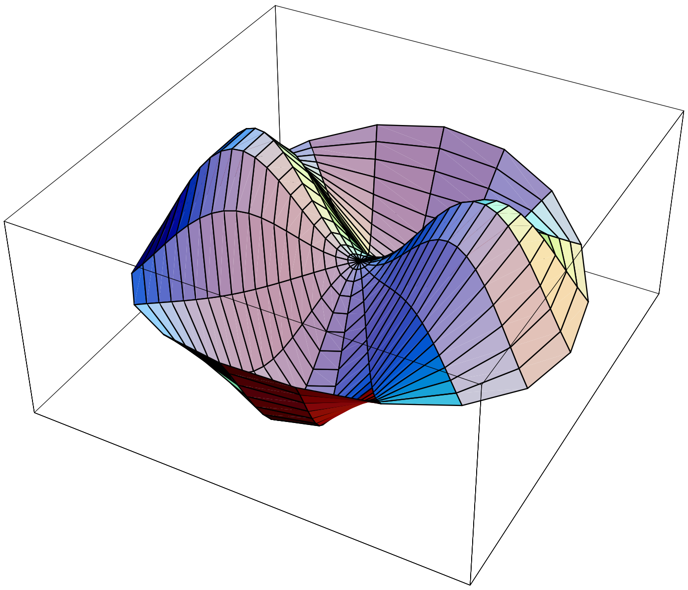
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ



ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗ ΧΙΟΥ-ΛΑΧΑΝΑ

ΑΘΗΝΑ 2006

ΜΕΡΟΣ Ι

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

1 Διαφορικές Εξισώσεις Μαθηματικής Φυσικής

1.1 Εισαγωγή

Η μαθηματική διατύπωση των φυσικών νόμων που διέπουν φαινόμενα σε συνεχή μέσα, δίνεται μέσω διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους (δ.ε.μ.π). Αναφέρουμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα εξισώσεων της μαθηματικής φυσικής τα οποία καλύπτουν μια μεγάλη κατηγορία φυσικών φαινομένων .

- Εξίσωση Laplace (συχνά αναφέρεται και ως εξίσωση δυναμικού)

$$\nabla^2 F(\vec{\mathbf{x}}) \;=\; 0 \tag{1}$$

  - Ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα (ηλεκτροστατική, μαγνητοστατική ,στάσιμα ρεύματα).
  - Υδροδυναμική (τέλεια υγρά).
  - Θερμοδυναμική (κατανομή θερμότητας σε κατάσταση θερμικής ισορροπίας).

  κ.α.

- Εξίσωση Poisson

$$\nabla^2 F(\vec{\mathbf{x}}) = q \tag{2}$$

  - Η εξίσωση Poisson είναι η γενίκευση της εξίσωσης Laplace παρουσία πηγών (μη ομογενής δ.ε.)

- Εξίσωση διάχυσης

$$\nabla^2 F(\vec{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{a^2}\frac{\partial F(\vec{\mathbf{x}}, t))}{\partial t} \tag{3}$$

  - Εξίσωση διάδοσης θερμότητας σε μέσο με σταθερό συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας.

- { Διάδοση ενός υγρού σε ισότροπο μέσο(χημεία)
- { Ο ρυθμός μεταβολής του αριθμού των νετρονίων σε ραδιενεργό υλικό (πυρηνικό αντιδραστήρα).
- { Διάδοση της στροβιλότητας σε μέσο.
- { Εξίσωση του Maxwell σε μέσο το οποίο είναι καλός αγωγός (μεγάλη αγωγιμότητα)

- Εξίσωση διάδοσης θερμότητας σε μέσο με μη σταθερό συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας.

$$k \cdot \nabla^2 F(\vec{\mathbf{x}}, t) + \nabla k \cdot \nabla F(\vec{\mathbf{x}}, t) = c\rho \frac{\partial F(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \tag{4}$$

όπου k ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας ,ρ η πυκνότητα και c η ειδική θερμότητα.

- Κυματική εξίσωση

$$\nabla^2 F(\vec{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F(\vec{\mathbf{x}}, t)}{\partial t^2} \tag{5}$$

- { Διάδοση ηλακτρομαγνητικών και ακουστικών κυμάτων όπου c η ταχύτητα διάδοσης του κύματος,
- { Ταλαντώσεις ελαστικών μέσων,(χορδή ,μεμβράνη) με $c^2 = \frac{T}{\rho}$ όπου ρ η γραμμική πυκνότητα και T η τάση της χορδής.

- Εξίσωση Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2) F(\vec{\mathbf{x}}) = 0 \tag{6}$$

Η εξίσωση Helmholtz προκύπτει από τις παραπάνω εξισώσεις όταν διαχωρίσουμε το χρονικό μέρος.

- Εξηναγκασμένη ταλάντωση (χορδή σε πεδίο δυνάμεων ,τριβές, κ.λ.π)

$$\nabla^2 F(\vec{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F(\vec{\mathbf{x}}, t)}{\partial t^2} + G(\vec{\mathbf{x}}, t) \tag{7}$$

- Και επιπλέον μια μεγάλη κατηγορία προβλημάτων κλασσικής φυσικής , βαρύτητας , κβαντομηχανικής και σχετικιστικών θεωριών.

Ολες οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να γραφτούν σε γενική μορφή ως εξής:

$$\mathbf{L}F(\vec{x},t) + kF(\vec{x},t) = G(\vec{x},t) \tag{8}$$

όπου L διαφορικός τελεστής ο οποίος περιέχει παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές (θέση,χρόνο).Η $G(\vec{x},t)$ είναι βαθμωτή ή ανυσματική συνάρτηση και η $F(\vec{x},t)$ το βαθμωτό ή ανυσματικό ¨πεδίο¨. Η εξίσωση (8) είναι διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους και έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά

- είναι γραμμική (δέν περιέχει γινόμενα της $F(\vec{x},t)$ με τον εαυτό της ή με παραγώγους της)
- είναι διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης.
- Εάν η $G(\vec{x},t) = 0$ τότε η δ.ε. είναι και ομογενής

1.2 Γενική εισαγωγή περί δ.ε.μ.π.

Στη γενική της μορφή μια δ.ε.μ.π. είναι μια συνάρτηση της μορφής

$$F(u(x_i), x_i, \frac{\partial u(x_i)}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u(x_i)}{\partial x_i \partial x_j}, ..., \frac{\partial^N u(x_i)}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} .... \partial x_n^{l_n}}) = q(x_i) \tag{9}$$

όπου x_i οι ανεξάρτητες μεταβλητές ,$u(x_i)$ η άγνωστη συνάρτηση , λύση, και $l_1 + l_2 + l_3 + ...l_n = N$ η τάξη της δ.ε. Εάν η συνάρτηση F είναι γραμμική ως προς την άγνωστη συνάρτηση $u(x_i)$ και όλες τις παραγώγους της τότε η δ.ε. είναι **γραμμική**. Εάν η $q(x_i) = 0$ η εξίσωση είναι και ομογενής. Οι εξισώσεις της μαθηματικής φυσικής που αναφέραμε είναι όλες γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης δύο, τριών ή τεσσάρων ανεξάρτητων μεταβλητών . Στα προβλήματα Φυσικής, όπου η μια ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος , οι λύσεις εκφράζουν το τρόπο με τον οποίο εξελίσσονται χρονικά τα φυσικά φαινόμενα (εξελικτικές λύσεις).

Η γενική λύση μιας κοινής δ.ε.(κ.δ.ε.) περιέχει έναν αριθμό αυθαίρετων σταθερών όσο και η τάξη της κ.δ.ε. Οι σταθερές αυτές προσδιορίζονται από τις κατάλληλες συνθήκες που καθορίζονται σε σταθερό σημείο. Στις δ.ε.μ.π. (n) τάξης και (m) ανεξάρτητων μεταβλητών η γενική λύση περιέχει (n) αυθαίρετες συναρτήσεις . Κάθε αυθαίρετη συνάρτηση είναι συνάρτηση $(m-1)$ ανεξάρτητων μεταβλητών. Εάν αναζητούμε μια ειδική λύση του προβλήματος, θα πρέπει να ορίσουμε κατάλληλες συνθήκες ώστε να καθορίζονται μονοσήμαντα οι αυθαίρετες συναρτήσεις. Οι συνθήκες, στην περίπτωση αυτή, ορίζονται πάνω σε επιφάνειες (οι επιφάνειες εκφυλίζονται σε σημείο για τις κ.δ.ε.).

Στη θεωρία των γραμμικών δ.ε.μ.π. υπάρχει το θεώρημα των **Cauchy-Kovalevski** το οποίο ορίζει τις κατάλληλες συνθήκες που απαιτούνται, για να εξασφαλίσουμε τη λύση της εξίσωσης και να είναι και μοναδική. Σύμφωνα με το θεώρημα, οι συνοριακές συνθήκες θα πρέπει να είναι τόσες όσες απαιτούνται ώστε, σε συνδυασμό και με την ίδια τη διαφορική εξίσωση,να μπορούμε να υπολογίσουμε όλες τις παραγώγους της $u(x_i)$ γύρω από τη συνοριακή επιφάνεια και να πάρουμε τη λύση σε ανάπτυγμα Taylor. Παρακάτω θα μελετήσουμε το πρόβλημα αυτό (πρόβλημα -Cauchy) για τις δύο διαστάσεις.

Οι γραμμικές δ.ε.μ.π. δεύτερης τάξης για δύο ανεξάρτητες μεταβλητές μπορούν να γραφούν στην πιό γενική τους μορφή ως εξής:

$$\begin{aligned} A &\quad (x,y)\,\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} + 2\,B(x,y)\,\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} + C(x,y)\,\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} = \\ G &\quad (x,y,F(x,y),\frac{\partial F(x,y)}{\partial x},\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}) \end{aligned} \tag{10}$$

Οι συναρτήσεις $A(x,y)$, $B(x,y)$ και $C(x,y)$ είναι εν γένει συναρτήσεις

των ανεξάρτητων μεταβλητών x,y ενώ η συνάρτηση
$G(x, y, F(x, y), \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial F(x,y)}{\partial y})$
είναι ομαλή και γραμμική ως προς την $F(x, y)$ και τις πρώτες παραγώγους της.

1.3 Ταξινόμηση των Δ.Ε.Μ.Π.

Οι συντελεστές των μεγιστοβάθμιων παραγώγων καθορίζουν το είδος της δ.ε.μ.π. Η ταξινόμιση των δ.ε.μ.π. γίνεται με βάση την τιμή που παίρνει η παράσταση $\Delta = B(x, y)^2 - A(x, y)C(x, y)$ στο επίπεδο (x, y) και είναι η ακόλουθη:

1. **Εξισώσεις υπερβολικού τύπου**
   $\Delta = B(x, y)^2 - A(x, y)\ C(x, y) > 0$

2. **Εξισώσεις Παραβολικού τύπου**
   $\Delta = B(x, y)^2 - A(x, y)\ C(x, y) = 0$

3. **Εξισώσεις Ελλειπτικού τύπου**
   $\Delta = B(x, y)^2 - A(x, y)\ C(x, y) < 0$

Η εξίσωση (10) δεν παραμένει εν γένει του ίδιου τύπου εξίσωση σε όλο το πεδίο ορισμού των ανεξάρτητων μεταβλητών (x, y), διότι ο τύπος της εξίσωσης καθορίζεται από την ποσότητα $B(x, y)^2 - A(x, y)\ C(x, y)$ η οποία για διαφορετικές τιμές των (x, y) γίνεται θετική, αρνητική ή μηδέν. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η εξίσωση Ticomi, $yu_{xx} + u_{yy} = 0$, η οποία είναι υπερβολικού τύπου για $y < 0$ και ελλειπτικού τύπου για $y > 0$.

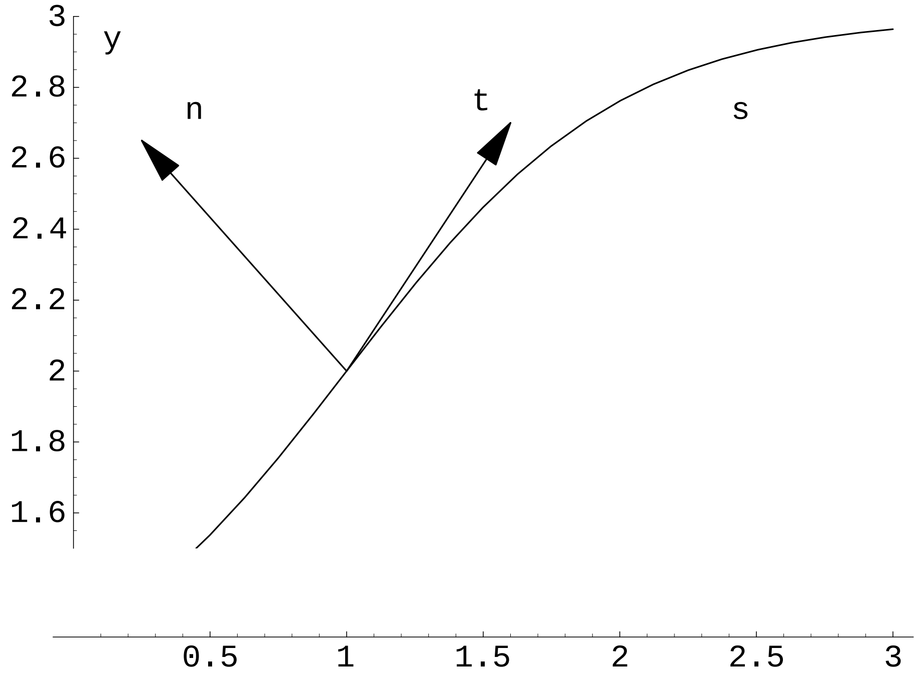
Για να βρεθεί η ειδική λύση μιας δ.ε.μ.π. απαιτούνται συνοριακές συνθήκες πάνω σε συνοριακές επιφάνειες.

Για την (εξ. 10) , βάσει του θεωρήματος των Cauchy-Kovalevski, συνθήκες τύπου Cauchy πάνω σε καμπύλη στο επίπεδο (x, y) είναι κατάλληλες για να ορίσουμε μονοσήμαντα τη λύση.

Πρόβλημα Cauchy

Θα μελετήσουμε το πρόβλημα Cauchy για τη (εξ. 10) στις δύο διαστάσεις, όπου η συνοριακή επιφάνεια είναι καμπύλη που χαρακτηρίζεται από την παράμετρο s.

Δίνεται η λύση πάνω στη συνοριακή επιφάνεια $u(s)$ και η κατευθυνόμε-



Σχήμα 1: Επιφάνεια Chauchy

νη παράγωγος $N(s)$

Ας θεωρήσουμε ότι δίνεται η παράγωγος κατά τη διεύθυνση τη κάθετη στην επιφάνεια η οποία χαρακτηρίζεται από το μοναδιαίο άνυσμα $\hat{\eta}$.

Τα δεδομένα του προβλήματος είναι

$x = x(s)$, $y = y(s)$, $u(s)$ και $N(s)$

όπου

$$N(s) = \nabla \mathbf{u}.\hat{\eta} \tag{11}$$

Το κάθετο άνυσμα $\hat{\eta}$ δίνεται από τη σχέση

$$\hat{\eta} = -\frac{dy(s)}{ds}\hat{e}_x + \frac{dx(s)}{ds}\hat{e}_y \tag{12}$$

$$\begin{aligned} N(s) &= (-\frac{dy(s)}{ds}\hat{e}_x + \frac{dx(s)}{ds}\hat{e}_y).(\frac{\partial u}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{e}_y) \\ &= -\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dy}{ds} \mid_s + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dx}{ds} \mid_s \end{aligned} \tag{13}$$

ενώ το εφαπτώμενο $\hat{\mathbf{t}}$ είναι

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{dx(s)}{ds}\hat{e}_x + \frac{dy(s)}{ds}\hat{e}_y \tag{14}$$

$$\frac{du(s)}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} \mid_s + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds} \mid_s \tag{15}$$

Από τις εξισώσεις (13) και (15) (δεδομένα Cauchy) υπολογίζουμε τις πρώτες παραγώγους της u ,

$p(s) = \frac{\partial u}{\partial x} \mid_s$ και

$q(s) = \frac{\partial u}{\partial y} \mid_s$.

Για να υπολογίσουμε τις παραγώγους δεύτερης τάξης $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση (10) και τις σχέσεις

$$dp(s) = (\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy) = (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dy) \mid_s \tag{16}$$

$$dq(s) = (\frac{\partial q}{\partial x}dx + \frac{\partial q}{\partial y}dy) = (\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dy) \mid_s \tag{17}$$

Το σύστημα των τριών εξισώσεων, (10 ,16 ,17), έχει λύση διάφορη της προφανούς όταν η ορίζουσα των συντελεστών

$$\left| \begin{array}{ccc} A(x,y) & 2B(x,y) & C(x,y) \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{array} \right|_s$$

ειναι διάφορη του μηδενός.

$$A(x,y)(\frac{dy}{dx})^2 - 2B(x,y)\frac{dy}{dx} + C(x,y) \mid_s \neq 0 \tag{18}$$

Από τη λύση του συστήματος , που μας ορίζει τις δεύτερης τάξης παραγώγους πάνω στη συνοριακή επιφάνεια και παραγωγίζοντας την ίδια την εξίσωση ως προς τις αναξάρτητες μεταβλητές ,κατασκευάζουμε ένα σύστημα εξισώσεων από το οποίο υπολογίζουμε τις παραγώγους τρίτης τάξης και συνεχίζοντας με διαδοχικές παραγωγίσεις υπολογίζουμε όλες τις παραγώγους των ανωτέρων τάξεων, πάνω στην επιφάνεια s. Σε κάθε βήμα για τον υπολογισμό των παραγώγων ανώτερης τάξης παρατηρούμε ότι θα πρέπει να ισχύει η (εξ. 18). Έχοντας ορίσει τις παραγώγους ανώτερης τάξης παίρνουμε τη λύση σαν ανάπτυγμα Taylor γύρω από την s

$$u(x,y) = u(s) + (x - x(s))\frac{\partial u}{\partial x} \mid_s + (y - y(s))\frac{\partial u}{\partial y} \mid_s$$
$$+ (x - x(s))^2\frac{\partial u^2}{\partial x^2} \mid_s + (y - y(s))^2\frac{\partial u^2}{\partial y^2} \mid_s + (x - x(s))(y - y(s))\frac{\partial u^2}{\partial x \partial y} \mid_s + \ldots \tag{19}$$

Βασική προυπόθεση για να ορισθεί μονοσήμαντα η ειδική λύση του προβλήματος είναι ότι η συνοριακή επιφάνεια δεν θα πρέπει να συμπίπτει με επιφάνεια η οποία ανήκει σε οικογένεια επιφανειών οι οποίες αποτελούν τις χαρακτηριστικές επιφάνειες της δ.ε.

Οι **χαρακτηριστικές επιφάνειες** στο επίπεδο (x, y) μιάς δ.ε. βρίσκονται από τη λύση της εξίσωσης :

$$A(x,y)(\frac{dy}{dx})^2 - 2B(x,y)\frac{dy}{dx} + C(x,y) = 0 \tag{20}$$

Στις δύο διαστάσεις για τις δ.ε.μ.π. υπερβολικού τύπου ($\Delta > 0$) έχουμε δύο οικογένειες χαρακτηριστικών καμπυλών στο πραγματικό επίπεδο ,την $\phi(x, y) =$σταθ. και την $\psi(x, y) =$σταθ.Οπως θα δούμε αργότερα για την κυματική εξίσωση, σε μια διάσταση , βρίσκουμε τις χαρακτηριστικές ευθείες $\psi(x, t) = x + ct$ και $\phi(x, t) = x - ct$. Για τις παραβολικού τύπου (Δ=0) έχουμε μία οικογένεια $\phi(x, y) = \psi(x, y) =$σταθ, ενώ οι ελλειπτικού τύπου ($\Delta < 0$) δέν έχουν χαρακτηριστικές καμπύλες στο πραγματικό επίπεδο. Επομένως δέν υπάρχουν απαγορευμένες επιφάνειες πάνω στις οποίες δέν μπορούμε να ορίσουμε συνοριακές συνθήκες. Οι χαρακτηριστικές επιφάνειες στις εξισώσεις που περιγράφουν φαινόμενα εξέλιξης (υπερβολικές και παραβολικές), αντιστοιχούν στις τροχιές εξέλιξης των φαινομένων ,ενώ οι ελλειπτικές εξισώσεις περιγράφουν στάσιμα φαινόμενα και αναμένουμε να μην έχουν χαρακτηριστικές επιφάνειες στο πραγματικό επίπεδο. Στο πρόβλημα Caushy που μελετήσαμε παραπάτω έγινε κατανοητός ο ρόλος των χαρακτηριστικών επιφανειών.
Το είδος των συνοριακών συνθηκών και το είδος του συνόρου (ανοικτό ή κλειστό) που απαιτούνται για να βρούμε μια μερική λύση του προβλήματος , εξαρτώνται από τον τύπο της διαφορικής εξίσωσης.

Τα τρία είδη συνοριακών συνθηκών είναι:

- Συνθήκες **Cauchy** :Δίνεται η λύση και η κατευθυνόμενη παράγωγος πάνω σε ένα σύνορο το οποίο είναι σημείο για τη μιά διάσταση , γραμμή στις δύο διαστάσεις, επιφάνεια στις τρείς και υπερεπιφάνεια σε περισσότερες. Η επιφάνεια αυτή ονομάζεται επιφάνεια Cauchy .

- Συνθήκες **Dirichlet** :Δίνεται η λύση πάνω στη συνοριακή επιφάνεια.

- Συνθήκες **Neumann** :Δίνεται η κατευθυνόμενη παράγωγος πάνω στη συνοριακή επιφάνεια.

Για να ορίσουμε μονοσήμαντα τη λύση μιας δ.ε θα πρέπει να επιλέξουμε κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Διαφορετικού τύπου δ.ε. απαιτούν και διαφορετικού είδους συνοριακές συνθήκες.

- Οι εξισώσεις υπερβολικού τύπου απαιτούν συνοριακές συνθήκες τύπου Cauchy πάνω σε ανοικτό σύνορο.
- Οι δ.ε παραβολικού τύπου απαιτούν συνθήκες Dirichlet ή Neumann σε ανοικτό σύνορο.
- Οι δ.ε. ελλειπτικού τύπου απαιτούν συνθήκες Dirichlet ή Neumann σε κλειστό σύνορο.

Οι πιό γνωστές εξισώσεις της μαθηματικής φυσικής ,εξίσωση διάχυσης , εξίσωση Laplace και κυματική εξίσωση, σε δύο διαστάσεις, [1] αποτελούν τρία απλά παραδείγματα των τριών τύπων δ.ε.μ.π.

1. Για την κυματική εξίσωση σε δύο διαστάσεις έχουμε

   $\frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial t^2}$
   έχουμε:

   $B(x,t) = 0$, $A(x,t) = 1$ και $C(x,t) = -\frac{1}{c^2}$

   επομένως $\Delta > 0$. Η κυματική εξίσωση είναι υπερβολικού τύπου δ.ε. και για τη λύση της απαιτούνται συνοριακές συνθήκες τύπου Cauchy πάνω σε ανοικτό σύνορο ή συνοριακές συνθήκες τύπου Cauchy πάνω σε ένα μέρος του συνόρου και Dirichlet ή Neumann στο υπόλοιπο τμήμα του συνόρου [2]

2. Εξίσωση Laplace

[1] τα συμπεράσματα γενικεύονται και σε περισσότερες διαστάσεις
[2] U-τύπου συνοριακή επιφάνεια

$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} = 0$

έχουμε:

$B(x,y) = 0$, $A(x,y) = 1$ και $C(x,y) = 1$
και $\Delta < 0$.

Η εξίσωση Laplace είναι ελλειπτικού τύπου δ.ε.και χρειάζεται συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet σε κλειστό σύνορο.

3. Για την εξίσωση διάχυσης

$\frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial F(x,t)}{\partial t}$

έχουμε:

$B(x,t) = 0$, $A(x,t) = 1$ και $C(x,t) = 0$
και $\Delta = 0$.
Η εξίσωση διάχυσης είναι παραβολικού τύπου δ.ε. και οι κατάλληλες συνθήκες που απαιτούνται μπορεί να είναι Dirichlet ή Neumann σε ανοικτό σύνορο.

Οι εξισώσεις(1 , 3 , 5) παραμένουν του ίδιου τύπου σ' όλο το επίπεδο $(\vec{x}, t)$.

1.4 Κανονική μορφή των δ.ε.μ.π.

Με τη βοήθεια των χαρακτηριστικών καμπυλών μπορούμε να πάμε σε άλλο σύστημα συντεταγμένων στο οποίο οι δ.ε.μ.π. παίρνουν μια άλλη μορφή, ανάλογη του είδους της εξίσωσης.

- Για τις εξισώσεις υπερβολικού τύπου, όπου έχουμε δύο οικογένειες καμπυλών, ορίζουμε συντεταγμένες

$$\xi = \phi(x,y) \text{ και } \eta = \psi(x,y).$$

Στο νέο σύστημα συντεταγμένων οι εξισώσεις υπερβολικού τύπου παίρνουν τη μορφή

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F(u, \eta, \xi, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial u}{\partial \xi}) \tag{21}$$

η οποία ονομάζεται κανονική μορφή.

- Για τις εξισώσεις παραβολικού τύπου, όπου έχουμε μια οικογένεια καμπυλών, ορίζουμε τις

$$\xi = \phi(x,y) \text{ και } \eta = x.$$

και έχουμε την κανονική μορφή

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(u, \eta, \xi, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial u}{\partial \xi}) \tag{22}$$

- Στις εξισώσεις ελλειπτικού τύπου ορίζουμε νέες μεταβλητές της μορφής

$$\xi = \tfrac{\phi(x,y)+\psi(x,y)}{2i}$$

$$\text{και } \eta = \tfrac{\phi(x,y)-\psi(x,y)}{2i}.$$

και η κανονική μορφή είναι

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(u, \eta, \xi, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial u}{\partial \xi}) \tag{23}$$

Η εξίσωση διάχυσης καθώς και η εξίσωση δυναμικού (Laplace) στις δύο διαστάσεις είναι στην κανονική τους μορφή .
Για τη κυματική εξίσωση , όπου

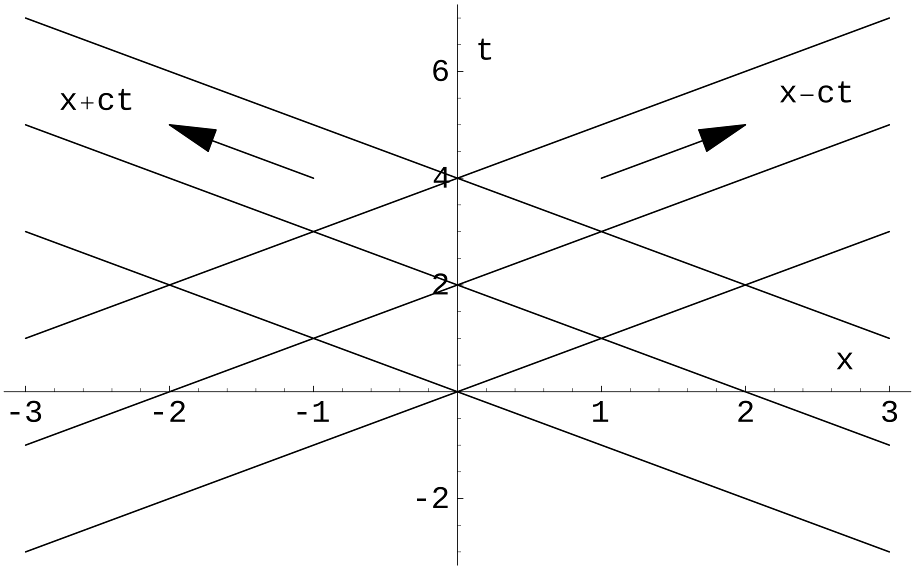
$A(x,t) = 1$, $B(x,t) = 0$ και $C(x,t) = -\frac{1}{c^2}$
η (εξ. 20) είναι

$$(\frac{dx}{dt})^2 - \frac{1}{c^2} = 0 \tag{24}$$

που έχει λύσεις τις χαρακτηριστικές καμπύλες

$$\phi(x,t) = x + ct = \text{σταθ. και}$$

$$\psi(x,t) = x - ct = \text{σταθ.}$$



Σχήμα 2: Χαρακτηριστικές της κυματικής εξίσωσης

Κάτω από τις νέες μεταβλητές, $\phi(x,t) = x + ct$ και $\psi(x,t) = x - ct$, η κυματική εξίσωση παίρνει τη κανονική μορφή η οποία είναι

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0 \tag{25}$$

Οι χαρακτηριστικές καμπύλες της κυματικής εξίσωσης είναι παράλληλες γραμμές στο επίπεδο (x,t) με κλίση $\frac{1}{c}$ και $\frac{-1}{c}$. Σε κάθε σημείο λοιπόν του επιπέδου υπάρχουν δυό χαρακτηριστικές διευθύνσεις που ορίζουν την εξέλιξη των γεγονότων.

