legendre είναι:

$$\boxed{\int_{1}^{1} P_m^*(x).P_n(x) = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}}$$

Από τους απειροδιάστατους χώρους ενδιαφέρον για τις εφαρμογές παρουσιάζουν οι χώροι που έχουν τις καλές ιδιότητες του χώρου των πραγματικών αριθμών.Μια από αυτές είναι η ΄πληρότητα΄

Κάθε βασική ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει όριο πραγματικό αριθμό. Ας ορίσουμε την απόσταση δυό ανυσμάτων σαν μέτρο της διαφοράς τους.

$$\rho(|f>, |g>) \equiv ||f-g|| = \sqrt{<f-g|f-g>} \qquad (20)$$

Θα λέμε ότι μια ακολουθία ανυσμάτων $|f_n>, n = 1, 2, 3...$ είναι βασική, όταν

$$\rho(|f_n>, |f_m>) {\rightarrow} 0 \qquad (21)$$

Για $(m \to \infty, n \to \infty)$. Η (;;) είναι συνοπτική γραφή του εξής. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ακέραιος $N_0(\epsilon)$ τέτοιος ώστε για κάθε
$m, n > N_0(\epsilon) {\rightarrow} \rho(|f_m>, |f_n>) < \epsilon$.
Το άνυσμα $|f>$ ονομάζεται όριο μιας ακολουθίας $|f_n>$ και συμβολίζεται

$$|f_n> \to |f>, n \to \infty$$

όταν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ακέραιος $N_0(\epsilon)$ τέτοιος ώστε για κάθε $n > N_0(\epsilon)$ να ισχύει :

$$\rho(|f_n>, |f>) = ||f_n - f|| < \epsilon$$

Το όριο $|f>$ αν υπάρχει είναι μοναδικό.Πράγματι εάν και άλλο $|f'>$ ήταν όριο της ακολουθίας $|f_n>$ τότε :

$$||f-f'|| = ||(f-f_n)+(f_n-f'|| \leq ||f-f_n|| + ||f_n-f'||$$

Από την τριγωνική ανισότητα. Στο όριο τώρα $\to \infty$ έχουμε
$||f-f'|| = 0 \Longrightarrow |f> - |f'> = |0>, \Longrightarrow |f> = |f'>$

Μια ακολουθία που συγλίνει είναι και βασική ακολουθία
Πράγματι αν$|f>$ το όριο της ακολουθίας , τότε εφαρμόζοντας πάλι την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$||f_m-f_n|| = ||(f_m-f)+(f-f_n|| \leq ||f_m-f|| + ||f-f_n||$$

Αρα

$$\rho(|f_m>, |f_n>) = ||f_m-f_n|| \to 0, (n, m \to \infty$$

αφού

$$||f_m-f|| \to 0, ||f-f_n|| \to 0, (n, m \to \infty)$$

Το αντίστροφο όμως εν γένει δεν ισχύει . Αν όμως κάθε βασική ακολουθία συγκλίνει σε κάποιο άνυσμα του χώρου τότε θα λέμε ότι ο χώρος αυτός είναι **ΠΛΗΡΗΣ**.

Οι χώροι πεπερασμένης διάστασης είναι πλήρεις Εστω $|e_i>$, $(i = 1, 2, 3, .., N)$ μια ορθοκανονική βάση. Θα δείξουμε ότι κάθε βασική ακολουθία $|f_n>$ συγκλίνει σε άνυσμα $|f>$ του χώρου . Αναλύουμε κάθε όρο της $|f_n>$ ακολουθίας στην ορθοκανονική βάση.

$$|f_n> = \sum_{i=1}^{N} f_i^{(n)} |e_i> \tag{22}$$

όπου $f_i^{(n)} \equiv < e_i|f_n>$

$$\rho^2(|f_n>, |f_m>) \;=\; (< f_n-f_m|f_n-f_m>) = < \sum_{i=1}^{N}(f_i^{(n)}-f_i^{(m)})e_i| \sum_{j=1}^{N}(f_j^{(n)}-f_j^{(m)})e_j> =$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(f_i^{(n)}-f_i^{(m)})^*(f_j^{(n)}-f_j^{(m)})\delta_{ij} = \\
&= \sum_{i=1}^{N}|f_j^{(n)}-f_j^{(m)}|^2
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Επειδή η $|f_n>$ είναι βασική , ισχύει:$\rho^2(|f_n>,|f_m>)\to 0$,$n\to\infty, m\to\infty$. Αυτό σημαίνει ότι $|f_i^n - f_i^m|\to 0$. Δηλαδή η ακολουθία f_i^n των i-συνιστωσών είναι βασική. Επομένως συγκλίνει σε κάποιο μιγαδικό f_i (Πληρότητα του χώρου των μιγαδικών αριθμών).Αυτό ισχύει για κάθε $i = 1,2,3...,N$

Σχηματίζεται έτσι το άνυσμα:

$$|f>=\sum_{i=1}^{N} f_i|e_i>$$

Το άνυσμα αυτό είναι και το όριο της ακολουθίας $f_n>$.

$$|f_n>\to|f>,(n\to\infty)$$

Οι χώροι $L^2_{w(x)}[a,b]$ συναρτήσεων όπου το ολοκλήρωμα :

$$\int_a^b dxw(x)|f(x)|^2$$

$(w(x)>0)$,είναι πεπερασμένο και το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως:

$$<f|g>=\int_a^b dxw(x)f^*(x)g(x) \tag{24}$$

είναι πλήρεις χώροι. Τέτοια παραδείγματα πλήρων χώρων θα μας απασχολήσουν στο εξής.

