

Γραμμική Άλγεβρα Ι
Θέματα Εξετάσεων Φεβρουαρίου 2011

1. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$.

- (α) (5 μονάδες) Υπολογίστε την τάξη του A .
- (β) (10 μονάδες) Υπολογίστε τις ορίζουσες $\det(A)$ και $\det(A^4)$.
- (γ) (5 μονάδες) Λύστε το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ για $b = (1 \ 1 \ 1 \ 1)^t$.
- (δ) (10 μονάδες) Λύστε το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ για $b = (1 \ -1 \ 1 \ -1)^t$.
- (ε) (5 μονάδες) Δείξτε ότι δεν υπάρχει διάνυσμα $b \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ για το οποίο το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση.

2. Δίνεται το υποσύνολο $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + b + c + d = 0 \right\}$ του διανυσματικού χώρου $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (α) (10 μονάδες) Δείξτε ότι το W είναι υπόχωρος του V και υπολογίστε τη διάσταση του W .
- (β) (10 μονάδες) Δείξτε ότι το σύνολο $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ αποτελεί βάση του W .
- (γ) (5 μονάδες) Βρείτε υπόχωρο U του V ώστε να ισχύει $V = U \oplus W$.
- (δ) (5 μονάδες) Αν $A_1, A_2, A_3, A_4 \in W$, δείξτε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4 = O$.

3. Δίνονται τα στοιχεία $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ του διανυσματικού χώρου $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ και η απεικόνιση $T : V \rightarrow V$ που ορίζεται θέτοντας $T(X) = AXB$ για $X \in V$.

- (α) (5 μονάδες) Δείξτε ότι η απεικόνιση T είναι γραμμική.
- (β) (10 μονάδες) Υπολογίστε τον πίνακα της T ως προς την κανονική (διατεταγμένη) βάση $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ του V .
- (γ) (10 μονάδες) Υπολογίστε τη διάσταση του πυρήνα $\ker(T)$ της γραμμικής απεικόνισης T . Είναι η T ισομορφισμός διανυσματικών χώρων;

4. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος (δικαιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας);

- (α) (5 μονάδες) Αν $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε ο $A + B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ είναι επίσης αντιστρέψιμος πίνακας.
- (β) (5 μονάδες) Αν για τους πίνακες $A, B, C \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ισχύουν $\det(A) = \det(C) = 1$ και $ABC = O$, τότε $B = O$.
- (γ) (5 μονάδες) Αν V είναι διανυσματικός χώρος επί του \mathbb{R} διάστασης 2 και U, W είναι δύο διακεκριμένοι υπόχωροι του V , διαφορετικοί από τον V , τότε η τομή $U \cap W$ περιέχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα του V .
- (δ) (5 μονάδες) Υπάρχει γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ με $\dim \ker(T) = \dim \operatorname{im}(T)$.
- (ε) (5 μονάδες) Αν $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ και ο πίνακας A είναι ισοδύναμος προς τον B , τότε ο A είναι όμοιος προς τον B .

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 4/2/2011 – Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες – Καλή Επιτυχία