

532 Θεωρία Αριθμών
Εξετάσεις Ιουνίου 2025
Αθήνα 23/6/2025

Γράψτε το ονοματεπώνυμο και τον αριθμό μητρώου σας πάνω στα θέματα και παραδώστε τα μαζί με το γραπτό σας. Η εξέταση διαρκεί δύο ώρες και αποτελείται από δύο μέρη:

Μέρος Α - Πολλαπλή Επιλογή. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε ερωτήματος και επιλέξτε τη μοναδική σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την απάντησή σας και δείχνοντας τα βήματα της λύσης, όπου χρειάζεται. **Απαντήσεις χωρίς καμία αιτιολόγηση δε θα βαθμολογούνται.** Γράφετε ευανάγνωστα ! Μέγιστη βαθμολογία για το πρώτο μέρος είναι οι 6 μονάδες.

A1. Αν x είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός για τον οποίο το $2x + 101$ διαιρείται με το 17, τότε
(α) το x δεν υπάρχει (β) $0 \leq x < 4$ (γ) $4 \leq x < 8$ (δ) $8 \leq x < 12$ (ε) $12 \leq x < 16$ (στ) $x \geq 16$

A2. Το άθροισμα των θετικών διαιρετών του $\mu\kappa\delta(180, 333)$ είναι ίσο με
(α) 3 (β) 13 (γ) 23 (δ) 33 (ε) 43 (στ) 53

A3. Το πλήθος των $x \in \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ για τα οποία το x^2 διαιρείται με το 72 είναι ίσο με
(α) 1 (β) 3 (γ) 4 (δ) 5 (ε) 8 (στ) 16

A4. Για ποια $c \in \{1, 2, 3\}$ έχει λύση $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ η εξίσωση $15x + 6y = c$;
(α) μόνο για $c = 1$ (β) μόνο για $c = 2$ (γ) μόνο για $c = 3$ (δ) μόνο για $c = 1$ και $c = 2$ (ε) μόνο για $c = 1$ και $c = 3$ (στ) μόνο για $c = 2$ και $c = 3$

A5. Για ποιους πρώτους p ισχύει η συνεπαγωγή $x^2 \equiv y^2 \pmod{p} \Rightarrow x \equiv y \pmod{p}$, με $x, y \in \mathbb{Z}$;
(α) για κανέναν (β) μόνο για $p = 2$ (γ) μόνο για $p = 3$ (δ) μόνο για $p = 2$ και $p = 3$ (ε) μόνο για $p = 2$ και $p = 5$ (στ) για άπειρους πρώτους p

A6. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $5^{1001} + 1001^5$ με το 17 είναι ίσο με
(α) 4 (β) 6 (γ) 8 (δ) 10 (ε) 12 (στ) 14

A7. Το πλήθος των αντιστρέψιμων κλάσεων ισοτιμίας $\pmod{750}$ είναι ίσο με
(α) 160 (β) 200 (γ) 240 (δ) 320 (ε) 360 (στ) 400

A8. Το πλήθος των θετικών διαιρετών του 6000 είναι ίσο με
(α) 8 (β) 11 (γ) 12 (δ) 32 (ε) 40 (στ) 64

A9. Αν $x \in \{1, 2, 3, \dots, 41\}$ και $25x \equiv 14 \pmod{41}$, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του x με το 6 είναι ίσο με
(α) 0 (β) 1 (γ) 2 (δ) 3 (ε) 4 (στ) 5

A10. Πόσες λύσεις $x \pmod{36}$ έχει η ισοτιμία $x^3 + 3x^2 + 2x \equiv 0 \pmod{36}$;

(α) μηδέν (β) 3 (γ) 6 (δ) 9 (ε) 12 (στ) 15

A11. Η τάξη της κλάσης ισοτιμίας $2 \pmod{23}$ είναι ίση με

(α) 2 (β) 10 (γ) 11 (δ) 12 (ε) 20 (στ) 22

A12. Για πόσα $m \in \{10, 20, 30, 40, 50, 60\}$ υπάρχει πρωταρχική ρίζα modulo m ;

(α) για 1 (β) για 2 (γ) για 3 (δ) για 4 (ε) για 5 (στ) για 6

Μέρος Β - Προβλήματα Ανάπτυξης. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε προβλήματος. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας και δείχνοντας όλα τα βήματα της λύσης. **Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση, και πρόχειροι υπολογισμοί ή φλυαρίες που δεν οδηγούν σε σαφή απάντηση, δε θα βαθμολογούνται.** Γράφετε ευανάγνωστα ! Μέγιστη βαθμολογία για το δεύτερο μέρος είναι οι 4 μονάδες.

B1.

(α) Σωστό ή λάθος; Αν m, n είναι σχετικώς πρώτοι θετικοί ακέραιοι (δηλαδή $\mu\kappa\delta(m, n) = 1$), τότε και οι m^α, n^β είναι σχετικώς πρώτοι για όλους τους θετικούς ακεραίους α, β .

(β) Βρείτε όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (x, y) τέτοια ώστε $x^2 + y^2 = 2025$.

B2. Λύστε τις ισοτιμίες:

(α) $x^2 + x - 1 \equiv 0 \pmod{11}$.

(β) $x^2 + x - 1 \equiv 0 \pmod{121}$.