3.2 Ανισότητα Bessel-Ισότητα Parseval

Σε απειροδιάστατο χώρο θεωρούμε ορθοκανονική ακολουθία $|e_1>,|e_2>,...,|e_n>$ και τυχαίο άνυσμα $|f>\neq|0>$. Με τους N-πρώτους όρους της ακολουθίας σχηματίζουμε το άνυσμα:

$$|S_N>=\sum_{i=1}^{N} f_i|e_i>, \text{ όπου } f_i \equiv <e_i|f>$$

Υπολογίζουμε την απόσταση $\rho^2(|f>,|S_N>)$

$$\begin{aligned}
0 &\leq \rho^2(|f>,|S_N) = <f-S_N|f-S_N>= \\
&= <f-\sum_{i=1}^{N} f_i e_i|f-\sum_{j=1}^{N} f_j e_j>=<f|f>-\sum_{i=1}^{N} f_i^* <e_i|f>- \\
&- \sum_{j=1}^{N} f_j <f|e_j>+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} f_i^* f_j <e_i|e_j>= \\
&= <f|f>-\sum_{i=1}^{N} f_i^* f_i-\sum_{j=1}^{N} f_j f_j^*+\sum_{i=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} f_i^* f_j \delta_{ij}= \\
&= <f|f>-\sum_{j=1}^{N} |f_j|^2 \qquad (25)
\end{aligned}$$

Καταλήγουμε έτσι στην ανισότητα

$$\boxed{\sum_{j=1}^{N} |f_j|^2 = \sum_{j=1}^{N} |<e_j|f>|^2 \leq <f|f>}$$

Βλέπουμε ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\sum_{j=1}^{N} |f_j|^2$ είναι μονότονη και φραγμένη από το τετράγωνο του μέτρου του ανύσματος $|f>$. Αρα έχει όριο κάποιο θετικό αριθμό $0 \leq <f|f>$. Επομένως σε ένα απειροδιάστατο χώρο για κάθε $|f>$ και για κάθε ορθοκανονική ακολουθία $[|e_n>]_{n=1}^{\infty}$ έχουμε την ανισότητα :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} |<e_n|f>|^2 \leq <f|f>}$$

η οποία ονομάζεται **ανισότητα Bessel**. Η ανισότητα Bessel μπορεί να είναι ισότητα για ορισμένα ανύσματα $|f>$ του χώρου. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση που γίνεται ισότητα για κάθε άνυσμα $|f>$.

Αν σε πλήρη χώρο S , μια ορθοκανονική βάση $[|e_1>, |e_2>, |e_3>, ...|e_n>, ...]$, έχει την ιδιότητα για κάθε άνυσμα του χώρου $|f>$ να ισχύει η ισότητα :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} |<e_n|f>|^2 = <f|f>}$$

η οποία είναι γνωστή σαν **ισότητα Parseval**, τότε στην περίπτωση αυτή η ακολουθία συνιστά **πληρες σύνολο** και αποτελεί βάση στο χώρο S.

Οι παραπάνω σχέσεις (Bessel, Parseval) είναι προφανείς εάν έχουμε χώρο πεπερασμένης διάστασης . Το γιατί θέλουμε ο απειροδιάστατος χώρος να είναι πλήρης φαίνεται από τα δύο παρακάτω θεωρήματα. Πρίν όμωω τα διατυπώσουμε ας δόσουμε ένα ορισμό της βάσης
Ορισμός: Μια ορθοκανονική ακολουθία $|e_i>$ θα ονομάζεται
βάση σε πλήρη χώρο εάν το μόνο άνυσμα που είναι ορθογώνιο σε όλα τα ανύσματα της ακολουθίας είναι το μηδενικό άνυσμα.
Ο ορισμός αυτός είναι ισοδύναμος με οποιοδήποτε άλλο ορισμό βάσης εάν ο χώρος είναι πεπερασμένης διάστασης. Ομως σε απειροδιάστατο χώρο δεν είναι προφανές τι θα ορίσουμε για βάση.

Εχοντας υπ΄ όψιν αυτόν τον ορισμό για τη βάση ενός πλήρους χώρου εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε τα παρακάτω θεωρήματα.
Θεώρημα 1 Μια ορθοκανονική ακολουθία $[|e_i>]$ αποτελεί
βάση σε πλήρη χώρο τότε και μόνο ΄τότε αν για κάθε άνυσμα $|f>$ του χώρου ισχύει η ισότητα του Parseval.
Θεώρημα 2 Εάν γνωρίζουμε μιά ορθοκανονική βάση σε πλήρη χώρο και για τυχαίο άνυσμα $|f>$ σχηματίζουμε την ακολουθία ανυσμάτων

$$|S_N> = \sum_{i=1}^{N} (<e_i|f>)|e_i> \tag{26}$$

τότε η ακολουθία αυτή έχει όριο το $|f>$.

$$|S_N> \to |f>, (N \to \infty)$$

και

$$\rho(|S_N>, |f>) \to 0, (N \to \infty)$$

και επομένως μπορούμε να γράψουμε:

$$|f> = \sum_{i=1}^{\infty} (<e_i|f>)|e_i> \tag{27}$$

Μερικά παραδείγματα ορθοκανονικών βάσεων , χρήσιμα στις εφαρμογές είναι τα εξής:

- Στο χώρο $L^2[-\pi, \pi]$ όπου[4] το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως

  $$<f|g> = \int_{-\pi}^{\pi} dx f^*(x) g(x)$$

  η ορθοκανονική ακολουθία

  $$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$$

  όπου $(\pm n = 0, 1, 2, ...)$, αποτελεί βάση.

- Στο χώρο $L^2[-1, 1]$ τα πολυώνυμα Legendre

  $$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

  με την κατάλληλη κανονικοποίηση

  $$e_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x)$$

  αποτελούν βάση.

[4] Οπως έχουμε αναφέρει όλοι οι χώροι τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με ή χωρίς συνάρτηση βάρους , είναι πλήρεις.Την απόδειξη την παραλείπουμε αλλά μια χρήσιμη άσκηση για την καλύτερη κατανόηση είναι η εξής: Δείξτε ότι ο χώρος l^2 είναι πλήρης με μια ορθοκανονική βάση την $|e_1 = (1, 0, 0, ..), |e_2 = (0, 1, 0, 0, ..), |e_3 = (0, 0, 1, 0, 0, ..), ...)$ κ.τ.λ.

