532 Θεωρία Αριθμών
Εξετάσεις Ιουνίου 2022
Αθήνα 23/6/2022

Υπενθυμίζεται ότι $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{Z}_{>0} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ και ότι $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ για $n \in \mathbb{N}$, όπου $0! := 1$.

Γράψτε το ονοματεπώνυμο και τον αριθμό μητρώου σας πάνω στα θέματα και παραδώστε τα μαζί με το γραπτό σας. Η εξέταση διαρκεί δύο ώρες και αποτελείται από δύο μέρη:

Μέρος Α - Πολλαπλή Επιλογή. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε ερωτήματος και επιλέξτε τη μοναδική σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την απάντησή σας και δείχνοντας τα βήματα της λύσης, όπου χρειάζεται. **Απαντήσεις χωρίς καμία αιτιολόγηση δε θα βαθμολογούνται.** Γράφετε ευανάγνωστα ! Μέγιστη βαθμολογία για το πρώτο μέρος είναι οι 6 μονάδες.

Α1. Αν x είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός για τον οποίο το $x + 20! + 280$ διαιρείται με το 17, τότε

(α) $x \leq 2$ (β) $2 < x \leq 5$ (γ) $5 < x \leq 8$ (δ) $8 < x \leq 11$ (ε) $11 < x \leq 14$ (στ) $x > 14$

Α2. Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των στοιχείων του συνόλου $\{(x+1)^2(x+2)^2 : x \in \mathbb{N}\}$ είναι

(α) ίσος με 1 (β) ίσος με 2 (γ) ίσος με 3 (δ) ίσος με 4 (ε) ίσος με 6 (στ) μεγαλύτερος του 6

Α3. Αν m είναι ο μικρότερος πρώτος αριθμός για τον οποίο το $(m+1)^3(m+2)$ διαιρείται με το 17, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του m με το 11 είναι ίσο με

(α) 1 (β) 2 (γ) 3 (δ) 8 (ε) 9 (στ) 10

Α4. Το πλήθος των λύσεων $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ της εξίσωσης $5x + 7y = 421$ είναι ίσο με

(α) 10 (β) 11 (γ) 12 (δ) 20 (ε) 21 (στ) 22

Α5. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του 101^{99} με το 16 είναι ίσο με

(α) 3 (β) 5 (γ) 7 (δ) 9 (ε) 11 (στ) 13

Α6. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $5^{30!} + (30!)^5$ με το 31 είναι

(α) ίσο με 0 (β) ίσο με 1 (γ) ίσο με 2 (δ) ίσο με 3 (ε) ίσο με 4 (στ) μεγαλύτερο του 4

Α7. Ο μικρότερος θετικός ακέραιος k για τον οποίο ισχύει η ισοτιμία $x^k \equiv 1 \pmod{24}$ για κάθε $x \in \mathbb{Z}$ σχετικό πρώτο προς το 24 είναι

(α) ίσος με 2 (β) ίσος με 4 (γ) ίσος με 6 (δ) ίσος με 8 (ε) ίσος με 12 (στ) μεγαλύτερος του 12

A8. Ποιες από τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{C}$ με $f(n) = (-1)^n \sqrt{n}$ και $g(n) = (-1)^{n-1} n^2$ για $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ είναι πολλαπλασιαστικές;

(α) καμία (β) μόνο η f (γ) μόνο η g (δ) και οι δύο

A9. Πόσες λύσεις $x \pmod{85}$ έχει η ισοτιμία $(x^2 + x + 1)(x^3 + x^2 + x + 1) \equiv 0 \pmod{85}$;

(α) 2 (β) 3 (γ) 6 (δ) 9 (ε) 12 (στ) 18

A10. Η τάξη της κλάσης $23 \pmod{35}$ είναι

(α) ίση με 3 (β) ίση με 4 (γ) ίση με 6 (δ) ίση με 7 (ε) ίση με 12 (στ) μεγαλύτερη του 12

A11. Ποια από τα 2, 3 είναι πρωταρχικές ρίζες $\pmod{49}$;

(α) κανένα (β) μόνο το 2 (γ) μόνο το 3 (δ) και τα δύο

A12. Η ισοτιμία $x^2 \equiv 41 \pmod{95}$ έχει τουλάχιστον μία λύση. Σωστό ή λάθος;

(α) Σωστό (β) Λάθος

Μέρος Β - Προβλήματα Ανάπτυξης. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε προβλήματος. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας και δείχνοντας όλα τα βήματα της λύσης. **Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση, και πρόχειροι υπολογισμοί ή φλυαρίες που δεν οδηγούν σε σαφή απάντηση, δε θα βαθμολογούνται.** Γράφετε ευανάγνωστα ! Μέγιστη βαθμολογία για το δεύτερο μέρος είναι οι 4 μονάδες.

B1.

(α) Δείξτε ότι το $7^n + 12n - 1$ διαιρείται με το 9 για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Βρείτε όλα τα $n \in \mathbb{N}$ για τα οποία το $7^n + 12n - 1$ διαιρείται με το 27.

B2. Για ποια $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ υπάρχει $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ για το οποίο το άθροισμα $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1}$ διαιρείται με το m;

B3.

(α) Βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο ο οποίος αφήνει υπόλοιπο 1, 4 και 9 διαιρούμενος με το 5, το 7 και το 13, αντίστοιχα.

(β) Βρείτε όλες τις λύσεις της ισοτιμίας $x^2 + 31x + 32 \equiv 0 \pmod{49}$.