ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Χειμερινό Εξάμηνο 2009
Ασκήσεις #1

Σε ότι ακολουθεί, G είναι πεπερασμένη ομάδα και V είναι $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης.

1. Δείξτε ότι η απεικόνιση $G \times G \to G$ που ορίζεται θέτοντας $g \cdot x = gxg^{-1}$ για $g, x \in G$ αποτελεί δράση της ομάδας G πάνω στον εαυτό της.

2. Δείξτε ότι οι μόνες αναπαραστάσεις της συμμετρικής ομάδας $\mathfrak{S}_n$ διάστασης ένα είναι η προφανής αναπαράσταση και η αναπαράσταση του προσήμου. (*Υπόδειξη:* Αν $\rho : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι αναπαράσταση και T είναι το σύνολο των αντιμεταθέσεων της $\mathfrak{S}_n$, δείξτε ότι είτε $\rho(t) = 1$ για κάθε $t \in T$, είτε $\rho(t) = -1$ για κάθε $t \in T$.)

3. Έστω ένα G-πρότυπο V και $W \subseteq V$ ένας G-αναλλοίωτος υπόχωρος.

(α) Δείξτε ότι ο χώρος πηλίκο V/W είναι επίσης G-πρότυπο, αν θέσουμε

$$g \cdot (v + W) \ = \ gv + W$$

για $g \in G$ και $v \in V$.

(β) Δείξτε ότι οι V και $W \oplus (V/W)$ είναι ισόμορφοι ως G-πρότυπα.

4. Έστω ανάγωγη αναπαράσταση $\rho : G \to GL(V)$.

(α) Αν $\dim_{\mathbb{C}}(V) \geq 2$ και $v \in V$, δείξτε ότι $\sum_{g \in G} gv = 0$.

(β) Αν $h \in G$ και $gh = hg$ για κάθε $g \in G$, δείξτε ότι $\rho(h) = \zeta I$ για κάποια ρίζα της μονάδας $\zeta \in \mathbb{C}$.

5. Έστω V ανάγωγο G-πρότυπο και έστω $\langle\ ,\ \rangle$ και $\langle\ ,\ \rangle'$ δύο G-αναλλοίωτα εσωτερικά γινόμενα στο V. Δείξτε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, τέτοιο ώστε $\langle v, w \rangle\ = c \langle v, w \rangle'$ για όλα τα $v, w \in V$, ως εξής:

(α) Δείξτε ότι οι απεικονίσεις $H, H' : V \to V^*$ με $H(v)(w) = \langle v, w \rangle$ και $H'(v)(w) = \langle v, w \rangle'$ για $v, w \in V$ είναι συζυγείς - γραμμικοί ισομορφισμοί διανυσματικών χώρων.

(β) Δείξτε ότι η απεικόνιση $\phi = H^{-1} \circ H' : V \to V$ είναι G-ισομορφισμός.

(γ) Συνάγετε από το Λήμμα του Schur ότι υπάρχει $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, τέτοιο ώστε $\langle v, w \rangle = c \langle v, w \rangle'$ για όλα τα $v, w \in V$.

Έως Πέμπτη, 29 Οκτωβρίου

ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Χειμερινό Εξάμηνο 2009
Ασκήσεις #2

Σε ότι ακολουθεί, G είναι πεπερασμένη ομάδα και V είναι $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης.

6. Έστω αναπαράσταση $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ της G διάστασης d με χαρακτήρα χ και έστω $g \in G$. Δείξτε ότι $\chi(g) = d$ αν και μόνο αν $\rho(g) = I$, όπου $I : V \to V$ είναι ο ταυτοτικός ενδομορφισμός του V.

7. Έστω $G = \{\epsilon, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\}$ η κυκλική ομάδα τάξης n και έστω η αναπαράσταση $\rho : G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ με

$$\rho(g^k) \;=\; \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi k}{n} & \sin\frac{2\pi k}{n} \\ \\ \text{-}\sin\frac{2\pi k}{n} & \cos\frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix}$$

για $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Ποια είναι η ανάλυση της ρ σε ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων της G;

8. Η συμμετρική ομάδα $\mathfrak{S}_3$ δρα στο σύνολο μονωνύμων $M_n = \{x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3} : 0 \le a_i \le n-1\}$ σε μετατιθέμενες μεταβλητές x_1, x_2, x_3 με

$$\pi \cdot u \;=\; x_{\pi(1)}^{a_1} x_{\pi(2)}^{a_2} x_{\pi(3)}^{a_3}$$

για $\pi \in \mathfrak{S}_3$ και $u = x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3} \in M_n$. Ποια είναι η ανάλυση της αντίστοιχης αναπαράστασης μεταθέσεων σε ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων της $\mathfrak{S}_3$;

9. Πόσες κλάσεις συζυγίας έχει η συμμετρική ομάδα $\mathfrak{S}_6$;

10. Για $\pi \in \mathfrak{S}_n$ θέτουμε $\chi(\pi) \;=\; \#\{1 \le i \le n : \pi(i) = i\} - 1$.