- Στο χώρο $L^2_w(-\infty,\infty)$ και $w(x)=e^{-x^2}$ τα πολυώνυμα

$$e_n(x)=\sqrt{\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}}H_n(x)$$

,

όπου $H_n(x)$ τα πολυώνυμα Hermite

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

αποτελούν πλήρες ορθοκανονικό σύνολο.

3.3 Σειρές Fourier

Στο χώρο $L^2[-\pi,\pi]$ που αναφέραμε στο παράδειγμα 1 ένας γραμμικός συνδυασμός της βάσης αποτελεί το ορθοκανονικό πλήρες σύστημα: $e_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, e^c_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, e^s_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx$$

Ετσι για κάθε συνάρτηση $f(x)$, για την οποία ισχύει

$$\int_{\pi}^{\pi} dx|f(x)|^2$$

πεπερασμένο, αντιστοιχεί μια σειρά Fourier

$$f(x)\to\frac{A}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx) \tag{28}$$

οι συντελεστές Fourier δίνονται από τα ολοκληρώματα

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)\cos nx \tag{29}$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)\sin nx \tag{30}$$

Από αυτά που έχουμε ήδη αναφέρει είναι προφανής η ισότητα Parseval για τις σειρές Fourier:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx|f(x)|^2 = \frac{|A_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|A_n|^2 + |B_n|^2) \tag{31}$$

Για τις εφαρμογές όμως μας ενδιαφέρει να ξέρουμε πότε θα γράφουμε :

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx) \tag{32}$$

και πού συγκλίνει, σημείο προς σημείο, η τριγωνομετρική σειρά του δεξιού μέλους. Αυτό μας λέει το παρακάτω θεώρημα γνωστό ως θεώρημα Fourier

Θεώρημα:Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι περιοδική με περίοδο 2π,($f(x+2\pi) = f(x)$), και τμηματικά ομαλή στο διάστημα [-π,π] , τότε η σειρά της $f(x)$ συγκλίνει στο $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.
(Πιό ειδικά αν x σημείο συνέχειας η σειρά συγκλίνει στο $f(x)$). Για κάθε κλειστό υποδιάστημα όπου η $f(x)$ είναι συνεχής , η σειρά συγκλίνει ομαλά στην $f(x)$.

Για την ομαλή σύγκλιση της σειράς Fourier που έχει και το μεγαλύτερο ενδιαφέρον ισχύουν 2 κριτήρια ομαλής σύγκλισης.

Κριτήριο 1 Αν $f(x)$ είναι τμηματικά ομαλή στο (-π,π) και οι συντελεστές Fourier ικανοποιούν την :

$\sum_{n=1}^{\infty}(|A_n| + |B_n|) =$ πεπερασμένο

η σειρά συγκλίνει ομαλά στο $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Κριτήριο 2 Αν η $f(x)$ είναι τμηματικά ομαλή στο (-π,π) και επιπλέον συνεχής στο ίδιο διάστημα και ισχύει

$$f(-\pi+0)=f(\pi-0)$$

τότε η σειρά Fourier συγκλίνει ομαλά στην $f(x)$.

3.4 Μοναδικότητα της σειράς Fourier

Εάν $f(x)$, $g(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και έχουν τις ίδιες σειρές Fourier τότε ισχύει $f(x)=g(x)$ για όλα τα x .

Ενα ενδιαφέρον θεώρημα που η απόδειξή του μπορεί να στηριχθεί στην ομαλή συγκλιση των σειρών Fourier που αναφέραμε , είναι το θεώρημα προσέγγισης του Weirstrass για συνεχείς συναρτήσεις.

Θεώρημα 3: Εάν $f(x)$ συνεχής συνάρτηση στο [α,β] τότε για κάθε ἐ0 , υπάρχει πολυώνυμο $P_N(x)$, N βαθμού που εξαρτάται από το ε έτσι ώστε:

$|f(x)-P_N(x)||$ <ε , $a\leq x\leq b$

Σημείωση: Για την απόδειξη χρειάζεται το ανάπτυγμα Fourier σε τυχαίο διάστημα [α,β] . Με την αλλαγή μεταβλητής

$x=\frac{b-a}{2\pi}y+\frac{a+b}{2}$

τότε $a\leq x\leq b\rightarrow -\pi\leq y\leq\pi$, και επομένως μπορούμε να αναπτύξουμε την $f(y)$ κατά τα γνωστά στο διάστημα $-\pi\leq y\leq\pi$.Αν τώρα

$$f(y)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos ny+B_n\sin ny) \tag{33}$$

είναι το ανάπτυγμα ,τότε χρησιμοποιώντας γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες το ανάπτυγμα μπορεί να γραφεί στη μεταβλητή (x) ως:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos knx+b_n\sin knx) \tag{34}$$

όπου οι συντελεστές a,b είναι γραμμικοί συνδυασμοί των A,B και $k = \frac{2\pi}{b-a}$.

4 Τελεστές

4.1 Γραμμικοί Τελεστές σε πλήρεις χώρους

Γενικά ένας τελεστής μπορεί να ορισθεί σαν μια απεικόνιση . Σαν πεδίο ορισμού του θα θεωρούμε συνήθως όλον τον διανυσματικό χώρο . Για την ονομασία των τελεστών θα χρησιμοποιούμε κεφαλαία γράμματα με ένα καπέλο π.χ $\hat{T}$.Ετσι η δράση του τελεστή σε τυχαίο άνυσμα του πεδίου ορισμού του θα συμβολίζεται ως

$$\boxed{\hat{T}|f >= |g >}$$

Τετριμμένοι τελεστές είναι :

- Ο μηδενικός τελεστής
  Αν για κάθε άνυσμα $|f >$ του πεδίου ορισμού ισχύει

  $$\boxed{\hat{T}|f >= |0 >}$$

  τότε ο $\hat{T}$ είναι μηδενικός τελεστής
  Εχοντας ορίσει τον μηδενικό τελεστή ,μπορούμε να ορίσουμε την ταυτότητα 2 τελεστών. Δυό τελεστές $\hat{A}, \hat{B}$ είναι ίσοι και γράφουμε $\hat{A} = \hat{B}$, όταν για κάθε $|f >$ ισχύει:

  $$\hat{A}|f >= \hat{B}|f >$$

- Ταυτοτικός τελεστής
  Ο $\hat{T}$ είναι ταυτοτικός και τον συμβολίζουμε με $\hat{I}$.

