



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Βαρυκεντρικές υποδιαιρέσεις, σμήνη και απαρίθμηση μεταθέσεων

Διδακτορική διατριβή

Χριστίνα Σαββίδου

Επιβλέπων καθηγητής: Χρήστος Α. Αθανασιάδης

Αθήνα

Ιούνιος 2013

ΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ:

ΙΔΡΥΜΑ ΚΡΑΤΙΚΩΝ ΥΠΟΤΡΟΦΙΩΝ ΚΥΠΡΟΥ



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Στη Νίκη
που δεν κέρδισα.

Η παρούσα διδακτορική διατριβή παρουσιάστηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών την 27η Ιουνίου 2013. Την τριμελή συμβουλευτική επιτροπή αποτέλεσαν οι: Χρήστος Αθανασιάδης (επιβλέπων), Παναγιώτης Παπάζογλου και Ολυμπία Ταλέλλη. Την επταμελή εξεταστική επιτροπή αποτέλεσαν οι: Χ. Αθανασιάδης, Δ. Δεριζιώτης, Μ. Μαλιάκας, Α. Μελάς, Π. Παπάζογλου, Σ. Παπασταυρίδης, Ο. Ταλέλλη.

Περιεχόμενα

1	Πρόλογος	1
2	Εισαγωγή	3
2.1	Συμπλέγματα και υποδιαίρεσεις	3
2.1.1	Μονοπλεκτικά συμπλέγματα	3
2.1.2	Κυβικά συμπλέγματα	4
2.1.3	Υποδιαίρεσεις	5
2.1.4	Πολυώνυμα	6
2.1.5	Απαρίθμηση πλευρών	7
2.2	Σμήνη	10
2.3	Απαρίθμηση Μεταθέσεων	13
2.3.1	Προσημασμένες μεταθέσεις	13
2.4	Μη διασταυρούμενες διαμερίσεις	15
3	Μεταθέσεις χωρίς σταθερά σημεία	17
3.1	Εισαγωγή και αποτελέσματα	17
3.2	Το τοπικό γ -διάνυσμα της βαρυκεντρικής υποδιαίρεσης	21
3.3	Απόδειξη του κύριου τύπου για το $d_n^B(x)$	23
3.4	Μία συνδυαστική ερμηνεία	27
3.5	Το σχετικό τοπικό h -διάνυσμα	28
3.6	Μία γεωμετρική ερμηνεία	30
3.7	Μία διάσπαση του πολωνύμου Euler τύπου B	34
4	Υποδιαίρεσεις σμηγών	41
4.1	Εισαγωγή και αποτελέσματα	41
4.2	Το σύστημα ριζών A_n	43
4.3	Το σύστημα ριζών B_n	45
4.4	Το σύστημα ριζών D_n	47
4.5	Απόδειξη των συγκεντρωτικών αποτελεσμάτων	49
5	Κυβική βαρυκεντρική υποδιαίρεση	51
5.1	Εισαγωγή	51
5.2	Το βραχύ κυβικό h -διάνυσμα	51
5.3	Το κυβικό h -διάνυσμα	54

Κεφάλαιο 1

Πρόλογος

Οι απαριθμητικές αναλλοίωτες γεωμετρικών αντικειμένων όπως τα πολύτοπα, τα μονοπλεκτικά συμπλέγματα, τα κυβικά συμπλέγματα κ.ο.κ. παρέχουν σημαντικές πληροφορίες για τη μελέτη των αντικειμένων αυτών. Μία θεμελιώδης απαριθμητική αναλλοίωτη είναι το f -διάνυσμα, η i -οστή συντεταγμένη του οποίου καταγράφει το πλήθος των πλευρών διάστασης i . Ένα κλασικό πρόβλημα σε αυτή την περιοχή είναι ο (μερικός ή ολικός) χαρακτηρισμός του f -διανύσματος της εκάστοτε κλάσης γεωμετρικών αντικειμένων. Οι πληροφορίες που μπορεί να αποκομίσει κανείς συχνά εκφράζονται πιο κομψά μέσω του h -διανύσματος. Ενδιαφέρον επίσης έχει παρουσιάσει ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλονται οι απαριθμητικές αναλλοίωτες όταν το γεωμετρικό αντικείμενο υποδιαιρείται.

Το f -διάνυσμα των μονοπλεκτικών πολυτόπων έχει χαρακτηριστεί πλήρως, μέσω του g -θεωρήματος (βλ. [15, 16, 57]). Αντιθέτως, πολύ λιγότερες πληροφορίες είναι γνωστές για τα $flag$ μονοπλεκτικά συμπλέγματα και τα κυβικά συμπλέγματα. Ο Stanley ανέπτυξε τη θεωρία των τοπικών h -διανυσμάτων [59] για να μελετήσει την επίδραση των υποδιαίρεσεων στο h -διάνυσμα. Απέδειξε ότι το h -διάνυσμα αυξάνεται όταν ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα υποδιαιρείται ημιγεωμετρικά. Μία ανάλογη εικασία για το γ -διάνυσμα γεωμετρικών υποδιαίρεσεων $flag$ μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων διατυπώθηκε από τους Postnikov, Reiner και Williams [51]. Η εικασία αυτή εντάσσεται στα πλαίσια του γενικότερου ενδιαφέροντος για τα γ -διανύσματα που πυροδοτήθηκε από την εικασία του Gal. Η εικασία του Gal [41] είναι ένα ανάλογο του γενικευμένου θεωρήματος κάτω φράγματος (Generalized Lower Bound Theorem [57]) και αναφέρει ότι το γ -διάνυσμα των $flag$ μονοπλεκτικών ομολογικών σφαιρών είναι μη αρνητικό. Χρησιμοποιώντας μεθόδους από τη θεωρία των τοπικών h -διανυσμάτων του Stanley [59], ο Αθανασιάδης [6] απέδειξε τις δύο προαναφερθείσες εικασίες για κάποιες ειδικές περιπτώσεις και διετύπωσε μία ισχυρότερη εικασία, που αναφέρει ότι το τοπικό γ -διάνυσμα κάθε $flag$ γεωμετρικής υποδιαίρεσης του μονοπλόκου είναι μη αρνητικό.

Πέρα από αυτά τα κίνητρα, στην παρούσα ερευνητική εργασία μας ώθησε και η απουσία παραδειγμάτων από τη βιβλιογραφία που αφορούν υποδιαίρεσεις κυβικών συμπλεγμάτων. Εξού και αρχικά μελετήσαμε τη μεταβολή των κυβικών h -διανυσμάτων υπό κυβική βαρυκεντρική υποδιαίρεση. Η ειδική αυτή περίπτωση επεκτάθηκε από τον Αθανασιάδη [4], ο οποίος μελέτησε τις κυβικές υποδιαίρεσεις σε ένα πιο γενικό πλαίσιο. Από την άλλη, η ύπαρξη παραδειγμάτων που αφορούν τοπικά h -διανύσματα και τοπικά γ -διανύσματα ήταν περιορισμένη. Συγκεκριμένα, ο Stanley [59] απέδειξε ότι το τοπικό h -πολυώνυμο της βαρυκεντρικής υποδιαίρεσης του μονοπλόκου είναι ίσο με τη γεννήτρια συνάρτηση $d_n(x)$ του πλήθους των υπερβάσεων στις μεταθέσεις χωρίς σταθερά σημεία. Κατ' αναλογία, εμείς μελετούμε μία βαρυκεντρική υποδιαίρεση με εφαρμογές στην απαρίθμηση μεταθέσεων της υπεροκταεδρικής ομάδας. Αυτή η υποδιαίρεση, όπως και οι υποδιαίρεσεις σημύων που μελετούμε στη συνέχεια, επαληθεύουν την εικασία του Αθανασιάδη και ενισχύουν

την πεποιθήση για την ισχύ της.

Η δομή της διατριβής αυτής έχει ως εξής. Στο Κεφάλαιο 2 υπενθυμίζουμε το απαραίτητο υπόβαθρο για τα συμπλέγματα και τις υποδιαίρεσεις τους, τα σμήνη, τις μεταθέσεις και τις μη διασταυρούμενες διαμερίσεις. Τα υπόλοιπα κεφάλαια περιέχουν πρωτότυπα αποτελέσματα.

Το Κεφάλαιο 3 αντιστοιχεί στην Ενότητα 4 του [9] και στο άρθρο [10]. Όπως αναφέραμε ήδη, είναι γνωστό [59] ότι το τοπικό h -πολυώνυμο της βαρυκεντρικής υποδιαίρεσης του μονοπλόκου είναι ίσο με το πολυώνυμο μεταθέσεων χωρίς σταθερά σημεία $d_n(x)$. Χρησιμοποιώντας αυτή την ερμηνεία, δείχνουμε ότι είναι γ -μη αρνητικό δίνοντας συνδυαστικές ερμηνείες για τους συντελεστές του αντίστοιχου γ -πολυωνύμου. Για το πολυώνυμο μεταθέσεων χωρίς σταθερά σημεία $d_n^B(x)$ τύπου B δίνεται ένας νέος συνδυαστικός τύπος. Από τον τύπο αυτό προκύπτει άμεσα ότι το $d_n^B(x)$ διασπάται στο άθροισμα δύο μη αρνητικών, συμμετρικών και μονότροπων πολυωνύμων, με κέντρα συμμετρίας που διαφέρουν κατά $1/2$ και έτσι έχουμε μία νέα απόδειξη της μονοτροπίας του. Μία γεωμετρική ερμηνεία, ανάλογη με αυτή για το $d_n(x)$ που έχουμε αναφέρει πιο πάνω, δίνεται για τον ένα από τους όρους αυτής της διάσπασης. Αυτή η ερμηνεία μας οδηγεί σε μία μονοτροπική διάσπαση του πολυωνύμου Euler τύπου B , της οποίας οι όροι μπορούν να εκφραστούν ως προς το πολυώνυμο Euler τύπου A . Τα διάφορα πολυώνυμα διάσπασης που ορίζονται στο Κεφάλαιο 3 μελετούνται επίσης ως προς αναγωγικούς τύπους, γεννήτριες συναρτήσεις, συνδυαστικές ερμηνείες και ύπαρξη πραγματικών ριζών.

Το Κεφάλαιο 4 αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο μέρος του άρθρου [9]. Σε αυτό υπολογίζεται το τοπικό h -διάνυσμα της υποδιαίρεσης σμηνών και αποδεικνύεται πως το αντίστοιχο τοπικό γ -διάνυσμα είναι μη αρνητικό. Χρησιμοποιώντας μη διασταυρούμενες διαμερίσεις τύπου A και B , δίνονται συνδυαστικές ερμηνείες για τις συντεταγμένες του τοπικού h -διανύσματος και του αντίστοιχου γ -διανύσματος για τα κλασικά συστήματα ριζών.

Τέλος, το Κεφάλαιο 5 αντιστοιχεί στο άρθρο [55]. Σε αυτό μελετούμε την κυβική βαρυκεντρική υποδιαίρεση $\text{sd}_c(K)$ ενός κυβικού συμπλέγματος K , που ορίζεται ως ένα ανάλογο της βαρυκεντρικής υποδιαίρεσης ενός μονοπλεκτικού συμπλέγματος. Δίνονται τύποι για το βραχύ κυβικό και το (μακρύ) κυβικό h -διάνυσμα της $\text{sd}_c(K)$ συναρτήσει των αντίστοιχων του K . Από αυτούς προκύπτει ότι η συμμετρία και η μη αρνητικότητα αυτών των h -διανυσμάτων, καθώς και η ύπαρξη μόνο πραγματικών ριζών για το βραχύ κυβικό h -πολυώνυμο, διατηρούνται όταν εφαρμοστεί κυβική βαρυκεντρική υποδιαίρεση. Επίσης, προσδιορίζεται η ασυμπτωτική συμπεριφορά του βραχέος κυβικού και του κυβικού h -πολυωνύμου για διαδοχικές βαρυκεντρικές υποδιαίρεσεις του K .

Κλείνοντας τον πρόλογο, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου Χρήστο Αθανασιάδη για την ανεξάντλητη υπομονή του και τη συνεχή πηγή έμπνευσης καθ' όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας και για τη διόρθωση του τελικού χειμένου της διατριβής. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τους Francesco Brenti, Mirkó Visontai και Volkmar Welker για κάποιες χρήσιμες συζητήσεις και τους Ron Adin, Yuval Roichman, John Stembridge, Mirkó Visontai και Volkmar Welker για χρήσιμες υποδείξεις στη βιβλιογραφία.

Κατά τη διάρκεια εκπόνησης αυτής της διατριβής ήμουν αρχικά υπότροφος του Ιδρύματος Κρατικών Υποτροφιών Κύπρου (Ιανουάριος 2008 - Δεκέμβριος 2010).

Στη συνέχεια συγχρηματοδοτήθηκα από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο - ΕΚΤ) και από εθνικούς πόρους μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος "Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση" του Εθνικού Στρατηγικού Πλαισίου Αναφοράς (ΕΣΠΑ) - Ερευνητικό Χρηματοδοτούμενο Έργο: Ηράκλειτος II. Επένδυση στην κοινωνία της γνώσης μέσω του Ευρωπαϊκού Κοινωνικού Ταμείου (Ιανουάριος 2011 - Ιούνιος 2013).

Κεφάλαιο 2

Εισαγωγή

Αυτή η ενότητα ξεκινά καθορίζοντας τους συμβολισμούς που θα χρησιμοποιηθούν σε αυτή τη διατριβή και υπενθυμίζοντας βασικούς ορισμούς για τα μονοπλεκτικά συμπλέγματα, τις μονοπλεκτικές υποδιαίρεσεις και τις απαριθμητικές τους αναλλοίωτες. Στη συνέχεια γίνεται μία ανασκόπηση των συμπλεγμάτων σιμηνών και οι υποδιαίρεσεις σιμηνών ορίζονται τυπικά. Αυτή η ενότητα ολοκληρώνεται με μία συζήτηση που αφορά τις μεταθέσεις και τις μη διασταυρούμενες διαμερίσεις τύπων A και B . Περισσότερες πληροφορίες για αυτά τα θέματα μπορούν να βρεθούν στα [17, 18, 38, 43, 53, 59, 60, 62, 67] και στις αναφορές που υπάρχουν σε αυτά.

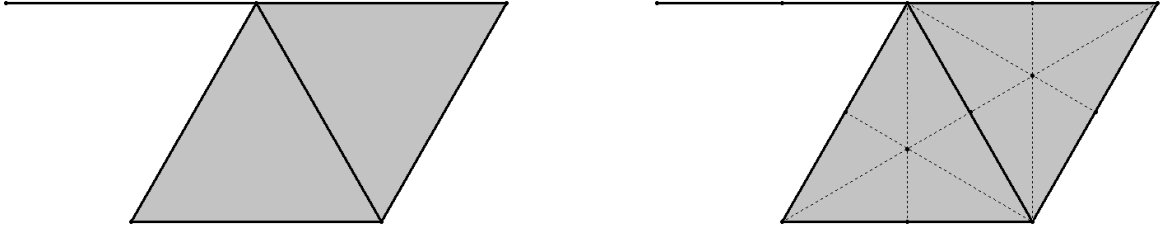
Θα συμβολίζουμε με \mathbb{N} το σύνολο των μη αρνητικών ακεραίων. Για κάθε θετικό ακέραιο n θέτουμε $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ και $\Omega_n = \{1, -1, 2, -2, \dots, n, -n\}$. Συμβολίζουμε με $|S|$ τον πληθικό αριθμό, και με 2^S το σύνολο όλων των υποσυνόλων, ενός πεπερασμένου συνόλου S .

2.1 Συμπλέγματα και υποδιαίρεσεις

2.1.1 Μονοπλεκτικά συμπλέγματα

Δεδομένου ενός πεπερασμένου συνόλου V , ένα (αφηρημένο) μονοπλεκτικό σύμπλεγμα ((*abstract simplicial complex*) στο σύνολο V είναι μία συλλογή Δ υποσυνόλων του V τέτοια ώστε η συνθήκη $F \subseteq G \in \Delta$ να συνεπάγεται ότι $F \in \Delta$ (όλα τα μονοπλεκτικά συμπλέγματα σε αυτή τη διατριβή θα είναι εξ υποθέσεως πεπερασμένα). Τα στοιχεία του Δ καλούνται *πλευρές* (*faces*). Η διάσταση μίας πλευράς F ορίζεται ως ένα λιγότερο από τον πληθικό αριθμό του συνόλου F . Η διάσταση του Δ είναι η μέγιστη διάσταση των πλευρών του και συμβολίζεται με $\dim(\Delta)$. Οι πλευρές διάστασης 0 και 1 καλούνται *κορυφές* και *ακμές*, αντίστοιχα. Μία πλευρά του Δ η οποία είναι μεγιστική ως προς τον εγκλεισμό καλείται *έδρα* (*facet*). Το σύμπλεγμα Δ καλείται *αγνό* (*pure*) αν όλες οι έδρες του έχουν την ίδια διάσταση. Το σύμπλεγμα Δ καλείται *flag* αν κάθε ελαχιστική μη πλευρά του έχει δύο στοιχεία. Το μερικώς διατεταγμένο σύνολο των πλευρών (*face poset*) $\mathcal{F}(\Delta)$ ενός μονοπλεκτικού συμπλέγματος Δ είναι το σύνολο των μη κενών πλευρών του Δ , μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση του εγκλεισμού.

Το ανοικτό άστρο (*open star*) $\text{st}_\Delta(F)$ μίας πλευράς $F \in \Delta$ είναι η συλλογή όλων των πλευρών του Δ που περιέχουν την F . Το *link* μίας πλευράς $F \in \Delta$ είναι το υποσύμπλεγμα του Δ που ορίζεται ως $\text{link}_\Delta(F) = \{G \setminus F : G \in \Delta, F \subseteq G\}$. Ο περιορισμός (*restriction*) του Δ στο σύνολο $V_0 \subseteq V$ είναι το υποσύμπλεγμα του Δ που αποτελείται από τις πλευρές που περιέχονται στο V_0 . Έστω V_1 και V_2 δύο ξένα μεταξύ τους, πεπερασμένα σύνολα. Η (μονοπλεκτική) σύνδεση ((*simplicial join*) $\Delta_1 * \Delta_2$ δύο συλλογών Δ_1 και Δ_2 υποσυνόλων των V_1 και V_2 , αντίστοιχα, είναι η συλλογή των συνόλων της μορφής $F_1 \cup F_2$, όπου $F_1 \in \Delta_1$ και $F_2 \in \Delta_2$. Η σύνδεση δύο (ή περισσότερων) μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων είναι επίσης μονοπλεκτικό σύμπλεγμα. Το διατακτικό σύμπλεγμα (*order complex*) [17, Ενότητα 9.3] [62, Ενότητα 3.8] ενός (πεπερασμένου)



Σχήμα 2.1: Ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα και η βαρυκεντρική υποδιαίρεσή του

μερικώς διατεταγμένου συνόλου Q ορίζεται ως το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα των αλυσίδων (ολικά διατεταγμένων υποσυνόλων) του Q .

Κάθε μονοπλεκτικό σύμπλεγμα Δ έχει γεωμετρική υλοποίηση (*geometric realization*) $\|\Delta\|$ [17, Ενότητα 9], μοναδικά ορισμένη μέχρι ομοιομορφισμού. Όλες οι τοπολογικές ιδιότητες ή αναλλοίωτες του Δ για τις οποίες θα κάνουμε λόγο στη συνέχεια θα αναφέρονται σε αυτές του $\|\Delta\|$ [17, Ενότητα 9.1]. Για παράδειγμα, λέμε ότι το Δ είναι *μονοπλεκτική μπάλα* (*simplicial ball*) αν το $\|\Delta\|$ είναι ομοιομορφικό με μπάλα. Το *σύνορο* (*boundary*) μίας μονοπλεκτικής d -διάστατης μπάλας Δ είναι το υποσύμπλεγμα $\partial\Delta$ που αποτελείται από όλα τα υποσύνολα των $(d-1)$ -διάστατων πλευρών του Δ οι οποίες περιέχονται σε μία ακριβώς έδρα του Δ . Λέμε *εσωτερικό* (*interior*) του Δ το σύνολο $\Delta \setminus \partial\Delta$ και *εσωτερικές πλευρές* (*internal faces*) τα στοιχεία του $\Delta \setminus \partial\Delta$. Η σύνδεση δύο (ή περισσότερων) μονοπλεκτικών μπαλών είναι μία μονοπλεκτική μπάλα της οποίας το εσωτερικό είναι ίσο με τη σύνδεση των εσωτερικών αυτών των μπαλών.

Ένας άλλος τρόπος για να οριστεί η έννοια της “μπάλας” για τα μονοπλεκτικά συμπλέγματα είναι με τη χρήση ομάδων ομολογίας. Έστω Δ ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα διάστασης $d-1$. Λέμε ότι το Δ είναι μία *ομολογική σφαίρα* (*homology sphere*) (υπεράνω ενός σώματος \mathbf{k}) αν για κάθε $F \in \Delta$, συμπεριλαμβανομένης και της κενής πλευράς, έχουμε

$$\tilde{H}_i(\text{link}_\Delta(F), \mathbf{k}) = \begin{cases} \mathbf{k}, & \text{αν } i = \dim \text{link}_\Delta(F) \\ 0, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

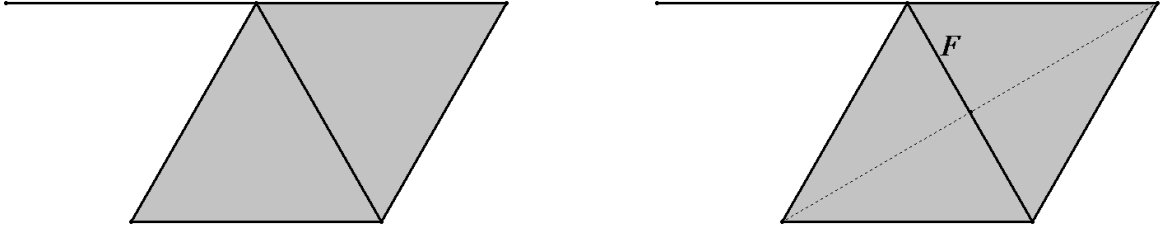
όπου με $\tilde{H}_*(\Gamma, \mathbf{k})$ συμβολίζουμε την ανηγμένη ομάδα ομολογίας του Γ με συντελεστές από το \mathbf{k} . Λέμε ότι το Δ είναι μία *ομολογική μπάλα* (*homology ball*) (υπεράνω του \mathbf{k}) αν υπάρχει ένα υποσύμπλεγμα $\partial\Delta$ του Δ , που καλείται το *σύνορο* (*boundary*) του Δ , έτσι ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα: (α) το υποσύμπλεγμα $\partial\Delta$ είναι μία $(d-2)$ -διάστατη ομολογική σφαίρα υπεράνω του \mathbf{k} και (β) για κάθε $F \in \Delta$, συμπεριλαμβανομένης και της κενής πλευράς, έχουμε

$$\tilde{H}_i(\text{link}_\Delta(F), \mathbf{k}) = \begin{cases} \mathbf{k}, & \text{αν } F \notin \partial\Delta \text{ και } i = \dim \text{link}_\Delta(F) \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Το *εσωτερικό* (*interior*) του Δ ορίζεται ως $\text{int}(\Delta) = \Delta$, αν το Δ είναι ομολογική σφαίρα και ως $\text{int}(\Delta) = \Delta \setminus \partial\Delta$, αν το Δ είναι ομολογική μπάλα. Αν το Δ είναι ομολογική μπάλα διάστασης $d-1$, τότε το $\partial\Delta$ αποτελείται από τις πλευρές των $(d-2)$ -διάστατων πλευρών του Δ που περιέχονται σε μία ακριβώς έδρα του Δ .

2.1.2 Κυβικά συμπλέγματα

Συμβολίζουμε με C_d το συνήθη d -διάστατο κύβο $[0, 1]^d \subseteq \mathbb{R}^d$. Κάθε πολύτοπο συνδυαστικά ισόμορφο με το C_d καλείται *συνδυαστικός d -κύβος* (*combinatorial d -cube*). Ένα *κυβικό σύμπλεγμα* (*cubical complex*) είναι μία πεπερασμένη συλλογή K συνδυαστικών κύβων στον \mathbb{R}^n , τέτοια ώστε (α) κάθε πλευρά ενός στοιχείου του K να ανήκει επίσης στο K και (β) η τομή



Σχήμα 2.2: Ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα και η αστρική υποδιαίρεσή του στην ακμή F

οποιοδήποτε δύο στοιχείων του K να είναι πλευρά και των δύο. Τα στοιχεία του K καλούνται *πλευρές (faces)*.

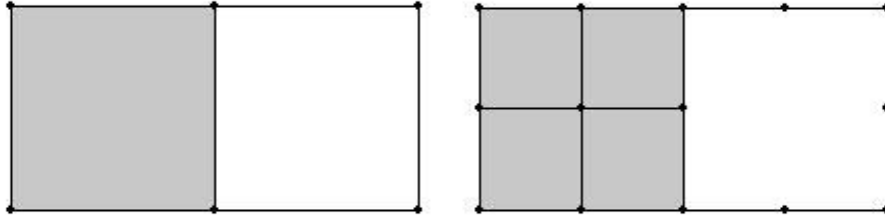
Το μερικώς διατεταγμένο σύνολο των πλευρών (*face poset*) $\mathcal{F}(K)$ του κυβικού συμπλέγματος K είναι το σύνολο των πλευρών του, συμπεριλαμβανομένης και της κενής πλευράς, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση του εγκλεισμού. Το $\mathcal{F}(K)$ είναι ένας meet-ημισύνδεμος. Έχει ως ελάχιστο στοιχείο την κενή πλευρά και ως άτομα τις κορυφές του K . Τα μεγιστικά στοιχεία του $\mathcal{F}(K)$ λέγονται *έδρες (facets)*. Η διάσταση του K , που συμβολίζεται με $\dim(K)$, ορίζεται ως η μέγιστη διάσταση των πλευρών του.

2.1.3 Υποδιαίρεσεις

Έστω Δ ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα. Μία (*τοπολογική*) *μονοπλεκτική υποδιαίρεση* (*(topological) simplicial subdivision*) του Δ [59, Ενότητα 2] είναι ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα Δ' μαζί με μία απεικόνιση $\sigma : \Delta' \rightarrow \Delta$ τέτοια ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα για κάθε $F \in \Delta$: (α) το σύνολο $\Delta'_F := \sigma^{-1}(2^F)$ είναι ένα υποσύμπλεγμα του Δ' που αποτελεί μία μονοπλεκτική μπάλα διάστασης $\dim(F)$ και (β) το εσωτερικό του Δ'_F είναι ίσο με $\sigma^{-1}(F)$. Το υποσύμπλεγμα Δ'_F καλείται *περιορισμός (restriction)* του Δ' στην F . Η πλευρά $\sigma(G) \in \Delta$ καλείται *φορέας (support)* της $G \in \Delta'$. Η υποδιαίρεση Δ' καλείται *ημιγεωμετρική (quasi-geometric)* [59, Ορισμός 4.1 (a)] αν δεν υπάρχουν $E \in \Delta'$ και $F \in \Delta$ διάστασης μικρότερης από $\dim(E)$, τέτοιες ώστε ο φορέας κάθε κορυφής της E να περιέχεται στην F . Επιπλέον, η Δ' καλείται *γεωμετρική (geometric)* [59, Ορισμός 4.1 (b)] αν υπάρχει μία γεωμετρική υλοποίηση του Δ' η οποία να υποδιαίρει γεωμετρικά μία γεωμετρική υλοποίηση του Δ , όπως καθορίζεται από τη σ . Όλες οι γεωμετρικές υποδιαίρεσεις είναι ημιγεωμετρικές.

Προχωρούμε στην περιγραφή δύο διαδεδομένων τρόπων υποδιαίρεσης ενός μονοπλεκτικού συμπλέγματος Δ . Το διατακτικό σύμπλεγμα του μερικώς διατεταγμένου συνόλου των πλευρών $\mathcal{F}(\Delta)$, που συμβολίζεται με $\text{sd}(\Delta)$, αποτελείται από τις αλυσίδες των μη κενών πλευρών του Δ . Αυτό το σύμπλεγμα είναι με φυσιολογικό τρόπο μία (γεωμετρική) μονοπλεκτική υποδιαίρεση του Δ , η λεγόμενη *βαρυκεντρική υποδιαίρεση (barycentric subdivision)*, όπου ο φορέας μίας αλυσίδας C μη κενών πλευρών του Δ ορίζεται ως το μέγιστο στοιχείο της C (βλ. Σχήμα 2.1). Δεδομένης μίας πλευράς $F \in \Delta$ θέτουμε $\Delta' = (\Delta \setminus \text{st}_\Delta(F)) \cup (\{v\} * \partial(2^F) * \text{link}_\Delta(F))$, όπου v είναι μία νέα κορυφή που προστίθεται και $\partial(2^F) = 2^F \setminus F$. Το Δ' είναι ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα που αποτελεί μία μονοπλεκτική υποδιαίρεση του Δ και καλείται *αστρική υποδιαίρεση (stellar subdivision)* του Δ στην F (βλ. Σχήμα 2.2).

Υποθέτουμε ότι Δ'_1 και Δ'_2 είναι μονοπλεκτικές υποδιαίρεσεις των μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων Δ_1 και Δ_2 , αντίστοιχα. Η σύνδεση $\Delta'_1 * \Delta'_2$ είναι με φυσιολογικό τρόπο μία μονοπλεκτική υποδιαίρεση του μονοπλεκτικού συμπλέγματος $\Delta_1 * \Delta_2$ αν ορίσουμε ως φορέα μίας πλευράς $E_1 \cup E_2 \in \Delta'_1 * \Delta'_2$ την ένωση των φορέων των $E_1 \in \Delta'_1$ και $E_2 \in \Delta'_2$. Δεδομένων πλευρών $F_1 \in \Delta_1$ και $F_2 \in \Delta_2$, ο περιορισμός του $\Delta'_1 * \Delta'_2$ στην πλευρά $F_1 \cup F_2 \in \Delta_1 * \Delta_2$ είναι ίσος με $(\Delta_1)_{F_1} * (\Delta_2)_{F_2}$.



Σχήμα 2.3: Ένα κυβικό σύμπλεγμα και η κυβική βαρυκεντρική υποδιαίρεσή του

Η έννοια της ομολογικής υποδιαίρεσης [6, Ορισμός 2.2] γενικεύει την έννοια της τοπολογικής υποδιαίρεσης.

Ορισμός 2.1.1. Έστω Δ ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα. Μία (πεπερασμένη, μονοπλεκτική) ομολογική υποδιαίρεση (*homology subdivision*) του Δ (υπεράνω του \mathbf{k}) είναι ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα Δ' μαζί με μία απεικόνιση $\sigma : \Delta' \rightarrow \Delta$ τέτοια ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα για κάθε $F \in \Delta$: (α) το σύνολο $\Delta'_F := \sigma^{-1}(2^F)$ είναι ένα υποσύμπλεγμα του Δ' που αποτελεί μία ομολογική μπάλα (υπεράνω του \mathbf{k}) διάστασης $\dim(F)$ και (β) το εσωτερικό του Δ'_F είναι ίσο με $\sigma^{-1}(F)$.

Ο περιορισμός, ο φορέας, η γεωμετρική και η ημιγεωμετρική υποδιαίρεση ορίζονται όπως και στην περίπτωση της τοπολογικής υποδιαίρεσης.

