



**ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

**Συνδυαστική και Τοπολογία της Απολύτου Διάταξης σε  
Πεπερασμένες Ομάδες Coxeter**

ΜΥΡΤΩ ΚΑΛΛΙΠΟΛΙΤΗ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Επιβλέπων Καθηγητής: ΧΡΗΣΤΟΣ ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΗΣ

ΑΘΗΝΑ 2010



Η παρούσα διδακτορική διατριβή παρουσιάστηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθήνας την Πέμπτη 17 Ιουνίου 2010. Την τριμελή συμβουλευτική επιτροπή αποτέλεσαν οι: Χρήστος Αθανασιάδης (επιβλέπων), Μιχάλης Μαλιάκας και Παναγιώτης Παπάζογλου. Την επταμελή εξεταστική επιτροπή αποτέλεσαν οι: Χ. Αθανασιάδης, Δ. Δερζιώτης, Ι. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Α. Μελάς, Π. Παπάζογλου, Σ. Παπασταυρίδης.



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Πρόλογος</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Αρχικές Έννοιες</b>	<b>17</b>
2.1	Ομάδες Coxeter . . . . .	17
2.1.1	Οι κλασικές πεπερασμένες ομάδες Coxeter . . . . .	18
2.2	Μερικώς διατεταγμένα σύνολα . . . . .	20
2.3	Η απόλυτη διάταξη . . . . .	25
2.3.1	Η διάταξη $\text{Abs}(S_n)$ . . . . .	25
2.3.2	Η διάταξη $\text{Abs}(B_n)$ . . . . .	26
2.3.3	Η διάταξη $\text{Abs}(D_n)$ . . . . .	27
2.3.4	Προβολές . . . . .	28
2.4	Μονοπλεκτικά συμπλέγματα . . . . .	30
2.5	Κατασκευάσιμα συμπλέγματα και διατάξεις . . . . .	34
2.5.1	Κατασκευάσιμα συμπλέγματα . . . . .	35
2.5.2	Κατασκευάσιμες διατάξεις . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Συνδυαστικές Ιδιότητες</b>	<b>39</b>
3.1	Η συνάρτηση Möbius των $\text{Abs}(S_n)$ και $\mathcal{J}_n$ . . . . .	39
3.2	Σύνδεσμοι . . . . .	42
3.2.1	Σύνδεσμοι στην $\text{Abs}(B_n)$ . . . . .	42
3.2.2	Σύνδεσμοι στην $\text{Abs}(D_n)$ . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Τοπολογικές Ιδιότητες</b>	<b>51</b>
4.1	Αποφλοιωσιμότητα . . . . .	51
4.1.1	Διαστήματα στην $\text{Abs}(B_n)$ . . . . .	51
4.1.2	Διαστήματα στην $\text{Abs}(D_n)$ . . . . .	54
4.2	Η ιδιότητα Cohen-Macaulay . . . . .	54
4.2.1	Η διάταξη $\text{Abs}(S_n)$ . . . . .	54
4.2.2	Το ιδεώδες $\mathcal{J}_n$ της $\text{Abs}(B_n)$ . . . . .	63
4.2.3	Η διάταξη $\text{Abs}(D_n)$ . . . . .	72



# Κατάλογος Σχημάτων

2.1	Η διάταξη $\mathcal{B}_3$ . . . . .	21
2.2	Οι τιμές $\mu(x)$ . . . . .	23
2.3	EL-επιγραφή του $\mathcal{B}_3$ . . . . .	24
2.4	Δύο μερικές διατάξεις . . . . .	24
2.5	Μη διασταυρούμενη και διασταυρούμενη μετάθεση . . . . .	26
2.6	Η διάταξη $\text{Abs}(S_3)$ . . . . .	27
2.7	Η διάταξη $\text{Abs}(S_4)$ . . . . .	28
2.8	Η διάταξη $\text{Abs}(B_2)$ . . . . .	29
2.9	μονόπλοκο διάστασης $\leq 3$ . . . . .	30
2.10	Ένα 3-διάστατο σύμπλεγμα . . . . .	31
2.11	Ένα αποφλοιώσιμο και ένα μη αποφλοιώσιμο σύμπλεγμα . . . . .	32
2.12	$P$ και $\Delta(P)$ . . . . .	33
2.13	Η διάταξη $\hat{P}$ με τις τιμές $\mu(x)$ . . . . .	34
3.1	Ο σύνδεσμος $\mathcal{L}_3$ . . . . .	45
3.2	Δύο EL-επιγραφές για το $\mathcal{L}_2$ . . . . .	47
4.1	EL-επιγραφή για το διάστημα $[e, [3, -4]((1, 2))]$ . . . . .	52
4.2	Το διάστημα $[e, [1][2][3][4]]$ της $\text{Abs}(D_n)$ . . . . .	55
4.3	Τα ιδεώδη $I_1, I_2$ . . . . .	59
4.4	Το ιδεώδες $I_1 \cap I_2$ . . . . .	59



The worst thing you can do is to completely solve a problem.  
-Dan Kleitman



# Κεφάλαιο 1

## Πρόλογος

Οι ομάδες Coxeter είναι θεμελιώδεις συνδυαστικές δομές οι οποίες εμφανίζονται σε πολλές περιοχές των μαθηματικών. Οι μερικές διατάξεις στις ομάδες Coxeter αποτελούν ένα σημαντικό εργαλείο με το οποίο μπορούμε να προσεγγίσουμε τις ομάδες αυτές. Δυο κλασικά παραδείγματα τέτοιων διατάξεων είναι η ασθενής διάταξη (weak order) και η διάταξη Bruhat. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα [9, 11, 15, 27] για πληροφορίες πάνω στις ομάδες Coxeter και στις διατάξεις τους.

Σκοπός της παρούσας διατριβής είναι η μελέτη μιας (σχετικά) νέας μερικής διάταξης στις πεπερασμένες ομάδες Coxeter, της *απόλυτης διάταξης*. Το ενδιαφέρον για τη μελέτη αυτής της διάταξης προέκυψε από ερευνητές της γεωμετρικής θεωρίας ομάδων [6, 16, 17]. Η απόλυτη διάταξη  $\text{Abs}(W)$  σε μια πεπερασμένη ομάδα Coxeter  $W$  μπορεί να περιγραφεί ως η μερική διάταξη στην  $W$ , το διάγραμμα Hasse της οποίας προκύπτει κατευθύνοντας τις ακμές του γραφήματος Cayley της  $W$ , ως προς το σύνολο *όλων* των ανακλάσεων της, από το ουδέτερο στοιχείο προς τα έξω (βλέπε Παράγραφο 2.3 για τον ακριβή ορισμό). Η διάταξη  $\text{Abs}(W)$  είναι τοπικά αυτοδυσική και διαβαθμισμένη. Έχει ελάχιστο στοιχείο, το ουδέτερο  $e \in W$ , αλλά δεν έχει μέγιστο αφού κάθε στοιχείο Coxeter της  $W$  είναι μεγιστικό στην  $\text{Abs}(W)$ . Η συνάρτηση τάξης της  $\text{Abs}(W)$  λέγεται απόλυτο μήκος και συμβολίζεται με  $\ell_{\mathcal{T}}$ . Σημαντικό παράδειγμα για την κατανόηση του απόλυτου μήκους και της απόλυτης διάταξης αποτελεί η συμμετρική ομάδα  $S_n$ . Σε αυτήν την περίπτωση το σύνολο των ανακλάσεων  $\mathcal{T}$  ταυτίζεται με το σύνολο όλων των αντιμεταθέσεων της  $S_n$ . Έτσι, το απόλυτο μήκος  $\ell_{\mathcal{T}}(w)$  μιας μετάθεσης  $w \in S_n$  είναι το ελάχιστο δυνατό πλήθος αντιμεταθέσεων οι οποίες έχουν γινόμενο ίσο με  $w$ . Η διάταξη  $\text{Abs}(S_n)$  ορίζεται θέτοντας  $u \preceq v$  (για  $u, v \in S_n$ ) αν υπάρχουν αντιμεταθέσεις  $t_1, t_2, \dots, t_k$  της  $S_n$  τέτοιες ώστε  $ut_1t_2 \cdots t_k = v$  και  $\ell_{\mathcal{T}}(ut_1t_2 \cdots t_i) = \ell_{\mathcal{T}}(u) + i$  για  $1 \leq i \leq k$ .

Το απόλυτο μήκος και η απόλυτη διάταξη εμφανίζονται με φυσιολογικό τρόπο στη συνδυαστική [2], στη θεωρία ομάδων [6, 17], στη στατιστική [22] και στη θεωρία αναλλοιώτων [27]. Για παράδειγμα, το μήκος  $\ell_{\mathcal{T}}(w)$  μπορεί επίσης να οριστεί ως η συνδιάσταση του χώρου ο οποίος μένει σταθερός από το  $w$ , όταν η  $W$  δρα πιστά (ως ομάδα που παράγεται από τις ορθογώνιες ανακλάσεις) σε ένα διανυσματικό χώρο  $V$  με τη συνήθη γεωμετρική της αναπαράσταση. Επιπλέον, η γεννήτρια συνάρτηση του

απόλυτου μήκους  $\ell_{\mathcal{T}}$  ικανοποιεί τη σχέση

$$\sum_{w \in W} t^{\ell_{\mathcal{T}}(w)} = \prod_{i=1}^{\ell} (1 + e_i t),$$

όπου τα  $e_1, e_2, \dots, e_{\ell}$  είναι οι εκθέτες [27, Παράγραφος 3.20] της  $W$  και  $\ell$  η τάξη της. Παραπέμπουμε στο [2, Παράγραφος 2.4] για επιπλέον στοιχεία πάνω στη σημασία της απόλυτης διάταξης καθώς και για σχετικά ιστορικά στοιχεία.

Εδώ ενδιαφερόμαστε για τη συνδυαστική και την τοπολογία της  $\text{Abs}(W)$ . Αυτές έχουν μελετηθεί διεξοδικά για το διάστημα  $[e, c] := NC(W, c)$  της  $\text{Abs}(W)$ , γνωστό ως σύνδεσμος των μη διασταυρούμενων διαμερίσεων που σχετίζεται με τη  $W$ , όπου το  $c \in W$  συμβολίζει ένα στοιχείο Coxeter. Για παράδειγμα, έχει αποδειχθεί στο [3] ότι το  $NC(W, c)$  είναι αποφλοιώσιμο για κάθε πεπερασμένη ομάδα Coxeter  $W$ . Ειδικότερα, το  $NC(W, c)$  είναι Cohen-Macaulay επί του  $\mathbb{Z}$  και το διατακτικό σύμπλεγμα του  $NC(W, c) \setminus \{e, c\}$  έχει τον ίδιο τύπο ομοτοπίας με ένα σφηνοειδές άθροισμα (wedge) σφαιρών. Το επόμενο ερώτημα τέθηκε (ανεξάρτητα) από τους Αθανασιάδη και Reiner το 2003 και δημοσιεύθηκε από τον δεύτερο το 2005 [1, Πρόβλημα 3.1], [43, Πρόβλημα 3.3.7]. Για τη σημασία της ιδιότητας Cohen-Macaulay για μερικές διατάξεις και, γενικότερα, για μονοπλεκτικά συμπλέγματα παραπέμπουμε στα [40, Παράγραφος 3.8] και [39, Κεφάλαιο 2].

**Ερώτημα 1.** Έχει η διάταξη  $\text{Abs}(W)$  την ιδιότητα Cohen-Macaulay;

Με χρήση υπολογιστή ο Reiner έδειξε ότι η απόλυτη διάταξη δεν είναι Cohen-Macaulay για την ομάδα  $D_4$ . Αυτό τον οδήγησε στο να θέσει το ακόλουθο ερώτημα [1, Πρόβλημα 3.1].

**Ερώτημα 2.** Έχει το διατακτικό ιδεώδες της  $\text{Abs}(W)$  που παράγεται από τα στοιχεία Coxeter της  $W$  την ιδιότητα Cohen-Macaulay;

Τέλος ένα ακόμα ερώτημα που τέθηκε από τον Αθανασιάδη είναι το επόμενο.

**Ερώτημα 3.** Έχουν όλα τα κλειστά διαστήματα της  $\text{Abs}(W)$  την ιδιότητα Cohen-Macaulay;

Όπως αναφέραμε παραπάνω, είναι γνωστό ότι το Ερώτημα 3 έχει θετική απάντηση για την περίπτωση της συμμετρικής ομάδας  $S_n$ . Επιπλέον, σε αυτήν την περίπτωση το διατακτικό ιδεώδες της  $\text{Abs}(S_n)$  που παράγεται από τα στοιχεία Coxeter της  $S_n$  ταυτίζεται με ολόκληρη τη διάταξη  $\text{Abs}(S_n)$  και επομένως τα Ερωτήματα 1 και 2 είναι ταυτόσημα.

Στην παρούσα διατριβή επιχειρούμε να απαντήσουμε στα παραπάνω ερωτήματα. Αποδεικνύουμε ότι για τη διάταξη  $\text{Abs}(S_n)$  τα Ερωτήματα 1 και 2 έχουν θετική απάντηση, ενώ για τη διάταξη  $\text{Abs}(B_n)$  απαντάμε θετικά στα Ερωτήματα 2 και 3. Επιπλέον, δείχνουμε ότι υπάρχει ένα διάστημα στην  $\text{Abs}(D_4)$  το οποίο δεν έχει την ιδιότητα

Cohen-Macaulay. Το γεγονός αυτό δίνει αρνητική απάντηση στα Ερωτήματα 1 και 3 για την  $\text{Abs}(D_n)$  για κάθε  $n \geq 4$ . Τέλος, δίνουμε χαρακτηρισμούς για τα διαστήματα των  $\text{Abs}(B_n)$  και  $\text{Abs}(D_n)$  που είναι σύνδεσμοι και μελετάμε τις βασικές απαριθμητικές τους ιδιότητες. Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση της συμμετρικής ομάδας, κάθε διάστημα στην  $\text{Abs}(S_n)$  είναι ισόμορφο με ένα ευθύ γινόμενο μη διασταυρούμενων διαμερίσεων, οι συνδυαστικές ιδιότητες των οποίων είναι γνωστές.

Συγκεκριμένα, τα κύρια αποτελέσματά μας είναι τα εξής.

**Θεώρημα 1.** *Η διάταξη  $\text{Abs}(S_n)$  είναι ομοτοπικά Cohen-Macaulay για κάθε  $n \geq 1$ .*

**Θεώρημα 2.** *Για την τιμή  $\mu_n = \mu_n(\hat{0}, \hat{1})$  της συνάρτησης Möbius της διάταξης που προκύπτει αν στην  $\text{Abs}(S_n)$  επισυνάψουμε ένα μέγιστο στοιχείο  $\hat{1}$  ισχύει η σχέση*

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \mu_n \frac{t^n}{n!} = 1 - C(t) \exp\{-2tC(t)\}, \quad (1.1)$$

όπου  $C(t) = \frac{1}{2t}(1 - \sqrt{1 - 4t})$  είναι η συνήθης γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Catalan.

Έστω  $\mathcal{J}_n$  το διατακτικό ιδεώδες της  $\text{Abs}(B_n)$  που παράγεται από τα στοιχεία Coxeter της  $B_n$ . Σε αντίθεση με τη συμμετρική ομάδα, υπάρχουν μεγιστικά στοιχεία της  $\text{Abs}(B_n)$  τα οποία δεν είναι Coxeter. Τα μεγιστικά (ως προς τη διάταξη του εγκλεισμού) διαστήματα της  $\text{Abs}(B_n)$  περιλαμβάνουν τις διατάξεις  $NC^B(n)$  των μη διασταυρούμενων διαμερίσεων τύπου  $B$ , τα οποία εισήχθησαν και μελετήθηκαν από τον Reiner [36], καθώς και τις διατάξεις  $NC^B(p, q)$  των δακτυλιοειδών μη διασταυρούμενων διαμερίσεων, οι οποίες μελετήθηκαν πρόσφατα από τον Krattenthaler [29] και τους Nica και Oancea [34].

**Θεώρημα 3.** *Η διάταξη  $\mathcal{J}_n$  είναι ομοτοπικά Cohen-Macaulay για κάθε  $n \geq 2$ .*

**Θεώρημα 4.** *Κάθε διάστημα στην  $\text{Abs}(B_n)$  είναι αποφλοιώσιμο.*

**Θεώρημα 5.** *Για την τιμή  $\mu_n = \mu_n(\hat{0}, \hat{1})$  της συνάρτησης Möbius της διάταξης που προκύπτει αν στην  $\mathcal{J}_n$  επισυνάψουμε ένα μέγιστο στοιχείο  $\hat{1}$  ισχύει η σχέση*

$$\sum_{n \geq 2} (-1)^n \mu_n \frac{t^n}{n!} = 1 - \sqrt{C(2t)} \exp\{-2tC(2t)\} \left( 1 + \sum_{n \geq 1} 2^{n-1} \binom{2n-1}{n} \frac{t^n}{n} \right),$$

όπου  $C(t) = \frac{1}{2t}(1 - \sqrt{1 - 4t})$  είναι η συνήθης γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Catalan.

Σε κάθε  $w \in B_n$  αντιστοιχούμε μια διαμέριση ακεραίων  $\mu(w)$ , η οποία καθορίζεται από την κυκλική μορφή του  $w$ , όπως θα δούμε στην Παράγραφο 3.2. Τα επόμενα θεωρήματα δίνουν χαρακτηρισμούς για τα διαστήματα των  $\text{Abs}(B_n)$  και  $\text{Abs}(D_n)$ , αντίστοιχα, τα οποία είναι σύνδεσμοι.

**Θεώρημα 6.** Για  $w \in B_n$ , το διάστημα  $[e, w]$  στην  $Abs(B_n)$  είναι σύνδεσμος αν και μόνο αν η διαμέριση  $\mu(w)$  έχει τη μορφή  $(k, 1^r)$  για κάποια  $k, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .

**Θεώρημα 7.** Για  $w \in D_n$ , το διάστημα  $[e, w]$  στην  $Abs(D_n)$  είναι σύνδεσμος αν και μόνο αν  $\mu(w) = (k, 1)$  για κάποιο  $k \leq n - 1$ , ή  $\mu(w) = (1, 1, 1, 1)$ .

Παραθέτουμε τα εξής σχετικά ανοικτά ερωτήματα.

**Ερώτημα 4.** Είναι η διάταξη  $Abs(B_n)$  Cohen-Macaulay για κάθε  $n$ ;

**Ερώτημα 5.** Είναι το διατακτικό ιδεώδες της  $Abs(W)$  που παράγεται από το σύνολο των στοιχείων Coxeter αποφλοιώσιμο ή Cohen-Macaulay για κάθε ομάδα Coxeter  $W$ ;

**Ερώτημα 6.** Είναι οι διατάξεις  $Abs(S_n), Abs(B_n)$  αποφλοιώσιμες για κάθε  $n$ ;

**Ερώτημα 7.** Είναι η διάταξη  $Abs(W)$  αποφλοιώσιμη ή Cohen-Macaulay για κάθε οποιαδήποτε ομάδα Coxeter;

**Ερώτημα 8.** Ποιά διαστήματα της διάταξης  $Abs(D_n)$  είναι αποφλοιώσιμα;

Η δομή της διατριβής έχει ως εξής. Στην Παράγραφο 2.1 δίνουμε τον ορισμό της ομάδας Coxeter και περιγράφουμε σύντομα τις τρεις άπειρες οικογένειες των κλασικών ομάδων Coxeter, δηλαδή τη συμμετρική ομάδα  $S_n$ , την υπεροκταεδρική ομάδα  $B_n$  και την κανονική υποομάδα της (δείκτη δύο)  $D_n$ . Στη συνέχεια (Παράγραφος 2.2) διατυπώνουμε ορισμούς και βασικές ιδιότητες των μερικώς διατεταγμένων συνόλων, ορίζουμε την απόλυτη διάταξη σε μια πεπερασμένη ομάδα Coxeter και εξετάζουμε την απόλυτη διάταξη στις κλασικές ομάδες Coxeter (Παράγραφος 2.3). Στην Παράγραφο 2.4 διατυπώνουμε ορισμούς και ιδιότητες των μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων. Το Κεφάλαιο 2 κλείνει με την εισαγωγή μιας νέας ιδιότητας για μερικώς διατεταγμένα σύνολα, της ισχυρά κατασκευάσιμης διάταξης, η οποία αποτελεί σημαντικό εργαλείο για πολλές αποδείξεις σε αυτήν τη διατριβή (Παράγραφος 2.5). Στο Κεφάλαιο 3 ασχολούμαστε με τις συνδυαστικές ιδιότητες της απόλυτης διάταξης. Συγκεκριμένα, στην Παράγραφο 3.1 αποδεικνύουμε τα Θεωρήματα 2 και 5. Στην Παράγραφο 3.2 χαρακτηρίζουμε τα κλειστά διαστήματα των  $Abs(B_n)$  και  $Abs(D_n)$  που είναι σύνδεσμοι. Ύστερα μελετάμε μια ειδική περίπτωση τέτοιου διαστήματος, του  $[e, x] \subseteq Abs(B_n)$ , όπου  $x = t_1 t_2 \cdots t_n$  είναι μεγιστικό στοιχείο και κάθε  $t_i$  είναι ισορροπημένη ανάκλαση. Τέλος υπολογίζουμε τον πληθάρημο, τη συνάρτηση Möbius και το πολυώνυμο ζήτα των διαστημάτων της  $Abs(B_n)$  που είναι σύνδεσμοι. Αυτοί οι υπολογισμοί βασίζονται στα αποτελέσματα των Goulden, Nica και Oancea [25] σχετικά με τις απαριθμητικές ιδιότητες της διάταξης  $NC^B(n-1, 1)$ . Στο Κεφάλαιο 4 ασχολούμαστε με τις τοπολογικές ιδιότητες της απόλυτης διάταξης. Στην Παράγραφο 4.1 δείχνουμε ότι κάθε κλειστό διάστημα της  $Abs(B_n)$  είναι αποφλοιώσιμο και κατά συνέπεια Cohen-Macaulay (Θεώρημα 4). Επίσης δίνουμε ένα παράδειγμα διαστήματος της  $Abs(D_n)$  το οποίο δεν είναι Cohen-Macaulay. Σαν συμπέρασμα παίρνουμε ότι η διάταξη  $Abs(D_n)$  δεν εί-

ναι Cohen-Macaulay για κανένα  $n \geq 4$ . Τα Θεωρήματα 1 και 3 αποδεικνύονται στις Παραγράφους 4.2.1 και 4.2.2, αντίστοιχα. Η πρώτη απόδειξη για τα Θεωρήματα 1 και 3 χρησιμοποιεί την ιδιότητα της ισχυρά κατασκευάσιμης διάταξης. Στη συνέχεια παραθέτουμε μια ακόμα απόδειξη για τα θεωρήματα αυτά, η οποία βασίζεται σε ένα νηματικό θεώρημα του Quillen για μερικές διατάξεις [35, Πρόσμμα 9.7].

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα Καθηγητή μου Χρήστο Αθανασιάδη για την καθοδήγηση και την υπομονή του και για τις παρατηρήσεις του στο τελικό κείμενο της διατριβής καθώς και τους Μιχάλη Μαλιάκα και Παναγιώτη Παπάζογλου που συμμετείχαν στη συμβουλευτική επιτροπή μου. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τους C. Krattenthaler, V. Reiner, E. Τζανάκη για ενδιαφέρουσες συζητήσεις και τον V. Welker, ο οποίος έφερε στην προσοχή μου το άρθρο [14]. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές μου που με στήριξαν, τους φίλους μου που με βοήθησαν το γραφείο 124(!) για τη φιλοξενία και κυρίως τον Γιώργο και την Καίτη.