Μπορούμε να ορίσουμε άθροισμα και γινόμενο τελεστών ως εξής. Για κάθε $|f>$ να ισχύει

- $(\hat{A}+\hat{B})|f>=\hat{A}|f>+\hat{B}|f>$
- $(\hat{A}\hat{B})|f>=\hat{A}(\hat{B}|f>)$

Προφανώς για το άθροισμα ισχύει $\hat{A}+\hat{B}=\hat{B}+\hat{A}$. Για το γινόμενο όμως δύο τελεστών δεν ισχύει εν γένει η ισότητα:

$$\boxed{\hat{A}\hat{B}\neq\hat{B}\hat{A}}$$

Λέμε ότι οι τελεστές $\hat{A}$και $\hat{B}$ δεν μετατίθενται. Αν ορίσουμε το μεταθέτη 2 τελεστών ως

$$\boxed{[\hat{A},\hat{B}]=\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}}$$

Τότε για τον μεταθέτη έχουμε ότι εν γένει

$$\boxed{[\hat{A},\hat{B}]\neq 0}$$

Αν η απεικόνιση που ορίζει ένας τελεστής $\hat{T}$ είναι ένα προς ένα (1-1) , τότε υπάρχει ο αντίστροφος , τον οποίο συμβολίζουμε ως $\hat{T}^{-1}$ και ισχύει προφανώς:

$$\boxed{\hat{T}\hat{T}^{-1}=\hat{T}^{-1}\hat{T}=\hat{I}}$$

Ξεχωριστό ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι γραμμικοί τελεστές και κυρίως τέτοιο τελεστές θα μας απασχολήσουν.

ΟρισμόςΕνας τελεστής $\hat{T}$ θα λέγεται γραμμικός αν για κάθε $|f>$ και $|g>$ και κάθε μιγαδικό λ ισχύει:

1. $\hat{T}(|f>+|g>)=\hat{T}|f>+\hat{T}|g>$
2. $\hat{T}(\lambda|f>)=\lambda(\hat{T}|f>)$

Ειδικά στην 2 βλέπουμε ότι οταν λ=0

$$\hat{T}(|0>=|0>$$

Ορισμένες από τις ¨καλές' ιδιότητες των γραμμικών τελεστών είναι οι ακόλουθες:

A) Το πεδίο τιμών είναι διανυσματικός χώρος.

B) Αν η διάσταση του πεδίου ορισμού είναι πεπερασμένη τότε θα είναι πεπερασμένη και η διάσταση του πεδίου τιμών .

Γ) Αν $\hat{A}$ και $\hat{B}$ είναι γραμμικοί τελεστές τότε θα είναι γραμμικοί και οι τελεστές
$(\hat{A}+\hat{B})$, $(\hat{A}.\hat{B})$ και $(\hat{B}.\hat{A})$

Δ) Ο αντίστροφος ενός γραμμικού τελεστή $\hat{T}$ υπάρχει τότε και μόνο όταν
$\hat{T}|f>=|0>$ συνεπάγεται ότι $|f>=|0>$
Μάλιστα αν υπάρχει ο αντίστροφος $\hat{T}^{-1}$ τότε και αυτός είναι γραμμικός τελεστής.
Μερικά απλά παραδείγματα γραμμικών τελεστων είναι :

1. Αν $\hat{A}$ γραμμικός τελεστής τότε και $\hat{A}^n = \hat{A}.\hat{A}.\hat{A}...\hat{A}$ (n φορές) είναι γραμμικός όπως και κάθε πολυώνυμο $P_N(\hat{A}) = \sum\limits_{m=0}^{N} a_m\hat{A}^m$ με συντελεστές a_m μιγαδικούς είναι επίσης γραμμικός τελεστής.

2. Μέσω της εκθετικής σειράς $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+...$ μπορούμε να ορίσουμε τον τελεστή
$$e^{\hat{A}} = \hat{I}+\hat{A}+\frac{1}{2!}\hat{A}^2+...$$
και να δείξουμε ότι είναι γραμμικός.

3. Εστω $h\frac{d}{dx}$ ο γραμμικός τελεστής που δρά στο χώρο των πραγματικών αναλυτικών συναρτήσεων $f(x)$ (h= πραγματικό) (Δηλαδή συναρτήσεων με παραγώγους κάθε τάξης). Τότε[5]

$$e^{h\frac{d}{dx}}f(x) = (\hat{I} + h\frac{d}{dx} + \frac{1}{2!}h^2\frac{d^2}{dx^2} + ...)f(x) = f(x+h) \qquad (35)$$

Τα παραπάνω ισχύουν γενικά για την δράση γραμμικών τελεστών σε τυχαίους διανυσματικούς χώρους. Ακόμη όμως μεγαλύτερο ενδιαφέρον έχουν οι γραμμικοί τελεστές όταν δρούν σε πλήρεις χώρους. Εστω ένας γραμμικός τελεστής $\hat{A}$ που δρά σε πλήρη χώρο.