Ενώ για τα μονοπλεκτικά συμπλέγματα δώσαμε το γενικό ορισμό της υποδιαίρεσης και δύο επιπλέον παραδείγματα, στην παρούσα διατριβή θα αναφερθούμε μόνο σε μία συγκεκριμένη υποδιαίρεση των κυβικών συμπλεγμάτων. Έστω K ένα κυβικό σύμπλεγμα. Η κυβική βαρυκεντρική υποδιαίρεση $\text{sd}_c(K)$ του K είναι το σύνολο όλων των μη κενών κλειστών διαστημάτων $[F, G]$ στο μερικώς διατεταγμένο σύνολο $\mathcal{F}(K) \setminus \{\emptyset\}$, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση του εγκλεισμού. Με τον ίδιο τρόπο ορίζεται και η κυβική βαρυκεντρική υποδιαίρεση ενός μονοπλεκτικού συμπλέγματος, βλ. Ενότητα 3.6. Έχει αποδειχθεί ([12, Ενότητα 2.3]) και στις δύο περιπτώσεις, ότι η κυβική βαρυκεντρική υποδιαίρεση ενός συμπλέγματος μαζί με το κενό σύνολο αποτελούν το μερικώς διατεταγμένο σύνολο πλευρών ενός κυβικού συμπλέγματος. Στο Κεφάλαιο 5 θα ονομάζουμε κυβική βαρυκεντρική υποδιαίρεση του K και θα συμβολίζουμε με $\text{sd}_c(K)$ αυτό το κυβικό σύμπλεγμα (βλ. Σχήμα 2.3).

2.1.4 Πολυώνυμα

Έστω $p(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k = \sum_{k=0}^d a_k x^k$ ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές. Θα λέμε ότι το $p(x)$ είναι *μονότροπο* (*unimodal*) (και ότι έχει μονότροπους συντελεστές) αν υπάρχει δείκτης $0 \leq j \leq d$ τέτοιος ώστε $a_i \leq a_{i+1}$ για $0 \leq i \leq j-1$ και $a_i \geq a_{i+1}$ για $j \leq i \leq d-1$. Ένας τέτοιος δείκτης καλείται *κορυφή* (*peak*). Λέμε ότι το πολυώνυμο $p(x)$ είναι *λογαριθμικά κοίλο* (*log-concave*) αν $a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$ για $1 \leq i \leq d-1$ και ότι έχει *εσωτερικά μηδενικά* (*internal zeros*) αν υπάρχουν δείκτες $0 \leq i < j < k \leq d$ τέτοιοι ώστε $a_i, a_k \neq 0$ και $a_j = 0$. Θα λέμε ότι το $p(x)$ είναι *συμμετρικό* (*symmetric*) (και ότι έχει συμμετρικούς συντελεστές) αν υπάρχει ακέραιος $n \geq d$ τέτοιος ώστε $a_i = a_{n-i}$ για $0 \leq i \leq n$. Σε αυτή την περίπτωση ορίζεται το *κέντρο συμμετρίας* (*center of symmetry*) του $p(x)$ και είναι ίσο με $n/2$ (το κέντρο συμμετρίας είναι καλά ορισμένο εφόσον το $p(x)$ είναι μη μηδενικό).

Θα λέμε ότι το $p(x)$ έχει *μόνο πραγματικές ρίζες* αν όλες οι μιγαδικές του ρίζες είναι πραγματικοί αριθμοί. Είναι γνωστό (βλ., για παράδειγμα, [58]) ότι αν το $p(x)$ έχει μόνο πραγματικές ρίζες και μη αρνητικούς συντελεστές, τότε το $p(x)$ είναι λογαριθμικά κοίλο και μονότροπο, χωρίς εσωτερικά μηδενικά. Το ακόλουθο θεώρημα, που αποδείχθηκε πρώτα από τον Edrei [34], δίνει μία

ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει μόνο πραγματικές ρίζες ένα πολυώνυμο με μη αρνητικούς, πραγματικούς συντελεστές.

Θεώρημα 2.1.2. ([34]) Έστω $p(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k \in \mathbb{R}[x]$ ένα πολυώνυμο με $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αν θέσουμε $a_k = 0$ για όλους τους αρνητικούς ακέραιους k , τότε το $p(x)$ έχει μόνο πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν κάθε υποορίζουσα του κάτω τριγωνικού πίνακα $(a_{i-j})_{i,j=0}^{\infty}$ είναι μη αρνητική.

Ένα (μη μηδενικό) συμμετρικό πολυώνυμο $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ μπορεί να γραφεί (με μοναδικό τρόπο) στη μορφή

$$p(x) = (1+x)^n \gamma \left(\frac{x}{(1+x)^2} \right) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \gamma_i x^i (1+x)^{n-2i} \quad (2.1.1)$$

για κάποιο πολυώνυμο $\gamma(x) = \sum_{i \geq 0} \gamma_i x^i$. Λέμε ότι το $p(x)$ είναι γ -μη αρνητικό (γ -nonnegative) αν $\gamma_i \geq 0$ για κάθε $i \geq 0$. Είναι άμεσο ότι κάθε γ -μη αρνητικό πολυώνυμο είναι μονότροπο. Για κλάσεις γ -μη αρνητικών πολυωνύμων που εμφανίζονται στη συνδυαστική παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα [21, 33, 50, 51] και στις αναφορές τους.

2.1.5 Απαρίθμηση πλευρών

Έστω Δ ένα $(d-1)$ -διάστατο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα. Συμβολίζουμε με $f_i(\Delta)$ το πλήθος των i -διάστατων πλευρών του Δ . Μία θεμελιώδης απαριθμητική αναλλοίωτη του Δ είναι το f -πολυώνυμο (f -polynomial), που ορίζεται ως

$$f(\Delta, x) = \sum_{i=0}^{d-1} f_i(\Delta) x^i.$$

Το h -πολυώνυμο (h -polynomial) του Δ ορίζεται ως

$$h(\Delta, x) = \sum_{i=0}^d h_i(\Delta) x^i = (1-x)^d \sum_{i=0}^d f_{i-1}(\Delta) \left(\frac{x}{1-x} \right)^i,$$

όπου $f_{-1}(\Delta) = 1$ εξ ορισμού. Για τη σημασία των h -πολυωνύμων, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [60, Κεφάλαιο II]. Για τη σύνδεση $\Delta_1 * \Delta_2$ δύο μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων έχουμε $h(\Delta_1 * \Delta_2, x) = h(\Delta_1, x)h(\Delta_2, x)$.

Το τοπικό h -διάνυσμα μίας μονοπλεκτικής υποδιαίρεσης ενός μονοπλόκου ορίστηκε στο [59, Ορισμός 2.1] ως εξής.

Ορισμός 2.1.3. Έστω V ένα σύνολο με n στοιχεία και Γ μία μονοπλεκτική υποδιαίρεση του μονοπλόκου 2^V . Το πολυώνυμο $\ell_V(\Gamma, x) = \ell_0 + \ell_1 x + \dots + \ell_n x^n$ που ορίζεται ως

$$\ell_V(\Gamma, x) = \sum_{F \subseteq V} (-1)^{n-|F|} h(\Gamma_F, x) \quad (2.1.2)$$

είναι το τοπικό h -πολυώνυμο ($local\ h$ -polynomial) του Γ (ως προς το V). Η ακολουθία $\ell_V(\Gamma) = (\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n)$ είναι το τοπικό h -διάνυσμα ($local\ h$ -vector) του Γ (ως προς το V).

Το ακόλουθο θεώρημα συνοψίζει μερικές από τις κύριες ιδιότητες των τοπικών h -διανυσμάτων (βλ. Παράδειγμα 2.3, Θεωρήματα 3.2, 3.3 και 5.2 και Πρόσχημα 4.7 στο [59]). Για τον ορισμό της κανονικής υποδιαίρεσης παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [59, Ορισμός 5.1].

Θεώρημα 2.1.4. (Stanley [59])

(α) Για κάθε μονοπλεκτική υποδιαίρεση Γ του μονοπλόκου 2^V έχουμε $\ell_0 = 0$ και ότι, για $n \geq 1$, ο αριθμός ℓ_1 είναι ίσος με το πλήθος των εσωτερικών κορυφών του Γ .

(β) Για κάθε μονοπλεκτική υποδιαίρεση Δ' ενός αγνού μονοπλεκτικού συμπλέγματος Δ έχουμε

$$h(\Delta', x) = \sum_{F \in \Delta} \ell_F(\Delta'_F, x) h(\text{link}_\Delta(F), x). \quad (2.1.3)$$

(γ) Το τοπικό h -πολυώνυμο $\ell_V(\Gamma, x)$ είναι συμμετρικό για κάθε μονοπλεκτική υποδιαίρεση Γ του μονοπλόκου 2^V . Ισοδύναμα, έχουμε $\ell_i = \ell_{n-i}$ για $0 \leq i \leq n$, όπου $n = |V|$.

(δ) Το τοπικό h -πολυώνυμο $\ell_V(\Gamma, x)$ έχει μη αρνητικούς συντελεστές για κάθε ημιγεωμετρική μονοπλεκτική υποδιαίρεση Γ του μονοπλόκου 2^V .

(ε) Το τοπικό h -πολυώνυμο $\ell_V(\Gamma, x)$ έχει μονότροπους συντελεστές για κάθε κανονική μονοπλεκτική υποδιαίρεση Γ του μονοπλόκου 2^V .

Η συμμετρία του τοπικού h -πολυωνύμου μας οδηγεί στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 2.1.5. ([6]) Δεδομένης μίας μονοπλεκτικής υποδιαίρεσης Γ ενός $(n-1)$ -διάστατου μονοπλόκου 2^V , το τοπικό γ -πολυώνυμο (*local γ -polynomial*) $\xi_V(\Gamma, x) = \xi_0 + \xi_1 x + \dots + \xi_{\lfloor n/2 \rfloor} x^{\lfloor n/2 \rfloor}$ του Γ (ως προς το V) ορίζεται μοναδικά από την εξίσωση

$$\ell_V(\Gamma, x) = (1+x)^n \xi_V \left(\Gamma, \frac{x}{(1+x)^2} \right) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \xi_i x^i (1+x)^{n-2i}. \quad (2.1.4)$$

Η ακολουθία $\xi_V(\Gamma) = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{\lfloor n/2 \rfloor})$ είναι το τοπικό γ -διάνυσμα (*local γ -vector*) του Γ (ως προς το V).

Το ακόλουθο λήμμα είναι χρήσιμο για τον υπολογισμό του τοπικού h -πολυωνύμου και του τοπικού γ -πολυωνύμου μονοπλεκτικών συνδέσεων.

Λήμμα 2.1.6. Έστω V και V' ξένα μεταξύ τους, πεπερασμένα σύνολα. Για όλες τις μονοπλεκτικές υποδιαίρεσεις Γ του 2^V και Γ' του $2^{V'}$ έχουμε $\ell_{V \cup V'}(\Gamma * \Gamma', x) = \ell_V(\Gamma, x) \ell_{V'}(\Gamma', x)$ και $\xi_{V \cup V'}(\Gamma * \Gamma', x) = \xi_V(\Gamma, x) \xi_{V'}(\Gamma', x)$.

Απόδειξη. Έστω $n = |V|$ και $n' = |V'|$. Χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (2.1.2), υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} \ell_{V \cup V'}(\Gamma * \Gamma', x) &= \sum_{F \subseteq V} \sum_{F' \subseteq V'} (-1)^{|V \cup V'| - |F \cup F'|} h((\Gamma * \Gamma')_{F \cup F'}, x) \\ &= \sum_{F \subseteq V} \sum_{F' \subseteq V'} (-1)^{n+n' - |F| - |F'|} h(\Gamma_F * \Gamma'_{F'}, x) \\ &= \sum_{F \subseteq V} \sum_{F' \subseteq V'} (-1)^{n - |F|} h(\Gamma_F, x) (-1)^{n' - |F'|} h(\Gamma'_{F'}, x) \\ &= \ell_V(\Gamma, x) \ell_{V'}(\Gamma', x). \end{aligned}$$

Από αυτό το αποτέλεσμα και την Εξίσωση (2.1.4) προκύπτει ότι

$$\xi_{V \cup V'}(\Gamma * \Gamma', x) = \xi_V(\Gamma, x) \xi_{V'}(\Gamma', x).$$

□

Αντίστοιχες απαριθμητικές αναλλοίωτες ορίζονται και για τα κυβικά συμπλέγματα. Έστω K ένα $(d-1)$ -διάστατο κυβικό σύμπλεγμα. Συμβολίζουμε με $f_i(K)$ το πλήθος των i -διάστατων πλευρών του K . Το πολυώνυμο

$$f(K, x) = \sum_{i=0}^{d-1} f_i(K) x^i$$

λέγεται f -πολυώνυμο (f -polynomial) του K και το διάνυσμα $f(K) = (f_0(K), f_1(K), \dots, f_{d-1}(K))$ f -διάνυσμα (f -vector) του K .

Το βραχύ κυβικό h -πολυώνυμο (*short cubical h -polynomial*) του K ορίζεται στο [1] μέσω της εξίσωσης

$$h^{(sc)}(K, x) = \sum_{i=0}^{d-1} h_i^{(sc)}(K) x^i = \sum_{j=0}^{d-1} f_j(K) (2x)^j (1-x)^{d-1-j}. \quad (2.1.5)$$

Το διάνυσμα $h^{(sc)}(K) = (h_0^{(sc)}(K), h_1^{(sc)}(K), \dots, h_{d-1}^{(sc)}(K))$ των συντελεστών αυτού του πολυώνυμου λέγεται βραχύ κυβικό h -διάνυσμα (*short cubical h -vector*) του K .

Τα πολυώνυμα $f(K, x)$ και $h^{(sc)}(K, x)$ συσχετίζονται μέσω των εξισώσεων

$$h^{(sc)}(K, x) = (1-x)^{d-1} f\left(K, \frac{2x}{1-x}\right) \quad (2.1.6)$$

και

$$2^{d-1} f(K, x) = (x+2)^{d-1} h^{(sc)}\left(K, \frac{x}{x+2}\right). \quad (2.1.7)$$

Κατά συνέπεια, οι συντεταγμένες του $f(K)$ μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των αντίστοιχων του $h^{(sc)}(K)$ και αντίστροφα μέσω των εξισώσεων

$$f_j(K) = 2^{-j} \sum_{i=0}^j \binom{d-1-i}{d-1-j} h_i^{(sc)}(K) \quad (2.1.8)$$

και

$$h_i^{(sc)}(K) = \sum_{j=0}^i \binom{d-1-j}{d-1-i} (-1)^{i-j} 2^j f_j(K). \quad (2.1.9)$$

Το (μακρύ) κυβικό h -διάνυσμα (*(long) cubical h -vector*) $h^{(c)}(K) = (h_0^{(c)}(K), h_1^{(c)}(K), \dots, h_d^{(c)}(K))$ του K ορίζεται στο [1] μέσω του αναγωγικού τύπου

$$h_i^{(sc)}(K) = h_i^{(c)}(K) + h_{i+1}^{(c)}(K), \quad \text{για } 0 \leq i \leq d-1 \quad (2.1.10)$$

και την αρχική συνθήκη $h_0^{(c)}(K) = 2^{d-1}$. Το πολυώνυμο

$$h^{(c)}(K, x) = \sum_{i=0}^d h_i^{(c)}(K) x^i$$

λέγεται (μακρύ) κυβικό h -πολυώνυμο (*long cubical h -polynomial*) του K .

Το βραχύ και το μακρύ κυβικό h -πολυώνυμο του K συσχετίζονται μέσω της εξίσωσης

$$(1+x)h^{(c)}(K, x) = 2^{d-1} + x h^{(sc)}(K, x) + 2^{d-1}(-x)^{d+1}\tilde{\chi}(K), \quad (2.1.11)$$

όπου

$$\tilde{\chi}(K) = -1 + \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i f_i(K) = -1 + f(K, -1)$$

είναι η ανηγμένη χαρακτηριστική του Euler για το K . Οι συντεταγμένες του $h^{(c)}(K)$ εκφράζονται συναρτήσει των αντίστοιχων του $h^{(sc)}(K)$ μέσω της εξίσωσης

$$h_i^{(c)}(K) = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j-1} h_j^{(sc)}(K) + (-1)^i 2^{d-1}, \quad 1 \leq i \leq d. \quad (2.1.12)$$

Τα κυβικά h -διανύσματα του K μπορούν επίσης να εκφραστούν συναρτήσει των μονοπλεκτικών h -διανυσμάτων των links των κορυφών του K (αυτά τα links είναι μονοπλεκτικά συμπλέγματα). βλ. [1, Θεώρημα 9].

2.2 Σμύνη

Οι αναγνώστες που δεν είναι εξοικειωμένοι με τα συστήματα ριζών, παραπέμπονται στα [19, 38, 44]. Έστω Φ ένα πεπερασμένο σύστημα ριζών τάξης n , εφοδιασμένο με ένα απλό σύστημα $\Pi = \{\alpha_i : i \in I\}$, όπου I είναι ένα σύνολο δεικτών με n στοιχεία, και αντίστοιχο θετικό σύστημα Φ^+ . Θέτουμε $\Phi_{\geq -1} := \Phi^+ \cup (-\Pi)$. Για $J \subseteq I$, το σύνθηδες παραβολικό υποσύστημα ριζών Φ_J κληρονομεί το επαγόμενο θετικό σύστημα $\Phi_J^+ = \Phi^+ \cap \Phi_J$ και το αντίστοιχο απλό σύστημα $\Pi_J = \{\alpha_i : i \in J\}$.

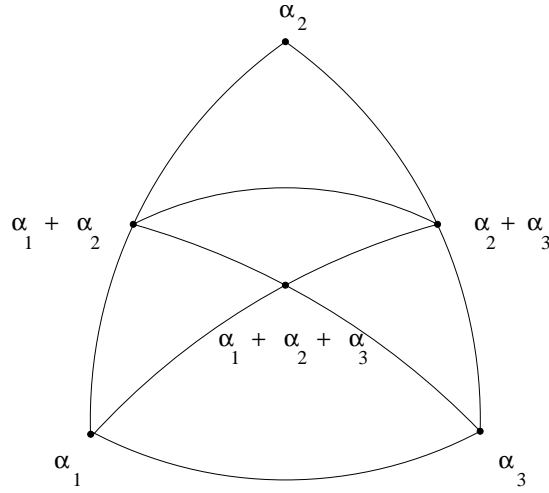
Το *σύμπλεγμα σμηνών* (*cluster complex*) $\Delta(\Phi)$ εισήχθη από τους Fomin και Zelevinsky στο πλαίσιο των αλγεβρικών Y -συστημάτων [40]. Είναι ένα αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα στο σύνολο κορυφών $\Phi_{\geq -1}$. Όταν το Φ είναι χρυσταλλογραφικό, η συνδυαστική του $\Delta(\Phi)$ κωδικοποιεί τις εναλλαγές σμηνών στην αντίστοιχη άλγεβρα σμηνών πεπερασμένου τύπου [39]. Μία περιληπτική αναφορά για τα συμπλέγματα σμηνών και τη σύνδεσή τους με τις άλγεβρες σμηνών υπάρχει στο [38]. Οι πλευρές του $\Delta(\Phi)$ είναι τα σύνολα που αποτελούνται από αμοιβαίως συμβατά στοιχεία του $\Phi_{\geq -1}$, όπου η συμβατότητα είναι μία συμμετρική διμελής σχέση στο $\Phi_{\geq -1}$ που ορίζεται στο [40, Ενότητα 3]. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα [40] [38, Ενότητα 4.3] για τον ακριβή ορισμό της συμβατότητας και συλλέγουμε στην ακόλουθη πρόταση τις ιδιότητες του $\Delta(\Phi)$ και του περιορισμού του $\Delta_+(\Phi)$ στο σύνολο κορυφών Φ^+ που είναι χρήσιμες για την παρούσα διατριβή. Το μέρος (ii) εξυπακούεται στο [40, Ενότητα 3] (βλ. Λήμμα 3.12 και την απόδειξη του Θεωρήματος 1.10 στο ίδιο άρθρο) και [20, Ενότητα 8]. Τα υπόλοιπα μέρη προκύπτουν άμεσα από τα αποτελέσματα του [40, Ενότητα 3].

Πρόταση 2.2.1. (i) Το σύμπλεγμα σμηνών $\Delta(\Phi)$ είναι μία $(n-1)$ -διάστατη μονοπλεκτική σφαίρα.

(ii) Το σύμπλεγμα $\Delta_+(\Phi)$ είναι μία $(n-1)$ -διάστατη μονοπλεκτική μπάλα.

(iii) Για $J \subseteq I$ έχουμε $\text{link}_{\Delta(\Phi)}(-\Pi_J) = \Delta(\Phi_J)$.

(iv) Για $J \subseteq I$, ο περιορισμός του $\Delta(\Phi)$ στο σύνολο κορυφών $(\Phi_J)_{\geq -1}$ είναι ίσος με $\Delta(\Phi_J)$ και ο περιορισμός του $\Delta_+(\Phi)$ στο σύνολο κορυφών Φ_J^+ είναι ίσος με $\Delta_+(\Phi_J)$.

Σχήμα 2.4: Η υποδιαίρεση σμηνών τύπου A_3

- (v) Αν το Φ είναι ένα ευθύ γινόμενο $\Phi_1 \times \Phi_2$ συστημάτων ριζών, τότε $\Delta(\Phi) = \Delta(\Phi_1) * \Delta(\Phi_2)$ και $\Delta_+(\Phi) = \Delta_+(\Phi_1) * \Delta_+(\Phi_2)$.

Το σύμπλεγμα $\Delta_+(\Phi)$ έχει τη δομή μίας (γεωμετρικής) μονοπλεκτικής υποδιαίρεσης του μονοπλόκου 2^Π στο σύνολο κορυφών Π . Θα αναφερόμαστε σε αυτή την υποδιαίρεση ως την υποδιαίρεση σμηνών (cluster subdivision) που σχετίζεται με το Φ και θα τη συμβολίζουμε με $\Gamma(\Phi)$. Δεδομένης μίας θετικής ρίζας $\alpha \in \Phi^+$, υπάρχει ένα μοναδικό σύνολο $J \subseteq I$ τέτοιο ώστε η α να είναι θετικός γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του Π_J . Ορίζουμε ως το φορέα της α το Π_J και για $E \in \Delta_+(\Phi)$, ορίζουμε ως $\sigma(E)$ την ένωση των φορέων των στοιχείων της E . Ισοδύναμα, το $\sigma(E)$ είναι το μικρότερο σύνολο $\Pi_J \subseteq \Pi$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\alpha \in \Phi_J^+$ για κάθε $\alpha \in E$.

Πρόταση 2.2.2. Η απεικόνιση $\sigma : \Delta_+(\Phi) \mapsto 2^\Pi$ ορίζει μία μονοπλεκτική υποδιαίρεση $\Gamma(\Phi)$ του μονοπλόκου 2^Π , της οποίας το τοπικό h -πολυώνυμο δίνεται από την εξίσωση

$$\ell_I(\Gamma(\Phi), x) = \sum_{J \subseteq I} (-1)^{|I \setminus J|} h(\Delta_+(\Phi_J), x).$$

Απόδειξη. Αρκεί να δειχθεί ότι για κάθε $J \subseteq I$: (α) το $\sigma^{-1}(2^{\Pi_J})$ είναι ένα υποσύμπλεγμα του $\Delta_+(\Phi)$ το οποίο είναι ομοιομορφικό με μπάλα διάστασης $|J|-1$. (β) το $\sigma^{-1}(\Pi_J)$ είναι το εσωτερικό αυτής της μπάλας· και (γ) $\sigma^{-1}(2^{\Pi_J}) = \Delta_+(\Phi_J)$. Πράγματι, το (α) και το (β) επιβεβαιώνουν ότι η σ ορίζει μία μονοπλεκτική υποδιαίρεση του μονοπλόκου 2^Π και το (γ) επιβεβαιώνει ότι ο περιορισμός αυτής της υποδιαίρεσης στην πλευρά Π_J του 2^Π είναι ίσος με $\Delta_+(\Phi_J)$. Η εξίσωση είναι συνέπεια της τελευταίας πρότασης και του Ορισμού 2.1.3.

Το μέρος (γ) είναι επακόλουθο του ορισμού της απεικόνισης σ και της Πρότασης 2.2.1 (iv) και το μέρος (α) είναι επακόλουθο του (γ) και της Πρότασης 2.2.1 (ii). Για να επιβεβαιώσουμε το (β), μπορούμε να υποθέσουμε ότι $J = I$. Πρέπει να δείξουμε ότι το σύνολο του $\Delta_+(\Phi)$ είναι ίσο με την ένωση των υποσυμπλεγμάτων $\Delta_+(\Phi_J)$, όπου το J παίρνει τιμές στα γνήσια υποσύνολα του I . Ισοδύναμα, αρκεί να δειχθεί ότι μία $(n-2)$ -διάστατη πλευρά E του $\Delta_+(\Phi)$ περιέχεται σε μία μοναδική έδρα του $\Delta_+(\Phi)$ αν και μόνο αν $E \in \Delta_+(\Phi_J)$ για κάποιο σύνολο $J \subseteq I$ με $n-1$ στοιχεία. Αυτό είναι συνέπεια των (i) και (iii) της Πρότασης 2.2.1. Πράγματι, το (i) συνεπάγεται ότι η πλευρά E περιέχεται σε δύο ακριβώς έδρες του $\Delta(\Phi)$. Το (iii) συνεπάγεται ότι το πολύ μία από αυτές περιέχει μία αρνητική απλή ρίζα και αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν η $E \in \Delta_+(\Phi_J)$ για κάποιο σύνολο $J \subseteq I$ με $n-1$ στοιχεία. \square

Το h -πολυώνυμο του $\Delta_+(\Phi)$ επιδέχεται διάφορες συνδυαστικές ερμηνείες [7, Πορίσματα 7.4 και 7.5] [11, Πρόγραμμα 1.4 και Θεώρημα 1.5] με τη χρήση διατακτικών ιδεωδών ριζών, περιοχών υπερεπιπέδων, τροχιών ομάδων Weyl σε πεπερασμένους τόρους, σημείων πλεγμάτων και μη διασταυρούμενων διαμερίσεων. Υπολογίστηκε επακριβώς για όλα τα ανάγωγα (κρυσταλλογραφικά) συστήματα ριζών στο [11, Ενότητα 6]. Το ακόλουθο αποτέλεσμα θα χρησιμοποιηθεί στην Ενότητα 4.5 για να υπολογίσουμε το δεξί μέλος της εξίσωσης που δίνεται στην Πρόταση 2.2.2.

Λήμμα 2.2.3. ([11, Πρόταση 6.1]) Για το h -πολυώνυμο του $\Delta_+(\Phi)$ έχουμε

$$h(\Delta_+(\Phi), x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} \binom{n}{i} \binom{n-1}{i} x^i, & \text{αν } \mathcal{X} = A_n \\ \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n-1}{i} x^i, & \text{αν } \mathcal{X} = B_n \\ \sum_{i=0}^n \left(\binom{n}{i} \binom{n-2}{i} + \binom{n-2}{i-2} \binom{n-1}{i} \right) x^i, & \text{αν } \mathcal{X} = D_n, \end{cases}$$

όπου \mathcal{X} είναι ο τύπος Cartan-Killing του Φ .

Παράδειγμα 2.2.4. Το σύμπλεγμα $\Delta_+(\Phi)$ και η υποδιαίρεση σημών $\Gamma(\Phi)$ για το σύστημα ριζών Φ τύπου A_3 απεικονίζονται στο Σχήμα 2.4. Οι απλές ρίζες $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ αριθμήθηκαν με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε η α_1 να είναι ορθογώνια στην α_3 .

Η υποδιαίρεση $\Gamma(\Phi)$ τριγωνοποιεί το διδιάστατο μονόπλοκο 2^{II} σε πέντε διδιάστατα μονόπλοκα, τα οποία είναι οι έδρες του $\Delta_+(\Phi)$. Υπάρχει μία εσωτερική κορυφή, η $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. Οι φορείς των $\alpha_1 + \alpha_2$ και $\alpha_2 + \alpha_3$ είναι ίσοι με $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ και $\{\alpha_2, \alpha_3\}$, αντίστοιχα. Ο περιορισμός της $\Gamma(\Phi)$ στην πλευρά $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ του 2^{II} είναι μία υποδιαίρεση του μονοδιάστατου μονοπλόκου με μία εσωτερική κορυφή, την $\alpha_1 + \alpha_2$.

Παρατήρηση 2.2.5. Το σύμπλεγμα σημών, και κατά συνέπεια η αντίστοιχη υποδιαίρεση σημών, ορίζεται για κάθε προσανατολισμό του διαγράμματος Dynkin του Φ βλ. [47] [52, Ενότητα 7]. Το σύμπλεγμα σημών των [40] [38, Ενότητα 4.3], που πραγματευόμαστε εδώ, αντιστοιχεί στον εναλλασσόμενο προσανατολισμό. Σύμφωνα με την [47, Πρόταση 3.4] (βλ. επίσης [52, Πρόταση 7.3]) και τα αποτελέσματα στη [47, Ενότητα 6], το h -διάνυσμα του θετικού μέρους του συμπλέγματος σημών και του τοπικού h -διανύσματος της αντίστοιχης υποδιαίρεσης σημών δεν εξαρτώνται από τον εκάστοτε προσανατολισμό.

Ολοκληρώνουμε αυτή την ενότητα με το ακόλουθο λήμμα, που θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη του Πορίσματος 4.1.3.

Λήμμα 2.2.6. Αν το Φ είναι ένα ευθύ γινόμενο $\Phi_1 \times \Phi_2$ συστημάτων ριζών, τότε $\Gamma(\Phi) = \Gamma(\Phi_1) * \Gamma(\Phi_2)$.

Απόδειξη. Το λήμμα προκύπτει από την Πρόταση 2.2.1 (v) και τους ορισμούς της υποδιαίρεσης σημών και της σύνδεσης δύο μονοπλεκτικών υποδιαίρεσεων. \square

2.3 Απαρίθμηση Μεταθέσεων

Μία *μετάθεση* (*permutation*) ενός πεπερασμένου συνόλου S είναι μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $w : S \rightarrow S$. Συμβολίζουμε με $\mathfrak{S}(S)$ το σύνολο όλων των μεταθέσεων του S και θέτουμε $\mathfrak{S}_n := \mathfrak{S}([n])$. Έστω ότι το σύνολο $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ έχει n στοιχεία, τα οποία είναι ολικώς διατεταγμένα ως $a_1 \prec a_2 \prec \dots \prec a_n$. Μία μετάθεση $w \in \mathfrak{S}(S)$ μπορεί να παρασταθεί ως η ακολουθία $(w(a_1), w(a_2), \dots, w(a_n))$, ή ως η λέξη $w(a_1)w(a_2)\dots w(a_n)$, ή ως γινόμενο ξένων ανά δύο κύκλων [62, Ενότητα 1.3]. Η *συνήθης μορφή γινομένου κύκλων* (*standard disjoint cycle notation*) ορίζεται απαιτώντας (α) κάθε κύκλος να είναι γραμμένος με το μεγαλύτερο (ως προς την ολική διάταξη \preceq) στοιχείο του πρώτο και (β) οι κύκλοι να είναι γραμμένοι σε αύξουσα σειρά (ως προς τη \preceq) του πρώτου (δηλ. μεγαλύτερου) στοιχείου τους [62, σελ. 23].

Δεδομένης μίας μετάθεσης $w \in \mathfrak{S}(S)$, ένας δείκτης $a \in S$ καλείται *υπέρβαση* (*excedance*) της w (ως προς τη \preceq) αν $w(a) \succ a$ και *αντίστροφη υπέρβαση* (*inverse excedance*) αν $w(a) \prec a$. Ο δείκτης $a_i \in S$ καλείται *κάθοδος* (*descent*) (αντίστοιχα, *άνοδος* (*ascent*)) της w αν $i \in [n-1]$ και $w(a_i) \succ w(a_{i+1})$ (αντίστοιχα, $w(a_i) \prec w(a_{i+1})$). Θέτουμε $w(a_0) \prec w(a_i) \prec w(a_{n+1})$ για όλα τα $1 \leq i \leq n$. Μία *διπλή κάθοδος* (*double descent*) της w είναι ένας δείκτης a_i με $1 \leq i \leq n$ τέτοιος ώστε $w(a_{i-1}) \succ w(a_i) \succ w(a_{i+1})$. Μία *διπλή υπέρβαση* (*double excedance*) της w είναι ένας δείκτης $1 \leq a \leq n$ τέτοιος ώστε $w(a) \succ a \succ w^{-1}(a)$. Ένα *ανοδικό τμήμα* (*ascending run*) της w είναι μία μεγιστική ακολουθία $\{i, i+1, \dots, j\}$, τέτοια ώστε $w(a_i) \prec w(a_{i+1}) \prec \dots \prec w(a_j)$. Ένα *από αριστερά προς δεξιά μέγιστο* (*left to right maximum*) της w είναι ένας δείκτης a_j με $1 \leq j \leq n$ τέτοιος ώστε $w(a_i) \prec w(a_j)$ για όλα τα $1 \leq i < j$.