(α) Δείξτε ότι η χ είναι χαρακτήρας κάποιας αναπαράστασης ρ της $\mathfrak{S}_n$.

(β) Αν $p(n,k) \;=\; \#\{\pi \in \mathcal{S}_n : \chi(\pi) = k-1\}$, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{n} kp(n,k) \;=\; \sum_{k=0}^{n} k(k-1)p(n,k) \;=\; n!.$$

(γ) Δείξτε ότι η αναπαράσταση ρ είναι ανάγωγη. (*Υπόδειξη*: Χρησιμοποιώντας το (β), δείξτε ότι $\langle \chi, \chi \rangle = 1$.)

Έως Πέμπτη, 19 Νοεμβρίου

ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Χειμερινό Εξάμηνο 2009
Ασκήσεις #3

11. Έστω η δράση της κυκλικής ομάδας $G = \{\epsilon, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\}$ τάξης n στο σύνολο των υποσυνόλων της $\mathbb{Z}_n$ με δύο στοιχεία, η οποία ορίζεται θέτοντας

$$g^k \cdot \{i, j\} \; = \; \{i+k, j+k\}$$

για διακεκριμένα στοιχεία $i, j \in \mathbb{Z}_n$. Έστω ϕ η αντίστοιχη αναπαράσταση της G και ρ η κανονική της αναπαράσταση.

(α) Για $n = 7$, δείξτε ότι η ϕ είναι ισόμορφη με τη $\rho \oplus \rho \oplus \rho$. Γενικεύστε για τυχαίο περιττό n.

(β) Για $n = 8$, δείξτε ότι η ϕ είναι ισόμορφη με τη $\rho \oplus \rho \oplus \rho \oplus \phi'$ για κάποια αναπαράσταση ϕ' της G και αναλύστε τη ϕ' σε ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων. Γενικεύστε για τυχαίο άρτιο n.

12. Έστω χ, ψ ανάγωγοι χαρακτήρες πεπερασμένης ομάδας G. Δείξτε ότι ο $\chi\psi$ περιέχεται στην κανονική αναπαράσταση της G, δηλαδή ότι $\langle \chi\psi, \phi \rangle \le \dim \phi$ για κάθε ανάγωγο χαρακτήρα ϕ της G.

13. Έστω $\lambda \vdash n$.

(α) Υπολογίστε την τιμή του χαρακτήρα της αναπαράστασης M^λ της συμμετρικής ομάδας $\mathfrak{S}_n$ στη μετάθεση $w \in \mathfrak{S}_n$, αν $\lambda = (5, 4, 4, 1)$ και η w έχει κυκλικό τύπο $(4, 3, 2, 2, 2, 1)$.

(β) Δείξτε ότι $\chi^\lambda(w) \in \mathbb{Z}$ για κάθε $w \in \mathfrak{S}_n$, όπου χ^λ είναι ο ανάγωγος χαρακτήρας της $\mathfrak{S}_n$ που αντιστοιχεί στη διαμέριση λ. (*Υπόδειξη*: Χρησιμοποιήστε το Πόρισμα 10.16.)

14. Χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό των αριθμών Kostka, δείξτε ότι αν λ, μ είναι διαμερίσεις του n και $K_{\lambda\mu} \neq 0$, τότε $\lambda \trianglerighteq \mu$.

15. Για $\lambda \vdash n$ συμβολίζουμε με λ' τη διαμέριση του n, το διάγραμμα Young της οποίας προκύπτει από εκείνο της λ με ανάκλαση στην κύρια διαγώνιο. Για παράδειγμα αν $\lambda = (5, 4, 4, 1)$, τότε $\lambda' = (4, 3, 3, 3, 1)$. Για διαμερίσεις λ, μ του n, δείξτε ότι $\lambda \trianglerighteq \mu$ αν και μόνο αν $\mu' \trianglerighteq \lambda'$.

Έως Τρίτη, 8 Δεκεμβρίου

ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Χειμερινό Εξάμηνο 2009
Ασκήσεις #4

16. Έστω πεπερασμένη ομάδα G.

(α) Δείξτε ότι οι ακόλουθοι δύο χαρακτήρες της G ταυτίζονται: (i) ο χαρακτήρας της δράσης $\sigma : G \to \mathfrak{S}(G)$ της συζυγίας της G πάνω στον εαυτό της, δηλαδή με $\sigma(g)(x) = gxg^{-1}$ για $g, x \in G$ και (ii) ο χαρακτήρας $\sum_\chi \bar{\chi}\chi$, όπου στο άθροισμα το χ διατρέχει όλους τους ανάγωγους χαρακτήρες της G.