Ορισμός Εάν υπάρχει τελεστής , τον οποίο θα συμβολίζουμε με $\hat{A}^+$ τέτοιος ώστε για κάθε $|f>$ και $|g>$ να ισχύει:

$$< \hat{A}^+ g|f> = < g|\hat{A}f>$$

τότε ο $\hat{A}^+$ ονομάζεται **ερμιτιανός συζυγής** του $\hat{A}$ και είναι γραμμικός τελεστής. Ο ερμιτιανός συζυγής , όταν υπάρχει, είναι και μονοσήμαντα ορισμένος. Πράγματι έστω ${\hat{A}_1}^+, {\hat{A}_2}^+$ ερμιτιανοί συζυγείς του $\hat{A}$. Τότε για κάθε $|g>$ και $|f>$ θα ισχύει

$$\begin{aligned} < ({\hat{A}_1}^+ - {\hat{A}_2}^+)g|f> &= < {\hat{A}_1}^+ g|f> - < {\hat{A}_2}^+ g|f> = \\ &= < g|\hat{A}f> - < g|\hat{A}f> = 0 \qquad (36) \end{aligned}$$

Δηλαδή το άνυσμα $({\hat{A}_1}^+ - {\hat{A}_2}^+)|g>$ θα ήταν ορθογώνιο σε κάθε άνυσμα του χώρου, επομένως το μηδενικό .

$({\hat{A}_1}^+ - {\hat{A}_2}^+)|g> = |0>$ συνεπάγεται:

$$\boxed{{\hat{A}_1}^+|g> - {\hat{A}_2}^+|g> = |0>}$$

Επειδή η τελευταία σχέση ισχύει για το τυχαίο άνυσμα $|g>$ από τον ορισμού της ισότητας των τελεστών προκύπτει: ,

[5] ο τελεστής $\frac{d}{dx}$ ονομάζεται και γεννήτορας των μεταθέσεων γιατί η εκθετική συνάρτηση 'γεννάει' τις μεταθέσεις $x \to x+h$.

$$\boxed{\hat{A_1}^+ = \hat{A_2}^+}$$

Επίσης ισχύει $(\hat{A}^+)^+ = \hat{A}$.

Μπορούν εύκολα από τον ορισμό να αποδειχθούν οι ιδιότητες:

1. $(\hat{A} + \hat{B})^+ = \hat{A}^+ + \hat{B}^+$

2. $(\hat{A}.\hat{B})^+ = \hat{B}^+.\hat{A}^+$

3. $(\lambda\hat{A})^+ = \lambda^*\hat{A}^+$

4. $\hat{A}^+\hat{A} = 0 \Longrightarrow \hat{A} = 0$

Μέσω του ερμιτιανού συζυγή μπορούν να ορισθούν τελεστές με μεγάλη χρησιμότητα όπως θα δούμε παρακάτω.Τέτοιοι τελεστές είναι:

1. **Αυτοσυζυγής**(Αυτοπροσαρτημένος ή ερμιτιανός)

   $$\boxed{\hat{A}^+ = \hat{A}}$$

2. **Μοναδιακός ή Μοναδιαίος**

   $$\boxed{\hat{U}^+ = \hat{U}^{-1}}$$

3. **Κανονικός**

   $$\boxed{\hat{A}^+\hat{A} = \hat{A}\hat{A}^+}$$

   (Σημ:Σε ένα πραγματικό χώρο ο αυτοσυζυγής ονομάζεται και συμμετρικός , ενώ ο μοναδιακός ονομάζεται και ορθογώνιος)

4. **Προβολικός**Ενας γραμμικός και φραγμένος [6] τελεστής $\hat{P}$ λέγεται προβολικός όταν:

   $$\boxed{\hat{P}^+ = \hat{P}, \hat{P}^2 = \hat{P}}$$

[6]Ενας γραμμικός τελεστής $\hat{A}$ είναι φραγμένος όταν υπάρχει θετικός αριθμός C έτσι ώστε $||\hat{A}|f>|| \leq C||f||$,για κάθε $|f>$

Ενα ενδιαφέρον πρόβλημα που αφορά τους γραμμικούς τελεστές και θα μας απασχολήσει ιδιαίτερα είναι αυτό της εξίσωσης **ιδιοτιμών** και **ιδιοσυναρτήσεων** ενός τελεστή $\hat{A}$.

$$\hat{A}|f>=\lambda|f> \tag{37}$$

όπου λ εν γένει μιγαδικός αριθμός και $|f>\neq|0>$. Για κάποιους γραμμικούς τελεστές η επίλυση αυτής της εξίσωσης, δηλαδή η εύρεση των ιδιοτιμών και των ιδιοσυναρτήσεων που αντιστοιχούν σε αυτές τις ιδιοτιμές, έχει ιδιαίτερη σημασία αφού όπως θα δούμε μπορούν να οδηγήσουν σε πλήρες ορθοκανονικό σύνολο (βάση).
Παρακάτω διατυπώνουμε δύο θεωρήματα που αφορούν κανονικούς τελεστές.

Θεώρημα 1

Αν $\hat{A}$ κανονικός τελεστής και λ ιδιοτιμή του ιδιοανύσματος $|f>$ δηλαδή :

$$\hat{A}|f>=\lambda|f>$$

τότε ο $\hat{A}^{+}$ έχει ιδιοάνυσμα το $|f>$ με ιδιοτιμή λ^{*}, δηλαδή

$$\hat{A}^{+}|f>=\lambda^{*}|f>$$

Απόδειξη . Επειδή $\hat{A}\hat{A}^{+}=\hat{A}^{+}\hat{A}$ συνεπάγεται ότι $\hat{D}\hat{D}^{+}=\hat{D}^{+}\hat{D}$ όπου $\hat{D}\equiv\hat{A}-\lambda\hat{I}$. Αλλά αφού $|f>$ ιδιοάνυσμα του $\hat{A}$ έχουμε:

$$\hat{D}|f>=(\hat{A}-\lambda\hat{I})|f>=|0>$$

τότε όμως
$<\hat{D}^{+}f|\hat{D}^{+}f>=<f|\hat{D}\hat{D}^{+}f>=<f|\hat{D}^{+}\hat{D}f>=<\hat{D}f|\hat{D}f>=0$
Αρα $\hat{D}^{+}|f>=0$ και $(\hat{A}^{+}-\lambda^{*}\hat{I})|f>=|0>$

$$\hat{A}^{+}|f>=\lambda^{*}|f>$$

Θεώρημα 2

Τα ιδιοανύσματα κανονικού τελεστή που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

