

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ II
Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2007

A

1. Έστω $c \in \mathbb{R}$ και $A = \begin{pmatrix} 5 & c \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

- (α) Βρείτε όλες τις τιμές του $c \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το 1 είναι ιδιοτιμή του A .
- (β) Βρείτε όλες τις τιμές του $c \in \mathbb{R}$ για τις οποίες υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, τέτοιος ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.
- (γ) Βρείτε όλες τις τιμές του $c \in \mathbb{R}$ για τις οποίες υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, τέτοιος ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι άνω τριγωνικός.

2. Έστω ο 3×3 πίνακας $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

- (α) Βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ τέτοιον ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.
- (β) Βρείτε ορθογώνιο πίνακα $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ τέτοιον ώστε ο πίνακας $Q^t A Q$ να είναι διαγώνιος.
- (γ) Έστω $B = A + cI_3$. Βρείτε τις τιμές του $c \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $x^t B x \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$.

3. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος (δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας);

- (α) Αν για τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα δύο τετραγωνικών πινάκων A, B ισχύει $\chi_A(x) = \chi_B(x)$, τότε οι A και B είναι όμοιοι πίνακες.
- (β) Αν όλες οι ιδιοτιμές ενός διαγωνίσιμου πίνακα $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ είναι ίσες με 1, τότε $A = I_3$.
- (γ) Υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ με ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x) = x^2(x+1)$ και χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x) = x^2(x^2-1)$.
- (δ) Υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ με $Ae_1 = e_1$, $Ae_2 = e_2$, $Ae_3 = e_3$ και χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x) = x^4(x^2-1)^2$ (όπου $(e_1, e_2, \dots, e_8)$ είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^{8 \times 1}$).
- (ε) Αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ είναι ίσες με μηδέν, τότε όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A^2 είναι επίσης ίσες με μηδέν.

4. Έστω αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$.

- (α) Αν το $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι ιδιοτιμή του A , δείξτε ότι $\lambda \neq 0$ και ότι το $\frac{1}{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του A^{-1} .
- (β) Αν $\chi_A(x) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)(\lambda_3 - x)$, δείξτε ότι $\chi_{A^{-1}}(x) = (\frac{1}{\lambda_1} - x)(\frac{1}{\lambda_2} - x)(\frac{1}{\lambda_3} - x)$.
- (γ) Αν ο A είναι όμοιος με τον A^{-1} , δείξτε ότι τουλάχιστον ένας από τους αριθμούς 1 και -1 είναι ιδιοτιμή του A .