1.5 Μέθοδοι επίλυσης - Μέθοδος χωριζομένων μεταβλητών

Ενα φυσικό σύστημα εξελίσσεται με μοναδικό τρόπο κάτω από καθορισμένες αρχικές και συνοριακές συνθήκες. Για να ορισθεί μονοσήμαντα η λύση ενός προβλήματος αρχικών ή συνοριακών τιμών, θα πρέπει το πρόβλημα να είναι **καλά τοποθετημένο**. Καλά τοποθετημένο σημαίνει ότι θα πρέπει να ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Να δίνεται ο φυσικός νόμος, υπό τη μορφή διαφορικής εξίσωσης, που περιγράφει το φυσικό φαινόμενο
2. Να έχει λύση η διαφορική εξίσωση
3. Η λύση να είναι μοναδική , και
4. Να ικανοποιούνται τα δεδομένα του προβλήματος

Εν γένει η λύση μιας δ.ε.μ.π δεύτερης τάξης δεν είναι εύκολο να βρεθεί σε κλειστή μορφή, οπως γίνεται σε αρκετές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Οι μέθοδοι που ακολουθούνται για να βρεθεί μιά ειδική λύση του προβλήματος είναι:

- Αριθμητικές
- Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί π.χ Laplace,Fourier
- συναρτήσεις Green
- Μέθοδος χωρισμού μεταβλητών ή Μέθοδος Fourier

Η Μέθοδος χωρισμού μεταβλητών αποτελεί μια βασική και χρήσιμη τεχνική που μπορεί να εφαρμοστεί για την επίλυση πολλών προβλημάτων συνοριακών τιμών της μαθηματικής φυσικής, όταν υπάρχει πεπερασμένο σύνορο. Η εφαρμογή της μεθόδου εξαρτάται από τη μορφή του τελεστή

$\mathbf{L}$ δηλαδή αν ¨ **ο τελεστής είναι διαχωρίσιμος**¨. Ο τελεστής της Λαπλασιανής, ο οποίος συναντάται στα παραδείγματα που έχουμε αναφέρει στην εισαγωγή, εκφράζεται στο σύστημα συντεταγμένων που εξαρτάται από τη γεωμετρία του συνόρου πάνω στο οποίο έχουμε ορίσει τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος (π.χ. αν η συνοριακή επιφάνεια είναι σφαίρα τότε η Λαπλασιανή γράφεται σε σφαιρικές συντεταγμένες) . Ο τελεστής $\mathbf{L}$ έχει **την καλή ιδιότητα** να είναι διαχωρίσιμος στα συνήθη συστήματα συντεταγμένων τα οποία χρησιμοποιούμε συχνά στα περισσότερα προβλήματα όπως π.χ καρτεσιανές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.

Εάν οι συνοριακές επιφάνειες σε ένα σύστημα συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3) ορίζονται από τις σχέσεις $x_1 = c_1$ η $x_2 = c_2$ η $x_3 = c_3$, 'οπου c_1, c_2, c_3 σταθερές, και η λύση $F(x_1 = c_1, x_2, x_3) = a$ τότε αν $a = 0$ η επιφάνεια $x_1 = c_1$ ονομάζεται nodal επιφάνεια η nodes της F. Εάν η $x_1 = c_1$ είναι nodal επιφάνεια της $F(x_1, x_2, x_3)$ τότε μπορούμε να αναζητήσουμε λύση της διαφορικής εξίσωσης της μορφής:

$$F(x_1, x_2, x_3) = F_1(x_1)\tilde{F}_2(x_1, x_2) \tag{26}$$

Αν έχουμε nodal επιφάνειες και σε μια άλλη διεύθυνση π.χ. $x_2 = c_2$ τότε μπορούμε να διαχωρίσουμε πλήρως τη λύση και να αναζητήσουμε λύση της μορφής :

$$F(x_1, x_2, x_3) = F_1(x_1)F_2(x_1)F_3(x_3) \tag{27}$$

Η λύση δίνεται σαν γινόμενο λύσεων $F_1(x_1)F_2(x_1)F_3(x_3)$ κάθε μιά από τις οποίες ικανοποιεί κοινή διαφορική εξίσωση. Οι εξισώσεις αυτές περιέχουν σταθερές οι οποίες έχουν προέλθει από το διαχωρισμό της εξίσωσης και οι οποίες καλούνται **σταθερές διαχωρισμού**. Οι σταθερές διαχωρισμού καθορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος και είναι ουσιαστικά οι ιδιοτιμές ενός αντίστοιχου προβλήματος ιδιοτιμών. Εάν

$a \neq 0$ τότε η λύση μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα δυό λύσεων

$$F(x_1, x_2, x_3) = F_p(x_1, x_2, x_3) + \widehat{F}(x_1, x_2, x_3) \tag{28}$$

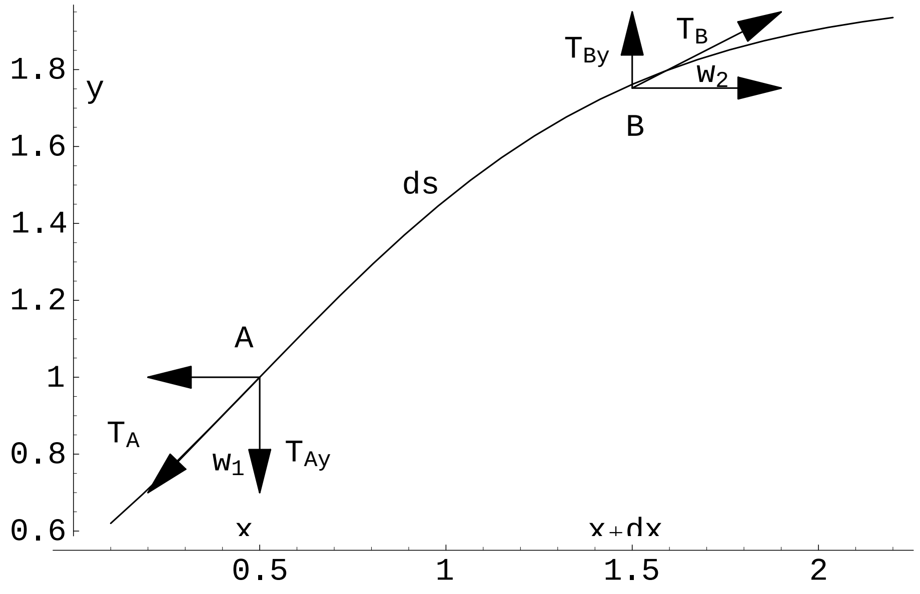
όπου $F_p(x_1, x_2, x_3)$ μιά ειδική ή μερική λύση του προβλήματος η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη $F_p(x_1 = c_1, x_2, x_3) = a$ και $\widehat{F}(x_1, x_2, x_3)$ η λύση της εξίσωσης η οποία έχει nodes τις συνοριακές επιφάνειες. Εν γένει αναζήτηση λύσης αυτής της μορφής (εξ. 28) εφαρμόζεται στις περιπτώσεις των προβλημάτων με **μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες** καθώς και στα προβλήματα όπου η δ.ε. περιέχει μη ομογενή όρο. Τέτοιους όρους συναντάμε στην περίπτωση της εξηναγκασμένης ταλάντωσης ,στη διάδοση θερμότητας σε χώρο με πηγές , στην εξίσωση Poisson κ.α.

Παρακάτω θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών για τις τρείς κατηγορίες δ.ε. της μαθηματικής φυσικής σε διάφορα συστήματα συντεταγμένων (καρτεσιανές ,κυλινδρικές και σφαιρικές).

2 Κυματική εξίσωση

2.1 Παλλόμενη χορδή

Θεωρούμε μια τέλεια ελαστική χορδή σταθερής πυκνότητας ρ η οποία αφήνεται να κάνει μικρές ταλαντώσεις στο επίπεδο αφού απομακρυνθεί λίγο από τη θέση ισορροπίας (σχήμα).



Σχήμα 3: Παλλόμενη χορδή

Θεωρούμε δυό σημεία $A(x, y)$ και $B(x + dx, y^{'})$ της χορδής των οποίων η μεταξύ τους απόσταση είναι ds. Αν η τάση στο σημείο A είναι T_A (εφαπτόμενη στη χορδή) και στο B είναι T_B, οι συνιστώσες στη διεύθυνση y είναι

$$T_{Ay} = -T_A \mathrm{cos} w_1 = -T_A \frac{dy}{ds} \approx -T\frac{dy}{dx}, dx \approx ds \tag{29}$$

$$T_{By} = T_B \mathrm{sin} w_2 = -T_B \frac{dy^{'}}{ds} \approx -T\frac{dy^{'}}{dx}|_{x^{'}}$$

$$dy^{'} = y + dy, dx|_{x'} = x + dx$$

Η χορδή θα κινηθεί από την επίδραση της κατακόρυφης συνιστώσας της τάσης T

$$T_{Ay} + T_{By} = T(\frac{dy^{'}}{dx}|_{x'} - \frac{dy}{dx}) = T dx \frac{d^2 y}{dx^2} = T dx \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \tag{30}$$

Από το νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$dm \frac{d^2 y}{dt^2} = \rho dx \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T dx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{31}$$

και

$$\boxed{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}}$$

Οπου $c^2 = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, $(\rho = \frac{dm}{dx})$.

Στην περίπτωση όπου στη χορδή εξασκείται και μια επιπλέον δύναμη , έστω $f(x,t)$, ανά μονάδα μήκους ,η εξίσωση ταλάντωσης παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} f(x,t) \tag{32}$$

και γενικεύεται για τις τρείς διαστάσεις

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) u(\vec{\mathbf{x}}, t) \equiv \frac{1}{c^2} f(x,t) \tag{33}$$

Ανάλογη εξίσωση ικανοποιούν τα φαινόμενα διάδοσης ηχητικών κυμάτων μέσα σε ρευστά. Η πίεση $\vec{\mathbf{P}}$, η πυκνότητα ρ και η ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}$ των μορίων ενός ρευστού συνδέονται μεταξύ τους μέσω της καταστατικής εξίσωσης . Μια μικρή διαταραχή από την κατάσταση ισορροπίας σε ένα υγρό τη χρονική στιγμή t_0 , θα προκαλέση μικρές ($\delta\vec{\mathbf{P}}$,$\delta\rho$, $\delta\vec{\mathbf{v}}$) μεταβολές στα μεγέθη αυτά. Αποδεικνύεται ότι η μεταβολή της πυκνότητας των μορίων $\delta\rho$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \delta\rho(\vec{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} . \vec{f}(x,t) \tag{34}$$

όπου $\vec{f}(x,t)$ οι εξωτερικές δυνάμεις αν υπάρχουν. Το μέγεθος c^2 ορίζεται από τη σχέση $c^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} \mid_{t_0}$ και έχει διαστάσεις ταχύτητας.

2.2 Χορδή απείρου μήκους

Χορδή απείρου μήκους κάνει μικρές ταλαντώσεις με αρχική απομάκρυνση $u(x, t=0) = a(x)$ και αρχική ταχύτητα $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \mid_{t=0} = b(x)$. Να βρεθεί η απομάκρυνση της χορδής κάθε χρονική στιγμή .

Στην περίπτωση της άπειρης χορδής δέν έχουμε πεπερασμένο σύνορο ($-\infty\ y < x\ < \infty$). Η απομάκρυνση της χορδής από τη θέση ισορροπισορροπίας κάθε χρονική στιγμή περιγράφεται από τη λύση της κυματικής εξίσωσης (εξ. 5) σε μια διάσταση $u(x,t)$ η οποία ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Οι συνθήκες που ορίζουμε είναι συνθήκες Cauchy πάνω στη 'συνοριακή' επιφάνεια $t = 0$ (επιφάνεια Cauchy) η οποία δέν συμπίπτει με χαρακτηριστική επιφάνεια της δ.ε. κύματος, $x \pm ct =$σταθερά. Το πρόβλημα είναι ¨καλά ορισμένο¨ και επομένως η λύση θα πρέπει να ορίζεται μονοσήμαντα όπως αναμένουμε και από τη φυσική μας διαίσθηση.
Για να βρούμε τη λύση της άπειρης χορδής

$$\frac{\partial^2\, u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\, u(x,t)}{\partial t^2} \tag{35}$$

κάνουμε αλλαγή μεταβλητής. Ορίζουμε νέες μεταβλητές (η, ξ) ως εξής: $\eta = x + ct$ και $\xi = x - ct$[3]. Κάτω από την αλλαγή μεταβλητών η (εξ. 35) παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial^2\, u(\eta,\xi)}{\partial \eta\, \partial \xi} = 0 \tag{36}$$

[3]Οι δυό οικογένειες καμπυλών $\Phi(x,t) = \eta = x + ct$ και $\Psi(x,t) = \xi = x - ct$ είναι οι οικογένειες χαρακτηριστικών καμπυλών της κυματικής εξίσωσης.Οι νέες συντεταγμένες ξ,η ονομάζονται συντεταγμένες κώνου φωτός.Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται σε 'ολες τις εξισώσεις υπερβολικού τύπου προκειμένου να αναχθούν σε κανονική μορφή.

η οποία ονομάζεται **κανονική μορφή της κυματικής εξίσωσης**. Η πιό γενική λύση της εξίσωσης (36) είναι της μορφής:

$$u(\eta,\xi) = f_1(\eta) + f_2(\xi) = f_1(x+ct) + f_2(x-ct) \tag{37}$$

Το πρόβλημα από εδώ και πέρα ανάγεται στην εύρεση των συναρτήσεων $f_1(\eta), f_2(\xi)$ με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών.

Ας θεωρήσουμε ότι οι αρχικές συνθήκες είναι της μορφής :

$u(x,t=0) = a(x)$ και

$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\mid_{t=0} = b(x)$

και δίνονται στο διάστημα $x_1 \leq x \leq x_2$.
Για $t = 0$ έχουμε τις σχέσεις:

$a(x) = f_1(x) + f_2(x)$ και

$b(x) = \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}|_{t=0} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}|_{t=0} = c\frac{df_1}{d\eta} - c\frac{df_2}{d\xi}$

από τις οποίες υπολογίζουμε τις παραγώγους

$\frac{df_1(x)}{dx} = \frac{1}{2}[\frac{da(x)}{dx} + \frac{b(x)}{c}]$ και

$\frac{df_2(x)}{dx} = \frac{1}{2}[\frac{da(x)}{dx} - \frac{b(x)}{c}]$

ολοκληρώνουμε στο διάστημα $x_1 \leq x' \leq x$ και έχουμε:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}[a(x) + \frac{1}{c}\int_{x_1}^{x} b(x')dx' + A_1] \tag{38}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}[a(x) - \frac{1}{c}\int_{x_1}^{x} b(x')dx' + A_2] \tag{39}$$

όπουA_1, A_2 σταθερές ολοκλήρωσης. Ομως από τη σχέση
$f_1(x) + f_2(x) = a(x)$
συνεπάγεται ότι $A_1 + A_2 = 0$.

Οι σχέσεις (38) και (39) ισχύουν για όλα τα σημεία x που βρίσκονται στο διάστημα $x_1 \leq x \leq x_2$ (μέσα στο οποίο έχουν καθορισθεί οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος) και μπορούν να γενικευτούν στο επίπεδο (x,t) για όλα τα σημεία $x \pm ct$ τέτοια ώστε : $x_1 \leq x \pm ct \leq x_2$ και:

$$f_1(x+ct) = \frac{1}{2}[a(x+ct) + \frac{1}{c}\int_{x_1}^{x+ct} b(x')dx' + A_1] \tag{40}$$

$$f_2(x-ct) = \frac{1}{2}[a(x-ct) - \frac{1}{c}\int_{x_1}^{x-ct} b(x')dx' + A_2] \tag{41}$$

$$\begin{aligned} u \quad & (x,t) = f_1(x+ct) + f_2(x-ct) = \\ = \quad & \frac{1}{2}[a(x+ct) + a(x-ct) + \frac{1}{c}\int_{x_1}^{x+ct} b(x')dx' - \frac{1}{c}\int_{x_1}^{x-ct} b(x')dx' + A_1 + A_2] \\ = \quad & \frac{1}{2}[a(x+ct) + a(x-ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} b(x')dx'] \end{aligned} \tag{42}$$

επομένως έχουμε :

$$\boxed{u(x,t) = \tfrac{1}{2}[a(x+ct) + a(x-ct) + \tfrac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} b(x')dx']}$$

Η λύση (42) είναι ο τύπος **D'Alembert** ο οποίος δίνει τη μορφή του κύματος στη περιοχή του χωρόχρονου (επίπεδο x, t) η οποία περικλείεται από τις ευθείες $(x \pm ct)$ (χαρακτηριστικές καμπύλες της κυματικής εξίσωσης) που διέρχονται από τα σημεία (x_1, x_2).Τα σημεία (x_1, x_2) είναι τα άκρα του διαστήματος μέσα στο οποίο έχουμε ορίσει τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.Για να επεκταθεί η λύση σε όλο το επίπεδο χρειαζόμαστε επί πλέον συνθήκες . Αν θεωρήσουμε τα $x_1 \to -\infty, x_2 \to \infty$ τότε ο τύπος **D'Alembert** δίνει τη λύση σε όλο το επίπεδο (x,t).

Παρατήρηση : Η συνάρτηση $f_1(x+ct)$ παριστάνει ένα κύμα που ταξιδεύει προς τα αριστερά με ταχύτητα c, ενώ η $f_2(x-ct)$ παριστάνει κύμα που ταξιδεύει με την ίδια ταχύτητα προς τα δεξιά.

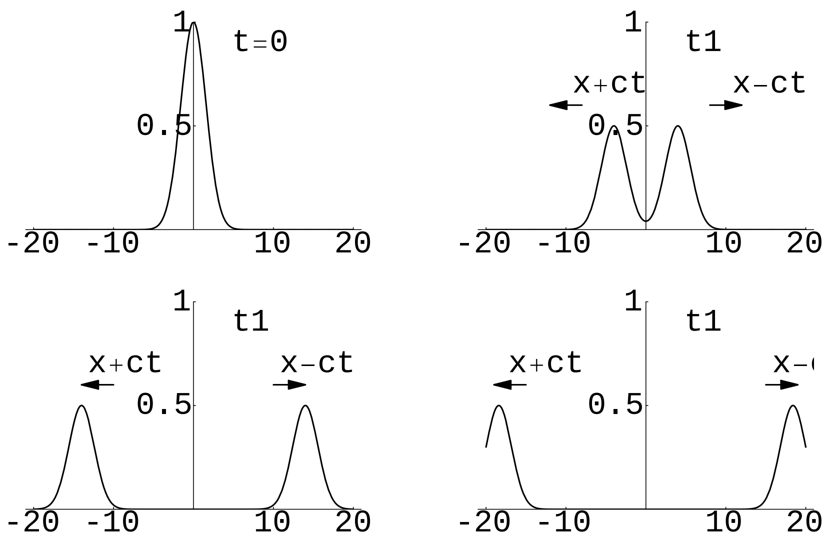
Παράδειγμα 1

Θεωρούμε Χορδή απείρου μήκους η οποία αφήνεται να κάνει μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη θέση οίας με αρχική απομάκρυνση
$u(x,t=0)=Exp[-4x^2]$. Αν θεωρήσουμε ότι η αρχική ταχύτητα είναι μηδέν να βρεθεί η απομάκρυνση μετά από χρόνο t.

Συμφωνα με τον τύπο **D'Alembert** η απομάκρυνση θα είναι

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(Exp[-4(x-ct)^2]+Exp[-4(x+ct)^2]).$$

Σχεδιάζουμε τη μορφή της χορδής για τέσσερεις διαφορετικές χρονικές στιγμές υποθέτοντας ότι η ταχύτητα διάδοσης είναι π.χ. $c=4$ μονάδες ταχύτητας . Από το (σχήμα 4) παρατηρούμε ότι η αρχική διαταραχή έχει



Σχήμα 4: αρχική διαταραχή $Exp[-4x^2]$ και η εξέλιξη της για διάφορες χρονικές στιγμές $(t_1=0<t_2<t_3<t_4)$

διαχωρισθεί σε δυό διαταραχές που διαδίδονται με την ίδια μορφή αλλά σε αντίθετες κατευθύνσεις και με πλάτος το ήμισυ του αρχικού πλάτους . Επίσης βλέπουμε ότι υπάρχουν περιοχές στις οποίες για κάποιες χρονικές στιγμές η απομάκρυνση είναι μηδέν. Οι περιοχές αυτές βρίσκονται από τις χαρακτηριστικές, οπως θα δούμε και στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2

Χορδή απείρου μηκους έχει ένα αρχικό σχήμα της μορφής

$$u(x,t=0) = f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad -\infty < x < -L \\ a(1-\frac{x^2}{L^2}) & : \quad -L < x < L \\ 0 & : \quad L < x < \infty \end{cases}$$

(παραβολή) και αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα . Να βρεθεί το σχήμα της χορδής για $t > 0$

Ο γενικός τύπος για τη $u(x,t)$ αφού δεν υπάρχει αρχική απομάκρυνση είναι

$$u(x,t) = \frac{1}{2} f(x+ct) + f(x-ct)) \tag{43}$$

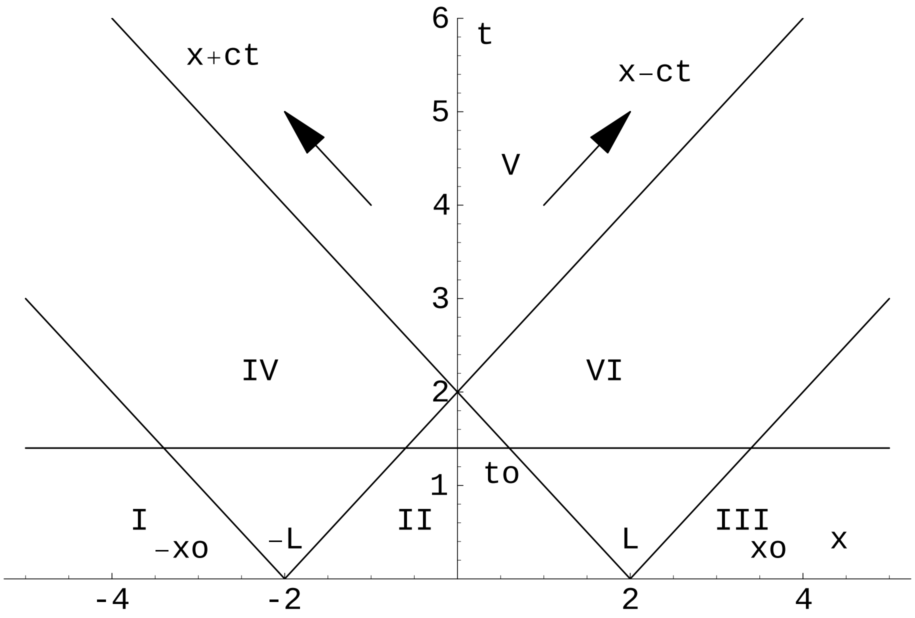
Οπου οι συναρτήσεις $f(x \pm ct)$ προκύπτουν από την $f(x)$ αν $x \to x \pm ct$.

$$f(x \pm ct) = \begin{cases} 0 & : \quad -\infty < x \pm ct < -L \\ a(1-\frac{(x \pm ct)^2}{L^2}) & : \quad -L < x \pm ct < L \\ 0 & : \quad L < x \pm ct < \infty \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε στην (εξ.43) και από τις τιμές της $f(x)$ στις διάφορες περιοχές του $x \pm ct$ υπολογίζουμε τη λύση στο επίπεδο (x,t). Για χρονικές στιγμές $0 < t < \frac{L}{c}$ η λύση είναι διαφορετική στις διάφορες περιοχές που ορίζονται από τις χαρακτηριστικές (σχήμα 5)

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & : \quad -\infty < x < -L-ct \\ \frac{a}{2}(1-\frac{(x+ct)^2}{L^2}) & : \quad -L-ct < x < -L+ct \\ a(1-\frac{(x^2+c^2t^2)}{L^2}) & : \quad -L+ct < x < L-ct \\ \frac{a}{2}(1-\frac{(x-ct)^2}{L^2}) & : \quad L-ct < x < L+ct \\ 0 & : \quad L+ct < x < \infty \end{cases}$$

Στη περιοχή **V** η λύση είναι πάντα μηδενική ενώ στις περιοχές **I** για $(-\infty < x < -xo)$, και **III** για $(xo < x < \infty)$ είναι μηδέν το χρονικό



Σχήμα 5:

διάστημα $t < t_o$ =σταθερό.

Εάν θελήσουμε να επεκτείνουμε τη λύση για χρονικές στιγμές $t > \frac{L}{c}$ επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία ως προς τις χαρακτηριστικές που διέρχονται από τα σημεία $\pm 3L$.

2.3 Ημιάπειρη Χορδή

Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια άπειρη χορδή η οποία κάνει ταλαντώσεις αλλά εμείς μπορούμε να παρατηρούμε μόνο τη μισή $0 \leq x < \infty$,ενώ η άλλη μισή κάνει ταλαντώσεις αλλά δεν μπορούμε να την παρατηρήσουμε. Ας υποθέσουμε ότι η αρχική απομάκρυνση και η αρχική ταχύτητα είναι

$$u(x, t = 0) = f(x) \;\;, \frac{\partial u}{\partial t}\,|_{t=0} = g(x) \;\; \text{για} \;\; 0 \leq x < \infty$$

δηλαδή έχουμε ορίσει συνθήκες Cauchy στον ημιάξονα $x \geq 0$. Ο τύπος D'Alembert δίνει τη λύση της ταλάντωσης για όλα τα σημεία του επιπέδου (x, t) που περικλείονται από τις χαρακτηριστικές $x \pm ct > 0$ (περιοχή I στο παρακάτω σχήμα).

Θα δείξουμε ότι αν επεκτείνουμε τη συνοριακή επιφάνεια , δηλαδή ορίσουμε συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet ή Neumann κατά μήκος του άξονα t π.χ. $u(x, t = 0) = 0$, τότε η λύση βρίσκεται σε όλο το επίπεδο (x, t) (επομένως θα γνωρίζουμε τι είδους ταλάντωση κάνει και το μέρος της χορδής που δεν μπορούμε να παρατηρήσουμε) [4]. [5]

Για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό θα κάνουμε πρώτα την εξής παρατήρηση. Ο τύπος D'Alembert παρουσιάζει την εξής συμμετρία. Αν $f(x)$ και $g(x)$ είναι άρτιες τότε και η λύση $u(x, t)$είναι άρτια στα x.

$$f(x) = f(-x) \ \ , \ \ g(x) = g(-x)$$

$$u(-x, t) = \frac{1}{2}[f(-x + ct) + f(-x - ct) + \frac{1}{c}\int_{-x-ct}^{-x+ct} g(x')dx'] \tag{44}$$

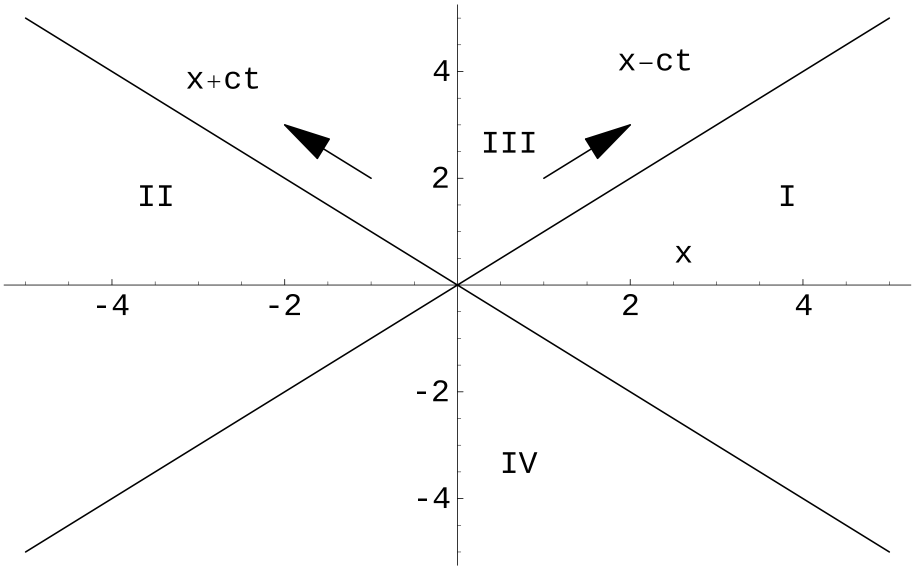
Αν $x' \to -y$

$$\begin{aligned} u(-x, t) &= \frac{1}{2}[f(x - ct) + f(x + ct) - \frac{1}{c}\int_{x+ct}^{x-ct} g(y)dy] \\ &= \frac{1}{2}[f(x - ct) + f(x + ct) = \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy] \\ &= u(x, t) \end{aligned} \tag{45}$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν $f(x)$ και $g(x)$ περιττές συναρτήσεις τότε και η $u(x, t)$ είναι περιττή συνάρτηση και $u(x, t) = -u(-x, t)$. Στο συγκεκριμμένο πρόβλημα όπου $u(x = 0, t) = 0$ θα πρέπει η $u(x, t)$ να είναι περιττή συνάρτηση και επομένως για να βρούμε τη λύση για τα $x < 0$ θα πρέπει να επεκτείνουμε τις $f(x)$ και $g(x)$ σαν περιττές συναρτήσεις για όλα τα $x < 0$

[4] Αυτού του είδους το σύνορο ονομάζεται $U-$τύπου όπου στο μισό έχουμε συνθήκες Cauchy και στο άλλο μισό Dirichlet

[5] Η λύση του προβλήματος αυτού αποτελεί και λύση του προβλήματος ταλάντωσης ημιάπειρης χορδής πακτωμένης στο ένα άκρο $x = 0$



Σχήμα 6: Οι τέσσερις περιοχές στο επίπεδο x, t που καθορίζονται από τις χαρακτηριστικές $x \pm ct = 0$

Στο επίπεδο (x, t) η μορφή που παίρνει η λύση στις διάφορες στιγμές στο χωρόχρονο εξαρτάται από το πρόσημο του μεγέθους $x \pm ct$ το οποίο διαφοροποιείται στις τέσσερις περιοχές (σχήμα) και είναι.