Απόδειξη . Αν $\lambda_1 \neq \lambda_2$ και $\hat{A}|f_1 >= \lambda_1|f_1 >$, $\hat{A}|f_2 >= \lambda_2|f_2 >$ τότε σύνφωνα με το προηγούμενο θεώρημα έχουμε :

$$\begin{aligned} \lambda_2 < f_1|f_2 > &= < f_1|\hat{A}f_2 >=< \hat{A}^+f_1|f_2 >= \\ &= (< f_2|\hat{A}^+f_1 >)^* = (\lambda_1^* < f_2|f_1 >)^* = \\ &= \lambda_1 < f_1|f_2 > \end{aligned} \tag{38}$$

και $(\lambda_2 - \lambda_1) < f_1|f_2 >= 0$ Επομένως:

$$< f_1|f_2 >= 0$$

Οταν δυό ιδιοανύσματα γραμμικώς ανεξάρτητα αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή τότε λέμε ότι υπάρχει εκφυλισμός. Αν για παράδειγμα

$$\hat{A}|f_1 >= \lambda|f_1 >, \hat{A}|f_2 >= \lambda|f_2 >$$

τότε κάθε γραμμικός συνδιασμός $k_1|f_1 > +k_2|f_2 >$ είναι επίσης ιδιοάνυσμα του τελεστή $\hat{A}$ με την ίδια ιδιοτιμή.

$$\begin{aligned} \hat{A} & \quad (k_1|f_1 > +k_2|f_2 >) = k_1(\hat{A}|f_1 >) + k_2(\hat{A}|f_2 >) \\ = & \quad k_1\lambda|f_1 > +k_2\lambda|f_2 >= \lambda(k_1|f_1 > +k_2|f_2 >) \end{aligned} \tag{39}$$

4.2 Γραμμικοί τελεστές σε χώρους πεπερασμένης διάστασης

Εστω $\{|e_1 >, |e_2 >, ..., |e_N >\}$ μια ορθοκανονική βάση σε χώρο N-διάστασης . Τότε η δράση ενός γραμμικού τελεστή $\hat{A}$ όταν είναι γνωστή η δράση του στα ανύσματα βάσης .

$$\hat{A}|e_j >, j = 1, 2, 3, ..., N$$

Για τυχαίο άνυσμα του χώρου

$$|f>=\sum_{j=1}^{N} f_j|e_j>, f_j=<e_j|f>$$

ισχύει:

$$\hat{A}|f>=\sum_{j=1}^{N} f_j(\hat{A}|e_j>)=\sum_{j=1}^{N}(\hat{A}|e_j>)<e_j|f> \tag{40}$$

οι συνιστώσες του νέου ανύσματος

$$|g>=\hat{A}|f>$$

δίνονται από τις προβολές στα ανύσματα βάσης.

$$\begin{aligned} g_i &\equiv <e_i|g>=<e_i|\sum_{j=1}^{N} f_j(\hat{A}|e_j>)= \\ &= \sum_{j=1}^{N} f_j(<e_i|\hat{A}|e_j>)=\sum_{j=1}^{N}(<e_i|\hat{A}|e_j>)<e_j|f> \end{aligned} \tag{41}$$

Αν τους μιγαδικούς αριθμούς $<e_i|\hat{A}|e_j>$ τους ονομάσουμε a_{ij}, τότε η σχέση που δίνει τις συνιστώσες g_i γράφεται:

$$g_i=\sum_{j=1}^{N} a_{ij} f_j, i=1,2,...,N$$

Αν τα ανύσματα του χώρου τα παραστήσουμε με στήλες τότε η προηγούμενη σχέση γράφεται ως:

$$|g>=\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ . \\ . \\ g_N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ f_N \end{pmatrix}$$

Βλέπουμε ότι ένας γραμμικός τελεστής που δρά σε χώρο πεπερασμένης διάστασης αναπαρίσταται με τετραγωνικό πίνακα με στοιχεία τους μιγαδικούς

$$\boxed{a_{ij}=<e_i|\hat{A}|e_j>}$$

όπου $|e_j>, (j = 1, 2, 3..N)$ τα ανύσματα μιας ορθοκανονικής βάσης. Ετσι όλη η άλγεβρα των γραμμικών τελεστών μεταφέρεται στην άλγεβρα των τετραγωνικών πινάκων με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς. Ο ερμιτιανός συζυγής υπάρχει για κάθε γραμμικό τελεστή $\hat{A}$ και δεν είναι άλλος από τον ερμιτιανό συζυγή πίνακα

$$\hat{A}^{+} \rightarrow (A^{+})_{ij} = (A)^{*}_{ji}$$

Το άθροισμα $\hat{A}+\hat{B}$ και το γινόμενο $\hat{A}.\hat{B}$ δυό γραμμικών τελεστών μεταφέρεται στο άθροισμα και γινόμενο των πινάκων που αναπαριστούν τους τελεστές $\hat{A}, \hat{B}$

$$\hat{A} + \hat{B} \rightarrow (A)_{ij} + (B)_{ij}$$

και

$$\hat{A}\hat{B} \rightarrow \sum_{k=1}^{N} (A)_{ik}(B)_{kj}$$

Ο ταυτοτικός τελεστής $\hat{I}$ αντιστοιχεί σε μοναδιαίο πίνακα

$$\boxed{\hat{I} \rightarrow (I)_{ij} = \delta_{ij}}$$

και ο μηδενικός τελεστής αναπαρίσταται με τον μηδενικό πίνακα (όλα τα στοιχεία του πίνακα είναι μηδέν)

4.3 Αλλαγή ορθοκανονικής βάσης

Ας θεωρήσουμε δυό ορθοκανονικές βάσεις :

$$|e_i^{'}>, (i = 1, 2, ...N)$$

$$|e_k>, (k = 1, 2, ...N)$$

Τότε προφανώς η $|e_i^{'}>$ είναι γραμμικός συνδιασμός της $|e_k>$. Δηλαδή

$$\boxed{|e_i^{'}>= \sum_{k=1}^{N} u_{ki}|e_k>}$$

όπου $u_{ki} \equiv < e_k|e_i^{'} >$. Ορίζουμε πίνακα $\hat{U}$ με στοιχεία $U_{ik} = u_{ik}$. Λόγω της ορθοκανονικότητας έχουμε:

