

532 Θεωρία Αριθμών
Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2025
Αθήνα 15/9/2025

Γράψτε το ονοματεπώνυμο και τον αριθμό μητρώου σας πάνω στα θέματα και παραδώστε τα μαζί με το γραπτό σας. Η εξέταση διαρκεί δύο ώρες και αποτελείται από δύο μέρη:

Μέρος Α - Πολλαπλή Επιλογή. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε ερωτήματος και επιλέξτε τη μοναδική σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την απάντησή σας και δείχνοντας τα βήματα της λύσης, όπου χρειάζεται. **Απαντήσεις χωρίς καμία αιτιολόγηση δε θα βαθμολογούνται.** Γράφετε ευανάγνωστα ! Μέγιστη βαθμολογία για το πρώτο μέρος είναι οι 6 μονάδες.

A1. Το πλήθος των θετικών διαιρετών του 7000 που διαιρούνται με το 3 είναι ίσο με

(α) μηδέν (β) 5 (γ) 8 (δ) 16 (ε) 20 (στ) 32

A2. Το σύνολο των $x \in \mathbb{Z}$ για τα οποία $\mu\kappa\delta(2x + 1, 3x + 1) = 1$

(α) είναι κενό (β) έχει μόνο ένα στοιχείο (γ) έχει ακριβώς δύο στοιχεία (δ) είναι πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ με περισσότερα από δύο στοιχεία (ε) είναι ένα άπειρο, γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ (στ) είναι ίσο με το $\mathbb{Z}$

A3. Αν x είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος για τον οποίο $37 \mid x(x + 1)(x + 2)$, τότε

(α) $1 \leq x \leq 7$ (β) $8 \leq x \leq 14$ (γ) $15 \leq x \leq 21$ (δ) $22 \leq x \leq 28$ (ε) $29 \leq x \leq 35$ (στ) $x \geq 36$

A4. Το πλήθος των θετικών ακεραίων m για τους οποίους $\epsilon\kappa\pi(m, 250) = 1000$ είναι ίσο με

(α) μηδέν (β) 1 (γ) 2 (δ) 3 (ε) 4 (στ) 5

A5. Για ποιους ακεραίους x ισχύει η ισοτιμία $x^3 \equiv x \pmod{8}$;

(α) μόνο για τους περιττούς ακεραίους (β) μόνο για τα πολλαπλάσια του 4 (γ) μόνο για τα πολλαπλάσια του 8 (δ) μόνο για τους περιττούς ακεραίους και τα πολλαπλάσια του 4 (ε) μόνο για τους περιττούς ακεραίους και τα πολλαπλάσια του 8 (στ) για όλους τους ακεραίους

A6. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $1^{100} + 2^{100} + \dots + 1000^{100}$ με το 101 είναι ίσο με

(α) 1 (β) 10 (γ) 19 (δ) 82 (ε) 91 (στ) 100

A7. Το πλήθος των αντιστρέψιμων κλάσεων ισοτιμίας $\pmod{850}$ είναι ίσο με

(α) 128 (β) 256 (γ) 320 (δ) 340 (ε) 640 (στ) 850

A8. Το άθροισμα των τετραγώνων των θετικών διαιρετών του 120 είναι ίσο με

(α) $5 \cdot 21 \cdot 35$ (β) $21 \cdot 26 \cdot 35$ (γ) $10 \cdot 21 \cdot 85$ (δ) $10 \cdot 26 \cdot 85$ (ε) $10 \cdot 35 \cdot 85$ (στ) $21 \cdot 35 \cdot 85$

A9. Αν $x \in \mathbb{Z}$ και $4x + 1 \equiv 0 \pmod{19}$, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του x^2 με το 19

(α) δεν είναι καλά ορισμένο (β) είναι ίσο με 2 (γ) είναι ίσο με 4 (δ) είναι ίσο με 6 (ε) είναι ίσο με 8 (στ) είναι ίσο με 10

A10. Πόσες λύσεις $x \pmod{43}$ έχει η ισοτιμία $(x + 1)(x^2 + 1)^2 \equiv 0 \pmod{43}$;

(α) μηδέν (β) 1 (γ) 2 (δ) 3 (ε) 4 (στ) 5

A11. Ο μικρότερος περιττός θετικός ακέραιος ο οποίος έχει τάξη $\pmod{16}$ ίση με 2

(α) δεν υπάρχει (β) είναι ίσος με 5 (γ) είναι ίσος με 7 (δ) είναι ίσος με 9 (ε) είναι ίσος με 11 (στ) είναι ίσος με 15

A12. Το πλήθος των πρωταρχικών ριζών $\pmod{50}$ είναι ίσο με

(α) μηδέν (β) 2 (γ) 4 (δ) 8 (ε) 10 (στ) 20

Μέρος Β - Προβλήματα Ανάπτυξης. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε προβλήματος. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας και δείχνοντας όλα τα βήματα της λύσης. **Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση, και πρόχειροι υπολογισμοί ή φλυαρίες που δεν οδηγούν σε σαφή απάντηση, δε θα βαθμολογούνται.** Γράφετε ευανάγνωστα ! Μέγιστη βαθμολογία για το δεύτερο μέρος είναι οι 4 μονάδες.

B1.

(α) Έστω ότι x, y είναι ακέραιοι με $x^2 + y^2 \equiv 1 \pmod{8}$. Δείξτε ότι τουλάχιστον ένας από τους x, y είναι άκεραιο πολλαπλάσιο του 4.

(β) Βρείτε όλες τις λύσεις $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ της εξίσωσης $10x + 11y = 250$.

B2. Βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους m για τους οποίους $\varphi(m) = 12$.

B3. Βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο x για τον οποίο ισχύουν οι ισοτιμίες $x \equiv 1 \pmod{3}$, $x \equiv 4 \pmod{5}$ και $2x \equiv 7 \pmod{11}$.