

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Θέματα Σεπτεμβρίου 2008

1. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- (α) Υπολογίστε τις ιδιοτιμές του A .
- (β) Είναι ο πίνακας A ορθογώνιος; Είναι ο πίνακας A^{2007} θετικά ορισμένος; Είναι ο πίνακας A^{2008} διαγωνίσιμος;
- (γ) Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο m ισχύει $\det(A^m - I_4) = 0$.

2.

- (α) Βρείτε (με απόδειξη) όλους τους διαγωνίσιμους πίνακες $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ για τους οποίους ισχύει $A^2 - 4A + 4I_3 = O$.
- (β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν όμοιοι πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, τέτοιοι ώστε να ισχύει $A^2 - 4A + 4I_3 = O$ και $B^2 - 2B + I_3 = O$.
- (γ) Βρείτε (με απόδειξη) όλους τους άνω τριγωνικούς ορθογώνιους πίνακες $Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

3. Δίνεται ο ευκλείδειος χώρος \mathbb{R}^4 , εφοδιασμένος με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο. Έστω W ο υπόχωρος του \mathbb{R}^4 που αποτελείται από τα διανύσματα $(x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ τα οποία ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

- (α) Βρείτε μια ορθοκανονική βάση του W .
 - (β) Βρείτε μια ορθοκανονική βάση του ορθογώνιου συμπληρώματος W^\perp του W .
4. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος (δικαιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας);
- (α) Αν τα $x, y \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ είναι ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με αντίστοιχη ιδιοτιμή λ και ισχύει $x \neq y$, τότε το $x - y$ είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα του A με αντίστοιχη ιδιοτιμή λ .
 - (β) Αν το λ είναι ιδιοτιμή του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ και το μ είναι ιδιοτιμή του πίνακα $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, τότε το $\lambda\mu$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα AB .
 - (γ) Αν $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ είναι πίνακας τάξης 1 και ίχνους λ , τότε $\det(A + I_n) = 1 + \lambda$.
 - (δ) Κάθε ορθογώνιος πίνακας $Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ είναι διαγωνίσιμος.
 - (ε) Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ υπάρχει θετικός ακέραιος m για τον οποίο ο πίνακας A^m είναι διαγωνίσιμος.

Να απαντήσετε και στα τέσσερα θέματα.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 22/9/2008 – Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες – Καλή Επιτυχία