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= < e_i^{'}|e_j^{'} > = < \sum_{\lambda=1}^{N}(U)_{\lambda i}e_\lambda| \sum_{k=1}^{N}(U)_{kj}e_j > = \\ &= \sum_{\lambda=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}(U)_{\lambda i}^{*}(U)_{kj} < e_\lambda|e_k > = \\ &= \sum_{k=1}^{N}(U)_{ki}^{*}(U)_{kj} = \sum_{k=1}^{N}(U^{+})_{ik}(U)_{kj} \end{aligned} \quad (42)$$

Δηλαδή δείξαμε ότι:

$$\hat{U}^{+}\hat{U} = \hat{I}$$

Ομοίως και

$$\hat{U}\hat{U}^{+} = \hat{I}$$

Αρα ο πίνακας $\hat{U}$ που συνδέει τις δυό βάσεις είναι μοναδιακός [7]

$$\boxed{(\hat{U^{+}}) = (\hat{U})^{-1}}$$

4.4 Εξίσωση ιδιοτιμών-ιδιοανυσμάτων

Η εξίσωση ιδιοτιμών $(\hat{A} - \lambda\hat{I})|f >= 0$, χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση του τελεστή με πίνακα $(A)_{ij}$ και το διάνυσμα με στήλη με στοιχεία τις συνιστώσες f_j, γράφεται ως:

$$\sum_{j=1}^{N}[(A)_{ij} - \lambda\delta_{ij}]f_j = 0 \quad (43)$$

Δηλαδή προκύπτει ένα γραμμικό ομογενές σύστημα N εξισώσεων με N αγνώστους $f_j, j = 1, 2, ..., N$. Επειδή αναζητούμε λύση $|f > \neq |0 >$, άρα η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων πρέπει να ισούτε με μηδέν.

$$det[A - \lambda I] = 0 \quad (44)$$

[7] Σημείωση:Το ότι υπάρχει ο αντίστροφος $\hat{U^{-1}}$ οφείλεται στο ότι τα $|e_i^{'} >$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα οπότε η ορίζουσα του $\hat{U} \neq 0$

Η εξίσωση ιδιοτιμών (;;) είναι μια αλγεβρική εξίσωση Ν-τάξης και επομένως έχει Ν το πλήθος ρίζες, τις ιδιοτιμές του πίνακα Α. Εν γένει ,(όχι πάντα) θα υπάρχουν Ν-πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοανύσματα που αντιστοιχούν σε αυτές τις ιδιοτιμές. Ετσι έχουμε μια βάση απο την οποία μπορούμε να κατασκευάσουμε με την μέθοδο Gram-Schmidt μια άλλη ορθοκανονική. Ειδικά όμως για τους κανονικούς τελεστές ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3 (Φασματικό) Εστω (Α) κανονικός πίνακας (αναπαράσταση κανονικού τελεστή)
α) Το πλήθος ιδιοανυσμάτων που αντιστοιχούν σε κάποια ιδιοτιμή λ είναι ίδιο με την αλγεβρική πολλαπλότητά της ιδιοτιμής

β)Τα ιδιοανύσματα του $\hat{A}$ αποτελούν βάση. Ειδικά όταν όλες οι ιδιοτιμές είναι απλές, τότε η βάση αυτή είναι και ορθοκανονική.

Γενίκευση του φασματικού θεωρήματος σε απειροδιάστατους χώρους μπορεί να γίνει μέσω ειδικής κατηγορίας τελεστών , τους πλήρως συνεχείς τελεστές.

Ορισμός Ενας γραμμικός τελεστής $\hat{A}$ λέγεται πλήρως συνεχής ή συμπαγής , όταν απεικονίζει κάθε φραγμένη ακολουθία $|f_n>$ σε μια ακολουθία $|g_n>=\hat{A}|f_n>$, η οποία περιέχει συγκλίνουσα υποακολουθία.
Εχουμε λοιπόν το παρακάτο σπουδαίο θεώρημα για απειροδιάστατους χώρους.

Θεώρημα 4 (Φασματικό) Εστω $\hat{A}$ **γραμμικός** τελεστής που είναι **αυτοσυζυγής** και **πλήρως συνεχής**. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

- Οι ιδιοτιμές του $\hat{A}$ είναι πραγματικές
- Υπάρχει τουλάχιστον μια ιδιοτιμή $\lambda_i \neq 0$
- Τα ιδιοανύσματα που αντιστοιχούν σε κάθε ιδιοτιμή $\lambda_i \neq 0$, είναι

πεπερασμένα το πλήθος

- Ο $\hat{A}$ έχει μια πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία ιδιοανυσμάτων $|e_1>$ $, |e_2>, |e_3>, ...$ που αντιστοιχούν στις μη μηδενικές ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ...$ όπου $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ...,$, έτσι ώστε για κάθε $|g>= \hat{A}|f>$ να ισχύει η ισότητα

$$\boxed{<g|g>= \sum_k |<e_k|g>|^2}$$

- **Τα ιδιοανύσματα** του τελεστή $\hat{A}$ συνιστούν **ορθοκανονική βάση** στον **πλήρη χώρο** που δρά ο τελεστής $\hat{A}$ (Εφόσον οι ιδιοτιμές είναι διάφορες του μηδενός και $\lambda_n \to 0, n \to \infty$).

