ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2007

B

1. Έστω ο 3×3 πίνακας $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

(α) Βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ τέτοιον ώστε ο πίνακας $Q^{-1}AQ$ να είναι διαγώνιος.

(β) Βρείτε ορθογώνιο πίνακα $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ τέτοιον ώστε ο πίνακας P^tAP να είναι διαγώνιος.

(γ) Έστω $B = A + bI_3$. Βρείτε τις τιμές του $b \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $x^tBx \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^{3\times 1}$.

2. Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ a & -9 \end{pmatrix}$.

(α) Βρείτε όλες τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το -1 είναι ιδιοτιμή του A.

(β) Βρείτε όλες τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, τέτοιος ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

(γ) Βρείτε όλες τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, τέτοιος ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι άνω τριγωνικός.

3. Έστω αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

(α) Αν το $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι ιδιοτιμή του A, δείξτε ότι $\lambda \neq 0$ και ότι το $\frac{1}{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του A^{-1}.

(β) Αν $\chi_A(x) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)(\lambda_3 - x)$, δείξτε ότι $\chi_{A^{-1}}(x) = (\frac{1}{\lambda_1} - x)(\frac{1}{\lambda_2} - x)(\frac{1}{\lambda_3} - x)$.

(γ) Αν ο A είναι όμοιος με τον A^{-1}, δείξτε ότι τουλάχιστον ένας από τους αριθμούς 1 και -1 είναι ιδιοτιμή του A.

4. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος (δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας);

(α) Αν όλες οι ιδιοτιμές ενός διαγωνίσιμου πίνακα $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ είναι ίσες με 0, τότε ο A είναι ίσος με το μηδενικό πίνακα.

(β) Αν για τα ελάχιστα πολυώνυμα δύο πινάκων $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ισχύει $m_A(x) = m_B(x)$, τότε οι A και B είναι όμοιοι πίνακες.

(γ) Υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{R}^{8\times 8}$ με $Ae_6 = e_6$, $Ae_7 = e_7$, $Ae_8 = e_8$ και χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x) = x^2(x^2+1)(x^2-1)^2$ (όπου $(e_1, e_2, \ldots, e_8)$ είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^{8\times 1}$).

(δ) Υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ με ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x) = x^3(x-2)$ και χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x) = x^2(x^2-4)^2$.

(ε) Αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ είναι ίσες με μηδέν, τότε όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A^3 είναι επίσης ίσες με μηδέν.

Αθήνα 24/9/2007 – Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες – Καλή Επιτυχία