Το πλήθος των υπερβάσεων (αντίστοιχα, αντίστροφων υπερβάσεων, καθόδων ή ανόδων) της w θα συμβολίζεται με $\text{exc}(w)$ (αντίστοιχα, $\text{iexc}(w)$, $\text{des}(w)$ ή $\text{asc}(w)$). Το n -οστό πολυώνυμο *Euler* τύπου A [62, Ενότητα 1.4] ορίζεται από τους τύπους

$$A_n(x) = \sum_{w \in \mathfrak{S}(S)} x^{\text{exc}(w)} = \sum_{w \in \mathfrak{S}(S)} x^{\text{iexc}(w)} = \sum_{w \in \mathfrak{S}(S)} x^{\text{des}(w)} = \sum_{w \in \mathfrak{S}(S)} x^{\text{asc}(w)}. \quad (2.3.1)$$

Προφανώς, αυτά τα αθροίσματα εξαρτώνται μόνο τον αριθμό n και όχι από το S ή την επιλογή της ολικής διάταξης \preceq .

Οι προηγούμενοι ορισμοί ισχύουν ειδικότερα για τη συμμετρική ομάδα \mathfrak{S}_n (με τη συνήθη επιλογή της διάταξης \preceq που προκύπτει θέτοντας $a_i = i$ για $1 \leq i \leq n$). Θα συμβολίζουμε με \mathcal{D}_n το σύνολο των μεταθέσεων w χωρίς σταθερά σημεία (δηλαδή, χωρίς δείκτες i με την ιδιότητα $w(i) = i$) στην \mathfrak{S}_n . Το πολυώνυμο *μεταθέσεων χωρίς σταθερά σημεία* (*derangement polynomial*) ορίζεται από τον τύπο

$$d_n(x) = \sum_{w \in \mathcal{D}_n} x^{\text{exc}(w)}. \quad (2.3.2)$$

Το πολυώνυμο αυτό, το οποίο μελετήθηκε πρώτα από τον Brenti [22] στο πλαίσιο των συμμετρικών συναρτήσεων, έχει διάφορες αξιολογικές ιδιότητες. Για παράδειγμα, έχει συμμετρικούς και μονότροπους συντελεστές, όπως αναφέρεται στην Ενότητα 3.2 (βλ. επίσης [22] [56, Ενότητα 5] [63]) και μόνο πραγματικές ρίζες [66]. Μπορεί επίσης να εκφραστεί ως [22]

$$d_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} A_k(x). \quad (2.3.3)$$

2.3.1 Προσημασμένες μεταθέσεις

Για τους σκοπούς της διατριβής αυτής, είναι καταλληλότερο να ορίσουμε μία *προσημασμένη μετάθεση* (*signed permutation*) του $[n]$ ως την επιλογή ενός υποσυνόλου $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

του Ω_n τέτοιο ώστε $a_i \in \{i, -i\}$ για $1 \leq i \leq n$ και μίας μετάθεσης $w \in \mathfrak{S}(S)$. Θα αναπαριστούμε μία τέτοια μετάθεση w ως την ακολουθία $(w(a_1), w(a_2), \dots, w(a_n))$, ή ως τη λέξη $w(a_1)w(a_2) \cdots w(a_n)$, ή ως γινόμενο ξένων ανά δύο κύκλων. Θα μας φανεί χρήσιμο να ορίσουμε τη συνήθη μορφή γινομένου κύκλων της w χρησιμοποιώντας την ολική διάταξη στο S που είναι η αντίστροφη αυτής που κληρονομείται από τη φυσική ολική διάταξη στο \mathbb{Z} . Τοιουτοτρόπως, οι κύκλοι της w θα γράφονται με το μικρότερο στοιχείο τους πρώτο και σε φθίνουσα σειρά του μικρότερου στοιχείου τους. Θα λέμε ότι η w είναι *μετάθεση χωρίς σταθερά σημεία* (*derangement*) αν δεν υπάρχει $a \in S \cap [n]$ τέτοιο ώστε $w(a) = a$. Θα συμβολίζουμε με B_n το σύνολο όλων των προσημασμένων μεταθέσεων του $[n]$ και με \mathcal{D}_n^B το σύνολο όλων των μεταθέσεων χωρίς σταθερά σημεία στο B_n .

Δεδομένης μίας μετάθεσης $w \in B_n$, λέμε ότι ο δείκτης $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ είναι *B-κάθοδος* (*B-descent*) (αντίστοιχα, *B-άνοδος* (*B-ascent*)) της w αν $w(a_i) > w(a_{i+1})$ (αντίστοιχα, $w(a_i) < w(a_{i+1})$), όπου $w(a_0) = 0$ εξ ορισμού. Το n -οστό πολυώνυμο *Euler* τύπου B [23, Ενότητα 3] μπορεί να οριστεί ως

$$B_n(x) = \sum_{w \in B_n} x^{\text{des}_B(w)} = \sum_{w \in B_n} x^{\text{asc}_B(w)}, \quad (2.3.4)$$

όπου με $\text{des}_B(w)$ συμβολίζουμε το πλήθος των B -καθόδων και με $\text{asc}_B(w)$ το πλήθος των B -ανόδων της $w \in B_n$. Σύμφωνα με τον Brenti [23, σελ. 431], λέμε ότι ο δείκτης $a \in S$ είναι *B-υπέρβαση* (*B-excedance*) της w αν $w(a) > a$, ή αν $-a \in [n]$ και $w(a) = a$. Λέμε ότι ο δείκτης $a \in S$ είναι *αντίστροφη B-υπέρβαση* (*inverse B-excedance*) της w αν $w(a) < a$, ή αν $-a \in [n]$ και $w(a) = a$. Το πλήθος των B -υπερβάσεων της w θα συμβολίζεται με $\text{exc}_B(w)$ και των αντίστροφων B -υπερβάσεων με $\text{iexc}_B(w)$. Με αυτούς τους συμβολισμούς, έχουμε $\text{iexc}_B(w) = \text{exc}_B(w^{-1})$ και (βλ. Θεώρημα 3.15 και Πρόσχημα 3.16 στο [23])

$$B_n(x) = \sum_{w \in B_n} x^{\text{exc}_B(w)}. \quad (2.3.5)$$

Στο Κεφάλαιο 3 θα ασχοληθούμε κατά κόρον με ένα φυσιολογικό ανάλογο του πολυωνύμου $d_n(x)$ για την υπεροκταεδρική ομάδα B_n , που εισήχθη και μελετήθηκε ανεξάρτητα από τους Chen, Tang και Zhao [31] και από τον Chow [32]. Ορίζεται από τον τύπο

$$d_n^B(x) = \sum_{w \in \mathcal{D}_n^B} x^{\text{exc}_B(w)} \quad (2.3.6)$$

και καλείται *πολυώνυμο μεταθέσεων χωρίς σταθερά σημεία τύπου B* (*derangement polynomial of type B*). Αφού $\text{exc}_B(w) = \text{iexc}_B(w^{-1})$ και η απεικόνιση που αντιστοιχεί μία μετάθεση $w \in \mathfrak{S}(S)$ στην αντίστροφή της w^{-1} επάγει ένα αυτομορφισμό στο σύνολο B_n που διατηρεί τα σταθερά σημεία, έχουμε

$$B_n(x) = \sum_{w \in B_n} x^{\text{iexc}_B(w)}$$

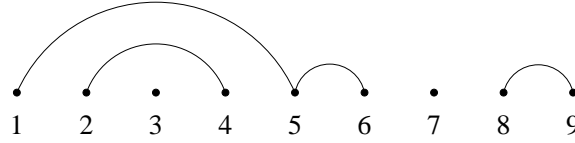
και

$$d_n^B(x) = \sum_{w \in \mathcal{D}_n^B} x^{\text{iexc}_B(w)}. \quad (2.3.7)$$

Για παρόμοιους λόγους, η (2.3.2) εξακολουθεί να ισχύει όταν το σύμβολο exc αντικατασταθεί με το σύμβολο iexc .

Το πολυώνυμο $d_n^B(x)$ έχει τις περισσότερες από τις κύριες ιδιότητες του $d_n(x)$. Για παράδειγμα, έχει μόνο πραγματικές ρίζες [31, 32], και κατά συνέπεια έχει μονότροπους (αλλά όχι συμμετρικούς) συντελεστές, και ικανοποιεί την ανάλογη σχέση

$$d_n^B(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} B_k(x) \quad (2.3.8)$$

Σχήμα 2.5: Η μη διασταυρούμενη διαμέριση $\{\{1, 5, 6\}, \{2, 4\}, \{3\}, \{7\}, \{8, 9\}\}$

της (2.3.3).

2.4 Μη διασταυρούμενες διαμερίσεις

Αυτή η ενότητα συνοψίζει τις έννοιες και τα αποτελέσματα από τη θεωρία των μη διασταυρούμενων διαμερίσεων που εμφανίζονται στο Κεφάλαιο 4.

Το σύνολο των μη διασταυρούμενων διαμερίσεων (*noncrossing partitions*) του $\{1, 2, \dots, n\}$, που θα συμβολίζουμε με $\text{NC}^A(n)$, εισήχθη και μελετήθηκε από τον Kreweras [45]. Αποτελείται από όλες τις διαμερίσεις π του συνόλου $\{1, 2, \dots, n\}$ με την ακόλουθη ιδιότητα: αν $a < b < c < d$ είναι τέτοιοι ώστε να ισχύει ότι οι a, c περιέχονται σε ένα μέρος B της π και οι b, d περιέχονται σε ένα μέρος B' της π , τότε $B = B'$. Ένα παράδειγμα μη διασταυρούμενης διαμέρισης για $n = 9$ απεικονίζεται στο Σχήμα 2.5. Μεταξύ άλλων θεμελιωδών αποτελεσμάτων, ο Kreweras [45, Ενότητα 4] απέδειξε ότι ο πληθικός αριθμός του $\text{NC}^A(n)$ είναι ίσος με τον n -οστό αριθμό Catalan $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ και ότι

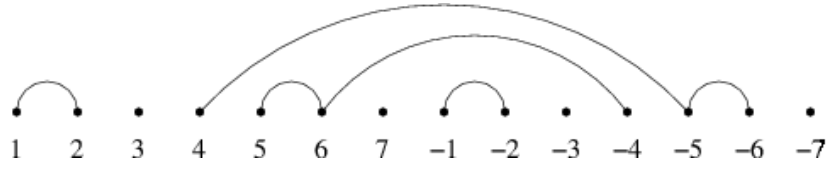
$$\sum_{\pi \in \text{NC}^A(n)} x^{n-|\pi|} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} \binom{n}{i} \binom{n-1}{i} x^i, \quad (2.4.1)$$

όπου με $|\pi|$ συμβολίζουμε το πλήθος των μερών της π .

Θα λέμε ότι ένα μέρος με ένα στοιχείο $\{b\}$ της $\pi \in \text{NC}^A(n)$ είναι *εμφωλευμένο* (*nested*) αν υπάρχει μέρος της π που περιέχει αριθμούς a και c τέτοιους ώστε $a < b < c$: διαφορετικά θα λέμε ότι το $\{b\}$ είναι *μη εμφωλευμένο* (*nonnested*). Στο παράδειγμα του Σχήματος 2.5 το μέρος $\{3\}$ είναι εμφωλευμένο, ενώ το $\{7\}$ δεν είναι. Προφανώς, μία διαμέριση $\pi \in \text{NC}^A(n)$ με μη εμφωλευμένο μέρος με ένα στοιχείο $\{b\}$ καθορίζεται πλήρως από τους περιορισμούς της στα $\{1, 2, \dots, b-1\}$ και $\{b+1, \dots, n\}$, οι οποίοι είναι επίσης μη διασταυρούμενες διαμερίσεις.

Οι μη διασταυρούμενες διαμερίσεις τύπου B ορίστηκαν από τον Reiner [53] ως ακολούθως. Μία διαμέριση π του συνόλου $\{1, 2, \dots, n\} \cup \{-1, -2, \dots, -n\}$ λέγεται B_n -διαμέριση αν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες: (α) αν το B είναι μέρος της π , τότε το $-B$ (το σύνολο που προκύπτει αλλάζοντας τα πρόσημα των στοιχείων του B) είναι επίσης μέρος της π και (β) υπάρχει το πολύ ένα μέρος της π (που, αν υπάρχει, λέγεται *μηδενικό μέρος* (*zero block*)) το οποίο για κάθε στοιχείο του, i , περιέχει και το $-i$. Η σχηματική αναπαράσταση μίας τέτοιας διαμέρισης [3, Ενότητα 2] περιέχει τους ακέραιους $1, 2, \dots, n, -1, -2, \dots, -n$ (με αυτή τη σειρά) σε μία γραμμή και τόξα πάνω από τη γραμμή μεταξύ των i και j όποτε οι i και j ανήκουν στο ίδιο μέρος B της π και κανένα άλλο στοιχείο του B δεν υπάρχει ανάμεσά τους. Η B_n -διαμέριση π λέγεται *μη διασταυρούμενη* (*noncrossing*) αν δεν υπάρχουν τόξα που να διασταυρώνονται σε αυτή τη σχηματική αναπαράσταση. Στο Σχήμα 2.6 απεικονίζεται ένα παράδειγμα για $n = 7$. Το σύνολο των μη διασταυρούμενων B_n -διαμερίσεων θα συμβολίζεται με $\text{NC}^B(n)$.

Μας ενδιαφέρει η απαρίθμηση μη διασταυρούμενων B_n -διαμερίσεων χωρίς μηδενικό μέρος, ως προς το πλήθος των μερών τους. Το ακόλουθο λήμμα προκύπτει άμεσα από το [8, Λήμμα 4.4], όπως επισημαίνεται και στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.2 στο [54]. Εναλλακτικά, η απόδειξη του προκύπτει εύκολα από αυτή του [3, Θεώρημα 2.3].

Σχήμα 2.6: Μία μη διασταυρούμενη B_7 -διαμέριση

Λήμμα 2.4.1. Το πλήθος των διαμερίσεων $\pi \in \text{NC}^B(n)$ οι οποίες δεν έχουν μηδενικό μέρος και έχουν συνολικά k ζεύγη μη μηδενικών μερών είναι ίσο με $\binom{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη του [3, Θεώρημα 2.3] δείχνει ότι οι διαμερίσεις $\pi \in \text{NC}^B(n)$ που δεν έχουν μηδενικό μέρος και έχουν συνολικά k ζεύγη μη μηδενικών μερών είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τα ζεύγη (S, f) , όπου το S είναι ένα υποσύνολο του $\{1, 2, \dots, n\}$ με k στοιχεία και η $f : S \rightarrow \{1, 2, \dots\}$ είναι μία απεικόνιση της οποίας οι τιμές αθροίζουν στο n . Εφόσον υπάρχουν $\binom{n}{k}$ τρόποι να επιλεγεί το S και, για κάθε τέτοια επιλογή, υπάρχουν $\binom{n-1}{k-1}$ τρόποι να επιλεγεί η f , το αποτέλεσμα έπεται. \square

Θα λέμε ότι ένα μέρος με ένα στοιχείο $\{b\}$ της $\pi \in \text{NC}^B(n)$ είναι *εμφωλευμένο* (*nested*) αν υπάρχει μέρος της π που περιέχει ένα στοιχείο που προηγείται και ένα που έπεται του b στη γραμμική διάταξη $1, 2, \dots, n, -1, -2, \dots, -n$. Διαφορετικά θα λέμε πως το $\{b\}$ είναι *μη εμφωλευμένο* (*nonnested*). Στο παράδειγμα του Σχήματος 2.6 υπάρχει το μη εμφωλευμένο μέρος με ένα θετικό στοιχείο $\{3\}$ και το εμφωλευμένο μέρος με ένα θετικό στοιχείο $\{7\}$. Μία διαμέριση $\pi \in \text{NC}^B(n)$ με μη εμφωλευμένο μέρος με ένα θετικό στοιχείο $\{b\}$ καθορίζεται πλήρως από τους περιορισμούς της στα $\{1, 2, \dots, b-1\}$ και $\{b+1, \dots, n\} \cup \{-b-1, \dots, -n\}$, οι οποίοι είναι μη διασταυρούμενες διαμερίσεις τύπου A και B , αντίστοιχα.

Κεφάλαιο 3

Πολυώνυμα μεταθέσεων χωρίς σταθερά σημεία και βαρυκεντρικές υποδιαίρεσεις

3.1 Εισαγωγή και αποτελέσματα

Το κεφάλαιο αυτό ερευνά τη σχέση κάποιων βαρυκεντρικών υποδιαίρεσεων με τα πολυώνυμα μεταθέσεων χωρίς σταθερά σημεία. Μέσω αυτού του συσχετισμού, αποδεικνύεται η γ -μη αρνητικότητα των τοπικών h -πολυωνύμων των βαρυκεντρικών υποδιαίρεσεων που μελετούμε, καθώς και άγνωστες ή γνωστές - αλλά με νέες αποδείξεις - ιδιότητες για το πολυώνυμο μεταθέσεων χωρίς σταθερά σημεία και το πολυώνυμο Euler τύπου B .

Έστω V ένα σύνολο με n στοιχεία. Χρησιμοποιώντας την ερμηνεία του πολυωνύμου Euler τύπου A ως το h -πολυώνυμο της βαρυκεντρικής υποδιαίρεσης του μονοπλόκου, αποδεικνύεται ότι (βλ. [59, Πρόταση 2.4])

$$\ell_V(\text{sd}(2^V), x) = d_n(x). \quad (3.1.1)$$

Το ακόλουθο θεώρημα δίνει ανάλογες συνδυαστικές ερμηνείες για το αντίστοιχο τοπικό γ -πολυώνυμο.

Θεώρημα 3.1.1. *Αν $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{\lfloor n/2 \rfloor})$ είναι το τοπικό γ -διάγραμμα της βαρυκεντρικής υποδιαίρεσης $\text{sd}(2^V)$ του $(n-1)$ -διάστατου μονοπλόκου 2^V , τότε ο αριθμός ξ_i είναι ίσος με κάθε ένα από τα ακόλουθα:*

- (i) το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathfrak{S}_n$ με i ανοδικά τμήματα και κανένα ανοδικό τμήμα μήκους ένα,
- (ii) το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathcal{D}_n$ χωρίς σταθερά σημεία με i υπερβάσεις και καμία διπλή υπέρβαση,
- (iii) το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathfrak{S}_n$ με i καθόδους και καμία διπλή κάθοδο, για τις οποίες ισχύει ότι κάθε από αριστερά προς δεξιά μέγιστο της w είναι κάθοδος.

Ειδικότερα, ισχύει ότι $\xi_i \geq 0$ για κάθε $0 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor$.

Για τις πρώτες τιμές του n έχουμε:

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \xi_i x^i = \begin{cases} x, & \text{αν } n = 2, 3 \\ x + 5x^2, & \text{αν } n = 4 \\ x + 18x^2, & \text{αν } n = 5 \\ x + 47x^2 + 61x^3, & \text{αν } n = 6 \\ x + 108x^2 + 479x^3, & \text{αν } n = 7 \\ x + 233x^2 + 2414x^3 + 1385x^4, & \text{αν } n = 8 \\ x + 486x^2 + 9970x^3 + 19028x^4, & \text{αν } n = 9. \end{cases}$$

Με το Θεώρημα 3.1.1 δίνεται μία συνδυαστική απόδειξη για τη μονοτροπία του πολυωνύμου $d_n(x)$ και έτσι απαντάται μία ερώτηση του Brenti [22]: βλ. Παρατήρηση 3.2.1. Επιπρόσθετα, συμπεραίνουμε ότι για δεδομένο n , το άθροισμα των συντελεστών ξ_i είναι ίσο με το πλήθος των μεταθέσεων στην \mathfrak{S}_n χωρίς ανοδικά τμήματα μήκους ένα. Τέτοιες μεταθέσεις μελετήθηκαν (σε ένα πιο γενικό πλαίσιο) και απαριθμήθηκαν από τον Gessel [42, Κεφάλαιο 5].

Όπως διαπιστώσαμε μετά τη δημοσίευση του άρθρου [9], το Θεώρημα 3.1.1 (iii) προκύπτει ανεξάρτητα και από το [56, Θεώρημα 7.3]. Μέχρι της παρούσας στιγμής, η απόδειξη του θεωρήματος αυτού δεν έχει εμφανιστεί στη βιβλιογραφία. Η μη αρνητικότητα των αριθμών ξ_i προκύπτει και από το γεγονός ότι τα πολυώνυμα $d_n(x)$ (είναι συμμετρικά και) έχουν μόνο πραγματικές ρίζες [66]. Εναλλακτικά, προκύπτει και από την [6, Πρόταση 6.1], όπου αποδεικνύεται η μη αρνητικότητα του τοπικού γ -διανύσματος για την οικογένεια flag μονοπλεκτικών υποδιαίρέσεων που προκύπτουν από την τετριμμένη υποδιαίρεση μέσω διαδοχικών αστρικών υποδιαίρέσεων σε ακμές.

Υπενθυμίζουμε ότι το φυσιολογικό ανάλογο του $d_n(x)$ για την υπεροκταεδρική ομάδα B_n των προσημασμένων μεταθέσεων συμβολίζεται με $d_n^B(x)$ και ορίζεται μέσω της Εξίσωσης 2.3.6. Το πρώτο κύριο αποτέλεσμά μας για το $d_n^B(x)$ είναι ο ακόλουθος συνδυαστικός τύπος.

Θεώρημα 3.1.2. Έχουμε

$$d_n^B(x) = \sum_{(r_0, r_1, \dots, r_k)} \binom{n}{r_0, r_1, \dots, r_k} x^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} d_{r_0}(x) A_{r_1}(x) \cdots A_{r_k}(x) \quad (3.1.2)$$

για $n \in \mathbb{N}$, όπου $A_0(x) = 0$, $d_0(x) = 1$ και το άθροισμα κυμαίνεται σε όλα τα $k \in \mathbb{N}$ και σε όλες τις ακολουθίες (r_0, r_1, \dots, r_k) μη αρνητικών ακεραίων που αθροίζουν στο n .

Ο Chow [32, Ενότητα 4] έδωσε μία επιπλέον απόδειξη της μονοτροπίας του $d_n^B(x)$ εκφράζοντάς το ως άθροισμα μη αρνητικών μονότροπων πολυωνύμων, που ορίζονται από ταυτότητες συμμετρικών συναρτήσεων. Από το Θεώρημα 3.1.2 προκύπτει ότι το πολυώνυμο $d_n^B(x)$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πολυωνύμων με μη αρνητικούς, συμμετρικούς και μονότροπους συντελεστές, των οποίων τα κέντρα συμμετρίας διαφέρουν κατά μισό, και με αυτό τον τρόπο παρέχει μία νέα απόδειξη της μονοτροπίας του, όπως θα εξηγήσουμε αμέσως. Εφόσον το πολυώνυμο $d_n^B(x)$ έχει βαθμό n και μηδενικό σταθερό όρο, μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$d_n^B(x) = f_n^+(x) + f_n^-(x), \quad (3.1.3)$$

όπου τα πολυώνυμα $f_n^+(x)$ και $f_n^-(x)$ έχουν βαθμούς το πολύ $n-1$ και n , αντίστοιχα, και ικανοποιούν τις σχέσεις

$$f_n^+(x) = x^n f_n^+(1/x) \quad (3.1.4)$$

$$f_n^-(x) = x^{n+1} f_n^-(1/x) \quad (3.1.5)$$

(βλ., για παράδειγμα, [13, Λήμμα 2.4] για αυτό το στοιχειώδες γεγονός). Για τις πρώτες τιμές του n έχουμε

$$f_n^+(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 0 \\ 0, & \text{αν } n = 1 \\ 3x, & \text{αν } n = 2 \\ 7x + 7x^2, & \text{αν } n = 3 \\ 15x + 87x^2 + 15x^3, & \text{αν } n = 4 \\ 31x + 551x^2 + 551x^3 + 31x^4, & \text{αν } n = 5 \\ 63x + 2803x^2 + 8243x^3 + 2803x^4 + 63x^5, & \text{αν } n = 6 \\ 127x + 12867x^2 + 84827x^3 + 84827x^4 + 12867x^5 + 127x^6, & \text{αν } n = 7 \end{cases}$$

και

$$f_n^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } n = 0 \\ x, & \text{αν } n = 1 \\ x + x^2, & \text{αν } n = 2 \\ x + 13x^2 + x^3, & \text{αν } n = 3 \\ x + 57x^2 + 57x^3 + x^4, & \text{αν } n = 4 \\ x + 201x^2 + 761x^3 + 201x^4 + x^5, & \text{αν } n = 5 \\ x + 653x^2 + 6333x^3 + 6333x^4 + 653x^5 + x^6, & \text{αν } n = 6 \\ x + 2045x^2 + 42757x^3 + 106037x^4 + 42757x^5 + 2045x^6 + x^7, & \text{αν } n = 7. \end{cases}$$

Οι ακόλουθες πληροφορίες για τα πολυώνυμα $f_n^+(x)$ και $f_n^-(x)$ και για το $d_n^B(x)$ απορρέουν από την Εξίσωση (3.1.2).

Πόρισμα 3.1.3. Έχουμε

$$f_n^+(x) = \sum \binom{n}{r_0, r_1, \dots, r_{2k}} x^k d_{r_0}(x) A_{r_1}(x) \cdots A_{r_{2k}}(x) \quad (3.1.6)$$

και

$$f_n^-(x) = \sum \binom{n}{r_0, r_1, \dots, r_{2k+1}} x^{k+1} d_{r_0}(x) A_{r_1}(x) \cdots A_{r_{2k+1}}(x) \quad (3.1.7)$$

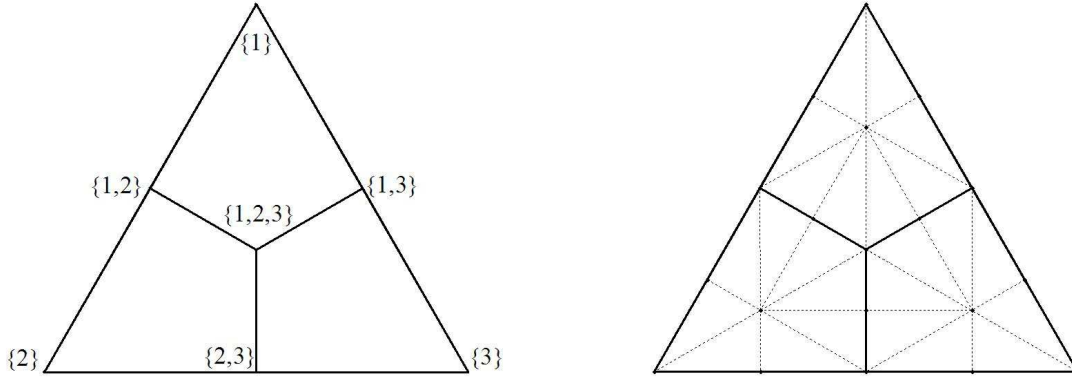
για $n \in \mathbb{N}$, όπου το άθροισμα κυμαίνεται σε όλα τα $k \in \mathbb{N}$ και σε όλες τις ακολουθίες $(r_0, r_1, \dots, r_{2k})$ (αντίστοιχα, $(r_0, r_1, \dots, r_{2k+1})$) μη αρνητικών ακεραιών που αθροίζουν στο n . Επιπλέον, τα $f_n^+(x)$ και $f_n^-(x)$ είναι γ -μη αρνητικά, δηλαδή υπάρχουν μη αρνητικοί ακέραιοι $\xi_{n,i}^+$ και $\xi_{n,i}^-$ τέτοιοι ώστε

$$f_n^+(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \xi_{n,i}^+ x^i (1+x)^{n-2i} \quad (3.1.8)$$

και

$$f_n^-(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \xi_{n,i}^- x^i (1+x)^{n+1-2i}. \quad (3.1.9)$$

Ειδικότερα, τα $f_n^+(x)$ και $f_n^-(x)$ είναι συμμετρικά και μονότροπα, με κέντρα συμμετρίας στα $n/2$ και $(n+1)/2$, αντίστοιχα, και το $d_n^B(x)$ είναι μονότροπο με κορυφή στο $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$.



Σχήμα 3.1: Η κυβική βαρυκεντρική υποδιαίρεση του 2-μονοπλόκου και η βαρυκεντρική υποδιαίρεση της, K_3

Το δεύτερο κύριο αποτέλεσμά μας για το $d_n^B(x)$ παρέχει ένα τύπου B ανάλογο στη γεωμετρική ερμηνεία του $d_n(x)$ ως το τοπικό h -πολυώνυμο της υποδιαίρεσης $\text{sd}(2^{[n]})$. Για να το διατυπώσουμε, εισάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό. Συμβολίζουμε με K_n τη μονοπλεκτική βαρυκεντρική υποδιαίρεση της κυβικής βαρυκεντρικής υποδιαίρεσης του $(n-1)$ -διάστατου μονοπλόκου (το Σχήμα 3.1 δείχνει αυτή την υποδιαίρεση για $n=3$). Επίσης εισάγουμε τα μισά πολυώνυμα Euler

$$B_n^+(x) = \sum_{w \in B_n^+} x^{\text{des}_B(w)} \quad (3.1.10)$$

και

$$B_n^-(x) = \sum_{w \in B_n^-} x^{\text{des}_B(w)} \quad (3.1.11)$$

για την ομάδα B_n , όπου B_n^+ και B_n^- είναι τα σύνολα των προσημασμένων μεταθέσεων μήκους n με θετική και αρνητική, αντίστοιχα, τελευταία συντεταγμένη, και θέτουμε $B_0^+(x) = 1$ και $B_0^-(x) = 0$ (το σύνολο B_n^+ έχει εμφανιστεί στο πλαίσιο των πρωτευόντων δεικτών για τις κλασικές ομάδες Weyl· βλ. [14, σελ. 613]).

Θεώρημα 3.1.4. Το πολυώνυμο $f_n^+(x)$ είναι ίσο με το τοπικό h -πολυώνυμο της μονοπλεκτικής υποδιαίρεσης K_n (ειδικότερα, το $f_n^+(x)$ έχει μη αρνητικούς, συμμετρικούς και μονότροπους συντελεστές). Επιπλέον, για $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$f_n^+(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} B_k^+(x) \quad (3.1.12)$$

και

$$f_n^-(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} B_k^-(x). \quad (3.1.13)$$

Θα θέλαμε να επισημάνουμε ότι το Θεώρημα 3.1.4 και οι μέθοδοι των [6, 59] μας οδήγησαν να υποψιαστούμε ότι η Εξίσωση (3.1.2) ισχύει. Όντως, προκύπτει από τους σχετικούς ορισμούς και λίγη ακόμη προσπάθεια (βλ. Ενότητα 3.6) ότι το τοπικό h -πολυώνυμο της υποδιαίρεσης K_n είναι ίσο με το δεξί μέλος της Εξίσωσης (3.1.12). Ερευνώντας τη συμμετρία αυτού του πολυωνύμου και κάποιες αναγωγικές σχέσεις για αυτό και για το $d_n^B(x)$ (βλ. Ενότητα 3.7), μπορεί κανείς να δείξει ότι το τοπικό h -πολυώνυμο της υποδιαίρεσης K_n είναι ίσο με το $f_n^+(x)$, όπως ορίζεται από τη διάσπαση (3.1.3). Ένας τύπος που εκφράζει τη μεταβολή του τοπικού h -διανύσματος μίας

μονοπλεκτικής υποδιαίρεσης του μονοπλόκου μετά από περαιτέρω υποδιαίρεση [6, Πρόταση 3.6] (βλ. επίσης Πρόταση 3.5.3) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προκύψει η Εξίσωση (3.1.6). Αυτό συνεπάγεται ότι η Εξίσωση (3.1.7), καθώς και η Εξίσωση (3.1.2), ισχύουν επίσης.