Ας θεωρήσουμε τον τελεστή $\hat{D} = -\frac{d^2}{dx^2}$ που δρά στο χώρο $L^2[0,1]$ των συναρτήσεων που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες, $f(0) = f(1) = 0$. Ο $\hat{D}$ είναι αυτοσυζυγής.

$$\begin{aligned} <f|\hat{D}g> &= \int_0^1 dx f^*[-\frac{d^2}{dx^2}g(x)] = [-f^*(x)\frac{dg(x)}{dx}]|_0^1 + \int_0^1 dx \frac{df^*(x)}{dx}\frac{dg(x)}{dx} = \\ &= (\frac{df^*(x)}{dx}g(x) - f^*(x)\frac{dg(x)}{dx})|_0^1 + \int_0^1 dx[-\frac{d^2}{dx^2}f(x)]^* g(x) \qquad (45) \end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος στο δεξιό μέρος μηδενίζεται λόγω των συνοριακών συνθηκών και ο δεύτερος γράφεται ως $<\hat{D}f|g>$.Αρα δείξαμε ότι

$$\boxed{<f|\hat{D}g>=<\hat{D}f|g>}$$

Επομένως $\hat{D}^+ = \hat{D}$. Ας δούμε τώρα την εξίσωση ιδιοτιμών- ιδιοανυσμάτων του τελεστή $\hat{D}$

$$-\frac{d^2}{dx^2}u(x) = \lambda u(x)$$

,

$$u(0) = 0 = u(1)$$

Οπως ξέρουμε η λύση του προβλήματος αυτού είναι

$$-\frac{d^2}{dx^2}\phi_n(x) = \lambda_n \phi_n(x)$$

όπου

$\lambda_n = 4\pi^2 n^2$, και $\phi_n(x) = \sin(2\pi n x), (n = 1, 2, 3, ..)$

Η ακολουθία των ανυσμάτων $\phi_n(x)$ είναι φραγμένη . Η δράση όμως του τελεστή $\hat{D}\phi_n(x) = 4\pi^2 n^2 \phi_n(x)$ πάνω στην ακολουθία των ιδιοανυσμάτων του δεν περιέχει καμμία υποακολουθία που να συγκλίνει. Δηλαδή ο τελεστής $\hat{D}$ δεν είναι πλήρως συνεχής. Τα ιδιοανύσματα όμως $\phi_n(x)$ συνιστούν βάση . Αυτό συμβαίνει γιατί το πρόβλημα ιδιοτιμών και ιδιοανυσμάτων του $\hat{D}$ είναι ισοδύναμο με αντίστοιχο πρόβλημα για ένα ολοκληρωτικό τελεστή $\hat{K}$ που είναι πλήρως συνεχής.. Συγκεκριμένα

$$\int_0^1 K(x,s)\phi_n(s)ds = \mu_n \phi_n(x)$$

όπου $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n} = \frac{1}{4\pi^2 n^2}$

$$K(x,s) = \begin{cases} x(1-s) & : \quad 0 \leq x \leq s \leq 1 \\ s(1-x) & : \quad 0 \leq s \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\phi_n(x) = \sin(2\pi n x)$$

Εν γένει οι γραμμικοί διαφορικοί τελεστές , και ιδιαίτερα αυτοί που θα μας απασχολήσουν , δεν είναι πλήρως συνεχείς.Ομως μπορεί να δειχθεί ότι το πρόβλημα ιδιοτιμών-ιδισυναρτήσεων ενός διαφορικού τελεστή είναι ισοδύναμο με αντίστοιχο πρόβλημα ιδιοτιμών -ιδιοσυναρτήσεων ενός ολοκληρωτικού τελεστή με τις ίδιες ιδιοσυναρτήσεις , ο οποίος είναι πλήρως συνεχής. Επομένως το φασματικό θεώρημα εφαρμόζεται για τις ιδιοσυναρτήσεις του διαφορικού τελεστη και έτσι αυτές αποτελούν ορθοκανονική βάση.

Προβλήματα Sturm-Liouville Εστω ο διαφορικός τελεστής

$$\hat{A} \equiv -\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx} + q(x)$$

όπου $p(x) > 0, q(x)$ πραγματικές , που δρά στο χώρο $L^2[a,b]$. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα Lagrange

$$f^*(\hat{A}g) - f(\hat{A}f^*) \equiv \frac{d}{dx}[p(x)(\frac{df^*}{dx}g - f^*\frac{dg}{dx})]$$

έχουμε για καθε ζευγάρι $f(x), g(x)$

$$\begin{aligned} < f|\hat{A}g > &= \int_a^b f^*(x)[\hat{A}g(x)] = \\ &= \int_a^b [\hat{A}f(x)]^* g(x) + [p(x)(\frac{df^*}{dx}g(x) - f^*(x)\frac{dg}{dx})]|_a^b = \\ &= < \hat{A}f|g > +(p(x)[f^{*'}(x)g(x) - f^*(x)g^{'}(x)])|_a^b \end{aligned} \tag{46}$$

Βλέπουμε ότι για να είναι αυτοσυζυγής ο $\hat{A}$ θα πρέπει

$$p(b)[f^{*'}(b)g(b) - f^*(b)g^{'}(b)] = p(a)[f^{*'}(a)g(a) - f^*(a)g^{'}(a)]$$

Η συνθήκη αυτή μπορεί να πραγματοποιείται με διάφορους τρόπους.

- Από τον ίδιο τον τελεστή $\hat{A}$ όταν ικανοποιούνται οι συνθήκες :

$$p(a) = p(b) = 0$$

- Από τις συναρτήσεις $f(x)$ όταν ικανοποιούν κατάλληλες συνοριακές συνθήκες π.χ. :

$$f(a) = f(b) = 0$$

Γενικώτερα τα προβλήματα που θα μας απασχολήσουν (προβλήματα συνοριακών τιμών) η εξίσωση ιδιοτιμών για τον διαφορικό τελεστή παίρνει τη μορφή:

$$\boxed{\frac{d}{dx}[p(x)\frac{du(x)}{dx}] + [\lambda w(x) - q(x)]u(x) = 0}$$

όπου λ=ιδιοτιμή , $w(x) > 0$ συνάρτηση βάρους και οι ιδιοσυναρτήσεις να ικανοποιούν συνθήκες της μορφής

$$Au(a) + Bu^{'}(a) = 0, Cu(b) + Du^{'}(b) = 0$$

Τα προβλήματα αυτά ονομάζονται , προβλήματα **Sturm-Liouville**.