- Στην περιοχή **I** όπου $x \pm ct > 0$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(x')dx'] \tag{46}$$

- Στην περιοχή **II** όπου $x \pm ct < 0$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[-f(-x-ct) - f(-x+ct) - \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(-x')dx'] \tag{47}$$

- Στην περιοχή **III** όπου $x - ct < 0$ και $x + ct > 0$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) - f(-x+ct) - \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{0} g(-x')dx' + \int_{0}^{x+ct} g(x')dx'] \tag{48}$$

- Στην περιοχή **IV** όπου $x - ct > 0$ και $x + ct < 0$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(-f(x-ct)+f(x-ct)+\frac{1}{c}\int\limits_{x-ct}^{0} g(x')dx' - \int\limits_{0}^{x+ct} g(-x')dx') \tag{49}$$

Παράδειγμα

Θεωρούμε μια χορδή η οποία εκτείνεται από το μηδέν μέχρι το άπειρο $(0 < x < \infty)$ και στο ένα άκρο της εξασκείται μια δύναμη ώστε η απομάκρυνση $u(x = 0, t) = \psi(t)$ για $t > 0$. Αν η αρχική απομάκρυνση και η αρχική ταχύτητα είναι $f(x)$ και $g(x)$ αντίστοιχα , να βρεθεί η ταλάντωση $u(x, t)$ κάθε χρονική στιγμή.

Για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό θα εκμεταλλευτούμε τη γραμμικότητα της κυματικής εξίσωσης και θα αναζητήσουμε μια λύση της μορφής

$$u(x, t) = U(x, t) + \Psi(x, t)$$

Οι $U(x, t)$,$\Psi(x, t)$ ικανοποιούν την κυματική εξίσωση και τις συνθήκες

$$U(x, t = 0) = f(x),\ U_t(x, t)\ |_{t=0}= g(x)\ ,U(x = 0, t) = 0$$

και

$$\Psi(x, t = 0) = 0,\ \Psi_t(x, t)\ |_{t=0}= 0\ ,\Psi(x = 0, t) = \psi(t)$$

Η $U(x, t)$ ικανοποιεί όλες τις συνθήκες του παραδείγματος 1 επομένως μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε τη λύση $\Psi(x, t)$ η οποία σύμφωνα με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών (λύση D'Alembert θα είναι της μορφής

$$\Psi(x, t) = f_1(x + ct) + f_2(x - ct) \tag{50}$$

Λόγω των συνοριακών και αρχικών συνθηκών οι συναρτήσεις $f_1(x + ct)$ και $f_2(x - ct)$ θα ικανοποιούν τις σχέσεις για $x > 0$ και $t > 0$

α) $f_1(x) + f_2(x) = 0$

β) $cf_1'(x) - cf_2'(x) = 0$

γ) $f_1(ct) + f_2(-ct) = \psi(t)$ και

και $\psi(t) = 0$ για $t < 0$

Παραγωγίζοντας την (α) και με τη (β) βρίσκουμε ότι

$$f_1(x) = -f_2(x) = C = \text{σταθερά για } x > 0.$$

Γράφουμε την (γ) στη μορφή

$$f_1(z) + f_2(-z) = \psi(z/c)$$

Για $z \to -z$

$$f_1(-z) + f_2(z) = \psi(-z/c) = 0 \text{ και επομένως}$$
$$f_1(-z) = -f_2(z) = \text{σταθερά}$$

Αρα η $f_1(x)$ είναι παντού μια σταθερά η οποία μπορεί να ενσωματωθεί στην $f_2(x)$ και

$$f_2(-z) = \psi(z/c),\ z > 0$$

Για $z = -x + ct > 0$ η λύση γίνεται

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} f_2(x-ct) = \psi(t - \frac{x}{c}) & : \quad x < ct \\ 0 & : \quad ct < x \end{cases}$$

Η λύση περιγράφει μια κυματική διαταραχή που διαδίδεται προς τα δεξιά (x θετικά) γεγονός το οποίο ηταν φυσικά αναμενόμενο.

2.4 Κυματική εξίσωση σε πεπερασμένο σύνορο

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της κυματικής εξίσωσεις σε πεπερασμένο σύνορο. Θα μελετήσουμε σε μια διάσταση τον τρόπο ταλάντωσης της πεπερασμένης χορδής , σε δυό διαστάσεις τη ταλάντωση μεμβράνης και στις τρείς διαστάσεις τη διάδοση κυμάτων σε πεπερασμένο σύνορο . Η μέθοδος που θα εφαρμόσουμε είναι η **μέθοδος χωριζομένων μεταβλητών** ή μέθοδος **Fourier**. Ιδιαίτερα θα μελετήσουμε τη λύση της κυματικής εξίσωσης στα τρία πλέον γνωστά συστήματα συντεταγμένων, τις καρτεσιανές , κυλινδρικές και σφαιρικές .

α) **Πεπερασμένη χορδή πακτωμένη στα άκρα**

Χορδή μήκους **L** πακτωμένη στα άκρα εκτελεί μικρές ταλαντώσεις. Η εγκάρσια απομάκρυνση της χορδής απο τη θέση ισορροπίας κάθε χρονική στιγμή $u(x,t)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - f(x,t) \tag{51}$$

Αν $f(x,t) = 0$ η χορδή ταλαντεύεται ελεύθερα, ενώ για $f(x,t) \neq 0$ η χορδή κάνει εξηναγκασμένη ταλάντωση υπό την επίδραση της δύναμης $f(x,t)$. Η ειδική λύση του προβλήματος καθορίζεται μονοσήμαντα, αν ορίσουμε συνοριακές συνθήκες τύπου **Cauchy** , δηλαδή αρχική απομάκρυνση

$$u(x, t = 0) = f(x)$$

και αρχική ταχύτητα

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\,|_{t=0}= g(x)$$

Οι αρχικές συνθήκες είναι συνθήκες Cauchy στο διάστημα $0 \leq x \leq L$. Με αυτές τις συνθήκες η λύση ορίζεται μέσα στο τετράπλευρο που περικλείεται από τις χαρακτηριστικές $(x \pm ct)$ στα άκρα του σιαστήματος $(0, L)$. Ομως στο συγκεκριμένο πρόβλημα η συνοριακή επιφάνεια επεκτείνεται με συνθήκες Dirichlet στις $x = 0$ και $x = L$ όπου , $u(x = 0,t) = u(x = L,t) = 0$. Για να βρούμε τη λύση της (εξ. 51) για $f(x,t) = 0$, πρώτα αναγνωρίζουμε ότι τα σημεία x=0 και x=L είναι nodes της $u(x,t)$ και επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών. Αναζητούμε λύση της μορφης [6] $u(x,t) = X(x).T(t)$. Αντικαθιστούμε

[6] Η ίδια τεχνική εφαρμόζεται και σε περισσότερες διαστάσεις

στη (εξ. 51) και έχουμε:

$$T(t)\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \frac{X(x)}{c^2}\frac{d^2T(t)}{dt^2} \tag{52}$$

Διαιρούμε με το γινόμενο $X(x)T(t) \neq 0$

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \frac{1}{c^2T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2} \tag{53}$$

Το πρώτο μέρος της (εξ. 53) είναι συνάρτηση της μεταβλητής x ενώ το δεύτερο είναι συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής t, επομένως κάθε όρος θα πρέπει να ισούται με μια σταθερά $\boldsymbol{\lambda}$ η οποία ονομάζεται **σταθερά διαχωρισμού**

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \lambda \tag{54}$$

και

$$\frac{1}{c^2T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2} = \lambda \tag{55}$$

Η σταθερά διαχωρισμού καθορίζεται μονοσήμαντα από τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.

Λύση του προβλήματος ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων του τελεστή $\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \lambda X(x)$:

Για

1. $\lambda = k^2 > 0$

$$X(x) = c_1e^{kx} + c_2e^{-kx} \tag{56}$$

   από τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος $X(x=0) = 0$ και $X(x=L) = 0$ έχουμε
   $c_1 + c_2 = 0$ και $c_1e^{kL} + c_2e^{-kL} = 0$.
   Το σύστημα των εξισώσεων έχει μοναδική λύση την
   $c_1 = -c_2 = 0$,
   και επομένως οδηγούμαστε στην προφανή ή τετριμμένη λύση.

2. $\lambda = k^2 = 0$

$$X(x) = c_1 x + c_2 \tag{57}$$

$X(0) = 0$ και $X(L) = 0$ άρα $c_1 = c_2 = 0$

3. $\lambda = -k^2 < 0$

$$X(x) = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx \tag{58}$$

$$X(0) = 0 \Longrightarrow c_2 = 0 \tag{59}$$

$X(L) = 0$ άρα:

$$c_1 \sin(kL) = 0 \tag{60}$$

Το $c_1 \neq 0$ για να μην οδηγηθούμε σε τετριμμένη λύση , άρα $kL = n\pi$ και $k = \frac{n\pi}{L}$[7].

Η χρονική εξάρτηση δίνεται από τη λύση της (εξ. 2.4) και για $\lambda = -k^2$ παίρνουμε:

$$T_n(t) = a_n \sin \frac{nc\pi}{L} t + b_n \cos \frac{nc\pi}{L} t \tag{61}$$

Η γενική λύση θα είναι ένα ανάπτυγμα πάνω στα ανύσματα βάσης του συστήματος **Sturm-Liouville**

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\frac{n\pi}{L} x) \; (a_n \sin(\frac{n\pi c}{L} t) + b_n \cos(\frac{n\pi c}{L} t)) \tag{62}$$

(αρχή της επαλληλίας). Οι παράμετροι a_n, b_n καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος, αρχική ταχύτητα και αρχική απομάκρυνση. Για $t = 0$,

[7]**Παρατήρηση**. Ο διαφορικός τελεστής $\mathbf{L} = -\frac{\mathbf{d^2}}{\mathbf{dx^2}}$ είναι αυτοπροσαρτημένος και με τις συνοριακές συνθήκες $X(0) = X(L) = 0$ γίνεται ερμητιανός , άρα οι ιδιοτιμές του $k^2 = n^2\pi^2\frac{1}{L^2}$ είναι θετικές και οι ιδιοσυναρτήσεις του $\sin kx$ ορθογώνιες και αποτελούν ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα.Επομένως έχουμε ένα σύστημα **Sturm-Liouville**

$u(x,t=0)=f(x)$ και $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\mid_{t=0}=g(x)$

$$u(x,t=0)=\sum_{n=0}^{\infty}\sin(\frac{n\pi}{L}x)\; b_n=f(x) \tag{63}$$

b_n είναι ο **συντελεστής Fourier** του αναπτύγματος της συνάρτησης $f(x)$ στην ορθογώνια βάση $\sin(\frac{n\pi}{L}x)$ και δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx \tag{64}$$

Από την αρχική ταχύτητα έχουμε:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\mid_{t=0}=g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\pi c}{L}\sin(\frac{n\pi}{L}x)\; a_n \tag{65}$$

όπου a_n είναι ο **συντελεστής Fourier** του αναπτύγματος της συνάρτησης $g(x)$ στην ίδια βάση και δίνεται από το ολοκλήρωμα:

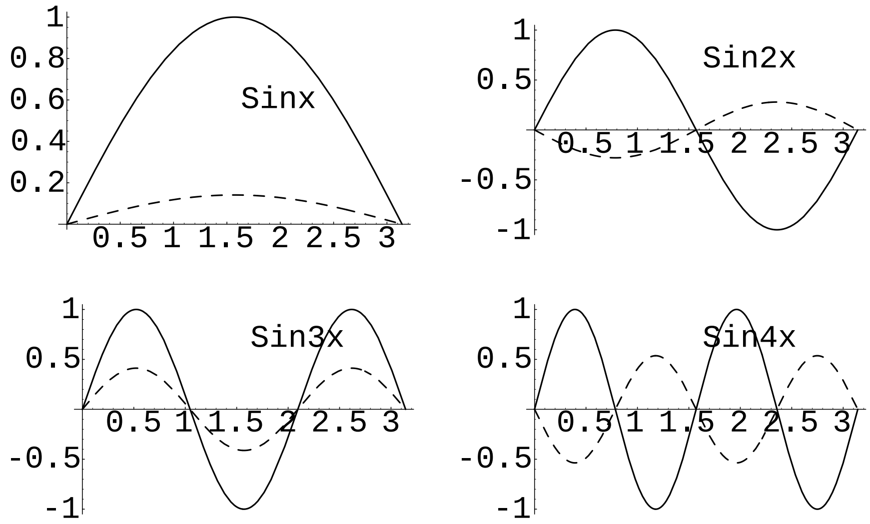
$$\frac{n\pi c}{L}a_n=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\,\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx \tag{66}$$

και

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}a_n\,\sin(\frac{n\pi}{L}x)\,\sin(\frac{n\pi c}{L}t)+\sum_{n=0}^{\infty}b_n\,\sin(\frac{n\pi}{L}x)\,\cos(\frac{n\pi c}{L}t)= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\Psi_{1n}(x,t)+\sum_{n=0}^{\infty}\Psi_{2n}(x,t) \end{aligned} \tag{67}$$

Κάθε ιδιοσυνάρτηση $\Psi_{1n}(x,t)$ ή $\Psi_{2n}(x,t)$ μπορεί να θεωρηθεί ως ταλάντωση στο χώρο με μεταβαλλόμενο πλάτος που εξαρτάται από το χρόνο ή ως ταλάντωση στο χρόνο με μεταβαλλόμενο πλάτος που εξαρτάται από το χώρο. Σε κάθε σημείο της χορδής η λύση δίνεται σαν επαλληλία αρμονικών ταλαντώσεων με περίοδο $T_n=\frac{2L}{nc}$ και πλάτος $\sin(\frac{n\pi}{L}x)$. Για κάθε χρονική στιγμή η λύση θα είναι επαλληλία στασίμων κυμάτων με μήκος κύματος $\lambda_n=\frac{2L}{n}$ και πλάτος $\sin(\frac{n\pi}{L}ct)$ ή $\cos(\frac{n\pi}{L}ct)$. Η συχνότητα της πρώτης ταλάντωσης $\nu_1=\frac{c}{2L}$ ονομάζεται θεμελιώδης συχνότητα ή πρώτη αρμονική ενώ, όλες οι άλλες ,οι οποίες είναι ακέραια πολλαπλάσιά της θεμελιώδους, είναι οι συχνότητες ανώτερης τάξης ή ανώτερες αρμονικές. Οι $\Psi_{1n}(x,t)$ και $\Psi_{2n}(x,t)$ ονομάζονται αρμονικές . Στο (σχημ. 4) βλέπουμε τις πρώτες αρμονικές σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές, η συνεχής γραμμή είναι τη χρονική στιγμή $t = 0$, ενώ η διακεκομμένη δείχνει την ίδια αρμονική για $t = 3$ μονάδες χρόνου. Κάθε λύση δίνεται σαν επαλληλία όλων των αρμονικών με βάρος το τετράγωνο των συντελεστών Fourier, οι οποίοι καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Αν η αρχική θέση της χορδής είναι μηδέν τότε ο συντελεστής $b_n = 0$ ενώ,



Σχήμα 7: Κανονικοί τρόποι ταλάντωσης ελαστικής χορδής (τέσσερις πρώτες αρμονικές)

αν η αρχική ταχύτητα είναι μηδέν τότε $a_n = 0$. τέλος αν η αρχική θέση και η αρχική ταχύτητα της χορδής είναι μηδέν τότε η χορδή θα παραμείνει στη θέση ισορροπίας και δέν θα έχουμε ταλάντωση.

Ισως γεννιέται το ερώτημα κατά πόσο η σειρά (εξ. 67) συγκλίνει ώστε να γνωρίζουμε το σχήμα της χορδής κάθε χρονική στιγμή. Χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες η (εξ.67) παίρνει τη μορφή

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2}[\cos(\frac{n\pi}{L}(x-ct)) - \cos(\frac{n\pi}{L}(x+ct))] + \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{2}[\sin(\frac{n\pi}{L}(x-ct)) + \sin(\frac{n\pi}{L}(x+ct))] \\
= & \; G(x-ct) + F(x+ct)
\end{aligned} \tag{68}
$$

όπου

$$
G(x-ct) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{a_n}{2} \cos(\tfrac{n\pi}{L}(x-ct)) + \tfrac{b_n}{2} \sin(\tfrac{n\pi}{L}(x-ct))\right) \tag{69}
$$

$$
F(x+ct) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\tfrac{a_n}{2} \cos(\tfrac{n\pi}{L}(x+ct)) + \tfrac{b_n}{2} \sin(\tfrac{n\pi}{L}(x+ct))\right) \tag{70}
$$

που ισοδυναμεί με το τύπο D'Alembert. Οι συναρτήσεις $G(x-ct)$ και $F(x+ct)$ για $t=0$ ικανοποιούν τις σχέσεις

$$
f(x) = G(x) + F(x) \tag{71}
$$

και

$$
g(x) = c(F'(x) - G'(x)) \tag{72}
$$

όπου $f(x)$, $g(x)$ η αρχική θέση και η αρχική ταχύτητα . Ακολουθώντας τη μέθοδο που ακολουθήσαμε στην άπειρη χορδή καταλήγουμε στον τύπο D'Alembert.

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= G(x-ct) + F(x+ct) = \\
&= \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(x')dx']
\end{aligned} \tag{73}
$$

Πράγματι μπορούμε να δείξουμε ότι η $u(x,t)$ ικανοποιεί την εξίσωση και τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες και λόγω του μονοσήμαντου της λύσης, είναι ίδια με την (σχές. 68) Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι δεν υπάρχει πρόβλημα σύγκλισης της σειράς, αρκεί οι συναρτήσεις

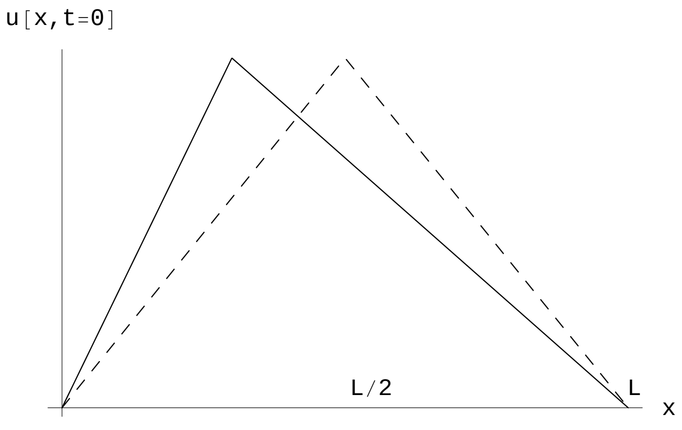
$f(x)$ και $g(x)$ να ικανοποιούν τις προυποθέσεις του αναπτύγματος Fourier στο διάστημα $0 \leq x \leq L$.

Παράδειγμα

Θεωρούμε χορδή μήκους L πακτωμένη στα δυό άκρα. Απομακρύνουμε τη χορδή από τη θάση ισορροπίας. Η αρχική απομάκρυνση έχει τη μορφή (σχήμα)

$$u(x,t=0) = f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{h} & : \quad 0 \leq x \leq h \\ \frac{a(L-x)}{(L-h)} & : \quad h \leq x \leq L \end{cases}$$

Αφήνουμε τη χορδή να κάνει ταλαντώσεις χωρίς αρχική ταχύτητα. Να βρεθεί η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας κάθε χρονική στιγμή.



Εφαρμόζουμε τα δεδομένα στην (σχέση 62) . Η χορδή αφήνεται να κάνει ταλαντώσεις χωρίς αρχική ταχύτητα επομένως, οι συντελεστές Fourier $a_n = 0$, ενώ οι συντελεστές b_n είναι

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx \\ &= \frac{2aL^2}{h(L-h)\pi^2 n^2}\sin(\frac{n\pi}{L}h) \end{aligned} \tag{74}$$

n	$\lvert b_n\rvert^2$	$\lvert b_n\rvert^2$
1	1	1
2	0.125	0
3	0.0234	0.01
4	0.0	0
5	0.0016	0.00117
6	0.0015	0
7	0.00041	0.0003
8	0	0
9	0.00015	0.0001
10	0.0002	0

Πίνακας 1: Πλάτη ταλάντωσης για τις περιπτώσεις όπου $h \neq \frac{L}{2}$ (στήλη 2) και $h = \frac{L}{2}$ (στήλη 3).

και η απομάκρυνση (σχέση 62) δίνεται από τη σειρά

$$u(x,t) = \frac{2aL^2}{h(L-h)\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin(\frac{n\pi}{L}h)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\cos(\frac{n\pi c}{L}t) \tag{75}$$

Η σειρά είναι μια επαλληλία αρμονικών με πλάτη :

$$|b_n|^2 = |\tfrac{2aL^2}{h(L-h)\pi^2}\tfrac{1}{n^2}\sin(\tfrac{n\pi}{L}h)|^2$$

Οπως φαίνεται από τους συντελεστές , η σειρά συγκλίνει λόγω του όρου $\frac{1}{n^2}$, ενώ παρατηρούμε ότι αν η παραμόρφωση (κορυφή του τριγώνου) είναι στο σημείο $h = \frac{L}{2}$, τα πλάτη ταλάντωσης μηδενίζονται για όλες τις άρτιες αρμονικές και επιζούν μόνο οι περιττές . Αν επρόκειτο για τον ήχο που παράγει η χορδή ενός μουσικού οργάνου, π.χ. μιας κιθάρας ,ο πρώτος όρος είναι η θεμελιώδης αρμονική ,τόνος ,με συχνότητα $\omega = \frac{\pi c}{L}$ ενώ οι άλλοι όροι δίνουν τα υποτόνια με τα αντίστοιχα πλάτη ταλάντωσεις και συχνότητες πολλαπλάσιες της θεμελιώδους . Στη δεύτερη περίπτωση παρατηρούμε ότι οι ανώτερες αρμονικής είναι ασθενέστερες και μόνο περιττές , επομένως θα έχουμε καθαρότερο ήχο από ότι στην πτώτη περίπτωση.

Στον πίνακα δίνονται τα πλάτη ταλάντωσης για τις 10 πρώτες αρμονικές .

Στην μια στήλη είναι για την περίπτωση όπου η παραμόρφοση γίνεται σε τυχαίο σημείο , ενώ στην άλλη στήλη δίνονται τα πλάτη για την περίπτωση που η παραμόρφωση γίνεται στο μέσο της χορδής.

β) Χορδή ελεύθερη στα άκρα

Θεωρούμε χορδή μήκους L η οποία είναι ελεύθερη στα δύο άκρα και την αφήνουμε να κάνει ταλαντώσεις δίνοντας της μια αρχική απομάκρυνση και μια αρχική ταχύτητα. Να βρεθεί η απομάκρυνση από τη θέση ισορροποίας κάθε χρονική στιγμή .

Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος είναι

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \tag{76}$$
$$u(x,t=0) = f(x) \ ,$$
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \,|_{t=0} = g(x) \ .$$
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \,|_{x=0} = 0 \ .$$
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \,|_{x=L} = 0 \ .$$

Το πρόβλημα είναι καλά τοποθετημένο και η γενική λύση είναι

$$u(x,t) = (A\sin(kx) + B\cos(kz))(C\sin(kct) + D\cos(kct)) \tag{77}$$

Εφαρμόζουμε πρώτα τη συνοριακή συνθήκη στο $x = 0$ και καταλήγουμε ότι θα πρέπει η σταθερά $A = 0$, ενώ από τη συνοριακή συνθήκη στο $x = L$ υπολογίζουμε τη σταθερά διαχωρισμού $k = \frac{n\pi}{L}$ όπου $n = 0, 1, 2, 3, ...$Η λύση του προβλήματος της ελέυθερης χορδής είναι

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{n\pi c}{L}t) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(\frac{n\pi}{L}x)\cos(\frac{n\pi c}{L}t) \tag{78}$$

Οι συντελεστές a_n και b_n υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

$$u(x,t=0)=\sum_{n=0}^{\infty}\cos(\frac{n\pi}{L}x)\ b_n=f(x) \tag{79}$$

b_n είναι ο **συντελεστής Fourier** του αναπτύγματος της συνάρτησης $f(x)$ στην ορθογώνια βάση $\cos(\frac{n\pi}{L}x)$ και δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)dx \tag{80}$$

Από την αρχική ταχύτητα έχουμε:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\ |_{t=0}=g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\pi c}{L}\ \cos(\frac{n\pi}{L}x)\ a_n \tag{81}$$

όπου a_n είναι ο **συντελεστής Fourier** του αναπτύγματος της συνάρτησης $g(x)$ στην ίδια βάση και δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$\frac{n\pi c}{L}a_n=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\ \cos(\frac{n\pi}{L}x)dx \tag{82}$$

παράδειγμα

Χορδή ελεύθερη στα άκρα αφήνεται να κάνει μικρές ταλαντώσεις χωρίς αρχική απομάκρυνση αλλά με αρχική ταχύτητα της μορφής :

$$g(x)=A\sin(\frac{5n\pi}{L}x)\sin(\frac{3n\pi}{L}x) \tag{83}$$

Να βρεθεί το φάσμα συχνοτήτων με το οποίο νταλαντώνεται η χορδή.

Στο πρόβλημά μας η αρχική απομάκρυνση είναι μηδέν και η χορδή κάνει ταλαντώσεις μόνο με αρχική ταχύτητα. Οι συντελεστές $b_n=0$. Τα a_n υπολογίζονται από το ανάπτυγμα Fourier της αρχικής ταχύτητας [8] .

$$\frac{n\pi c}{L}a_n \quad = \quad \frac{2A}{L}\int_0^L \sin(\frac{5n\pi}{L}x)\sin(\frac{3n\pi}{L}x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)dx$$

[8] Τα ολοκλήρώματα αυτής της μορφής υπολογίζονται εύκολα με τη βοήθεια των σχέσεων ορθοκανονικότητας των ανυσμάτων βάσης, $\cos(\frac{n\pi}{L}x)$ και της τριγωνομετρικές ταυτότητες $(\sin(a)\ \sin(b0\ =\frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b))$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2A}{L}\int_0^L (\frac{1}{2}(\cos(\frac{2\pi}{L}x) - \cos(\frac{8\pi}{L}x))\cos(\frac{n\pi}{L}x)dx \\
&= \frac{A}{2}(\delta_{2n} - \delta_{n8}) \qquad (84)
\end{aligned}
$$

Οι μόνες αρμονικές που επιζούν είναι η δεύτερη με πλάτος ταλάντωσης $a_2^2 = (\frac{AL}{4\pi c})^2$ και συχνότητα $\omega_2 = \frac{2\pi c}{L}$ και η όγδοη αρμονική με πλάτος $a_8^2 = (\frac{-AL}{16\pi c})^2$ και συχνότητα $\omega_8 = \frac{8\pi c}{L}$.

2.5 Ενέργεια πακτωμένης χορδής

Η ενέργεια μιας χορδής, τάσης T και πυκνότητας ρ, δίνεται από την έκφραση:

$$E = \frac{1}{2}\int_0^L (\rho|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}|^2 + T|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|^2)dx \qquad (85)$$

όπου$u(x,t)$ η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας . Ο πρώτος όρος στην (σχ.85) είναι η δυναμική ενέργεια ενώ ο δεύτερος όρος εκφράζει την κινητική ενέργεια. Για την περίπτωση της πακτωμένης χορδής που κάνει ελεύθερες ταλαντώσεις σε μέσο χωρίς τριβές η λύση είναι:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\omega_n t) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)\cos(\omega_n t) \qquad (86)$$

και $\omega_n = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ η κυκλική συχνότητα. Αν αντικαταστήσουμε την (σχ. 86) στη (σχ. 85) και χρησιμοποιήσουμε την ορθογωνιότητα των ανυσμάτων βάσης $\sin(\frac{n\pi}{L}x)$ στο διάστημα $[0, L]$ βρίσκουμε ότι η ενέργεια της χορδής είναι :

$$E = \frac{\pi^2 T}{4L}\sum_{n=0}^{\infty} n^2(|a_n|^2 + |b_n|^2) \qquad (87)$$

από τη σχέση αυτή παρατηρούμε ότι η ολική ενέργεια δίνεται από το άθροισμα των ενεργειών όλων των αρμονικών. Επί πλέον παρατηρούμε ότι η μεταβολή της ολικής ενέργειας $\frac{dE}{dt} = 0$. Αυτό σημαίνει ότι, αν δέν υπάρχουν εξωτερικά αίτια (π.χ τριβές), η ολική ενέργεια της ταλάντωσης διατηρείται στο χρόνο.

