

Γραμμική Άλγεβρα Ι
Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2016

1. Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (α) Ποιοι από τους πίνακες $AB + BA$, $AB^t + A^tB$, $AB^t + BA^t$ και $A^tB + B^tA$ ορίζονται;
- (β) Λύστε τα ομογενή γραμμικά συστήματα $Ax = 0$ και $Bx = 0$.
- (γ) Υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ τέτοιος ώστε $B = QA$;
- (δ) Υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ και $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ τέτοιοι ώστε $B = QAP$;

2.

(α) Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε τον αντίστροφο πίνακα του A , του A^t και του AA^t .

(β) Θεωρούμε πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με την ιδιότητα $A^2 + B^2 = O$.

- (β1) Αν ο n είναι περιττός αριθμός, δείξτε ότι οι A, B δεν είναι αντιστρέψιμοι.
- (β2) Δώστε παράδειγμα αντιστρέψιμων 4×4 πινάκων A, B με αυτή την ιδιότητα.

3. Δίνεται ο υπόχωρος

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \right\rangle$$

του $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (α) Για ποιες τιμές του λ είναι ο U ισόμορφος με το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^{4 \times 1}$; Για ποιες τιμές του λ είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^{3 \times 1}$;
- (β) Για ποιες τιμές του λ υπάρχει υπόχωρος W του $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ διάστασης 2, τέτοιος ώστε $U \cap W = \{0\}$;

4. Δίνονται οι γραμμικές απεικονίσεις $S : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$ και $T : \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ που ορίζονται θέτοντας $S(p(x)) = p'(x) - xp''(x)$ για $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ και $T(q(x)) = (x+1)q(x)$ για $q(x) \in \mathbb{R}_1[x]$, όπου $\mathbb{R}_d[x] := \{f(x) \in \mathbb{R}[x] : \deg(f(x)) \leq d\}$.

- (α) Υπολογίστε τους πίνακες των S και T ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}_1[x]$ και $\mathbb{R}_2[x]$.
- (β) Υπολογίστε τη διάσταση του πυρήνα της S και τη διάσταση της εικόνας της T .
- (γ) Ποιες από τις γραμμικές απεικονίσεις $S \circ T$ και $T \circ S$ είναι αντιστρέψιμες;

Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 7/9/2016 – Καλή Επιτυχία