## Κεφάλαιο 2

# Αρχικές Έννοιες

Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε τις ομάδες Coxeter και θα περιγράψουμε σύντομα τη συμμετρική ομάδα  $S_n$ , την υπεροκταεδρική ομάδα  $B_n$  και την ομάδα  $D_n$  (Παράγραφος 2.1). Στη συνέχεια θα δώσουμε βασικούς ορισμούς για μερικώς διατεταγμένα σύνολα (Παράγραφος 2.2), θα ορίσουμε την απόλυτη διάταξη  $\text{Abs}(W)$  σε μια ομάδα Coxeter  $W$  και θα περιγράψουμε αναλυτικά την περίπτωση όπου η  $W$  είναι μια από τις κλασικές ομάδες Coxeter (Παράγραφος 2.3). Στην Παράγραφο 2.4 δίνουμε ορισμούς που αφορούν τα αφηρημένα μονοπλεκτικά συμπλέγματα και περιγράφουμε τη σχέση που τα συνδέει με τα μερικώς διατεταγμένα σύνολα. Η Παράγραφος 2.5 αποτελεί σημαντικό μέρος αυτής της διατριβής καθώς εισάγεται μια νέα έννοια κατασκευασιμότητας για μερικές διατάξεις με βάση την οποία αποδεικνύονται τα Θεωρήματα 1 και 3.

### 2.1 Ομάδες Coxeter

Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο  $\mathbb{R}^n$ , εφοδιασμένο με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο  $(\cdot, \cdot)$ . Έστω  $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  και έστω  $H_\alpha$  το ορθογώνιο γραμμικό υπερεπίπεδο στο διάνυσμα  $\alpha$ . Θεωρούμε την απεικόνιση  $r_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  με  $r_\alpha(v) = v - 2\frac{(v, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$ . Παρατηρούμε ότι η  $r_\alpha$  είναι γραμμική, διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο και ικανοποιεί τις σχέσεις  $r_\alpha(\alpha) = -\alpha$  και  $r_\alpha(u) = u$  για κάθε  $u \in H_\alpha$ . Η  $r_\alpha$  λέγεται *ανάκλαση* στον  $\mathbb{R}^n$  και είναι στοιχείο της ομάδας  $O(\mathbb{R}^n)$  των ορθογώνιων μετασχηματισμών του  $\mathbb{R}^n$ . *Πραγματική ομάδα ανακλάσεων* ονομάζεται κάθε υποομάδα της  $O(\mathbb{R}^n)$  η οποία παράγεται από κάποιο σύνολο ανακλάσεων.

Οι πεπερασμένες πραγματικές ομάδες ανακλάσεων μελετήθηκαν τον δέκατο ένατο αιώνα κυρίως από τους Möbius, Jordan, Schläfli, Killing, Cartan και Weyl. Το 1935 ο Coxeter τις ταξινόμησε χρησιμοποιώντας διαγράμματα που αντιστοιχούν σε παραστάσεις των ομάδων αυτών [21]. Η ταξινόμηση αυτή είναι στενά συνδεδεμένη με την ταξινόμηση ημιαπλών αλγεβρών Lie, η οποία είχε γίνει νωρίτερα από τους Cartan και Killing. Υπάρχουν τέσσερις άπειρες οικογένειες ανάγωγων πεπερασμένων πραγματικών ομάδων ανακλάσεων, οι κλασικές ομάδες (οι οποίες αποτελούνται από τη συμμετρική ομάδα σε  $n$  στοιχεία  $A_{n-1}$ , την υπεροκταεδρική ομάδα  $B_n$  και την υποομάδα της

$D_n$ ) και η διεδρική ομάδα  $I_2(n)$  και οι έξι σποραδικές ομάδες  $E_6, E_7, E_8, F_4, H_3, H_4$ . Ο δείκτης συμβολίζει τη διάσταση του χώρου στον οποίο δρα η αντίστοιχη ομάδα. Κάθε πεπερασμένη πραγματική ομάδα ανακλάσεων μπορεί να παρασταθεί με τη βοήθεια ενός μη κενού συνόλου  $S$  και μιας απεικόνισης  $m : S \times S \rightarrow \mathbb{N}$  όπως εξηγήουμε παρακάτω. Για περισσότερες πληροφορίες πάνω στις ομάδων ανακλάσεων και στην ιστορία τους παραπέμπουμε στα [15, 20, 24].

**Ορισμός 2.1.** Έστω  $S$  ένα μη κενό πεπερασμένο σύνολο και έστω συνάρτηση  $m : S \times S \rightarrow \mathbb{N}$  για την οποία ισχύουν  $m(s, s') = m(s', s)$  και  $m(s, s') = 1 \Leftrightarrow s = s'$  για όλα τα  $s, s' \in S$ . Θεωρούμε την ομάδα  $W$  που παράγεται από το σύνολο  $S$  με σχέσεις  $(ss')^{m(s, s')} = e$ , για όλα τα  $s, s' \in S$ , όπου  $e$  είναι το ουδέτερο στοιχείο της  $W$ . Το ζεύγος  $(W, S)$  λέγεται *σύστημα Coxeter* και η ομάδα  $W$  λέγεται *ομάδα Coxeter* με σύστημα γεννητόρων Coxeter  $S$ . Τα στοιχεία του συνόλου  $S$  ονομάζονται *απλές ανακλάσεις*, ενώ το σύνολο  $\mathcal{T} = \{ws w^{-1} : w \in W, s \in S\}$  είναι το σύνολο *όλων* των ανακλάσεων της  $W$ . Κάθε στοιχείο  $w \in W$  της μορφής  $w = s_1 \cdots s_n$ , όπου  $n$  είναι ο πληθάριθος του συνόλου  $S$  και  $s_i \in S$  είναι διακεκριμένα, λέγεται *στοιχείο Coxeter* της  $W$ .

Αποδεικνύεται ότι κάθε πεπερασμένη ομάδα Coxeter είναι ισόμορφη με μία ομάδα ανακλάσεων στον  $\mathbb{R}^n$  και ότι, αντιστρόφως, κάθε πεπερασμένη πραγματική ομάδα ανακλάσεων έχει μια παράσταση της παραπάνω μορφής [27].

**Παράδειγμα 2.1.** Η διεδρική ομάδα  $I_2(n)$  με παράσταση:

$$I_2(n) = \langle a, b \mid a^2, b^2, (ab)^n \rangle$$

είναι μια ομάδα Coxeter.

### 2.1.1 Οι κλασικές πεπερασμένες ομάδες Coxeter

**Η συμμετρική ομάδα  $S_n$**

Θεωρούμε την ομάδα  $S_n$  ως την ομάδα μεταθέσεων του συνόλου  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Το σύνολο  $\mathcal{T}$  των ανακλάσεων της  $S_n$  είναι ίσο με το σύνολο όλων των αντιμεταθέσεων  $(ij)$ , όπου  $1 \leq i < j \leq n$ . Τα στοιχεία Coxeter είναι ακριβώς οι  $n$ -κύκλοι της  $S_n$ . Έστω  $S$  το σύνολο των αντιμεταθέσεων  $s_i = (ii+1)$  για  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Ως ομάδα Coxeter, η  $S_n$  έχει παράσταση

$$S_n = \langle S \mid (s_i s_j)^{m(i, j)} \rangle,$$

όπου  $m(i, j) = m(j, i)$  και

$$m(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{αν } j = i, \\ 3 & \text{αν } j = i + 1, \\ 2 & \text{αν } j > i + 1, \end{cases}$$

για  $1 \leq i \leq j \leq n - 1$ .

### Η υπεροκταεδρική ομάδα $B_n$

Θεωρούμε την υπεροκταεδρική ομάδα  $B_n$  ως την ομάδα των μεταθέσεων  $w$  του συνόλου  $\{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$  που ικανοποιούν τη σχέση  $w(-i) = -w(i)$  για  $1 \leq i \leq n$ . Η ομάδα  $B_n$  έχει  $2^n n!$  στοιχεία και είναι ισόμορφη με μια υποομάδα της  $S_{2n}$ . Ακολουθώντας τον συμβολισμό του [17], η μετάθεση που έχει κυκλική μορφή  $(a_1 a_2 \cdots a_k)(-a_1 - a_2 \cdots - a_k)$  συμβολίζεται ως  $((a_1, a_2, \dots, a_k))$  και λέγεται *ζευγαρωμένος (paired)  $k$ -κύκλος*, ενώ ο κύκλος  $(a_1 a_2 \cdots a_k - a_1 - a_2 \cdots - a_k)$  συμβολίζεται με  $[a_1, a_2, \dots, a_k]$  και λέγεται *ισορροπημένος (balanced)  $k$ -κύκλος*. Για παράδειγμα, το στοιχείο  $w = ((1, 2, 3))[4, 5]$  συμβολίζει τη μετάθεση η οποία έχει κυκλική μορφή  $(1\ 2\ 3)(-1\ -2\ -3)(4\ 5\ -4\ -5)$ . Κάθε στοιχείο  $w \in B_n$ , ως στοιχείο ομάδας μεταθέσεων, γράφεται ως γινόμενο ξένων ζευγαρωμένων ή ισορροπημένων κύκλων, οι οποίοι στο εξής θα λέγονται κύκλοι του  $w$  [17, Παράγραφος 3].

Με τον παραπάνω συμβολισμό, το σύνολο  $\mathcal{T}$  των ανακλάσεων της  $B_n$  είναι ίσο με την ένωση

$$\{[i] : 1 \leq i \leq n\} \cup \{((i, j)), ((i, -j)) : 1 \leq i < j \leq n\} \quad (2.1)$$

και τα στοιχεία Coxeter της  $B_n$  είναι ακριβώς οι ισορροπημένοι  $n$ -κύκλοι. Έστω  $S$  το σύνολο των 2-κύκλων  $s_i = ((i, i+1))$  για  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  και  $s_n = [n]$ . Ως ομάδα Coxeter, η  $B_n$  έχει παράσταση

$$B_n = \langle S \mid (s_i s_j)^{m(i,j)} \rangle,$$

όπου  $m(i, j) = m(j, i)$  και

$$m(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{αν } j = i, \\ 3 & \text{αν } j = i + 1 \text{ και } (i, j) \neq (n-1, n), \\ 4 & \text{αν } (i, j) = (n-1, n), \\ 2 & \text{αν } j > i + 1, \end{cases}$$

για  $1 \leq i \leq j \leq n$ .

**Παράδειγμα 2.2.** Έστω  $w_1 = ((1, 2, 3))$ ,  $w_2 = ((2, -3))$  και  $w_3 = [2, 4]$  στοιχεία της  $B_4$ . Τότε  $w_1 w_2 = (1\ 2\ 3)(-1\ -2\ -3)(2\ -3)(-2\ 3) = (1\ 2\ -1\ -2)(3\ -3) = ((2, 3))[3]$  και  $w_1 w_3 = (1\ 2\ 3)(-1\ -2\ -3)(2\ 4\ -2\ -4) = (1\ 2\ 4\ -3\ -1\ -2\ -4\ 3) = [1, 2, 4, -3]$ .

### Η ομάδα $D_n$

Η ομάδα Coxeter  $D_n$  είναι η υποομάδα της  $B_n$  που παράγεται από τις ανακλάσεις

$$\{((i, j)), ((i, -j)) : 1 \leq i < j \leq n\}. \quad (2.2)$$

Ο δείκτης της  $[B_n : D_n]$  της υποομάδας  $D_n$  στην  $B_n$  είναι ίσος με δύο. Το σύνολο (2.2) περιέχει όλες τις ανακλάσεις της  $D_n$ . Ένα στοιχείο  $w \in B_n$  ανήκει στην  $D_n$  αν και μόνο αν το  $w$  έχει άρτιο πλήθος ισορροπημένων κύκλων στην κυκλική του παράσταση. Τέλος, κάθε στοιχείο Coxeter της  $D_n$  έχει τη μορφή  $[a_1, a_2, \dots, a_{n-1}][a_n]$ , όπου  $a_1, \dots, a_n$  είναι στοιχεία του  $\{\pm 1, \dots, \pm n\}$  με διάφορες ανά δύο απόλυτες τιμές.

Έστω  $S$  το σύνολο των 2-κύκλων  $s_i = ((i, i + 1))$  για  $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$  και  $s_0 = ((1, -2))$ . Ως ομάδα Coxeter, η  $D_n$  έχει παράσταση

$$D_n = \langle S \mid (s_i s_j)^{m(i,j)} \rangle,$$

όπου  $m(i, j) = m(j, i)$  και

$$m(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{αν } j = i, \\ 3 & \text{αν } j = i + 1 \text{ ή } (i, j) = (0, 2), \\ 2 & \text{αν } j > i + 1 \text{ και } (i, j) \neq (0, 2), \end{cases}$$

για  $0 \leq i \leq j \leq n - 1$ .

## 2.2 Μερικώς διατεταγμένα σύνολα

Σε αυτήν την παράγραφο δίνουμε τους βασικούς ορισμούς για τα μερικώς διατεταγμένα σύνολα. Για περισσότερες πληροφορίες, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [40, Κεφάλαιο 3].

**Ορισμός 2.2.** Μερική διάταξη σε ένα σύνολο  $P$  είναι μια διμελής σχέση  $\leq$  στο  $P$  με τις εξής ιδιότητες:

- $x \leq x$  (ανακλαστική ιδιότητα)
- αν  $x \leq y$  και  $y \leq x$ , τότε  $x = y$  (αντισυμμετρική ιδιότητα)
- αν  $x \leq y$  και  $y \leq z$ , τότε  $x \leq z$  (μεταβατική ιδιότητα)

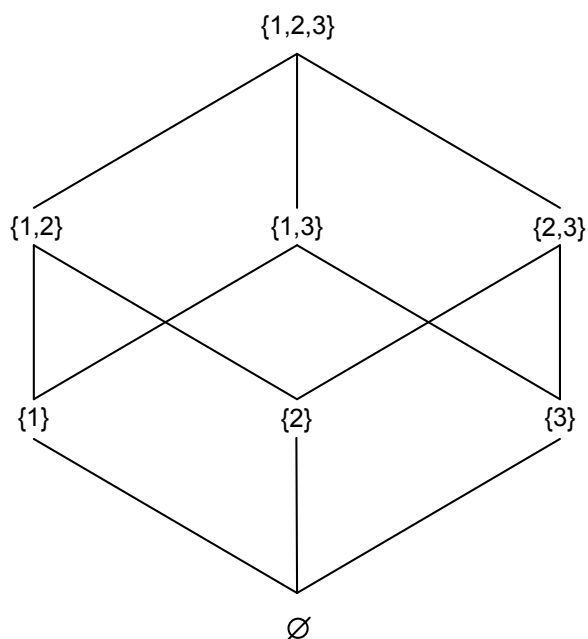
για όλα τα  $x, y, z \in P$ . Το ζεύγος  $(P, \leq)$  λέγεται *μερικώς διατεταγμένο σύνολο* (*poset*).

Για συντομία, θα αναφερόμαστε στη (μερική) διάταξη  $P$ , εννοώντας το μερικώς διατεταγμένο σύνολο  $(P, \leq)$ . Τα  $x, y \in P$  λέγονται *συγκρίσιμα* αν ισχύει  $x \leq y$  ή  $y \leq x$  και *μη συγκρίσιμα* διαφορετικά. Γράφουμε  $x < y$ , αν  $x \leq y$  και  $x \neq y$ . Λέμε ότι το  $y$  *καλύπτει* το  $x$ , αν  $x < y$  και δεν υπάρχει  $z \in P$  ώστε  $x < z < y$ . Κάθε πεπερασμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο  $P$  απεικονίζεται με το *διάγραμμα Hasse*, το οποίο έχει ως κορυφές τα στοιχεία του  $P$  και ακμές μεταξύ των  $x, y \in P$ , με το  $y$  να εμφανίζεται ψηλότερα από το  $x$ , αν το  $y$  καλύπτει το  $x$ .

**Παράδειγμα 2.3.** Έστω  $\mathcal{B}_n$  το δυναμοσύνολο του  $\{1, 2, \dots, n\}$  με τη διμελή σχέση του εγκλεισμού, δηλαδή με  $S \leq T$  αν  $S \subseteq T$  για  $S, T \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ . Με αυτή τη μερική διάταξη το σύνολο  $\mathcal{B}_n$  λέγεται *άλγεβρα Boole* τάξης  $n$ . Το διάγραμμα Hasse του  $\mathcal{B}_3$  απεικονίζεται στο Σχήμα 2.1.

**Ορισμός 2.3.** Έστω  $P, Q$  μερικώς διατεταγμένα σύνολα με μερικές διατάξεις  $\leq_P$  και  $\leq_Q$ , αντίστοιχα. Λέμε ότι μια απεικόνιση  $f : P \rightarrow Q$  είναι *μορφισμός διατάξεων* (*poset map*) αν για όλα τα  $x, y \in P$  ισχύει:

$$x \leq_P y \Rightarrow f(x) \leq_Q f(y).$$

Σχήμα 2.1: Η διάταξη  $\mathcal{B}_3$ 

Μια απεικόνιση  $f : P \rightarrow Q$  είναι *ισομορφισμός* διατάξεων αν είναι αμφιμονοσήμαντη και οι  $f, f^{-1}$  είναι μορφισμοί διατάξεων, δηλαδή αν για όλα τα  $x, y \in P$  ισχύει:

$$x \leq_P y \Leftrightarrow f(x) \leq_Q f(y).$$

Τα  $P, Q$  λέγονται *ισόμορφα* αν υπάρχει ισομορφισμός  $f : P \rightarrow Q$ .

**Αλυσίδες, αντιαλυσίδες, ιδεώδη, διαστήματα.** Έστω  $P$  ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Ένα υποσύνολο  $C$  του  $P$  λέγεται *αλυσίδα* αν οποιαδήποτε δύο στοιχεία του  $C$  είναι συγκρίσιμα και *αντιαλυσίδα* αν οποιαδήποτε δύο (διαφορετικά) στοιχεία του  $C$  είναι μη συγκρίσιμα. Ένα μη κενό υποσύνολο  $I$  του  $P$  λέγεται *διατακτικό ιδεώδες* του  $P$  αν για όλα τα  $x, y \in P$  με  $x \leq y$  και  $y \in I$  ισχύει ότι  $x \in I$ . Αν  $S$  είναι ένα υποσύνολο του  $P$ , το *διατακτικό ιδεώδες* του  $P$  που παράγεται από το  $S$  είναι το  $\langle S \rangle = \{x \in P : x \leq y \text{ για κάποιο } y \in S\}$ . Θα γράφουμε  $\langle y_1, y_2, \dots, y_m \rangle$  για το διατακτικό ιδεώδες του  $P$  που παράγεται από το σύνολο  $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ . Για  $y \in P$  συμβολίζουμε με  $P_{\leq y}$  το (κύριο) ιδεώδες  $\langle y \rangle = \{x \in P : x \leq y\}$  του  $P$  που παράγεται από το  $y$ .

Το  $P$  έχει *ελάχιστο* (αντίστοιχα, *μέγιστο*) στοιχείο αν υπάρχει  $\hat{0} \in P$  (αντίστοιχα,  $\hat{1} \in P$ ) τέτοιο ώστε  $\hat{0} \leq x$  (αντίστοιχα,  $x \leq \hat{1}$ ) για κάθε  $x \in P$ . Αν το  $P$  έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο, τότε λέγεται *φραγμένο*. Τα στοιχεία που καλύπτουν το ελάχιστο στοιχείο λέγονται *άτομα*. Αν  $x \leq y$ , τότε το  $[x, y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}$ , μερικώς διατεταγμένο με την επαγόμενη διάταξη, δηλαδή με  $a \leq b$  για  $a, b \in [x, y]$  αν και μόνο

αν  $a \leq b$  στο  $P$ , λέγεται *κλειστό διάστημα*. Ομοίως ορίζεται το ανοικτό διάστημα  $(x, y)$ . Μια αλυσίδα  $C$  λέγεται *μεγιστική* αν το  $C \cup \{x\}$  δεν είναι αλυσίδα για κάθε  $x \in P \setminus C$ . Το  $P$  λέγεται *διαβαθμισμένο* (*graded*) αν όλες οι μεγιστικές αλυσίδες του έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, έστω  $n + 1$ . Το  $n$  λέγεται *τάξη* του  $P$ .

**Συνάρτηση τάξης.** Αν το  $P$  είναι πεπερασμένο και διαβαθμισμένο με ελάχιστο στοιχείο  $\hat{0}$ , τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση  $\rho : P \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  τέτοια ώστε

$$\rho(y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } y = \hat{0}, \\ \rho(x) + 1, & \text{αν } x \rightarrow y. \end{cases}$$

Η  $\rho$  λέγεται *συνάρτηση τάξης* και το  $\rho(x)$  λέγεται *τάξη* του  $x \in P$ .

**Ευθύ γινόμενο, δυϊκή διάταξη.** Αν  $P, Q$  είναι μερικώς διατεταγμένα σύνολα, τότε ορίζεται το *ευθύ γινόμενο*  $P \times Q$  των  $P, Q$  ως το μερικώς διατεταγμένο σύνολο στο καρτεσιανό γινόμενο  $\{(x, y) : x \in P, y \in Q\}$  των  $P$  και  $Q$  στο οποίο ισχύει ότι  $(x, y) \leq (x', y')$  αν και μόνο αν  $x \leq_P x'$  και  $y \leq_Q y'$ . Αν τα  $P, Q$  είναι διαβαθμισμένα τάξης  $n$  και  $m$  αντίστοιχα, τότε το  $P \times Q$  είναι διαβαθμισμένο τάξης  $n + m$  με συνάρτηση τάξης  $\rho(x, y) = \rho_P(x) + \rho_Q(y)$ , όπου  $\rho_P$  και  $\rho_Q$  είναι οι συναρτήσεις τάξεων των  $P$  και  $Q$  αντίστοιχα. Το σύνολο  $P$ , μερικώς διατεταγμένο με  $x \leq y$  αν και μόνο αν  $y \leq_P x$ , λέγεται *δυϊκό* του  $P$  και συμβολίζεται με  $P^*$ . Το  $P$  λέγεται *αυτοδυϊκό* αν το  $P$  είναι ισόμορφο με το δυϊκό του, δηλαδή αν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση  $f : P \rightarrow P$  με  $x \leq_P y$  αν και μόνο αν  $f(y) \leq_P f(x)$ , για όλα τα  $x, y \in P$ . Μια μερική διάταξη  $P$  λέγεται *τοπικά αυτοδυϊκή* αν κάθε κλειστό διάστημα του  $P$  είναι αυτοδυϊκό.