2.6 Εξηναγκασμένη ταλάντωση χορδής

Χορδή πακτωμένη στα άκρα εκτελεί ταλαντώσεις υπό την επίδραση δύναμης $f(x,t)$. Εάν η αρχική θέση της χορδής είναι
$u(x,t=0)=a(x)$ και η αρχική ταχύτητα $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}|_{t=0}=b(x)$
να βρεθεί η εγκάρσια απομάκρυνση κάθε χρονική στιγμή.

Η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας κάθε χρονική στιγμή ορίζεται από την λύση της εξίσωσης:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t))}{\partial t^2}=-f(x,t) \tag{88}$$

όπου$f(x,t)$ ομαλή συνάρτηση των μεταβλητών (x,t). Η (εξ. 88) είναι μη ομογενής δ.ε. Για να λύσουμε τη μη ομογενή εξίσωση εφαρμόζουμε την ακόλουθη μέθοδο. Αναζητούμε λύση της μορφής :

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\ \sin(\frac{n\pi}{L}x) \tag{89}$$

δηλαδή λύση σε ανάπτυγμα πάνω στην ορθοκανονική βάση που παίρνουμε από το σύστημα Sturm-Liouvill της ελεύθερα ταλαντούμενης πακτωμένης χορδής. Αναπτύσουμε κατά Fourier τη συνάρτηση $f(x,t)$ στη ίδια βάση.

$$f(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(t)\ \sin(\frac{n\pi}{L}x) \tag{90}$$

Η συνάρτηση $f_n(t)$ είναι ο συντελεστής Fourier της $f(x,t)$. Οι συντελεστές Fourier των αναπτυγμάτων των συναρτήσεων $u(x,t)$ και $f(x,t)$ απορροφούν τη χρονική εξάρτηση. Αντικαθιστούμε τα αναπτύγματα στη (σχ. 88) και προκύπτει η εξίσωση την οποία ικανοποιεί η άγνωστη συνάρτηση $T_n(t)$.

$$T_n^{''}(t)+\frac{c^2n^2\pi^2}{L^2}T(t)=c^2f_n(t) \tag{91}$$

Οπου

$$f_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)\ \sin(\frac{n\pi}{L}x)dx \tag{92}$$

Η εξίσωση (91) είναι συνήθης διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης μη ομογενής με σταθερούς συντελεστές και έχει λύση της μορφής

$$T_n(t) = A_1 T_{1n}(t) + A_2 T_{2n}(t) + T_p(t) \tag{93}$$

όπου $T_{1n}(t)$, $T_{2n}(t)$ οι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς και $T_p(t)$ μια ειδική λύση της μη ομογενούς.

$$T_{1n}(t) = \sin(\frac{n\pi c}{L}t) \tag{94}$$

$$T_{2n}(t) = \cos(\frac{n\pi c}{L}t) \tag{95}$$

$$\begin{aligned} T_{p(t)} &= T_{2n}(t)\int\limits_0^t \frac{c^2 f_n(t')T_{1n}(t')}{W[T_{1n}(t'), T_{2n}(t')]}dt' \\ &- T_{1n}(t)\int\limits_0^t \frac{c^2 f_n(t')T_{2n}(t')}{W[T_{1n}(t'), T_{2n}(t')]}dt' \end{aligned} \tag{96}$$

οπου $W[T_{1n}(t'), T_{2n}(t')]$ η συνάρτηση Wronsky των $T_{1n}(t)$, $T_{2n}(t)$. Αν αντικαταστήσουμε τις T_{1n}, T_{2n} και $T_p(t)$ στη (σχ. 93) παίρνουμε τη γενική λύση της (εξ. 88).

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_0^\infty [A_n\ \sin(\frac{n\pi c}{L}t) + B_n\ \cos(\frac{n\pi c}{L}t) \\ &+ \frac{Lc}{n\pi}\int\limits_0^t f_n(t')\ \sin(\frac{n\pi c}{L}(t-t'))dt']\ \sin(\frac{n\pi}{L}x) \end{aligned} \tag{97}$$

Οι συντελεστές A_n, B_n καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος, αρχική θέση και αρχική ταχύτητα.

$$A_n = \frac{2}{cn\pi}\int\limits_0^L b(x)\ sin(\frac{n\pi}{L}x)dx \tag{98}$$

$$B_n = \frac{2}{L}\int\limits_0^L a(x)\ cos(\frac{n\pi}{L}x)dx \tag{99}$$

A_n, B_n συντελεστές Fourier.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}(A_n\ \sin(\frac{n\pi c}{L}t) + B_n\ \cos(\frac{n\pi c}{L}t))\sin(\frac{n\pi}{L}x) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{Lc}{n\pi}\int_0^t f_n(t')\ \sin(\frac{n\pi c}{L}(t-t'))dt'\sin(\frac{n\pi}{L}x) \end{aligned} \quad (100)$$

Η λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι επαλληλία δυό λύσεων. Οι δυό πρώτοι όροι δίνουν τη λύση της ομογενούς εξίσωσης , ενώ ο τελευταίος όρος είναι η λύση της μη ομογενούς.

$$u_\mu(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{Lc}{n\pi}\int_0^t f_n(t')\sin(\frac{n\pi c}{L}(t-t'))dt'\sin(\frac{n\pi}{L}x) \quad (101)$$

Η (εξ. 101) ικανοποιεί τις συνθήκες

$$u_\mu(x,t=0) = 0$$

εφαρμόζοντας τον κανόνα του Leibnitz για την παραγώγιση του ολοκληρώματος βρίσκουμε ότι και

$$\frac{\partial u_\mu(x,t)}{\partial t}\ |_{t=0} = 0$$

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι η μερική λύση δεν περιέχει καμμιά πληροφορία από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος (αρχική θέση και αρχική ταχύτητα). Εάν η αρχική θέση και η αρχική ταχύτητα της χορδής είναι μηδέν η χορδή θα κάνει ταλαντώσεις και η απομάκρυνση θα ορίζεται από την ειδική λύση της μη ομογενούς.

Για να υπολογίσουμε την ενέργεια της χορδής η οποία ταλαντεύεται σε μέσο με τριβές (εξηναγκασμένη ταλάντωση) αντικαθιστούμε στη (σχ. 85) την (σχ. 100). Ο τελευταίος όρος της (σχ. 100) συνεισφέρει στην ολική ενέργεια με ένα επί πλέον όρο που εξαρτάται από το χρόνο και επομένως στην περίπτωση αυτή δέν θα έχουμε διατήρηση της ενέργειας του συστήματος όπως και αναμέναμε.

<u>Παραδειγμα</u> :**Παλλόμενη χορδή σε πεδίο βαρύτητας**

Θεωρούμε χορδή σταθερής πυκνότητας **ρ** και μήκους L πακτωμένη στα άκρα. Η χορδή αφήνεται να κάνει μικρές ταλαντώσεις στο πεδίο βαρύτητας αφού απομακρυνθεί λίγο από τη θέση ισορροπίας (αρχική απομάκρυνση $f(x)$).Να βρεθεί ο τρόπος ταλάντωσης της χορδής.
Λύση

Η απομάκρυνση $u(x,t)$ ικανοποιεί την μη ομογενή εξίσωση ταλάντωσης η οποία έχει τη μορφή

$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{g}{c^2}$
όπου g η σταθερά της βαρύτητας. Αναπτύσσουμε κατά Fourier την g.

$$\frac{g}{c^2} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) \tag{102}$$

όπου

$$f_n = \frac{2}{L}\int_0^L \frac{g}{c^2}\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx = \frac{2g(1-\cos n\pi)}{nc^2\pi} \tag{103}$$

και $u(x,t) = U(x,t) + u_\mu(x,t)$ όπου $U(x,t)$ η λύση της ομογενούς . Η ειδική λύση της μη ομογενούς (εξ. 101) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
u_\mu(x,t) &= \sum_1^{\infty} \frac{Lc}{n\pi}\int_0^t f_n\ \sin(\frac{n\pi c}{L}(t-t'))\ dt'\ \sin(\frac{n\pi}{L}x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2gL^2}{c^2n^3\pi^3}\ (1-\cos(n\pi))\ (1-\cos(\frac{n\pi ct}{L}))\ \sin(\frac{n\pi}{L}x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2gL^2}{c^2n^3\pi^3}\ (-1+(-1)^n))\ \cos(\frac{n\pi ct}{L}))\ \sin(\frac{n\pi}{L}x) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2gL^2}{c^2n^3\pi^3}\ (-1+(-1)^n))\ \sin(\frac{n\pi}{L}x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2gL^2}{c^2 n^3 \pi^3} \left(-1 + (-1)^n\right)\right) \cos(\frac{n\pi ct}{L})) \sin(\frac{n\pi}{L} x) \\
&+ \frac{gx}{2c^2}(L - x) \qquad (104)
\end{aligned}
$$

Ο τελευταίος όρος της (σχ. 104) προκύπτει από το ανάπτυγμα Fourier

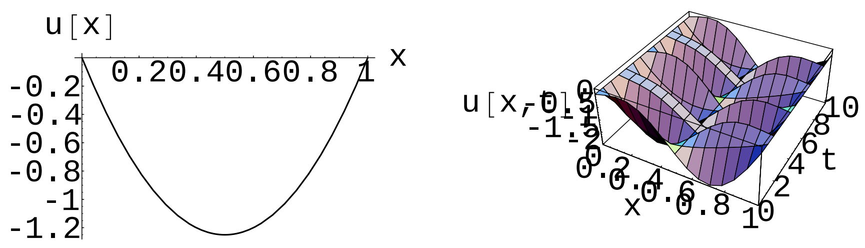
$$
\frac{gx}{2c^2}(L - x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2gL^2}{c^2 n^3 \pi^3} \left(-1 + (-1)^n\right)\right) \sin(\frac{n\pi}{L} x) \qquad (105)
$$

Οπως προκύπτει από την (σχ. 104) η μερική λύση είναι άθροισμα δυό όρων , ενός στατικού και ενός όρου που εξαρτάται από το χρόνο
$u_{\mu}(x,t) = u_1(x) + u_2(x,t)$
Αντικαθιστούμε στη (εξ. 100) και έχουμε

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{0}^{\infty} (A_n \sin(\frac{n\pi c}{L} t)) + B_n \cos(\frac{n\pi c}{L} t)) \sin(\frac{n\pi}{L} x) + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2gL^2}{c^2 n^3 \pi^3} (-1 + (-1)^n)) \cos(\frac{n\pi ct}{L})) \sin(\frac{n\pi}{L} x) \\
&+ \frac{-gx}{2}(L - x) \qquad (106)
\end{aligned}
$$

Οι συντελεστές Fourier A_n και B_n υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Από τη μορφή που παίρνει η μερική λύση για το συγκεκριμένο προβλημα όπου $u_{\mu}(x,t) = u_1(x) + u_2(x,t)$, θα μπορούσαμε από την αρχή να αναζητήσουμε λύση της μορφής $u(x,t) = u_1(x) + U(x,t)$, όπου $U(x,t)$ η λύση της ομογενούς και $u_1(x)$ μια στατική λύση . Η λύση της ομογενούς ικανοποιεί την ομογενή εξίσωση με ομογενείς συνοριkές συνθήκες και με αρχική απομάκρυνση $f(x) - u_1(x)$, ενώ η αρχική ταχύτητα θα είναι η αρχική ταχύτητα της χορδής . Παρατηρούμε λοιπόν ότι ακόμα και στην περίπτωση που αφήσουμε μια χορδή χωρίς αρχική ταχύτητα και αρχική απομάκρυνση μέσα στο πεδίο, η χορδή θα κάνει ταλαντώσεις γύρω από τη στατική λύση . Στο (σχήμα.5) φαίνεται η θέση της χορδής μέσα στο πεδίο βαρύτητας (στατική λύση) και η ταλάντωση της πρώτης αρμονικής



Σχήμα 8: Στατική λύση και ταλάντωση της πρώτης αρμονικής γύρω από αυτήν

γύρω από από τη θέση αυτήν.[9]

2.7 Τετραγωνική μεμβράνη

Τετράγωνη μεμβράνη πλευράς L είναι πακτωμένη στα άκρα και αφήνεται να κάνει μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας.Η εγκάρσια απομάκρυνση της μεμβράνης ορίζεται από την $u(x, y, t)$ η οποία ικανοποιεί την κυματική εξίσωση στις δυό διαστάσεις.

Η κ.ε. σε καρτεσιανές συντεταγμένες έχει τη μορφή (Η γεωμετρία του συνόρου επιβάλει να πάρουμε την Λαπλασιανή σε καρτεσιανές συντεταγμένες) .

$$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (107)$$

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι

$$u(x=0,y,t) = u(x=L,y,t) = u(x,y=0,t) = u(x,y=L,t) = 0$$

ενώ οι αρχικές συνθήκες

$$u(x,y,t=0) = f(x,y) \text{ και } u_t(x,y,t)\,|_{t=0} = g(x,y)$$

είναι συνθήκες Cauchy που ορίζονται πάνω στην επιφάνεια 'Cauchy' η οποία καλύπτει το τετράγωνο $0 < x < L$ και $0 < y < L$ στο επίπεδο (x, y).

[9] Ασκηση. Προσπαθήστε να λύσετε το ίδιο πρόβλημα αναζητώντας λύση της μορφής $u(x,t) = u_s(x) + U(x,t)$

Για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό εφαρμόζουμε τη μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών αναζητώντας λύση της μορφής

$$u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$$

Αντικαθιστούμε στην (εξ. 107) και διαχωρίζοντας τις μεταβλητές έχουμε

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = \frac{1}{T(t)}\frac{1}{c^2}\frac{d^2T(t)}{dt^2} = 0 \qquad (108)$$

Το δεξιό μέρος της (εξ. 108) είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής t, ενώ το αριστερό των (x, y). Εισάγωντας σταθερές διαχωρισμού οδηγούμαστε στο σύστημα των κοινών δ.ε.

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \lambda_1 \qquad (109)$$

$$\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = \lambda_2 \qquad (110)$$

$$\frac{1}{T(t)}\frac{1}{c^2}\frac{d^2T(t)}{dt^2} = \lambda \qquad (111)$$

όπου $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$. Από τις συνοριακές συνθήκες $X(0) = X(L) = 0$ και $Y(0) = Y(L) = 0$ παρατηρούμε ότι έχουμε δυό συστήματα Sturm-Liouville στις διευθύνσεις (x, y) .Κάθε ένα από τα συστήματα αυτά θα είναι ανάλογο με αυτό του προβλήματος της πεπερασμένης χορδής. Τα ανύσματα βάσης για τις δυό διευθύνσεις είναι οι ιδιοσυναρτήσεις των δυό συστημάτων Sturm-Liouville ,

$$X_n(x) = \sin(\tfrac{n\pi x}{L}) \text{ και } Y_m(y) = \sin(\tfrac{m\pi y}{L})$$

όπου $n, m = 0, 1, 2, 3...$ Η γενική λύση του προβλήματος θα δίνεται από το διπλό ανάπτυγμα στους διανυσματικούς χώρους $X_n(x)$ και $Y_m(y)$

$$\begin{aligned} u(x,y,t)) &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{L}y)\left(a_{nm}\sin(\omega_{nm}t) + b_{nm}\cos(\omega_{nm}t)\right) \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} u_{nm}(x,y,t) \qquad (112) \end{aligned}$$

όπου $\omega_{nm} = \frac{\pi c}{L} \sqrt{n^2+m^2}$ οι συχνότητες ταλάντωσης . Η ω_{11} είναι η συχνότητα της πρώτης αρμονικής ,ω_{12} της δεύτερης και η οποία όπως παρατηρούμε είναι ίση με την ω_{21}. Το φαινόμενο αυτό ,όπου στην ίδια ιδιοσυχνότητα (ιδιοτιμή) έχουμε διαφορετικό σχήμα, $u_{12}(x,y,t) \neq u_{21}(x,y,t)$, (ιδιοσυνάρτηση),ονομάζεται εκφυλισμός. Στο σχήμα (9) ενδεικτικά σχεδιάζουμε τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης που αντιστοιχούν στις πρώτες αρμονικές. Στην πρώτη στήλη είναι οι αρμονικές $u_{11}(x,y,t=0)$, $u_{12}(x,y,t=0)$, $u_{13}(x,y,t=0)$, $u_{32}(x,y,t=0)$, ενώ στη δεύτερη στηλη είναι οι ίδιες αρμονικές αλλά σε κάποια άλλη χρονική στιγμή $u_{11}(x,y,t=1)$, $u_{12}(x,y,t=1)$,$u_{13}(x,y,t=1)$,$u_{32}(x,y,t=1)$. Από το σχήμα μπορούμε να δούμε τις γραμμές μηδενισμού **nodal lines** των αρμονικών οι οποίες για τις συγκεκριμένες αρμονικές είναι γραμμές παράλληλες στις πλευρές του τετραγώνου . Στην περίπτωση της πρώτης αρμονικής δεν έχουμε γραμμή μηδενισμού. Για την $u_{12}(x,y,t=0)$ έχουμε γραμμή μηδενισμού παράλληλη στον άξονα x ενώ, η $u_{21}(x,y,t=0)$ μας δίνει γραμμή μηδενισμού παράλληλη στον άξονα y. Ανώτερες αρμονικές δίνουν περισσότερες γραμμές μηδενισμού. Μπορούμε όμως να δείξουμε ότι γραμμές μηδενισμού έχουμε και κατά τη διαγώνιο αν πάρουμε ένα γραμμικό συνδυασμό άλλων αρμονικών,π.χ. ο συνδυασμός $u_{12}(x,y,t) - u_{21}(x,y,t) = 0$ για $x = y$. Με ένα τέτοιο συνδυασμό αντιμετοπίζουμε το πρόβλημα μιας τριγωνικής μεμβράνης (άσκηση). Η γενική λύση (σχ. 112) δίνεται σαν επαλληλία από στάσιμα κύματα με πλάτος τους συντελεστές a_{nm} ,b_{nm} οι οποίοι είναι οι συντελεστές Fourier του διπλού αναπτύγματος και υπολογίζονται μονοσήμαντα από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

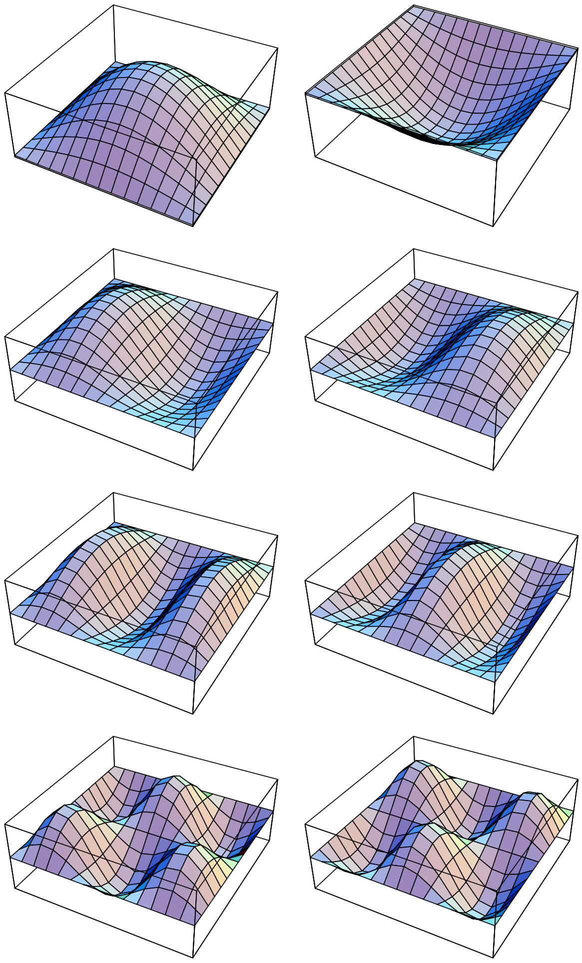
$$u(x,y,t=0) = f(x,y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} b_{nm} \sin(\frac{n\pi}{L}x) \sin(\frac{m\pi}{L}y) \tag{113}$$

και

$$b_{nm} = \frac{4}{L^2} \int_0^L \sin(\frac{n\pi}{L}x)\, dx \int_0^L f(x,y)\, \sin(\frac{m\pi}{L}y)\, dy \tag{114}$$

$$u_t(x,y,t)\mid_{t=0} = g(x,y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm}\,\omega_{nm}\,\sin(\frac{n\pi}{L}x)\,\sin(\frac{m\pi}{L}y) \qquad (115)$$

$$a_{nm} = \frac{4}{L^2}\,\frac{1}{\omega_{nm}}\int_0^L \sin(\frac{n\pi}{L}x)\,dx\int_0^L g(x,y)\,\sin(\frac{m\pi}{L}y)\,dy \qquad (116)$$



Σχήμα 9: Κανονικοί τρόποι ταλάντωσης τετραγωνικής μεμβράνης

Η (σχ. 112) δίνει τη γενική λύση του προβλήματος της πακτωμένης μεμβράνης . Το ειδικό πρόβλημα καθορίζεται από τους συντελεστές Fourier οι οποίοι εξαρτώνται από τα δεδομένα του προβλήματος .

2.8 Κυκλική μεμβράνη

Κυκλική μεμβράνη ακτίνας R πακτωμένη στην περιφέρεια εκτελεί μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας. Εάν η αρχική απομάκρυνση της μεμβράνης από τη θέση ισορροπίας είναι $f(\rho,\theta)$ και η αρχική ταχύτητα $g(\rho,\theta)$ (ρ,θ κυκλικές συντεταγμένες) να βρεθεί η εγκάρσια απομάκρυνση, $u(\rho,\theta,t)$, της μεμβράνης κάθε χρονική στιγμή.

Η εξίσωση που ικανοποιεί η $u(\rho,\theta,t)$ (πρόβλημα σε δυό διαστάσεις) είναι:

$$\nabla^2 u(\rho,\theta,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(\rho,\theta,t))}{\partial t^2} \tag{117}$$

Η Λαπλασιανή σε κυκλικές [10] συντεταγμένες είναι[11]

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \tag{118}$$

Σε κυκλικές συντεταγμένες η κυματική εξίσωση έχει τη μορφή

$$(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})u(\rho,\theta,t) = 0 \tag{119}$$

Αναζητούμε λύση της μορφής

$$u(\rho,\theta,t) = X(\rho,\theta)T(t).$$

Αν αντικαταστήσουμε την $u(\rho,\theta,t) = X(\rho,\theta)T(t)$ στη (εξ. 117) η $X(\rho,\theta)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$(\nabla^2 + k^2)X(\rho,\theta) = 0 \tag{120}$$

η οποία είναι γνωστη σαν εξίσωση **Helmholtz** και η οποία σε κυκλικές συντεταγμένες έχει τη μορφή :

$$(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + k^2)X(\rho,\theta) = 0 \tag{121}$$

[10] Η Λαπλασιανή σε κυλινδρικές συντεταγμένες έχει τη μορφή:
$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.
Για $z = 0$ ο κύλινδρος εκφυλίζεται σε κυκλική επιφάνεια.

[11] Η επιλογή του συστήματος συντεταγμένων επιβάλλεται από τη συνοριακή επιφάνεια. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα όπου η συνοριακή επιφάνεια είναι κύκλος το καταλληλότερο σύστημα είναι οι κυκλικές σεντεταγμένες.

Η $T(t)$ ικανοποιεί την εξίσωση ,

$$T''(t) + k^2 c^2 T(t) = 0 \tag{122}$$

όπου k^2 η σταθερά διαχωρισμού [12]. Η λύση της (εξ. 122) είναι :

$$T(t) = C_1 \sin(kct) + C_2 \cos(kct) \tag{123}$$

Η εξίσωση (εξ. 121) είναι διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους των ανεξάρτητων μεταβλητών (ρ, θ). Η επιφάνεια $\rho = R =$σταθ. είναι συνοριακή επιφάνεια πάνω στην οποία η λύση είναι μηδέν (μεμβράνη πακτωμένη στη περιφέρεια) και επομένως θα αποτελεί nodal επιφάνεια. Ο τελεστής ∇^2 σε κυκλικές συντεταγμένες είναι διαχωρίσιμος και μπορούμε να αναζητήσουμε λύση της μορφής $X(\rho, \theta) = R(\rho)\Theta(\theta)$. Αντικαθιστούμε στη εξίσωση (εξ. 121) η οποία παίρνει τη μορφή

$$\frac{\rho^2}{R(\rho)} \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{\rho}{R(\rho)} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2\Theta(\theta)}{d^2\theta} + k^2 \rho^2 = 0 \tag{124}$$

Η (εξ. 124) είναι άθροισμα δυό όρων, ενός γωνιακού και ενός ακτινικού . Διαχωρίζουμε τους δυό όρους εισάγωντας νέα σταθερά διαχωρισμού την μ^2 και παίρνουμε δυό συνήθεις δ.ε.

$$\frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + (k^2 - \frac{\mu^2}{\rho^2}) R(\rho) = 0 \tag{125}$$

$$\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2} + \mu^2 \Theta(\theta) = 0 \tag{126}$$

Επειδή η λύση που αναζητούμε πρέπει να παραμένει αναλλοίωτη σε στροφές κατά γωνία 2π, η (εξ. 126) θα έχει λύσεις περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο 2π.

[12]επιλέγουμε το $k^2 > 0$ για να έχουμε λύσεις που κάνουν ταλαντώσεις στο χρόνο διαφορετικά αν $k^2 < 0$ θα είχαμε εκθετικές συναρτήσεις του χρόνου. Ομως και οι συνοριακές συνθήκες θα μας έπέβαλαν το $k^2 > 0$

$\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$,$\Theta(0) = \Theta(2\pi)$ και $\Theta'(\theta) = \Theta'(\theta + 2\pi)$.

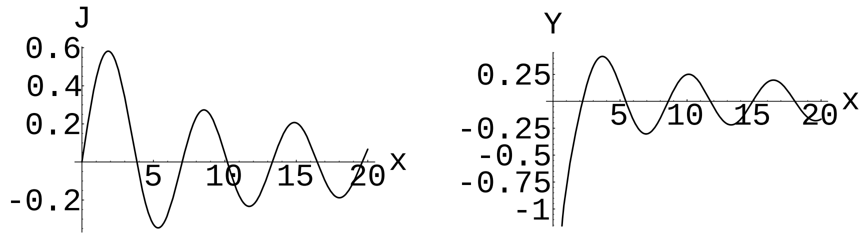
Αποδείξτε (σαν ασκηση) ότι για να ικανοποιούνται οι περιοδικές συνθήκες θα πρέπει η σταθερά διαχωρισμού $\mu^2 = m^2$ όπου $m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4...$ ακέραιος αριθμός και η λύση της (εξ. 126) έχει την μορφή:

$$\Theta_m(\theta) = A_1 \sin(m\theta) + B_1 \cos(m\theta) \tag{127}$$

Τα $\Theta_m(\theta)$ αποτελούν ένα πλήρες σύστημα Fourier σε $\sin(m\theta)$ και $\cos(m\theta)$ στο διάστημα [0,2π]. Αν στη (εξ. 125) κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $\rho' = k\rho$, $(k \neq 0)$, παίρνουμε την εξίσωση:

$$\frac{d^2R(\rho')}{d\rho'^2} + \frac{1}{\rho'}\frac{dR(\rho')}{d\rho'} + (1 - \frac{m^2}{\rho'^2})R(\rho') = 0 \tag{128}$$

Η εξίσωση (εξ. 128) είναι η **εξίσωση Bessel** η οποία έχει λύσεις για ακέραια m τις γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις **Bessel** $J_m(\rho')$ και **Neumann** $N_m(\rho')$. Η συνάρτηση Neumann παρουσιάζει λογαριθμική ανωμαλία στο $\rho = 0$.