Η δομή και τα άλλα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου έχουν ως εξής. Η Ενότητα 3.2 αποδεικνύει το Θεώρημα 3.1.1. Η Ενότητα 3.3 αποδεικνύει το Θεώρημα 3.1.2 και το Πόρισμα 3.1.3. Δίνονται μία απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2 με τη χρήση αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης, καθώς και μία που χρησιμοποιεί γεννήτριες συναρτήσεις, και υπολογίζονται οι εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις των $f_n^+(x)$ και $f_n^-(x)$. Η Ενότητα 3.4 δίνει μία συνδυαστική ερμηνεία για τους συντελεστές των πολυωνύμων αυτών. Η Ενότητα 3.5 αποδεικνύει τις κύριες ιδιότητες του σχετικού τοπικού h -διανύσματος, μίας γενίκευσης του σχεπτικού πίσω από το τοπικό h -διάνυσμα που εισήχθη στο [6, Ενότητα 3] (και, σε μία διαφορετική μορφή, στο [49]), και συμπεραίνει μία ιδιότητα μονοτονίας για τα τοπικά h -διανύσματα. Αυτά τα αποτελέσματα διατυπώθηκαν χωρίς απόδειξη στο [6]. Ως παράδειγμα (που χρησιμοποιείται σε μία από τις αποδείξεις του Θεωρήματος 3.1.4), υπολογίζεται το σχετικό τοπικό h -διάνυσμα της βαρυκεντρικής υποδιαίρεσης. Η Ενότητα 3.6 δίνει δύο αποδείξεις για το Θεώρημα 3.1.4. Ένα πρώτο βήμα για αυτές τις αποδείξεις είναι η ερμηνεία του $B_n^+(x)$ ως το h -πολυώνυμο του μονοπλεκτικού συμπλέγματος K_n (Πρόταση 3.6.1). Δεδομένης αυτής της ερμηνείας, η μία απόδειξη χρησιμοποιεί τη θεωρία των (σχετικών) τοπικών h -διανυσμάτων, όπως συζητήθηκε νωρίτερα, ενώ η άλλη χρησιμοποιεί αναγωγικές σχέσεις και γεννήτριες συναρτήσεις.

Η Ενότητα 3.7 μελετά τα πολυώνυμα $B_n^+(x)$ και $B_n^-(x)$. Αποδεικνύεται ότι ισχύει μία απλή σχέση μεταξύ των δύο (Λήμμα 3.7.1). Χρησιμοποιώντας την ερμηνεία του ως το h -πολυώνυμο του μονοπλεκτικού συμπλέγματος K_n και τη θεωρία των τοπικών h -διανυσμάτων, αποδεικνύεται ένας απλός τύπος για το $B_n^+(x)$ (και κατά συνέπεια, ένας για το $B_n^-(x)$ και ένας για το πολυώνυμο Euler $B_n(x)$) συναρτήσει του πολυωνύμου Euler $A_n(x)$ (Πρόταση 3.7.2). Χρησιμοποιώντας αυτό τον τύπο, αποδεικνύεται ότι τα πολυώνυμα $B_n^+(x)$ και $B_n^-(x)$ έχουν μόνο πραγματικές ρίζες, άρα είναι μονότροπα και λογαριθμικά κοίλα, και έτσι προκύπτει μία νέα απόδειξη της μονοτροπίας του $B_n(x)$. Δίνονται αναγωγικές σχέσεις και γεννήτριες συναρτήσεις για τα πολυώνυμα $B_n^+(x)$ και $B_n^-(x)$, όπως επίσης και για τα $f_n^+(x)$ και $f_n^-(x)$, και προκύπτει μία τρίτη απόδειξη για το Θεώρημα 3.1.4.

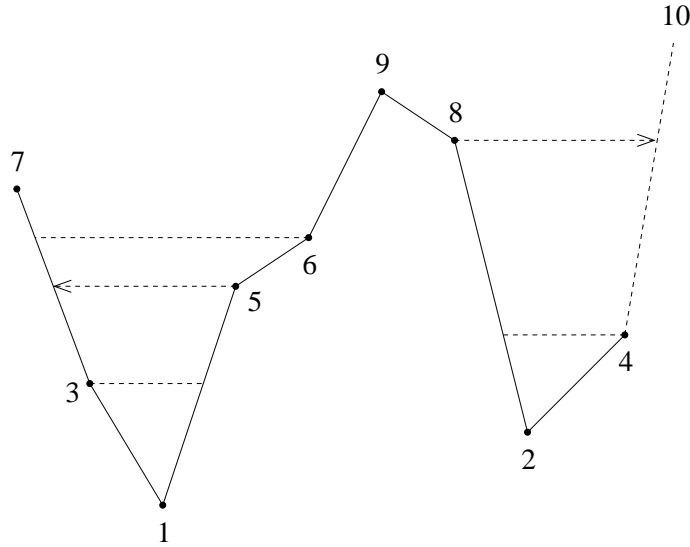
3.2 Το τοπικό γ -διάνυσμα της βαρυκεντρικής υποδιαίρεσης

Πρώτα αναφέρουμε δύο εργαλεία από τη συνδυαστική των μεταθέσεων που θα χρησιμοποιηθούν στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.1. Θα συμβολίζουμε με \mathcal{E}_n το σύνολο των μεταθέσεων της \mathfrak{S}_n για τις οποίες κάθε αριστερά προς δεξιά μέγιστο είναι κάθοδος.

Κάθοδοι και υπερβάσεις. Δεδομένης μίας μετάθεσης $w \in \mathfrak{S}_n$, μπορούμε να γράψουμε τη w σε συνήθη μορφή γινομένου κύκλων (βλ. Ενότητα 2.3). Συμβολίζουμε με $\phi(w)$ την ακολουθία (ή λέξη) που προκύπτει όταν αφαιρεθούν οι παρενθέσεις από τους κύκλους της w , θεωρούμενη ως μετάθεση στην \mathfrak{S}_n . Για παράδειγμα, αν $n = 9$ και $w = (524)(61)(8)(973)$ σε συνήθη μορφή γινομένου κύκλων, τότε $\phi(w) = (5, 2, 4, 6, 1, 8, 9, 7, 3)$ είναι η μετάθεση στην \mathfrak{S}_9 η οποία απεικονίζει το 1 στο 5, το 2 στον εαυτό του, το 3 στο 4 κ.ο.κ. Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες (θυμίζουμε ότι συμβολίζουμε με \mathcal{D}_n το σύνολο των μεταθέσεων χωρίς σταθερά σημεία στην \mathfrak{S}_n):

(α) η απεικόνιση $\phi : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$ είναι αμφιμονοσήμαντη,

(β) $\phi(\mathcal{D}_n) = \mathcal{E}_n$,



Σχήμα 3.2: Η μετάθεση $w = (7, 3, 1, 5, 6, 9, 8, 2, 4) \in \mathcal{E}_9$

(γ) για $w \in \mathfrak{S}_n$ και $1 \leq i \leq n$ έχουμε ότι ο δείκτης i είναι αντίστροφη υπέρβαση της w αν και μόνο αν ο δείκτης $(\phi(w))^{-1}(i)$ είναι κάθοδος της $\phi(w)$.

Θα συμβολίζουμε με $\hat{\phi} : \mathcal{D}_n \rightarrow \mathcal{E}_n$ την αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση που επάγεται από τη ϕ στο σύνολο \mathcal{D}_n .

Η δράση Foata-Schützenberger-Strehl. Θα χρειαστούμε την ακόλουθη παραλλαγή της δράσης Foata-Schützenberger-Strehl στις μεταθέσεις· βλ., για παράδειγμα, [36, Ενότητα V.1] [35, 37]. Για περισσότερες εφαρμογές αυτής της κατασκευής παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα [21, 51].

Έστω $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ μία μετάθεση στο σύνολο \mathcal{E}_n , όπου $w_i = w(i)$ για $1 \leq i \leq n$. Θέτουμε $w_0 = 0$ και $w_{n+1} = n + 1$. Υπενθυμίζουμε ότι μία διπλή κάθοδος (αντίστοιχα, διπλή άνοδος) της w είναι ένας δείκτης $1 \leq i \leq n$ τέτοιος ώστε $w_{i-1} < w_i < w_{i+1}$ (αντίστοιχα, $w_{i-1} > w_i > w_{i+1}$). Δεδομένης μίας διπλής ανόδου ή μίας διπλής καθόδου i της w , ορίζουμε τη μετάθεση $\psi_i(w) \in \mathfrak{S}_n$ ως εξής: Αν το i είναι διπλή άνοδος της w , τότε $\psi_i(w)$ είναι η μετάθεση που προκύπτει από τη w μετακινώντας το w_i μεταξύ των w_j και w_{j+1} , όπου j είναι ο μεγαλύτερος δείκτης που ικανοποιεί τις ανισότητες $1 \leq j < i$ και $w_j > w_i > w_{j+1}$ (παρατηρούμε ότι ένας τέτοιος δείκτης υπάρχει, εφόσον $w \in \mathcal{E}_n$ και κατά συνέπεια ο i δεν είναι αριστερά προς δεξιά μέγιστο της w). Παρόμοια, αν το i είναι διπλή κάθοδος της w , τότε $\psi_i(w)$ είναι η μετάθεση που προκύπτει από τη w μετακινώντας το w_i μεταξύ των w_j και w_{j+1} , όπου j είναι ο μικρότερος δείκτης που ικανοποιεί τις ανισότητες $i < j \leq n$ και $w_j < w_i < w_{j+1}$ (παρατηρούμε ότι ένας τέτοιος δείκτης υπάρχει, εφόσον $w_{n+1} = n + 1$). Για το παράδειγμα του Σχήματος 3.2 έχουμε $\psi_4(w) = (7, 5, 3, 1, 6, 9, 8, 2, 4)$ και $\psi_7(w) = (7, 3, 1, 5, 6, 9, 2, 4, 8)$. Αφού οι τιμές στα αριστερά προς δεξιά μέγιστα δεν αλλάζουν κατά τη μετάβαση από το w στο $\psi_i(w)$, έχουμε $\psi_i(w) \in \mathcal{E}_n$ και στις δύο περιπτώσεις.

Καλούμε δύο μεταθέσεις στο \mathcal{E}_n ισοδύναμες (υπό τη δράση Foata-Schützenberger-Strehl στο \mathcal{E}_n) αν η μία προκύπτει από την άλλη εφαρμόζοντας μία ακολουθία απεικονίσεων της μορφής ψ_i . Αφήνεται στον αναγνώστη να ελέγξει ότι αυτό ορίζει μία σχέση ισοδυναμίας στο \mathcal{E}_n και ότι κάθε κλάση ισοδυναμίας περιέχει ένα μοναδικό στοιχείο χωρίς διπλές καθόδους. Επιπλέον, αν η μετάθεση $w \in \mathcal{E}_n$ δεν έχει διπλές καθόδους και έχει k διπλές ανόδους, τότε η κλάση ισοδυναμίας $O(w)$ της w έχει 2^k στοιχεία και ακριβώς $\binom{k}{j}$ από αυτά έχουν j καθόδους παραπάνω από τη w ,

έτσι ώστε

$$\sum_{u \in O(w)} x^{\text{des}(u)} = x^{\text{des}(w)}(1+x)^k = x^{\text{des}(w)}(1+x)^{n-2\text{des}(w)}. \quad (3.2.1)$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.1. Ξεκινώντας από την (3.1.1) βρίσκουμε ότι

$$\ell_V(\text{sd}(2^V), x) = \sum_{u \in \mathcal{D}_n} x^{\text{exc}(u)} = \sum_{u \in \mathcal{D}_n} x^{i\text{exc}(u)} = \sum_{u \in \mathcal{E}_n} x^{\text{des}(u)},$$

όπου η τελευταία ισότητα χρησιμοποιεί την ιδιότητα (γ) για την απεικόνιση $\hat{\phi} : \mathcal{D}_n \rightarrow \mathcal{E}_n$. Αθροίζοντας την (3.2.1) σε όλες τις κλάσεις ισοδυναμίας της δράσης Foata-Schützenberger-Strehl στο \mathcal{E}_n παίρνουμε

$$\sum_{u \in \mathcal{E}_n} x^{\text{des}(u)} = \sum_{w \in \hat{\mathcal{E}}_n} x^{\text{des}(w)}(1+x)^{n-2\text{des}(w)},$$

όπου με $\hat{\mathcal{E}}_n$ συμβολίζουμε το σύνολο των μεταθέσεων $w \in \mathcal{E}_n$ χωρίς διπλή κάθοδο. Από τις προηγούμενες ισότητες και τη (2.1.4) συμπεραίνουμε ότι το ξ_i είναι ίσο με το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \hat{\mathcal{E}}_n$ με $\text{des}(w) = i$ και παίρνουμε την ερμηνεία (iii) του θεωρήματος. Αυτή μαζί με την ιδιότητα (γ) , εφαρμοσμένη στην απεικόνιση $\hat{\phi} : \mathcal{D}_n \rightarrow \mathcal{E}_n$, συνεπάγονται ότι το ξ_i είναι επίσης ίσο με το πλήθος των μεταθέσεων χωρίς σταθερά σημεία $w \in \mathcal{D}_n$ με i αντίστροφες υπερβάσεις και χωρίς δείκτη j που να ικανοποιεί την ανισότητα $w(j) < j < w^{-1}(j)$. Περνώντας στην αντίστροφη μετάθεση w^{-1} οδηγούμαστε στην ερμηνεία (ii) του θεωρήματος.

Τέλος, για να ελέγξουμε την ισότητα μεταξύ (i) και (ii), εργαζόμαστε με καθοδικά (αντί με ανοδικά) τμήματα. Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $\hat{\phi} : \mathcal{D}_n \rightarrow \mathcal{E}_n$ επάγει μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από το σύνολο των μεταθέσεων χωρίς σταθερά σημεία $w \in \mathcal{D}_n$ που δεν έχουν διπλή υπέρβαση στο σύνολο των μεταθέσεων στην \mathfrak{S}_n χωρίς καθοδικά τμήματα μήκους ένα. Επιπλέον, το πλήθος των υπερβάσεων τέτοιων w είναι ίσο με το πλήθος των καθοδικών τμημάτων της $\hat{\phi}(w)$ και η απόδειξη έπεται. \square

Παρατήρηση 3.2.1. Η μονοτροπία του πολυωνύμου μεταθέσεων χωρίς σταθερά σημεία αποδείχθηκε πρώτα από τον Brenti [22, Πρόρισμα 1], ο οποίος ζήτησε και μία συνδυαστική απόδειξη [22, σελ. 1140]. Μία τέτοια απόδειξη δόθηκε από τον Stembridge [63, Πρόρισμα 2.2]. Το Θεώρημα 3.1.1 παρέχει ακόμη μία συνδυαστική απόδειξη (για μία πιο ισχυρή πρόταση). Εφόσον η βαρυκεντρική υποδιαίρεση $\text{sd}(2^V)$ είναι μία κανονική υποδιαίρεση του 2^V , η μονοτροπία του πολυωνύμου μεταθέσεων χωρίς σταθερά σημεία προκύπτει επίσης από την (3.1.1) και το [59, Θεώρημα 5.2].

3.3 Απόδειξη του κύριου τύπου για το $d_n^B(x)$

Αυτή η ενότητα παρέχει δύο αποδείξεις για το Θεώρημα 3.1.2 που χρησιμοποιούν μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση και γεννήτριες συναρτήσεις, αντίστοιχα, και συμπεραίνει το Πρόρισμα 3.1.3. Ως παράπλευρο αποτέλεσμα της δεύτερης απόδειξης, υπολογίζονται οι εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις των $f_n^+(x)$ και $f_n^-(x)$.

Πρώτη απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2. Συμβολίζουμε με \mathcal{C}_n τη συλλογή των ακολουθιών $(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k)$, όπου $k \in \mathbb{N}$ και $\sigma_i \in \mathfrak{S}(S_i)$ για $0 \leq i \leq k$, οι οποίες έχουν τις εξής ιδιότητες: (α) η ακολουθία (S_0, S_1, \dots, S_k) είναι μία ασθενής διατεταγμένη διαμέριση του $[n]$ με S_i μη κενά για

$1 \leq i \leq k$ και (β) η σ_0 είναι μία μετάθεση του S_0 χωρίς σταθερά σημεία. Θα περιγράψουμε μία ένα προς ένα αντιστοιχία $\varphi : \mathcal{D}_n^B \rightarrow \mathcal{C}_n$ τέτοια ώστε

$$\text{iexc}_B(w) = \text{iexc}(\sigma_0) + \sum_{i=1}^k f(\sigma_i) + \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor \quad (3.3.1)$$

για κάθε $w \in \mathcal{D}_n^B$, όπου $(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k) = \varphi(w)$ και ο αριθμός $f(\sigma_i)$ αντιπροσωπεύει τα $\text{des}(\sigma_i)$ ή $\text{asc}(\sigma_i)$, όταν ο αριθμός i είναι άρτιος ή περιττός, αντίστοιχα. Δεδομένης αυτής της αντιστοιχίας, χρησιμοποιώντας τη (2.3.7) και υπενθυμίζοντας ότι υπάρχουν $\binom{n}{r_0, r_1, \dots, r_k}$ ασθενείς διατεταγμένες διαμερίσεις (S_0, S_1, \dots, S_k) του $[n]$ που ικανοποιούν τις ισότητες $|S_i| = r_i$ για $0 \leq i \leq k$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} d_n^B(x) &= \sum \binom{n}{r_0, r_1, \dots, r_k} x^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \sum_{\sigma_0 \in \mathcal{D}_{r_0}} x^{\text{iexc}(\sigma_0)} \left(\prod_{i=1}^k \sum_{\sigma_i \in \mathfrak{S}_{r_i}} x^{\text{des}(\sigma_i)} \right) \\ &= \sum \binom{n}{r_0, r_1, \dots, r_k} x^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} d_{r_0}(x) A_{r_1}(x) \cdots A_{r_k}(x) \end{aligned}$$

και η απόδειξη έπεται.

Για να ορίσουμε τη φ , θεωρούμε μία μετάθεση $w \in \mathcal{D}_n^B$ χωρίς σταθερά σημεία και τη συνήθη μορφή σε γινόμενο κύκλων $C_1 C_2 \cdots C_m$ της w (βλ. Ενότητα 2.3.1). Υπάρχει ένας δείκτης $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ τέτοιος ώστε όλα τα στοιχεία των κύκλων C_1, C_2, \dots, C_j να είναι θετικά και το πρώτο (μικρότερο) στοιχείο του C_{j+1} να είναι αρνητικό. Ορίζουμε ως σ_0 το γινόμενο των C_1, C_2, \dots, C_j και ως S_0 το σύνολο όλων των στοιχείων που εμφανίζονται σε αυτούς τους κύκλους, οπότε η μετάθεση $\sigma_0 \in \mathfrak{S}(S_0)$ δεν έχει σταθερά σημεία. Οι εναπομείναντες κύκλοι C_{j+1}, \dots, C_m σχηματίζουν, όταν αφαιρεθούν οι παρενθέσεις, μία λέξη u της οποίας το πρώτο στοιχείο είναι αρνητικό. Αυτή η λέξη διασπάται με μοναδικό τρόπο σε γινόμενο $u = u_1 u_2 \cdots u_k$ υπολέξεων u_i έτσι ώστε για $1 \leq i \leq k$, όλα τα στοιχεία της u_i να είναι αρνητικά αν ο δείκτης i είναι περιττός και θετικά αν ο i είναι ζυγός. Ορίζουμε ως S_i το σύνολο των απόλυτων τιμών των στοιχείων της u_i και ως $\sigma_i \in \mathfrak{S}(S_i)$ τη μετάθεση που αντιστοιχεί στη λέξη u_i . Για παράδειγμα, αν $n = 9$ και $w = (3 \ 7)(1 \ 4)(-5 \ 9 \ -2)(-8 \ -6)$ σε συνήθη μορφή γινομένου κύκλων, τότε $\sigma_0 = (1 \ 4)(3 \ 7)$ σε μορφή γινομένου κύκλων, $k = 3$ και $\sigma_1 = (5)$, $\sigma_2 = (9)$, $\sigma_3 = (2, 8, 6)$, ως ακολούθιες. Θέτουμε $\varphi(w) = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k)$ και αφήνουμε στον αναγνώστη να επιβεβαιώσει ότι η απεικόνιση $\varphi : \mathcal{D}_n^B \rightarrow \mathcal{C}_n$ είναι καλά ορισμένη και αμφιμονοσήμαντη.

Για να επιβεβαιώσουμε την (3.3.1), έστω $w \in \mathcal{D}_n^B$ με $\varphi(w) = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k)$ και $u = a_1 a_2 \cdots a_p$ η λέξη που ορίστηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Τότε, εξ ορισμού της συνήθους μορφής σε γινόμενο κύκλων και της αντίστροφης B -υπέρβασης, ο δείκτης $a \in \Omega_n$ είναι μία αντίστροφη B -υπέρβαση της w αν και μόνο αν ο a είναι μία αντίστροφη υπέρβαση της σ_0 , ή $a = a_i$ για κάποιο δείκτη $1 \leq i < p$ με $a_i > a_{i+1}$, ή $a = a_p$. Συνεπώς, η Εξίσωση (3.3.1) έπεται. \square

Για τη δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2 θέτουμε

$$\mathcal{A}(t) := \sum_{n \geq 1} A_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{e^t - e^{xt}}{e^{xt} - x e^t} \quad (3.3.2)$$

και (βλ. [22, Πρόταση 5])

$$\mathcal{D}(t) := \sum_{n \geq 0} d_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{1 - x}{e^{xt} - x e^t}, \quad (3.3.3)$$

όπου $d_0(x) = 1$. Υπενθυμίζουμε ότι (βλ. [31, Θεώρημα 3.3] [32, Θεώρημα 3.2])

$$\sum_{n \geq 0} d_n^B(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{(1-x)e^{xt}}{e^{2xt} - xe^{2t}}, \quad (3.3.4)$$

όπου $d_0^B(x) = 1$.

Δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2. Συμβολίζουμε με $S_n(x)$ (αντίστοιχα, με $S_n^+(x)$ και $S_n^-(x)$) το δεξί μέλος της (3.1.2) (αντίστοιχα, των (3.1.6) και (3.1.7)), έτσι ώστε $S_n(x) = S_n^+(x) + S_n^-(x)$ για $n \in \mathbb{N}$. Υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} S_n^+(x) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{k, r_i \geq 0} x^k d_{r_0}(x) \frac{t^{r_0}}{r_0!} A_{r_1}(x) \frac{t^{r_1}}{r_1!} \cdots A_{r_{2k}}(x) \frac{t^{r_{2k}}}{r_{2k}!} \\ &= \sum_{n \geq 0} d_n(x) \frac{t^n}{n!} \sum_{k \geq 0} x^k \left(\sum_{r \geq 1} A_r(x) \frac{t^r}{r!} \right)^{2k} \\ &= \frac{\mathcal{D}(t)}{1 - x(\mathcal{A}(t))^2} \end{aligned}$$

και παρομοίως ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} S_n^-(x) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{k, r_i \geq 0} x^{k+1} d_{r_0}(x) \frac{t^{r_0}}{r_0!} A_{r_1}(x) \frac{t^{r_1}}{r_1!} \cdots A_{r_{2k+1}}(x) \frac{t^{r_{2k+1}}}{r_{2k+1}!} \\ &= \sum_{n \geq 0} d_n(x) \frac{t^n}{n!} \sum_{k \geq 0} x^{k+1} \left(\sum_{r \geq 1} A_r(x) \frac{t^r}{r!} \right)^{2k+1} \\ &= \mathcal{D}(t) \cdot \frac{x\mathcal{A}(t)}{1 - x(\mathcal{A}(t))^2} \end{aligned}$$

και συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{n \geq 0} S_n(x) \frac{t^n}{n!} = \mathcal{D}(t) \cdot \frac{1 + x\mathcal{A}(t)}{1 - x(\mathcal{A}(t))^2}.$$

Συνδυάζοντας τις προηγούμενες εξισώσεις με τις (3.3.2) και (3.3.3) παίρνουμε, μετά από κάποιους άμεσους αλγεβρικούς υπολογισμούς, ότι

$$\sum_{n \geq 0} S_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{(1-x)e^{xt}}{e^{2xt} - xe^{2t}} = \sum_{n \geq 0} d_n^B(x) \frac{t^n}{n!}$$

και η απόδειξη έπεται. \square

Απόδειξη του Πορίσματος 3.1.3. Όπως και στη δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2, συμβολίζουμε με $S_n^+(x)$ και $S_n^-(x)$ το δεξί μέλος των (3.1.6) και (3.1.7), αντίστοιχα.

Το Θεώρημα 3.1.2 δείχνει ότι $d_n^B(x) = S_n^+(x) + S_n^-(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την ιδιότητα της συμμετρίας $A_n(x) = x^{n-1}A_n(1/x)$ και $d_n(x) = x^n d_n(1/x)$ του πολυωνύμου Euler και του πολυωνύμου μεταθέσεων χωρίς σταθερά σημεία για την \mathfrak{S}_n συμπεραίνουμε ότι τα $S_n^+(x)$ και $S_n^-(x)$ ικανοποιούν τις (3.1.4) και (3.1.5), αντίστοιχα. Από τη μοναδικότητα της ιδιότητας που

ορίζει τα $f_n^+(x)$ και $f_n^-(x)$ προκύπτει ότι $f_n^+(x) = S_n^+(x)$ και $f_n^-(x) = S_n^-(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό αποδεικνύει τις Εξισώσεις (3.1.6) και (3.1.7).

Η γ -μη αρνητικότητα των $f_n^+(x)$ και $f_n^-(x)$ προκύπτει από τις Εξισώσεις (3.1.6) και (3.1.7) και τη γ -μη αρνητικότητα των $A_n(x)$ και $d_n(x)$ (βλ. Πρόταση 3.3.1 στη συνέχεια). Η τελευταία πρόταση στο πόρισμα έπεται από τις (3.1.8) και (3.1.9). \square

Αφού τα πολυώνυμα $A_n(x)$ και $d_n(x)$ έχουν μη αρνητικούς και συμμετρικούς συντελεστές και μόνο πραγματικές ρίζες, μπορούμε να γράψουμε

$$A_n(x) = (1+x)^{n-1} \gamma_n \left(\frac{x}{(1+x)^2} \right) \quad (3.3.5)$$

και

$$d_n(x) = (1+x)^n \xi_n \left(\frac{x}{(1+x)^2} \right) \quad (3.3.6)$$

για κάποια πολυώνυμα $\gamma_n(x)$ και $\xi_n(x)$ με μη αρνητικούς συντελεστές. Για αυτούς τους συντελεστές είναι γνωστές ακριβείς συνδυαστικές ερμηνείες (βλ., για παράδειγμα, [36, Θεώρημα 5.6] και Ενότητα 3.2). Οι Εξισώσεις (3.1.6), (3.1.7), (3.3.5) και (3.3.6) συνεπάγονται συνδυαστικούς τύπους για τα πολυώνυμα $\xi_n^+(x) = \sum \xi_{n,i}^+ x^i$ και $\xi_n^-(x) = \sum \xi_{n,i}^- x^i$, με συντελεστές που εμφανίζονται στο Πόρισμα 3.1.3, τους οποίους καταγράφουμε στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.3.1. Έχουμε

$$f_n^+(x) = (1+x)^n \xi_n^+ \left(\frac{x}{(1+x)^2} \right) \quad (3.3.7)$$

και

$$f_n^-(x) = (1+x)^{n+1} \xi_n^- \left(\frac{x}{(1+x)^2} \right), \quad (3.3.8)$$

όπου

$$\xi_n^+(x) = \sum \binom{n}{r_0, r_1, \dots, r_{2k}} x^k \xi_{r_0}(x) \gamma_{r_1}(x) \cdots \gamma_{r_{2k}}(x) \quad (3.3.9)$$

και

$$\xi_n^-(x) = \sum \binom{n}{r_0, r_1, \dots, r_{2k+1}} x^{k+1} \xi_{r_0}(x) \gamma_{r_1}(x) \cdots \gamma_{r_{2k+1}}(x), \quad (3.3.10)$$

με τα αθροίσματα στις προηγούμενες εξισώσεις να κυμαίνονται στις ίδιες τιμές όπως και στις Εξισώσεις (3.1.6) και (3.1.7), αντίστοιχα, και $\xi_0(x) = 1$, $\gamma_0(x) = 0$. \square

Για τις πρώτες τιμές του n έχουμε

$$\xi_n^+(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 0 \\ 0, & \text{αν } n = 1 \\ 3x, & \text{αν } n = 2 \\ 7x, & \text{αν } n = 3 \\ 15x + 57x^2, & \text{αν } n = 4 \\ 31x + 458x^2, & \text{αν } n = 5 \\ 63x + 2551x^2 + 2763x^3, & \text{αν } n = 6 \\ 127x + 12232x^2 + 46861x^3, & \text{αν } n = 7 \end{cases}$$

και

$$\xi_n^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } n = 0 \\ x, & \text{αν } n = 1 \\ x, & \text{αν } n = 2 \\ x + 11x^2, & \text{αν } n = 3 \\ x + 54x^2, & \text{αν } n = 4 \\ x + 197x^2 + 361x^3, & \text{αν } n = 5 \\ x + 648x^2 + 4379x^3, & \text{αν } n = 6 \\ x + 2039x^2 + 34586x^3 + 24611x^4, & \text{αν } n = 7. \end{cases}$$

Δε γνωρίζουμε κάποια συνδυαστική ερμηνεία για τους συντελεστές των $\xi_n^+(x)$ και $\xi_n^-(x)$.

Από τη δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2 και την απόδειξη του Πορίσματος 3.1.3 προκύπτουν οι ακόλουθοι τύποι για τις εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις των $f_n^+(x)$ και $f_n^-(x)$.

Πρόταση 3.3.2. Έχουμε

$$\sum_{n \geq 0} f_n^+(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{e^{xt} - xe^t}{e^{2xt} - xe^{2t}} \quad (3.3.11)$$

και

$$\sum_{n \geq 0} f_n^-(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{x(e^t - e^{xt})}{e^{2xt} - xe^{2t}}. \quad (3.3.12)$$

Απόδειξη. Παρατηρήσαμε στην απόδειξη του Πορίσματος 3.1.3 ότι $f_n^+(x) = S_n^+(x)$ και $f_n^-(x) = S_n^-(x)$. Συνεπώς, η πρόταση έπεται από τους τύπους στη δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2 με άμεσους αλγεβρικούς υπολογισμούς. \square

3.4 Μία συνδυαστική ερμηνεία

Αυτή η ενότητα δίνει μία συνδυαστική ερμηνεία για τους συντελεστές των $f_n^+(x)$ και $f_n^-(x)$ επεκτείνοντας την πρώτη απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2, που δίνεται στην Ενότητα 3.3.

Θεωρούμε μία προσημασμένη μετάθεση $w \in \mathfrak{S}(S)$, όπου $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ όπως στην Ενότητα 2.3.1. Συμβολίζουμε με m_w το ελάχιστο στοιχείο του S ως προς τη φυσιολογική ολική διάταξη που επάγεται από το \mathbb{Z} και θέτουμε $B_n^* = \{w \in B_n : w(m_w) > 0\}$.