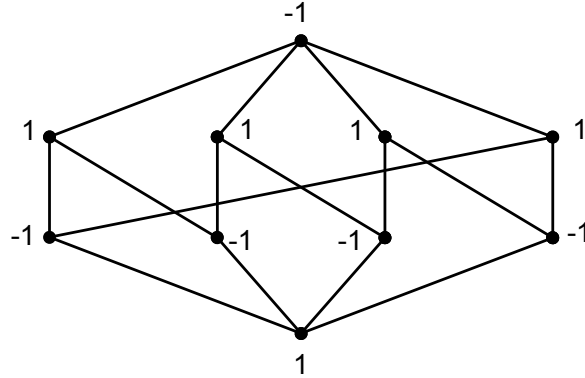
**Συνάρτηση Möbius.** Έστω  $P$  πεπερασμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο και έστω  $\text{Int}(P)$  το σύνολο των κλειστών διαστημάτων  $[x, y]$  του  $P$ . Η *συνάρτηση Möbius* του  $P$  είναι η συνάρτηση  $\mu : \text{Int}(P) \rightarrow \mathbb{Z}$  που ορίζεται αναδρομικά ως

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x = y, \\ - \sum_{x \leq z < y} \mu(x, z) & \text{αν } x < y \end{cases}$$

για  $x, y \in P$  με  $x \leq y$ , όπου  $\mu(x, y) = \mu([x, y])$ . Η τιμή  $\mu(x, y)$  της  $\mu$  εξαρτάται μόνο από το κλειστό διάστημα  $[x, y]$ . Αν το  $P$  έχει ελάχιστο στοιχείο  $\hat{0}$ , τότε θέτουμε  $\mu(x) = \mu(\hat{0}, x)$  για  $x \in P$ . Αν  $P, Q$  είναι πεπερασμένα μερικώς διατεταγμένα σύνολα και  $(x, y) \leq (x', y')$  στο  $P \times Q$ , τότε  $\mu_{P \times Q}((x, y), (x', y')) = \mu_P(x, x')\mu_Q(y, y')$  [40, Πρόταση 3.8.2].

Στο Σχήμα 2.2 απεικονίζεται το διάγραμμα Hasse ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου  $P$  μαζί με τις τιμές  $\mu(x)$  για κάθε στοιχείο  $x \in P$ .

**Πολυώνυμο ζήτα.** Για  $m \geq 2$  συμβολίζουμε με  $Z(P, m)$  το πλήθος των ακολουθιών  $(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$  στοιχείων του  $P$  με  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{m-1}$  (οι ακολουθίες αυτές λέγονται ασθενείς αλυσίδες μήκους  $m - 2$ ). Αν  $d$  είναι το μέγιστο μήκος μιας αλυσίδας στο  $P$ , τότε η συνάρτηση  $Z(P, m)$  είναι πολυώνυμο στο  $m$  βαθμού  $d$  και ο

Σχήμα 2.2: Οι τιμές  $\mu(x)$ 

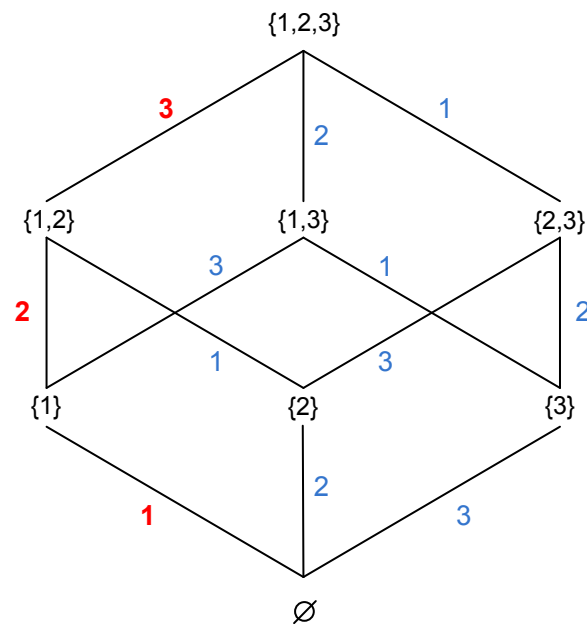
συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου  $m^d$  είναι ίσος με  $r_d/d!$ , όπου  $r_d$  είναι το πλήθος των (μεγιστικών) αλυσίδων μήκους  $d$ . Αν το  $P$  έχει ελάχιστο  $\hat{0}$  και μέγιστο  $\hat{1}$ , τότε  $Z(P, -1) = \mu(\hat{0}, \hat{1})$  (βλέπε [40, Παράγραφος 3.11], [23]).

**EL-αποφλοιώση.** Υποθέτουμε ότι  $P$  είναι φραγμένη και διαβαθμισμένη διάταξη. Έστω  $C(P) = \{(a, b) \in P \times P : a \rightarrow b\}$  το σύνολο των σχέσεων κάλυψης της  $P$ . *Επιγραφή ακμών (edge labeling)* του  $P$  είναι μια απεικόνιση  $\lambda : C(P) \rightarrow \Lambda$ , όπου  $\Lambda$  είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Έστω  $[x, y]$  ένα κλειστό διάστημα του  $P$  τάξης  $n$ . Σε κάθε μεγιστική αλυσίδα  $c : x \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-1} \rightarrow y$  του  $[x, y]$  αντιστοιχούμε την ακολουθία  $\lambda(c) = (\lambda(x, x_1), \lambda(x_1, x_2), \dots, \lambda(x_{n-1}, y))$ . Λέμε ότι η  $c$  είναι *γνησίως αύξουσα* (ως προς τη  $\lambda$ ) αν η ακολουθία  $\lambda(c)$  είναι γνησίως αύξουσα ως προς τη διάταξη του  $\Lambda$ , δηλαδή αν  $\lambda(x, x_1) <_{\Lambda} \lambda(x_1, x_2) <_{\Lambda} \dots <_{\Lambda} \lambda(x_{n-1}, y)$ . Οι μεγιστικές αλυσίδες του  $[x, y]$  μπορούν να διαταχθούν ολικά χρησιμοποιώντας τη λεξικογραφική διάταξη στις αντίστοιχες ακολουθίες. Μια *λεξικογραφική επιγραφή ακμών (EL-επιγραφή)* του  $P$  είναι μια επιγραφή ακμών η οποία έχει τις επόμενες ιδιότητες.

- (i) σε κάθε κλειστό διάστημα  $[x, y]$  του  $P$  υπάρχει μια μοναδική γνησίως αύξουσα μεγιστική αλυσίδα και
- (ii) η μοναδική γνησίως αύξουσα μεγιστική αλυσίδα προηγείται λεξικογραφικά όλων των άλλων μεγιστικών αλυσίδων του  $[x, y]$ .

Η διάταξη  $P$  λέγεται *EL-αποφλοιώσιμη (EL-shellable)* αν δέχεται μια EL-επιγραφή. Η έννοια της EL-αποφλοιώσιμης εισήχθη από τον Björner. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [8] για περισσότερες λεπτομέρειες.

**Παράδειγμα 2.4.** Θεωρούμε το μερικώς διατεταγμένο σύνολο  $\mathcal{B}_n$  του Παραδείγματος 2.3. Το  $\mathcal{B}_n$  είναι EL-αποφλοιώσιμο, με EL-επιγραφή την απεικόνιση που αντιστοιχεί σε κάθε ακμή  $(S, T)$  το μοναδικό στοιχείο του συνόλου  $T$  που δεν ανήκει στο σύνολο  $S$ . Το Σχήμα 2.3 απεικονίζει το διάγραμμα Hasse με τις επιγραφές στις αντίστοιχες ακμές.

Σχήμα 2.3: EL-επιγραφή του  $B_3$ 

**Σύνδεσμοι.** Ένα στοιχείο  $z \in P$  λέγεται *κατώτατο άνω φράγμα* (αντίστοιχα *ανώτατο άνω φράγμα*) των  $x, y \in P$  αν  $x, y \leq z$  (αντίστοιχα  $z \leq x, y$ ) και  $z \leq w$  (αντίστοιχα  $w \leq z$ ) για κάθε  $w \in P$  με  $x, y \leq w$  (αντίστοιχα,  $w \leq x, y$ ). Αν υπάρχει τέτοιο  $z$ , τότε είναι μοναδικό, συμβολίζεται με  $x \vee y$  και λέγεται *σύνδεση (join)* (αντίστοιχα,  $x \wedge y$  και λέγεται *συνάντηση (meet)*). Το  $P$  λέγεται *σύνδεσμος (lattice)* αν κάθε ζεύγος  $x, y$  στοιχείων του  $P$  έχει κατώτατο άνω φράγμα και ανώτατο κάτω φράγμα. Στο Σχήμα 2.4 απεικονίζονται τα διαγράμματα Hasse δύο μερικών διατάξεων. Από αυτές μόνο η διάταξη στα δεξιά έχει την ιδιότητα του συνδέσμου.



Σχήμα 2.4: Δύο μερικές διατάξεις

**Πρόταση 2.1.** [40, Πρόταση 3.3.1] Αν το  $P$  είναι πεπερασμένο, έχει μέγιστο (αντίστοιχα, ελάχιστο) στοιχείο και για όλα τα  $x, y \in P$  υπάρχει το  $x \wedge y$  (αντίστοιχα, το

$x \vee y$ ), τότε το  $P$  είναι σύνδεσμος.

## 2.3 Η απόλυτη διάταξη

Έστω  $W$  μια πεπερασμένη ομάδα Coxeter και έστω  $\mathcal{T}$  το σύνολο όλων των ανακλάσεων της  $W$ .

**Ορισμός 2.4.** Το απόλυτο μήκος του  $w \in W$  είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος  $k$  για τον οποίο το  $w$  γράφεται ως γινόμενο  $k$  στοιχείων του  $\mathcal{T}$ . Το απόλυτο μήκος του  $w$  συμβολίζεται με  $\ell_{\mathcal{T}}(w)$ . Η απόλυτη διάταξη  $\text{Abs}(W)$  είναι η μερική διάταξη  $\preceq$  στην  $W$  που ορίζεται θέτοντας

$$u \preceq v \text{ αν και μόνο αν } \ell_{\mathcal{T}}(u) + \ell_{\mathcal{T}}(u^{-1}v) = \ell_{\mathcal{T}}(v)$$

για  $u, v \in W$ . Ισοδύναμα, η  $\preceq$  είναι η μερική διάταξη στην  $W$  με σχέσεις κάλυψης  $w \rightarrow wt$ , όπου  $w \in W$  και  $t \in \mathcal{T}$  είναι τέτοια ώστε  $\ell_{\mathcal{T}}(w) < \ell_{\mathcal{T}}(wt)$ . Σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε  $w \xrightarrow{t} wt$ .

Η διάταξη  $\text{Abs}(W)$  είναι διαβαθμισμένη με συνάρτηση τάξης  $\ell_{\mathcal{T}}$  και τοπικά αυτο-δουϊκή [2, Λήμμα 2.5.4]. Η τάξη της  $\text{Abs}(W)$  είναι ίση με τη διάσταση του χώρου στον οποίο δρα η  $W$ , αν θεωρηθεί ως ομάδα ανακλάσεων. Κάθε κλειστό διάστημα στην  $W$  είναι ισόμορφο με κάποιο που περιέχει το ουδέτερο στοιχείο. Ειδικότερα, έχουμε το επόμενο λήμμα (βλέπε επίσης [3, Λήμμα 3.7]).

**Λήμμα 2.1.** Έστω  $u, v \in W$  με  $u \preceq v$ . Η απεικόνιση  $\phi : [u, v] \rightarrow [e, u^{-1}v]$  που ορίζεται θέτοντας  $\phi(w) = u^{-1}w$  για  $w \in [u, v]$  είναι ισομορφισμός διατάξεων.

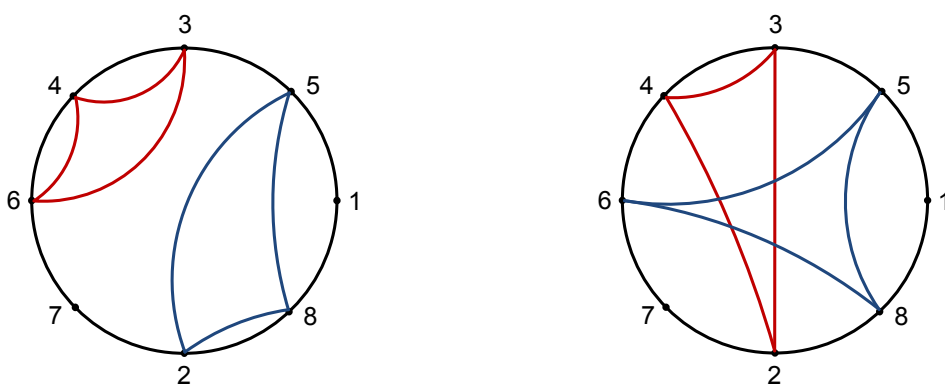
*Απόδειξη.* Προφανώς η  $\phi$  είναι 1-1. Από το [2, Λήμμα 2.5.4] προκύπτει ότι τα διαστήματα  $[u, v]$  και  $[e, u^{-1}v]$  είναι ισόμορφα. Επομένως η  $\phi$  είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση. Αρκεί να δείξουμε ότι για όλα τα  $w_1, w_2 \in [u, v]$  με  $w_1 \rightarrow w_2$  ισχύει  $\phi(w_1) \rightarrow \phi(w_2)$ . Αφού  $w_1 \rightarrow w_2$ , υπάρχει ανάκλαση  $t \in \mathcal{T}$  ώστε  $w_2 = w_1t$  και  $\ell_{\mathcal{T}}(w_2) = \ell_{\mathcal{T}}(w_1) + 1$ . Έχουμε  $\phi(w_2) = \phi(w_1t) = u^{-1}(w_1t) = (u^{-1}w_1)t = \phi(w_1)t$ . Επιπλέον, για  $i = 1, 2$  ισχύει  $u \preceq w_i$ , άρα  $\ell_{\mathcal{T}}(u^{-1}w_i) = \ell_{\mathcal{T}}(w_i) - \ell_{\mathcal{T}}(u)$ . Έχουμε τότε ότι  $\ell_{\mathcal{T}}(\phi(w_2)) = \ell_{\mathcal{T}}(u^{-1}w_2) = \ell_{\mathcal{T}}(w_2) - \ell_{\mathcal{T}}(u) = \ell_{\mathcal{T}}(w_1) - \ell_{\mathcal{T}}(u) + 1 = \ell_{\mathcal{T}}(u^{-1}w_1) + 1 = \ell_{\mathcal{T}}(\phi(w_1)) + 1$ . Το ζητούμενο έπεται.  $\square$

Στις επόμενες παραγράφους θα περιγράψουμε πιο αναλυτικά την απόλυτη διάταξη στις κλασικές ομάδες Coxeter. Για περισσότερες πληροφορίες πάνω στην  $\text{Abs}(W)$  παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [2, Παράγραφος 2.4].

### 2.3.1 Η διάταξη $\text{Abs}(S_n)$

Έστω  $w \in S_n$ . Παρατηρούμε ότι το απόλυτο μήκος  $\ell_{\mathcal{T}}(w)$  είναι ίσο με  $n - \gamma(w)$ , όπου το  $\gamma(w)$  συμβολίζει το πλήθος των κύκλων που συμμετέχουν στην κυκλική παράσταση του  $w$ . Συνεπώς τα μεγιστικά στοιχεία είναι οι  $n$ -κύκλοι και άρα η τάξη της  $\text{Abs}(S_n)$  είναι ίση με  $n - 1$ .

Περιγράφουμε την  $\text{Abs}(S_n)$  λίγο πιο αναλυτικά. Δοσμένου ενός κύκλου  $c = (i_1 i_2 \cdots i_r)$  στην  $S_n$  και δείκτες  $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_s \leq r$ , λέμε ότι ο κύκλος  $(i_{j_1} i_{j_2} \cdots i_{j_s})$  μπορεί να προκύψει από τον  $c$  διαγράφοντας στοιχεία. Δοσμένων δυο ξένων κύκλων  $a, b$  στην  $S_n$  καθένας από τους οποίους προκύπτει από τον  $c$  με διαγραφή στοιχείων, λέμε ότι οι  $a$  και  $b$  είναι μη διασταυρούμενοι ως προς τον  $c$  αν δεν υπάρχει κύκλος  $(i j k l)$  μήκους τέσσερα ο οποίος μπορεί να προκύψει από τον  $c$  με διαγραφή στοιχείων, τέτοιος ώστε τα  $i, k$  να είναι στοιχεία του  $a$  και τα  $j, l$  να είναι στοιχεία του  $b$ . Για παράδειγμα, αν  $n = 8$  και  $c = (3 5 1 8 7 2 6 4)$ , τότε οι κύκλοι  $(3 6 4)$  και  $(5 8 2)$  είναι μη διασταυρούμενοι ως προς τον  $c$ , αλλά οι  $(3 2 4)$  και  $(5 8 6)$  δεν είναι (Σχήμα 2.5). Μπορεί να αποδειχθεί [16, Παράγραφος 2] ότι για  $u, v \in S_n$  έχουμε



Σχήμα 2.5: Μη διασταυρούμενη και διασταυρούμενη μετάθεση

$u \preceq v$  αν και μόνο αν:

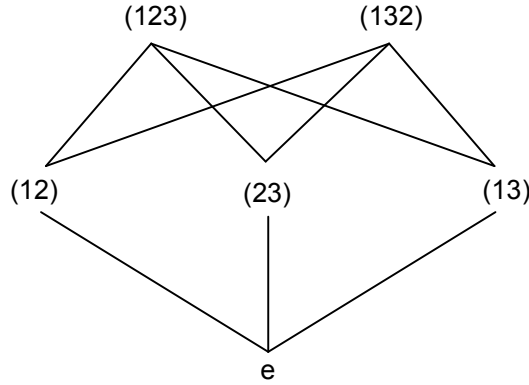
- κάθε κύκλος που συμμετέχει στην κυκλική παράσταση του  $u$  μπορεί να προκύψει από κάποιον κύκλο της κυκλικής παράστασης του  $v$  με διαγραφή στοιχείων και
- οποιοδήποτε δύο κύκλοι του  $u$  οι οποίοι μπορεί να προκύψουν από τον ίδιο κύκλο  $c$  του  $v$  με διαγραφή στοιχείων, είναι μη διασταυρούμενοι ως προς τον  $c$ .

Τα Σχήματα 2.6 και 2.7 απεικονίζουν τα διαγράμματα Hasse των διατάξεων  $\text{Abs}(S_3)$  και  $\text{Abs}(S_4)$ , αντίστοιχα.

### 2.3.2 Η διάταξη $\text{Abs}(B_n)$

Έστω  $w \in B_n$ . Το μήκος  $\ell_{\mathcal{T}}(w)$  είναι ίσο με  $n - \gamma(w)$ , όπου  $\gamma(w)$  συμβολίζει το πλήθος των ζευγαρωμένων κύκλων που υπάρχουν στην κυκλική παράσταση του  $w$  (βλέπε [25, Παρατήρηση 2.2, Σχέση 2.2]). Ένα στοιχείο  $w \in B_n$  είναι μεγιστικό στην  $\text{Abs}(B_n)$  αν και μόνο αν το  $w$  μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο ξένων ισορροπημένων κύκλων, των οποίων τα μήκη αθροίζουν στο  $n$ .

Οι σχέσεις κάλυψης  $w \xrightarrow{t} wt$  της  $\text{Abs}(B_n)$ , όταν  $w$  και  $t$  δεν είναι ξένοι κύκλοι, περιγράφονται ως εξής. Για  $1 \leq i < j \leq m \leq n$ , έχουμε:



Σχήμα 2.6: Η διάταξη  $\text{Abs}(S_3)$

- (a)  $((a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m)) \xrightarrow{((a_{i-1}, a_i))} ((a_1, \dots, a_m))$
- (b)  $((a_1, \dots, a_m)) \xrightarrow{[a_i]} [a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, -a_{i+1}, \dots, -a_m]$
- (c)  $((a_1, \dots, a_m)) \xrightarrow{((a_i, -a_j))} [a_1, \dots, a_i, -a_{j+1}, \dots, -a_m][a_{i+1}, \dots, a_j]$
- (d)  $[a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m] \xrightarrow{((a_{i-1}, a_i))} [a_1, \dots, a_m]$
- (e)  $[a_1, \dots, a_j]((a_{j+1}, \dots, a_m)) \xrightarrow{((a_j, a_m))} [a_1, \dots, a_m]$
- (f)  $((a_1, \dots, a_j))((a_{j+1}, \dots, a_m)) \xrightarrow{((a_j, a_m))} ((a_1, \dots, a_m))$

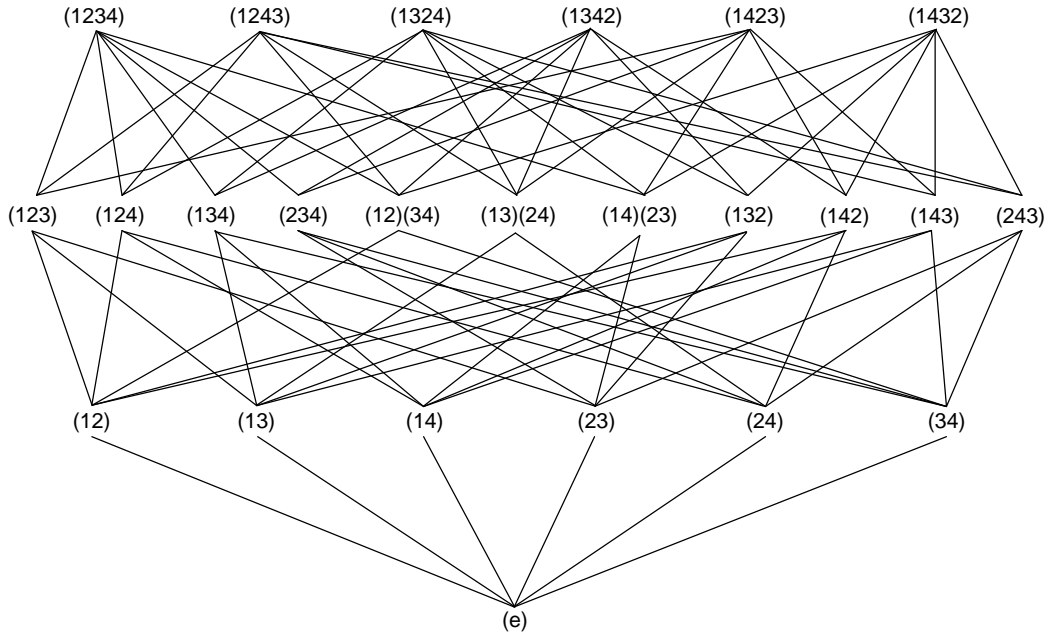
όπου  $a_1, \dots, a_m$  είναι στοιχεία του  $\{\pm 1, \dots, \pm n\}$  με ανά δύο διαφορετικές απόλυτες τιμές. Στο Σχήμα 2.8 απεικονίζεται το διάγραμμα Hasse της διάταξης  $\text{Abs}(B_2)$ .

**Παρατήρηση 2.1.** Έστω  $w = bp$  ένα στοιχείο της  $B_n$ , όπου  $b$  (αντίστοιχα,  $p$ ) είναι το γινόμενο όλων των ισορροπημένων (αντίστοιχα, ζευγαρωμένων) κύκλων του  $w$ . Από τις σχέσεις κάλυψης της  $\text{Abs}(B_n)$  έπεται ο ισομορφισμός διατάξεων  $[e, w] \cong [e, b] \times [e, p]$ . Επιπλέον, αν  $p = p_1 \cdots p_k$  είναι γραμμένο σαν γινόμενο ξένων ζευγαρωμένων κύκλων, τότε

$$[e, w] \cong [e, b] \times [e, p_1] \times \cdots \times [e, p_k].$$

### 2.3.3 Η διάταξη $\text{Abs}(D_n)$

Το απόλυτο μήκος στην  $D_n$  είναι ο περιορισμός του απόλυτου μήκους της  $B_n$  στο σύνολο  $D_n$ , άρα η  $\text{Abs}(D_n)$  είναι μία «υποδιάταξη» της  $\text{Abs}(B_n)$ . Επομένως τα μεγιστικά στοιχεία στην  $\text{Abs}(D_n)$  είναι τα μεγιστικά στοιχεία της  $\text{Abs}(B_n)$  τα οποία έχουν άρτιο πλήθος ισορροπημένων κύκλων.