Σχήμα 10: συναρτήσεις Bessel$J_m(x)$ και Neumann $Y_m(x)$

Μια τέτοια λύση δέν είναι φυσικά αποδεκτή, διότι αναζητούμε λύσεις πεπερασμένες σε όλο το πεδίο ορισμού της μεταβλητής ρ' (μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας). Η γενική λύση της (128) είναι ένας γραμμικός συνδυασμός $AJ_m(\rho') + BN_m(\rho')$. Για την περιοχή μέσα στον κύκλο, $B=0$, ενώ για μια κυκλική στεφάνη $R_1 < \rho' < R_2$ τα $A, B \neq 0$. Οι συναρτήσεις Bessel είναι από τις πλέον γνωστές συναρτήσεις της μαθηματικής φυσικής. Η εξίσωση (128) με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες, δηλαδή $R(\rho')|_{\rho'=R} = 0$ ή $\frac{\partial R(\rho')}{\partial \rho'}|_{\rho'=R} = 0$, όπουR η ακτίνα της μεμβράνης , αποτελεί ένα σύστημα Sturm-Liouville [13] με ιδιοσυναρτήσεις $J_m(\frac{k_{mn}\rho}{R})$. Τα k_{mn} ορίζονται από τη συνθήκη $J_m(kR)=0$, $kR = k_{mn}$ (όπου k_{mn} το n τάξης μηδενικό της συνάρτησης Bessel, $J_m(kR)$). Οι συναρτήσεις Bessel $J_m(\frac{k_{mn}\rho}{R})$, με κατάλληλη κανονικοποίηση, αποτελούν ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα στο διάστημα $[0, R]$ με συνάρτηση βάρους ρ. Η $X(\rho,\theta)$ θα δίνεται σαν επαλληλία όλων των αρμονικών u_{mn}

$$\begin{aligned} u_{mn}(\rho,\theta,t) = \quad & J_m(\frac{k_{mn}\rho}{R})[A_{mn}\cos(m\theta) + B_{mn}\sin(m\theta)] \\ & [\quad A'\cos(\frac{k_{mn}ct}{R}) + B'\sin(\frac{k_{mn}ct}{R})] \end{aligned} \tag{129}$$

με συχνότητα $\omega_{\mathbf{mn}} = \frac{\mathbf{k_{mn}c}}{\mathbf{R}}$ και η γενική λύση ταλάντωσης της κυκλικής μεμβράνης είναι

$$\begin{aligned} u \quad (\rho,\theta,t) = & \sum_{m,n}^{\infty} J_m(\frac{k_{mn}\rho}{R})[A_{mn}\cos(m\theta) + B_{mn}\sin(m\theta)]\cos(\frac{k_{mn}ct}{R}) \\ + \quad & \sum_{mn}^{\infty} J_m(\frac{k_{mn}\rho}{R})[A^{'}_{mn}\cos(m\theta) + B^{'}_{mn}\sin(m\theta)]\sin(\frac{k_{mn}ct}{R}) \end{aligned} \tag{130}$$

Οι συντελεστές A_{mn} , B_{mn} , $A^{'}_{mn}$, $B^{'}_{mn}$ καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

$$\begin{aligned} & u(\rho,\theta,t=0) = f(\rho,\theta) = \\ = & \sum_{m,n}^{\infty} J_m(\frac{k_{mn}\rho}{R})[A_{mn}\cos(m\theta) + B_{mn}\sin(m\theta)] \end{aligned} \tag{131}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(\rho,\theta) =$$

[13] Το πρόβλημα αυτό δέν είναι ένα κανονικό πρόβλημα Sturm-Liouville λόγω της συμπεριφοράς στο $\rho = 0$. Το πρόβλημα Bessel καθώς και το πρόβλημα Legendre που θα συναντήσουμε σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι ιδιάζοντα προβλήματα Sturm-Liouville όμως θεωρούμε ότι ισχύουν όλες οι παραδοχές που έχουμε κάνει για το κανονικό πρόβλημα

$$= \sum_{m,n}^{\infty} J_m(\frac{k_{mn}\rho}{R})[A'_{mn}\cos(m\theta) + B'_{mn}\sin(m\theta)]\frac{k_{mn}\rho}{R} \tag{132}$$

Από τις (σχές. 131) και (σχές. 132) βλέπουμε ότι οι συναρτήσεις $f(\rho,\theta)$ και $g(\rho,\theta)$ αναπτύσσονται ως προς τις μεταβλητές (ρ,θ) στη διπλή βάση Fourier-Bessel με ανύσματα βάσης $(\sin(m\theta), J_m(\frac{k_{mn}\rho}{R}))$, και $(\cos(m\theta), J_m(\frac{k_{mn}\rho}{R}))$. Οι συντελεστές του διπλού αναπτύγματος Fourier-Bessel υπολογίζονται με τη βοήθεια των σχέσεων ορθοκανονικότητας των ανυσμάτων βάσης και των ιδιοτήτων των συναρτήσεων Bessel.

$$A_{mn} = \frac{2}{\pi R^2 (J_{m+1}(k_{mn}))^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho f(\rho,\theta) J_m(\frac{k_{mn}\rho}{R})\sin(m\theta)d\rho \tag{133}$$

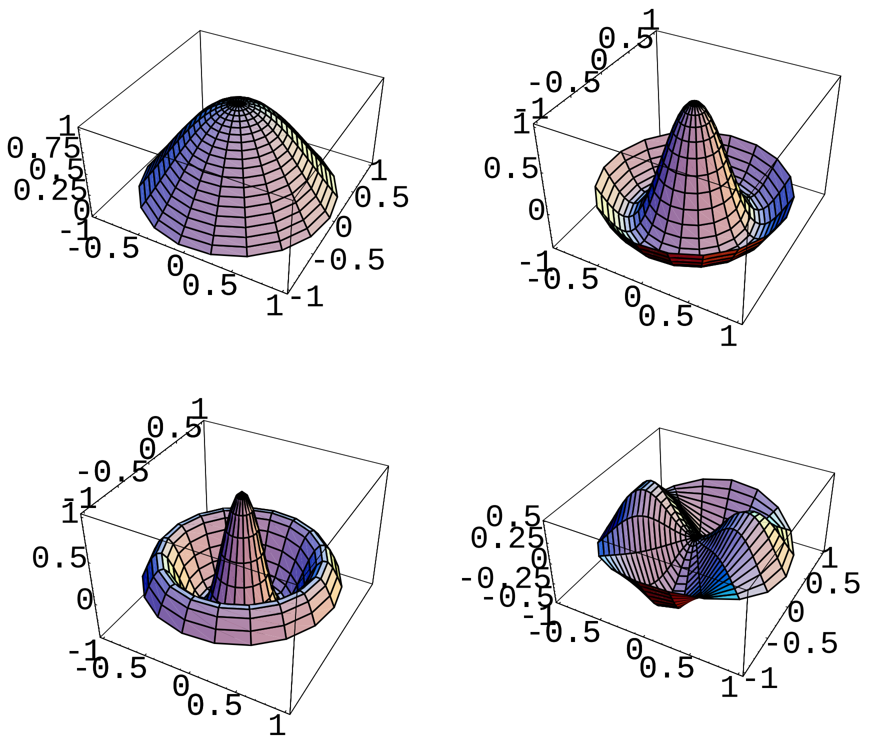
$$B_{mn} = \frac{2}{\pi R^2 (J_{m+1}(k_{mn}))^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho f(\rho,\theta) J_m(\frac{k_{mn}\rho}{R})\cos(m\theta)d\rho \tag{134}$$

$$\frac{k_{mn}c}{R}A'_{mn} = \frac{2}{\pi R^2 (J_{m+1}(k_{mn}))^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho g(\rho,\theta) J_m(\frac{k_{mn}\rho}{R})\sin(m\theta)d\rho \tag{135}$$

$$\frac{k_{mn}c}{R}B'_{mn} = \frac{2}{\pi R^2 (J_{m+1}(k_{mn}))^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho g(\rho,\theta) J_m(\frac{k_{mn}\rho}{R})\cos(m\theta)d\rho \tag{136}$$

Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων για την εύρεση των συντελεστών Fourier-Bessel γίνεται με τη βοήθεια των αναγωγικών σχέσεων των συναρτήσεων Bessel(βιβλιογραφεία). Στα σχήματα που ακολουθούν φαίνονται οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης κυκλικής μεμβράνης ακτίνας $R = 1cm$ για τις πρώτες αρμονικές.

Στα τρία πρώτα σχήματα βλέπουμε τις πρώτες αρμονικές που αντιστοιχούν στο $m = 0$. Παρατηρούμε ότι η λύση είναι αναλλοίωτη σε στροφές και οι γραμμές μηδενισμού (**nodal lines**) είναι κύκλοι και προκύπτουν από τα μηδενικά της Bessel. Το τέταρτο σχήμα αντιστοιχεί σε $m \neq 0$ και



Σχήμα 11: Κανονικοί τρόποι ταλάντωσης κυκλικής μεμβράνης

$n = 1$. Στην περίπτωση αυτήν έχουμε γραμμές μηδενισμού και κατά τις διαμέτρους .

Παράδειγμα

Κυκλική μεμβράνη είναι πακτωμένη στη περιφέρεια και αφήνεται να κάνει μικρές ταλαντώσεις χωρίς αρχική ταχύτητα αλλά μόνο με μια ασχική παραμόρφωση η οποία παρουσιάζει κυκλική συμμετρία

$u(\rho, \theta, t = 0) = f(\rho)$ γνωστή συνάρτηση.

Θεωρούμε ότι η αρχική απομάκρυνση έχει τη μορφή

$u(\rho, \theta, t = 0) = f(\rho) = 2\rho(R - \rho)$ για $t = 0$

Η γενική λύση του προβλήματος της κυκλικής μεμβράνης δίνεται από την (σχ. 130). Οι συντελεστές A'_{mn} και B'_{mn} θα πρέπει να είναι μηδέν λόγω του ότι η μεμβράνη αφήνεται να κάνει ταλαντώσεις χωρίς αρχική ταχύτητα.

Η συμμετρία του προβλήματος , συμπεριλαμβανομένων και των αρχικών συνθηκών, μας υποδεικνύει ότι η λύση θα παρουσιάζει και αυτή την κυκλική συμμετρία, επομένως δέν θα έχουμε εξάρτηση από τη γωνία θ [14], άρα η μόνη αρμονική που επιζεί είναι για $m = 0$. Η λύση του προβλήματος παίρνει τη μορφή

$$u(\rho, t) = \sum_{n}^{\infty} J_0(\frac{k_{0n}\rho}{R}) A_{0n} \cos(\frac{k_{0n}ct}{R}) \tag{137}$$

όπου$J_0(\frac{k_{0n}\rho}{R})$ η συνάρτηση Bessel μηδενικής τάξης και k_{0n} τα μηδενικά της συνάρτησης $J_0(\frac{k_{0n}\rho}{R})$. Ο μόνος συντελεστής Fourier-Bessel που επιζεί είναι ο A_{0n} ο οποίος υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα

$$A_{0n} = \frac{1}{R^2 (J_1(k_{0n}))^2} \int_0^R \rho f(\rho) J_0(\frac{k_{0n}\rho}{R}) d\rho \tag{138}$$

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος μας δίνει τα A_{0n} . Τα πρώτα μηδενικά της συνάρτησης Bessel είναι $k_{01} = 2.4$, $k_{02} = 5.22$, $k_{03} = 8.65$ .... και οι αντίστοιχοι συντελεστές για $R = c = 1$ είναι $A_{01} = 0.68$, $A_{0,1} = 0.06$, $A_{03} = 0.05$ .....

2.9 Κυματική εξίσωση σε σφαιρικές συντεταγμένες (Διάδοση κυμάτων σε σφαιρικές κοιλότητες)

Η κυματική εξίσωση(εξ. 5) σε σφαιρικές συντεταγμένες έχει τη μορφή :

$$[\quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

[14]το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} \sin(m\theta) d\theta = \delta_{0m}$

$$- \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}]u(r,\theta,\phi,t) = 0 \tag{139}$$

Ας θεωρήσουμε ένα πρόβλημα όπου η λύση παρουσιάζει σφαιρική συμμετρία. Στην περίπτωση αυτή η λύση θα εξαρτάται μόνο από τις μεταβλητές (r,t). Η εξίσωση (139) παίρνει τη μορφή:

$$[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}]u(r,t) = 0 \tag{140}$$

Αν αναζητήσουμε λύση της μορφής $u(r,t) = \frac{R(r,t)}{r}$ και αντικαταστήσουμε στη (εξ.140) βρίσκουμε ότι η $R(r,t)$ ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 R(r,t)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 R(r,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{141}$$

Η (εξ. 141) έχει λύση της μορφής [15] $R(r,t) = F_1(r+ct) + F_2(r-ct)$ όπου $F_1(r+ct)$ και $F_2(r-ct)$ αυθαίρετες συναρτήσεις, και:

$u(\vec{r},t) = \frac{F_1(r+ct)}{r} + \frac{F_2(r+ct)}{r}$

Η γενική λύση της (εξ. 140) είναι επαλληλία δυό κυμάτων εκ των οποίων το ένα διαδίδεται προς τα έξω και το άλλο προς το κέντρο της σφαίρας. Οι ισοφασικές επιφάνειες είναι σφαιρικές επιφάνειες με $r =$σταθερά.

Στη γενική περίπτωση όπου έχουμε να λύσουμε την κυματική εξίσωση σε μια σφαιρική κοιλότητα ακτίνας a εφαρμόζουμε τη μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών.
Αναζητούμε λύση της μορφής :

$$u(r,\theta,\phi,t) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)T(t) \tag{142}$$

και αντικαθιστούμε στην (εξ. 139). Διαχωρίζουμε πρώτα το χρονικό μέρος και στη συνέχεια τα γωνιακά μέρη (ϕ) και (θ) εισάγοντας σταθερές

[15] Ταλάντωση χορδής απείρου μήκους

διαχωρισμού (k, μ, λ) . Γνωρίζοντας ότι η λύση μας έχει κυματικό χαρακτήρα μας οδηγεί στην επιλογή του $k^2 > 0$. Οι κοινές δ.ε. στις οποίες καταλήγουμε είναι:

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} = -k^2c^2T(t) \tag{143}$$

$$\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} = \mu\Phi(\phi) \tag{144}$$

$$(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}\sin(\theta)\frac{d}{d\theta} - \frac{\mu}{\sin^2(\theta)})\Theta(\theta) = \lambda\Theta(\theta) \tag{145}$$

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR(r)}{dr} + (k^2 - \frac{\lambda}{r^2})R(r) = 0 \tag{146}$$

Ο διαχωρισμός της εξίσωσης οδήγησε σε τέσσερις κοινές διαφορικές εξισώσεις. Η εξίσωση (σχές. 143) έχει περιοδικές λύσεις με συχνότητα $\omega_k = kc$:

$T(t) = A\mathrm{sin}kct + B\mathrm{cos}kct$

στην εξίσωση (σχές. 144) έχουμε την σταθερά διαχωρισμού $\mu = -m^2$ η οποία πρέπει να παίρνει ακέραιες τιμές $(m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...)$, ώστε να εξασφαλίζεται η αναλλοιώτητα (περιοδικότητα) της λύσης σε στροφές κατά γωνία 2π.

$\Phi(\phi) = A^{'}\sin(m\phi) + B^{'}\cos(m\phi)$

Αν στην εξίσωση (σχές. 145) κάνουμε αλλαγή μεταβλητής , $x = \cos\theta$ και $\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} = -\sin\theta\frac{d\Theta(x)}{dx}$, όπου$-1 \leq x \leq 1$, έχουμε την:

$$(1 - x^2)\frac{d^2\Theta(x)}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta(x)}{dx} + (\lambda - \frac{m^2}{1 - x^2})\Theta(x) = 0 \tag{147}$$

Η εξίσωση (σχές. 147) για $m = 0$ είναι η εξίσωση Legendre. Οπως γνωρίζουμε από τη θεωρία των κοινών διαφορικών εξισώσεων η λύση της εξίσωσης Legendre δίνεται σε μορφή δυναμοσειράς η οποία δέν συγκλίνει. Αν το λ παίρνει ακέραιες τιμές και μάλιστα της μορφής $\lambda = l(l+1)$, όπου $l = 0, 1, 2, 3, ...$, η σειρά τερματίζεται στα γνωστά πολυώνυμα Legendre[16] $P_l(x)$ και $Q_l(x)$, τα οποία αποτελούν τις δυό γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης Legendre. Για $x = \pm 1$ τα πολυώνυμα $Q_l(x)$ παρουσιάζουν λογαριθμική ανωμαλία. Σε ένα φυσικό πρόβλημα όπου η λύση παίρνει πεπερασμένες τιμές τα πολυώνυμα $Q_l(x)$ δέν συνεισφέρουν στη λύση. . Για $m \neq 0$ η λύση της (εξ. 147) είναι τα προσαρτημένα πολυώνυμα Legendre $P_l^m(x)$. Από τον ορισμό των προσαρτημένων πολυωνύμων [17] Legendre μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι η σταθερά m παίρνει τιμές $|m| \leq l$. Η γενική λύση της (εξ. 147) είναι:

$$\Theta(\cos\theta) = A'' P_l^m(\cos\theta)$$

Η εξίσωση (σχές. 146) κάτω από το μετασχηματισμό $R(r) = \frac{u(r)}{\sqrt{r}}$ ανάγεται στη εξίσωση Bessel

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du(r)}{dr} + (k^2 - \frac{(l+\frac{1}{2})^2}{r^2})u(r) = 0$$

η οποία έχει λύσεις τις συναρτήσεις Bessel $(l + \frac{1}{2})$ τάξης, $J_{l+\frac{1}{2}}(kr)$ και $N_{l+\frac{1}{2}}(kr)$.

$$R(r) = A\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} + B\frac{N_{l+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}}$$

Συνήθως χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

[16] $P_l(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^l$
[17] $P_l^m(x) = (x^2-1)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)$

$R(r) = Aj_l(kr) + Bn_l(kr)$

Οι συναρτήσεις $j_l(kr)$ και $n_l(kr)$ ονομάζονται σφαιρικές συναρτήσεις Bessel και Neumann αντίστοιχα. Η σφαιρική Neumann παρουσιάζει λογαριθμική ανωμαλία στο $r \rightarrow 0$ και επομένως για ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών μέσα σε σφαίρα η παράμετρος B είναι ίση με μηδέν.

Η γενική λύση του προβλήματος σε σφαιρικές συντεταγμένες θα δίνεται από επαλληλία σε όλα τα l, m ,$|m| \leq l$:

$$\begin{aligned}
u & \quad (r,\theta,\phi,t) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)T(t) = \\
= & \quad \sum_{m,l}^{\infty}(A\mathrm{sin}kct + B\mathrm{cos}kct)(A^{'}\sin(m\phi) + B^{'}\cos(m\phi)) \\
P_l^m & \quad (\cos\theta)(A^{''}j_l(kr) + B^{''}n_l(kr)) = \\
= & \quad \sum_{m,l}^{\infty}(A^{''}j_l(kr) + B^{''}n_l(kr))(A\mathrm{sin}kct + B\mathrm{cos}kct) \\
Y_l^m & \quad (\theta,\phi)
\end{aligned} \tag{148}$$

οπου $Y_l^m(\theta,\phi)$ οι σφαιρικές αρμονικές

$Y_l^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\theta)e^{im\phi}$, όπου$|m| \leq l$

Οι σφαιρικές αρμονικές αποτελούν ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα στη επιφάνεια μιας σφαίρας. Η σχέση ορθοκανονικότητας είναι:

$\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta Y_l^{*m}(\theta,\phi)Y_{l'}^{m'}(\theta,\phi)d\theta = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$

Οποιαδήποτε συνάρτηση τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στη επιφάνεια μιας σφαίρας δίνεται σαν ανάπτυγμα Fourier στη ορθοκανονική βάση των σφαιρικών αρμονικών $Y_l^m(\theta,\phi)$.

$$f(\theta,\phi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}f_{lm}Y_l^m(\theta,\phi)$$

όπουf_{lm} οι συντελεστές Fourier

$$f_{lm}=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\sin\theta Y_l^m(\theta,\phi)f(\theta,\phi)d\theta$$

Οι αυθαίρετες παράμετροι που εμφανίζονται στη (σχές. 148) καθορίζονται μονοσήμαντα από τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.

<u>Παράδειγμα:</u>

Δοχείο σφαιρικού σχήματος και ακτίνας a , με σταθερά τοιχώματα, περιέχει αέριο και κινείται με σταθερή ταχύτητα u_0 . Τη χρονική στιγμή $t=0$ σταματά αυτόματα και παραμένει ακίνητο. Να βρεθεί η ταλάντωση των μορίων του αερίου που περιέχεται στο δοχείο.

Θεωρούμε την αρχή των αξόνων στο κέντρο του δοχείου και τον άξονα $(z=0)$ παράλληλο στη κίνηση του δοχείου για $t<0$. Η ταχύτητα των μορίων συνδέεται με μια συνάρτηση δυναμικού ταχυτήτων Φ , μέσω της σχέσης $(u=-\nabla\Phi)$ . . Η συνάρτηση δυναμικού ικανοποιεί την κυματική εξίσωση.

Το πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση της κυματικής εξίσωσης στις τρείς διαστάσεις και σε σφαιρικές συντεταγμένες για να υπολογισθεί το δυναμικό και στη συνέχεια η ταχύτητα των μορίων.

Λόγω συμμερτίας του προβλήματος το δυναμικό δεν θα εξαρτάται από τη γωνία ϕ .

Να λυθεί το πρόβλημα θεωρώντας τις ακόλουθες αρχικές και συνοριακές συνθήκες.

1. Η αρχική ταχύτητα κατα τη διεύθυνση του άξονα θ είναι:

$\Phi(r,\theta,t=0)=u_0 r\cos\theta$

2. Αρχική επιτάχυνση
   $\frac{\partial\Phi(r,\theta,t)}{\partial t}|_{t=0}=0$ και

3. Τα τοιχώματα του δοχείου είναι σταθερά επομένως η ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας στην επιφάνεια του δοχείου είναι μηδέν.
   $\frac{\partial\Phi(r,\theta,\phi,t)}{\partial r}|_{r=a}=0$

Λόγω συμμερτίας του προβλήματος το δυναμικό δέν θα εξαρτάται από τη γωνία ϕ .

Η γενική λύση του προβλήματος δίνεται από την (σχ. 148). Για το εσωτερικό της σφαίρας η σταθερά $B^{''}=0$ και λόγω της συμμετρίας σε περιστροφές περί τον άξονα $\theta=0$ το $m=0$.

$$\Phi(r,\theta,t)=\sum_{l}^{\infty}(A\mathrm{sin}kct+B\mathrm{cos}kct)P_l(\cos\theta)j_l(kr) \tag{149}$$

$$\frac{\partial\Phi(r,\theta,\phi,t)}{\partial r}|_{r=a}=0=$$
$$=\sum_{l}^{\infty}(A\mathrm{sin}kct+B\mathrm{cos}kct)P_l(\cos\theta)\frac{d\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}}}{dr}|_{r=a} \tag{150}$$

από τη συνοριακή συνθήκη (2) έχουμε $A=0$.

$$\Phi(r,\theta,t)=\sum_{l}^{\infty}(B\mathrm{cos}kct)P_l(\cos\theta)\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} \tag{151}$$

από τη συνοριακή συνθήκη (3) έχουμε

$$\frac{J^{'}_{l+\frac{1}{2}}(ka)}{\sqrt{a}}-\frac{1}{2a^{\frac{3}{2}}}J_{l+\frac{1}{2}}(ka)=0 \tag{152}$$

$$\Phi(r,\theta,t)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B\mathrm{cos}kctP_l\cos\theta\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\frac{k_{ln}r}{a})}{\sqrt{r}} \tag{153}$$

όπου$k_{ln} = ka$ τα μηδενικά της (152). Από την αρχική συνθήκη

$$\Phi(r,\theta,t=0) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} BP_l(\cos\theta)\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\frac{k_{ln}r}{a})}{\sqrt{r}} = u_0 r\cos\theta$$

και

$$u_0 r^{\frac{3}{2}}\cos\theta = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{ln}P_l(\cos\theta)J_{l+\frac{1}{2}}(\frac{k_{ln}r}{a}) \tag{154}$$

Από τη (σχές. 154) παρατηρούμε ότι η σταθερά B_{ln} είναι ο συντελεστής Fourier του αναπτύγματος της $u_0 r^{\frac{3}{2}}\cos\theta$ στη διπλή ορθοκανονική βάση Legendre-Bessel.

Από τη σχέση ορθοκανονικότητας των πολυωνύμων Legendre, $(P_0(\cos\theta)=1, P_1(\cos\theta)=\cos(\theta))$ συνεπάγεται ότι στο ανάπτυγμα επιζεί μόνο το $l=1$, .

$$u_0 r^{\frac{3}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_{\frac{3}{2}}(\frac{k_{1n}r}{a}) \tag{155}$$

και

$$B_n = \frac{2u_0 \int\limits_{r=0}^{r=a} r^{\frac{5}{2}} J_{\frac{3}{2}}(\frac{k_{1n}r}{a})dr}{a^2 J_{\frac{3}{2}}(k_{1n})(1-\frac{2}{k_{1n}^2})} \tag{156}$$

$$\Phi(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\cos\theta\frac{J_{\frac{3}{2}}(\frac{k_{1n}r}{a})}{\sqrt{r}}\cos(\frac{k_{1n}ct}{a}) \tag{157}$$

Η ταχύτητα των μορίων υπολογίζεται από τη σχέση
$u(r,\theta,\phi) = -\frac{\partial\Phi(r,\theta,\phi)}{\partial r}$

2.10 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να παράξετε την κανονική μορφή της κυματικής εξίσωσης.

2. Χορδή απείρου μήκους βρίσκεται σε ηρεμία . Τη χρονική στιγμή $t = 0$ δέχεται ένα κτύπημα στο σημείο $x = 0$ από το οποίο αποκτά μια αρχική ταχύτητα της μορφής $u_t(x, t = 0) = a\delta(x)$ όπου a σταθερά με κατάλληλη διάσταση και $\delta(x)$ η συνάρτηση $\delta-$Dirac. Να βρεθεί η $u(x, t)$ για $t > 0$.

3. Ενα κύμα της μορφής $\Phi(x-ct)$ διαδίδεται κατά μήκος μιας άπειρης χορδής . Γνωρίζοντας τη μορφή του κύματος για $t = 0$ να βρεθεί η κατάσταση της χορδής για κάθε χρονική στιγμή.

4. Ημιάπειρη χορδή είναι πακτωμένη στο ένα άκρο $(x = 0)$ ενώ το άλλο άκρο είναι ελεύθερο. Η χορδή αφήνεται να ταλαντωθεί από μια αρχική απομάκρυνση της μορφής

$$u(x, t = 0) = f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad 0 < x < L \\ \frac{h}{L}(x - L)(4 - \frac{x+L}{L}) & : \quad L < x < 3L \\ 0 & : \quad 3L < x < \infty \end{cases}$$

Αν η αρχική ταχύτητα είναι μηδέν, να βρεθεί η απομάκρυνση σε διάφορες περιοχές του επιπέδου (x, t) και το σχήμα της χορδής τις χρονικές στιγμές $t = \frac{L}{c}$, $t = \frac{3L}{c}$, $t = \frac{5L}{c}$, $t = \frac{7L}{c}$.

5. Ημιάπειρη χορδή είναι πακτωμένη στο ένα άκρο $(x = 0)$, ενώ το άλλο άκρο είναι ελεύθερο. Η χορδή η οποία βρίσκεται σε ηρεμία δέχεται ένα δυνατό κτύπημα στο σημείο x_0 τη χρονική στιγμή $t = 0$.Να βρεθεί η απομάκρυνση από τη θέση ηρεμίας για $t > 0$.(Υπόδειξη. θεωρήστε ότι η αρχική ταχύτητα της χορδής η οποία προκύπτει από το δυνατό κτύπημα είναι$u_t\ (x, t = 0) = A\ \delta(x - x_0)$)

6. Λύστε το πρόβλημα της ημιάπειρης χορδής για $x > 0,\ , t > 0$ όταν δίνονται οι συνθήκες

$$u(x, t = 0)\ =\ f(x)\ ,\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\ |_{t=0} = g(x)$$

και

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\mid_{x=0}=0$$

για $t=0$ Δείξτε ότι η λύση μπορεί να βρεθεί επεκτείνοντας τις $f(x)$ και $g(x)$ σαν άρτιες συναρτήσεις γύρω από το $x=0$.

7. Χορδή απείρου μήκους κάνει εξηναγκασμένη ταλάντωση υπό την επίδραση δύναμης της μορφής

$$f(x,t)=-4(x-ct)^2(x+ct)$$

Να βρεθεί το πλάτος ταλάντωσης όταν η αρχική θέση και η αρχική ταχύτητα ειναι μηδέν.

8. Να βρεθούν οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης χορδής μήκους $L>2$ της οποίας το ένα άκρο είναι ελεύθερο, ενώ το άλλο είναι πακτωμένο. Ποιό είναι το σχήμα αν αφήνεται να κάνει ταλαντώσεις με αρχική απομάκρυνση

$$u(x,t=0)=f(x)=\left\{\begin{array}{lcl} 1 & : & \frac{L}{2}-1<x<1+\frac{L}{2} \\ 0 & : & 0<x<\frac{L}{2}-1,\ \frac{L}{2}+1<x<L \end{array}\right.$$

και χωρίς αρχική ταχύτητα.

9. Χορδή μήκους $3a$ πακτωμένη στα άκρα αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα και με αρχική απομάκρυνση

$$u(x,t=0)=f(x)=\left\{\begin{array}{rcl} \frac{ex}{a} & : & 0<x<a \\ e^{\frac{3a-2x}{a}} & : & a<x<2a \\ e^{\frac{x-3a}{a}} & : & 2a<x<3a \end{array}\right.$$

Να βρείτε τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης και να δείξετε ότι το μέσο της χορδής παραμένει ακίνητο.

10. Να λυθεί η μη ομογενής εξίσωση

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})u(x,t)=-x\sin(\omega x) \tag{158}$$

με τις ακόλουθες αρχικές συνθήκες $u(x,t=0)=0$ και $u_t(x,t)\mid_{t=0}=0$. Είναι η λύση περιοδική;

11. Να εξετάσετε την ταλάντωση πακτωμένης χορδής μήκους L η οποία κάνει ταλαντώσεις σε μέσο του οποίου η αντίσταση είναι ανάλογη της ταχύτητας αν αφεθεί χωρίς αρχική απομάκρυνση και με αρχική ταχύτητα $g(x)=I\delta(x-\frac{L}{2})$.
(Υπόδ.η κ.ε. έχει τη μορφή $(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{h}{c^2}\frac{\partial}{\partial t})u(x,t)=0$)

12. Ορθογώνια μεμβράνη πλευρών L_1 και L_2 πακτωμένη στην παράπλευρη επιφάνεια κάνει ταλαντώσεις χωρίς αρχική απομάκρυνση και με αρχική ταχύτητα $u_t(x,t)\mid_{t=0}=1$. Να βρεθούν οι συχνότητες ταλάντωσης και η απομάκρυνση.

