

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ II
Εαρινό Εξάμηνο 2006-2007
Θέματα Εξετάσεων Ιουλίου

1. Έστω $c \in \mathbb{R}$ και $A = \begin{pmatrix} 1 & c & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- (α) Βρείτε μια τιμή του $c \in \mathbb{R}$ για την οποία ο πίνακας A είναι διαγωνίσιμος.
- (β) Για την τιμή του c που βρήκατε στο (α), βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ τέτοιον ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.
- (γ) Για την τιμή του c που βρήκατε στο (α), βρείτε πίνακα $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ τέτοιον ώστε $B^2 = A$.

2.

- (α) Έστω $a, b, d \in \mathbb{R}$ με $b \neq 0$. Δείξτε ότι οι πίνακες $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ είναι όμοιοι αν και μόνο αν $a \neq d$.
- (β) Έστω $A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$, όπου $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ και $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Για $\lambda \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι το λ είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν το λ είναι ιδιοτιμή του C .
- (γ) Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και ότι ισχύει $\langle Ax, y \rangle = -\langle x, Ay \rangle$ για όλα τα $x, y \in \mathbb{C}^n$. Δείξτε ότι ο iA είναι ερμητιανός και ότι οι ιδιοτιμές του A είναι φανταστικές.

3. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος (δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα);

- (α) Αν $A, B \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ και καθένας από τους πραγματικούς αριθμούς $-2, 0, 1, \sqrt{3}$ είναι ταυτόχρονα ιδιοτιμή του A και του B , τότε οι πίνακες A και B είναι όμοιοι.
- (β) Αν $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ και ο A^2 είναι διαγωνίσιμος, τότε και ο A είναι διαγωνίσιμος.
- (γ) Υπάρχει μοναδιαίος πίνακας $U \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ τέτοιος ώστε $\det(U - xI_3) = -x^3 + 2x^2 - x + 2$.
- (δ) Αν ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι κανονικός, τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε οι πίνακες $P^{-1}AP$ και $P^{-1}A^*P$ να είναι διαγώνιοι.
- (ε) Υπάρχει κανονικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ τέτοιος ώστε $Av = 3v$ και $Au = -2u$, όπου $v = (2 \ 2 \ 1)^t$ και $u = (2 \ 1 \ -2)^t$ είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^{3 \times 1}$.

4.

- (α) Αν $\phi(x) \in \mathbb{R}[x]$ και το λ είναι ιδιοτιμή ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, δείξτε ότι το $\phi(\lambda)$ είναι ιδιοτιμή του $\phi(A)$.
- (β) Να εξετάσετε αν ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ είναι διαγωνίσιμος και να βρείτε τις ιδιοτιμές του πίνακα $B^3 - 2B^2 + 4B + 3I_3$.
- (γ) Να εξετάσετε αν ο πίνακας B του ερωτήματος (β) είναι αντιστρέψιμος. Να εκφράσετε τον αντίστροφο του B , αν υπάρχει, ως γραμμικό συνδυασμό των πινάκων B^2, B και I_3 .