Σχήμα 2.7: Η διάταξη  $\text{Abs}(S_4)$ 

### 2.3.4 Προβολές

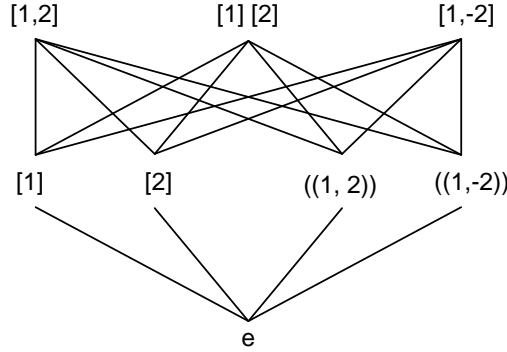
Σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύουμε δύο λήμματα τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη των Θεωρημάτων 1 και 3.

Έστω  $\mathcal{J}_n$  το διατακτικό ιδεώδες της  $\text{Abs}(B_n)$  που παράγεται από τα στοιχεία Coxeter της  $B_n$ . Συμβολίζουμε με  $P_n$  την  $\text{Abs}(S_n)$  ή το  $\mathcal{J}_n$  για κάποιο  $n \geq 2$ . Για  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  ορίζουμε την απεικόνιση  $\pi_i : P_n \rightarrow P_n$ , όπου  $\pi_i(w)$  είναι η μετάθεση που προκύπτει αν διαγράψουμε το  $\pm i$  από την κυκλική παράσταση της  $w$ . Για παράδειγμα, αν  $n = i = 5$  και  $w = [1, -5, 2]((3, -4)) \in \mathcal{J}_5$ , τότε  $\pi_i(w) = [1, 2]((3, -4))$ .

**Λήμμα 2.2.** Για την απεικόνιση  $\pi_i : P_n \rightarrow P_n$  ισχύουν τα επόμενα.

- (i)  $\pi_i(w) \preceq w$  για κάθε  $w \in P_n$ .
- (ii) η  $\pi_i$  είναι μορφισμός διατάξεων.

*Απόδειξη.* Έστω  $w \in P_n$ . Αν  $w(i) = i$ , τότε προφανώς  $\pi_i(w) = w$ . Υποθέτουμε ότι  $w(i) \neq i$ . Τότε από την περιγραφή της  $\text{Abs}(S_n)$  και τις σχέσεις κάλυψης (a) και (d) της  $\text{Abs}(B_n)$  προκύπτει ότι το  $\pi_i(w)$  καλύπτεται από το  $w$ . Άρα  $\pi_i(w) \preceq w$ . Αυτό αποδεικνύει το (i). Για να δείξουμε το (ii), αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε σχέση κάλυψης  $u \rightarrow v$  στο  $P_n$  έχουμε ότι  $\pi_i(u) = \pi_i(v)$  ή  $\pi_i(u) \rightarrow \pi_i(v)$ . Όπως προηγουμένως, αυτό έπεται από την περιγραφή της  $\text{Abs}(S_n)$  και τη λίστα με τις σχέσεις κάλυψης της  $\text{Abs}(B_n)$ .  $\square$



Σχήμα 2.8: Η διάταξη  $\text{Abs}(B_2)$

**Λήμμα 2.3.** Έστω ότι  $P_n$  συμβολίζει ή την  $\text{Abs}(S_n)$  για κάθε  $n \geq 1$ , ή το  $\mathcal{J}_n$  για κάθε  $n \geq 2$ . Έστω επίσης  $w \in P_n$  και  $u \in P_{n-1}$  τέτοια ώστε  $\pi_n(w) \preceq u$ . Τότε υπάρχει στοιχείο  $v \in P_n$  που καλύπτει το  $u$  και ικανοποιεί  $\pi_n(v) = u$  και  $w \preceq v$ .

*Απόδειξη.* Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το  $w$  δεν αφήνει σταθερό το  $n$ , διότι διαφορετικά το αποτέλεσμα είναι τετριμμένο. Υποθέτουμε επίσης ότι  $\pi_n(w) = w_1 \cdots w_l$  και  $u = u_1 \cdots u_r$  είναι γραμμένα σαν γινόμενα ξένων κύκλων στο  $P_{n-1}$ .

**Περίπτωση 1:**  $P_n = \text{Abs}(S_n)$  για  $n \geq 1$ . Τότε υπάρχει ένας δείκτης  $i \in \{1, 2, \dots, l\}$  τέτοιος ώστε το  $w$  προκύπτει από το  $\pi_n(w)$  τοποθετώντας το  $n$  στον κύκλο  $w_i$ . Έστω  $y$  ο κύκλος του  $w$  που περιέχει το  $n$ , έτσι ώστε  $\pi_n(y) = w_i$ . Από την περιγραφή της απόλυτης διάταξης στην  $S_n$  που δόθηκε παραπάνω, έχουμε ότι  $w_i \preceq u_j$  για κάποιο  $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ . Μπορούμε να τοποθετήσουμε το  $n$  στον κύκλο  $u_j$  με τέτοιο τρόπο ώστε ο κύκλος  $v_j$  που προκύπτει να ικανοποιεί  $y \preceq v_j$ . Έστω  $v$  το στοιχείο της  $S_n$  που παίρνουμε αν αντικαταστήσουμε το  $u_j$  στην κυκλική παράσταση του  $u$  με το  $v_j$ . Τότε το  $u$  καλύπτεται από το  $v$ ,  $\pi_n(v) = u$  και  $w \preceq v$ .

**Περίπτωση 2:**  $P_n = \mathcal{J}_n$  για  $n \geq 2$ . Το αποτέλεσμα προκύπτει όπως στην προηγούμενη περίπτωση, αν το  $[n]$  δεν είναι κύκλος της  $w$ . Υποθέτουμε τώρα ότι  $w = \pi_n(w)[n]$ , οπότε όλοι οι κύκλοι του  $\pi_n(w)$  είναι ζευγαρωμένοι. Αν το  $u$  δεν έχει ισορροπημένο κύκλο, τότε  $w \preceq u[n] \in \mathcal{J}_n$  και άρα το  $v = u[n]$  έχει τις επιθυμητές ιδιότητες. Έστω ότι το  $u$  έχει ισορροπημένο κύκλο στην κυκλική του παράσταση, τον  $b = [a_1, \dots, a_k]$ . Συμβολίζουμε με  $p$  το γινόμενο όλων των ζευγαρωμένων κύκλων του  $u$ , έτσι ώστε  $u = bp$ . Αν  $\pi_n(w) \preceq p$ , τότε η επιλογή  $v = [a_1, \dots, a_k, n]p$  έχει τις επιθυμητές ιδιότητες. Διαφορετικά, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει δείκτης  $m \in \{1, 2, \dots, l\}$  τέτοιος ώστε  $w_1 \cdots w_m \preceq b$  και τα  $w_i$  και  $b$  να είναι ξένα για κάθε  $i > m$ . Από τις σχέσεις κάλυψης (a), (b) και (f) της  $\text{Abs}(B_n)$  προκύπτει ότι υπάρχει ζευγαρωμένος κύκλος  $c$  ο οποίος καλύπτεται από τον  $b$  και ικανοποιεί την ανισότητα  $w_1 \cdots w_m \preceq c$ . Άρα  $\pi_n(w) \preceq cp \preceq u$ . Συγκεκριμένα, το  $c$  έχει τη μορφή  $((a_1, \dots, a_i, -a_{i+1}, \dots, -a_k))$  για κάποιο  $i \in \{2, \dots, k\}$ . Θέτουμε  $v = [a_1, \dots, a_i, n, a_{i+1}, \dots, a_l]p$ . Τότε το  $v$  καλύπτει το  $u$  και  $w \preceq cp[n] \preceq v$ . Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος.  $\square$

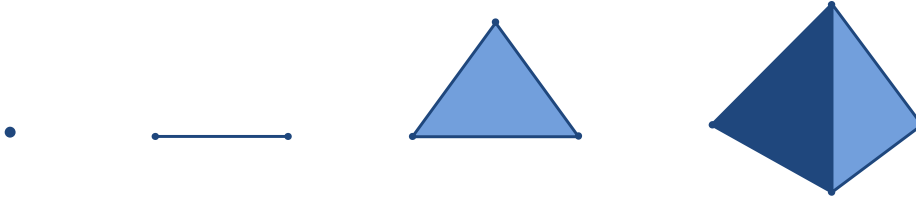
## 2.4 Μονοπλεκτικά συμπλέγματα

Σε αυτήν την παράγραφο δίνουμε βασικούς ορισμούς για μονοπλεκτικά συμπλέγματα. Για περισσότερες πληροφορίες πάνω στη συνδυαστική και την τοπολογία των μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα [10, 32, 43].

**Ορισμός 2.5.** Μονόπλοκο διάστασης  $k$ , ή  $k$ -μονόπλοκο ( $k$ -simplex), στον  $\mathbb{R}^d$  είναι η κυρτή θήκη

$$\sigma = \left\{ \sum_{i=0}^k c_i a_i : c_i \geq 0, \sum_{i=0}^k c_i = 1 \right\}$$

$k + 1$  αφφινικά ανεξάρτητων σημείων  $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^d$ .



Σχήμα 2.9: μονόπλοκο διάστασης  $\leq 3$

Η κυρτή θήκη οποιουδήποτε υποσυνόλου του  $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$  είναι και αυτή μονόπλοκο και λέγεται *πλευρά (face)* του  $\sigma$ . Το Σχήμα 2.9 απεικονίζει ένα  $k$ -μονόπλοκο για  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ .

**Ορισμός 2.6.** Ένα γεωμετρικό μονοπλεκτικό σύμπλεγμα (*geometric simplicial complex*) είναι ένα σύνολο  $\Gamma$  με στοιχεία μονόπλοκα, τέτοιο ώστε κάθε πλευρά ενός μονόπλοκου του  $\Gamma$  να ανήκει στο  $\Gamma$  και για κάθε  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma$ , η τομή  $\sigma_1 \cap \sigma_2$  να είναι κοινή πλευρά (πιθανώς κενή) των  $\sigma_1, \sigma_2$ .

Τα στοιχεία του  $\Gamma$  λέγονται *πλευρές*. Η ένωση των πλευρών του  $\Gamma$  λέγεται πολύεδρο του  $\Gamma$  και συμβολίζεται με  $\|\Gamma\|$ . Στην παρούσα διατριβή θα ασχοληθούμε μόνο με πεπερασμένα γεωμετρικά συμπλέγματα.

**Ορισμός 2.7.** Έστω  $V$  ένα πεπερασμένο σύνολο. Ένα αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα (*abstract simplicial complex*) στο σύνολο  $V$  είναι μια οικογένεια  $\Delta$  υποσυνόλων του  $V$  με την ιδιότητα  $S \subset T \in \Delta \Rightarrow S \in \Delta$ .

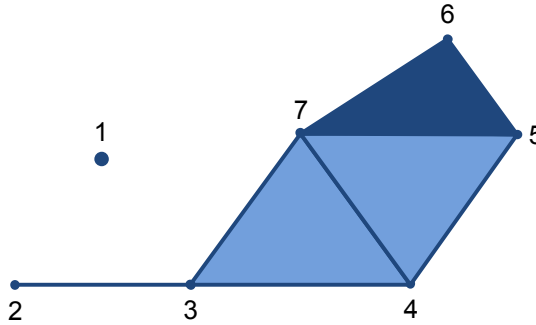
Για  $F \in \Delta$  θέτουμε  $\dim F = \#F - 1$  και  $\dim \Delta = \max_{F \in \Delta} \dim F$ . Ειδικότερα έχουμε  $\dim \emptyset = -1$ . Τα στοιχεία του  $\Delta$  λέγονται *πλευρές (faces)* του  $\Delta$ . Αν το  $F \in \Delta$  δεν περιέχεται σε πλευρά μεγαλύτερης διάστασης, τότε το  $F$  λέγεται *έδρα (facet)*. Το  $\Delta$  λέγεται *αγνό (pure)* αν κάθε έδρα του  $\Delta$  έχει διάσταση ίση με  $\dim \Delta$ .

Ένα γεωμετρικό σύμπλεγμα  $\Gamma$  με σύνολο κορυφών (πλευρών διάστασης μηδέν)  $V$  ορίζει ένα αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα  $\Delta(\Gamma)$  ως εξής. Για  $F \subseteq V$  έχουμε

$F \in \Delta(\Gamma)$  αν και μόνο αν τα στοιχεία του  $S$  είναι οι κορυφές κάποιας πλευράς του  $\Gamma$ . Αντίστροφα, κάθε αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα μπορεί να προκύψει με αυτόν τον τρόπο. Δηλαδή για κάθε αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα  $\Delta$  υπάρχει ένα γεωμετρικό μονοπλεκτικό σύμπλεγμα  $\Gamma$  τέτοιο ώστε  $\Delta(\Gamma) = \Delta$ . Το πολύεδρο  $\|\Gamma\|$  λέγεται γεωμετρική υλοποίηση του  $\Delta$ . Δύο οποιεσδήποτε γεωμετρικές υλοποιήσεις του ίδιου συμπλέγματος είναι ομοιομορφικοί χώροι [9, Παράγραφος 9]. Όταν αναφερόμαστε σε τοπολογικές ιδιότητες του  $\Delta$ , εννοούμε αυτές του  $\|\Gamma\|$ .

Για κάθε πλευρά  $F$  ενός μονοπλεκτικού συμπλέγματος  $\Delta$ , συμβολίζουμε με  $\langle F \rangle$  το υποσύμπλεγμα που παράγεται από το  $F$ , δηλαδή  $\langle F \rangle = \{G : G \subseteq F\}$ . Επίσης θέτουμε  $\text{link}_\Delta(F) = \{E : E \cap F = \emptyset \text{ και } E \cup F \in \Delta\}$ . Το  $\text{link}_\Delta(F)$  είναι αφηρημένο σύμπλεγμα και λέγεται ζεύγμα της πλευράς  $F$ . Εξ ορισμού έχουμε ότι  $\Delta = \text{link}_\Delta(\emptyset)$ .

**Παράδειγμα 2.5.** Στο Σχήμα 2.10 απεικονίζεται το σύμπλεγμα  $\Delta$  στο σύνολο κορυφών  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  με έδρες  $\{1\}$ ,  $\{2, 3\}$ ,  $\{3, 4, 7\}$  και  $\{4, 5, 6, 7\}$ . Αν  $F = \{4, 5\}$ , τότε  $\text{link}_\Delta(F) = \{\emptyset, \{3\}, \{6\}, \{7\}, \{6, 7\}\}$ .



Σχήμα 2.10: Ένα 3-διάστατο σύμπλεγμα

Θα χρειαστούμε επίσης τους παρακάτω ορισμούς.

**Ορισμός 2.8.** Ένα αγνό μονοπλεκτικό σύμπλεγμα  $\Delta$  λέγεται *αποφλοιώσιμο* (*pure shellable*) αν υπάρχει ολική διάταξη

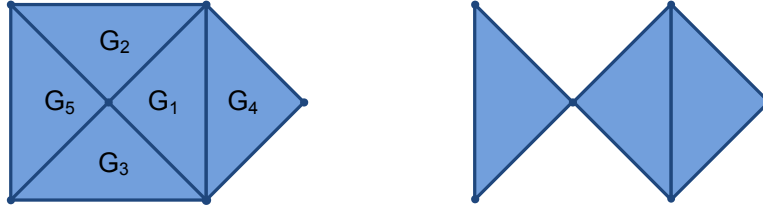
$$G_1, G_2, \dots, G_m$$

του συνόλου των εδρών του  $\Delta$ , τέτοια ώστε για κάθε  $1 \leq k \leq m$  η τομή του  $\langle G_1 \rangle \cup \langle G_2 \rangle \cup \dots \cup \langle G_{k-1} \rangle$  με το  $\langle G_k \rangle$  να είναι αγνό σύμπλεγμα διάστασης  $\dim \Delta - 1$ .

Το Σχήμα 2.11 απεικονίζει ένα αποφλοιώσιμο και ένα μη αποφλοιώσιμο σύμπλεγμα διάστασης 2.

**Ορισμός 2.9.** Ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα  $\Delta$  λέγεται

- (i) *k-συνεκτικό* αν οι ομάδες ομοτοπίας  $\pi_i(\|\Delta\|, x)$  είναι τετριμμένες για κάθε  $0 \leq i \leq k$  και  $x \in \|\Delta\|$ ,



Σχήμα 2.11: Ένα αποφλοιώσιμο και ένα μη αποφλοιώσιμο σύμπλεγμα

- (ii) *ομοτοπικά Cohen-Macaulay (homotopy Cohen-Macaulay)* αν το ζεύγμα  $\text{link}_\Delta(\sigma)$  είναι  $(\dim \text{link}_\Delta(\sigma) - 1)$ -συνεκτικό για κάθε  $\sigma \in \Delta$ ,
- (iii) *Cohen-Macaulay επί του  $K$*  (όπου  $K$  είναι σώμα ή ο δακτύλιος  $\mathbb{Z}$ ) αν για κάθε  $F \in \Delta$  και  $i < \dim \text{link}_\Delta(F)$  ισχύει

$$\tilde{H}_i(\text{link}_\Delta(F), K) = 0,$$

- (iv) *κατασκευάσιμο (constructible)* αν είναι μονόπλοκο ή μπορεί να γραφεί ως  $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ , όπου τα  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_1 \cap \Delta_2$  είναι κατασκευάσιμα υποσυμπλέγματα και  $\dim \Delta = \dim \Delta_1 = \dim \Delta_2 = 1 + \dim(\Delta_1 \cap \Delta_2)$ .

**Σχόλια.** Έστω  $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  το σύνολο κορυφών ενός συμπλέγματος  $\Delta$ . Θεωρούμε τον πολυωνυμικό δακτύλιο  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , όπου  $K$  είναι σώμα. Έστω  $I$  το ιδεώδες το οποίο παράγεται από τα μονώνυμα  $x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_k}$  με  $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\} \notin \Delta$ ,  $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ ,  $k \geq 1$ . Έστω επίσης ο δακτύλιος πηλίκο  $K[\Delta] = K[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$  (ο δακτύλιος αυτός λέγεται δακτύλιος Stanley Reisner ή δακτύλιος πλευρών του  $\Delta$ ). Τότε το  $\Delta$  είναι Cohen-Macaulay επί του  $K$  αν και μόνο αν ο δακτύλιος  $K[\Delta]$  είναι Cohen-Macaulay, με την έννοια της μεταθετικής άλγεβρας [37, 39].

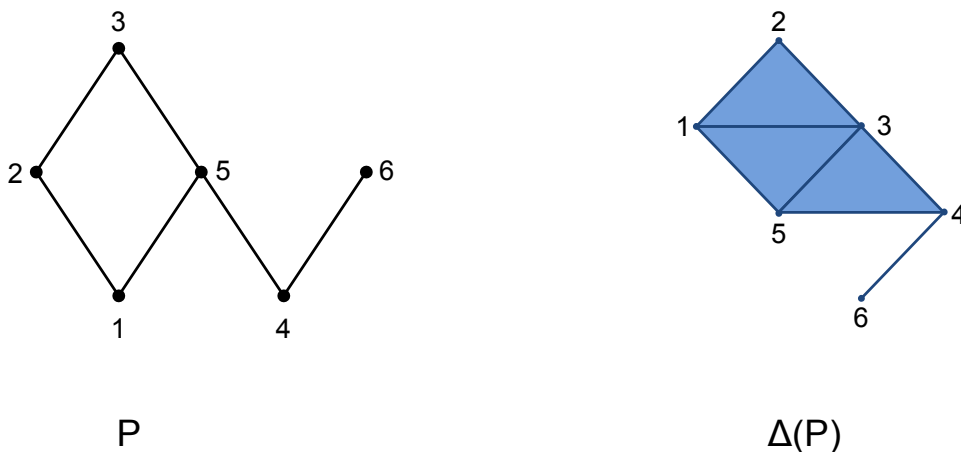
Από τις παραπάνω ιδιότητες, η ιδιότητα Cohen-Macaulay και η  $k$ -συνεκτικότητα είναι τοπολογικές. Δηλαδή το αν ένα σύμπλεγμα  $\Delta$  είναι Cohen-Macaulay ή  $k$ -συνεκτικό εξαρτάται μόνο από την τοπολογία της γεωμετρικής του υλοποίησης  $\|\Delta\|$ . Αντίθετα, ένα αποφλοιώσιμο (αντίστοιχα, ομοτοπικά Cohen-Macaulay, κατασκευάσιμο) μονοπλεκτικό σύμπλεγμα μπορεί να είναι ομοιομορφικό με ένα μη αποφλοιώσιμο (αντίστοιχα, ομοτοπικά Cohen-Macaulay, κατασκευάσιμο) σύμπλεγμα. Για παράδειγμα, υπάρχει τριγωνοποίηση της 3-σφαίρας και 3-μπάλας η οποία δεν είναι ούτε αποφλοιώσιμη, ούτε ομοτοπικά Cohen-Macaulay [33, 44].

Για ένα  $d$ -διάστατο σύμπλεγμα  $\Delta$  ισχύουν οι επόμενες (αυστηρές) συνεπαγωγές:

$$\begin{aligned} & \text{αγνό αποφλοιώσιμο} \Rightarrow \text{κατασκευάσιμο} \Rightarrow \text{ομοτοπικά Cohen-Macaulay} \Rightarrow \\ \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \text{Cohen-Macaulay επί του } \mathbb{Z} \Rightarrow \text{Cohen-Macaulay επί του } K \Rightarrow \text{αγνό.} \\ (d-1)\text{-συνεκτικό} \Rightarrow \text{ομοτοπικά ισοδύναμο με σφηνοειδές άθροισμα } d\text{-σφαιρών.} \end{array} \right. \end{aligned}$$

**Διατακτικό σύμπλεγμα.** Κάθε πεπερασμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο  $P$  ορίζει ένα αφηρημένο μονοπλεκτικό συμπλέγμα  $\Delta(P)$ , το *διατακτικό σύμπλεγμα* (*order complex*)  $\Delta(P)$ . Οι κορυφές του  $\Delta(P)$  είναι τα στοιχεία του  $P$  και οι πλευρές του είναι οι αλυσίδες του  $P$ . Παρατηρούμε ότι το  $P$  είναι διαβαθμισμένο τάξης  $n$  αν και μόνο αν το  $\Delta(P)$  είναι αγνό διάστασης  $n$ . Όλες οι τοπολογικές ιδιότητες του  $P$  αναφέρονται στις αντίστοιχες ιδιότητες της γεωμετρικής υλοποίησης του  $\Delta(P)$ . Λέμε ότι το  $P$  είναι *αποφλοιώσιμο* (αντίστοιχα, *ομοτοπικά Cohen-Macaulay*, *κατασκευάσιμο*) αν το  $\Delta(P)$  είναι αποφλοιώσιμο (αντίστοιχα ομοτοπικά Cohen-Macaulay, κατασκευάσιμο). Αν το  $P$  είναι EL-αποφλοιώσιμο, τότε είναι και αποφλοιώσιμο [8, Θεώρημα 2.3].