13. Τετραγωνική μεμβράνη πλευράς L πακτωμένη στη παράπλευρη επιφάνεια κάνει ταλαντώσεις χωρίς αρχική ταχύτητα και με αρχική απομάκρυνση $u(x,y,t=0)=\sin^2(\pi\, x/L)\,\sin(\pi\, y/L)$. Να βρεθεί η απομάκρυνση κάθε χρονική στιγμή.

14. Τετραγωνική μεμβράνη πλευράς L έχει δύο απέναντι πλευρές πακτωμένες και τις άλλες δύο ελεύθερες και αφήνεται να κάνει ταλαντώσεις χωρίς αρχική ταχύτητα και με αρχική απομάκρυνση $u(x,y,t=0)=f(x,y)$. Να βρεθεί η απομάκρυνση κάθε χρονική στιγμή.

15. Να μελετήσετε τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης τυμπάνου σχήματος ορθογωνίου και ισοπλεύρου τριγώνου πακτωμένου στη παράπλευρη επιφάνεια.

16. Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο διεγείρεται μέσα σε κυβική κοιλότητα ακμής L της οποίας τα τοιχώματα είναι τέλειοι αγωγοί. Να βρεθούν οι ιδιοσυχνότητες του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. (Υπόδ.Στα τοιχώ-

ματα της κοιλότητας η παράλληλη συνιστώσα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι μηδέν).

17. α) Να βρεθεί η ταλάντωση κυκλικής μεμβράνης ακτίνας $R = 1$ πακτωμένης στη παράπλευρη επιφάνεια με τις ακόλουθες αρχικές συνθήκεςς $u(\rho, \theta, t = 0) = g\ J_0\ (\rho)$ και $u_t(\rho, \theta, t = 0)\ |_{t=0}) = 0$, όπου $J_0\ (\rho)$ η συνάρτηση Bessel μηδενικής τάξης.

18. Να βρεθεί η ταλάντωση κυκλικής μεμβράνης ακτίνας a πακτωμένης στη παράπλευρη επιφάνεια με τις ακόλουθες αρχικές συνθήκες $u(\rho, \theta, t = 0) = J_3\ (\frac{k_{31}\rho}{a})\ \cos(3\phi)$ και $u_t(\rho, \theta, t = 0)\ |_{t=0}) = 0$, όπου k_{31} το μηδενικό πρώτης τάξης της συνάρτησης Bessel τρίτης τάξης. β) Σχεδιάστε τις γραμμές μηδενισμού.

19. Να βρεθεί η ταλάντωση κυκλικής μεμβράνης ακτίνας R ελεύθερη στην περιφέρεια που αφήνεται χωρίς αρχική απομάκρυνση και με αρχική ταχύτητα $g\ J_1\ (\frac{k_{01}\rho}{R})$. (Υποδ. Οι παράγωγοι των συναρτήσεων Bessel αποτελούν πλήρες ορθοκανονικό σύστημα στο διάστημα $0 < \rho < R$)

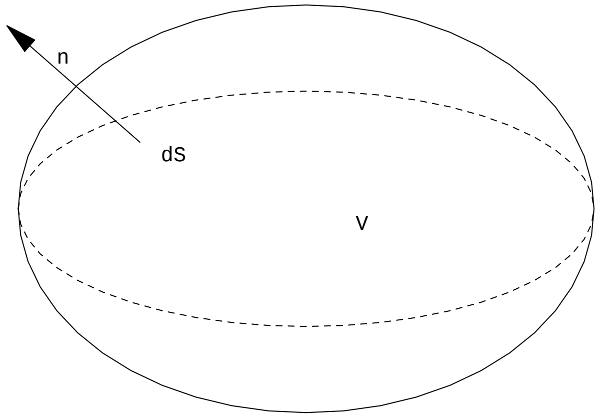
20. Κυκλική μεμβράνη καταλαμβάνει το χώρο μεταξύ δυό ομόκεντρων κύκλων ακτίνων $a < b$ και είναι πακτωμένη στα άκρα . Να βρεθούν οι τρόποι ταλάντωσης αν η αρχική ταχύτητα είναι μηδέν και η αρχική απομάκρυνση $\frac{f(\rho)}{\rho}$

21. Κυκλική μεμβράνη ακτίνας a πακτωμένη στην παράπλευρη επιφάνεια κάνει μικρές ταλαντώσεις μέσα σε πεδίο βαρύτητας. Να βρεθεί η απομάκρυνση της μεμβράνης κάθε χρονική στιγμή όταν η αρχική απομάκρυνση είναι
$u(\rho, \theta, t = 0) = AJ_0(k_{01}\frac{\rho}{a}) + \frac{g}{4c^2}(\rho^2 - a^2)$ και η αρχική ταχύτητα είναι μηδέν.

3 Εξίσωση Διάχυσης

3.1 Παραγωγή της εξίσωσης διάχυσης

Θεωρούμε έναν όγκο $\mathbf{V}$ ο οποίος περικλείεται από την επιφάνεια $\mathbf{S}$. Το ποσόν θερμότητας που περικλείεται στον στοιχειώδη όγκο $\mathbf{dV}$ είναι $\mathbf{dQ} = \rho\mathbf{c}\boldsymbol{\Theta}\mathbf{dV}$ όπου ρ πυκνότητα , $\mathbf{c}$ η ειδική θερμότητα και $\boldsymbol{\Theta}(\vec{\mathbf{x}}, \mathbf{t})$ η θερμοκρασία.



Σχήμα 12:

Το ποσόν θερμότητας $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{Q}$ που διαπερνά την στοιχειώδη επιφάνεια ΔS στη μονάδα του χρόνου $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{t}$ είναι

$$\Delta Q_1 = -K(\vec{\mathbf{x}})(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{S})(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{t})\nabla\boldsymbol{\Theta}(\vec{\mathbf{x}}, \mathbf{t}).\hat{\eta} \qquad (159)$$

το αρνητικό πρόσημο εξασφαλίζει τη ροή θερμ.οτητας από θερμότερα σε ψυχρότερα μέρη . Ο όρος $\mathbf{K}(\vec{\mathbf{x}})$ είναι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας του μέσου ενώ το $\hat{\eta}$ είναι το μοναδιαίο άνυσμα κάθετο στη στοιχειώδη επιφάνεια $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{S}$. Το ποσόν θερμότητας που διαπερνά την στοιχειώδη επιφάνεια στη μονάδα του χρόνου είναι

$$q = \frac{\Delta Q}{(\Delta t)(\Delta S)} \qquad (160)$$

Το ολικό ποσόν θερμότητας που διαπερνά όλη την επιφάνεια στο χρονικό διάστημα (t_1, t_2) δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\int_{t_1}^{t_2} dt \int_S K(\vec{x})\vec{\nabla}\Theta . d\vec{S} \\ &= -\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \nabla.(K(\vec{x})\nabla\Theta) dV \end{aligned} \tag{161}$$

Το ποσόν θερμότητας που απαιτείται για να μεταβληθεί η θερμοκρασία ενός όγκου $\mathbf{dV}$ από $\mathbf{\Theta_1}(\vec{\mathbf{x}}, \mathbf{t_1})$ σε $\mathbf{\Theta_2}(\vec{\mathbf{x}}, \mathbf{t_2})$, είναι
$\mathbf{\Delta Q_2} = \rho\mathbf{c}(\mathbf{dV})(\mathbf{\Theta_2} - \mathbf{\Theta_1})$ και

$$\begin{aligned} Q_2 &= \int_V \rho c(\Theta_2(\vec{x}, t_2) - \Theta_1(\vec{x}, t_1)) dV \\ &= -\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \frac{\partial\Theta}{\partial t} \rho c dV \\ &= -\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \frac{\partial\Theta}{\partial t} \rho c dV \end{aligned} \tag{162}$$

Εάν υπάρχουν πηγές μέσα στο υλικό που εκπέμπουν ή απορροφούν θερμότητα το ολικό πασόν που εκπέμπεται ή απορροφάται είναι

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V F(\vec{x}, t) dV \tag{163}$$

όπου$\mathbf{F}(\vec{\mathbf{x}}, \mathbf{t})$ η πυκνότητα των πηγών.
Λόγω διατήρησης της ολικής θερμότητας στο σύστημα θα πρέπει να ισχύει η σχέση

$$Q_3 = Q_1 + Q_2 \tag{164}$$

Αντικαθιστούμε στη (164) τις σχέσεις (162) και (163) και βρίσκουμε την εξίσωση διάχυσης

$$\frac{\partial \Theta(\vec{x},t)}{\partial t} = \frac{1}{\rho c}[\nabla K(\vec{x}).\nabla\Theta(\vec{x},t) + K(\vec{x})\nabla^2\Theta(\vec{x},t) + F(\vec{x},t) \quad (165)$$

Αν ο συντελεστης θερμικής αγωγιμότητας είναι σταθερός και δέν υπάρχουν πηγές ούτε απορρόφηση θερμότητας , η εξίσωση διάχυσης παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial \Theta(\vec{x},t)}{\partial t} = \frac{1}{\rho c}K\nabla^2\Theta(\vec{x},t) \quad (166)$$

Η εξίσωση (166) περιγράφει φαινόμενα διάδοσης θερμότητας και διάχυσης σε ισοτροπικό μέσο (π.χ. χημεία), .

3.2 Διάδοση θερμότητας σε άπειρο δρόμο

Η εξίσωση διάδοσης σε μέσο με σταθερό συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας απουσία πηγών είναι:

$$\nabla^2 T(\vec{\mathbf{x}},\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a^2}}\frac{\partial \mathbf{T}(\vec{\mathbf{x}},\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} \quad (167)$$

Η εξίσωση (167) είναι παραβολικού τύπου και για την εύρεση της ειδικής λύσης απαιτούνται συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet (δηλαδή η θερμοκρασία στο ανοικτό σύνορο- ισοθερμικού τύπου) ή τύπου Neumann(η ροή θερμ.οτητας σε ανοικτό σύνορο -αδιαβατικού τύπου) ή μεικτού τύπου τύπου Robin(μεικτού ή αγώγιμου τύπου)

Θεωρούμε μία ράβδο απείρου μήκους μονωμένη στην παράπλευρη επιφάνεια[18] και αρχικής θερμοκρασίας $T_0(x,t=0) = f(x)$. Να βρεθεί η θερμοκρασία της ράβδου κάθε χρονική στιγμή $t > 0$[19].

---

[18] Η ράβδος είναι θερμικά μονωμένη στην παράπλευρη επιφάνεια επομένως δέν θα ανταλλάσει θερμότητα με το περιβάλλον λόγω του δεύτερου θερμοδυναμικού αξιώματος που απαιτεί συνεχή ροή θερμικήςενέργειας από θερμότερα σε ψυχρότερα σημεία

[19] Η εξίσωση διάχυσης δέν είναι αναλλοίωτη σε αντιστροφή στο χρόνο όπως η κυματική εξίσωση. Η μη αναλλοιωτητα σημαίνει ότι, όταν γνωρίζουμε την κατάσταση ενός

Αναζητούμε λύση της (167) η οποία θα προκύψει από υπέρθεση λύσεων της μορφής $T(x,t) = X(x)\tilde{T}(t)$.Αντικαθιστούμε στη εξίσωση

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \frac{1}{a^2\tilde{T}(t)}\frac{d\tilde{T}(t)}{dt} \tag{168}$$

Η $\tilde{T}(t)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{d\tilde{T}(t)}{dt} = -k^2a^2\tilde{T}(t) \tag{169}$$

όπου k^2 σταθερά διαχωρισμού. Η (169) είναι πρώτης τάξης ως προς το χρόνο και έχει λύση την
$\tilde{T}(t) = e^{-k^2a^2t}$. Απαιτούμε το $k^2 > 0$ για να έχουμε λύση πεπερασμένη $\tilde{T}(t \to \infty) \Rightarrow 0$ Η $X(x) = \tilde{A}e^{ikx} + \tilde{B}e^{-ikx}$.
Η σταθερά διαχωρισμού k παίρνει συνεχείς τιμές και για πεπερασμένες λύσεις η θερμοκρασία δίνεται από το **ολοκλήρωμα Fourier** .

$$T(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{ikx-k^2a^2t}dk \tag{170}$$

όπου$A(k)$ οι συντελεστές **Fourier** οι οποίοι καθορίζονται από την αρχική κατανομή της θερμοκρασίας στη ράβδο [20]

$$\begin{aligned} T(x,t=0) &= f(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{ikx}dk \end{aligned} \tag{171}$$

$$A(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-ikx'}dx' \tag{172}$$

συστήματος κάποια χρονική στιγμή $t > 0$, δέν μπορούμε να συμπεράνουμε ποιά ήταν η κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή $-t > 0$. Αυτό σχετίζεται με τη μη διατήρηση της εντροπίας του συστήματος.Το σύστημα πηγαίνει σε κατάσταση μεγίστης εντροπίας.

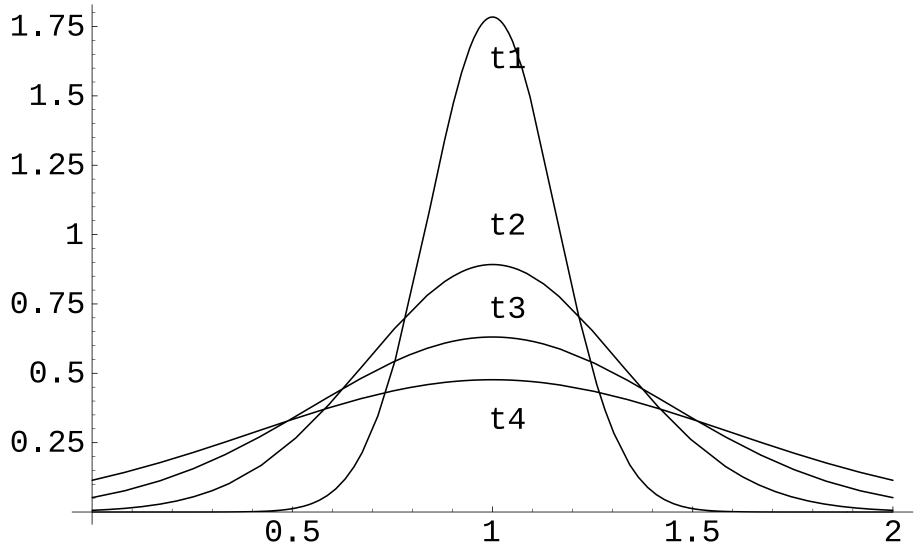
[20]Το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x}dx = 2\pi\delta(k-k')$ όπου $\delta(k-k')$ η συνάρτηση $\delta - Dirac$.

$$
\begin{aligned}
T(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} f(x^{'})e^{-ik(x-x^{'})-k^2a^2t}dx^{'} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{a^2t}} f(x^{'})e^{-\frac{(x-x^{'})^2}{4a^2t}}dx^{'} = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x^{'})T_0(x,t)dx^{'} \qquad (173)
\end{aligned}
$$

όπου Η $T_0(x-x^{'},t)$ ονομάζεται βασική ή θεμελιώδης λύση.Η λύση (σχ. 173) ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση και την αρχική συνθήκη. Πράγματι στο όριο που $t \longrightarrow 0$ έχουμε

$$
\lim_{t\longrightarrow 0} T(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{t\longrightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{4a^2t}} f(x^{'})e^{-\frac{(x-x^{'})^2}{4a^2t}}dx^{'} = f(x) \qquad (174)
$$

από μιά αναπαράσταση της συνάρτησης $\delta - Dirac$[21]



Σχήμα 13: Η χρονική εξέλιξη της θεμελιώδους λύσης για τις χρονικές στιγμές $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$

Αν θεωρήσουμε ότι αρχικά υπάρχει ένα ποσόν θερμ.οτητας Q σε μια

[21] $\lim_{t\longrightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{4a^2t}} e^{-\frac{(x-x^{'})^2}{4a^2t}} = \delta(x-x^{'})$

περιορισμένη περιοχή γύρω από το $x_0 \pm \epsilon$,τότε το ποσόν θερμ.οτητας στο διάστημα 2ϵ είναι $Q = 2\epsilon c\rho T_0$, όπουT_0 η θερμοκρασίατου τμήματος αυτού.Το ποσόν θερμότητας Q θα αυξήσει τη θερμοκρασία της ράβδου μετά από χρόνο t κατά:

$$\begin{aligned} T(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} T_0 \frac{e^{\frac{-(x-x')^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}} dx' \\ &= \frac{Q}{2\epsilon\rho c 2a\sqrt{\pi t}} \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} e^{\frac{-(x-x')^2}{4a^2t}} dx' \end{aligned} \tag{175}$$

Στο όριο όπου $\epsilon \longrightarrow 0$ το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την ύπαρξη πηγής θερμότητας στο σημείο x_0 την χρονική στιγμή $t = 0$.

$$\lim_{\epsilon\longrightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} e^{\frac{-(x-x')^2}{4a^2t}} dx' = e^{\frac{-(x_0-x)^2}{4a^2t}} \tag{176}$$

και

$$\lim_{\epsilon\longrightarrow 0} T(x,t) \approx T_0(x,t) \tag{177}$$

δηλαδή η θεμελιώδης λύση. Η θεμελιώδης ή βασική λύση καθορίζει τον τρόπο που θα κατανεμηθεί η θερμοκρασίασε μια ράβδο όταν τη χρονική στιγμή $t = 0$ στη θέση x_0 υπάρχει ποσό θερμότητας Q. Με την πάροδο του χρόνου η κατανομή έχει μεγαλύτερο εύρος ενώ το ολικό ποσόν θερμότητας το οποίο δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(x,t)dx = \frac{Q}{pc} \int_{-\infty}^{\infty} T_0(x,t)dx = \frac{Q}{pc} \tag{178}$$

παραμένει σταθερό. [22]

[22] $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x_0-x)^2}{4a^2t}} dx = 2a\sqrt{\pi t}$

3.3 Διάδοση θερμότητας σε πεπερασμένο δρόμο

- **Πρόβλημα Dirichlet**

  ράβδος μήκους L και αρχικής θερμοκρασίας $T_0(x)$ είναι μονωμένη στην παράπλευρη επιφάνεια. Εάν τα άκρα της ράβδου κρατούνται μόνιμα σε θερμοκρασία μηδέν βαθμών να βρεθεί η κατανομή της θερμοκρασίας μετά από χρόνο t και ο χρόνος αποκατάστασης θερμικής ισορροπίας.

  Η θερμοκρασία $T(x,t)$ ικανοποιεί την εξίσωση (167), τις συνοριακές $T(x=0,t)=T(x=L,t)=0$ και αρχικές συνθήκες $T(x,t=0)=T_0(x)$. Αναζητούμε λύση για την (167) της μορφής $T(x,t)=X(x)\tilde{T}(t)$. Η $\tilde{T}(t)$ είναι της μορφής $\tilde{T}(t)=e^{-k^2a^2t}$,όπου k^2 η σταθερά διαχωρισμού η οποία επιβάλλεται να είναι θετική, ώστε να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες και η ασυμπτωτική συμπεριφορά όταν $t->\infty$.

  Η $X(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2}+k^2X(x)=0 \tag{179}$$

  με συνοριακές συνθήκες $X(0)=X(L)=0$ (το πρόβλημα είναι ανάλογο με την πακτωμένη χορδή) και επομένως έχουμε ένα σύστημα Sturm-Liouville με ιδιοσυναρτήσεις $\sin(\frac{n\pi}{L}x)$ και ιδιοτιμές $k_n=\frac{n\pi}{L}$.

  Η λύση της (σχ. 167) θα δίνεται σαν επαλληλία όλων των ιδιοσυναρτήσεων του συστήματος (ανύσματα βάσης)

$$T(x,t)=\sum_n^{\infty}A_n\sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-k_n^2a^2t} \tag{180}$$

  όπου A_n οι συντελεστές Fourier που καθορίζονται από την αρχική κατανομή της θερμοκρασίας μέσα στη ράβδο.

$$T(x,t=0)=T_0(x)=\sum_n^{\infty}A_n\sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

και

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L T_0(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx \qquad (181)$$

Αν η αρχική θερμοκρασία της ράβδου ήταν 100 βαθμοί Κελσίου οι συντελεστές Fourier υπολογίζονται από το ολοκλήρωμα (σχ. 181) και είναι:

$$A_n = \begin{cases} \frac{400}{n\pi} & : \ n = 2k+1 \\ 0 & : \ n = 2k \end{cases}$$

$$T(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{400}{(2k+1)\pi}\sin(\frac{(2k+1)\pi}{L}x)e^{-(\frac{(2k+1)a\pi}{L})^2 t} \qquad (182)$$

Για $t \to \infty$ η σειρά συγκλίνει γρήγορα λόγω του όρου $e^{-(\frac{(2k+1)a\pi}{L})^2 t}$ και στη λύση συνεισφέρουν μόνο οι πρώτοι όροι “ πρώτες αρμονικές”.

$$T(x,t) \simeq \frac{400}{\pi}\sin(\frac{\pi}{L}x)e^{-(\frac{a\pi}{L})^2 t} \qquad (183)$$

Για πολύ μικρά t η σειρά συγκλίνει πολύ αργά και η μορφή της λύσης (182) δέν είναι χρήσιμη [23], ενώ για μεγάλους χρόνους $t \to \infty$ η $T(x,t) \to 0$ που σημαίνει ότι η λύση που βρήκαμε είναι 'παροδική' και μετά από άπειρο χρόνο θα είναι μηδέν (το σύστημα θα βρεθεί σε κατάσταση θερμικής ισορροποίας και θα αποκτήσει τη θερμοκρασία περιβάλλοντος).

Ορισμός. Ονομάζουμε **χρόνο αποκατάστασης τ** τον χρόνο που απαιτείται ώστε η θερμοκρασίατης ράβδου να γίνει το $\frac{1}{e}$ της αρχικής θερμοκρασίας. Ο χρόνος αποκατάστασης εκφράζει τη τάξη

[23] στη περίπτωση των πολύ μικρών χρόνων η θεμελιώδης λύση του προβλήματος μας δίνει την καλύτερη προσέγγιση.

μεγέθους του χράνου ο οποίος χρειάζεται στο σύστημα για να πλησιάσει στην κατάσταση θερμικής ισορροπίας και ορίζεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{\tau} = -\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|T(x,t)| \tag{184}$$

και είναι ανεξάρτητος της θέσης.

<u>**Παράδειγμα**</u>: Υπολογίζουμε το χρόνο αποκατάστασης για το παραπάνω παράδειγμα αρχικών και συνοριακών τιμών.
Από την (σχ. 180) έχουμε:

$$\begin{aligned} T(x,t) &= A_1\sin(\frac{\pi}{L}x)e^{-(\frac{a\pi}{L})^2 t} + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)e^{-(\frac{na\pi}{L})^2 t} \\ &= A_1\mathrm{sin}(\frac{\pi}{L}x)e^{-(\frac{a\pi}{L})^2 t}[1 + O(e^{-(\frac{3a\pi}{L})^2 t})] \end{aligned}$$

$$\ln|T(x,t)| = -\ln A_1 + \ln\mathrm{sin}(\frac{\pi x}{L}) + \ln e^{-(\frac{a\pi}{L})^2 t} + \ln[1 + O(e^{-(\frac{3a\pi}{L})^2 t})]$$

$$\frac{1}{\tau} = -\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|T(x,t)| \simeq \frac{(\pi a)^2}{L^2} \tag{185}$$

από την (σχ.185) παρατηρούμε ότι ο χρόνος αποκατάστασης καθορίζεται από την ιδιοτιμή της πρώτης αρμονικής γεγονός που δείχνει ότι ασυμπτωτικά, ($t \to \infty$) , η σειρά συγκλίνει πολύ γρήγορα και ο πρώτος όρος (πρώτη αρμονική) προσεγγίζει πολύ καλά τη λύση του προβλήματος. Επιπλέον παρατηρούμε ότι ο χρόνος αποκατάστασης θερμικής ισορροπίας αυξάνει καθώς αυξάνουν οι διαστάσεις του αντικειμένου.

- **Πρόβλημα Neumann**

Ράβδος μήκους L και αρχικής θερμοκρασίας $T_0(x)$ είναι μονωμένη στην παράπλευρη επιφάνεια. Εάν τα άκρα της ράβδου είναι μονωμένα, να βρεθεί η κατανομή της θερμοκρασίας μετά από χρόνο t και η θερμοκρασίαστη κατάσταση θερμικήςισορροπίας.

Για να βρούμε τη λύση του προβλήματος αυτού εφαρμόζουμε τη μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών και η γενική λύση είναι:

$$T(x,t) = X(x)\tilde{T}(t)$$

όπου $\tilde{T}(t) = e^{-k^2 a^2 t}$ ($k^2 > 0$ η σταθερά διαχωρισμού)
και $X(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx)$.
Τα άκρα της ράβδου είναι θερμικά μονωμένα επομένως δέν έχουμε ροή θερμότητας προς το περιβάλλον . Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι :

$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}|_{x=L} = 0$

Για να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες θα πρέπει $A = 0$ και $k = \frac{n\pi}{L}$. στην περίπτωση αυτή έχουμε ένα σύστημα Sturm-Liouville με ιδιοσυναρτήσεις $\cos(\frac{n\pi}{L}x)$ και ιδιοτιμές $k_n = \frac{n\pi}{L}$.
Η λύση της (167) θα δίνεται σαν επαλληλία όλων των ιδιοσυναρτήσεων του συστήματος

$$T(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) e^{-k_n^2 a^2 t} \tag{186}$$

όπου B_n οι συντελεστές Fourier που καθορίζονται από την αρχική κατανομή της θερμοκρασίας μέσα στη ράβδο.

$$T(x,t=0) = T_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(\frac{n\pi}{L}x)$$

$$B_n = \frac{2}{L}\int\limits_0^L T_0(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)dx \tag{187}$$

για $n \neq 0$ και

$$B_0 = \frac{1}{L}\int\limits_0^L T_0(x)dx \tag{188}$$

η θερμοκρασία κάθε χρονική στιγμή θα δίνεται από την:

$$T(x,t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(\frac{n\pi}{L}x)e^{-k_n^2 a^2 t} \tag{189}$$

Μετά από άπειρο χρόνο θα έχει επέλθει κατάσταση θερμικής ισορροπίας και η θερμοκρασία θα είναι:

$$\lim_{t\to\infty} T(x,t) = B_0 = \frac{1}{L}\int\limits_0^L T_0(x)dx \tag{190}$$

Η (σχ. 190) δείχνει ότι η θερμοκρασία, στην κατάσταση θερμικής ισορροπίας, είναι ίση με το μέσο όρο της αρχικής κατανομής θερμότητας, κάτι που ήταν φυσικά αναμενόμενο αφού δέν έχουμε ανταλλαγή με το περιβάλλον.

- **Πρόβλημα Robin** (Αγώγιμου τύπου)

Ράβδος μήκους L με μονωμένη την παράπλευρη επιφάνεια έχει αρχική θερμοκρασία $T(x,t=0) = T_0(x)$. Η ράβδος ανταλλάσει θερμότητα με το περιβάλλον στα δυό άκρα (κακή μόνωση) ανάλογη της θερμοκρασίας. Να βρεθεί η θερμοκρασία της ράβδου κάθε χρονική στιγμή.

