

Γραμμική Άλγεβρα Ι
Κατατακτήριες Εξετάσεις 2012–2013
Κατάταξη στο Α Εξάμηνο
Σειρά Θεμάτων Δ

1. Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \\ x_1 + 2\lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

στους αγνώστους x_1, x_2, x_3 , όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι παράμετρος.

- (α) Βρείτε όλα τα $\lambda \in \mathbb{R}$ για τα οποία το σύστημα είναι αδύνατο.
(β) Βρείτε όλες τις λύσεις του συστήματος για $\lambda = 2$.

2. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

- (α) Είναι ο πίνακας $A^2 + B^2$ αντιστρέψιμος;
(β) Δείξτε ότι το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}^{3 \times 1} : Ax = Bx\}$ είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^{3 \times 1}$ και υπολογίστε τη διάστασή του.

3. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^{1 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 3}$ με

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - x_3, -3x_2 + 2x_3, 4x_1 - x_2)$$

για $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

- (α) Βρείτε μία βάση της εικόνας της T .
(β) Έστω μη μηδενική γραμμική απεικόνιση $S : \mathbb{R}^{1 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 3}$ για την οποία ισχύει $S(T(x)) = O$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$. Ποια είναι η διάσταση της εικόνας της S ;

4. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ και $B = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (α) Για ποιες τιμές του λ είναι ο πίνακας A ισοδύναμος προς τον B ;
(β) Για ποιες τιμές του λ είναι ο πίνακας A όμοιος προς τον B ;

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 13/12/2012 – Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες – Καλή Επιτυχία