Στο Σχήμα 2.4 η διάταξη στα αριστερά είναι Cohen-Macaulay, ενώ η διάταξη στα δεξιά δεν είναι. Αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι αν αφαιρέσουμε το μέγιστο και το ελάχιστο στοιχείο της δεξιάς διάταξης, το διάγραμμα Hasse που προκύπτει είναι μη συνεκτικό και συνεπώς το αντίστοιχο διατακτικό σύμπλεγμα δεν είναι Cohen-Macaulay. Το Σχήμα 2.12 απεικονίζει ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο  $P$  και το διατακτικό του σύμπλεγμα  $\Delta(P)$ .



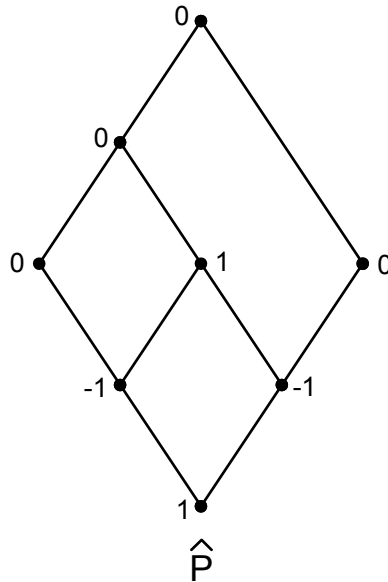
Σχήμα 2.12:  $P$  και  $\Delta(P)$

**Χαρακτηριστική Euler και συνάρτηση Möbius.** Έστω  $\Delta$  ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα και έστω  $f_i = f_i(\Delta)$  το πλήθος των πλευρών του  $\Delta$  που έχουν διάσταση  $i$ . Ο αριθμός  $\chi(\Delta) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i f_i(\Delta)$  ονομάζεται *χαρακτηριστική Euler* του  $\Delta$ . Η χαρακτηριστική Euler είναι μια τοπολογική αναλλοίωτη. Η *ανηγμένη* χαρακτηριστική Euler του  $\Delta$  είναι ο αριθμός  $\tilde{\chi}(\Delta) = -1 + \chi(\Delta)$ . Για παράδειγμα, για το σύμπλεγμα του Σχήματος 2.10 έχουμε ότι  $f_0 = 7, f_1 = 8, f_2 = 4, f_3 = 1$ , συνεπώς  $\tilde{\chi}(\Delta) = -1 + 7 - 8 + 4 - 1 = 1$ . Η συνάρτηση Möbius μιας διάταξης συνδέεται με την ανηγμένη χαρακτηριστική Euler του αντίστοιχου διατακτικού συμπλέγματος,

όπως δείχνει η επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 2.2.** [40, Πρόταση 3.8.6] Έστω  $P$  πεπερασμένη μερική διάταξη και έστω  $\hat{P} = P \cup \{\hat{0}, \hat{1}\}$ . Τότε  $\mu_{\hat{P}}(\hat{0}, \hat{1}) = \tilde{\chi}(\Delta(P))$ .

Από την πρόταση αυτή έπεται ότι η τιμή  $\mu_{\hat{P}}(\hat{0}, \hat{1})$  εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρική υλοποίηση του συμπλέγματος  $\Delta(P)$ . Στο Σχήμα 2.13 απεικονίζεται το μερικώς διατεταγμένο σύνολο  $\hat{P} = P \cup \{\hat{0}, \hat{1}\}$ , όπου  $P$  είναι η διάταξη του Σχήματος 2.12. Οι αριθμοί δίπλα στις κορυφές του διαγράμματος Hasse αντιστοιχούν στις τιμές της συνάρτησης  $\mu(x)$ . Παρατηρούμε ότι  $\mu_{\hat{P}}(\hat{0}, \hat{1}) = 0$  και  $\tilde{\chi}(\Delta(P)) = -1 + 6 - 8 + 3 = 0$ .



Σχήμα 2.13: Η διάταξη  $\hat{P}$  με τις τιμές  $\mu(x)$

Τέλος αναφέρουμε το επόμενο νηματικό θεώρημα για μερικώς διατεταγμένα σύνολα, το οποίο οφείλεται στον Quillen.

**Θεώρημα 8.** ([35, Πρόταση 9.7]). Έστω  $P, Q$  δύο διαβαθμισμένα μερικώς διατεταγμένα σύνολα και  $f : P \rightarrow Q$  ένας επιμορφισμός διατάξεων που διατηρεί την τάξη. Υποθέτουμε ότι το νήμα  $f^{-1}(\langle q \rangle)$  είναι ομοιοτικά Cohen-Macaulay για κάθε  $q \in Q$ . Αν το  $Q$  είναι ομοιοτικά Cohen-Macaulay, τότε είναι και το  $P$ .

## 2.5 Κατασκευάσιμα συμπλέγματα και διατάξεις

Σε αυτήν την παράγραφο ορίζουμε μια νέα ιδιότητα για μερικές διατάξεις (την ισχυρά κατασκευάσιμη διάταξη), με βάση την οποία αποδεικνύονται τα Θεωρήματα 1 και 3. Επιπλέον εισάγουμε μια παραλλαγή της έννοιας του κατασκευάσιμου συμπλέγματος.

### 2.5.1 Κατασκευάσιμα συμπλέγματα

**Ορισμός 2.10.** Ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα  $\Delta$  λέγεται \*κατασκευάσιμο αν είναι μονόπλοκο ή αν μπορεί να γραφεί ως  $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ , όπου τα  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_1 \cap \Delta_2$  είναι \*κατασκευάσιμα με  $\dim \Delta_1 = \dim \Delta_2 = 1 + \dim(\Delta_1 \cap \Delta_2)$  ή  $\dim \Delta_1 = \dim \Delta_2 = \dim(\Delta_1 \cap \Delta_2)$ .

Προφανώς τα \*κατασκευάσιμα συμπλέγματα είναι κατασκευάσιμα με την κλασική έννοια. Δεν γνωρίζουμε όμως αν ισχύει το αντίστροφο.

**Ερώτημα 9.** Είναι η έννοια του \*κατασκευάσιμου συμπλέγματος ισοδύναμη με εκείνη του κατασκευάσιμου συμπλέγματος;

Τα \*κατασκευάσιμα συμπλέγματα έχουν ισχυρές τοπολογικές ιδιότητες, όπως φαίνεται στα επόμενα λήμματα.

**Λήμμα 2.4.** (i) Αν το  $\Delta$  είναι  $d$ -διάστατο \*κατασκευάσιμο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα, τότε το  $\Delta$  είναι  $(d - 1)$ -συνεκτικό.

(ii) Αν το  $\Delta$  είναι \*κατασκευάσιμο, τότε το ίδιο ισχύει για το ζεύγμα οποιασδήποτε πλευράς του  $\Delta$ .

*Απόδειξη.* Το μέρος (i) έπεται από το γεγονός [10, Λήμμα 10.3 (ii)] ότι αν τα  $\Delta_1, \Delta_2$  είναι  $k$ -συνεκτικά και η τομή  $\Delta_1 \cap \Delta_2$  είναι  $(k - 1)$ -συνεκτική, τότε η ένωση  $\Delta_1 \cup \Delta_2$  είναι επίσης  $k$ -συνεκτική. Το μέρος (ii) έπεται από την παρατήρηση ότι αν το  $F$  είναι πλευρά της ένωσης  $\Delta_1 \cup \Delta_2$ , τότε  $\text{link}_{\Delta_1 \cup \Delta_2}(F) = \text{link}_{\Delta_1}(F) \cup \text{link}_{\Delta_2}(F)$  και  $\text{link}_{\Delta_1}(F) \cap \text{link}_{\Delta_2}(F) = \text{link}_{\Delta_1 \cap \Delta_2}(F)$ .  $\square$

**Πόρισμα 2.1.** Αν το  $\Delta$  είναι \*κατασκευάσιμο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα, τότε το  $\Delta$  είναι ομοτοπικά Cohen-Macaulay.

*Απόδειξη.* Έπεται από το Λήμμα 2.4.  $\square$

**Λήμμα 2.5.** Έστω  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$   $d$ -διάστατα \*κατασκευάσιμα μονοπλεκτικά συμπλέγματα.

(i) Αν η τομή οποιωνδήποτε δύο ή περισσότερων από τα  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$  είναι \*κατασκευάσιμη διάστασης  $d$ , τότε η ένωσή τους είναι επίσης \*κατασκευάσιμη.

(ii) Αν η τομή οποιωνδήποτε δύο ή περισσότερων από τα  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$  είναι \*κατασκευάσιμη διάστασης  $d - 1$ , τότε η ένωσή τους είναι επίσης \*κατασκευάσιμη.

*Απόδειξη.* Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο  $k$ . Η περίπτωση  $k = 1$  είναι τετριμμένη και η περίπτωση  $k = 2$  είναι προφανής από τον ορισμό. Υποθέτουμε ότι  $k \geq 3$ . Τα συμπλέγματα  $\Delta_1 \cap \Delta_k, \dots, \Delta_{k-1} \cap \Delta_k$  έχουν διάσταση  $d$  ή  $d - 1$  στην περίπτωση του μέρους (i) και (ii), αντίστοιχα, και ικανοποιούν την υπόθεση του μέρους (i). Άρα, από την επαγωγική υπόθεση, η ένωση  $(\Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_{k-1}) \cap \Delta_k$  είναι \*κατασκευάσιμη διάστασης  $d$  ή  $d - 1$ , αντίστοιχα. Αφού από επαγωγή η ένωση  $\Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_{k-1}$  είναι

\*κατασκευάσιμη διάστασης  $d$  και το  $\Delta_k$  είναι \*κατασκευάσιμο, λόγω της υπόθεσης, έπεται ότι η ένωση  $\Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_k$  είναι επίσης \*κατασκευάσιμη.  $\square$

### 2.5.2 Κατασκευάσιμες διατάξεις

Θεωρούμε τώρα την κλάση των πεπερασμένων μερικώς διατεταγμένων συνόλων που έχουν ελάχιστο στοιχείο και ορίζουμε την έννοια της ισχυρής κατασκευασιμότητας ως εξής.

**Ορισμός 2.11.** Μια πεπερασμένη μερική διάταξη  $P$  τάξης  $d$  με ελάχιστο στοιχείο λέγεται *ισχυρά κατασκευάσιμη (strongly constructible)* αν είναι φραγμένη, διαβαθμισμένη και αποφλοιώσιμη ή μπορεί να γραφεί ως ένωση  $P = I_1 \cup I_2$  δυο ισχυρά κατασκευάσιμων γνήσιων ιδεωδών  $I_1, I_2$  τάξης  $d$ , τέτοια ώστε η τομή  $I_1 \cap I_2$  να είναι ισχυρά κατασκευάσιμο ιδεώδες τάξης τουλάχιστον  $d - 1$ .

Παρατηρούμε ότι κάθε ισχυρά κατασκευάσιμη διάταξη είναι διαβαθμισμένη.

**Πρόταση 2.3.** Το διατακτικό σύμπλεγμα κάθε ισχυρά κατασκευάσιμης διάταξης είναι \*κατασκευάσιμο.

*Απόδειξη.* Έστω  $P$  μία ισχυρά κατασκευάσιμη διάταξη τάξης  $d$ . Για να δείξουμε ότι το  $\Delta(P)$  είναι κατασκευάσιμο θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στον πληθάρημο του  $P$ . Αν η διάταξη  $P$  είναι φραγμένη διαβαθμισμένη και αποφλοιώσιμη, τότε το  $\Delta(P)$  είναι αγνό αποφλοιώσιμο και άρα κατασκευάσιμο. Διαφορετικά η  $P$  είναι η ένωση δύο ισχυρά κατασκευάσιμων γνήσιων ιδεωδών  $I_1, I_2$  τάξης  $d$ , τέτοιων ώστε η τομή  $I_1 \cap I_2$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμο ιδεώδες τάξης τουλάχιστον  $d - 1$ . Προφανώς έχουμε  $\Delta(P) = \Delta(I_1) \cup \Delta(I_2)$  και  $\Delta(I_1) \cap \Delta(I_2) = \Delta(I_1 \cap I_2)$ . Αφού από την επαγωγική υπόθεση τα  $\Delta(I_1)$  και  $\Delta(I_2)$  είναι \*κατασκευάσιμα διάστασης  $d$  και το  $\Delta(I_1 \cap I_2)$  είναι \*κατασκευάσιμο διάστασης τουλάχιστον  $d - 1$ , έπεται ότι το  $\Delta(P)$  επίσης \*κατασκευάσιμο. Αυτό ολοκληρώνει την επαγωγή και την απόδειξη.  $\square$

**Λήμμα 2.6.** Το ευθύ γινόμενο δύο ισχυρά κατασκευάσιμων διατάξεων είναι επίσης ισχυρά κατασκευάσιμη διάταξη.

*Απόδειξη.* Έστω  $P, Q$  δύο ισχυρά κατασκευάσιμες διατάξεις τάξης  $d$  και  $e$ , αντίστοιχα. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο άθροισμα των πληθάρημων των συνόλων  $P$  και  $Q$ . Αν  $P$  και  $Q$  είναι φραγμένες και διαβαθμισμένες αποφλοιώσιμες διατάξεις, τότε και το ευθύ γινόμενό τους  $P \times Q$  είναι επίσης φραγμένη διαβαθμισμένη και αποφλοιώσιμη διάταξη [12, Θεώρημα 8.3] και άρα είναι ισχυρά κατασκευάσιμη. Αν όχι, τότε μια από αυτές, έστω η  $P$ , μπορεί να γραφεί σαν την ένωση  $P = I_1 \cup I_2$  δύο ισχυρά κατασκευάσιμων γνήσιων ιδεωδών  $I_1, I_2$  τάξης  $d$ , τέτοια ώστε η τομή  $I_1 \cap I_2$  να είναι ισχυρά κατασκευάσιμη τάξης τουλάχιστον  $d - 1$ . Τότε το  $P \times Q$  είναι η ένωση των γνήσιων ιδεωδών  $I_1 \times Q$  και  $I_2 \times Q$ . Από την υπόθεση της επαγωγής, τα ιδεώδη αυτά είναι ισχυρά κατασκευάσιμα τάξης  $d + e$  και η τομή τους  $(I_1 \cap I_2) \times Q$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμη τάξης τουλάχιστον  $d + e - 1$ . Ως αποτέλεσμα, το  $P \times Q$  είναι επίσης

ισχυρά κατασκευάσιμο. □

Το επόμενο λήμμα είναι ανάλογο του Λήμματος 4.6 (ii) και η απόδειξή του παραλείπεται.

**Λήμμα 2.7.** Έστω  $P$  μια πεπερασμένη μερική διάταξη τάξης  $d$  με ελάχιστο στοιχείο. Αν η  $P$  είναι ένωση των ισχυρά κατασκευάσιμων ιδεωδών  $I_1, I_2, \dots, I_k$  του  $P$  τάξης  $d$  και η τομή οποιωνδήποτε δύο ή περισσότερων από αυτά τα ιδεώδη είναι ισχυρά κατασκευάσιμη τάξης  $d - 1$ , τότε η  $P$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμη.



## Κεφάλαιο 3

# Συνδυαστικές Ιδιότητες

Σε αυτό το κεφάλαιο ασχολούμαστε με τη συνδυαστική της διάταξης  $\text{Abs}(W)$ , όπου  $W$  είναι μια κλασική ομάδα Coxeter. Συγκεκριμένα, στην Παράγραφο 3.1 υπολογίζουμε την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση της συνάρτησης Möbius των  $\text{Abs}(S_n)$  και  $\mathcal{J}_n$ . Στην Παράγραφο 3.2 δίνουμε χαρακτηρισμούς για τα διαστήματα των  $\text{Abs}(B_n)$  και  $\text{Abs}(D_n)$  που είναι σύνδεσμοι και υπολογίζουμε κάποιες από τις συνδυαστικές τους αναλλοίωτες.

### 3.1 Η συνάρτηση Möbius των $\text{Abs}(S_n)$ και $\mathcal{J}_n$

Σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύουμε τα Θεωρήματα 2 και 5.

**Θεώρημα 2.** Για την τιμή  $\mu_n = \mu_n(\hat{0}, \hat{1})$  της συνάρτησης Möbius της διάταξης που προκύπτει αν στην  $\text{Abs}(S_n)$  επισυνάψουμε ένα μέγιστο στοιχείο  $\hat{1}$  ισχύει η σχέση

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \mu_n \frac{t^n}{n!} = 1 - C(t) \exp\{-2t C(t)\}, \quad (3.1)$$

όπου  $C(t) = \frac{1}{2t} (1 - \sqrt{1 - 4t})$  είναι η συνήθης γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Catalan.

*Απόδειξη.* Συμβολίζουμε με  $\hat{0}$  το ελάχιστο στοιχείο της  $\text{Abs}(S_n)$ . Έχουμε ότι

$$\mu_n(\hat{0}, \hat{1}) = - \sum_{x \in S_n} \mu_n(\hat{0}, x). \quad (3.2)$$

Έστω  $C_m = \frac{1}{m+1} \binom{2m}{m}$  ο  $m$ οστός αριθμός Catalan. Είναι γνωστό [40, Άσκηση 3.68 (b)] ότι

$$\mu_n(\hat{0}, x) = (-1)^{k-1} C_{k-1}$$

αν το  $x \in S_n$  είναι κύκλος μήκους  $k$ , αφού σε αυτήν την περίπτωση το διάστημα  $[\hat{0}, x]$  στο  $\text{Abs}(S_n)$  είναι ισόμορφο με το σύνδεσμο των μη διασταυρούμενων διαμερίσεων του

συνόλου  $\{1, 2, \dots, k\}$ . Επιπλέον, για κάθε  $x \in \mathcal{S}_n$  το διάστημα  $[\hat{0}, x]$  είναι ισόμορφο με το ευθύ γινόμενο των διαστημάτων  $[\hat{0}, y]$ , όπου το  $y$  διατρέχει τους κύκλους του  $x$ . Επομένως έχουμε

$$\mu_n(\hat{0}, x) = \prod_{y \in \mathcal{C}(x)} (-1)^{\#y-1} C_{\#y-1}, \quad (3.3)$$

όπου  $\mathcal{C}(x)$  είναι το σύνολο των κύκλων που εμφανίζονται στην κυκλική παράσταση του  $x$  και  $\#y$  είναι το μήκος του  $y$ .

Δεδομένων των (3.2) και (3.3), ο εκθετικός τύπος [41, Πρόταση 5.1.9] δίνει ότι

$$1 - \sum_{n \geq 1} \mu_n(\hat{0}, \hat{1}) \frac{t^n}{n!} = \exp \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} C_{n-1} \frac{t^n}{n}. \quad (3.4)$$

Ολοκληρώνοντας την παρακάτω γνωστή ισότητα

$$\sum_{n \geq 1} C_{n-1} t^{n-1} = \frac{1 - \sqrt{1-4t}}{2t}$$

παίρνουμε ότι

$$\sum_{n \geq 1} C_{n-1} \frac{t^n}{n} = 1 - \sqrt{1-4t} + \log(1 + \sqrt{1-4t}) - \log 2.$$

Αντικαθιστώντας το  $t$  με  $-t$  στην προηγούμενη ισότητα καταλήγουμε στο ότι

$$\exp \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} C_{n-1} \frac{t^n}{n} = \frac{\sqrt{1+4t} - 1}{2t} \exp(\sqrt{1+4t} - 1).$$

Το συμπέρασμα έπεται από την παραπάνω ισότητα, αν στη σχέση (3.4) αντικαταστήσουμε το  $t$  με το  $-t$ .  $\square$

**Θεώρημα 5.** Για την τιμή  $\mu_n = \mu_n(\hat{0}, \hat{1})$  της συνάρτησης Möbius της διάταξης που προκύπτει αν στην  $\mathcal{J}_n$  επισυνάψουμε ένα μέγιστο στοιχείο  $\hat{1}$  ισχύει η σχέση

$$\sum_{n \geq 2} (-1)^n \mu_n \frac{t^n}{n!} = 1 - \sqrt{C(2t)} \exp\{-2tC(2t)\} \left( 1 + \sum_{n \geq 1} 2^{n-1} \binom{2n-1}{n} \frac{t^n}{n} \right),$$

όπου  $C(t) = \frac{1}{2t}(1 - \sqrt{1-4t})$  είναι η συνήθης γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Catalan.

*Απόδειξη.* Συμβολίζουμε με  $\hat{0}$  το ελάχιστο στοιχείο της  $\text{Abs}(B_n)$ . Όπως προηγουμένως έχουμε ότι

$$\mu_n(\hat{0}, \hat{1}) = - \sum_{x \in \mathcal{J}_n} \mu_n(\hat{0}, x). \quad (3.5)$$

Υποθέτουμε ότι το  $x \in B_n$  είναι κύκλος. Είναι γνωστό [36] ότι είναι

$$\mu(\hat{0}, x) = \begin{cases} (-1)^m \binom{2m-1}{m}, & \text{αν το } x \text{ είναι ισορροπημένος } m\text{-κύκλος,} \\ (-1)^{m-1} C_{m-1}, & \text{αν το } x \text{ είναι ζευγαρωμένος } m\text{-κύκλος,} \end{cases}$$

όπου  $C_m = \frac{1}{m+1} \binom{2m}{m}$  είναι ο  $m$ οστός αριθμός Catalan. Υπενθυμίζουμε (Παρατήρηση 2.1) ότι αν το  $x \in \mathcal{J}_n$  έχει ακριβώς  $k$  ζευγαρωμένους κύκλους, έστω οι  $p_1, \dots, p_k$ , και έναν ισορροπημένο κύκλο, έστω τον  $b$ , τότε  $[\hat{0}, x] \cong [\hat{0}, b] \times [\hat{0}, p_1] \times \dots \times [\hat{0}, p_k]$  και άρα

$$\mu_n(\hat{0}, x) = \mu_n(\hat{0}, b) \prod_{i=1}^k \mu_n(\hat{0}, p_i).$$

Έπεται ότι

$$\mu_n(\hat{0}, x) = (-1)^{\ell_{\mathcal{T}}(b)} \binom{2\ell_{\mathcal{T}}(b) - 1}{\ell_{\mathcal{T}}(b)} \prod_{i=1}^k (-1)^{\ell_{\mathcal{T}}(p_i)} C_{\ell_{\mathcal{T}}(p_i)}. \quad (3.6)$$

Από τα (3.5), (3.6), [40, Πρόταση 5.1.1] και τον εκθετικό τύπο [40, Πόρισμα 5.1.9], καταλήγουμε στο ότι

$$1 - \sum_{n \geq 2} \mu_n(\hat{0}, \hat{1}) \frac{t^n}{n!} = \left( 1 + \sum_{n \geq 1} 2^{n-1} \alpha_n \frac{t^n}{n} \right) \exp \left( \sum_{n \geq 1} 2^{n-1} \beta_n \frac{t^n}{n} \right), \quad (3.7)$$

όπου  $\alpha_n = (-1)^n \binom{2n-1}{n}$  και  $\beta_n = (-1)^{n-1} C_{n-1}$ . Επομένως, αρκεί να υπολογίσουμε το  $\exp \left( \sum_{n \geq 1} 2^{n-1} \beta_n \frac{t^n}{n} \right)$ . Από την απόδειξη του Θεωρήματος 2 έχουμε

$$\exp \sum_{n \geq 1} \beta_n \frac{t^n}{n} = \frac{\sqrt{1+4t} - 1}{2t} \exp(\sqrt{1+4t} - 1)$$

και επομένως, αντικαθιστώντας το  $t$  με  $2t$ ,

$$\exp \left( \sum_{n \geq 1} 2^{n-1} \beta_n \frac{t^n}{n} \right) = \left( \frac{\sqrt{1+8t} - 1}{4t} \right)^{1/2} \exp \left( \frac{\sqrt{1+8t} - 1}{2} \right).$$

Άρα, το δεξί μέλος της ισότητας (3.7) μπορεί να γραφτεί ως

$$1 - \left( \frac{\sqrt{1+8t} - 1}{4t} \right)^{1/2} \exp \left( \frac{\sqrt{1+8t} - 1}{2} \right) \left( 1 + \sum_{n \geq 1} 2^{n-1} \alpha_n \frac{t^n}{n} \right).$$

Το συμπέρασμα έπεται από την ισότητα που προκύπτει αντικαθιστώντας το  $t$  με το  $-t$ .  $\square$

## 3.2 Σύνδεσμοι

Έστω  $W$  μια πεπερασμένη ομάδα Coxeter και  $c \in W$  ένα στοιχείο Coxeter. Είναι γνωστό [6, 17, 18] ότι το διάστημα  $[e, c]$  της  $\text{Abs}(W)$  είναι σύνδεσμος. Σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύουμε τα Θεωρήματα 6 και 7, τα οποία χαρακτηρίζουν, αντίστοιχα, τα διαστήματα της  $\text{Abs}(B_n)$  και  $\text{Abs}(D_n)$  που είναι σύνδεσμοι. Κάποια αποτελέσματα σε αυτήν την κατεύθυνση προέκυψαν στα [6, 17, 18, 25, 36]. Επιπλέον, υπολογίζουμε μερικές από τις απαριθμητικές αναλλοίωτες των συνδέσμων της  $\text{Abs}(B_n)$ .

Θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο συμβολισμό. Σε κάθε  $w \in B_n$  αντιστοιχούμε τη διαμέριση ακεραίου  $\mu(w)$ , τα μέρη της οποίας είναι τα απόλυτα μήκη όλων των ισορροπημένων κύκλων του  $w$ , διατεταγμένα σε φθίνουσα σειρά. Για παράδειγμα, αν  $n = 8$  και  $w = [1, -5][2, 7][6]((3, 4))$ , τότε  $\mu(w) = (2, 2, 1)$ . Έπεται από τα αποτελέσματα της [25, Παράγραφος 6] ότι το διάστημα  $[e, w]$  στην  $\text{Abs}(B_n)$  είναι σύνδεσμος αν  $\mu(w) = (n - 1, 1)$  και ότι το  $[e, w]$  δεν είναι σύνδεσμος, αν  $\mu(w) = (2, 2)$ . Υπενθυμίζουμε ότι μια *διαμέριση hook* είναι μια διαμέριση ακεραίου της μορφής  $\mu = (k, 1, \dots, 1) = (k, 1^r)$ , όπου το  $r$  είναι κατά ένα μικρότερο από τον συνολικό πλήθος των μερών της  $\mu$ .

### 3.2.1 Σύνδεσμοι στην $\text{Abs}(B_n)$

Η επόμενη πρόταση δίνει τη μια κατεύθυνση του χαρακτηρισμού για τα διαστήματα της  $\text{Abs}(B_n)$ .

**Πρόταση 3.1.** Έστω  $w \in B_n$ . Αν  $\mu(w)$  είναι διαμέριση hook, τότε το διάστημα  $[e, w]$  στην  $\text{Abs}(B_n)$  είναι σύνδεσμος.

*Απόδειξη.* Γράφουμε  $w = bp$ , όπου  $b$  (αντίστοιχα,  $p$ ) είναι το γινόμενο όλων των ισορροπημένων (αντίστοιχα, ζευγαρωμένων) κύκλων του  $w$ . Υπενθυμίζουμε ότι  $[e, w] \cong [e, b] \times [e, p]$  (βλέπε Παρατήρηση 2.1). Αφού το  $[e, p]$  είναι ισόμορφο με ένα ευθύ γινόμενο συνδέσμων μη διασταυρούμενων διαμερίσεων, το διάστημα  $[e, w]$  είναι σύνδεσμος αν και μόνο αν το  $[e, b]$  είναι σύνδεσμος. Επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το  $w$  είναι γινόμενο ξένων ισορροπημένων κύκλων. Αφού το  $\mu(w)$  είναι διαμέριση hook, μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε ότι  $w = [1, 2, \dots, k][k+1] \cdots [k+r]$  με  $k+r \leq n$ . Θα δείξουμε ότι το  $L(k, r) := [e, w]$  είναι σύνδεσμος με επαγωγή στο  $k+r$ . Το συμπέρασμα είναι προφανές για  $k+r = 2$ . Υποθέτουμε ότι  $k+r \geq 3$  και ότι η διάταξη  $L(k, r)$  είναι σύνδεσμος για  $k+r < \kappa + \rho \leq n$ . Θα δείξουμε ότι το  $L(\kappa, \rho)$  είναι και αυτό σύνδεσμος. Για  $\rho \leq 1$ , αυτό έπεται από την [36, Πρόταση 2] και το συμπέρασμα του [25] που αναφέρθηκε προηγουμένως. Επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $\rho \geq 2$ . Έστω  $u, v \in L(\kappa, \rho)$ . Από την [40, Πρόταση 3.3.1], αρκεί να δείξουμε ότι  $[e, u] \cap [e, v] = [e, z]$  για κάποιο  $z \in L(\kappa, \rho)$ .

Υποθέτουμε πρώτα ότι  $u(i) = i$  για κάποιο  $i \in \{1, 2, \dots, \kappa + \rho\}$ . Έστω  $v'$  η προσημασμένη μετάθεση που προκύπτει διαγράφοντας το στοιχείο  $i$  από την κυκλική παράσταση του  $v$ . Μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $u, v' \in L(\kappa_1, \rho_1)$ , όπου ή  $\kappa_1 = \kappa - 1$  και  $\rho_1 = \rho$ , ή  $\kappa_1 = \kappa$  και  $\rho_1 = \rho - 1$ . Παρατηρούμε ότι  $[e, u] \cap [e, v] = [e, u] \cap [e, v']$ .

Αφού το  $L(\kappa_1, \rho_1)$  είναι σύνδεσμος, υπάρχει ένα στοιχείο  $z \in L(\kappa_1, \rho_1)$  τέτοιο ώστε  $[e, u] \cap [e, v'] = [e, z]$ . Επιχειρηματολογούμε με τον ίδιο τρόπο αν  $v(i) = i$  για κάποιο  $i \in \{1, 2, \dots, \kappa + \rho\}$ .

Υποθέτουμε ότι  $u(i) \neq i$  και  $v(i) \neq i$  για κάθε  $i \in \{1, 2, \dots, \kappa + \rho\}$ . Αφού  $\rho \geq 2$ , τα  $u, v$  έχουν τουλάχιστον μια ανάκλαση στην κυκλική τους παράσταση. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι κανένας κύκλος της  $u$  δεν είναι συγκρίσιμος με κάποιον κύκλο της  $v$  στην  $\text{Abs}(B_n)$  (διαφορετικά το συμπέρασμα προκύπτει από επαγωγή). Τότε ισχύει τουλάχιστον ένα από τα επόμενα :

- Η ανάκλαση  $[i]$  είναι κύκλος της  $u$  ή της  $v$ , για κάποιο  $i \in \{\kappa + 1, \kappa + 2, \dots, \kappa + \rho\}$ .
- Υπάρχουν  $i, j \in \{\kappa + 1, \kappa + 2, \dots, \kappa + \rho\}$  με  $i < j$ , τέτοια ώστε ή το  $((i, j))$  ή το  $((i, -j))$  είναι κύκλος της  $u$  και τα  $i$  και  $j$  ανήκουν σε διαφορετικούς κύκλους της  $v$ , ή αντίστροφα.
- Υπάρχουν  $i, j \in \{\kappa + 1, \kappa + 2, \dots, \kappa + \rho\}$  με  $i < j$ , τέτοια ώστε το  $((i, j))$  είναι κύκλος της  $u$  και το  $((i, -j))$  είναι κύκλος της  $v$ , ή αντίστροφα.

Σε κάθε μια από τις προηγούμενες περιπτώσεις, συμβολίζουμε με  $u'$  και  $v'$  τις μεταθέσεις που προκύπτουν από τις  $u$  και  $v$ , αντίστοιχα, διαγράφοντας τον αριθμό  $i$  από την κυκλική τους παράσταση. Μπορούμε πάλι να υποθέσουμε ότι  $u', v' \in L(\kappa_1, \rho_1)$ , όπου ή  $\kappa_1 = \kappa - 1$  και  $\rho_1 = \rho$ , ή  $\kappa_1 = \kappa$  και  $\rho_1 = \rho - 1$ . Όπως πριν, έχουμε ότι  $[e, u] \cap [e, v] = [e, u'] \cap [e, v']$ . Από την επαγωγική υπόθεση το  $L(\kappa_1, \rho_1)$  είναι σύνδεσμος και άρα  $[e, u'] \cap [e, v'] = [e, z]$  για κάποιο  $z \in L(\kappa_1, \rho_1)$ . Αυτό συνεπάγεται ότι το  $L(\kappa, \rho)$  είναι σύνδεσμος και έτσι ολοκληρώνεται η επαγωγή.  $\square$

**Θεώρημα 6.** Για  $w \in B_n$ , το διάστημα  $[e, w]$  στην  $\text{Abs}(B_n)$  είναι σύνδεσμος αν και μόνο αν η διαμέριση  $\mu(w)$  είναι διαμέριση hook.

*Απόδειξη.* Αν η  $\mu(w)$  είναι διαμέριση hook, τότε το συμπέρασμα έπεται από την Πρόταση 3.1. Για να δείξουμε την αντίστροφη κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι η  $w$  έχει τουλάχιστον δυο ισορροπημένους κύκλους, έστω  $w_1$  και  $w_2$ , με  $\ell_{\mathcal{T}}(w_1), \ell_{\mathcal{T}}(w_2) \geq 2$ . Τότε υπάρχουν  $i, j, l, m \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$  με  $|i|, |j|, |l|, |m|$  ανά δύο διαφορετικά, τέτοια ώστε  $[i, j] \preceq w_1$  και  $[l, m] \preceq w_2$ . Ωστόσο, στο [34, Παράγραφος 5] αποδεικνύεται ότι το διάστημα  $[e, [i, j][l, m]]$  δεν είναι σύνδεσμος. Έπεται ότι ούτε το διάστημα  $[e, w]$  είναι σύνδεσμος. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

Στη συνέχεια συμβολίζουμε με  $L(k, r)$  το σύνδεσμο  $[e, w] \subset \text{Abs}(B_n)$ , όπου  $w = [1, 2, \dots, k][k + 1] \cdots [k + r] \in B_n$ . Προφανώς το  $L(k, r)$  είναι ισόμορφο με κάθε διάστημα της μορφής  $[e, w]$ , όπου  $w \in B_n$  δεν έχει ζευγαρωμένους μη τετριμμένους κύκλους και ικανοποιεί την ισότητα  $\mu(w) = (k, 1^r)$ .

### Ο σύνδεσμος $\mathcal{L}_n$

Το μερικώς διατεταγμένο σύνολο  $L(n, 0)$  συμπίπτει με το διάστημα  $[e, c]$  της  $\text{Abs}(B_n)$ , όπου το  $c$  είναι το στοιχείο Coxeter  $[1, 2, \dots, n]$  της  $B_n$ . Το διάστημα αυτό είναι ισόμορ-

φο με το σύνδεσμο  $NC^B(n)$  των μη διασταυρούμενων διαμερίσεων τύπου  $B$ . Ο Reiner [36] υπολόγισε τις βασικές απαριθμητικές αναλλοίωτες, τις οποίες παραθέτουμε :

- (i) Ο πληθάριθμος του  $NC^B(n)$  είναι ίσος με  $\binom{2n}{n}$ .
- (ii) Το πλήθος των στοιχείων τάξης  $k$  είναι ίσο με  $\binom{n}{k}^2$ .
- (iii) Το πολυώνυμο ζήτα ικανοποιεί τη σχέση  $Z(NC^B(n), m) = \binom{mn}{n}$ .
- (iv) Το πλήθος των μεγιστικών αλυσίδων είναι ίσο με  $n^n$ .
- (v) Η συνάρτηση Möbius ικανοποιεί τη σχέση  $\mu_n(\hat{0}, \hat{1}) = (-1)^n \binom{2n-1}{n}$ .

Σε αυτήν την παράγραφο εστιάζουμε στις απαριθμητικές ιδιότητες μιας άλλης ειδικής περίπτωσης της διάταξης  $L(k, r)$ , του συνδέσμου  $\mathcal{L}_n := L(0, n)$ . Πρώτα θα περιγράψουμε το  $\mathcal{L}_n$  πιο αναλυτικά. Κάθε στοιχείο του  $\mathcal{L}_n$  μπορεί να προκύψει από το  $[1][2] \cdots [n]$  εφαρμόζοντας διαδοχικά τα επόμενα βήματα :

- διαγραφή κάποιου  $[i]$ ,
- αντικατάσταση ενός γινομένου  $[i][j]$  με  $((i, j))$  ή  $((i, -j))$ .

Επομένως το  $w$  ανήκει στο  $\mathcal{L}_n$  αν και μόνο αν κάθε μη τετριμμένος κύκλος του  $w$  είναι ανάκλαση. Σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει ένας ισομορφισμός διατάξεων  $[e, w] \cong \mathcal{L}_k \times \mathcal{B}_l$ , όπου τα  $k$  και  $l$  είναι το πλήθος των ισοροπημένων και ζευγαρωμένων κύκλων του  $w$ , αντίστοιχα και το  $\mathcal{B}_l$  συμβολίζει τον σύνδεσμο των υποσυνόλων του συνόλου  $\{1, 2, \dots, l\}$ , μερικώς διατεταγμένα με τη σχέση του εγκλεισμού. Αξίζει να σημειωθεί ότι το  $\mathcal{L}_n$  ταυτίζεται με την «υποδιάταξη» της  $\text{Abs}(B_n)$  που αποτελείται από το σύνολο των αυτοαντίστροφων στοιχείων. Το Σχήμα 3.1 απεικονίζει το διάγραμμα Hasse του  $\mathcal{L}_3$ .

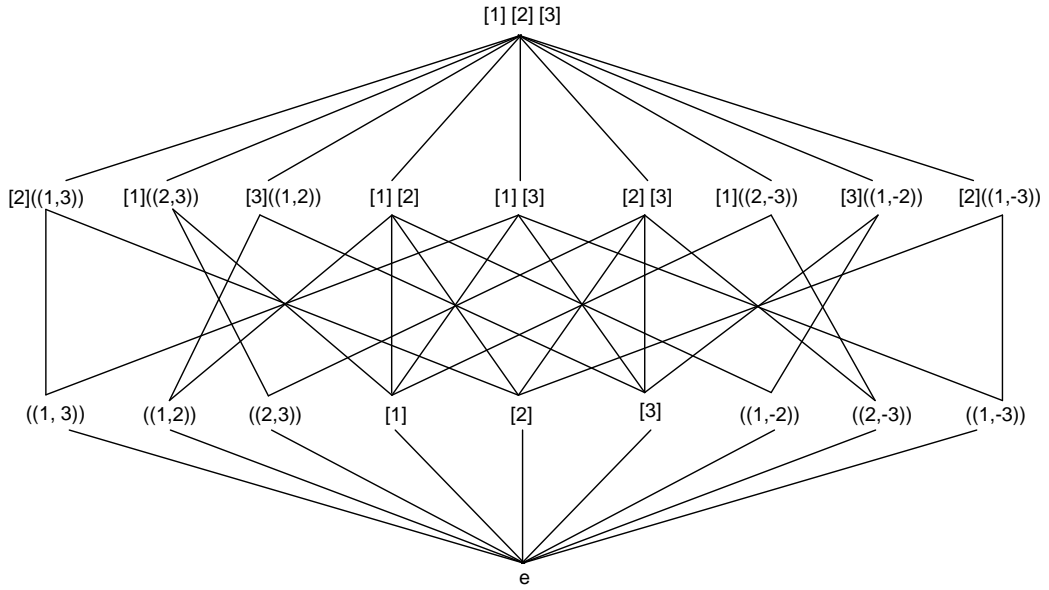
Στην Πρόταση 3.2 δίνουμε το ανάλογο της προηγούμενης λίστας για τον σύνδεσμο  $\mathcal{L}_n$ . Υπενθυμίζουμε ότι το πολυώνυμο ζήτα  $Z(P, m)$  ενός πεπερασμένου μερικώς διατεταγμένου συνόλου  $P$  απαριθμεί το πλήθος των ασθενών αλυσίδων  $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{m-1}$  του  $P$ . Υπενθυμίζουμε ότι (βλέπε [23], [40, Πρόταση 3.11.1]) ότι το  $Z(P, m)$  είναι πολυώνυμο στο  $m$  βαθμού  $n$ , όπου  $n$  είναι το μήκος του  $P$  και ότι  $Z(P, 2) = \#P$ . Επιπλέον, ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του  $Z(P, m)$  είναι ίσος με το πηλίκο του πλήθους των μεγιστικών αλυσίδων προς  $n!$  και αν το  $P$  είναι φραγμένο, τότε  $Z(P, -1) = \mu(\hat{0}, \hat{1})$ .

**Πρόταση 3.2.** Για το σύνδεσμο  $\mathcal{L}_n$  ισχύουν τα επόμενα :

- (i) Το πλήθος των στοιχείων του  $\mathcal{L}_n$  είναι ίσο με

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{n-k} (2k-1)!!,$$

όπου  $(2m-1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (2m-1)$  για θετικούς ακεραίους  $m$ .



Σχήμα 3.1: Ο σύνδεσμος  $\mathcal{L}_3$

(ii) Το πλήθος των στοιχείων του  $\mathcal{L}_n$  τάξης  $r$  είναι ίσο με

$$\sum_{k=0}^{\min\{r, n-r\}} \frac{n!}{k!(r-k)!(n-r-k)!}$$

(iii) Το πολυώνυμο ζήτα του  $\mathcal{L}_n$  δίνεται από τον τύπο

$$Z_n(m) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} m^{n-k} (m-1)^k (2k-1)!!$$

(iv) Το πλήθος των μεγιστικών αλυσίδων του  $\mathcal{L}_n$  είναι ίσο με

$$n! \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (2k-1)!!$$

(v) Για τη συνάρτηση Möbius  $\mu_n$  του  $\mathcal{L}_n$  έχουμε

$$\mu_n(\hat{0}, \hat{1}) = (-1)^n \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} 2^k (2k-1)!!$$

όπου  $\hat{0}$  και  $\hat{1}$  συμβολίζουν το ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο του  $\mathcal{L}_n$ , αντίστοιχα.

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι το  $x$  έχει  $k$  ζευγαρωμένες ανακλάσεις. Αυτές μπορούν να επιλεγούν με  $2^k \binom{n}{2k} (2k-1)!!$  τρόπους. Από την άλλη μεριά, οι ισορροπημένες ανακλάσεις της  $w$  μπορούν να επιλεγούν με  $2^{n-2k}$  τρόπους. Άρα, ο πληθάριθμος του  $\mathcal{L}_n$  είναι ίσος με

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{n-k} (2k-1)!!.$$

Ο ίδιος ισχυρισμός δείχνει ότι το πλήθος των στοιχείων του  $\mathcal{L}_n$  τάξης  $r$ , όπου  $r \leq \lfloor n/2 \rfloor$ , είναι ίσος με

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^r 2^k \binom{n}{2k} (2k-1)!! \binom{n-2k}{r-k} &= \sum_{k=0}^r 2^k \binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{2^k k!} \binom{n-2k}{r-k} \\ &= \sum_{k=0}^r \frac{n!}{k!(r-k)!(n-r-k)!}. \end{aligned}$$

Αφού το  $\mathcal{L}_n$  είναι αυτοδυσικό, το πλήθος των στοιχείων του  $\mathcal{L}_n$  τάξης  $r$  είναι ίσο με το πλήθος εκείνων που έχουν τάξη  $n-r$ . Το πλήθος των ασθενών αλυσίδων του  $\mathcal{L}_n$  στις οποίες εμφανίζονται  $k$  διακεκριμένες ζευγαρωμένες ανακλάσεις, είναι ίσο με  $\binom{n}{2k} (2k-1)!! (m(m-1))^k m^{n-2k}$ . Επομένως, το πολυώνυμο ζήτα του  $\mathcal{L}_n$  δίνεται από τη σχέση

$$Z_n(m) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (2k-1)!! m^{n-k} (m-1)^k.$$

Τέλος, υπολογίζοντας τον συντελεστή του  $m^n$  στην έκφραση του  $Z_n(m)$  και πολλαπλασιάζοντας με  $n!$  καταλήγουμε στο ότι το πλήθος των μεγιστικών αλυσίδων του  $\mathcal{L}_n$  είναι ίσο με

$$n! \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (2k-1)!!.$$

Θέτοντας  $m = -1$ , παίρνουμε ότι

$$\mu_n(\hat{0}, \hat{1}) = Z_n(-1) = (-1)^n \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (2k-1)!! 2^k.$$

□

**Παρατήρηση 3.1.** Από την Πρόταση 4.1 προκύπτει ότι ο σύνδεσμος  $\mathcal{L}_n$  είναι EL-αποφλοιώσιμος. Εδώ περιγράφουμε δυο άλλες EL-επιγραφές για το  $\mathcal{L}_n$ .

- (i) Έστω  $\Lambda = \{[i] : i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{((i, j)) : i, j = 1, 2, \dots, n, i < j\}$ . Διατάσσουμε ολικά τα στοιχεία του  $\Lambda$  με τον εξής τρόπο. Πρώτα διατάσσουμε τις ισορροπημένες ανακλάσεις, έτσι ώστε  $[i] <_{\Lambda} [j]$  αν και μόνο αν  $i < j$ . Μετά, διατάσσουμε τις

ζευγαρωμένες ανακλάσεις λεξικογραφικά. Τέλος, ορίζουμε  $[n] <_{\Lambda} ((1, 2))$ . Η απεικόνιση  $\lambda_1 : C(B_n) \rightarrow \Lambda$  που ορίζεται ως:

$$\lambda_1(a, b) = \begin{cases} [i] & \text{αν } a^{-1}b = [i], \\ ((i, j)) & \text{αν } a^{-1}b = ((i, j)) \text{ ή } ((i, -j)) \end{cases}$$

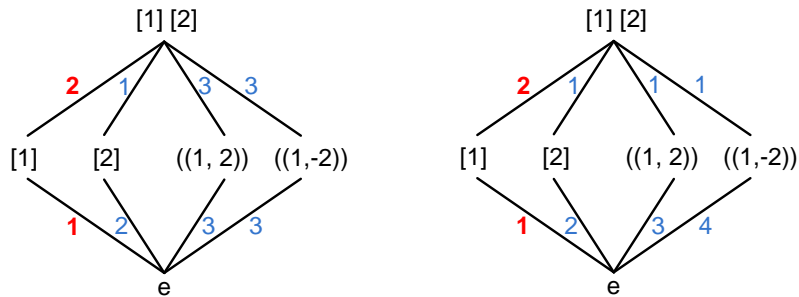
είναι μια EL-επιγραφή του  $\mathcal{L}_n$ .