Οι συνοριακές συνθήκες στα άκρα είναι της μορφής

$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} - hT(x,t)|_{x=0} = 0$

$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + hT(x,t)|_{x=L} = 0$

Παρατηρούμε ότι οι συνοριακές συνθήκες είναι ομογενείς και επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών . Η μερική λύση του προβλήματος έχει τη μορφή

$T(x,t) = X(x)e^{-k^2a^2t}$

Η συνάρτηση $X(x)$ είναι λύση του προβλήματος ιδιοτιμών

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + k^2\frac{dX(x)}{dt} = 0 \tag{191}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{dX(x)}{dx} \quad & -hX(x)|_{x=0} = 0 \\ \tfrac{dX(x)}{dx} \quad & +hX(x)|_{x=L} = 0 \end{aligned} \tag{192}$$

Η γενική λύση της (εξ. 191) είναι , $X(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx)$. Από τις συνοριακές συνθήκες βρίσκουμε ότι $A = \frac{hB}{k}$ και

$$\cot\mu = \frac{(\mu^2 - h^2L^2)}{2hL\mu} \tag{193}$$

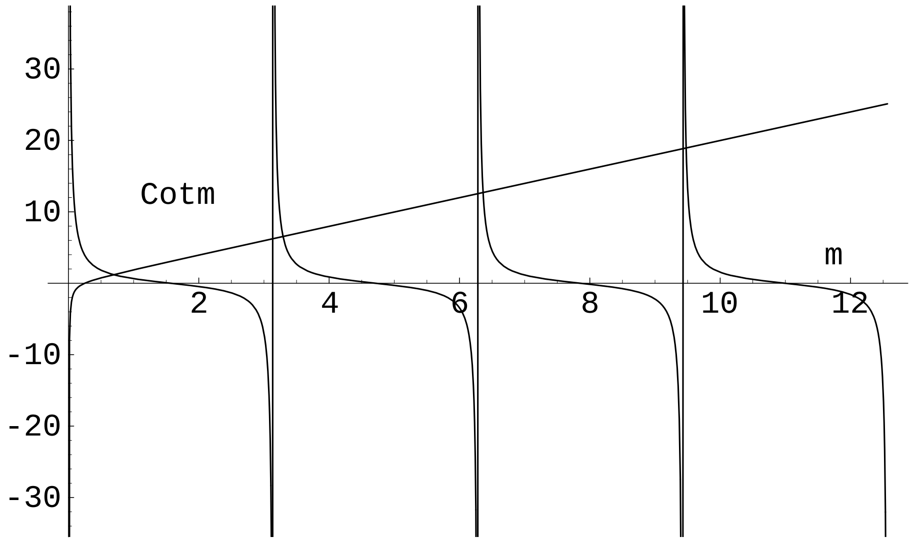
όπου $\mu = Lk$. Η υπερβατική εξίσωση (εξ. 193)έχει πάντα λύση και μάλιστα άπειρες μ_n οι οποίες είναι οι ιδιοτιμές του προβλήματος **Sturm-Liouville** με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις

$$X_n(x) = B_n[\frac{hL}{\mu_n}\sin(\frac{\mu_n x}{L}) + \cos(\frac{\mu_n x}{L})] \tag{194}$$

Τα $X_n(x)$ αποτελούν μια πλήρη ορθογώνια βάση στο διάστημα $(0, L)$. Η λύση δίνεται από το ανάπτυγμα στη ορθογώνια βάση

[24] $X_n(x)$

$$X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\left(\frac{hL}{\mu_n}\sin\left(\frac{\mu_n x}{L}\right) + \cos\left(\frac{\mu_n x}{L}\right)\right)e^{-\frac{\mu^2 a^2 t}{L^2}} \tag{195}$$



Σχήμα 14: Γραφική λύση της υπερβατικής εξίσωσης (σχές. 193)

3.4 Μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες

Θεωρούμε ράβδο μήκους L με μονωμένη την παράπλευρη επιφάνεια. Στα άκρα της ράβδου η θερμοκρασίαείναι: $T(x=0,t) = T_1(t)$, $T(x=L,t) = T_2(t)$ ενώ η αρχική θερμοκρασία της ράβδου είναι $T(x,t=0) = T_0(x)$. Να βρεθεί η θερμοκρασία για $t > 0$.

Στο παραπάνω πρόβλημα οι συνοριακές συνθήκες στα άκρα της ράβδου είναι διαφορετικές (μη ομογενείς) . Τα προβλήματα με μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες επιλύονται με έναν τρόπο ανάλογο με αυτόν που εφαρμόσαμε στην περίπτωση των μη ομογενών διαφορικών εξισώσεων

[24] Δείξτε ότι τα $X_n(x)$ είναι ορθογώνια στο διάστημα $(0, L)$ και να βρεθεί ο συντελεστής κανονικοποίησης.

(εξηναγκασμένη ταλάντωση). (Υπενθυμίζουμε ότι η εξίσωση διάχυσης στην περίπτωση όπου υπάρχουν 'πηγές' ή 'καταβόθρες' θερμότητας, περιλαμβάνει και μη ομογενή όρο .) Η λύση δίνεται σαν άθροισμα δυό λύσεων

$$T(x,t) = U(x,t) + U_\mu(x,t)$$

όπου $U(x,t)$ η λύση που ικανοποιεί ομογενείς συνοριακές συνθήκες και $U_\mu(x,t)$ μια μερική λύση που ικανοποιεί τις μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες.Στο πρόβλημα αυτό έχουμε ομογενή εξίσωση με μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες.

$$T(x=0,t) = T_1(t) \text{ και } T(x=L,t) = T_2(t)$$

και αρχική συνθήκη $T(x,t) = T_0(x)$

Αναζητούμε λύση της μορφής :

$$T(x,t) = U_\mu(x,t) + U(x,t) \tag{196}$$

όπου $U_\mu(x,t)$ μια μερική λύση που ικανοποιεί τις μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες:

$U_\mu(x=0,t) = T_1(t)$ και $U_\mu(x=L,t) = T_2(t)$

και $U(x,t)$ συνάρτηση που ικανοποιεί ομογενείς συνοριακές συνθήκες:

$U(x=0,t) = 0$ και $U(x=L,t) = 0$

και αρχική συνθήκη

$U(x,t=0) = T_0(x) - U_\mu(x,t=0) = \Psi(x).$

Μια μορφή για την $U_\mu(x,t)$ είναι η :

$$U_\mu(x,t) = \frac{L-x}{L}T_1(t) + \frac{x}{L}T_2(t) \tag{197}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση διάχυσης και βρίσκουμε την εξίσωση που ικανοποιεί η $U(x,t)$

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{a^2}\frac{x}{L}\dot{T}_2(t) + \frac{L-x}{a^2 L}\dot{T}_1(t) \equiv F(x,t) \tag{198}$$

Η εξίσωση (σχ.198) είναι μη ομογενής δ.ε. δεύτερης τάξης και έχει λύση $U(x,t)$ η οποία ικανοποιεί ομογενείς συνοριακές συνθήκες. Από τη μορφή της εξίσωσης (σχ. 198) παρατηρούμε ότι η μη ομογένεια των συνοριακών συνθηκών οδήγησε στην εμφάνιση ενός καινούργιου όρου $F(x,t)$ που ισοδυναμεί με την παρουσία πηγών θερμότητας. Για να λύσουμε την (σχ. 198) εφαρμόζουμε τη μέθοδο που εφαρμόσαμε στην περίπτωση της εξηναγκασμένης ταλάντωσης (σχ.88). Αναζητούμε λύση σε ανάπτυγμα πάνω στα ανύσματα βάσεις $\sin(\frac{n\pi}{L}x)$ του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος τα οποία αποτελούν ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα. Επί πλέον αναπτύσσουμε κατά Fourier στην ίδια βάση τη συνάρτηση $F(x,t)$

$$U(x,t) = \sum_n^\infty A_n(t)\sin(\frac{n\pi}{L}x) \tag{199}$$

$$F(x,t) = \sum_n^\infty b_n(t)\sin(\frac{n\pi}{L}x) \tag{200}$$

όπου

$$b_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L F(x,t)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx \tag{201}$$

και αντικαθιστούμε στη (198). Οι συντελεστές Fourier, $A_n(t)$ ικανοποιούν την εξίσωση :

$$\sum_{n=1}^\infty[-\frac{n^2\pi^2}{L^2}A_n(t) - \frac{1}{a^2}\dot{A}_n(t) - b_n(t)]\sin(\frac{n\pi}{L}x) = 0 \tag{202}$$

Η εξίσωση (202) είναι κοινή δ.ε. πρώτης τάξης μη ομογενής και έχει λύση

$$A_n(t) = C_n e^{(-\frac{n^2a^2\pi^2}{L^2}t)} + e^{(-\frac{n^2a^2\pi^2}{L^2}t)} \int\limits_0^t b_n(t^{'}) e^{(\frac{n^2a^2\pi^2}{L^2}t^{'})} dt^{'} \tag{203}$$

$$\begin{aligned} U(x,t) &= \sum_n^\infty [C_n e^{(-\frac{n^2a^2\pi^2}{L^2}t)} \\ &+ e^{(-\frac{n^2a^2\pi^2}{L^2}t)} \int\limits_0^t b_n(t^{'}) e^{(\frac{n^2a^2\pi^2}{L^2}t^{`})} dt^{`}] \sin(\frac{n\pi}{L}x) = \\ &= \sum_n^\infty C_n e^{(-\frac{n^2a^2\pi^2}{L^2}t)} \sin(\frac{n\pi}{L}x) \\ &+ \sum_n^\infty e^{(-\frac{n^2a^2\pi^2}{L^2}t)} \int\limits_0^t b_n(t^{`}) e^{(\frac{n^2a^2\pi^2}{L^2}t^{'})} dt^{'} \sin(\frac{n\pi}{L}x) \\ &= \tilde{U}(x,t) + \tilde{U}_\mu(x,t) \end{aligned} \tag{204}$$

Ο συντελεστής C_n υπολογίζεται από την αρχική κατανομή της θερμοκρασίας στη ράδβο

$$C_n = \frac{2}{L} \int\limits_0^L \Psi(x) \sin(\frac{n\pi}{L}x) dx$$

και

$$\begin{aligned} T(x,t) &= \frac{L-x}{L} T_1(t) + \frac{x}{L} T_2(t) \\ &+ \sum_n^\infty C_n e^{(-\frac{n^2a^2\pi^2}{L^2}t)} \sin(\frac{n\pi}{L}x) \\ &+ \sum_n^\infty e^{(-\frac{n^2a^2\pi^2}{L^2}t)} \int\limits_0^t b_n(t^{`}) e^{(\frac{n^2a^2\pi^2}{L^2}t^{'})} dt^{'} \sin(\frac{n\pi}{L}x) \end{aligned} \tag{205}$$

Παράδειγμα 1 Θεωρούμε τις θερμοκρασίες στα άκρα της ράβδου σταθερές, $T(x=0,t) = C_1$ και $T(x=L,t) = C_2$ αντίστοιχα ενώ η αρχική κατανομή της θερμοκρασίας είναι $T(x,t=0) = g(x)$.

Η λύση του προβλήματος δίνεται από την (σχ. 205) στην οποία ο τρίτος όρος μηδενίζεται και τα $T_1(t) = C_1$, $T_2(t) = C_2$. Η λύση είναι

$$\begin{aligned} T(x,t) &= \frac{L-x}{L}C_1 + \frac{x}{L}C_2 \\ &+ \sum_n^{\infty} C_n e^{(-\frac{n^2 a^2 \pi^2}{L^2}t)} \sin(\frac{n\pi}{L}x) \end{aligned} \tag{206}$$

ενώ οι συντελεστές Fourier , C_n βρίσκονται από τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L (g(x) - \frac{L-x}{L}C_1 - \frac{x}{L}C_2)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$$

Το ίδιο πρόβλημα μπορούμε να το λύσουμε, μαντεύοντας τη μορφή της ειδικής λύσης του προβλήματος. Η φυσική διαίσθηση μας λέει ότι η λύση για μεγάλους χρόνου θα πρέπει να είναι μια στατική λύση (από τις σταθερές συνοριακές συνθήκες) συν μια χρονοεξαρτώμενη . Αναζητούμε λοιπόν μια μερική λύση η οποία, λόγω του ότι οι συνοριακές συνθήκες δέν εξαρτώνται από το χρόνο, θα είναι η στατική λύση $T_\mu(x)$ η οποία ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\frac{d^2T_\mu(x)}{dx^2} = 0 \tag{207}$$

και τις μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες. Η (207) έχει λύση της μορφής

$$T_\mu(x) = a_1 x + a_2 \tag{208}$$

όπου a_1, a_2 σταθερές ολοκλήρωσης οι οποίες υπολογίζονται από τις συνοριακές συνθήκες $T_\mu(x=0) = C_1$ και $T_\mu(x=L) = C_2$.

$$a_2 = C_1$$

$$a_1 = \frac{C_2 - C_1}{L}$$

και

$$T_\mu(x) = \frac{C_2 - C_1}{L}x + C_1 \tag{209}$$

Η γενική λύση είναι:

$$T(x,t) = \sum_n^\infty C_n e^{-\frac{n^2\pi a^2}{L^2}t}\sin(\frac{n\pi}{L}x) + \frac{C_2 - C_1}{L}x + C_1 \tag{210}$$

$$T(x,t=0) = \sum_n^\infty C_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) + \frac{C_2 - C_1}{L}x + C_1 = g(x)$$

$$g(x) - \frac{C_2 - C_1}{L}x - C_1 = \sum_n^\infty C_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

Ο συντελεστής Fourier C_n ορίζεται από το ολοκλήρωμα:

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L (g(x) - \frac{C_2 - C_1}{L}x - C_1)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx \tag{211}$$

Μετά από άπειρο χρόνο η λύση (210) δίνει:

$$\lim_{t\to\infty} T(x,t) = \lim_{t\to\infty} T_\mu(x) + \lim_{t\to\infty} T_o(x,t) = T_\mu(x) \tag{212}$$

Για $t \to \infty$ η λύση της ομογενούς $\lim_{t\to\infty} T_o(x,t) \to 0$ και:

$$\lim_{t\to\infty}[T(x,t) - T_\mu(x)] = 0 \tag{213}$$

Η $T_\mu(x)$ ονομάζεται **ασυμπτωτική ή στατική λύση**. Χαρακτηριστικό της στατικής λύσης είναι ότι δέν εξαρτάται από την αρχική κατάσταση του συστήματος (αρχική κατανομή θερμοκρασίας) , αλλά μόνο από τις συνοριακές συνθήκες του συστήματος και τις πηγές ή τις καταβόθρες αν υπάρχουν.

Ορισμός Εάν $T(x,t)$ είναι η λύση του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών, θα ονομάζουμε **ασυμπτωτική λύση** κάθε λύση $T_\mu(x,t)$ που ικανοποιεί τη δ.ε. τις συνοριακές συνθήκες για $t > 0$ και την σχέση:

$$\lim_{t\to\infty}[T(x,t) - T_\mu(x,t)] = 0 \tag{214}$$

Εάν οι συνοριακές συνθήκες και οι πηγές δέν εξαρτώνται από το χρόνο (όπως στο παράδειγμα 2) η ασυμπτωτική λύση είναι συνάρτηση μόνο της θέσης και καθορίζει την κατάσταση του συστήματος, όταν στο σύστημα έχει επέλθει κατάσταση θερμικής ισορροπίας.
Οταν οι συνοριακές συνθήκες είναι συναρτήσεις του χρόνου $C_1(t)$, $C_2(t)$ η μερική λύση είναι

$$T_\mu(x,t) = \frac{C_2(t) - C_1(t)}{L} x + C_1(t) \tag{215}$$

ενώ οι συντελεστές Fourier C_n γίνονται

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L (g(x) - T_\mu(x, t=0)) \sin(\frac{n\pi}{L} x) dx \tag{216}$$

3.5 Μοναδικότητα της λύσης

Η εξίσωση διάχυσης είναι δ.ε. παραβολικού τύπου και συνθήκες Dirichlet ή Neumann σε ανοικτό σύνορο καθορίζουν μονοσήμαντα τη λύση του προβλήματος. Θεωρούμε ένα πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για πεπερασμένο δρόμο μήκους L

$$T(x=0,t) = a(t),\ T(x=L,t) = b(t) \text{ και } T(x,t=0) = f(x)$$

Θεωρούμε ότι $T_1(x,t)$ είναι μια λύση που ικανοποιεί την εξίσωση (167) και τις συνοριακές συνθήκες. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει και δεύτερη λύση $T_2(x,t)$ που ικανοποιεί τις ίδιες συνοριακές συνθήκες και ορίσουμε τη συνάρτηση $W(x,t) = T_1(x,t) - T_2(x,t)$, τότε θα πρέπει η $W(x,t)$ να ικανοποιεί την (167) και τις συνθήκες :

$$W(x=0,t) = 0,\ W(x=L,t) = 0 \text{ και } W(x,t=0) = 0$$

Θεωρούμε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^L W(x,t)\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2}dx - \frac{1}{a^2}\int_0^L W(x,t)\frac{\partial W(x,t)}{\partial t}dx = 0 =$$

$$= \int_0^L [\frac{\partial}{\partial x}W(x,t)\frac{\partial W(x,t)}{\partial x} - (\frac{\partial W(x,t)}{\partial x})^2]dx - \frac{1}{2a^2}\int_0^L \frac{\partial W(x,t)^2}{\partial t}dx =$$

$$= W(x,t)\frac{\partial W(x,t)}{\partial x}|_0^L - \int_0^L (\frac{\partial W(x,t)}{\partial x})^2 dx - \frac{1}{2a^2}\int_0^L \frac{\partial W(x,t)^2}{\partial t}dx = 0 \tag{217}$$

και

$$-\int_0^L (\frac{\partial W(x,t)}{\partial x})^2 dx = \frac{1}{2a^2}\frac{d}{dt}\int_0^L W(x,t)^2 dx \tag{218}$$

Ολοκληρώνουμε ως προς t

$$-\int_0^t dt \int_0^L (\frac{\partial W(x,t)}{\partial x})^2 dx = \frac{1}{2a^2}\int_0^L W(x,t)^2 dx \tag{219}$$

Το δεξί μέρος της (219)είναι πάντοτε θετικό ενώ το αριστερό μέρος είναι αρνητικό (ασυμβίβαστα). Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει η $W(x,t)$ να είναι ίση με μηδέν και η λύση μονοσήμαντα ορισμένη δηλαδή $T_1(x,t) = T_2(x,t)$. Το μονοσήμαντο της λύσης γενικεύεται και σε προβλήματα περισσοτέρων διαστάσεων.

3.6 Διάδοση θερμότητας σε κύλινδρο

Κύλινδρος ύψους L και ακτίνας R αποτελείται από συμπαγές υλικό σταθερού συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας . Αρχικά ο κύλινδρος έχει θερμοκρασία T_0 και βυθίζεται σε λουτρό θερμοκρασίας μηδέν βαθμών ,σταθερής. Να βρεθεί ο χρόνος αποκατάστασης θερμικής ισορροπίας.

Η εξίσωση διάχυσης σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι:

$$(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\rho\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t})T(\rho,\phi,z,t) = 0 \tag{220}$$

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι:

$$T(\rho = R, \phi, z, t) = T(\rho, \phi, z = 0, t) = T(\rho, \phi, z = L, t) = 0$$

Για να βρούμε τη λύση της εξίσωσης (220) εφαρμόζουμε τη μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών.Αναζητούμε λύση της μορφής

$$T(\rho, \phi, z, t) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)\tilde{T}(t) \tag{221}$$

Αντικαθιστούμε την (221) στη (220) και διαχωρίζουμε την εξίσωση εισάγωντας τρείς σταθερές διαχωρισμού. Διαχωρίζουμε πρώτα το χρόνο , εισάγωντας σταθερά $k^2 > 0$ (το $k^2 > 0$ εασφαλίξει τη σωστή ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης) και παίρνουμε την εξίσωση:

$$\frac{d\tilde{T}(t)}{dt} = -a^2 k^2 \tilde{T}(t) \tag{222}$$

και στη συνέχεια τις z, ϕ και ρ , από τις οποίες παίρνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις (άσκηση):

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + \nu^2 Z(z) = 0 \tag{223}$$

$$\frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + m^2 \Phi(\phi) = 0 \tag{224}$$

$$\frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR(\rho)}{d\rho} + (k^2 - \nu^2 - \frac{m^2}{\rho^2})R(\rho) = 0 \tag{225}$$

Οι σταθερές διαχωρισμού καθορίζονται από τις συνθήκες του προβλήματος.

- Η σταθερά m παίρνει ακέραιες τιμές ώστε η λύση να είναι περιοδική στη γωνία ϕ με περίοδο 2π (αναλοίωτη σε στροφές κατα 2π).

- Η σταθερά ν^2 είναι θετική ώστε να μπορούν να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες στη μεταβλητή z, ($Z(z=0) = Z(z=L) = 0$).

- Η σταθερά k^2 προκύπτει θετική από συνοριακές συνθήκες στη μεταβλητή ρ, όπως αναμενόταν και για τη σωστή ασυμπτωτικά συμπεριφορά της λύσης στο χρόνο.

Η εξίσωση (σχ.223) με τις συνοριακές συνθήκες
$T(\rho, \phi, z=0, t) = T(\rho, \phi, z=L, t) = 0$
αποτελεί σύστημα Sturm-Liouville με ιδιοσυναρτήσεις $\sin(\frac{n\pi z}{L})$ και ιδιοτιμές $\nu^2 = (\frac{n\pi}{L})^2$. Η εξίσωση (225) είναι η γνωστή εξίσωση Bessel, (128), η οποία έχει λύσεις τις συναρτήσεις Bessel και Neumann, m τάξης (m ακέραιο) , με όρισμα $\sqrt{k^2-\nu^2}\rho$,Η γενική λύση είναι:

$$R(\rho) = AJ_m(\sqrt{k^2-\nu^2}\rho) + BN_m(\sqrt{k^2-\nu^2}\rho)$$

Για $\rho = 0$ η συνάρτηση Neumann παρουσιάζει λογαριθμική ανωμαλία $(N_m(x \to 0) \to -\infty)$. Για να πάρουμε πεπερασμένηλύση (πεπερασμένηθερμοκρασία κατα μήκος του άξονα του κυλίνδρου) η σταθερά $B = 0$

$$R(\rho) = AJ_m(\sqrt{k^2-\nu^2}\rho)$$

η θερμοκρασίαστη παράπλευρη επιφάνεια είναι μηδέν, $R(\rho = R) = 0$, άρα

$$R(\rho = R) = AJ_m(\sqrt{k^2-\nu^2}R) = 0 \tag{226}$$

Η εξίσωση (σχ.225) με τη συνοριακή συνθήκη (σχ.226) αποτελούν σύστημα Sturm-Liouville (ιδιάζον πρόβλημα) με ιδιοσυναρτήσεις $J_m(\frac{k_{mi}}{R}\rho)$ και ιδιοτιμές $(\frac{k_{mi}}{R})$, όπου $\frac{k_{mi}^2}{R^2} = k^2 - \frac{n^2\pi^2}{L^2}$. Το k_{mi} είναι το i μηδενικό της συνάρτησης Bessel m τάξης, $J_m(k_{mi}) = 0$. Η γενική λύση του προβλήματος (220) δίνεται από το ανάπτυγμα πάνω σε όλα τα ανύσματα βάσης των συστημάτων Sturm-Liouville :

$$T \quad (\rho = R, \phi, z, t) = \sum_{m,n,i}^{\infty} J_m(\frac{k_{mi}}{R}\rho)\sin(\frac{n\pi z}{L})$$

$$[\quad A_{mni}\sin(\phi) + B_{mni}\cos(\phi)]e^{-(\frac{k_{mi}{}^2}{R^2}+\frac{n^2\pi^2}{L^2})a^2 t} \tag{227}$$

Για $t = 0$:

$$T(\rho = R, \phi, z, t = 0) = T_0 =$$

$$= \sum_{m,n,i}^{\infty} J_m(\frac{k_{mi}}{R}\rho)\sin(\frac{n\pi z}{L})[A_{mni}\sin(m\phi) + B_{mni}\cos(m\phi)] \tag{228}$$

Οι σταθερές A_{mni} και B_{mni} είναι οι συντελεστές **Fourier** του αναπτύγματος της αρχικής κατανομής θερμοκρασίας T_0 στα ανύσματα βάσης $J_m(\frac{k_{mi}}{R}\rho)$, $\sin(\frac{n\pi z}{L})$, $\sin(m\phi)$ και $\cos(m\phi)$.

$$A_{mni} = (\frac{2}{L})(\frac{1}{\pi})(\frac{2}{[RJ_{m+1}(k_{mi})]^2})$$

$$\int_0^L \sin(\frac{n\pi z}{L})dz \int_0^{2\pi} \sin(m\phi)d\phi \int_0^R T_0\rho J_m(\frac{k_{mi}}{R}\rho)d\rho \tag{229}$$

$$B_{mni} = (\frac{2}{L})(\frac{1}{\pi})(\frac{2}{[RJ_{m+1}(k_{mi})]^2})$$

$$\int_0^L \sin(\frac{n\pi z}{L})dz \int_0^{2\pi} \cos(m\phi)d\phi \int_0^R T_0\rho J_m(\frac{k_{mi}}{R}\rho)d\rho \tag{230}$$

Οι συντελεστές $A_{mni} = 0$ για κάθε m ενώ οι συντελεστές $B_{mni} = 0$ για όλα τα m εκτός από $m = 0$,

$$B_{0ni} = \frac{16[1-(-1)^n]}{Ln\pi^2[RJ_1(k_{0i})]} \int_0^R T_0\rho J_0(\frac{k_{0i}}{R}\rho)d\rho \tag{231}$$

$B_{0ni} \neq 0$ για $n = 2l + 1$.

$$T \quad (\rho = R, z, t = 0) = T_0 \sum_{i,l=0}^{\infty} e^{-a^2[\frac{k_{0i}^2}{R^2}+\frac{(2l+1)^2\pi^2}{L^2}]t} F_{il}(\rho, z) =$$

$$= \quad T_0 e^{-a^2[\frac{k_{01}^2}{R^2}+\frac{\pi^2}{L^2}]t}(F_{10}(\rho, z) + O(t)) \tag{232}$$

Ο χρόνος αποκατάστασης τ ορίζεται από τη σχέση (184)

$$\frac{1}{\tau} = -\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|T(x,t)|\approx a^2(\frac{k_{01}^2}{R^2}+\frac{\pi^2}{L^2}) \tag{233}$$

Για έναν κύλινδρο απείρου μήκους ο χρόνος αποκατάστασης τ είναι : $\tau|_{t\to\infty} = 0.1729\frac{R^2}{a^2}$. Παρατηρούμε ότι, οπως αναμέναμε, όσο μεγαλύτερη είναι η ακτίνα του κυλίνδρου τόσο πιό αργά κρυώνει. Για πεπερασμένο ύψος L είναι μικρότερος $\tau_L < \tau_\infty$, ενώ για έναν δίσκο πάχους $L << R$ ο κυρίαρχος όρος είναι $\frac{1}{\tau}\approx a^2\frac{\pi^2}{L^2}$ και ο όρος $\frac{k_{01}^2}{R^2}$ δίνει μια μικρή διόρθωση στο χρόνο αποκατάστασης.

3.7 Ασκήσεις

1. Να μελετήσετε το πρόβλημα του ημιάπειρου δρόμου αν γνωρίζουμε την αρχική κατανομή της θερμοκρασίας για $x > 0$ και τη θερμοκρασία στο σημείο $x = 0$ για κάθε t .

2. Η θερμοκρασία $T(x,t)$ λεπτής ομογενούς ράβδου μήκους L, στην οποία παρουσιάζονται γραμμικά φαινόμενα απώλειας θερμότητας από την παράπλευρη επιφάνεια , ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{\partial}{\partial t}T(x,t) - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t) = -b^2T(x,t) \qquad (234)$$

Βρείτε την κατανομή της θερμοκρασίας αν τα άκρα $x = 0$, $x = L$ είναι θερμικά μονωμένα και η αρχική θερμοκτασία είναι $T(x,t = 0) = T_0\cos^2(\frac{\pi x}{L})$

3. Ράβδος μήκους L θερμικά μονωμένη στη ν παράπλευρη επιφάνεια έχει αρχική θερμοκρασία $T(x,t = 0) = 3\sin(\frac{\pi x}{L} - \sin(\frac{3\pi x}{L}$

   - ποιά είναι η ολική θερμική ενέργεια σαν συνάρτηση του χρόνου·
   - ποιά είναι η ροή θερμότητας στα άκρα , και
   - ποιά είναι η σχέση μεταξύ των δύο προηγουμένων.

4. Ομογενής μεταλλικός κύβος ακμής L με συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας σταθερό έχει θερμοκρασία $T(x,t = 0) = T_0 + T_1\cos\frac{\pi x}{L}$ και τοποθετείται σε μονωτικό υλικό. Να βρεθεί η θερμοκρασία για $t > 0$ και ο χρόνος αποκατάστασης θερμικής ισορροπίας.

5. Θεωρούμε μια αγωγό πλάκα συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας k , απείρων διαστάσεων και πάχους L . Η μιά επιφάνεια της πλάκας είναι μονωμένη ενώ η άλλη θερμαίνεται με ποσόν θερμότητας Q_0

θερμίδες ανά μονάδα επιφανείας ανά μονάδα χρόνου . Αν η αρχική θερμοκρασία είναι μηδέν βαθμοί , να βρεθεί η κατανομή της θερμοκρασίας κάθε χρονική στιγμή ($\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\mid_{x=0}= kQ_0$).

6. Να λύσετε την εξίσωση διάχυσης σε δύο διαστάσεις για μια ορθογώνια πλάκα πλευρών L , H με συνοριακές συνθήκες $T(x = 0, y, t) = T(x = L, y, t) = 0$, $\frac{\partial T}{\partial y}\mid_{y=0}= 0$ $T(x, y = H, t) = g(x)$ και $T(x, y, t = 0) = f(x, y)$. Με δική σας επιλογή συνθηκών λύστε το πρόβλημα ακριβώς. (θεωρούμε ότι δεν υπάρχει τρίτη διάσταση).

7. Εχουμε δυό κυλίνδρους από το ίδιο υλικό με ακτίνες βάσης $R_1 = 1cm$ και $R_2 = \sqrt{2}cm$ και ύψη $L_1 = 1cm$ $L_2 = 0.5cm$ αντίστοιχα. Η αρχική θερμοκρασία των κυλίνδρων 50^0είναι και βυθίζονται σε λουτρό θερμοκρασίας μηδέν βαθμών. Να βρείτε ποιός κύλινδρος θα κρυώσει γρηγορότερα (παρατηρήστε ότι οι δυό κύλινδροι έχουν τον ίδιο όγκο).