Πρόταση 3.4.1. Έχουμε

$$f_n^+(x) = \sum_{w \in \mathcal{D}_n^B \cap B_n^*} x^{\text{exc}_B(w)} \quad (3.4.1)$$

και

$$f_n^-(x) = \sum_{w \in \mathcal{D}_n^B \setminus B_n^*} x^{\text{exc}_B(w)} \quad (3.4.2)$$

για κάθε $n \geq 1$.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε την ιδέα της πρώτης απόδειξης του Θεωρήματος 3.1.2. Δοσμένης μίας $w \in \mathcal{D}_n^B$ με $\varphi(w) = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k)$, παρατηρούμε ότι ο αριθμός k είναι άρτιος αν και μόνο αν το τελευταίο στοιχείο στη συνήθη μορφή σε γινόμενο κύκλων της w είναι θετικό. Επομένως, η Εξίσωση (3.1.6) και το επιχειρήμα της απόδειξης του Θεωρήματος 3.1.2 δείχνουν ότι

$$f_n^+(x) = \sum x^{\text{exc}_B(w)},$$

όπου το άθροισμα κυμαίνεται πάνω σε όλα τα $w \in \mathcal{D}_n^B$ για τα οποία το τελευταίο στοιχείο στη συνήθη μορφή σε γινόμενο κύκλων είναι θετικό. Αφού το στοιχείο αυτό ισούται με $w^{-1}(m_w)$, παίρνουμε

$$f_n^+(x) = \sum_{w \in \mathcal{D}_n^B: w^{-1}(m_w) > 0} x^{\text{iexc}_B(w)} = \sum_{w \in \mathcal{D}_n^B: w(m_w) > 0} x^{\text{iexc}_B(w^{-1})} = \sum_{w \in \mathcal{D}_n^B \cap B_n^*} x^{\text{exc}_B(w)}.$$

Η Εξίσωση (3.4.2) έπεται από τις (3.4.1) και (2.3.6), ή με τη χρήση παρόμοιου επιχειρήματος. \square

3.5 Το σχετικό τοπικό h -διάλυμα

Αυτή η ενότητα ανακαλεί τον ορισμό του σχετικού τοπικού h -πολυωνύμου μίας μονοπλεκτικής υποδιαίρεσης, που εισήχθη στην [6, Ενότητα 3] και, ανεξάρτητα (σε ένα πιο γενικό πλαίσιο), στο [49], και εξασφαλίζει μερικές από τις κύριες ιδιότητές του (οι περισσότερες από αυτές διατυπώθηκαν χωρίς απόδειξη στην [6, Ενότητα 3]). Επίσης, εδώ υπολογίζεται το σχετικό τοπικό h -πολυώνυμο της βαρυκεντρικής υποδιαίρεσης του μονοπλόκου (Παράδειγμα 3.5.2). Αυτός ο υπολογισμός θα χρησιμοποιηθεί στην Ενότητα 3.6. Σε αυτή την ενότητα θα σταθεροποιήσουμε ένα σώμα \mathbf{k} και θα εργαστούμε με την έννοια της ομολογικής (αντί της τοπολογικής) μονοπλεκτικής υποδιαίρεσης υπεράνω του \mathbf{k} .

Ορισμός 3.5.1. ([6, Ενότητα 3]) Έστω Γ μία ομολογική υποδιαίρεση ενός $(n-1)$ -διάστατου μονοπλόκου 2^V , με απεικόνιση υποδιαίρεσης $\sigma: \Gamma \rightarrow 2^V$, και έστω $E \in \Gamma$. Το πολυώνυμο

$$\ell_V(\Gamma, E, x) = \sum_{\sigma(E) \subseteq F \subseteq V} (-1)^{n-|F|} h(\text{link}_{\Gamma_F}(E), x) \quad (3.5.1)$$

είναι το *σχετικό τοπικό h -πολυώνυμο* της Γ (ως προς το V) στην πλευρά E .

Παρατηρούμε ότι το $\ell_V(\Gamma, E, x)$ ανάγεται στο τοπικό h -πολυώνυμο $\ell_V(\Gamma, x)$ για $E = \emptyset$.

Παράδειγμα 3.5.2. Έστω $\Gamma = \text{sd}(2^V)$ η βαρυκεντρική υποδιαίρεση ενός $(n-1)$ -διάστατου μονοπλόκου 2^V και $E = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ μία πλευρά της Γ , όπου $S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_k \subseteq V$ είναι μη κενά σύνολα. Θα δείξουμε ότι

$$\ell_V(\Gamma, E, x) = d_{r_0}(x) A_{r_1}(x) A_{r_2}(x) \cdots A_{r_k}(x), \quad (3.5.2)$$

όπου $r_0 = |V \setminus S_k|$ και $r_i = |S_i \setminus S_{i-1}|$ για $1 \leq i \leq k$ (με τη σύμβαση $S_0 = \emptyset$).

Υπενθυμίζουμε από την Ενότητα 2.1.3 ότι ο φορέας της E στη Γ δίνεται από την απεικόνιση $\sigma(E) = S_k$. Κατά συνέπεια το δεξί μέλος της (3.5.1) είναι ένα άθροισμα πάνω σε όλα τα $S_k \subseteq F \subseteq V$. Ο περιορισμός Γ_F είναι η βαρυκεντρική υποδιαίρεση του μονοπλόκου 2^F και το link της E σε αυτό τον περιορισμό ικανοποιεί $\text{link}_{\Gamma_F}(E) = \Delta_0 * \Delta_1 * \dots * \Delta_k$, όπου Δ_i είναι το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα όλων των αλυσίδων υποσυνόλων του V που περιέχουν γνησίως το S_{i-1} και περιέχονται γνησίως στο S_i , για $1 \leq i \leq k$, και Δ_0 είναι το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα όλων των αλυσίδων υποσυνόλων του V που περιέχουν γνησίως το S_k και περιέχονται γνησίως στην F . Ως αποτέλεσμα αυτού, έχουμε

$$\begin{aligned} h(\text{link}_{\Gamma_F}(E), x) &= h(\Delta_0, x) h(\Delta_1, x) \cdots h(\Delta_k, x) \\ &= A_{|F \setminus S_k|}(x) A_{r_1}(x) A_{r_2}(x) \cdots A_{r_k}(x). \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτή την εξίσωση με $(-1)^{d-|F|}$, αθροίζοντας πάνω σε όλα τα $S_k \subseteq F \subseteq V$ και χρησιμοποιώντας τη (2.3.3) παίρνουμε την (3.5.2). \square

Το κίνητρό μας για την εισαγωγή του σχετικού τοπικού h -πολυωνύμου προέρχεται από την ακόλουθη πρόταση (για ένα άλλο κίνητρο, βλ. [49, Ενότητα 3]).

Πρόταση 3.5.3. ([6, Πρόταση 3.6]) Για κάθε ομολογική υποδιαίρεση Γ του μονοπλόκου 2^V και κάθε ομολογική υποδιαίρεση Γ' της Γ έχουμε

$$\ell_V(\Gamma', x) = \sum_{E \in \Gamma} \ell_E(\Gamma'_E, x) \ell_V(\Gamma, E, x). \quad (3.5.3)$$

Στη συνέχεια, επιβεβαιώνουμε ότι το πολυώνυμο $\ell_V(\Gamma, E, x)$ ικανοποιεί δύο από τις κυριότερες ιδιότητες του $\ell_V(\Gamma, x)$ και συμπεραίνουμε μία ιδιότητα μονοτονίας για τα τοπικά h -διανύσματα. Αυτά τα αποτελέσματα διατυπώθηκαν χωρίς απόδειξη στην [6, Παρατήρηση 3.7].

Θεώρημα 3.5.4. Έστω V ένα σύνολο με n στοιχεία.

(α) Το σχετικό τοπικό h -πολυώνυμο $\ell_V(\Gamma, E, x)$ έχει συμμετρικούς συντελεστές, δηλαδή ισχύει

$$x^{n-|E|} \ell_V(\Gamma, E, 1/x) = \ell_V(\Gamma, E, x), \quad (3.5.4)$$

για κάθε ομολογική υποδιαίρεση Γ του μονοπλόκου 2^V και κάθε $E \in \Gamma$.

(β) Το σχετικό τοπικό h -πολυώνυμο $\ell_V(\Gamma, E, x)$ έχει μη αρνητικούς συντελεστές για κάθε ημιγεωμετρική ομολογική υποδιαίρεση Γ του μονοπλόκου 2^V και κάθε $E \in \Gamma$.

Απόδειξη. (α) Ακολουθούμε τα βήματα της απόδειξης του [4, Θεώρημα 4.2]. Χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (3.5.1) και την [4, Πρόταση 2.1], βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} x^{n-|E|} \ell_V(\Gamma, E, 1/x) &= \sum_{\sigma(E) \subseteq F \subseteq V} (-1)^{n-|F|} x^{n-|E|} h(\text{link}_{\Gamma_F}(E), 1/x) \\ &= \sum_{\sigma(E) \subseteq F \subseteq V} (-x)^{n-|F|} h(\text{int}(\text{link}_{\Gamma_F}(E)), x). \end{aligned}$$

Ισχυριζόμαστε ότι

$$h(\text{int}(\text{link}_{\Gamma_F}(E)), x) = \sum_{\sigma(E) \subseteq G \subseteq F} (x-1)^{|F|-|G|} h(\text{link}_{\Gamma_G}(E), x),$$

για κάθε $E \in \Gamma$. Δεδομένης αυτής της εξίσωσης, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} x^{n-|E|} \ell_V(\Gamma, E, 1/x) &= \sum_{\sigma(E) \subseteq G \subseteq F \subseteq V} (-x)^{n-|F|} (x-1)^{|F|-|G|} h(\text{link}_{\Gamma_G}(E), x) \\ &= \sum_{\sigma(E) \subseteq G \subseteq V} (-x)^{n-|G|} h(\text{link}_{\Gamma_G}(E), x) \sum_{G \subseteq F \subseteq V} \left(\frac{1-x}{x} \right)^{|F|-|G|} \\ &= \sum_{\sigma(E) \subseteq G \subseteq V} (-x)^{n-|G|} h(\text{link}_{\Gamma_G}(E), x) (1/x)^{n-|G|} \\ &= \ell_V(\Gamma, E, x). \end{aligned}$$

Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό, παρατηρούμε ότι το σύμπλεγμα $\text{link}_{\Gamma_G}(E)$ διασπάται στην ένωση των εσωτερικών των $\text{link}_{\Gamma_F}(E)$ για $\sigma(E) \subseteq F \subseteq G$. Αφού

$$(1-x)^{-|G|} h(\text{link}_{\Gamma_G}(E), x) = \sum_{A \in \text{link}_{\Gamma_G}(E)} \left(\frac{x}{1-x} \right)^{|A|}$$

και

$$(1-x)^{-|F|} h(\text{int}(\text{link}_{\Gamma_F}(E)), x) = \sum_{A \in \text{int}(\text{link}_{\Gamma_F}(E))} \left(\frac{x}{1-x} \right)^{|A|},$$

συμπεραίνουμε ότι

$$(1-x)^{-|G|} h(\text{link}_{\Gamma_G}, x) = \sum_{\sigma(E) \subseteq F \subseteq G} (1-x)^{-|F|} h(\text{int}(\text{link}_{\Gamma_F}(E)), x)$$

για κάθε $\sigma(E) \subseteq F \subseteq G$. Ο ισχυρισμός προκύπτει εφαρμόζοντας αντιστροφή Möbius [62, Πρόταση 3.7.1].

(β) Η ειδική περίπτωση $E = \emptyset$ είναι ισοδύναμη με το μέρος (iii) του [6, Θεώρημα 3.3] (ουσιαστικά, με το μέρος (δ) του Θεωρήματος 2.1.4). Η γενική περίπτωση έπεται από το επιχείρημα στην απόδειξη του [4, Θεώρημα 5.1] (που γενικεύει αυτό της απόδειξης του [59, Θεώρημα 4.6]), όπου σε αυτή την απόδειξη αντικαθιστούμε το Δ με το $\text{link}_{\Gamma}(E)$, τον αριθμό d με τον $n - |E| = \dim \text{link}_{\Gamma}(E) + 1$ και το e με την τάξη $n - |\sigma(E)|$ του διαστήματος $[\sigma(E), V]$ στο σύνδεσμο των υποσυνόλων του V . \square

Για τα πολυώνυμα $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ γράφουμε $p(x) \geq q(x)$ αν η διαφορά τους $p(x) - q(x)$ έχει μη αρνητικούς συντελεστές.

Πόρισμα 3.5.5. Για κάθε ημιγεωμετρική ομολογική υποδιαίρεση Γ του μονοπλόκου 2^V και κάθε ημιγεωμετρική ομολογική υποδιαίρεση Γ' της Γ , έχουμε $\ell_V(\Gamma', x) \geq \ell_V(\Gamma, x)$.

Απόδειξη. Το δεξί μέλος της (3.5.3) ανάγεται στο $\ell_V(\Gamma, x)$ για $E = \emptyset$. Οι υπόλοιποι όροι στο άθροισμα είναι μη αρνητικοί από τα Θεωρήματα 2.1.4 (δ) και 3.5.4 (β) και η απόδειξη έπεται. \square

3.6 Μία γεωμετρική ερμηνεία

Αυτή η ενότητα ορίζει τυπικά τη μονοπλεκτική υποδιαίρεση K_n και δίνει δύο αποδείξεις για το Θεώρημα 3.1.4, η μία από τις οποίες χρησιμοποιεί τη θεωρία των (σχετικών) τοπικών h -διανυσμάτων (συγκεκριμένα, την Πρόταση 3.5.3) και η άλλη χρησιμοποιεί γεννήτριες συναρτήσεις.

Έστω Δ ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα. Η κυβική βαρυκεντρική υποδιαίρεση του Δ , που συμβολίζεται με $sd_c(\Delta)$, ορίζεται ως το σύνολο όλων των μη κενών κλειστών διαστημάτων $[F, G]$ στο μερικώς διατεταγμένο σύνολο πλευρών $\mathcal{F}(\Delta)$, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση του εγκλεισμού. Είναι επακόλουθο των [65, Θεώρημα 6.1 (a)] και [62, Εξίσωση (3.24)] ότι το διατακτικό σύμπλεγμα, έστω Δ' , της $sd_c(\Delta)$ είναι ομοιομορφικό με το Δ . Επιπλέον, το Δ' είναι με φυσιολογικό τρόπο μία μονοπλεκτική υποδιαίρεση του Δ : ο φορέας μίας πλευράς του Δ' είναι το μέγιστο στοιχείο του μεγαλύτερου από τα διαστήματα της αντίστοιχης αλυσίδας διαστημάτων του $\mathcal{F}(\Delta)$. Θα συμβολίζουμε με K_n το διατακτικό σύμπλεγμα της $sd_c(2^{[n]})$, οπότε το σύμπλεγμα K_n είναι μία μονοπλεκτική υποδιαίρεση του μονοπλόκου $2^{[n]}$ (βλ. Σχήμα 3.1 για την περίπτωση $n = 3$). Επισημαίνουμε ότι η υποδιαίρεση K_n είναι η ειδική περίπτωση $N = 1$ μίας υποδιαίρεσης του μονοπλόκου που εμφανίστηκε στο [30, σελ. 414].

Η ακόλουθη πρόταση είναι ένα βασικό βήμα και για τις δύο αποδείξεις του Θεωρήματος 3.1.4 που δίνονται σε αυτή την ενότητα.

Πρόταση 3.6.1. Έχουμε $h(K_n, x) = B_n^+(x)$ για $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $sd_c(2^{[n]})$ αποτελείται από όλα τα διαστήματα της μορφής $[A, B]$, όπου $\emptyset \neq A \subseteq B \subseteq [n]$, μερικώς διατεταγμένα με τη σχέση του εγκλεισμού. Για

να δώσουμε μία διαφορετική περιγραφή αυτού του μερικώς διατεταγμένου συνόλου, θεωρούμε το ακόλουθο μερικώς διατεταγμένο σύνολο (P_n, \preceq) . Τα στοιχεία του P_n είναι τα υποσύνολα του Ω_n τα οποία περιέχουν τουλάχιστον ένα θετικό αριθμό και το πολύ ένα αριθμό από κάθε σύνολο $\{i, -i\}$ για $i \in \{1, 2, \dots, n\}$: η μερική διάταξη είναι αντίστροφος εγκλεισμός. Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $\varphi : \text{sd}_c(2^{[n]}) \rightarrow P_n$ που ορίζεται θέτοντας $\varphi([A, B]) = A \cup (-([n] \setminus B))$, είναι ισομορφισμός μερικώς διατεταγμένων συνόλων. Συνεπώς, μπορούμε να ταυτίσουμε το σύμπλεγμα K_n με το διατακτικό σύμπλεγμα του P_n .

Για $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\} \subseteq \{0, 1, \dots, n-1\}$ με $s_1 < s_2 < \dots < s_k$, ορίζουμε $\alpha_{P_n}(S)$ να είναι το πλήθος των αλυσίδων $F_1 \prec F_2 \prec \dots \prec F_k$ στο P_n τέτοιες ώστε $|F_i| = n - s_i$ για $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Η απεικόνιση $\alpha_{P_n} : 2^{[n]} \rightarrow \mathbb{N}$ είναι το flag f -διάγραμμα του P_n : βλ. [62, Ενότητα 3.13]. Οι αλυσίδες του P_n που απαριθμούνται από τον αριθμό $\alpha_{P_n}(S)$ είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τα στοιχεία $w \in B_n^+$ για τα οποία $\text{Des}_B(w) \subseteq S$. Πράγματι, δεδομένης μίας τέτοιας αλυσίδας, το αντίστοιχο στοιχείο του συνόλου B_n^+ αποτελείται από τα στοιχεία του $[n] \setminus \{|s| : s \in F_1\}$ σε αύξουσα σειρά, ακολουθούμενα από αυτά του $F_1 \setminus F_2$ σε αύξουσα σειρά και ούτω καθεξής, ακολουθούμενα τελικά από τα στοιχεία του F_k σε αύξουσα σειρά.

Υπενθυμίζουμε ότι το flag h -διάγραμμα $\beta_{P_n} : 2^{[n]} \rightarrow \mathbb{Z}$ του P_n ορίζεται ως

$$\beta_{P_n}(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S \setminus T|} \alpha_{P_n}(T),$$

για $S \subseteq [n]$, ή ισοδύναμα, ως

$$\alpha_{P_n}(S) = \sum_{T \subseteq S} \beta_{P_n}(T)$$

για $S \subseteq [n]$. Αφού ο αριθμός $\alpha_{P_n}(S)$ απαριθμεί τις προσημασμένες μεταθέσεις $w \in B_n^+$ για τις οποίες $\text{Des}_B(w) \subseteq S$, εφαρμόζοντας την αρχή του εγκλεισμού - αποκλεισμού προκύπτει ότι ο αριθμός $\beta_{P_n}(S)$ απαριθμεί τις προσημασμένες μεταθέσεις $w \in B_n^+$ για τις οποίες $\text{Des}_B(w) = S$. Το αποτέλεσμα έπεται από αυτή την ερμηνεία ανακαλώντας [62, Ενότητα 3.13] ότι

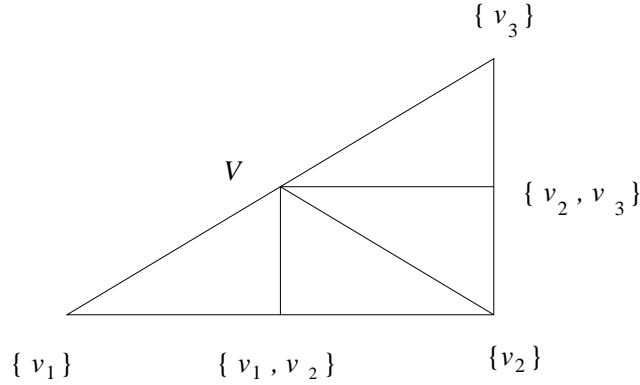
$$h_k(K_n) = \sum_{S \subseteq [n], |S|=k} \beta_{P_n}(S).$$

□

Η πρώτη απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.4 βασίζεται στο γεγονός ότι το σύμπλεγμα K_n μπορεί να θεωρηθεί ως υποδιαίρεση της βαρυκεντρικής υποδιαίρεσης $\text{sd}(2^{[n]})$. Για να εξηγήσουμε τον τρόπο με τον οποίο επιτυγχάνεται αυτό, θεωρούμε το ακόλουθο πλαίσιο. Έστω $V = \{v_1, v_2, \dots, v_d\}$ ένα σύνολο, ολικώς διατεταγμένο ως $v_1 < v_2 < \dots < v_d$. Υπενθυμίζουμε ότι με $\text{sd}_c(V)$ συμβολίζουμε το μερικώς διατεταγμένο σύνολο των διαστημάτων του V της μορφής $[v_i, v_j] = \{v_i, v_{i+1}, \dots, v_j\}$ για $1 \leq i \leq j \leq d$, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση του εγκλεισμού. Συμβολίζουμε με Γ το διατακτικό σύμπλεγμα του $\text{sd}_c(V)$, που αποτελείται από όλες τις αλυσίδες τέτοιων διαστημάτων. Για μία τέτοια αλυσίδα $G \in \Gamma$, ορίζουμε $\sigma(G)$ να είναι το σύνολο όλων των άνω φραγμάτων των διαστημάτων στην G . Έτσι έχουμε μία καλά ορισμένη απεικόνιση $\sigma : \Gamma \rightarrow 2^V$.

Λήμμα 3.6.2. *Υπό τις προηγούμενες υποθέσεις και τους προηγούμενους συμβολισμούς, η απεικόνιση $\sigma : \Gamma \rightarrow 2^V$ προσδίδει στο Γ την ιδιότητα της γεωμετρικής υποδιαίρεσης του 2^V . Το πλήθος των εδρών του Γ είναι ίσο με 2^{d-1} , όπου d είναι το πλήθος των στοιχείων του V .*

Απόδειξη. Έστω Σ_V ένα γεωμετρικό $(d-1)$ -διάστατο μονόπλοκο οι κορυφές του οποίου είναι επιγεγραμμένες με τα υποσύνολα του $V = \{v_1, v_2, \dots, v_d\}$ που περιέχουν μόνο ένα στοιχείο. Θα κατασκευάσουμε μία γεωμετρική μονοπλεκτική υποδιαίρεση (τριγωνισμός) Γ_V του Σ_V της οποίας

Σχήμα 3.3: Η υποδιαίρεση Γ για $d = 3$

οι κορυφές θα είναι επιγεγραμμένες (με μία ένα προς ένα αντιστοιχία) με τα κλειστά διαστήματα της ολικής διάταξης V , έτσι ώστε: (α) τα διαστήματα που περιέχουν ένα στοιχείο να επιγράφουν τις κορυφές του Σ_V , (β) το σημείο με επιγραφή ένα διάστημα $I = [v_i, v_j] \in \text{sd}_c(V)$ που περιέχει περισσότερα από ένα στοιχεία να βρίσκεται στο σχετικό εσωτερικό της ακμής του Σ_V της οποίας τα άκρα έχουν επιγραφή $\{v_i\}$ και $\{v_j\}$ και (γ) οι πλευρές της Γ_V να αντιστοιχούν σε αλυσίδες διαστημάτων (βλ. Σχήμα 3.3 για την περίπτωση $d = 3$).

Εφαρμόζουμε επαγωγή στο d . Ο τριγωνισμός Γ_V είναι ένα μοναδικό σημείο για $d = 1$ και ο τριγωνισμός ενός ευθύγραμμου τμήματος με ένα εσωτερικό σημείο (με επιγραφή $\{v_1, v_2\}$) για $d = 2$. Υποθέτουμε ότι $d \geq 3$ και θέτουμε $U = V \setminus \{v_d\}$ και $W = V \setminus \{v_1\}$. Επιλέγουμε τα μονόπλοκα Σ_U και Σ_W ως τις πλευρές του Σ_V συνδιάστασης ένα οι οποίες αντιστοιχούν στα U και V και, χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, τους τριγωνισμούς Γ_U και Γ_W αυτών των δύο μονοπλόκων που έχουν τις ιδιότητες (α), (β) και (γ) ως προς τα ολικά διατεταγμένα υποσύνολα U και W του V , αντίστοιχα. Προφανώς, μπορούμε να επιλέξουμε αυτούς τους τριγωνισμούς να έχουν τον ίδιο περιορισμό στην πλευρά $\Sigma_U \cap \Sigma_W$ του Σ_V . Στη συνέχεια επιγράφουμε με V ένα τυχαίο σημείο p στο σχετικό εσωτερικό της ακμής του Σ_V με άκρα που έχουν τις επιγραφές $\{v_1\}$ και $\{v_d\}$ και ορίζουμε Γ_V να είναι η συλλογή που αποτελείται από όλα τα μονόπλοκα στο $\Gamma_U \cup \Gamma_W$ και τους κώνους αυτών με κορυφή p . Αφήνουμε στον αναγνώστη να επιβεβαιώσει ότι ο τριγωνισμός Γ_V έχει τις ιδιότητες (α), (β) και (γ) και ότι υλοποιεί μία αφηρημένη μονοπλεκτική υποδιαίρεση του 2^V με τις απαιτούμενες ιδιότητες. \square

Υπενθυμίζουμε ότι η υποδιαίρεση K_n αποτελείται από όλες τις αλυσίδες διαστημάτων της μορφής $[A, B]$, όπου $\emptyset \neq A \subseteq B \subseteq [n]$. Ορίζουμε ως φορέα μίας τέτοιας αλυσίδας \mathcal{C} το σύνολο των άκρων των διαστημάτων της \mathcal{C} και παρατηρούμε ότι αυτό το σύνολο είναι μία αλυσίδα στο μερικώς διατεταγμένο σύνολο $\mathcal{F}(2^{[n]})$ των μη κενών υποσυνόλων του $[n]$ και κατά συνέπεια ανήκει στη βαρυκεντρική υποδιαίρεση $\text{sd}(2^{[n]})$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.6.2 στις αλυσίδες $V \in \text{sd}(2^{[n]})$ συμπεραίνουμε ότι η K_n είναι μία υποδιαίρεση της $\text{sd}(2^{[n]})$ και ότι ο περιορισμός αυτής της υποδιαίρεσης σε μία μη κενή πλευρά $V \in \text{sd}(2^{[n]})$ διάστασης $d - 1$ έχει ακριβώς 2^{d-1} έδρες.

Λήμμα 3.6.3. Έστω Γ μία ημιγεωμετρική μονοπλεκτική υποδιαίρεση του $(d - 1)$ -διάστατου μονοπλόκου 2^V . Αν ο περιορισμός Γ_F έχει ακριβώς $2^{\dim(F)}$ έδρες για κάθε μη κενή πλευρά F του 2^V , τότε

$$\ell_V(\Gamma, x) = \begin{cases} x^{d/2}, & \text{αν } d \text{ είναι άρτιος} \\ 0, & \text{αν } d \text{ είναι περιττός.} \end{cases}$$

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι το πλήθος των εδρών του μονοπλεκτικού συμπλέγματος Δ είναι ίσο με την τιμή του h -πολυωνύμου $h(\Delta, x)$ για $x = 1$. Συνεπώς, θέτοντας $x = 1$ στην Εξίσωση (2.1.2) και χρησιμοποιώντας την υπόθεση για την υποδιαίρεση Γ , βρίσκουμε ότι

$$\ell_V(\Gamma, 1) = (-1)^d + \sum_{k=1}^d (-1)^{d-k} \binom{d}{k} 2^{k-1} = \begin{cases} 1, & \text{αν ο } d \text{ είναι άρτιος} \\ 0, & \text{αν ο } d \text{ είναι περιττός.} \end{cases}$$

Το αποτέλεσμα έπεται από τα μέρη (γ) και (δ) του Θεωρήματος 2.1.4. \square

Πρώτη απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.4. Συμβολίζουμε με $\ell_n^+(x)$ το τοπικό h -πολυώνυμο της υποδιαίρεσης K_n . Για να υπολογίσουμε αυτό το πολυώνυμο, θα εφαρμόσουμε την Πρόταση 3.5.3 για $\Gamma' = K_n$ και $\Gamma = \text{sd}(2^{[n]})$. Έστω $E = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ μία πλευρά του Γ με k στοιχεία, όπου $S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_k \subseteq [n]$ είναι μη κενά σύνολα. Έχουμε ήδη επισημάνει ότι ο περιορισμός Γ'_E ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος 3.6.3. Κατά συνέπεια, από το Λήμμα 3.6.3 έχουμε

$$\ell_E(\Gamma'_E, x) = \begin{cases} x^{k/2}, & \text{αν ο } k \text{ είναι άρτιος} \\ 0, & \text{αν ο } k \text{ είναι περιττός.} \end{cases} \quad (3.6.1)$$

Το σχετικό τοπικό h -διάνυσμα του Γ υπολογίστηκε στο Παράδειγμα 3.5.2. Συνεπώς, υπό το πρίσμα των (3.6.1) και (3.5.2), η Πρόταση 3.5.3 δείχνει ότι

$$\ell_n^+(x) = \sum \binom{n}{r_0, r_1, \dots, r_k} x^{k/2} d_{r_0}(x) A_{r_1}(x) \cdots A_{r_k}(x),$$

όπου το άθροισμα κυμαίνεται σε όλους τους άρτιους $k \in \mathbb{N}$ και σε όλες τις ακολουθίες (r_0, r_1, \dots, r_k) μη αρνητικών ακεραίων που αθροίζουν στο n . Από αυτή την εξίσωση και την (3.1.6) προκύπτει ότι $\ell_n^+(x) = f_n^+(x)$ και η πρώτη πρόταση του Θεωρήματος 3.1.4 έπεται.

Αφήνουμε στον αναγνώστη να επιβεβαιώσει ότι η υποδιαίρεση K_n μπορεί να προκύψει από την τετριμμένη υποδιαίρεση του μονοπλόκου μέσω διαδοχικών αστρικών υποδιαιρέσεων. Αυτό συνεπάγεται ότι η K_n είναι μία κανονική υποδιαίρεση. Ο ισχυρισμός ότι το πολυώνυμο $f_n^+(x)$ έχει μη αρνητικούς, συμμετρικούς και μονότροπους συντελεστές έπεται από τις κύριες ιδιότητες των τοπικών h -πολυωνύμων [59] (βλ. Θεώρημα 2.1.4). Η Εξίσωση (3.1.12) είναι επακόλουθο του ότι $f_n^+(x) = \ell_n^+(x)$, της Εξίσωσης (2.1.2) που ορίζει τα τοπικά h -πολυώνυμα και της Πρότασης 3.6.1. Δεδομένου ότι $d_n^B(x) = f_n^+(x) + f_n^-(x)$ και $B_n(x) = B_n^+(x) + B_n^-(x)$ για κάθε n , η Εξίσωση (3.1.13) είναι συνέπεια των (2.3.8) και (3.1.12). \square

Για τη δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.4 θα χρειαστούμε τις εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις των $B_n^+(x)$ και $B_n^-(x)$, οι οποίες θα υπολογιστούν στην Ενότητα 3.7.

Δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.4. Συμβολίζουμε με $\ell_n^+(x)$ και $\ell_n^-(x)$ το δεξί μέλος των (3.1.12) και (3.1.13), αντίστοιχα. Από την Πρόταση 3.6.1 και τη (2.1.2) προκύπτει ότι το $\ell_n^+(x)$ είναι ίσο με το τοπικό h -πολυώνυμο της K_n . Κατά συνέπεια, αρκεί να δείξουμε ότι $\ell_n^+(x) = f_n^+(x)$ και $\ell_n^-(x) = f_n^-(x)$ για κάθε n . Από τον ορισμό των $\ell_n^+(x)$ και $\ell_n^-(x)$ και την Πρόταση 3.7.7 παίρνουμε

$$\sum_{n \geq 0} \ell_n^+(x) \frac{t^n}{n!} = e^{-t} \sum_{n \geq 0} B_n^+(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{e^{xt} - e^{xt}}{e^{2xt} - xe^{2t}}$$

και

$$\sum_{n \geq 0} \ell_n^-(x) \frac{t^n}{n!} = e^{-t} \sum_{n \geq 0} B_n^-(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{x(e^t - e^{xt})}{e^{2xt} - xe^{2t}}.$$

Το αποτέλεσμα έπεται από αυτές τις εξισώσεις και την Πρόταση 3.3.2. \square

3.7 Μία διάσπαση του πολυωνύμου Euler τύπου B

Αυτή η ενότητα μελετά τη διάσπαση του πολυωνύμου Euler $B_n(x)$ σε άθροισμα των $B_n^+(x)$ και $B_n^-(x)$. Πρώτα, παρατηρούμε ότι υπάρχει μία απλή σχέση μεταξύ των δύο προσθετέων. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τη θεωρία των τοπικών h -διανυσμάτων και τα αποτελέσματα της Ενότητας 3.6, αποδεικνύεται μία σχέση μεταξύ του $B_n^+(x)$ και του πολυωνύμου Euler $A_n(x)$ (Πρόταση 3.7.2). Από αυτή τη σχέση, συνάγεται ότι τα $B_n^+(x)$ και $B_n^-(x)$ έχουν μόνο πραγματικές ρίζες (Πόρισμα 3.7.5), άρα ότι είναι μονότροπα και λογαριθμικά κοίλα, και προκύπτει μία νέα απόδειξη της μονοτροπίας του $B_n(x)$. Τέλος, δίνονται επαγωγικές σχέσεις και γεννήτριες συναρτήσεις για τα πολυώνυμα $B_n^+(x)$ και $B_n^-(x)$. Αυτές μας οδηγούν σε επαγωγικές σχέσεις και γεννήτριες συναρτήσεις για τα πολυώνυμα $f_n^+(x)$ και $f_n^-(x)$ και σε μία ακόμη απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.4.

Υπενθυμίζουμε ότι τα $B_n^+(x)$ και $B_n^-(x)$ ορίζονται από τις (3.1.10) και (3.1.11). Για τις πρώτες τιμές του n έχουμε

$$B_n^+(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 0 \\ 1, & \text{αν } n = 1 \\ 1 + 3x, & \text{αν } n = 2 \\ 1 + 16x + 7x^2, & \text{αν } n = 3 \\ 1 + 61x + 115x^2 + 15x^3, & \text{αν } n = 4 \\ 1 + 206x + 1056x^2 + 626x^3 + 31x^4, & \text{αν } n = 5 \\ 1 + 659x + 7554x^2 + 11774x^3 + 2989x^4 + 63x^5, & \text{αν } n = 6 \end{cases}$$

και

$$B_n^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } n = 0 \\ x, & \text{αν } n = 1 \\ 3x + x^2, & \text{αν } n = 2 \\ 7x + 16x^2 + x^3, & \text{αν } n = 3 \\ 15x + 115x^2 + 61x^3 + x^4, & \text{αν } n = 4 \\ 31x + 626x^2 + 1056x^3 + 206x^4 + x^5, & \text{αν } n = 5 \\ 63x + 2989x^2 + 11774x^3 + 7554x^4 + 659x^5 + x^6, & \text{αν } n = 6. \end{cases}$$

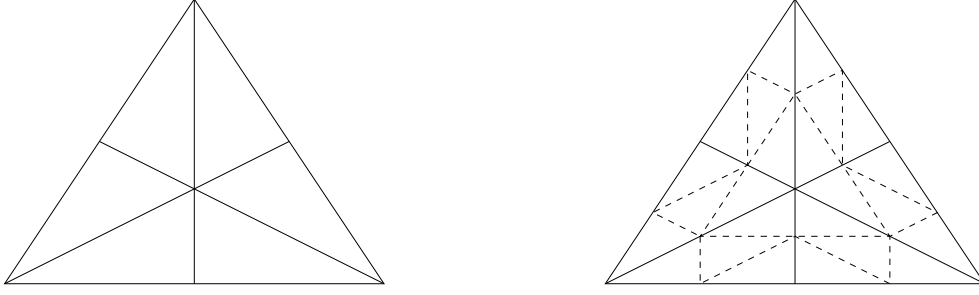
Με αυτά τα δεδομένα, προκύπτει φυσιολογικά το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.7.1. Έχουμε $B_n^-(x) = x^n B_n^+(1/x)$ για $n \geq 1$.

Απόδειξη. Δεδομένης μίας προσημασμένης μετάθεσης $w = (w(a_1), w(a_2), \dots, w(a_n)) \in B_n$, όπου ο συμβολισμός είναι όπως στην Ενότητα 2.3.1, θέτουμε $-w := (-w(-a_1), -w(-a_2), \dots, -w(-a_n)) \in B_n$. Η επαγόμενη απεικόνιση $\varphi : B_n^+ \rightarrow B_n^-$ που ορίζεται ως $\varphi(w) = -w$ είναι αμφιμονοσήμαντη. Επιπλέον, για κάθε $w \in B_n^+$, ένας δείκτης $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ είναι B -άνοδος της w αν και μόνο αν ο δείκτης i είναι B -κάθοδος της $\varphi(w)$ και το λήμμα έπεται. \square

Για να αποδείξουμε την προαναγγελθείσα σχέση μεταξύ $B_n^+(x)$ και $A_n(x)$, θα χρησιμοποιήσουμε την κατασκευή της r -οστής υποδιαίρεσης ακμών $\Delta^{(r)}$ ενός μονοπλεκτικού συμπλέγματος Δ . Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα [25, 26] για τον ορισμό και την ιστορία αυτής της υποδιαίρεσης και ανακαλούμε τα ακόλουθα γνωστά αποτελέσματα. Πρώτο, ο περιορισμός $\Delta_F^{(r)}$ της $\Delta^{(r)}$ στην F έχει ακριβώς $r^{\dim(F)}$ έδρες για κάθε μη κενή πλευρά $F \in \Delta$. Δεύτερο, συνδυάζοντας το [26, Πόρισμα 6.8] με το [25, Πόρισμα 1.2], παίρνουμε τον τύπο

$$h(\Delta^{(r)}, x) = \text{E}_r \left((1 + x + \dots + x^{r-1})^d h(\Delta, x) \right) \quad (3.7.1)$$



Σχήμα 3.4: Η βαρυκεντρική υποδιαίρεση του διδιάστατου μονοπλόκου και η δεύτερη υποδιαίρεση ακμών της, K'_3

για το h -πολυώνυμο της υποδιαίρεσης $\Delta^{(r)}$, όπου $d - 1$ είναι η διάσταση του Δ και E_r είναι ο τελεστής πολυωνύμων (ή γενικότερα, τυπικών δυναμοσειρών) που ορίζεται ως

$$E_r \left(\sum_{k \geq 0} c_k x^k \right) = \sum_{k \geq 0} c_{rk} x^k = c_0 + c_r x + c_{2r} x^2 + \dots$$

Το Σχήμα 3.4 δείχνει τη δεύτερη υποδιαίρεση ακμών της βαρυκεντρικής υποδιαίρεσης του διδιάστατου μονοπλόκου.

Πρόταση 3.7.2. Έχουμε $B_n^+(x) = E_2((1+x)^n A_n(x))$ για κάθε $n \geq 1$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την υποδιαίρεση K_n και τη δεύτερη υποδιαίρεση ακμών K'_n της βαρυκεντρικής υποδιαίρεσης $\text{sd}(2^{[n]})$ (βλ. Σχήματα 3.1 και 3.4 για την ειδική περίπτωση $n = 3$). Εφαρμόζοντας τη (2.1.3) για $\Delta' = K_n$ και K'_n , αντίστοιχα, και $\Delta = \text{sd}(2^{[n]})$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} h(K_n, x) &= \sum_{F \in \Delta} \ell_F((K_n)_F, x) h(\text{link}_\Delta(F), x), \\ h(K'_n, x) &= \sum_{F \in \Delta} \ell_F((K'_n)_F, x) h(\text{link}_\Delta(F), x). \end{aligned}$$

Αφού και οι δύο περιορισμοί $(K_n)_F$ και $(K'_n)_F$ έχουν ακριβώς $2^{\dim(F)}$ έδρες για κάθε μη κενή πλευρά $F \in \Delta$, έπεται από τους προηγούμενους τύπους και το Λήμμα 3.6.3 ότι $h(K_n, x) = h(K'_n, x)$. Συνδυάζοντας αυτή την ισότητα και την Πρόταση 3.6.1 παίρνουμε $B_n^+(x) = h(K'_n, x)$ για κάθε $n \geq 1$. Η Εξίσωση (3.7.1) συνεπάγεται ότι

$$B_n^+(x) = E_2((1+x)^n h(\Delta, x)) = E_2((1+x)^n A_n(x))$$

για $n \geq 1$ και η απόδειξη έπεται. □

Παρατήρηση 3.7.3. Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τον Mirkó Visontai που μας πληροφόρησε ότι ένας τύπος παρόμοιος με αυτόν της Πρότασης 3.7.2 μπορεί να προκύψει από το [2, Θεώρημα 4.4], για το οποίο δίνεται μία συνδυαστική απόδειξη στο [46].

Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο λήμμα για να συμπεράνουμε την ύπαρξη μόνο πραγματικών ριζών για τα $B_n^+(x)$ και $B_n^-(x)$.

Λήμμα 3.7.4. Έστω $p(x)$ ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές και έστω r ένας θετικός ακέραιος.

(a) Αν το $p(x)$ έχει μονότροπους συντελεστές, το ίδιο ισχύει και για το $E_r(p(x))$.

(β) Αν το $p(x)$ έχει μη αρνητικούς και λογαριθμικά κοίλους συντελεστές και δεν έχει εσωτερικά μηδενικά, το ίδιο ισχύει και για το $E_r(p(x))$.

(γ) Αν το $p(x)$ έχει μόνο πραγματικές ρίζες, το ίδιο ισχύει και για το $E_r(p(x))$.

Απόδειξη. Το μέρος (α) είναι τετριμμένο και το μέρος (β) αφήνεται ως άσκηση. Για το μέρος (γ) θέτουμε $p(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ και παρατηρούμε ότι ο πίνακας $(a_{ri-rj})_{i,j=0}^{\infty}$ είναι ένας υποπίνακας του $(a_{i-j})_{i,j=0}^{\infty}$. Κατά συνέπεια, κάθε υποορίζουσα του πρότερου είναι επίσης υποορίζουσα του ύστερου και το αποτέλεσμα έπεται από το Θεώρημα 2.1.2. \square

Πόρισμα 3.7.5. Τα πολυώνυμα $B_n^+(x)$ και $B_n^-(x)$ έχουν μόνο πραγματικές ρίζες για κάθε $n \geq 1$. Είναι μονότροπα με κορυφές στα $\lfloor n/2 \rfloor$ και $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$, αντίστοιχα, για κάθε $n \geq 2$.

Απόδειξη. Η πρώτη πρόταση έπεται από το Λήμμα 3.7.1, την Πρόταση 3.7.2 και το γεγονός ότι το πολυώνυμο Euler $A_n(x)$ έχει μόνο πραγματικές ρίζες για $n \geq 1$, μέσω του μέρους (γ) του Λήμματος 3.7.4. Η δεύτερη πρόταση έπεται από το Λήμμα 3.7.1, την Πρόταση 3.7.2 και το γεγονός ότι το πολυώνυμο $(1+x)^n A_n(x)$ έχει συμμετρικούς και μονότροπους συντελεστές και βαθμό $2n-1$, μέσω του μέρους (α) του Λήμματος 3.7.4. \square

Παρατήρηση 3.7.6. Αφού ισχύει $B_n(x) = B_n^+(x) + B_n^-(x)$, το Πόρισμα 3.7.5 εκφράζει το πολυώνυμο Euler $B_n(x)$ ως άθροισμα δύο μονότροπων πολυωνύμων με κορυφές που διαφέρουν το πολύ κατά ένα. Αυτή η διάσπαση δείχνει ότι η μονοτροπία του $B_n(x)$ είναι συνέπεια της μονοτροπίας του $A_n(x)$ (βλ. Πρόταση 3.7.2 και Λήμμα 3.7.1). Για την απόδειξη της μονοτροπίας του $B_n(x)$ μέσω γ -μη αρνητικότητας, βλ. [50, Πρόταση 4.16]. Για μία εξίσωση που συσχετίζει τα πολυώνυμα Euler τύπων A , B και D , βλ. [64, Λήμμα 9.1].

Θα δώσουμε τώρα επαγωγικές σχέσεις και γεννήτριες συναρτήσεις για τα $B_n^+(x)$ και $B_n^-(x)$.

Πρόταση 3.7.7. Έχουμε

$$B_n^+(x) = 2(n-1)x B_{n-1}^+(x) + 2x(1-x) \frac{dB_{n-1}^+}{dx}(x) + B_{n-1}(x) \quad (3.7.2)$$

για κάθε $n \geq 1$,

$$\sum_{n \geq 0} B_n^+(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{e^t(e^{xt} - xe^t)}{e^{2xt} - xe^{2t}} \quad (3.7.3)$$

και

$$\sum_{n \geq 0} B_n^-(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{xe^t(e^t - e^{xt})}{e^{2xt} - xe^{2t}}. \quad (3.7.4)$$

Απόδειξη. Έστω $w = w(a_1)w(a_2) \cdots w(a_{n-1}) \in B_{n-1}$ μία προσημασμένη μετάθεση, παριστάμενη ως λέξη. Για $i \in \{1, \dots, n\}$, θα συμβολίζουμε με w_i (αντίστοιχα, w_{-i}) την προσημασμένη μετάθεση στο B_n που προκύπτει από τη w εισάγοντας το n (αντίστοιχα, το $-n$) μεταξύ των $w(a_{i-1})$ και $w(a_i)$. Για $1 \leq i \leq n-1$ έχουμε $w_i \in B_n^+$ (αντίστοιχα, $w_{-i} \in B_n^+$) αν και μόνο αν $w \in B_{n-1}^+$. Από την άλλη, $w_n \in B_n^+$ και $w_{-n} \in B_n^-$ για κάθε $w \in B_{n-1}$. Επιπλέον, για $1 \leq i \leq n-1$ έχουμε

$$\text{des}_B(w_{\pm i}) = \begin{cases} \text{des}_B(w), & \text{αν } i-1 \in \text{Des}_B(w) \\ \text{des}_B(w) + 1, & \text{αν } i-1 \notin \text{Des}_B(w) \end{cases}$$

και για $i = n$ έχουμε $\text{des}_B(w_n) = \text{des}_B(w)$. Συνεπώς, υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned}
B_n^+(x) &= \sum_{\sigma \in B_n^+} x^{\text{des}_B(\sigma)} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{w \in B_{n-1}^+} x^{\text{des}_B(w_i)} + x^{\text{des}_B(w_{-i})} \right) + \sum_{w \in B_{n-1}} x^{\text{des}_B(w)} \\
&= 2 \sum_{w \in B_{n-1}^+} \left(\text{des}_B(w) x^{\text{des}_B(w)} + (n-1 - \text{des}_B(w)) x^{\text{des}_B(w)+1} \right) + B_{n-1}(x) \\
&= 2(n-1) \sum_{w \in B_{n-1}^+} x^{\text{des}_B(w)+1} + 2(1-x) \sum_{w \in B_{n-1}^+} \text{des}_B(w) x^{\text{des}_B(w)} + B_{n-1}(x) \\
&= 2(n-1)x B_{n-1}^+(x) + 2x(1-x) \frac{dB_{n-1}^+}{dx}(x) + B_{n-1}(x),
\end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει την (3.7.2). Στη συνέχεια ισχυριζόμαστε ότι

$$\frac{B_n^+(x)}{(1-x)^n} = \sum_{i \geq 0} ((2i+1)^n - (2i)^n) x^i, \quad (3.7.5)$$

για κάθε $n \geq 1$. Δεδομένου ότι $B_0^+(x) = 1$, η Εξίσωση (3.7.3) προκύπτει από τον ισχυρισμό με άμεσους υπολογισμούς. Για να αποδείξουμε την (3.7.5), συμβολίζουμε με $a_n(i)$ το συντελεστή του x^i στο ανάπτυγμα της ρητής συνάρτησης $B_n^+(x)/(1-x)^n$ ως δυναμοσειρά. Διαιρώντας την (3.7.2) με $(1-x)^n$ και χρησιμοποιώντας την ισότητα

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{B_{n-1}^+(x)}{(1-x)^{n-1}} \right) = \frac{dB_{n-1}^+}{dx}(x) \frac{1}{(1-x)^{n-1}} + (n-1) \frac{B_{n-1}^+(x)}{(1-x)^n},$$

βρίσκουμε ότι

$$\frac{B_n^+(x)}{(1-x)^n} = 2x \frac{d}{dx} \left(\frac{B_{n-1}^+(x)}{(1-x)^{n-1}} \right) + \frac{B_{n-1}(x)}{(1-x)^n}.$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του x^i στα δύο μέλη της προηγούμενης ισότητας και χρησιμοποιώντας το [23, Θεώρημα 3.4 (ii)], παίρνουμε $a_n(i) = 2ia_{n-1}(i) + (2i+1)^{n-1}$. Ο ισχυρισμός έπεται με επαγωγή στο n .

Η Εξίσωση (3.7.4) έπεται από την (3.7.3) και το Λήμμα 3.7.1. Εναλλακτικά, προκύπτει από την (3.7.4) και τον τύπο για την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση του $B_n(x)$ [23, Θεώρημα 3.4 (iv)]. \square

Με αυτά τα δεδομένα, συμπεραίνουμε επαγωγικές σχέσεις για τα $f_n^+(x)$ και $f_n^-(x)$.

Πρόταση 3.7.8. Για $n \geq 2$ έχουμε

$$f_n^+(x) = (2(n-1)x - 1) f_{n-1}^+(x) + 2x(1-x) \frac{df_{n-1}^+}{dx}(x) + 2(n-1)x f_{n-2}^+(x) + d_{n-1}^B(x).$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (3.1.12), υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} f_n^+(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} B_k^+(x) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n-1}{k-1} B_k^+(x) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \binom{n-1}{k} B_k^+(x) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n-1}{k-1} B_k^+(x) - f_{n-1}^+(x). \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας για $B_k^+(x)$ το δεξί μέλος της (3.7.2), θέτουμε

$$S_n(x) = 2x \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} (k-1) \binom{n-1}{k-1} B_{k-1}^+(x)$$

και χρησιμοποιώντας τη (2.3.8), παίρνουμε

$$\begin{aligned} f_n^+(x) &= S_n(x) + 2x(1-x) \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n-1}{k-1} \frac{dB_{k-1}^+}{dx}(x) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n-1}{k-1} B_{k-1}(x) - f_{n-1}^+(x) \\ &= S_n(x) + 2x(1-x) \frac{df_{n-1}^+}{dx}(x) + d_{n-1}^B(x) - f_{n-1}^+(x). \end{aligned}$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (3.1.12), υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} S_n(x) &= 2x \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} k \binom{n-1}{k-1} B_{k-1}^+(x) - 2x \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n-1}{k-1} B_{k-1}^+(x) \\ &= 2x \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} k \binom{n}{k} B_{k-1}^+(x) - 2x \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k} k \binom{n-1}{k} B_{k-1}^+(x) \\ &\quad - 2x f_{n-1}^+(x) \\ &= 2nx \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n-1}{k-1} B_{k-1}^+(x) - 2(n-1)x \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k} \binom{n-2}{k-1} B_{k-1}^+(x) \\ &\quad - 2x f_{n-1}^+(x) \\ &= 2(n-1)x f_{n-1}^+(x) + 2(n-1)x f_{n-2}^+(x) \end{aligned}$$

και η απόδειξη έπεται. □

Θα συμβολίζουμε με $a_{n,k}^+$, $a_{n,k}^-$ και $d_{n,k}^B$ τους συντελεστές του x^k στα $f_n^+(x)$, $f_n^-(x)$ και $d_n^B(x)$, αντίστοιχα. Οι ακόλουθες επαγωγικές σχέσεις μπορούν να εξαχθούν από την Πρόταση 3.7.8 και το [31, Πόρισμα 4.3].

Πόρισμα 3.7.9. Για $n \geq 2$ και $k \geq 1$ έχουμε

$$a_{n,k}^+ = (2k-1)a_{n-1,k}^+ + 2(n-k)a_{n-1,k-1}^+ + 2(n-1)a_{n-2,k-1}^+ + d_{n-1,k}^B \quad (3.7.6)$$

και

$$a_{n,k}^- = (2k-1)a_{n-1,k}^- + 2(n-k)a_{n-1,k-1}^- + 2(n-1)a_{n-2,k-1}^- + d_{n-1,k-1}^B. \quad (3.7.7)$$

Απόδειξη. Η Εξίσωση (3.7.6) προκύπτει από τον τύπο της Πρότασης 3.7.8 εξισώνοντας τους συντελεστές του x^k . Αφού $a_{n,k}^- = d_{n,k}^B - a_{n,k}^+$, η Εξίσωση (3.7.7) έπεται από την (3.7.6) και την επαγωγική σχέση για τους συντελεστές $d_{n,k}^B$ που δίνεται στο [31, Πόρισμα 4.3]. \square

Τρίτη απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.4. Όπως και στη δεύτερη απόδειξη, συμβολίζουμε με $\ell_n^+(x)$ και $\ell_n^-(x)$ τα δεξιά μέλη των (3.1.12) και (3.1.13), αντίστοιχα, και παρατηρούμε ότι $\ell_n^+(x) + \ell_n^-(x) = d_n^B(x)$ και ότι το $\ell_n^+(x)$ είναι ίσο με το τοπικό h -πολυώνυμο της υποδιαίρεσης K_n . Εξαιτίας αυτής της ερμηνείας, έχουμε $\ell_n^+(x) = x^n \ell_n^+(1/x)$ από το Θεώρημα 2.1.4 (γ). Οι αποδείξεις της Πρότασης 3.7.8 και του Πορίσματος 3.7.9 δείχνουν ότι οι συντελεστές των $\ell_n^+(x)$ και $\ell_n^-(x)$ ικανοποιούν τις (3.7.6) και (3.7.7), αντίστοιχα. Αφού $a_{n,k}^- = d_{n,k}^B - a_{n,k}^+$, μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε την (3.7.6) ως

$$a_{n,k}^+ = 2ka_{n-1,k}^+ + 2(n-k)a_{n-1,k-1}^+ + 2(n-1)a_{n-2,k-1}^+ + a_{n-1,k}^-.$$

Αντικαθιστώντας το k με το $n-k$ σε αυτή την ισότητα και χρησιμοποιώντας τη συμμετρία $a_{n,k}^+ = a_{n,n-k}^+$ προκύπτει ότι

$$a_{n-1,k}^- = a_{n-1,n-k}^-.$$

Ισοδύναμα, έχουμε $a_{n,k}^- = a_{n,n-k+1}^-$ για όλα τα n και k και, λόγω αυτού, ισχύει $\ell_n^-(x) = x^{n+1} \ell_n^-(1/x)$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Η μοναδικότητα των ιδιοτήτων που ορίζουν τα $f_n^+(x)$ και $f_n^-(x)$ δείχνει ότι $\ell_n^+(x) = f_n^+(x)$ και $\ell_n^-(x) = f_n^-(x)$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. \square

Έχουμε επιβεβαιώσει ότι τα πολυώνυμα $f_n^+(x)$ και $f_n^-(x)$ έχουν μόνο πραγματικές ρίζες για $2 \leq n \leq 10$. Κατά συνέπεια, η ακόλουθη εικασία προκύπτει φυσιολογικά.

Εικασία 3.7.10. Τα πολυώνυμα $f_n^+(x)$ και $f_n^-(x)$ έχουν μόνο πραγματικές ρίζες για κάθε $n \geq 2$.

Κεφάλαιο 4

Το τοπικό h -διάνυσμα της υποδιαίρεσης σμηνών

4.1 Εισαγωγή και αποτελέσματα

Το κεφάλαιο αυτό εστιάζει σε ένα παράδειγμα υποδιαίρεσης του μονοπλόκου με αξιοσημείωτες συνδυαστικές ιδιότητες, την υποδιαίρεση σμηνών. Τα κύρια αποτελέσματά μας υπολογίζουν το τοπικό h -διάνυσμα της υποδιαίρεσης σμηνών, εξασφαλίζοντας συνδυαστικές ερμηνείες για τα κλασικά συστήματα ριζών με τη χρήση συνδυαστικής μη διασταυρούμενων διαμερίσεων. Επιπλέον, θα δείξουμε ότι το τοπικό γ -πολυώνυμο έχει μη αρνητικούς συντελεστές για όλες τις υποδιαίρεσεις σμηνών. Υπενθυμίζουμε ότι με $\Gamma(\Phi)$ συμβολίζουμε την υποδιαίρεση σμηνών που σχετίζεται με το σύστημα ριζών $\Phi = \Phi_I$ τάξης n .

Θα γράφουμε

$$\ell_I(\Gamma(\Phi), x) = \sum_{i=0}^n \ell_i(\Phi) x^i$$

για το τοπικό h -πολυώνυμο της $\Gamma(\Phi)$ και $\ell_I(\Phi) = (\ell_0(\Phi), \ell_1(\Phi), \dots, \ell_n(\Phi))$ για το αντίστοιχο τοπικό h -διάνυσμα. Όπως αποδείχθηκε στην Πρόταση 2.2.2, το $\ell_I(\Gamma(\Phi), x)$ δίνεται από την εξίσωση

$$\ell_I(\Gamma(\Phi), x) = \sum_{J \subseteq I} (-1)^{|I \setminus J|} h(\Delta_+(\Phi_J), x). \quad (4.1.1)$$

Τα αποτελέσματα του [59], που αναφέρονται στο Θεώρημα 2.1.4, συνεπάγονται ότι το $\ell_I(\Gamma(\Phi), x)$ έχει μη αρνητικούς και συμμετρικούς συντελεστές για κάθε σύστημα ριζών Φ .

Το πρώτο αποτέλεσμά μας προσδιορίζει το τοπικό h -πολυώνυμο της υποδιαίρεσης $\Gamma(\Phi)$ ως εξής.

Θεώρημα 4.1.1. *Αν $\ell_I(\Gamma(\Phi), x) = \sum_{i=0}^n \ell_i(\Phi) x^i$ είναι το τοπικό h -πολυώνυμο της υποδιαίρεσης σμηνών $\Gamma(\Phi)$, που σχετίζεται με ένα ανάγωγο σύστημα ριζών Φ τάξης n και τύπου Cartan-Killing \mathcal{X} , τότε ο αριθμός $\ell_i(\Phi)$ είναι ίσο με:*

- το πλήθος των διαμερίσεων $\pi \in \text{NC}^A(n)$ με i μέρη, έτσι ώστε κάθε μέρος του π με ένα στοιχείο να είναι εμφωλευμένο, αν $\mathcal{X} = A_n$,
- το πλήθος των διαμερίσεων $\pi \in \text{NC}^B(n)$ χωρίς μηδενικό μέρος και i ζεύγη μη μηδενικών μερών, έτσι ώστε κάθε μέρος του π με ένα θετικό στοιχείο να είναι εμφωλευμένο, αν $\mathcal{X} = B_n$,
- $n - 2$ φορές το πλήθος των διαμερίσεων $\pi \in \text{NC}^A(n - 1)$ με i μέρη, αν $\mathcal{X} = D_n$.

Επιπλέον, το $\ell_I(\Gamma(\Phi), x)$ είναι ίσο με

$$\begin{cases} (m-2)x, & \text{αν } \mathcal{X} = I_2(m) \\ 8x + 8x^2, & \text{αν } \mathcal{X} = H_3 \\ 42x + 124x^2 + 42x^3, & \text{αν } \mathcal{X} = H_4 \\ 10x + 29x^2 + 10x^3, & \text{αν } \mathcal{X} = F_4 \\ 7x + 63x^2 + 125x^3 + 63x^4 + 7x^5, & \text{αν } \mathcal{X} = E_6 \\ 16x + 204x^2 + 644x^3 + 644x^4 + 204x^5 + 16x^6, & \text{αν } \mathcal{X} = E_7 \\ 44x + 748x^2 + 3380x^3 + 5472x^4 + 3380x^5 + 748x^6 + 44x^7, & \text{αν } \mathcal{X} = E_8. \end{cases}$$

Θα γράφουμε $\xi_I(\Phi) = (\xi_0(\Phi), \xi_1(\Phi), \dots, \xi_{\lfloor n/2 \rfloor}(\Phi))$ για το τοπικό γ -διάνυσμα της υποδιαίρεσης $\Gamma(\Phi)$, έτσι ώστε

$$\ell_I(\Gamma(\Phi), x) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \xi_i(\Phi) x^i (1+x)^{n-2i}. \quad (4.1.2)$$

Το δεύτερο αποτέλεσμά μας υπολογίζει επακριβώς τους αριθμούς $\xi_i(\Phi)$ (κατά συνέπεια, μέσω της Εξίσωσης (4.1.2), και τους αριθμούς $\ell_i(\Phi)$).

Θεώρημα 4.1.2. Αν Φ είναι ένα ανάγωγο σύστημα ριζών τάξης n και τύπου *Cartan-Killing* \mathcal{X} και αν $\xi_i(\Phi)$ είναι οι αριθμοί που ορίζονται μοναδικά μέσω της (4.1.2), τότε $\xi_0(\Phi) = 0$ και

$$\xi_i(\Phi) = \begin{cases} \frac{1}{n-i+1} \binom{n}{i} \binom{n-i-1}{i-1}, & \text{αν } \mathcal{X} = A_n \\ \binom{n}{i} \binom{n-i-1}{i-1}, & \text{αν } \mathcal{X} = B_n \\ \frac{n-2}{i} \binom{2i-2}{i-1} \binom{n-2}{2i-2}, & \text{αν } \mathcal{X} = D_n \end{cases}$$

για $1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor$. Επιπλέον,

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \xi_i(\Phi) x^i = \begin{cases} (m-2)x, & \text{αν } \mathcal{X} = I_2(m) \\ 8x, & \text{αν } \mathcal{X} = H_3 \\ 42x + 40x^2, & \text{αν } \mathcal{X} = H_4 \\ 10x + 9x^2, & \text{αν } \mathcal{X} = F_4 \\ 7x + 35x^2 + 13x^3, & \text{αν } \mathcal{X} = E_6 \\ 16x + 124x^2 + 112x^3, & \text{αν } \mathcal{X} = E_7 \\ 44x + 484x^2 + 784x^3 + 120x^4, & \text{αν } \mathcal{X} = E_8. \end{cases}$$

Η Πρόταση 4.2.1 (αντίστοιχα, η Πρόταση 4.3.1) αναφέρει ότι όταν $\mathcal{X} = A_n$, (αντίστοιχα, $\mathcal{X} = B_n$), οι αριθμοί $\xi_i(\Phi)$ απαριθμούν διαμερίσεις $\pi \in \text{NC}^A(n)$ (αντίστοιχα, διαμερίσεις $\pi \in \text{NC}^B(n)$ χωρίς μηδενικό μέρος) που δεν έχουν μέρος με ένα στοιχείο, ως προς το πλήθος των μερών τους.

Όταν το Φ είναι κρυσταλλογραφικό, το σύμπλεγμα σημητών $\Delta(\Phi)$ μπορεί να υλοποιηθεί ως το συνοριακό σύμπλεγμα ενός μονοπλεκτικού κυρτού πολυτόπου [29]. Συμπεραίνουμε ότι το $\Gamma(\Phi)$ είναι μία κανονική (γεωμετρική) υποδιαίρεση του μονοπλόκου 2^{II} . Συνεπώς, από το [59,

Θεώρημα 5.2] (βλ. επίσης Θεώρημα 2.1.4 (ε)) προκύπτει ότι το τοπικό h -διάνυσμα του $\Gamma(\Phi)$ είναι μονότροπο, δηλαδή $\ell_0(\Phi) \leq \ell_1(\Phi) \leq \dots \leq \ell_{\lfloor n/2 \rfloor}(\Phi)$. Το ακόλουθο πόρισμα του Θεωρήματος 4.1.2 εξασφαλίζει ένα πιο ισχυρό αποτέλεσμα.

