Γραμμική Άλγεβρα Ι
Εξετάσεις Φεβρουαρίου 2011

Απαντήσεις

1. (α) Εκτελώντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, με τη γνωστή διαδικασία, βρίσκουμε ότι μια κλιμακωτή μορφή του A είναι ο πίνακας

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Όπως γνωρίζουμε, η τάξη του A είναι ίση με το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών οποιασδήποτε τέτοιας μορφής, οπότε $\mathrm{rank}(A) = 3$.

(β) Από το αποτέλεσμα στο (α) προκύπτει ότι ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος. Συνεπώς $\det(A) = 0$ και $\det(A^4) = (\det(A))^4 = 0$.

(γ) Με τη γνωστή διαδικασία (ή αθροίζοντας τις τρεις πρώτες εξισώσεις στην τελευταία) προκύπτει ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

(δ) Με τη γνωστή διαδικασία προκύπτει ότι οι λύσεις είναι οι $x_1 = x_3 = 1/2 + \lambda$, $x_2 = x_4 = \lambda$, για αυθαίρετη τιμή του λ.

(ε) Αφού ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, το ομογενές γραμμικό σύστημα $Ax = O$ έχει μη μηδενική λύση $\xi \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ (συγκεκριμένα, μια τέτοια είναι η $\xi = (1\ 1\ 1\ 1)^t$). Αν λοιπόν το $Ax = b$ είχε τουλάχιστον μία λύση, έστω τη $x = \xi_0 \in \mathbb{R}^{4\times 1}$, τότε θα είχε και τη $x = \xi + \xi_0$, αφού $A(\xi + \xi_0) = A\xi + A\xi_0 = O + b = b$. Συνεπώς το $Ax = b$ θα είχε τουλάχιστον δύο (και μάλιστα άπειρες) λύσεις. Συμπεραίνουμε ότι το $Ax = b$ δεν μπορεί να έχει ακριβώς μία λύση.

2. (α) Ελέγχοντας ότι το W είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση πινάκων και ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμό, βρίσκουμε ότι αυτό είναι υπόχωρος του V. Παρατηρώντας ότι οι πίνακες

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

αποτελούν τα στοιχεία μιας βάση του W (γιατί;) συμπεραίνουμε ότι $\dim(W) = 3$.

(β) Με τη γνωστή διαδικασία βρίσκουμε ότι το δοσμένο υποσύνολο του W είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Αφού έχει τρία στοιχεία και $\dim(W) = 3$, το σύνολο αποτελεί βάση του W.

(γ) Ένας τέτοιος υπόχωρος έχει διάσταση 1 και παράγεται από οποιοδήποτε στοιχείο του V που δεν ανήκει στο W. Ένα τέτοιο στοιχείο είναι π.χ. ο πίνακας E_{11}, οπότε μπορούμε να θέσουμε

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

(δ) Αφού $\dim(W) = 3$, οποιοδήποτε υποσύνολο του W με τέσσερα στοιχεία είναι γραμμικώς εξαρτημένο και συνεπώς ισχύει το ζητούμενο.

3. (α) Χρησιμοποιώντας τις βασικές ιδιότητες της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού πινάκων βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} T(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) &= A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)B \;=\; \lambda_1 A X_1 B + \lambda_2 A X_2 B \\ &= \lambda_1 T(X_1) + \lambda_2 T(X_2) \end{aligned}$$

για $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ και $X_1, X_2 \in V$ και συμπεραίνουμε ότι η T είναι γραμμικός ενδομορφισμός του διανυσματικού χώρου V.

(β) Γράφοντας $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ υπολογίζουμε ότι

$$T(X) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} y-w & x+y-z-w \\ -y & -x-y \end{pmatrix}.$$

Θέτοντας $x = 1$ και $y = z = w = 0$ βρίσκουμε ότι

$$T(E_{11}) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \;=\; E_{12} - E_{22},$$

οπότε η πρώτη στήλη του ζητούμενου πίνακα είναι η $(0\ \ 1\ \ 0\ -1)^t$. Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} T(E_{12}) &= E_{11} + E_{12} - E_{21} - E_{22} \\ T(E_{21}) &= -E_{12} \\ T(E_{22}) &= -E_{11} - E_{12} \end{aligned}$$

και συνεπώς ότι ο πίνακας της T ως προς τη διατεταγμένη βάση $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ του V είναι ο

$$C \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(γ) Λύνοντας το ομογενές σύστημα $Cx = 0$ με τις γνωστές μεθόδους, βρίσκουμε ότι αυτό έχει μόνο τη μηδενική λύση. Συνεπώς $\ker(T) = \{0\}$, άρα $\dim \ker(T) = 0$ και η $T : V \to V$ είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.

4. (α) Λάθος. Οι πίνακες $A = I_2$ και $B = -I_2$ είναι αντιστρέψιμοι αλλά ο $A + B$ είναι ο μηδενικός 2×2 πίνακας, ο οποίος δεν είναι αντιστρέψιμος.

(β) Σωστό. Αφού $\det(A) = \det(C) = 1$, οι πίνακες A και C είναι αντιστρέψιμοι. Συνεπώς, πολλαπλασιάζοντας την ισότητα $ABC = O$ από αριστερά με A^{-1} και από δεξιά με C^{-1} προκύπτει ότι $B = O$.

(γ) Σωστό. Το σύνολο $U \cap V$ είναι υπόχωρος του V, ως τομή δύο υπόχωρων του χώρου αυτού. Έστω ότι το $U \cap V$ περιέχε μη μηδενικό διάνυσμα. Τότε $\dim(U \cap V) \geq 1$. Αφού όμως $U \cap W \subseteq U$ και $U \cap W \subseteq W$ και οι U και W είναι γνήσιοι υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου διάστασης 2, έχουμε $\dim(U \cap V) \leq \dim(U) \leq 1$ και $\dim(U \cap V) \leq$

$\dim(W) \leq 1$. Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι $\dim(U \cap V) = \dim(U) = \dim(W)$. Αφού ο $U \cap W$ είναι υπόχωρος καθενός από τους U και W, αυτό μπορεί να συμβαίνει μόνο όταν $U \cap W = U$ και $U \cap W = W$, οπότε $U = W$, σε αντίθεση με την υπόθεσή μας. Η αντίφαση αυτή μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $U \cap V = \{0\}$.

(δ) Λάθος. Αφού $\dim(\mathbb{R}^{3\times 3}) = 9$, η θεμελιώδης εξίσωση της διάστασης $\dim(\mathbb{R}^{3\times 3}) = \dim\ker(T) + \dim\operatorname{Im}(T)$ δίνει $\dim\ker(T) = 9/2$, το οποίο δεν μπορεί να ισχύει.

(ε) Λάθος. Ο πίνακας $A = -I_2$ είναι ισοδύναμος με το $B = I_2$, αφού και οι δύο είναι αντιστρέψιμοι. Όμως για κάθε πίνακα $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ο οποίος είναι όμοιος με το B έχουμε $C = P^{-1}BP$ για κάποιον αντιστρέψιμο πίνακα P και συνεπώς, στην περίπτωσή μας, $C = P^{-1}I_2P = P^{-1}P = I_2$.