Γραμμική Άλγεβρα Ι
Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2012

1. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(α) (10 μονάδες) Βρείτε όλα τα διανύσματα $b = (b_1\ b_2\ b_3)^t \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ για τα οποία το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ έχει άπειρες λύσεις.

(β) (5 μονάδες) Βρείτε όλες τις λύσεις του γραμμικού συστήματος $Ax = b$ για $b = (1\ 2\ 3)^t$.

(γ) (5 μονάδες) Να εξετάσετε αν υπάρχει θετικός ακέραιος m για τον οποίο το ομογενές γραμμικό σύστημα $A^m x = 0$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση $x = 0$.

2. Δίνονται ο διανυσματικός χώρος $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ και ο γραμμικός μετασχηματισμός $T : V \to V$ με $T(X) = X^t + AX$ για $X \in V$.

(α) (15 μονάδες) Βρείτε μια βάση του πυρήνα $\ker(T)$ του T. Είναι ο T αντιστρέψιμος;

(β) (10 μονάδες) Βρείτε μια βάση της εικόνας $\mathrm{Im}(T)$ του T.

(γ) (5 μονάδες) Να εξετάσετε αν υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός $S : V \to V$, τέτοιος ώστε να ισχύει $\mathrm{Im}(S) = \mathrm{Im}(T)$ και $S(S(X)) = O$ για κάθε $X \in V$.

3. Δίνονται διανυσματικός χώρος V επί του $\mathbb{R}$, διατεταγμένη βάση $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ αυτού και γραμμικοί μετασχηματισμοί $S : V \to V$ και $T : V \to V$ με πίνακες

$$(S : \mathbf{v}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad (T : \mathbf{v}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ως προς τη $\mathbf{v}$. Θεωρούμε το γραμμικό μετασχηματισμό $R : V \to V$ ο οποίος ορίζεται θέτοντας $R(x) = S(T(x)) + T(S(x))$ για $x \in V$.

(α) (15 μονάδες) Υπολογίστε τον πίνακα του R ως προς τη βάση $\mathbf{v}$. Είναι ο R αντιστρέψιμος;

(β) (5 μονάδες) Εκφράστε το $R(2v_1 - v_2)$ ως γραμμικό συνδυασμό των v_1 και v_2.

(γ) (10 μονάδες) Δείξτε ότι ισχύει $S(R(x)) = R(S(x))$ για κάθε $x \in V$.

4. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος (δικαιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας);

(α) (5 μονάδες) Αν $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ και ισχύουν $AB = -3I_2$ και $\det(A) = 2$, τότε $\det(B) < 0$.

(β) (5 μονάδες) Αν u, v, w είναι διαφορετικά ανά δύο στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου V και τα $\{u, v\}$, $\{u, w\}$ και $\{v, w\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα υποσύνολα του V, τότε το $\{u, v, w\}$ είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του V.

(γ) (5 μονάδες) Υπάρχει υπόχωρος W του $\mathbb{R}^{1\times 4}$ διάστασης 3 για τον οποίο ισχύει $(\lambda, \mu, \lambda, \mu) \in W$ για όλα τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(δ) (5 μονάδες) Αν A είναι ο πίνακας ενός γραμμικού μετασχηματισμού $T : \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1}$ ως προς μια διατεταγμένη βάση (v_1, v_2) του $\mathbb{R}^{2\times 1}$, τότε ο πίνακας της T ως προς τη βάση (v_2, v_1) είναι ίσος με A^t.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 3/9/2012 – Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες – Καλή Επιτυχία