8. Η πυκνότητα των νετρονίων σε ένα ραδιενεργό υλικό ικανοποιεί την εξίσωση

$$\nabla^2\rho(r, \theta, \phi, t) + b\rho(r, \theta, \phi, t) = \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}\rho(r, \theta, \phi, t)$$

όπου k, b θετικές σταθερές. Αν διαθέτουμε μια σφαίρα από αυτό το ραδιενεργό υλικό να βρεθεί η πυκνότητα των νετρονίων κάθε χρονική στιγμή αν η αρχική πυκνότητα ήταν ρ_0 . Η πυκνότητα στην επιφάνεια της σφαίρας είναι μηδέν.Ποιά είναι η μέγιστη ακτίνα που θα πρέπει να έχει το υλικό, ώστε να μην έχουμε έκρηξη (η πυκνότητα να είναι ευσταθής).

9. Μέσα σε κύλινδρο απείρου ύψους και ακτίνας R υπάρχουν πηγές θερμότητας. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο κύλινδρος έχει θερμοκρασία T_0 και βυθίζεται σε λουτρό θερμοκρασίας T . Να βρεθεί

η κατανομή της θερμοκρασίας μέσα στον κύλινδρο αν η πηγή δίνει σταθερή ποσότητα θερμότητας ς, (η εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση της θερμοκρασίας είναι $\frac{\partial}{\partial t}T(x,t) - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t) = \sigma$) (Υπόδ:αναζητήστε λύση της μορφής $T(\rho,\phi,t) = U(\rho,\phi,t) + U_\mu(\rho)$)

4 Εξίσωση Laplace

4.1 Εισαγωγή

Η εξίσωση Laplace όπως και οι εξισώσεις Poisson και Helmholtz είναι ελλειπτικού τύπου δ.ε. Είναι βασικές εξισώσεις της μαθηματικής φυσικής και περιγράφουν στάσιμα φαινόμενα. Η εξίσωση Laplace, γνωστή και ως εξίσωση δυναμικού , είναι η εξίσωση που ικανοποιεί το ηλεκτροστατικό δυναμικό απουσία φορτίων, ενώ την ίδια εξίσωση ικανοποιεί και η συνάρτηση θερμοκρασίας σε ένα σύστημα, όπου έχει επέλθει κατάσταση θερμικής ισορροπίας (στάσιμη κατάσταση).
Οι εξισώσεις ελλειπτικού τύπου, όπως γνωρίζουμε, δεν έχουν χαρακτηριστικές επιφάνειες στο πραγματικό επίπεδο. Οι χαρακτηριστικές επιφάνειες είναι οι τροχιές εξέλιξης των φυσικών φαινομένων. Το γεγονός ότι έχουμε περιγραφή στασίμων γεγονότων είναι σύμφωνο με τη μη ύπαρξη χαρακτηριστικών επιφανειών στο πραγματικό επίπεδο το οποίο χαρακτηρίζει της ελλειπτικού τύπου εξισώσεις .

Πριν αναφερθούμε στον τρόπο επίλυσης της εξίσωσης Laplace μπορούμε να ανατρέξουμε στη θεωρία των μιγαδικών και των αναλυτικών συναρτήσεων και να θυμηθούμε τον ορισμό και τη βασική ιδιότητα των αρμονικών συναρτήσεων .

Ορισμός: Ορίσουμε ένα πεδίο G του R^n . Ονομάζουμε **αρμονική συνάρτηση** κάθε συνάρτηση που ανήκει στο G και ικανοποιεί την εξίσωση Laplace στο G.
Αποδεικνύεται ότι μια αρμονική συνάρτηση μπορεί να είναι το πραγματικό ή το φανταστικό μέρος μιας αναλυτικής συνάρτησης . Οι αρμονικές συναρτήσεις δεν παρουσιάζουν τοπικά ακρότατα (μέγιστα ή ελάχιστα) στο πεδίο ορισμού τους και επομένως παίρνουν τις ακρότατες τιμές τους στο σύνορο του πεδίου ορισμού τους.

Το γεγονός λοιπόν ότι η λύση που αναζητούμε παίρνει ακρότατες τιμές στο σύνορο του πεδίου ορισμού της, μας επιβάλλει να γνωρίζουμε τη λύση πάνω σε όλο το σύνορο . Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η συνοριακή επιφάνεια πρέπει να είναι κλειστή (κλειστό σύνορο). Αν η λύση στη συνοριακή επιφάνεια είναι μηδέν τότε θα είναι παντού (στο πεδίο ορισμού της) μηδέν.

Για να ορίσουμε μονοσήμαντα τη λύση της εξίσωσης Laplace πρέπει να ορίσουμε συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet ή Neumann στο **κλειστό σύνορο** του πεδίου ορισμού της, ενώ συνθήκες Cauchy υπερορίζουν το πρόβλημα.

Μονοσήμαντο της λύσης: Εστω $T_1(\vec{x})$ μια λύση της εξίσωσης $\nabla^2 T_1(\vec{x}) = 0$ στο χώρο V με συνοριακή συνθήκη $T_1|_{S(V)} = T_0$ Υποθέτουμε ότι υπάρχει και μια δεύτερη λύση της εξίσωσης Laplace, $\nabla^2 T_2(\vec{x}) = 0$ που ικανοποιεί την ίδια συνοριακή συνθήκη $T_2|_{S(V)} = T_0$.
Ο γραμμικός συνδυασμός

$$\Psi(\vec{x}) = T_1(\vec{x}) - T_2(\vec{x})$$

ικανοποιεί την ίδια εξίσωση και τη συνοριακή συνθήκη $\Psi(\vec{x})|_{S(V)} = 0$.

$$\begin{aligned}\int_V \nabla \,.\, (\Psi(\vec{x})\nabla\Psi(\vec{x}))\; dV &= \int_V \mid \nabla\; \Psi(\vec{x}) \mid^2\; dV + \int_V \nabla^2\Psi(\vec{x})\; dV \\ &= \int_V \mid \nabla\; \Psi(\vec{x}) \mid^2\; dV \qquad (235)\end{aligned}$$

Ομως από το θεώρημα του Gauss έχουμε

$$\int_V \nabla \,.\, (\Psi(\vec{x})\nabla\Psi(\vec{x}))\; dV = \int_{S(V)} \Psi(\vec{x})\; \nabla\; \Psi(\vec{x}) \,.\, dS \qquad (236)$$

Από τις σχέσεις (235) και (236) έχουμε

$$\int_V \mid \nabla\Psi(\vec{x}) \mid^2 \; dV = \; 0 \tag{237}$$

Επομένως η $\Psi(\vec{x})$ είναι σταθερή παντού στο V και αφού στο σύνορο είναι μηδέν και δεδομένου ότι είναι συνεχής συνάρτηση , θα είναι παντού μηδέν.

Αρα

$$T_1(\vec{x}) = T_2(\vec{x})$$

Επομένως η λύση ορίζεται μονοσήμαντα.

Στη συνέχεια , για πρακτικούς λόγους , θα μελετήσουμε μόνο μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα συνοριακών τιμών εφαρμόζοντας τη μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών σε διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων ,καρτεσιανές , κυλινδρικές και σφαιρικές.

4.2 Εξίσωση Laplace σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Σαν πρώτο παράδειγμα θα μελετήσουμε τη θερμοκρασία μιας ράβδου απείρου μήκους, ορθογώνιας διατομής , η οποία βρίσκεται σε κατάσταση θερμικής ισορροπίας.

Θεωρούμε ότι η ράβδος εκτείνεται κατά μήκος του άξωνα z. Η λύση είναι ανεξάρτητη του z και το πρόβλημα ανάγεται σε ένα διδιάστατο όπου $(0 \leq x \leq L$ και $(0 \leq y \leq L\ )$.

Η θερμοκρασία στην παράπλευρη επιφάνεια (σύνορο) είναι καθορισμένη και ανεξάρτητη του χρόνου.

Η θερμοκρασία $T(x, y)$ είναι συνάρτηση των μεταβλητών (x, y) και ικανοποιεί την εξίσωση Laplace με τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες.

$$T(x = 0, y) = g_1(y)$$

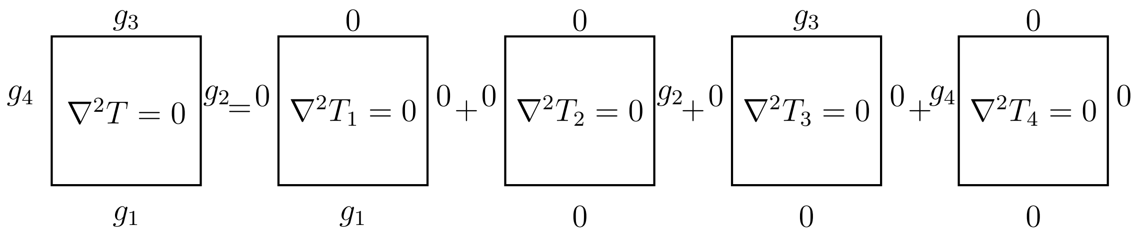
$$T(x = L, y) = g_2(y)$$

$$T(x, y = 0) = g_3(x)$$

$$T(x, y = L) = g_4(x)$$

όπου $g_{1,2}(y)$ και $g_{3,4}(x)$ γνωστές συναρτήσεις . Το πρόβλημα είναι καλά τοποθετημένο (δίνεται η εξίσωση και οι συνοριακές συνθήκες, τύπου Dirichlet, σε κλειστό σύνορο) άρα η λύση θα ορίζεται μονοσήμαντα.
Η εξίσωση είναι γραμμική και ομογενής ενώ παρατηρούμε ότι οι συνοριακές συνθήκες δεν είναι ομογενείς , επομένως δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών, τουλάχιστον στη μορφή αυτή. Μπορούμε όμως, λόγω της γραμμικότητας της εξίσωσης να εφαρμόσουμε το ακόλουθο τέχνασμα:
Αναζητούμε μια λύση της μορφής:

$$T(x, y) = T_1(x, y) + T_2(x, y) + T_3(x, y) + T_4(x, Y) \tag{238}$$



(Σχηματική ανάπτυξη του προβλήματος)

όπου τα $T_i(x, y)$ να ικανοποιούν την εξίσωση Laplace και τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες:

$$T_1(x, y = 0) = g_1(x)\ ,\ T_3(x = 0, y) = T_3(x, y = L) = T_3(x = L, y) = 0 \tag{239}$$

$$T_2(x=L,y)=g_2(y)\ ,\ T_2(x=0,y)=T_2(x,y=0)=T_2(x,y=L)=0 \tag{240}$$

$$T_3(x,y=L)=g_3(x)\ ,\ T_4(x=0,y)=T_4(x=L,y)=T_4(x,y=0)=0 \tag{241}$$

$$T_4(x=0,y)=g_4(y)\ ,\ T_1(x=L,y)=T_1(x,y=0)=T_1(x,y=L)=0 \tag{242}$$

Το αρχικό πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση τεσσάρων προβλημάτων για τον υπολογισμό των $T_i(x,y)$.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε μόνο με την επίλυση του ενός προβλήματος καθώς και τα άλλα τρία αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο. Για παράδειγμα η $T_4(x,y)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{\partial^2 T_4(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_4(x,y)}{\partial y^2}=0 \tag{243}$$

και τις συνθήκες:

$$T_4(x=0,y)=g_4(y)\ ,\ T_4(x=L,y)=T_4(x,y=0)=T_4(x,y=L)=0 \tag{244}$$

Αναζητούμε λύση της μορφής :

$$T_4(x,y)=X_4(x)Y_4(y) \tag{245}$$

και αντικαθιστούμε στην (εξ.243)

$$\frac{1}{X_4(x)}\frac{d^2X_4(x)}{dx^2}=-\frac{1}{Y_4(y)}\frac{d^2Y_4(y)}{dy^2}=\lambda^2 \tag{246}$$

Οι συνοριακές συνθήκες στο $y=0$ και $y=L$, $Y_4(y=0)=Y_4(y=L)=0$, μας οδηγούν μονοσήμαντα [25] στη λύση του προβλήματος ιδιοτιμών ιδιοσυναρτήσεων για την $Y_4(y)$ και έχουμε:

$$Y_{4n}(y)=\sin(\frac{n\pi y}{L}) \tag{247}$$

[25] Πακτωμένη χορδή

ιδιοσυναρτήσεις και $\lambda^2 = (\frac{n\pi}{L})^2$ ιδιοτιμές.

Η $X_4(x)$ ικανοποιεί την (εξ.243) και έχει λύσεις της μορφής :

$$X_{4n}(x) = A \ \sinh(\frac{n\pi x}{L}) \ + \ B \ \cosh(\frac{n\pi x}{L}) \tag{248}$$

Η γενική λύση δίνεται από την επαλληλία στα ανύσματα βάσεις (247)

$$T_4(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \ \sinh(\frac{n\pi x}{L}) \ + \ B_n \ \cosh(\frac{n\pi x}{L})] \sin(\frac{n\pi y}{L}) \tag{249}$$

Οι συνοριακή συνθήκη στο $x = L$ είναι

$$T_4(x=L,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \ \sinh(n\pi) \ + \ B_n \ \cosh(n\pi)) \sin(\frac{n\pi y}{L}) = 0 \tag{250}$$

για κάθε y από την οποία έχουμε μια σχέση μεταξύ των συντελεστών A_n και B_n,

$$A_n \ \sinh(n\pi) \ + \ B_n \ \cosh(n\pi) = 0 \tag{251}$$

$$A_n \ = - \ B_n \ \frac{\cosh(n\pi)}{\sinh(n\pi)} \tag{252}$$

ενώ από τη συνοριακή συθήκη στο $x = 0$

$$T_4(x=0,y) \ = \ g_4(y) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \ B_n \sin(\frac{n\pi y}{L}) \tag{253}$$

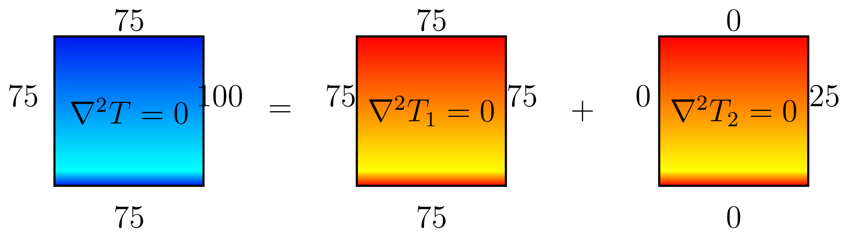
Η (σχέση 253) είναι το ανάπτυγμα Fourier στην ορθοκανονική βάση $\sin(\frac{n\pi y}{L})$ της $g_4(y)$. Οι συντελεστές B_n δίνονται από το ολοκλήρωμα:

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L g_4(y) \sin(\frac{n\pi y}{L}) dy \tag{254}$$

Με τον ίδιο τρόπο θα λύσουμε και τα άλλα τρία επί μέρους προβλήματα για να υπολογίσουμε τις $T_1(x,y)$, $T_2(x,y)$, $T_3(x,y)$.

Παράδειγμα : Θεωρούμε μια άπειρη ράβδο της οποίας οι τρείς παράπλευρες έδρες βρίσκονται σε θερμοκρασία 75 βαθμών ενώ η τέταρτη έχει θερμοκρασία 100 βαθμών. Η ράβδος βρίσκεται σε κατάσταση θερμικής ισορροπίας . Να βρεθεί η θερμοκρασία στη ράβδο.

Σύμφωνα με το προηγούμενο πρόβλημα , το παράδειγμα αυτό ισοδυναμεί με το ακόολουθο (σχηματικά) πρόβλημα :



Η $T_1(x, y) = 75$ διότι είναι αρμονική συνάρτηση και δεν παίρνει τιμές μεγαλύτερες ή μικρότερες από τις τιμές που παίρνει στο σύνορο.

Για την $T_2(x, y)$ έχουμε τις ακόλουθες συνθήκες .

$T_2(x = 0, y) = T_2(x, y = 0) = T_2(x, y = L) = 0$ και $T_2(x = L, 0) = 25$

Η γενική λύση είναι

$$T_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sinh(\frac{n\pi x}{L})) \sin(\frac{n\pi y}{L}) \tag{255}$$

και

$$T_2(x = L, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sinh(n\pi)) \sin(\frac{n\pi y}{L}) = 25 \tag{256}$$

όπου

$$A_n \sinh(n\pi) = \frac{2}{L} \int_0^L 25 \sin(\frac{n\pi y}{L}) dy = \frac{50}{n\pi} (1 - (-1)^n)$$

και

$$T_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{100}{(2k+1)\pi} \sinh(\frac{(2k+1)\pi x}{L})) \sin(\frac{(2k+1)\pi y}{L}) \tag{257}$$

Η ειδική λύση έχει τη μορφή

$$T(x, y) = 75 + \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{100}{(2k+1)\pi} \sinh(\frac{(2k+1)\pi x}{L})) \sin(\frac{(2k+1)\pi y}{L}) \tag{258}$$

4.3 Εξίσωση Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες (εσωτερικό και εξωτερικό πρόβλημα)

Πρόβλημα: Να βρεθεί η θερμοκρασία μιας σφαίρας ακτίνας R στη κατάσταση θερμικής ισορροπίας όταν το ένα ημισφαίριο βρίσκεται μόνιμα σε θερμοκρασία 75 βαθμών και το άλλο ημισφαίριο σε θερμοκρασία 300 βαθμών[26].

Λύση: Στη κατάσταση θερμικής ισορροπίας η συνάρτηση της θερμοκρασίας ικανοποιεί την εξίσωση Laplace η οποία διαχωρίζεται δίνοντας για το γωνιακό μέρος τις εξισώσεις (144) και (145), ενώ το ακτινικό μέρος ικανοποιεί την εξίσωση (146) για $k = 0$ και $\lambda = l(l+1)$,όπου $l = 0, 1, 2, 3..$.

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR(r)}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}R(r) = 0 \tag{259}$$

Η (259) έχει λύσεις τις r^l και $r^{-(l+1)}$ [27] .

Η γενική λύση της εξίσωσης Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι :

$$T(r, \theta, \phi) = \sum_{l,m}^{\infty}(Ar^l + Br^{-(l+1)})Y_l^m(\theta, \phi) \tag{260}$$

όπου $Y_l^m(\theta, \phi)$ οι σφαιρικές αρμονικές.

Για το συγκεκριμένο πρόβλημα συνοριακών τιμών η λύση δίνεται σαν άθροισμα δυό όρων (υπέρθεση λύσεων) και εφαρμόζουμε τη τεχνική που εφαρμόσαμε στο προηγούμενο περάδειγμα για τις κατερτεσιανές συντεταγμένες.

$$T(r, \theta, \phi) = T_1(r, \theta, \phi) + T_2(r, \theta, \phi) \tag{261}$$

οι οποίες ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες:

$$T_1(r = R, \theta, \phi) = 75 \tag{262}$$

[26]Παρατήρηση: Στο πρόβλημα αυτό ορίζεται η θερμοκρασία στην επιφάνεια της σφαίρας (κλειστό σύνορο) και ζητούμε λύση στο εσωτερικό της σφαίρας (εσωτερικό πρόβλημα).

[27]Η εξίσωση (259) είναι ομοβάθμια και έχει λύσεις της μορφής r^a. Αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση βρίσκουμε δυό λύσεις για το a,$a_1 = l$ και $a_2 = -(l+1)$

και

$$T_2(r=R,\theta,\phi)=\left\{\begin{array}{ccc} 0 & : & -1<\cos\theta<0 \\ 225 & : & 0<\cos\theta<1 \end{array}\right.$$

Οι $T_1(r,\theta,\phi)$ και $T_2(r,\theta,\phi)$ ικανοποιούν την εξίσωση Laplace επομένως είναι αρμονικές συναρτήσεις και όπως γνωρίζουμε από τις ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων συνεπάγεται ότι $T_1(r,\theta,\phi)=75$ παντού μέσα στη σφαίρα.

Λόγω συμμετρίας περιστροφής η $T_2(r,\theta,\phi)$ δέν εξαρτάται από τη γωνία φ άρα $m=0$

$$\begin{aligned} T_2(r,\theta,\phi) &= \sum_{l,m}^{\infty}(Ar^l+Br^{-(l+1)})Y_l^m(\theta,\phi) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}(Ar^l+Br^{-(l+1)})P_l(\cos\theta) \qquad (263) \end{aligned}$$

η θερμοκρασίαμέσα στη σφαίρα είναι πεπερασμένη, επομένως, για ένα πρόβλημα μέσα στη σφαίρα **εσωτερικό πρόβλημα** θα πρέπει B=0, $(Br^{-(l+1)}\to\infty$ όταν $r\to 0)$

Για ένα πρόβλημα έξω από τη σφαίρα **εξωτερικό πρόβλημα** όπου $(Ar^l\to\infty$ όταν $r\to\infty)$ θα είναι το $A=0$ ενώ για ένα πρόβλημα στο χώρο μεταξύ δύο σφαιρών θα επιζούν και οι δύο όροι.

$$T_2(r,\theta,\phi)=\sum_{l,m}^{\infty}Ar^lP_l(\cos\theta) \qquad (264)$$

από τη συνοριακή συνθήκη έχουμε:

$$\begin{aligned} AR^l &= \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}P_l(\cos\theta)T_2(r=R,\theta,\phi)d\cos\theta = \\ &= \frac{2l+1}{2}[\int_{-1}^{0}P_l(\cos\theta)T_2(r=R,\theta,\phi)d\cos\theta \\ &+ \int_{0}^{1}P_l(\cos\theta)T_2(r=R,\theta,\phi)d\cos\theta] = \\ &= \frac{2l+1}{2}225\int_{0}^{1}P_l(\cos\theta)d\cos\theta \qquad (265) \end{aligned}$$

από τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων [28] βρίσκουμε ότι επιζούν μόνο οι περιττοί όροι,ενώ όλοι οι άρτιοι μηδενίζονται εκτός από τον μηδενικής τάξης όρο.

$$T_2(r,\theta,\phi) = 225[\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\frac{r}{R}P_1(\cos\theta) - \frac{7}{16}(\frac{r}{R})^3 P_3(\cos\theta) + ..] \tag{266}$$

και η τελική μορφή για τη θερμοκρασίαμέσα στη σφαίρα είναι:

$$T(r,\theta,\phi) = 75 + 225[\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\frac{r}{R}P_1(\cos\theta) - \frac{7}{16}(\frac{r}{R})^3 P_3(\cos\theta) + ..] \tag{267}$$

Πρόβλημα: Η κατανομή ηλεκτρικού φορτίου σε επιφάνεια Σ ενός αγωγού δημιουργεί ηλεκτροστατικό δυναμικό σε μια σφαιρική γεωμετρική επιφάνεια S ακτίνας R, που περικλείει τον αγωγό, της μορφής

$$V(R) = \frac{Q}{4\pi R}\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)$$

όπου $P_l(\cos\theta)$ τα πολυώνυμα Legendre και Q σταθερά. Να βρεθεί το δυναμικό σ' όλα τα σημεία στο εξωτερικό της σφαιρικής επιφάνειας S και το ολικό φορτίο.

Λύση:

Το ηλεκτροστατικό δυναμικό $V(r,\theta,\phi)$ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace . Η γενική λύση του προβλήματος σε σφαιρικές συντεταγμένες δίνεται από τη σχέση (260). Οι συνοριακές συνθήκες ορίζονται στην επιφάνεια της σφαίρας. Η εξίσωση είναι ελλειπτικού τύπου και απαιτούνται συνοριακές επιφάνειες κλειστές. Το σύνορο κλείνει στο όριο $r \to \infty$ όπου το δυναμικό $V(r \to \infty, \theta, \phi) \to 0$. Η συνθήκη στο όριο $r \to \infty$ ικανοποιείται όταν η παράμετρος $A = 0$ και η λύση είναι της μορφής :

$$V(r,\theta,\phi) = \sum_{l,m}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} Y_l^m(\theta,\phi) \tag{268}$$

[28] Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος γίνεται με τη βοήθεια των αναγωγικών σχέσεων των πολυωνύμων Legendre $P_l(x) = \frac{P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x)}{2l+1}$

από τη συνοριακή συνθήκη στη σφαίρα ακτίνας R προκύπτει ότι το $m = 0$ και η λύση γίνεται:

$$V(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) \tag{269}$$

Οι σταθερές B_l υπολογίζονται από τη συνοριακή συνθήκη στην επιφάνεια της σφαίρας και η γενική λύση παίρνει τη μορφή .

$$\begin{aligned} V(r=R,\theta,\phi) &= \frac{Q}{4\pi R}\sum_{m}^{\infty} P_m(\cos\theta) = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} B_l R^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) \end{aligned} \tag{270}$$

$$\begin{aligned} B_l R^{-(l+1)} &= \frac{(2l+1)Q}{8\pi R}\int_{-1}^{1}\sum_{m}^{\infty} P_m(\cos\theta)P_l(\cos\theta)d\cos\theta = \\ &= \frac{(2l+1)Q}{8\pi R}\sum_{m}^{\infty}\int_{-1}^{1} P_m(\cos\theta)P_l(\cos\theta)d\cos\theta = \\ &= \frac{(2l+1)Q}{8\pi R}\sum_{m}^{\infty}\delta_{ml}\frac{2}{2l+1} = \frac{Q}{4\pi R} \end{aligned} \tag{271}$$

Το δυναμικό έξω από τη σφαιρική επιφάνεια έχει τη μορφή:

$$V(r,\theta) = \sum_{l}^{\infty}\frac{Q}{4\pi R}(\frac{R}{r})^{l+1}P_l(\cos\theta) \tag{272}$$

πλειονοπολικό ανάπτυγμα. Ο πρώτος όρος είναι ο μονοπολικός όρος , ο δεύτερος ο διπολικός κ.ο.κ.

Το ολικό φορτίο του αγωγού υπολογίζεται από το νόμο της ηλεκτρικής ροής μέσω της σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας R.

$$\oint_S \vec{E}.d\vec{S} = Q_{total}$$

από το ηλεκτρικό πεδίο μας ενδιαφέρει η ακτινική συνιστώσα.

$$\boxed{E_n = -\frac{\partial V(r,\theta)}{\partial r} = -\sum_{l=0}\frac{Q}{4\pi R}\frac{R^{l+1}}{r^{l+2}}P_l(\cos\theta)(-l-1)}$$

όπουE_n η κάθετη στη επιφάνεια συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου.

$$
\begin{aligned}
Q_{total} &= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sum_{l=0}\frac{Q}{4\pi R}\frac{R^{l+1}}{R^{l+2}}P_l(\cos\theta)(-l-1)R^2\sin\theta d\theta d\phi = \\
&= \sum_{l=0}\frac{Q(l+1)}{2}\int_0^{\pi}P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \\
&= \sum_{l=0}\frac{Q(l+1)}{2}\frac{2}{2l+1}\delta_{0l} = Q \qquad (273)
\end{aligned}
$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος χρησιμοποιούμε τη σχέση ορθοκανονικότητας των πολυωνύμων Legendre [29]

[29] $\int_0^{\pi} P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \int_{-1}^{1} P_l(\cos\theta)P_0(\cos\theta)d\cos\theta = \frac{2}{2l+1}\delta_{l0}$

4.4 Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι η εξίσωση Laplace στις μεταβλητές $z = x + iy$ και $\overline{z} = x - iy$ παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}$$

2. Ενας κύβος από ομογενές υλικό ακμής L βρίσκεται σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας. Οι δυό παράλληλες έδρες του κύβου εχουν θερμοκρασίες $T_1 = 100^0$ και $T_2 = 25^0$ και και όλες οι άλλες βρίσκονται σε μηδενική θερμοκρασία. Να βρεθεί η θερμοκρασία $T(x, y, z)$ σε κάθε σημείο στο εσωτερικό του κύβου.

3. Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Στη συνέχεια να βρείτε τη γενική λύση για ένα κύκλο. ($\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$)

4. Σφαίρα ακτίνας R βρίσκεται σε κατάσταση θερμικής ισορροπίας. Αν η θερμοκρασία στην επιφάνεια είναι μόνιμα σε θερμοκρασία $T(R, \theta, \phi) = T_0 \cos(\theta) \sin(\phi)$ να βρεθεί η θερμοκρασία μέσα και έξω απο τη σφαίρα (υποθέτουμε ότι το σύστημα είναι απομονωμένο και η θερμοκρασία μηδενίζεται στο άπειρο).

5. Ενα κυλινδρικό σώμα από ομογενές υλικό έχει ύψος L και ακτίνα βάσης R . Αν οι βάσεις του κυλίνδρου έχουν θερμοκρασία μηδέν βαθμών και η παράπλευρη επιφάνεια 100^0 να υπολογισθεί η θερμοκρασία μέσα στον κύλινδρο.

6. Ενα κυλινδρικό σώμα από ομογενές υλικό έχει άπειρο μήκος και ακτίνα βάσης R πεπερασμένη . Αν η παράπλευρη επιφάνεια έχει μόνιμα θερμοκτασία $T[R, \phi] = 100(1 - \cos(\phi))$ βαθμούς να υπολογισθεί η θερμοκρασία $T(\rho, \phi)$ μέσα στο κύλινδρο. Αν το σύστημα είναι απομονωμένο , μπορεί να υπολογισθεί η θερμοκρασία στο άπειρο $\rho \to \infty$·

7. Δυό μεταλλικοί ομοαξωνικοί κυλινδρικοί σωλήνες , απείρου μήκους και ακτίνων R_1 , R_2 , ($R_1 <$ R_2) βρίσκονται σε δυναμικά $V\ (R_1, \phi)\ = V_0$ και $V_2\ = V_0\,(1 + \cos\phi\ )$. Να βρεθεί το δυναμικό στο χώρο μεταξύ των σωλήνων.