(β) Έστω ψ_G ο χαρακτήρας του (α). Δείξτε ότι $\langle \psi_G, \chi \rangle = \sum_K \chi(K)$ για κάθε ανάγωγο χαρακτήρα χ της G, όπου στο άθροισμα το K διατρέχει όλες τις κλάσεις συζυγίας της G. Συνάγετε ότι $\sum_K \chi(K) \ge 0$ για κάθε ανάγωγο χαρακτήρα χ της G.

17. Έστω ακέραιοι n, k με $1 \le k \le n/2$. Η συμμετρική ομάδα $\mathfrak{S}_n$ δρα πάνω στο σύνολο $A_{n,k}$ των υποσυνόλων του $\{1, 2, \ldots, n\}$ με k στοιχεία ως εξής:

$$\pi \cdot \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \ = \ \{\pi(a_1), \pi(a_2), \ldots, \pi(a_k)\}$$

για $\pi \in \mathfrak{S}_n$ και $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \in A_{n,k}$. Ποια είναι η ανάλυση της αντίστοιχης αναπαράστασης σε ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων της $\mathfrak{S}_n$; (*Υπόδειξη*: Χρησιμοποιήστε τον κανόνα του Young.)

18. Να εκφράσετε τη μονωνυμική συμμετρική συνάρτηση $m_{(2,2)}$ στη βάση $\{s_\lambda : \lambda \vdash 4\}$ του $\Lambda^4_{\mathbb{Q}}$.

19. Δείξτε ότι για $\lambda, \mu \vdash n$ ισχύει

$$\phi^\lambda(\mu) \ = \ \sum_{\nu \vdash n} \chi^\nu(\mu) K_{\nu\lambda},$$

όπου ϕ^λ και χ^λ είναι οι χαρακτήρες των αναπαραστάσεων M^λ και S^λ της συμμετρικής ομάδας $\mathfrak{S}_n$, αντίστοιχα, και $K_{\nu\lambda}$ είναι οι αριθμοί Kostka.

20. Δείξτε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του ενδομορφισμού $\omega : \Lambda^n_{\mathbb{Q}} \to \Lambda^n_{\mathbb{Q}}$ είναι ίσο με

$$(x-1)^{\frac{p(n)+c(n)}{2}} \, (x+1)^{\frac{p(n)-c(n)}{2}},$$

όπου $p(n)$ είναι το πλήθος των διαμερίσεων του n και $c(n)$ είναι το πλήθος εκείνων των διαμερίσεων λ του n για τις οποίες $\lambda' = \lambda$.

Έως Τρίτη, 12 Ιανουαρίου

ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Χειμερινό Εξάμηνο 2009
Ασκήσεις #5

21. Να εκφράσετε:

(α) το τετράγωνο της συνάρτησης Schur $s_{(2,1)}$ στη βάση $\{s_\lambda : \lambda \vdash 6\}$ του $\Lambda^6_{\mathbb{Q}}$,

(β) το γινόμενο των συμμετρικών συναρτήσεων $s_{(2,2)}$ και $p_{(2,2)}$ στη βάση $\{s_\lambda : \lambda \vdash 8\}$ του $\Lambda^8_{\mathbb{Q}}$.

22. Δείξτε ότι

$$h_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{n+k-1}}{\prod_{j \neq i} (x_j - x_i)}$$

για μη αρνητικούς ακεραίους n, k με $n \geq 1$.

23. Έστω θετικός ακέραιος m και η διαμέριση $\lambda = (m, m-1, \ldots, 1)$ του $n = \binom{m+1}{2}$.

(α) Δείξτε ότι

$$s_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_m) \;=\; x_1 x_2 \cdots x_m \prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_i + x_j).$$

(β) Υπολογίστε την τιμή $\chi^\lambda(\mu)$ του χαρακτήρα χ^λ της συμμετρικής ομάδας $\mathfrak{S}_n$ για $m = 4$ και $\mu = (3, 3, 3, 1)$.

(γ) Δείξτε ότι $\chi^\lambda(w) = 0$, αν η τάξη της μετάθεσης $w \in \mathfrak{S}_n$ είναι άρτιος αριθμός.

Προαιρετική Άσκηση: Βρείτε (με απόδειξη) όλες τις διαμερίσεις $\lambda \vdash n$ για τις οποίες ισχύει $\chi^\lambda(w) = 0$ για κάθε μετάθεση $w \in \mathfrak{S}_n$ με άρτια τάξη.

Έως Πέμπτη, 4 Φεβουαρίου