Πόρισμα 4.1.3. *Για κάθε σύστημα ριζών Φ το τοπικό γ -διάνυσμα του $\Gamma(\Phi)$ είναι μη αρνητικό, δηλαδή ισχύει ότι $\xi_i(\Phi) \geq 0$ για κάθε δείκτη i .*

4.2 Το σύστημα ριζών A_n

Η ακόλουθη πρόταση είναι το κύριο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας. Όπως και στην προηγούμενη ενότητα, $\Phi = \Phi_I$ είναι ένα πεπερασμένο σύστημα ριζών τάξης n . Συμβολίζουμε με $\mathcal{D}(\Phi)$ το διάγραμμα Dynkin του Φ και ταυτίζουμε το σύνολο κορυφών του $\mathcal{D}(\Phi)$ με το σύνολο δεικτών I που περιέχει n στοιχεία. Σημειώνουμε ότι οι μη διασταυρούμενες διαμερίσεις χωρίς μέρη με ένα στοιχείο και δεδομένο αριθμό μερών, που εμφανίζονται εδώ, μελετήθηκαν και απαριθμήθηκαν από τον Kreweras [45, Ενότητα 5].

Πρόταση 4.2.1. *Για το σύστημα ριζών Φ τύπου A_n ισχύουν τα ακόλουθα:*

- ο αριθμός $\ell_i(\Phi)$ είναι ίσος με το πλήθος των διαμερίσεων $\pi \in \text{NC}^A(n)$ με i μέρη, τέτοιες ώστε κάθε μέρος της π με ένα στοιχείο να είναι εμφωλευμένο,
- ο αριθμός $\xi_i(\Phi)$ είναι ίσος με το πλήθος των διαμερίσεων $\pi \in \text{NC}^A(n)$ οι οποίες δεν έχουν μέρος με ένα μόνο στοιχείο και έχουν συνολικά i μέρη.

Επιπλέον, έχουμε τον τύπο

$$\xi_i(\Phi) = \begin{cases} 0, & \text{αν } i = 0 \\ \frac{1}{n-i+1} \binom{n}{i} \binom{n-i-1}{i-1}, & \text{αν } 1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor. \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Για τις πρώτες τιμές του n έχουμε

$$\sum_{i=0}^n \ell_i(\Phi) x^i = \begin{cases} 0, & \text{αν } n = 1 \\ x, & \text{αν } n = 2 \\ x + x^2, & \text{αν } n = 3 \\ x + 4x^2 + x^3, & \text{αν } n = 4 \\ x + 8x^2 + 8x^3 + x^4, & \text{αν } n = 5 \\ x + 13x^2 + 29x^3 + 13x^4 + x^5, & \text{αν } n = 6 \\ x + 19x^2 + 73x^3 + 73x^4 + 19x^5 + x^6, & \text{αν } n = 7 \\ x + 26x^2 + 151x^3 + 266x^4 + 151x^5 + 26x^6 + x^7, & \text{αν } n = 8 \end{cases}$$

και

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \xi_i(\Phi) x^i = \begin{cases} 0, & \text{αν } n = 1 \\ x, & \text{αν } n = 2, 3 \\ x + 2x^2, & \text{αν } n = 4 \\ x + 5x^2, & \text{αν } n = 5 \\ x + 9x^2 + 5x^3, & \text{αν } n = 6 \\ x + 14x^2 + 21x^3, & \text{αν } n = 7 \\ x + 20x^2 + 56x^3 + 14x^4, & \text{αν } n = 8. \end{cases}$$

Το διάγραμμα Dynkin $\mathcal{D}(\Phi)$ είναι ένα μονοπάτι στο σύνολο κορυφών I . Για ευκολία στο συμβολισμό, θέτουμε $I = \{1, 2, \dots, n\}$, όπου τα i και $i+1$ είναι γειτονικά στο $\mathcal{D}(\Phi)$ για $1 \leq i \leq n-1$.

Απόδειξη της Πρότασης 4.2.1. Για να υπολογίσουμε το δεξί μέλος της (4.1.1), επικεντρωνόμαστε στο $h(\Delta_+(\Phi_J), x)$. Το Λήμμα 2.2.3 και η Εξίσωση (2.4.1) δείχνουν ότι

$$h(\Delta_+(\Phi_I), x) = \sum_{\pi \in \text{NC}^A(n)} x^{n-|\pi|}. \quad (4.2.2)$$

Για τυχαίο $J \subseteq I$ έχουμε μία διάσπαση σε ευθύ γινόμενο $\Phi_J = \Phi_1 \times \dots \times \Phi_k$ ανάγωγων υποσυστημάτων Φ_1, \dots, Φ_k . Τα διαγράμματα Dynkin των Φ_1, \dots, Φ_k είναι οι συνεκτικές συνιστώσες του διαγράμματος που προκύπτει από το $\mathcal{D}(\Phi)$ αφαιρώντας τις κορυφές του $I \setminus J$. Αφού το $\mathcal{D}(\Phi)$ είναι ένα μονοπάτι χωρίς πολλαπλές ακμές, κάθε Φ_i είναι και πάλι ένα σύστημα ριζών τύπου A . Συμβολίζοντας με p_i την τάξη του Φ_i και χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.2.1 (v) και την Εξίσωση (4.2.2) βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} h(\Delta_+(\Phi_J), x) &= h(\Delta_+(\Phi_1) * \dots * \Delta_+(\Phi_k), x) = \prod_{i=1}^k h(\Delta_+(\Phi_i), x) \\ &= \prod_{i=1}^k \sum_{\pi \in \text{NC}^A(p_i)} x^{p_i-|\pi|} = \sum_{\pi \in \text{NC}^A(J)} x^{n-|\pi|}, \end{aligned}$$

όπου με $\text{NC}^A(J)$ συμβολίζουμε το σύνολο των διαμερίσεων $\pi \in \text{NC}^A(n)$ για τις οποίες ισχύει ότι για κάθε $a \in I \setminus J$, το $\{a\}$ είναι ένα μη εμφωλευμένο μέρος της π με ένα στοιχείο. Ο προηγούμενος υπολογισμός και η Εξίσωση (4.1.1) συνεπάγονται ότι

$$\sum_{i=0}^n \ell_i(\Phi) x^i = \sum_{J \subseteq I} (-1)^{|I \setminus J|} \sum_{\pi \in \text{NC}^A(J)} x^{n-|\pi|}. \quad (4.2.3)$$

Μία απλή εφαρμογή της αρχής εγκλεισμού - αποκλεισμού δείχνει ότι το δεξί μέλος της Εξίσωσης (4.2.3) είναι ίσο με το άθροισμα των $x^{n-|\pi|}$, όπου η διαμέριση $\pi \in \text{NC}^A(n)$ τρέχει στο σύνολο των διαμερίσεων για τις οποίες κάθε μέρος με ένα στοιχείο είναι εμφωλευμένο. Αυτό το αποτέλεσμα και το γεγονός ότι $\ell_i(\Phi) = \ell_{n-i}(\Phi)$ αποφέρουν την επιθυμητή ερμηνεία για τον $\ell_i(\Phi)$.

Για να αποδείξουμε την προτεινόμενη ερμηνεία για τους αριθμούς $\xi_i(\Phi)$ πρέπει να δείξουμε ότι

$$\sum_{i=0}^n \ell_i(\Phi) x^i = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} m_i x^i (1+x)^{n-2i}, \quad (4.2.4)$$

όπου m_i είναι το πλήθος των διαμερίσεων $\pi \in \text{NC}^A(n)$ με i μέρη, που δεν έχουν μέρος με ένα στοιχείο. Συμβολίζουμε με $\text{NC}_0^A(n)$ το υποσύνολο του $\text{NC}^A(n)$ που αποτελείται από τις μη διασταυρούμενες διαμερίσεις των οποίων κάθε μέρος με ένα στοιχείο είναι εμφωλευμένο. Ορίζουμε μία σχέση ισοδυναμίας στο $\text{NC}^A(n)$ θεωρώντας δύο διαμερίσεις π_1 και π_2 ισοδύναμες αν υπάρχει μία ένα προς ένα αντιστοιχία f από το σύνολο των μερών της π_1 που έχουν περισσότερα από ένα στοιχεία στο σύνολο των μερών της π_2 που έχουν περισσότερα από ένα στοιχεία έτσι ώστε για κάθε μέρος B της π_1 με περισσότερα από ένα στοιχεία, τα σύνολα B και $f(B)$ να έχουν το ίδιο ελάχιστο και το ίδιο μέγιστο στοιχείο. Για παράδειγμα, η διαμέριση στο Σχήμα 2.5 είναι ισοδύναμη με τέσσερις μη διασταυρούμενες διαμερίσεις, δηλαδή με τον εαυτό της και τις διαμερίσεις $\{\{1, 5, 6\}, \{2, 3, 4\}, \{7\}, \{8, 9\}\}$, $\{\{1, 6\}, \{2, 3, 4\}, \{5\}, \{7\}, \{8, 9\}\}$ και $\{\{1, 6\}, \{2, 4\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{8, 9\}\}$.

Αφήνουμε στον αναγνώστη να ελέγξει ότι ο περιορισμός αυτής της σχέσης ορίζει μία σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\text{NC}_0^A(n)$ και ότι κάθε κλάση ισοδυναμίας μέσα στο $\text{NC}_0^A(n)$ περιέχει μία μοναδική διαμέριση π_0 χωρίς μέρη με ένα στοιχείο. Επιπλέον, για την κλάση ισοδυναμίας $O(\pi_0)$ μιας τέτοιας διαμέρισης $\pi_0 \in \text{NC}_0^A(n)$ έχουμε

$$\sum_{\pi \in O(\pi_0)} x^{|\pi|} = x^i (1+x)^{n-2i},$$

όπου i είναι το πλήθος των μερών του π_0 . Αθροίζοντας τις προηγούμενες εξισώσεις πάνω σε όλες τις διαμερίσεις $\pi_0 \in \text{NC}_0^A(n)$ χωρίς μέρη με ένα στοιχείο, παίρνουμε την (4.2.4).

Τέλος, η Εξίσωση (4.2.1) είναι συνέπεια της ισότητας $\xi_i(\Phi) = m_i$ και των αποτελεσμάτων του [45, σελ. 344], που απαριθμούν τις μη διασταυρούμενες διαμερίσεις χωρίς μέρη με ένα στοιχείο και δεδομένο αριθμό μερών. \square

4.3 Το σύστημα ριζών B_n

Αυτή η ενότητα αποδεικνύει την ακόλουθη πρόταση για την περίπτωση $\mathcal{X} = B_n$.

Πρόταση 4.3.1. *Για το σύστημα ριζών Φ τύπου B_n ισχύουν τα ακόλουθα:*

- ο αριθμός $\ell_i(\Phi)$ είναι ίσος με το πλήθος των διαμερίσεων $\pi \in \text{NC}^B(n)$ χωρίς μηδενικό μέρος και i ζεύγη μη μηδενικών μερών, για τις οποίες ισχύει ότι κάθε μέρος με ένα θετικό στοιχείο είναι εμφωλευμένο,
- ο αριθμός $\xi_i(\Phi)$ είναι ίσος με το πλήθος των διαμερίσεων $\pi \in \text{NC}^B(n)$ που δεν έχουν μηδενικό μέρος ή μέρος με ένα στοιχείο και έχουν συνολικά i ζεύγη μη μηδενικών μερών.

Επιπλέον, έχουμε τον τύπο

$$\xi_i(\Phi) = \begin{cases} 0, & \text{αν } i = 0 \\ \binom{n}{i} \binom{n-i-1}{i-1}, & \text{αν } 1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor. \end{cases} \quad (4.3.1)$$

Για τις πρώτες τιμές του n έχουμε

$$\sum_{i=0}^n \ell_i(\Phi) x^i = \begin{cases} 2x, & \text{αν } n = 2 \\ 3x + 3x^2, & \text{αν } n = 3 \\ 4x + 14x^2 + 4x^3, & \text{αν } n = 4 \\ 5x + 35x^2 + 35x^3 + 5x^4, & \text{αν } n = 5 \\ 6x + 69x^2 + 146x^3 + 69x^4 + 6x^5, & \text{αν } n = 6 \\ 7x + 119x^2 + 427x^3 + 427x^4 + 119x^5 + 7x^6, & \text{αν } n = 7 \end{cases}$$

και

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \xi_i(\Phi) x^i = \begin{cases} 2x, & \text{αν } n = 2 \\ 3x, & \text{αν } n = 3 \\ 4x + 6x^2, & \text{αν } n = 4 \\ 5x + 20x^2, & \text{αν } n = 5 \\ 6x + 45x^2 + 20x^3, & \text{αν } n = 6 \\ 7x + 84x^2 + 105x^3, & \text{αν } n = 7 \\ 8x + 140x^2 + 336x^3 + 70x^4, & \text{αν } n = 8. \end{cases}$$

Το διάγραμμα Dynkin $\mathcal{D}(\Phi)$ είναι ένα μονοπάτι στο σύνολο κορυφών $I = \{1, 2, \dots, n\}$ με μία διπλή ακμή. Υποθέτουμε ότι τα i και $i + 1$ είναι γειτονικά στο $\mathcal{D}(\Phi)$ για $1 \leq i \leq n - 1$ και ότι η διπλή ακμή συνδέει τις κορυφές $n - 1$ και n .

Απόδειξη της Πρότασης 4.3.1. Μία απόδειξη με παρόμοια επιχειρήματα όπως αυτή της Πρότασης 4.2.1 μπορεί να δοθεί ως εξής. Συμβολίζουμε με $\text{NC}_+^B(n)$ το σύνολο των διαμερίσεων $\pi \in \text{NC}^B(n)$ που δεν έχουν μηδενικό μέρος. Για να υπολογίσουμε το δεξί μέλος της (4.1.1), μελετούμε το πολυώνυμο $h(\Delta_+(\Phi_J), x)$ για $J \subseteq I$. Τα Λήμματα 2.2.3 και 2.4.1 δείχνουν ότι

$$h(\Delta_+(\Phi_I), x) = \sum_{\pi \in \text{NC}_+^B(n)} x^{n - \|\pi\|}, \quad (4.3.2)$$

όπου το $\|\pi\|$ αντιπροσωπεύει το πλήθος των ζευγών των (μη μηδενικών) μερών της π . Για τυχαίο $J \subseteq I$ ισχυριζόμαστε ότι

$$h(\Delta_+(\Phi_J), x) = \sum_{\pi \in \text{NC}_+^B(J)} x^{n - \|\pi\|}, \quad (4.3.3)$$

όπου με $\text{NC}_+^B(J)$ συμβολίζουμε το σύνολο των διαμερίσεων $\pi \in \text{NC}_+^B(n)$ για τις οποίες ισχύει ότι για κάθε $a \in I \setminus J$, το $\{a\}$ είναι ένα μη εμφωλευμένο μέρος της π με ένα θετικό στοιχείο. Δεδομένης της (4.3.3), η ερμηνεία των $\ell_i(\Phi)$, για $1 \leq i \leq n - 1$, έπεται από μία εφαρμογή της αρχής του εγκλεισμού - αποκλεισμού, όπως και στην περίπτωση του τύπου A .

Η απόδειξη της (4.3.3) προκύπτει όπως και της αντίστοιχης εξίσωσης στην απόδειξη της Πρότασης 4.2.1 αν οι κορυφές $n - 1$ ή n δεν ανήκουν στο J . Διαφορετικά έχουμε $\{n - 1, n\} \subseteq J$ και το επιχειρήμα που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη της Πρότασης 4.2.1 τροποποιείται ως εξής. Έστω b το μέγιστο στοιχείο του $I \setminus J$. Τότε το σύνολο $\{b + 1, \dots, n\}$ αποτελεί το σύνολο κορυφών του διαγράμματος Dynkin μίας από τις συνεκτικές συνιστώσες, έστω Φ_k , του Φ_J . Αυτή η συνιστώσα είναι τύπου B , ενώ κάθε μία από τις $\Phi_1, \dots, \Phi_{k-1}$ είναι τύπου A . Επιπλέον, για $\pi \in \text{NC}_+^B(J)$, ο περιορισμός της π στο $\{b + 1, \dots, n\} \cup \{-b - 1, \dots, -n\}$ είναι μία μη διασταυρούμενη διαμέριση τύπου B , ενώ ο περιορισμός της στο σύνολο που ορίζουν οι κορυφές του διαγράμματος Dynkin καθενός από τα $\Phi_1, \dots, \Phi_{k-1}$ είναι μία μη διασταυρούμενη διαμέριση

τύπου A . Κατά συνέπεια, η Εξίσωση (4.3.3) έπεται με παρόμοιο υπολογισμό όπως της αντίστοιχης εξίσωσης στην απόδειξη της Πρότασης 4.2.1, χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (4.2.2) και (4.3.2).

Για τη δεύτερη πρόταση, πρέπει να αντικαταστήσουμε τη σχέση ισοδυναμίας στο $\text{NC}^A(n)$ με αυτή στο $\text{NC}_+^B(n)$, που ορίζεται ως εξής. Υποθέτουμε ότι η διαμέριση $\pi \in \text{NC}_+^B(n)$ έχει εμφωλευμένο μέρος με ένα θετικό στοιχείο $\{b\}$. Σε αυτή την περίπτωση, υπάρχει ένα μοναδικό μέρος $B \in \pi$ τέτοιο ώστε αν αντικατασταθούν τα μέρη $B, -B, \{b\}$ και $\{-b\}$ της π από τις ενώσεις $B \cup \{b\}$ και $(-B) \cup \{-b\}$ να προκύψει μία μη διασταυρούμενη διαμέριση $\pi' \in \text{NC}_+^B(n)$. Η απαιτούμενη σχέση ισοδυναμίας στο $\text{NC}_+^B(n)$ ορίζεται ως η λεπτότερη σχέση ισοδυναμίας ως προς την οποία οι διαμερίσεις π και π' είναι ισοδύναμες για όλα τα ζεύγη (π, b) . Για παράδειγμα, η διαμέριση στο Σχήμα 2.6 είναι ισοδύναμη με ακριβώς μία άλλη μη διασταυρούμενη διαμέριση, της οποίας το $\{5, 6, 7, -4\}$ είναι ένα μέρος. Η απόδειξη συνεχίζει όπως και στην περίπτωση του τύπου A_n με μόνο ασήμαντες διαφοροποιήσεις: οι λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη.

Τέλος, για να συμπεράνουμε την Εξίσωση (4.3.1) επιχειρηματολογούμε όπως και στην απόδειξη του Λήμματος 2.4.1. Η απόδειξη του [3, Θεώρημα 2.3] δείχνει ότι οι διαμερίσεις $\pi \in \text{NC}^B(n)$ χωρίς μηδενικό μέρος, χωρίς μέρη με ένα στοιχείο και με i ζεύγη μη μηδενικών μερών είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τα ζεύγη (S, f) , όπου S είναι ένα υποσύνολο του $\{1, 2, \dots, n\}$ με i στοιχεία και $f : S \rightarrow \{2, 3, \dots\}$ είναι μία συνάρτηση με τιμές που αθροίζουν στο n . Προφανώς, το πλήθος αυτών των ζευγών δίνεται από το δεξί μέλος της (4.3.1) και η απόδειξη έπεται. \square

4.4 Το σύστημα ριζών D_n

Αυτή η ενότητα αποδεικνύει το ακόλουθο μέρος των Θεωρημάτων 4.1.1 και 4.1.2.

Πρόταση 4.4.1. Για το σύστημα ριζών Φ τύπου D_n έχουμε:

$$\begin{aligned} \ell_i(\Phi) &= (n-2) \cdot \#\{\pi \in \text{NC}^A(n-1) : |\pi| = i\} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{αν } i = 0 \\ \frac{n-2}{i} \binom{n-1}{i-1} \binom{n-2}{i-1}, & \text{αν } 1 \leq i \leq n \end{cases} \end{aligned}$$

και

$$\xi_i(\Phi) = \begin{cases} 0, & \text{αν } i = 0 \\ \frac{n-2}{i} \binom{2i-2}{i-1} \binom{n-2}{2i-2}, & \text{αν } 1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor. \end{cases}$$

Για τις πρώτες τιμές του n έχουμε

$$\sum_{i=0}^n \ell_i(\Phi) x^i = \begin{cases} 2x + 6x^2 + 2x^3, & \text{αν } n = 4 \\ 3x + 18x^2 + 18x^3 + 3x^4, & \text{αν } n = 5 \\ 4x + 40x^2 + 80x^3 + 40x^4 + 4x^5, & \text{αν } n = 6 \\ 5x + 75x^2 + 250x^3 + 250x^4 + 75x^5 + 5x^6, & \text{αν } n = 7 \end{cases}$$

και

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \xi_i(\Phi) x^i = \begin{cases} 2x + 2x^2, & \alpha\nu \ n = 4 \\ 3x + 9x^2, & \alpha\nu \ n = 5 \\ 4x + 24x^2 + 8x^3, & \alpha\nu \ n = 6 \\ 5x + 50x^2 + 50x^3, & \alpha\nu \ n = 7 \\ 6x + 90x^2 + 180x^3 + 30x^4, & \alpha\nu \ n = 8. \end{cases}$$

Εύκολα προκύπτει από την Πρόταση 4.4.1 μία συνδυαστική ερμηνεία για τους αριθμούς $\xi_i(\Phi)$. βλ. [51, Ενότητα 11.3]. Ωστόσο δε γνωρίζουμε μία που να συνάδει με τις αντίστοιχες των Προτάσεων 4.2.1 και 4.3.1 για τους τύπους A_n και B_n .

Ο ακόλουθος συμβολισμός και το απαριθμητικό αποτέλεσμα θα χρησιμοποιηθούν στην απόδειξη της Πρότασης 4.4.1. Θα γράφουμε

$$C_n(x) := \sum_{\pi \in \text{NC}^A(n)} x^{|\pi|-1} = \sum_{\pi \in \text{NC}^A(n)} x^{n-|\pi|} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} \binom{n}{i} \binom{n-1}{i} x^i$$

και

$$F(x, t) := \sum_{n \geq 1} C_n(x) t^n = t + (1+x)t^2 + (1+3x+x^2)t^3 + \dots \quad (4.4.1)$$

Τότε (βλ., για παράδειγμα, [51, Εξίσωση (11)] και [61, Άσκηση 6.36]) έχουμε

$$F(x, t) = xtF^2(x, t) + (1+x)tF(x, t) + t. \quad (4.4.2)$$

Επιγράφουμε τις κορυφές του διαγράμματος Dynkin $\mathcal{D}(\Phi)$ με τα στοιχεία του $I = \{1, 2, \dots, n\}$ έτσι ώστε οι κορυφές i και $i+1$ να είναι γειτονικές στο $\mathcal{D}(\Phi)$ για $1 \leq i \leq n-3$, ενώ η $n-2$ να είναι γειτονική με τις $n-1$ και n .

Απόδειξη της Πρότασης 4.4.1. Έστω $\ell_n(x) := \ell_I(\Gamma(\Phi), x) = \sum_{i=0}^n \ell_i(\Phi) x^i$ για $n \geq 4$. Ο προτεινόμενος τύπος για τους αριθμούς $\ell_i(\Phi)$ είναι ισοδύναμος με την εξίσωση

$$\ell_n(x) = (n-2)x C_{n-1}(x). \quad (4.4.3)$$

Ο τύπος για τους αριθμούς $\xi_i(\Phi)$ έπεται από αυτή και τον γνωστό τύπο (βλ. [51, Πρόταση 11.14]) για το γ -πολυώνυμο του $C_n(x)$. Συνεπώς, αρκεί να αποδείξουμε την (4.4.3).

Κατ' αρχάς, επαναδιατυπώνουμε το δεξί μέλος της (4.1.1) ως εξής. Για $1 \leq r \leq n$, θα συμβολίζουμε με \mathcal{J}_r τη συλλογή όλων των υποσυνόλων $J \subseteq I$ τα οποία περιέχουν τα στοιχεία $\{1, 2, \dots, r-1\}$ αλλά δεν περιέχουν το r . Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.2.1 (v) και την περίπτωση του τύπου A_n από το Λήμμα 2.2.3, βρίσκουμε ότι

$$\sum_{J \in \mathcal{J}_r} (-1)^{|I \setminus J|} h(\Delta_+(\Phi_J), x) = \begin{cases} -\ell_{n-1}(x), & \alpha\nu \ r = 1 \\ -C_{r-1}(x) \ell_{n-r}(x), & \alpha\nu \ 2 \leq r \leq n-3 \\ 0, & \alpha\nu \ r = n-2, \\ C_{n-2}(x) - C_{n-1}(x), & \alpha\nu \ r = n-1, \\ -C_{n-1}(x), & \alpha\nu \ r = n. \end{cases}$$

Ως επακόλουθο, η Εξίσωση (4.1.1) μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως

$$\ell_n(x) = h(\Delta_+(\Phi_I), x) - \ell_{n-1}(x) - \sum_{r=2}^{n-3} C_{r-1}(x) \ell_{n-r}(x) + C_{n-2}(x) - 2C_{n-1}(x).$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας επαγωγή στο n , αρκεί να αποδειχθεί ότι

$$h(\Delta_+(\Phi_I), x) = (n-2)x C_{n-1}(x) + (n-3)x C_{n-2}(x) + \sum_{r=2}^{n-3} (n-r-2)x C_{r-1}(x)C_{n-r-1}(x) - C_{n-2}(x) + 2C_{n-1}(x) \quad (4.4.4)$$

για $n \geq 4$. Έστω ότι συμβολίζουμε με $R_n(x)$ το δεξί μέλος της Εξίσωσης (4.4.4) και με $S_n(x)$ το άθροισμα που εμφανίζεται εκεί. Προκύπτει ευθέως από την (4.4.1) ότι

$$\sum_{n \geq 4} S_n(x) t^n = xt^3 F(x, t) \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) - xt^2 F^2(x, t).$$

Χρησιμοποιώντας την (4.4.2), όπως επίσης και την εξίσωση που προκύπτει από αυτή παραγωγίζοντας ως προς t , μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε την προηγούμενη εξίσωση ως

$$\sum_{n \geq 4} 2S_n(x) t^n = 2(1+x)t^2 F(x, t) + 2t^2 - 3t F(x, t) + (t^2 - t^3 - xt^3) \frac{\partial F}{\partial t}(x, t).$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του t^n στα δύο μέλη της ανωτέρω εξίσωσης, συμπεραίνουμε ότι

$$2S_n(x) = (n-4)C_{n-1}(x) - (n-4)(1+x)C_{n-2}(x)$$

και λόγω αυτού ότι

$$R_n(x) = (n-2)x C_{n-1}(x) + \frac{n}{2}C_{n-1}(x) + \left(\frac{n}{2} - 1\right)(x-1)C_{n-2}(x).$$

Η Εξίσωση (4.4.4) έπεται με ευθείς υπολογισμούς από τον τύπο για το $h(\Delta_+(\Phi_I), x)$, που δίνεται για την περίπτωση του τύπου D_n στο Λήμμα 2.2.3, και την προηγούμενη έκφραση για το $R_n(x)$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της πρότασης. \square

Παρατήρηση 4.4.2. Φυσιολογικά προκύπτει το ερώτημα για μία απόδειξη της Πρότασης 4.4.1, πιο συμβατή με το πνεύμα των αντίστοιχων για τις Προτάσεις 4.2.1 και 4.3.1.

4.5 Απόδειξη των συγκεντρωτικών αποτελεσμάτων

Αυτή η ενότητα δίνει αποδείξεις για τα Θεωρήματα 4.1.1 και 4.1.2 και το Πρόσχημα 4.1.3.

Απόδειξη των Θεωρημάτων 4.1.1 και 4.1.2. Οι περιπτώσεις $\mathcal{X} \in \{A_n, B_n, D_n\}$ καλύπτονται από τις Προτάσεις 4.2.1, 4.3.1 και 4.4.1. Για $\mathcal{X} \in \{F_4, E_6, E_7, E_8\}$ οι προτεινόμενοι τύποι έπονται από την (4.1.1) με αναλυτικούς υπολογισμούς, που χρησιμοποιούν τον τύπο για το $h(\Delta_+(\Phi), x)$ που δίνεται στο [11, Ενότητα 6]. Μένει να σχολιάσουμε τις περιπτώσεις των τύπων $I_2(m)$, H_3 και H_4 .

Για τους τύπους $I_2(m)$ και H_3 , έπεται από τη θεωρία των τοπικών h -διανυσμάτων (βλ. Θεώρημα 2.1.4 (γ)) ότι $\xi_I(\Gamma(\Phi), x) = tx$, όπου t είναι το πλήθος των εσωτερικών κορυφών του $\Gamma(\Phi)$. Έχουμε $t = m-2$ για $\mathcal{X} = I_2(m)$ και $t = 8$ για $\mathcal{X} = H_3$ (βλ. [20, Σχήμα 2] ή Παρατήρηση 4.5.1) και οι προτεινόμενοι τύποι έπονται. Έστω $\mathcal{X} = H_4$. Από τις (4.1.1), (4.1.2) και το γεγονός ότι $\xi_0(\Phi) = \ell_0(\Phi) = 0$ παίρνουμε

$$\xi_1(\Phi) x(1+x)^2 + \xi_2(\Phi) x^2 = \sum_{J \subseteq I} (-1)^{|I \setminus J|} h(\Delta_+(\Phi_J), x).$$

Θέτοντας $x = 1$ στην προηγούμενη ισότητα, παίρνουμε

$$4\xi_1(\Phi) + \xi_2(\Phi) = \sum_{J \subseteq I} (-1)^{|I \setminus J|} N^+(\Phi_J), \quad (4.5.1)$$

όπου με $N^+(\Psi)$ συμβολίζουμε το πλήθος των εδρών του $\Delta_+(\Psi)$ (ισοδύναμα, το πλήθος των θετικών σημών για το σύστημα ριζών Ψ). Το δεξί μέλος της (4.5.1) μπορεί να υπολογιστεί εύκολα (ισούται με 208), χρησιμοποιώντας τις [40, Πρόταση 3.9] και Πρόταση 2.2.1 (v). Αφού ο αριθμός $\xi_1(\Phi) = \ell_1(\Phi)$ ισούται με το πλήθος των εσωτερικών κορυφών του $\Gamma(\Phi)$, έχουμε $\xi_1(\Phi) = 42$ (βλ. Παρατήρηση 4.5.1). Από την Εξίσωση (4.5.1) υπολογίζουμε $\xi_2(\Phi) = 40$. \square

Απόδειξη του Πορίσματος 4.1.3. Το Θεώρημα 4.1.2 δείχνει ότι το πόρισμα ισχύει όταν το Φ είναι ανάγωγο. Η γενική περίπτωση έπεται από τα Λήμματα 2.1.6 και 2.2.6. \square

Παρατήρηση 4.5.1. Έπεται από τα αποτελέσματα του [59, Ενότητα 2] (βλ. επίσης Θεώρημα 2.1.4 (γ)) ότι ο αριθμός $\ell_1(\Phi) = \xi_1(\Phi)$ είναι ίσος με το πλήθος των εσωτερικών κορυφών του $\Gamma(\Phi)$. Αυτές οι κορυφές είναι ακριβώς οι θετικές ρίζες του Φ με φορέα ίσο με Π (ισοδύναμα, οι θετικές ρίζες που δεν ανήκουν σε κανένα παραβολικό γνήσιο υποσύστημα ριζών Φ_J). Το πλήθος των ριζών αυτών υπολογίστηκε από τον Chapoton [28] και επιδέχεται ένα κομψό, ομοιόμορφο τύπο· βλ. [28, Πρόταση 1.1]. Θα ήταν ενδιαφέρον να βρεθούν ομοιόμορφες ερμηνείες ή τύποι για τους αριθμούς $\ell_i(\Phi)$ ή $\xi_i(\Phi)$ για άλλες τιμές του i . Δε γνωρίζουμε κάποια απλή κλειστή έκφραση για τους αριθμούς $\ell_i(\Phi)$ στις περιπτώσεις τύπου A_n και B_n .

