

532 Θεωρία Αριθμών
Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2026
Αθήνα 14/09/2026

Υπενθυμίζεται ότι $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Μπορείτε να θεωρήσετε γνωστό το ότι ο 1013 είναι πρώτος αριθμός.

Γράψτε το ονοματεπώνυμο και τον αριθμό μητρώου σας πάνω στα θέματα και παραδώστε τα μαζί με το γραπτό σας. Η εξέταση διαρκεί δύο ώρες και αποτελείται από δύο μέρη:

Μέρος Α - Πολλαπλή Επιλογή. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε ερωτήματος και επιλέξτε τη μοναδική σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την απάντησή σας και δείχνοντας τα βήματα της λύσης, όπου χρειάζεται. **Απαντήσεις χωρίς καμία αιτιολόγηση δε θα βαθμολογούνται.** Γράφετε ευανάγνωστα ! Μέγιστη βαθμολογία για το πρώτο μέρος είναι οι 6 μονάδες.

A1. Πόσοι από τους ακεραίους 1000, 1001, 1002, $\dots$, 1016 διαιρούνται με το 17;

(α) κανένας (β) μόνο ένας (γ) μόνο δύο (δ) μόνο τρεις (ε) μόνο τέσσερις (στ) περισσότεροι από τέσσερις

A2. Για πόσους φυσικούς αριθμούς $x \in \mathbb{N}$ το $x^2 + 1$ διαιρείται με το 20;

(α) για κανέναν (β) μόνο για έναν (γ) μόνο για δύο (δ) για περισσότερους από δύο αλλά πεπερασμένου πλήθους (ε) για άπειρους αλλά όχι για όλους (στ) για όλους

A3. Για πόσες τιμές του $a \in \mathbb{N}$ το $3^a \cdot 5^2 \cdot 7^5$ διαιρεί το $3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^8$;

(α) για καμία (β) για μία (γ) για δύο (δ) για τρεις (ε) για τέσσερις (στ) για περισσότερες από τέσσερις

A4. Το πλήθος των λύσεων $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ της εξίσωσης $19x - 26y = 1926$ είναι

(α) ίσο με μηδέν (β) ίσο με 1 (γ) ίσο με 2 (δ) ίσο με 3 (ε) πεπερασμένο, μεγαλύτερο του 3 (στ) άπειρο

A5. Για ποιες τιμές του $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ ισχύει (για $x \in \mathbb{Z}$) η συνεπαγωγή $x^n \equiv 0 \pmod{15} \Rightarrow x \equiv 0 \pmod{15}$;

(α) μόνο για $n = 1$ (β) μόνο για $n \in \{1, 3\}$ (γ) μόνο για $n \in \{1, 5\}$ (δ) μόνο για $n \in \{1, 3, 5\}$ (ε) μόνο για $n \in \{1, 3, 5, \dots\}$ (στ) για όλες τις τιμές του $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$

A6. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του 3^{2026} με το 17 είναι ίσο με

(α) 2 (β) 4 (γ) 8 (δ) 9 (ε) 13 (στ) 15

A7. Το πλήθος των $x \in \{1, 2, 3, \dots, 2024\}$ για τα οποία $46x \equiv 10 \pmod{2024}$ είναι ίσο με

(α) μηδέν (β) 1 (γ) 2 (δ) 23 (ε) 46 (στ) 1012

A8. Αν n είναι το πλήθος των θετικών διαιρετών του 900, τότε το άθροισμα των θετικών διαιρετών του n είναι ίσο με

(α) 10 (β) 15 (γ) 20 (δ) 40 (ε) 80 (στ) 100

A9. Πόσες λύσεις $x \pmod{35}$ έχει η ισοτιμία $x^4 \equiv 1 \pmod{35}$;

(α) μηδέν (β) μία (γ) δύο (δ) τέσσερις (ε) οκτώ (στ) περισσότερες από οκτώ

A10. Για πόσους πρώτους p η ισοτιμία $x^p + x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ έχει ακριβώς $p - 2$ λύσεις;

(α) για κανέναν (β) μόνο για έναν (γ) μόνο για δύο (δ) μόνο για τρεις (ε) για περισσότερους από τρεις, αλλά πεπερασμένου πλήθους (στ) για άπειρους πρώτους p

A11. Πόσα είναι τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης του 2^n με το 25 για $n \in \mathbb{N}$;

(α) 4 (β) 5 (γ) 10 (δ) 15 (ε) 20 (στ) 25

A12. Το πλήθος των πρωταρχικών ριζών $\pmod{2026}$ είναι ίσο με

(α) 0 (β) 220 (γ) 440 (δ) 504 (ε) 880 (στ) 1012

Μέρος Β - Προβλήματα Ανάπτυξης. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε προβλήματος. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας και δείχνοντας όλα τα βήματα της λύσης. **Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση, και πρόχειροι υπολογισμοί ή φλυαρίες που δεν οδηγούν σε σαφή απάντηση, δε θα βαθμολογούνται.** Γράφετε ευανάγνωστα ! Μέγιστη βαθμολογία για το δεύτερο μέρος είναι οι 4 μονάδες.

B1. Για θετικούς ακεραίους p, q, n έχουμε $pq = n^2$. Αν ο p είναι πρώτος αριθμός, δείξτε ότι $p \leq q$.

B2. Βρείτε όλα τα $m, n, t \in \mathbb{N}$ για τα οποία $2^m + 2^n = 3^t$.

B3. Υπολογίστε την τάξη της κλάσης ισοτιμίας $5 \pmod{77}$.

B4. Να λύσετε το σύστημα των ισοτιμιών $x \equiv -1 \pmod{27}$ και $x \equiv 12 \pmod{50}$.