Έχουμε επιβεβαιώσει ότι τα τοπικά h -πολυώνυμα των υποδιαίρεσεων σημών μέχρι και δεκάτου βαθμού έχουν μόνο πραγματικές ρίζες. Κατά συνέπεια, είναι φυσιολογικό να εικάσουμε την ακόλουθη πρόταση.

Εικασία 4.5.2. Το πολυώνυμο $\ell_I(\Gamma(\Phi), x)$ έχει μόνο πραγματικές ρίζες για κάθε σύστημα ριζών Φ .

Κεφάλαιο 5

Το κυβικό h -διάνυσμα της κυβικής βαρυκεντρικής υποδιαίρεσης

5.1 Εισαγωγή

Το παρόν κεφάλαιο είναι εν μέρει εμπνευσμένο από το άρθρο [24]. Σε αυτό το άρθρο, οι Brenti και Welker μελετούν το μετασχηματισμό του h -διανύσματος ενός μονοπλεκτικού συμπλέγματος Δ υπό βαρυκεντρική υποδιαίρεση. Εκφράζουν τις συντεταγμένες του h -διανύσματος της βαρυκεντρικής υποδιαίρεσης του Δ ως μη αρνητικούς ακέραιους γραμμικούς συνδυασμούς αυτών του h -διανύσματος του Δ . Ειδικότερα, δείχνουν ότι η συμμετρικότητα και η μη αρνητικότητα του h -διανύσματος διατηρούνται υπό βαρυκεντρική υποδιαίρεση. Επιπρόσθετα, αποδεικνύουν ότι αν το h -διάνυσμα του Δ είναι μη αρνητικό, τότε το h -πολυώνυμο της βαρυκεντρικής υποδιαίρεσης του Δ έχει μόνο πραγματικές ρίζες.

Εύλογα προκύπτει το ερώτημα κατά πόσο ισχύουν παρόμοια αποτελέσματα για μη μονοπλεκτικά συμπλέγματα. Μελετούμε το μετασχηματισμό του βραχέος κυβικού και του κυβικού h -διανύσματος ενός κυβικού συμπλέγματος K υπό κυβική βαρυκεντρική υποδιαίρεση. Τα κύρια αποτελέσματά μας εκφράζουν τις συντεταγμένες του βραχέος κυβικού και του κυβικού h -διανύσματος της κυβικής βαρυκεντρικής υποδιαίρεσης $\text{sd}_c(K)$ του K ως μη αρνητικούς γραμμικούς συνδυασμούς των συντεταγμένων του αντίστοιχου h -διανύσματος του K (Θεωρήματα 5.2.2 και 5.3.1). Από αυτές τις εκφράσεις συμπεραίνουμε ότι η συμμετρικότητα και η μη αρνητικότητα του βραχέος κυβικού και του κυβικού h -διανύσματος, όπως επίσης και η ύπαρξη μόνο πραγματικών ριζών για το βραχύ h -πολυώνυμο, διατηρούνται υπό κυβική βαρυκεντρική υποδιαίρεση. Επίσης μελετούμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά του βραχέος κυβικού και του κυβικού h -πολυωνύμου υπό διαδοχικές κυβικές βαρυκεντρικές υποδιαίρεσεις (Πορίσματα 5.2.8 και 5.3.5).

5.2 Το βραχύ κυβικό h -διάνυσμα

Αυτή η ενότητα μελετά το βραχύ κυβικό h -πολυώνυμο του κυβικού συμπλέγματος $\text{sd}_c(K)$ ως προς τη μη αρνητικότητα, τη συμμετρικότητα και την ύπαρξη μόνο πραγματικών ριζών. Επίσης εξετάζει την ασυμπτωτική συμπεριφορά του βραχέος κυβικού h -πολυωνύμου της n -οστής επαναλαμβανόμενης κυβικής βαρυκεντρικής υποδιαίρεσης του K , καθώς το n τείνει στο άπειρο. Σε αυτή και στην επόμενη ενότητα, το K συμβολίζει ένα $(d-1)$ -διάστατο κυβικό σύμπλεγμα.

Για να εκφράσουμε το βραχύ κυβικό h -διάνυσμα του κυβικού συμπλέγματος $\text{sd}_c(K)$ ως προς αυτό του K , πρέπει πρώτα να προσδιορίσουμε τη σχέση μεταξύ των αντίστοιχων f -διανυσμάτων.

Πρόταση 5.2.1. Τα f -διανύσματα των K και $\text{sd}_c(K)$ συσχετίζονται ως εξής:

$$f_i(\text{sd}_c(K)) = 2^i \sum_{j=i}^{d-1} \binom{j}{i} f_j(K), \quad i = 0, \dots, d-1. \quad (5.2.1)$$

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι κάθε i -διάστατη πλευρά του $\text{sd}_c(K)$ αντιστοιχεί σε ένα κλειστό διάστημα $[x, y]$ τάξης i στο μερικώς διατεταγμένο σύνολο των πλευρών του K . Για να απαριθμήσουμε αυτά τα διαστήματα, παρατηρούμε ότι υπάρχουν $f_j(K)$ τρόποι για να επιλέξουμε μία πλευρά y του K δοσμένης διάστασης j . Αφού κάθε τέτοια πλευρά είναι ένας συνδυαστικός j -κύβος, υπάρχουν $2^i \binom{j}{i}$ τρόποι να επιλεγεί μία πλευρά x του y συνδιάστασης i . Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι υπάρχουν $2^i \binom{j}{i} f_j(K)$ διαστήματα $[x, y]$ τάξης i στο μερικώς διατεταγμένο σύνολο πλευρών του K με $\dim(y) = j$. Αθροίζοντας σε όλα τα $j \geq i$, παίρνουμε την (5.2.1). \square

Θεώρημα 5.2.2. Τα βραχεία κυβικά h -διανύσματα των K και $\text{sd}_c(K)$ συσχετίζονται ως εξής:

$$h_i^{(sc)}(\text{sd}_c(K)) = \sum_{j=0}^{d-1} B(d, i, j) h_j^{(sc)}(K), \quad i = 0, \dots, d-1, \quad (5.2.2)$$

όπου οι συντελεστές $B(d, i, j)$ είναι μη αρνητικοί ρητοί αριθμοί, που δίνονται από τη γεννήτρια συνάρτηση

$$\sum_{i=0}^{d-1} B(d, i, j) x^i = \frac{1}{2^{d-1}} (3x+1)^j (x+3)^{d-1-j}. \quad (5.2.3)$$

Απόδειξη. Η Εξίσωση (5.2.1) μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως

$$f(\text{sd}_c(K), x) = f(K, 1+2x), \quad (5.2.4)$$

όπου $f(K, x)$ και $f(\text{sd}_c(K), x)$ είναι τα f -πολυώνυμα των K και $\text{sd}_c(K)$, αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας τις (2.1.6) και (2.1.7), μπορούμε να γράψουμε την (5.2.4) στη μορφή

$$2^{d-1} h^{(sc)}(\text{sd}_c(K), x) = (x+3)^{d-1} h^{(sc)}\left(K, \frac{3x+1}{x+3}\right), \quad (5.2.5)$$

έτσι ώστε

$$h^{(sc)}(\text{sd}_c(K), x) = \frac{1}{2^{d-1}} \sum_{j=0}^{d-1} h_j^{(sc)}(K) (3x+1)^j (x+3)^{d-1-j}.$$

Το αποτέλεσμα προκύπτει εξισώνοντας τους συντελεστές του x^i στα δύο μέλη αυτής της ισότητας. \square

Ένα διάνυσμα $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ καλείται μη αρνητικό (αντίστοιχα, συμμετρικό) αν $a_i \geq 0$ (αντίστοιχα, $a_i = a_{n-1-i}$) για κάθε $0 \leq i \leq n-1$.

Πόρισμα 5.2.3. Αν το K έχει μη αρνητικό βραχύ κυβικό h -διάνυσμα, τότε το ίδιο ισχύει και για το $\text{sd}_c(K)$.

Απόδειξη. Από την Εξίσωση (5.2.3) προκύπτει ότι οι συντελεστές $B(d, i, j)$ είναι μη αρνητικοί για όλα τα $0 \leq i, j \leq d-1$. Κατά συνέπεια, το πόρισμα προκύπτει από την (5.2.2). \square

Πόρισμα 5.2.4. Αν το K έχει συμμετρικό βραχύ κυβικό h -διάνυσμα, τότε το ίδιο ισχύει και για το $\text{sd}_c(K)$.

Απόδειξη. Αντικαθιστώντας το x με $1/x$ στην (5.2.3) και πολλαπλασιάζοντας με x^{d-1} , προκύπτει ότι

$$B(d, i, j) = B(d, d-1-i, d-1-j).$$

Υποθέτουμε ότι το $h^{(sc)}(K)$ είναι συμμετρικό, έτσι ώστε να ισχύει ότι $h_{d-1-j}^{(sc)}(K) = h_j^{(sc)}(K)$ για όλα τα $0 \leq j \leq d-1$. Τότε

$$\begin{aligned} h_{d-1-i}^{(sc)}(\text{sd}_c(K)) &= \sum_{j=0}^{d-1} B(d, d-1-i, j) h_j^{(sc)}(K) \\ &= \sum_{k=0}^{d-1} B(d, d-1-i, d-1-k) h_{d-1-k}^{(sc)}(K) \\ &= \sum_{k=0}^{d-1} B(d, i, k) h_k^{(sc)}(K) = h_i^{(sc)}(\text{sd}_c(K)) \end{aligned}$$

και συνεπώς το $h^{(sc)}(\text{sd}_c(K))$ είναι επίσης συμμετρικό. \square

Πόρισμα 5.2.5. Το βραχύ κυβικό h -πολυώνυμο του K έχει μόνο πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν ισχύει το ίδιο και για το $\text{sd}_c(K)$.

Απόδειξη. Ο ισχυρισμός προκύπτει εύκολα από την (5.2.5). Αφήνουμε τις λεπτομέρειες στον αναγνώστη. \square

Παράδειγμα 5.2.6. Για το συνοριακό σύμπλεγμα K του τριδιάστατου κύβου έχουμε $h_K^{(sc)}(x) = 8(1+x+x^2)$. Αυτό το πολυώνυμο έχει θετικούς συντελεστές και δύο μη πραγματικές μιγαδικές ρίζες. Από τα Πορίσματα 5.2.3 και 5.2.5, προκύπτει ότι το ίδιο ισχύει και για το βραχύ κυβικό h -πολυώνυμο του $\text{sd}_c(K)$. Αυτό το παράδειγμα έρχεται σε αντίθεση με αυτό που ισχύει για τις βαρυκεντρικές υποδιαίρεσεις των μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων (βλ. [24, Θεώρημα 3.1]).

Συμβολίζουμε με $\text{sd}_c^n(K)$ την n -οστή επαναλαμβανόμενη κυβική βαρυκεντρική υποδιαίρεση του K . Ισοδύναμα, έχουμε $\text{sd}_c^0(K) = K$ και $\text{sd}_c^n(K) = \text{sd}_c(\text{sd}_c^{n-1}(K))$ για $n \geq 1$. Το βραχύ κυβικό h -πολυώνυμο του κυβικού συμπλέγματος $\text{sd}_c^n(K)$ έχει την ακόλουθη απλή έκφραση, συναρτήσει του βραχέος κυβικού h -πολυωνύμου του K .

Πρόταση 5.2.7. Τα βραχέα κυβικά h -πολυώνυμα των K και $\text{sd}_c^n(K)$ συσχετίζονται ως εξής:

$$h^{(sc)}(\text{sd}_c^n(K), x) = \left(\frac{(2^n - 1)x + 2^n + 1}{2} \right)^{d-1} h^{(sc)} \left(K, \frac{(2^n + 1)x + 2^n - 1}{(2^n - 1)x + 2^n + 1} \right). \quad (5.2.6)$$

Απόδειξη. Η πρόταση έπεται από την (5.2.5) με επαγωγή στο n . \square

Από το ακόλουθο πόρισμα προκύπτει ότι όλες οι μιγαδικές ρίζες του βραχέος κυβικού h -πολυωνύμου του $\text{sd}_c^n(K)$ συγκλίνουν στο -1 καθώς $n \rightarrow \infty$.

Πόρισμα 5.2.8. Για $d \geq 2$, έχουμε ότι

$$\frac{1}{2^{n(d-1)}} h^{(sc)}(\text{sd}_c^n(K), x) \rightarrow f_{d-1}(K) (x+1)^{d-1}$$

συντελεστής προς συντελεστή, καθώς $n \rightarrow \infty$. Ειδικότερα, το βραχύ κυβικό h -πολυώνυμο του $\text{sd}_c^n(K)$ έχει θετικούς και μονότροπους συντελεστές για όλα τα αρκετά μεγάλα n .

Απόδειξη. Η πρώτη πρόταση έπεται με ευθείς υπολογισμούς από την (5.2.6) και το γεγονός ότι $h^{(sc)}(K, 1) = 2^{d-1} f_{d-1}(K)$. Η δεύτερη πρόταση έπεται από την πρώτη και την ευρέως γνωστή ιδιότητα μονοτροπίας των διωνυμικών συντελεστών. \square

Παρατήρηση 5.2.9. Δε γνωρίζουμε κάποιο παράδειγμα κυβικού συμπλέγματος K για το οποίο το $h^{(sc)}(K)$ να είναι μη αρνητικό και το $h^{(sc)}(\text{sd}_c(K), x)$ να μην είναι μονότροπο.

5.3 Το κυβικό h -διάγραμμα

Αυτή η ενότητα αποδεικνύει αποτελέσματα για το κυβικό h -διάγραμμα του κυβικού συμπλέγματος $\text{sd}_c(K)$ ανάλογα με αυτά της Ενότητας 5.2 για το βραχύ κυβικό h -διάγραμμα.

Θεώρημα 5.3.1. Τα κυβικά h -διαγράμματα των K και $\text{sd}_c(K)$ συσχετίζονται ως εξής:

$$h_i^{(c)}(\text{sd}_c(K)) = \sum_{j=0}^d C(d, i, j) h_j^{(c)}(K), \quad (5.3.1)$$

όπου οι συντελεστές $C(d, i, j)$ είναι μη αρνητικοί ρητοί αριθμοί, που δίνονται από τη γεννήτρια συνάρτηση

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^d \sum_{i=0}^d C(d, i, j) x^i y^j &= \frac{1}{1+x} (1 + x^{d+1} y^d) + \frac{xy}{2^{d-3}} \frac{(x+3)^{d-1} - (3x+1)^{d-1} y^{d-1}}{x+3 - (3x+1)y} \\ &+ \frac{x}{2^{d-1}(1+x)} ((x+3)^{d-1} + (3x+1)^{d-1} y^d). \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Απόδειξη. Δεδομένου ότι $h_0^{(c)}(K) = h_0^{(c)}(\text{sd}_c(K)) = 2^{d-1}$, η Εξίσωση (5.3.1) ισχύει για $i = 0$ αν θέσουμε $C(d, 0, 0) = 1$ και $C(d, 0, j) = 0$ για $1 \leq j \leq d$. Αυτό συμφωνεί με την (5.3.2), αφού για $x = 0$ το δεξί μέλος ανάγεται στο σταθερό πολυώνυμο με τιμή 1. Χρησιμοποιώντας τις (2.1.10), (2.1.12) και (5.2.2), υπολογίζουμε ότι για $1 \leq i \leq d$

$$\begin{aligned} h_i^{(c)}(\text{sd}_c(K)) &= \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^{i+k-1} h_k^{(sc)}(\text{sd}_c(K)) + (-1)^i 2^{d-1} \\ &= \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^{i+k-1} \sum_{j=0}^{d-1} B(d, k, j) h_j^{(sc)}(K) + (-1)^i 2^{d-1} \\ &= \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^{i+k-1} \sum_{j=0}^{d-1} B(d, k, j) (h_j^{(c)}(K) + h_{j+1}^{(c)}(K)) + (-1)^i h_0^{(c)}(K) \\ &= \sum_{j=0}^d C(d, i, j) h_j^{(c)}(K), \end{aligned}$$

όπου

$$C(d, i, 0) = \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^{i+k-1} B(d, k, 0) + (-1)^i \quad (5.3.3)$$

και

$$C(d, i, j) = \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^{i+k-1} (B(d, k, j) + B(d, k, j-1)) \quad (5.3.4)$$

για $1 \leq j \leq d$, με $B(d, k, d) = 0$ για όλα τα k . Χρησιμοποιώντας την (5.2.3), υπολογίζουμε ότι για $1 \leq j \leq d-1$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^d C(d, i, j)x^i &= \sum_{i=0}^d \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^{i+k-1} (B(d, k, j) + B(d, k, j-1)) x^i \\
&= \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^{k-1} (B(d, k, j) + B(d, k, j-1)) (-x)^{k+1} \frac{1 - (-x)^{d-k}}{1+x} \\
&= \frac{1}{1+x} \left(x \sum_{k=0}^{d-1} B(d, k, j)x^k + (-x)^{d+1} \sum_{k=0}^{d-1} B(d, k, j)(-1)^k \right. \\
&\quad \left. + x \sum_{k=0}^{d-1} B(d, k, j-1)x^k + (-x)^{d+1} \sum_{k=0}^{d-1} B(d, k, j-1)(-1)^k \right) \\
&= \frac{1}{2^{d-1}(1+x)} (x(3x+1)^j (x+3)^{d-1-j} + (-x)^{d+1} (-2)^j 2^{d-1-j} \\
&\quad + x(3x+1)^{j-1} (x+3)^{d-j} + (-x)^{d+1} (-2)^{j-1} 2^{d-j}).
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\sum_{i=0}^d C(d, i, j)x^i = \frac{x(3x+1)^{j-1} (x+3)^{d-1-j}}{2^{d-3}}. \quad (5.3.5)$$

Με παρόμοιους υπολογισμούς, συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{i=0}^d C(d, i, 0)x^i = \frac{1}{1+x} \left(\frac{x(x+3)^{d-1}}{2^{d-1}} + 1 \right) \quad (5.3.6)$$

και

$$\sum_{i=0}^d C(d, i, d)x^i = \frac{1}{1+x} \left(\frac{x(3x+1)^{d-1}}{2^{d-1}} + x^{d+1} \right). \quad (5.3.7)$$

Από αυτές τις εξισώσεις μπορούμε να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι οι $C(d, i, j)$ είναι μη αρνητικοί ρητοί αριθμοί για όλα τα $0 \leq i, j \leq d$. Πολλαπλασιάζοντας τις Εξισώσεις (5.3.5), (5.3.6) και (5.3.7) με y^j για $1 \leq j \leq d-1$, $j=0$ και $j=d$, αντίστοιχα, και αθροίζοντας σε όλα τα j καταλήγουμε στην (5.3.2). \square

Πόρισμα 5.3.2. Αν το K έχει μη αρνητικό κυβικό h -διάγραμμα, τότε το ίδιο ισχύει και για το $\text{sd}_c(K)$. \square

Πόρισμα 5.3.3. Αν το K έχει συμμετρικό κυβικό h -διάγραμμα, τότε το ίδιο ισχύει και για το $\text{sd}_c(K)$.

Απόδειξη. Όπως και στην απόδειξη του Πορίσματος 5.2.4, αρκεί να δειχθεί ότι $C(d, d-i, d-j) = C(d, i, j)$ για κάθε $0 \leq i, j \leq d$. Αυτό προκύπτει από την (5.3.2) αντικαθιστώντας τα x και y με $1/x$ και $1/y$, αντίστοιχα, και πολλαπλασιάζοντας με $x^d y^d$. \square

Παρατήρηση 5.3.4. Δε γνωρίζουμε παράδειγμα κυβικού συμπλέγματος K με μη αρνητικό κυβικό h -διάγραμμα για το οποίο να ισχύει ότι το $h^{(c)}(\text{sd}_c(K), x)$ δεν έχει μόνο πραγματικές ρίζες.

Πόρισμα 5.3.5. Για $d \geq 2$, έχουμε ότι

$$\frac{1}{2^{n(d-1)}} h^{(c)}(\text{sd}_c^n(K), x) \rightarrow f_{d-1}(K) x (x+1)^{d-2} \quad (5.3.8)$$

συντελεστής προς συντελεστή, καθώς $n \rightarrow \infty$. Ειδικότερα, αν $(-1)^{d-1} \tilde{\chi}(K) \geq 0$, τότε το κυβικό h -πολυώνυμο του $\text{sd}_c^n(K)$ έχει μη αρνητικούς και μονότροπους συντελεστές για όλα τα αρκετά μεγάλα n .

Απόδειξη. Αφού το $\text{sd}_c(K)$ είναι μία υποδιαίρεση του K , έχουμε $\tilde{\chi}(\text{sd}_c(K)) = \tilde{\chi}(K)$ (αυτή η ισότητα προκύπτει επίσης από την (5.2.4) θέτοντας $x = -1$). Συνεπώς, εφαρμόζοντας την (2.1.11) στο $\text{sd}_c^n(K)$, έχουμε

$$(1+x)h^{(c)}(\text{sd}_c^n(K), x) = 2^{d-1} + x h^{(sc)}(\text{sd}_c^n(K), x) + 2^{d-1}(-x)^{d+1} \tilde{\chi}(K). \quad (5.3.9)$$

Διαπιστώνουμε ότι αν $(-1)^{d-1} \tilde{\chi}(K) \geq 0$, τότε $h_d^{(c)}(\text{sd}_c^n(K)) = (-2)^{d-1} \tilde{\chi}(K) \geq 0$. Το αποτέλεσμα προκύπτει από την (5.3.9) και το Πόρισμα 5.2.8. \square

Βιβλιογραφία

- [1] R.M. Adin, *A new cubical h -vector*, Discrete Math. **157** (1996), 3–14.
- [2] R.M. Adin, F. Brenti and Y. Roichman, *Descent numbers and major indices for the hyperoctahedral group*, Adv. in Appl. Math. **27** (2001), 210–224.
- [3] C.A. Athanasiadis, *On noncrossing and nonnesting partitions for classical reflection groups*, Electron. J. Combin. **5** (1998), Research Paper 42, 16pp (electronic).
- [4] C.A. Athanasiadis, *Cubical subdivisions and local h -vectors*, Ann. Comb. **16** (2012), 421–448.
- [5] C.A. Athanasiadis, *Some combinatorial properties of flag simplicial pseudomanifolds and spheres*, Ark. Mat. **49** (2011), 17–29.
- [6] C.A. Athanasiadis, *Flag subdivisions and γ -vectors*, Pacific J. Math. **259** (2012), 257–278.
- [7] C.A. Athanasiadis, T. Brady, J. McCammond and C. Watt, *h -Vectors of generalized associahedra and noncrossing partitions*, Int. Math. Res. Not. **vol. 2006**, Article 69705, 28pp.
- [8] C.A. Athanasiadis and V. Reiner, *Noncrossing partitions for the group D_n* , SIAM J. Discrete Math. **18** (2004), 397–417.
- [9] C.A. Athanasiadis and C. Savvidou, *The local h -vector of the cluster subdivision of a simplex*, Sémin. Lothar. Combin. **66** (2012), Article B66c, 21pp (electronic).
- [10] C.A. Athanasiadis and C. Savvidou, *A symmetric unimodal decomposition of the derangement polynomial of type B* , preprint, 2013, arXiv:1303.2302.
- [11] C.A. Athanasiadis and E. Tzanaki, *On the enumeration of positive cells in generalized cluster complexes and Catalan hyperplane arrangements*, J. Algebraic Combin. **23** (2006), 355–375.
- [12] E.K. Babson, L.J. Billera and C.S. Chan, *Neighborly cubical spheres and a cubical lower bound conjecture*, Israel J. Math. **102** (1997), 297–315.
- [13] M. Beck and A. Stapledon, *On the log-concavity of Hilbert series of Veronese subrings and Ehrhart series*, Math. Z. **264** (2010), 195–207.
- [14] R. Biagoli and F. Caselli, *Invariant algebras and major indices for classical Weyl groups*, Proc. Lond. Math. Soc. **88** (2004), 603–631.

- [15] L.J. Billera and C.W. Chen, *Sufficiency of McMullen's conditions for f -vectors of simplicial polytopes*, Bull. Amer. Math. Soc. **2** (1980), 181–185.
- [16] L.J. Billera and C.W. Chen, *A proof of the sufficiency of McMullen's conditions for f -vectors of simplicial polytopes*, J. Combin. Theory Series A **31** (1981), 237–255.
- [17] A. Björner, *Topological methods*, in *Handbook of Combinatorics* (R.L. Graham, M. Grötschel and L. Lovász, eds.), North Holland, Amsterdam, 1995, pp. 1819–1872.
- [18] A. Björner and F. Brenti, *Combinatorics of Coxeter groups*, Graduate Texts in Mathematics **231**, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [19] N. Bourbaki, *Elements of the history of mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [20] T. Brady and C. Watt, *Lattices in finite real reflection groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), 1983–2005.
- [21] P. Brändén, *Actions on permutations and unimodality of descent polynomials*, European J. Combin. **29** (2008), 514–531.
- [22] F. Brenti, *Unimodal polynomials arising from symmetric functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), 1133–1141.
- [23] F. Brenti, *q -Eulerian polynomials arising from Coxeter groups*, European J. Combin. **15** (1994), 417–441.
- [24] F. Brenti and V. Welker, *f -Vectors of barycentric subdivisions*, Math. Z. **259** (2008), 849–865.
- [25] F. Brenti and V. Welker, *The Veronese construction for formal power series and graded algebras*, Adv. in Appl. Math. **42** (2009), 545–556.
- [26] M. Brun and T. Römer, *Subdivisions of toric complexes*, J. Algebraic Combin. **21** (2005), 423–448.
- [27] F. Chapoton, *Enumerative properties of generalized associahedra*, Sémin. Lothar. Combin. **51** (2004), Article B51b, 16pp (electronic).
- [28] F. Chapoton, *Sur le nombre de réflexions pleines dans les groupes de Coxeter finis*, Bull. Belgian Math. Soc. **13** (2006), 585–596.
- [29] F. Chapoton, S. Fomin and A.V. Zelevinsky, *Polytopal realizations of generalized associahedra*, Canad. Math. Bull. **45** (2002), 537–566.
- [30] J. Cheeger, W. Müller and R. Schrader, *On the curvature of piecewise flat spaces*, Commun. Math. Phys. **92** (1984), 405–454.
- [31] W.Y.C. Chen, R.L. Tang and A.F.Y. Zhao, *Derangement polynomials and excedances of type B*, Electron. J. Combin. **16** (2) (2009), Research Paper 15, 16pp (electronic).
- [32] C.-O. Chow, *On derangement polynomials of type B. II*, J. Combin. Theory Series A **116** (2009), 816–830.
- [33] K. Dilks, T.K. Petersen and J.R. Stembridge, *Affine descents and the Steinberg torus*, Adv. in Appl. Math. **42** (2009), 423–444.

- [34] A. Edrei, *Proof of a conjecture of Schoenberg on the generating function of a totally positive sequence*, *Canad. J. Math.* **5** (1953), 86–94.
- [35] D. Foata, *Groupes de réarrangements et nombres d'Euler*, *C.R. Acad. Sci. Paris Sr. A–B* **275** (1972), 1147–1150.
- [36] D. Foata and M.-P. Schützenberger, *Théorie Géométrique des Polynômes Eulériens*, *Lecture Notes in Mathematics* **138**, Springer-Verlag, 1970.
- [37] D. Foata and V. Strehl, *Rearrangements of the symmetric group and enumerative properties of the tangent and secant numbers*, *Math. Z.* **137** (1974), 257–264.
- [38] S. Fomin and N. Reading, *Root systems and generalized associahedra*, in *Geometric Combinatorics* (E. Miller, V. Reiner and B. Sturmfels, eds.), *IAS/Park City Mathematics Series* **13**, Amer. Math. Society, Providence, RI, 2007, pp. 389–496.
- [39] S. Fomin and A.V. Zelevinsky, *Cluster algebras I: Foundations*, *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002), 497–529.
- [40] S. Fomin and A.V. Zelevinsky, *Y-systems and generalized associahedra*, *Ann. of Math.* **158** (2003), 977–1018.
- [41] S.R. Gal, *Real root conjecture fails for five and higher dimensional spheres*, *Discrete Comput. Geom.* **34** (2005), 269–284.
- [42] I.M. Gessel, *Generating functions and enumeration of sequences*, Ph.D. Thesis, MIT, 1977.
- [43] B. Grünbaum, *Convex Polytopes*, Interscience, London, 1967; second edition, *Graduate Texts in Mathematics* **221**, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [44] J.E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* **29**, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1990.
- [45] G. Kreweras, *Sur les partitions non-croisées d'un cycle*, *Discrete Math.* **1** (1972), 333–350.
- [46] L.M. Lai and T.K. Petersen, *Euler-Mahonian distributions of type B_n* , *Discrete Math.* **311** (2011), 645–650.
- [47] R. Marsh, M. Reineke and A.V. Zelevinsky, *Generalized associahedra via quiver representations*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **355** (2003), 4171–4186.
- [48] E. Nevo and T.K. Petersen, *On γ -vectors satisfying the Kruskal-Katona inequalities*, *Discrete Comput. Geom.* **45** (2011), 503–521.
- [49] B. Nill, *Combinatorial questions related to stringy E -polynomials of Gorenstein polytopes*, in *Toric Geometry* (K. Altmann et. al., eds.), *Oberwolfach Reports*, no. 21, 2012, pp. 62–64.
- [50] T.K. Petersen, *Enriched P -partitions and peak algebras*, *Adv. Math.* **209** (2007), 561–610.
- [51] A. Postnikov, V. Reiner and L. Williams, *Faces of generalized permutohedra*, *Doc. Math.* **13** (2008), 207–273.

- [52] N. Reading, *Clusters, Coxeter sortable elements and noncrossing partitions*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), 5931–5958.
- [53] V. Reiner, *Non-crossing partitions for classical reflection groups*, Discrete Math. **177** (1997), 195–222.
- [54] V. Reiner, D. Stanton and D. White, *The cyclic sieving phenomenon*, J. Combin. Theory Series A **108** (2004), 17–50.
- [55] C. Savvidou, *Face numbers of cubical barycentric subdivisions*, unpublished manuscript, 2010, arXiv:1005.4156.
- [56] J. Shareshian and M.L. Wachs, *Eulerian quasisymmetric functions*, Adv. Math. **225** (2010), 2921–2966.
- [57] R.P. Stanley, *The number of faces of a simplicial convex polytope*, Adv. Math. **35** (1980), 236–238.
- [58] R.P. Stanley, *Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry*, in *Graph Theory and its Applications: East and West*, Annals of the New York Academy of Sciences **576**, New York Acad. Sci., New York, 1989, pp. 500–535.
- [59] R.P. Stanley, *Subdivisions and local h -vectors*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), 805–851.
- [60] R.P. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, second edition, Birkhäuser, Basel, 1996.
- [61] R.P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, vol. 2, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **62**, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [62] R.P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, vol. 1, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **49**, Cambridge University Press, second edition, Cambridge, 2011.
- [63] J.R. Stembridge, *Eulerian numbers, tableaux, and the Betti numbers of a toric variety*, Discrete Math. **99** (1992), 307–320.
- [64] J.R. Stembridge, *Some permutation representations of Weyl groups associated with the cohomology of toric varieties*, Adv. Math. **106** (1994), 244–301.
- [65] J. Walker, *Canonical homeomorphisms of posets*, European J. Combin. **9** (1988), 97–107.
- [66] X. Zhang, *On q -derangement polynomials*, in *Combinatorics and Graph Theory '95*, Vol. 1 (Hefei), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1995, pp. 462–465.
- [67] G.M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Graduate Texts in Mathematics **152**, Springer-Verlag, New York, 1995.