(ii) Έστω  $\mathcal{T}$  το σύνολο των ανακλάσεων του  $B_n$ . Ορίζουμε μια ολική διάταξη  $<_{\mathcal{T}}$  στο  $\mathcal{T}$  η οποία επεκτείνει τη διάταξη  $<_{\Lambda}$ , διατάσσοντας τις ανακλάσεις  $((i, -j))$ , για  $1 \leq i < j \leq n$ , λεξικογραφικά και θέτοντας  $((n-1, n)) <_{\mathcal{T}} ((1, -2))$ . Για παράδειγμα, αν  $n = 3$  έχουμε τη διάταξη  $[1]_{\mathcal{T}} <_{\mathcal{T}} [2] <_{\mathcal{T}} [3] <_{\mathcal{T}} ((1, 2)) <_{\mathcal{T}} ((1, 3)) <_{\mathcal{T}} ((2, 3)) <_{\mathcal{T}} ((1, -2)) <_{\mathcal{T}} ((1, -3)) <_{\mathcal{T}} ((2, -3))$ . Έστω  $t_i$  η  $i$ -οστή ανάκλαση στην παραπάνω διάταξη. Ορίζουμε μια απεικόνιση  $\lambda_2 : C(B_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, n^2\}$  ως:

$$\lambda_2(a, b) = \min_{1 \leq i \leq n^2} \{i : t_i \vee a = b\}.$$

Η απεικόνιση  $\lambda_2$  είναι μια EL-επιγραφή για το  $\mathcal{L}_n$ .

Το Σχήμα 3.2 απεικονίζει αυτές τις δύο EL-επιγραφές όταν  $n = 2$ .



Σχήμα 3.2: Δύο EL-επιγραφές για το  $\mathcal{L}_2$

**Απαριθμητική συνδυαστική του συνδέσμου  $L(k, r)$**

Σε αυτήν την παράγραφο υπολογίζουμε τον πληθάρημο, τη συνάρτηση Möbius και το πολυώνυμο ζήτα του  $L(k, r)$ , όπου τα  $k, r$  είναι μη αρνητικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε  $k+r = n$ . Η περίπτωση  $k = n-1$  μελετήθηκε από τους Goulden, Nica και Oancea στο άρθρο [25] πάνω στις δακτυλιοειδείς μη διασταυρούμενες διαμερίσεις (βλέπε επίσης [30, 34]). Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματά τους, τους τύπους για τον πληθάρημο και το πολυώνυμο ζήτα του  $NC^B(n)$ , καθώς επίσης και την Πρόταση 3.2, για να βρούμε τις αντίστοιχες εκφράσεις για το  $L(k, r)$ .

**Πρόταση 3.3.** Έστω  $\alpha_r = |\mathcal{L}_r|$ ,  $\beta_r(m) = Z(\mathcal{L}_r, m)$  και  $\mu_r = \mu_r(\mathcal{L}_r)$ , όπου  $\alpha_r = \beta_r(m) = \mu_r = 1$  για  $r = 0, 1$ . Για σταθερούς μη αρνητικούς ακεραίους  $k, r$  τέτοιους ώστε  $k + r = n$ , ο πληθάριθμος, το πολυώνυμο ζήτα και η συνάρτηση Möbius του  $L(k, r)$  δίνονται από τους τύπους:

- $\#L(k, r) = \binom{2k}{k} \left( \frac{2rk}{k+1} \alpha_{r-1} + a_r \right).$
- $Z(L(k, r), m) = \binom{mk}{k} \left( \frac{2rk}{k+1} (m-1) \beta_{r-1}(m) + \beta_r(m) \right).$
- $\mu(L(k, r)) = (-1)^n \binom{2k-1}{k} \left( \frac{4rk}{k+1} |\mu_{r-1}| + |\mu_r| \right).$

*Απόδειξη.* Συμβολίζουμε με  $A$  το υποσύνολο του  $L(k, r)$  που αποτελείται από τα στοιχεία  $x$  με την ακόλουθη ιδιότητα: κάθε κύκλος  $x$  που περιέχει τουλάχιστον ένα από τα  $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm k$  είναι μικρότερος ή ίσος με το στοιχείο  $[1, 2, \dots, k]$  στη διάταξη  $\text{Abs}(B_n)$ . Έστω  $x = x_1 x_2 \cdots x_\nu \in A$ , γραμμένο ως γινόμενο ξένων κύκλων. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα  $t \in \{0, 1, \dots, \nu\}$  τέτοιο ώστε  $x_1 x_2 \cdots x_t \preceq [1, 2, \dots, k]$  και  $x_{t+1} x_{t+2} \cdots x_\nu \preceq [k+1][k+2] \cdots [k+r]$ . Παρατηρούμε ότι αν  $t = 0$ , τότε  $x \preceq [k+1][k+2] \cdots [k+r]$  στο  $\text{Abs}(B_n)$ , ενώ αν  $t = \nu$ , τότε  $x \preceq [1, 2, \dots, k]$ . Προφανώς, υπάρχει ένας ισομορφισμός διατάξεων

$$f : A \rightarrow NC^B(k) \times \langle [k+1] \cdots [k+r] \rangle$$

$$x \mapsto (x_1 \cdots x_t, x_{t+1} \cdots x_\nu),$$

τέτοιος ώστε

$$A \cong NC^B(k) \times \mathcal{L}_r. \quad (3.8)$$

Έστω  $C = L(k, r) \setminus A$  και  $x = x_1 x_2 \cdots x_\nu \in C$ , γραμμένα ως γινόμενα ξένων κύκλων. Τότε υπάρχει ακριβώς ένας ζευγαρωμένος κύκλος  $x_1$  του  $x$  και μια ανάκλαση  $((i, l))$  με  $i \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm k\}$ ,  $l \in \{k+1, k+2, \dots, k+r\}$ , τέτοια ώστε  $((i, l)) \preceq x_1$ . Για κάθε  $l \in \{k+1, k+2, \dots, k+r\}$  συμβολίζουμε με  $C_l$  το σύνολο των μεταθέσεων  $x \in L(k, r)$  οι οποίες έχουν έναν κύκλο, έστω τον  $x_1$ , τέτοιον ώστε  $((i, l)) \preceq x_1$  για κάποιο  $i \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm k\}$ . Έχουμε ότι  $C_l \cap C_{l'} = \emptyset$  για  $l \neq l'$ . Προφανώς,  $C_l \cong C_{l'}$  για  $l \neq l'$  και  $C = \bigcup_{l=k+1}^{k+r} C_l$ .

Συνοψίζοντας, για κάθε  $x \in C$  υπάρχει μια διάταξη  $x_1, x_2, \dots, x_\nu$  των κύκλων του  $x$  και ένας μοναδικός δείκτης  $t \in \{1, 2, \dots, \nu\}$  τέτοιος ώστε  $x_1 x_2 \cdots x_t \preceq [1, 2, \dots, k][l]$  και  $x_{t+1} x_{t+2} \cdots x_\nu \preceq [k+1][k+2] \cdots [l-1][l+1] \cdots [k+r]$ . Έστω

$$E_l = \{x \in C : x \preceq [1, 2, \dots, k][l]\}.$$

Παρατηρούμε ότι καμία μετάθεση του  $E_l$  δεν έχει ισορροπημένο κύκλο στην κυκλική της παράσταση. Προφανώς υπάρχει ένας ισομορφισμός διατάξεων

$$g_l : C_l \rightarrow E_l \times \langle [k+1] \cdots [l-1][l+1] \cdots [k+r] \rangle$$

$$x \mapsto (x_1 \cdots x_t, x_{t+1} \cdots x_\nu)$$

τέτοιος ώστε

$$C_l \cong E_l \times \mathcal{L}_{r-1} \quad (3.9)$$

για κάθε  $l \in \{k+1, k+2, \dots, k+r\}$ . Χρησιμοποιώντας τα (3.8) και (3.9), αποδεικνύουμε την Πρόταση 3.3 ως εξής. Από την προηγούμενη μας συζήτηση έχουμε  $L(k, r) = \#A + r(\#C_{k+1})$ . Από τον ισομορφισμό (3.8) έχουμε ότι

$$\#A = \binom{2k}{k} \alpha_r$$

και ο ισομορφισμός (3.9) δίνει ότι

$$\#C_{k+1} = (\#E_{k+1})(\#\mathcal{L}_{r-1}) = (\#E_{k+1})\alpha_{r-1}.$$

Αφού το  $E_{k+1}$  αποτελείται από τις μεταθέσεις του  $\langle [1, 2, \dots, k][k+1] \rangle \cap C$ , έπεται από την [25, Παράγραφος 5] ότι  $\#E_{k+1} = 2 \binom{2k}{k-1}$ . Άρα,

$$\#L(k, r) = 2r \binom{2k}{k-1} \alpha_{r-1} + \binom{2k}{k} \alpha_r = \binom{2k}{k} \left( \frac{2rk}{k+1} \alpha_{r-1} + \alpha_r \right).$$

Υπενθυμίζουμε ότι το πολυώνυμο ζήτα  $Z(L(k, r), m)$  απαριθμεί το πλήθος των ασθενών αλυσίδων  $\pi_1 \preceq \pi_2 \preceq \dots \preceq \pi_{m-1}$  στο  $L(k, r)$ . Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις. Αν  $\pi_{m-1} \in C$ , τότε  $\pi_{m-1} \in C_l$  για κάποιο  $l \in \{k+1, \dots, k+r\}$ . Ο ισομορφισμός (3.9) δίνει ότι υπάρχουν  $Z(E_l, m) Z(\mathcal{L}_{r-1}, m)$  σε πλήθος τέτοιες ασθενείς αλυσίδες. Από την [25, Παράγραφος 5] έχουμε ότι  $Z(E_l, m) = 2 \binom{mk}{k+1}$ , επομένως  $Z(E_l, m) Z(\mathcal{L}_{r-1}, m) = 2 \binom{mk}{k+1} \beta_{r-1}$ . Αφού υπάρχουν  $r$  επιλογές για το σύνολο  $C_l$ , καταλήγουμε στο ότι το πλήθος των ασθενών αλυσίδων  $\pi_1 \preceq \pi_2 \preceq \dots \preceq \pi_{m-1}$  στο  $L(k, r)$  για τις οποίες  $\pi_{m-1} \in C$  είναι ίσο με

$$2r \binom{mk}{k+1} \beta_{r-1}(m). \quad (3.10)$$

Αν  $\pi_{m-1} \in A$ , τότε  $\pi_{m-1} \in NC^B(k) \times \mathcal{L}_r$  και άρα το πλήθος αυτών των ασθενών αλυσίδων είναι ίσο με

$$\binom{mk}{k} \beta_r(m). \quad (3.11)$$

Η προτεινόμενη έκφραση για το πολυώνυμο ζήτα του  $L(k, r)$  προκύπτει αθροίζοντας τις εκφράσεις (3.10) και (3.11). Η έκφραση για τη συνάρτηση Μόβιους προκύπτει πάλι από το πολυώνυμο ζήτα θέτοντας  $m = -1$ .  $\square$

### 3.2.2 Σύνδεσμοι στην $\text{Abs}(D_n)$

**Θεώρημα 7.** Για  $w \in D_n$ , το διάστημα  $[e, w]$  στην  $\text{Abs}(D_n)$  είναι σύνδεσμος αν και μόνο αν  $\mu(w) = (k, 1)$  για κάποιο  $k \leq n-1$ , ή  $\mu(w) = (1, 1, 1, 1)$ .

*Απόδειξη.* Ο ισχυρισμός στην απόδειξη του Θεωρήματος 6 δείχνει ότι το διάστημα  $[e, w]$  δεν είναι σύνδεσμος εκτός αν η διαμέριση  $\mu(w)$  είναι διαμέριση hook. Επιπλέον, είναι γνωστό [6, 18] ότι το διάστημα  $[e, w]$  είναι σύνδεσμος αν  $\mu(w) = (k, 1)$  για κάποιο

$k \geq 1$ . Υποθέτουμε ότι  $\mu(w) = (k, 1^r)$ , όπου  $r > 1$  και  $r + k \leq n$ . Αν  $k \geq 2$ , τότε υπάρχουν διακεκριμένα στοιχεία στο διάστημα  $[e, w]$  της μορφής  $u = [a_1, a_2][a_3]$  και  $v = [a_1, a_2][a_4]$ . Η τομή  $[e, u] \cap [e, v] \subset \text{Abs}(D_n)$  έχει δυο μεγιστικά στοιχεία, τις ζευγαρωμένες ανακλάσεις  $((a_1, a_2))$  και  $((a_1, -a_2))$ . Αυτό συνεπάγεται ότι τα  $u$  και  $v$  δεν έχουν συνάντηση και άρα το διάστημα  $[e, w]$  δεν είναι σύνδεσμος. Υποθέτουμε ότι  $k = 1$ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι  $[1][2] \cdots [r+1] \preceq w$ . Έστω  $r+1 \geq 5$ . Θεωρούμε τα στοιχεία  $u = [1][2][3][4]$  και  $v = [1][2][3][5]$  του  $[e, w]$  και παρατηρούμε ότι η τομή  $[e, u] \cap [e, v]$  έχει τρία μεγιστικά στοιχεία, τα  $[1][2]$ ,  $[1][3]$  και  $[2][3]$ . Αυτό συνεπάγεται ότι το διάστημα  $[e, w]$  δεν είναι σύνδεσμος. Τέλος, αν  $r+1 = 4$ , τότε  $\mu(w) = (1, 1, 1, 1)$  και  $[e, w] = [e, [1][2][3][4]] \times [e, p]$ , όπου το  $p$  είναι γινόμενο ξένων ζευγαρωμένων κύκλων που σταθεροποιούν κάθε  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Από το Σχήμα 4.2 είναι φανερό ότι το διάστημα  $[e, [1][2][3][4]]$  είναι σύνδεσμος και άρα είναι και το  $[e, w]$  σύνδεσμος. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

## Κεφάλαιο 4

# Τοπολογικές Ιδιότητες

Σε αυτό το κεφάλαιο ασχολούμαστε με την τοπολογία της διάταξης  $\text{Abs}(W)$ , όπου  $W$  είναι μια κλασική ομάδα Coxeter. Συγκεκριμένα, στην Παράγραφο 4.1 εξετάζουμε την τοπολογία των κλειστών διαστημάτων και στη Παράγραφο 4.2 εξετάζουμε την τοπολογία ολόκληρων των διατάξεων  $\text{Abs}(S_n)$  και  $\text{Abs}(D_n)$  καθώς και του ιδεώδους της  $\text{Abs}(B_n)$  το οποίο παράγεται από το σύνολο των στοιχείων Coxeter της  $B_n$ .

### 4.1 Αποφλοιωσιμότητα

Είναι γνωστό ότι κάθε κλειστό διάστημα στην  $\text{Abs}(S_n)$  είναι ισόμορφο με ένα ευθύ γινόμενο συνδέσμων μη διασταυρούμενων διαμερίσεων και συνεπώς ότι είναι EL-αποφλοιώσιμο. Εδώ αποδεικνύουμε ότι την ιδιότητα αυτή έχουν όλα τα κλειστά διαστήματα στην  $\text{Abs}(B_n)$ . Αντίθετα, δείχνουμε ότι για κάθε  $n \geq 4$  υπάρχει διάστημα στην  $\text{Abs}(D_n)$  το οποίο δεν είναι αποφλοιώσιμο.

#### 4.1.1 Διαστήματα στην $\text{Abs}(B_n)$

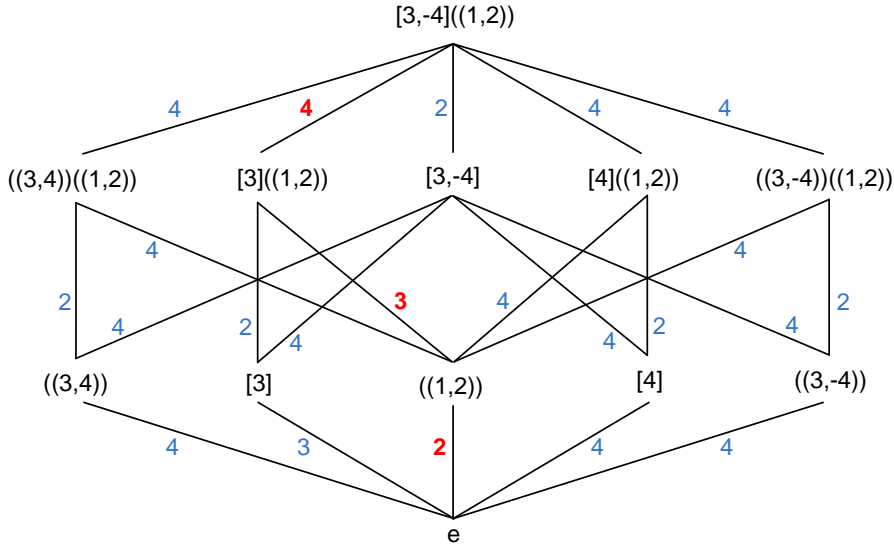
**Θεώρημα 4.** Κάθε διάστημα στην  $\text{Abs}(B_n)$  είναι αποφλοιώσιμο.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 4, θα χρησιμοποιήσουμε τα παρακάτω. Έστω  $C(B_n)$  το σύνολο των σχέσεων κάλυψης της  $\text{Abs}(B_n)$  και  $(a, b) \in C(B_n)$ . Τότε το  $a^{-1}b$  είναι ανάκλαση του  $B_n$ , άρα ή  $a^{-1}b = [i]$  για κάποιο  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , ή υπάρχουν  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , με  $i < j$ , τέτοια ώστε  $a^{-1}b = ((i, j))$  ή  $a^{-1}b = ((i, -j))$ . Ορίζουμε μια απεικόνιση  $\lambda : C(B_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  ως εξής:

$$\lambda(a, b) = \begin{cases} i & \text{αν } a^{-1}b = [i], \\ j & \text{αν } a^{-1}b = ((i, j)) \text{ ή } ((i, -j)). \end{cases}$$

Μια παρόμοια επιγραφή χρησιμοποιήθηκε από τον Biane [7] προκειμένου να μελετήσει τις μεγιστικές αλυσίδες της διάταξης  $NC^B(n)$  των μη διασταυρούμενων  $B_n$ -διαμερίσεων.

Το Σχήμα 4.1 απεικονίζει το διάγραμμα Hasse του διαστήματος  $[e, [3, -4]((1, 2))]$ , με τις αντίστοιχες επιγραφές στις ακμές.



Σχήμα 4.1: EL-επιγραφή για το διάστημα  $[e, [3, -4]((1, 2))]$

**Πρόταση 4.1.** Έστω  $u, v \in B_n$  με  $u \preceq v$ . Τότε, ο περιορισμός της απεικόνισης  $\lambda$  στο διάστημα  $[u, v]$  είναι EL-επιγραφή.

*Απόδειξη.* Έστω  $u, v \in B_n$  με  $u \preceq v$ . Θεωρούμε το μορφισμό διατάξεων  $\phi : [u, v] \rightarrow [e, u^{-1}v]$  του Λήμματος 2.1. Έστω  $(a, b) \in C([u, v])$ . Τότε

$$\phi(a)^{-1}\phi(b) = (u^{-1}a)^{-1}u^{-1}b = a^{-1}uu^{-1}b = a^{-1}b,$$

το οποίο συνεπάγεται ότι  $\lambda(a, b) = \lambda(\phi(a), \phi(b))$ . Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι η  $\lambda|_{[e, w]}$  είναι EL-επιγραφή για το διάστημα  $[e, w]$ , όπου  $w = u^{-1}v$ .

Έστω  $b_1b_2 \cdots b_k p_1p_2 \cdots p_l$  η κυκλική παράσταση του  $w$ , όπου  $b_i = [b_i^1, \dots, b_i^{k_i}]$  για  $i \leq k$  και  $p_j = ((p_j^1, \dots, p_j^{l_j}))$ , με  $p_j^m = \min\{|p_j^m| : 1 \leq m \leq l_j\}$  για  $j \leq l$ . Θεωρούμε την ακολουθία των θετικών ακεραίων που προκύπτει τοποθετώντας τους αριθμούς  $|b_i^h|$  και  $|p_j^m|$ , για  $i, j, h \geq 1$  και  $m > 1$ , σε αύξουσα σειρά. Υπάρχουν  $r = \ell_{\mathcal{T}}(w)$  σε πλήθος τέτοιοι ακέραιοι. Για να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό, θέτουμε  $c(w) = (c_1, c_2, \dots, c_r)$  και λέμε ότι το  $c_\mu$  ( $\mu = 1, 2, \dots, r$ ) ανήκει στον ισορροπημένο (αντίστοιχα, ζευγαρωμένο) κύκλο αν είναι ίσο με κάποιο  $|b_i^h|$  (αντίστοιχα,  $|p_j^m|$ ). Προφανώς έχουμε:

$$c_1 < c_2 < \cdots < c_r \quad (4.1)$$

και  $\lambda(a, b) \in \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$  για κάθε  $(a, b) \in C([e, w])$ . Στην ακολουθία (4.1) αντιστοιχεί μια μοναδική μεγιστική αλυσίδα

$$\mathcal{C}_w : w_0 = e \xrightarrow{c_1} w_1 \xrightarrow{c_2} w_2 \xrightarrow{c_3} \cdots \xrightarrow{c_r} w_r = w,$$

η οποία μπορεί να κατασκευαστεί επαγωγικά ως εξής (εδώ, ο ακέραιος  $\kappa$  στο  $a \xrightarrow{\kappa} b$  συμβολίζει την επιγραφή  $\lambda(a, b)$ ). Αν το  $c_1$  ανήκει σε έναν ισορροπημένο κύκλο, τότε

$w_1 = [c_1]$ . Αλλιώς, το  $c_1$  ανήκει σε κάποιον κύκλο  $p_i$ , έστω στον  $p_1$ . Έστω ότι  $w_1$  είναι ή το  $((p_1^1, c_1))$  ή το  $((p_1^1, -c_1))$ , έτσι ώστε να ισχύει  $w_1 \preceq p_1$ . Παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση έχουμε  $\lambda(e, w_1) = c_1$  και  $\lambda(e, w_1) < \lambda(e, w)$  για κάθε άλλο άτομο  $t \in [e, w]$ . Πράγματι, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα άτομο  $t \neq w_1$  τέτοιο ώστε  $\lambda(e, t) = c_1$ . Υποθέτουμε πρώτα ότι το  $c_1$  ανήκει σε έναν ισορροπημένο κύκλο, άρα  $w_1 = [c_1]$ . Τότε, το  $t$  είναι ανάκλαση της μορφής  $((c_0, \pm c_1))$ , όπου  $c_0 < c_1$  και επομένως, το  $c_0$  ανήκει σε κάποιο ζευγαρωμένο κύκλο του  $w$  (αν όχι, τότε το  $c_1$  δε θα ήταν ελάχιστο). Ωστόσο, από τις σχέσεις κάλυψης (a)-(e) που υπάρχουν στην Παράγραφο 2.3.2 έπεται ότι  $((c_0, \pm c_1)) \not\preceq w$ , άρα  $((c_0, \pm c_1)) \notin [e, w]$ , άτοπο. Συνεπώς το  $c_1$  ανήκει σε ένα ζευγαρωμένο κύκλο του  $w$ , έστω  $p_1$ , και τα  $w_1, t$  είναι και τα δυο ζευγαρωμένες ανακλάσεις. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι  $w_1 = ((p_1^1, c_1))$  και  $t = ((c_0, c_1))$  για κάποιο  $c_0 < c_1$ . Από την πρώτη σχέση κάλυψης που είναι στο τέλος της Παραγράφου 2.3.2 και τον ορισμό της απεικόνισης  $\lambda$ , έπεται ότι  $c_0 = p_1^1$ , άρα  $w_1 = t$ , το οποίο οδηγεί επίσης σε άτοπο.

Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε ορίσει με μοναδικό τρόπο τα στοιχεία

$$w_1, w_2, \dots, w_j,$$

έτσι ώστε για κάθε  $i = 1, 2, \dots, j$  να έχουμε  $w_{i-1} \rightarrow w_i$  με  $\lambda(w_{i-1}, w_i) = c_i$  και  $\lambda(w_{i-1}, w_i) < \lambda(w_{i-1}, z)$  για κάθε  $z \in [e, w]$  τέτοιο ώστε  $z \neq w_i$  και  $w_{i-1} \rightarrow z$ . Θεωρούμε τον αριθμό  $c_{j+1}$  και διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

**Περίπτωση 1:** Το  $c_{j+1}$  ανήκει σε κύκλο του οποίου τα στοιχεία δεν έχουν χρησιμοποιηθεί. Σε αυτήν την περίπτωση, αν το  $c_{j+1}$  ανήκει σε ισορροπημένο κύκλο, τότε θέτουμε  $w_{j+1} = w_j[c_{j+1}]$ , ενώ αν το  $c_{j+1}$  ανήκει στο  $p_s$  για κάποιο  $s \in \{1, 2, \dots, l\}$ , τότε θέτουμε  $w_{j+1}$  να είναι ή το  $w_j((p_s^1, c_{j+1}))$  ή το  $w_j((p_s^1, -c_{j+1}))$ , έτσι ώστε να ισχύει  $w_j^{-1}w_{j+1} \preceq p_s$ .

**Περίπτωση 2:** Το  $c_{j+1}$  ανήκει σε κύκλο του οποίου κάποιο στοιχείο έχει χρησιμοποιηθεί. Τότε υπάρχει ένας δείκτης  $i < j + 1$  τέτοιος ώστε το  $c_i$  να ανήκει στον ίδιο κύκλο με το  $c_{j+1}$ . Αν τα  $c_i, c_{j+1}$  ανήκουν σε κάποιο  $b_s$ , τότε υπάρχει ένας ισορροπημένος κύκλος του  $w_j$ , έστω ο  $a$ , που να περιέχει το  $c_i$ . Σε αυτήν την περίπτωση θέτουμε  $w_{j+1}$  να είναι η μετάθεση που προκύπτει από το  $w_j$  αν τοποθετήσουμε το  $c_{j+1}$  στον κύκλο  $a$  στην ίδια σειρά και με το ίδιο πρόσημο που εμφανίζεται στο  $b_s$ . Ενεργούμε όμοια αν τα  $c_i, c_{j+1}$  ανήκουν στον ίδιο ζευγαρωμένο κύκλο.

Σε κάθε περίπτωση έχουμε  $\lambda(w_j, w_{j+1}) = c_{j+1}$ . Αυτό έπεται από τις σχέσεις κάλυψης (a)-(e) που δίνονται στο τέλος της Παραγράφου 2.3.2. Επιπλέον, ισχυριζόμαστε ότι αν  $z \in [e, w]$  με  $z \neq w_{j+1}$  είναι τέτοιο ώστε  $w_j \rightarrow z$ , τότε  $\lambda(w_j, w_{j+1}) < \lambda(w_j, z)$ . Πράγματι, με χρήση του ισομορφισμού διατάξεων  $\phi : [u, v] \rightarrow [e, u^{-1}v]$  για  $u = w_j$  και  $v = w$ , το παραπάνω έπεται από την ειδική περίπτωση  $j = 0$  με την οποία ασχοληθήκαμε προηγουμένως. Από τον ορισμό της  $\lambda$  και την κατασκευή του  $\mathcal{C}_u$ , η ακολουθία

$$(\lambda(e, w_1), \lambda(w_1, w_2), \dots, \lambda(w_{r-1}, w))$$

ταυτίζεται με την  $c(w)$ . Επιπλέον η  $\mathcal{C}_w$  είναι η μοναδική μεγιστική αλυσίδα που έχει αυτήν την ακολουθία επιγραφών. Αυτό, καθώς και το γεγονός ότι οι επιγραφές

οποιασδήποτε αλυσίδας στο  $[e, w]$  είναι στοιχεία του συνόλου  $\{c_1, c_2, \dots, c_r\}$  μας δίνει ότι η  $\mathcal{C}_w$  είναι η μοναδική γνησίως αύξουσα αλυσίδα. Από αυτά που έχουμε δείξει ως τώρα προκύπτει ότι η  $\mathcal{C}_w$  προηγείται λεξικογραφικά όλων των μεγιστικών αλυσίδων του  $[e, w]$ . Άρα η  $\mathcal{C}_w$  είναι λεξικογραφικά πρώτη και η μοναδική γνησίως αύξουσα αλυσίδα στο  $[e, w]$ . Επομένως, η  $\lambda$  είναι EL-επιγραφή για το διάστημα  $[e, w]$ . Αυτό αποδεικνύει την πρόταση.  $\square$

**Παράδειγμα 4.1.** (i) Έστω  $n = 7$  και  $w = [1, -7][3]((2, -6, -5))((4)) \in B_7$ . Τότε  $c(w) = (1, 3, 5, 6, 7)$  και

$$\mathcal{C}_w : e \xrightarrow{1} [1] \xrightarrow{3} [1][3] \xrightarrow{5} [1][3]((2, -5)) \xrightarrow{6} [1][3]((2, -6, -5)) \xrightarrow{7} w.$$

(ii) Έστω  $n = 4$  και  $w = [3, -4]((1, 2))$ . Τότε  $c(w) = (2, 3, 4)$  και

$$\mathcal{C}_w : e \xrightarrow{2} ((1, 2)) \xrightarrow{3} ((1, 2))[3] \xrightarrow{4} w.$$

*Απόδειξη του Θεωρήματος 4.* Από την Πρόταση 4.1 έπεται το συμπέρασμα, αφού κάθε EL-αποφλοιώσιμη διάταξη είναι αποφλοιώσιμη.  $\square$

### 4.1.2 Διαστήματα στην $\text{Abs}(D_n)$

**Παρατήρηση 4.1.** Για κάθε  $n \geq 4$  υπάρχει διάστημα της  $\text{Abs}(D_n)$  το οποίο δεν είναι Cohen-Macaulay. Πράγματι, το Σχήμα 4.2 απεικονίζει το διάγραμμα Hasse του διαστήματος  $I = [e, u]$  της  $\text{Abs}(D_n)$ , όπου  $u = [1][2][3][4]$ . Παρατηρούμε ότι το διάγραμμα Hasse του ανοικτού διαστήματος  $(e, u)$  είναι μη συνεκτικό και, επομένως, το  $I$  δεν είναι Cohen-Macaulay πάνω σε κανένα σώμα.

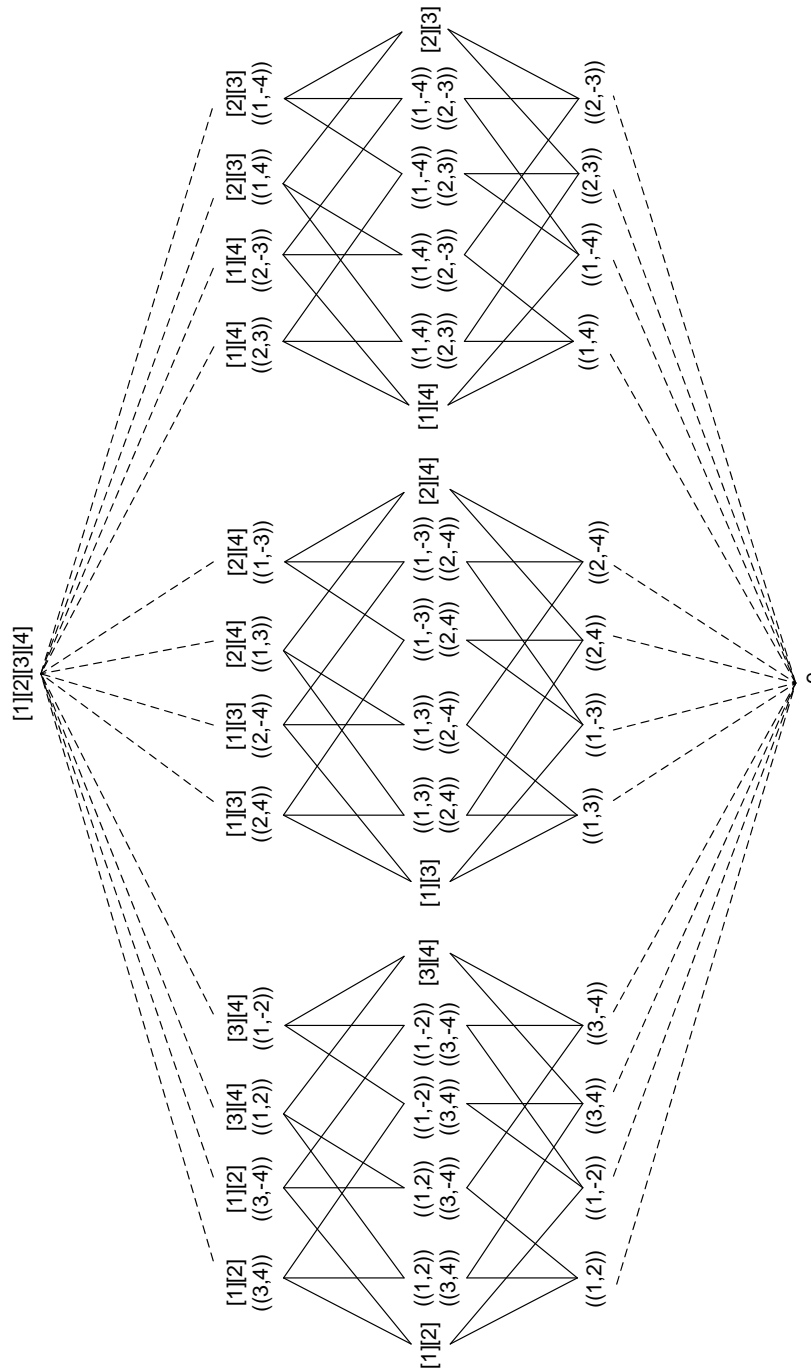
## 4.2 Η ιδιότητα Cohen-Macaulay

### 4.2.1 Η διάταξη $\text{Abs}(S_n)$

Σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύουμε το Θεώρημα 1 σχετικά με την  $\text{Abs}(S_n)$ . Συγκεκριμένα, παραθέτουμε δύο αποδείξεις. Η πρώτη βασίζεται στην έννοια του ισχυρά κατασκευάσιμου μερικού διατεταγμένου συνόλου, ενώ η δεύτερη σε ένα νηματικό θεώρημα του Quillen για μερικές διατάξεις (Παράγραφος 2.4, Θεώρημα 8).

**Θεώρημα 1.** Η διάταξη  $\mathcal{J}_n$  είναι ομοιοτικά Cohen-Macaulay για κάθε  $n \geq 2$ .

**Πρώτη απόδειξη του Θεωρήματος 1.** Θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω συμβολισμό. Έστω  $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k$  ανά δύο ξένα υποσύνολα του  $\{1, 2, \dots, n\}$ , τέτοια ώστε τα  $\tau_1, \dots, \tau_k$  να είναι μη κενά. Έστω επίσης  $\sigma$  μια μη κενή ακολουθία διακεκριμένων στοιχείων του  $\{1, 2, \dots, n\}$ , κανένα από τα οποία δεν ανήκει σε κάποιο  $\tau_i$ . Θέτουμε  $R = (\sigma, \tau_0, \dots, \tau_k)$  και συμβολίζουμε με  $S_n(R)$  το σύνολο των μεταθέσεων της  $w \in S_n$  που έχουν ακριβώς  $k + 1$  κύκλους,  $c_0, c_1, \dots, c_k$ , στην κυκλική τους παράσταση, έτσι ώστε



Σχήμα 4.2: Το διάστημα  $[e, [1][2][3][4]]$  της  $\text{Abs}(D_n)$

- (i) τα στοιχεία της  $\sigma$  εμφανίζονται διαδοχικά στον κύκλο  $c_0$  με την ίδια διάταξη που εμφανίζονται στη  $\sigma$  και
- (ii) τα στοιχεία του  $\tau_i$  εμφανίζονται στον κύκλο  $c_i$  για  $0 \leq i \leq k$ .

**Παράδειγμα 4.2.** Έστω ότι  $k = 0$  και  $\sigma = (1, 2, \dots, r)$ . Τότε το  $S_n(R)$  είναι το σύνολο των κύκλων  $w \in S_n$  μήκους  $n$  για τους οποίους ισχύει  $w(i) = i + 1$  για  $1 \leq i \leq r - 1$ . Ειδικότερα, αν  $r = 1$ , τότε  $S_n(R)$  είναι το σύνολο των μεγιστικών στοιχείων της  $\text{Abs}(S_n)$ .

**Πρόταση 4.2.** Αν  $R$  είναι όπως παραπάνω, τότε το ιδεώδες της  $\text{Abs}(S_n)$  που παράγεται από το σύνολο  $S_n(R)$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμο.

**Παρατήρηση 4.2.** Έστω ότι  $w \preceq c$  στην  $\text{Abs}(S_n)$ , όπου  $c = (a_1 a_2 \cdots a_n)$  είναι κύκλος μήκους  $n$ , και έστω  $1 \leq p \leq n$ . Υποθέτουμε ότι το  $w$  έχει ένα κύκλο που δεν περιέχει κανένα  $a_i$  με  $1 \leq i \leq p$ . Τότε υπάρχει στοιχείο στην  $S_n$  το οποίο έχει ακριβώς δύο κύκλους  $u, v$  στην κυκλική του παράσταση, τέτοιους ώστε  $u(a_i) = a_{i+1}$  για  $1 \leq i \leq p - 1$ , τα στοιχεία που εμφανίζονται στο  $u$  είναι ακριβώς εκείνα που εμφανίζονται σε αυτούς τους κύκλους του  $w$  που περιέχουν τα  $a_1, a_2, \dots, a_p$ , και  $w \preceq uv$ . Αυτό έπεται άμεσα από την περιγραφή της απόλυτης διάταξης στην  $S_n$  που δίνεται στο Παράγραφο 2.3.1. Συγκεκριμένα, ο κύκλος  $u$  μπορεί να κατασκευαστεί ενώνοντας κατάλληλα τους κύκλους του  $w$  στους οποίους εμφανίζονται τα στοιχεία  $a_1, a_2, \dots, a_p$ , ενώ κύκλος  $v$  μπορεί να κατασκευαστεί ενώνοντας κατάλληλα τους υπόλοιπους κύκλους του  $w$ . Οι λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη.

**Λήμμα 4.1.** Έστω  $1 \leq r \leq n - 2$  και  $J$  ένα υποσύνολο του  $\{r + 1, \dots, n\}$  που έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία. Υποθέτουμε ότι το  $w \in S_n$  είναι τέτοιο ώστε για κάθε  $j \in J$  να υπάρχει ένας κύκλος  $c$  στην  $S_n$  μήκους  $n$  που να ικανοποιεί τη σχέση  $c(i) = i + 1$  για  $1 \leq i \leq r - 1$ ,  $c(r) = j$  και  $w \preceq c$ . Τότε

- (i) υπάρχει τουλάχιστον ένα  $j \in J$  τέτοιο ώστε τα  $i$  και  $j$  να είναι στοιχεία του ίδιου κύκλου στην κυκλική παράσταση του  $w$  για κάποιο  $1 \leq i \leq r$ ,
- (ii) υπάρχει ένα στοιχείο στην  $S_n$  το οποίο έχει ακριβώς δύο κύκλους  $u, v$  στην κυκλική του παράσταση, έτσι ώστε  $w \preceq uv$ ,  $u(i) = i + 1$  για  $1 \leq i \leq r - 1$  και τουλάχιστον ένα από τα επόμενα ισχύει: (a) όλα τα στοιχεία του  $J$  εμφανίζονται στον  $v$ , ή (b) υπάρχει ένα  $j \in J$  με  $u(r) = j$  και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του  $J$  εμφανίζονται στον  $v$ .

*Απόδειξη.* Το μέρος (i) είναι πάλι μια άμεση συνέπεια της περιγραφής της απόλυτης διάταξης στην  $S_n$  που δίνεται στην Παράγραφο 2.3.1. Το δεύτερο μέρος έπεται από το μέρος (i) και την Παρατήρηση 4.2 (η παρατήρηση εφαρμόζεται είτε για  $p = r$  στην  $w$  και σε έναν κύκλο  $c$  μήκους  $n$  ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση  $c(i) = i + 1$  για  $1 \leq i \leq r - 1$ , αν κανένα στοιχείο του  $J$  δεν εμφανίζεται στον ίδιο κύκλο της  $w$  με κάποιο  $1 \leq i \leq r$ , είτε για  $p = r + 1$  και σε ένα κύκλο  $c$  μήκους  $n$  ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση  $c(i) = i + 1$  για  $1 \leq i \leq r - 1$  και  $c(r) = j$ , αν  $j \in J$  εμφανίζεται στον ίδιο κύκλο του  $w$  με κάποιο  $1 \leq i \leq r$ ).  $\square$

*Απόδειξη της Πρότασης 4.2.* Συμβολίζουμε με  $I_n(R)$  το ιδεώδες της  $\text{Abs}(S_n)$  που παράγεται από το σύνολο  $S_n(R)$  και θέτουμε  $P_n = \text{Abs}(S_n)$ . Το  $I_n(R)$  είναι διαβαθμισμένο τάξης  $n - k - 1$ . Επίσης, συμβολίζουμε με  $m$  το πλήθος των στοιχείων του συνόλου  $\{1, 2, \dots, n\}$  που δεν εμφανίζονται στην  $R = (\sigma, \tau_0, \dots, \tau_k)$ . Εφαρμόζουμε επαγωγή στα  $n, n - k$  και  $m$ , με αυτήν τη σειρά.

Έστω ότι  $n \geq 3$  (διαφορετικά το αποτέλεσμα είναι τετριμμένο). Υποθέτουμε αρχικά ότι  $k \geq 1$ . Για  $m = 0$ , το ιδεώδες  $I_n(R)$  είναι ισόμορφο με το ευθύ γινόμενο  $I_r(S) \times P_{r_1} \times \dots \times P_{r_k}$ , όπου  $S = (\sigma, \tau_0)$ ,  $r$  είναι το πλήθος των στοιχείων του  $\{1, 2, \dots, n\}$  που εμφανίζονται στο  $S$  και  $r_i$  είναι ο πληθάριθμος του  $\tau_i$  για  $1 \leq i \leq k$ . Αφού τα  $I_r(S)$  και  $P_{r_i}$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμα από την επαγωγική υπόθεση στο  $n$ , το ιδεώδες  $I_n(R)$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμο από το Λήμμα 2.6. Υποθέτουμε τώρα ότι  $m \geq 1$  και έστω  $j$  ένα στοιχείο του  $\{1, 2, \dots, n\}$  που δεν εμφανίζεται στο  $R$ . Προφανώς έχουμε

$$I_n(R) = \bigcup_{i=0}^k I_n(R_i),$$

όπου το  $R_i$  προκύπτει από το  $R$  αν τοποθετήσουμε τον αριθμό  $j$  στο σύνολο  $\tau_i$ . Κάθε ιδεώδες  $I_n(R_i)$  έχει τάξη  $n - k - 1$  και, από την επαγωγική υπόθεση στο  $m$ , είναι ισχυρά κατασκευάσιμο. Επιπλέον, η τομή οποιωνδήποτε δύο ή περισσότερων από αυτά τα ιδεώδη είναι ίση με  $I_n(S)$ , όπου  $S = (\sigma, \tau_0, \dots, \tau_{k+1})$  με  $\tau_{k+1} = \{j\}$ . Αφού το  $I_n(S)$  έχει τάξη  $n - k - 2$ , είναι ισχυρά κατασκευάσιμο από την επαγωγική υπόθεση στο  $n - k$ . Έπεται τότε από το Λήμμα 2.7 ότι το  $I_n(R)$  είναι επίσης ισχυρά κατασκευάσιμο.

Τέλος, υποθέτουμε ότι  $k = 0$ . Αφού τα στοιχεία του  $\tau_0$  δεν παίζουν κάποιο ρόλο σε αυτήν την περίπτωση, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το  $\tau_0$  είναι κενό. Προφανώς, ο τύπος ισομορφίας του  $I_n(R)$  εξαρτάται μόνο από το μήκος της ακολουθίας  $\sigma$ . Άρα για απλοποίηση του συμβολισμού μπορούμε να υποθέσουμε επιπλέον ότι  $\sigma = (1, 2, \dots, r)$  για κάποιο  $1 \leq r \leq n$ . Αν  $m = 0$ , επομένως  $r = n$ , τότε το  $S_n(R)$  αποτελείται από μόνο έναν κύκλο μήκους  $n$  και το ιδεώδες  $I_n(R)$  είναι ισόμορφο με το σύνδεσμο των μη διασταυρούμενων διαμερίσεων του  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Επομένως το  $I_n(R)$  είναι φραγμένο, διαβαθμισμένο και αποφλοιώσιμο ιδεώδες [8, Παράδειγμα 2.9] και ειδικότερα, είναι ισχυρά κατασκευάσιμο. Υποθέτουμε τώρα ότι  $m \geq 1$ , άρα  $r \leq n - 1$ . Για  $r + 1 \leq j \leq n$  θέτουμε  $R_j = (\sigma_j, \emptyset)$ , όπου  $\sigma_j = (1, \dots, r, j)$  προκύπτει από την ακολουθία  $\sigma$  επισυνάπτοντας τον αριθμό  $j$  στο τέλος. Καθένα από τα ιδεώδη  $I_n(R_j)$  έχει τάξη  $n - 1$  και, από την επαγωγική υπόθεση στο  $m$ , είναι ισχυρά κατασκευάσιμο. Επιπλέον, έχουμε

$$I_n(R) = \bigcup_{j=r+1}^n I_n(R_j).$$

Από το Λήμμα 2.7, για να δείξουμε ότι το  $I_n(R)$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμο, αρκεί να δείξουμε ότι η τομή οποιωνδήποτε δύο ή περισσότερων από τα ιδεώδη  $I_n(R_j)$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμο ιδεώδες τάξης  $n - 2$ . Έστω  $J$  ένα υποσύνολο του  $\{r + 1, \dots, n\}$  με τουλάχιστον δύο στοιχεία. Ισχυριζόμαστε ότι

$$\bigcap_{j \in J} I_n(R_j) = I_n(S_0) \cup \left( \bigcup_{j \in J} I_n(S_j) \right), \quad (4.2)$$

όπου  $S_0 = (\sigma, \emptyset, J)$  και  $S_j = (\sigma_j, \emptyset, J \setminus \{j\})$  για  $j \in J$ . Πράγματι, είναι φανερό ότι κάθε ιδεώδες  $I_n(S_j)$  για  $j \in J \cup \{0\}$  περιέχεται στην τομή στο αριστερό μέλος της (4.3). Ο αντίστροφος εγκλεισμός έπεται από το Λήμμα 4.1 (ii). Επίσης, παρατηρούμε ότι τα ιδεώδη  $I_n(S_j)$  για  $j \in J \cup \{0\}$  έχουν τάξη  $n - 2$  και ότι, από την επαγωγική υπόθεση για το  $n - k$ , είναι ισχυρά κατασκευάσιμα. Εφαρμόζοντας επαγωγή στον πληθάρημο του  $J$ , για να δείξουμε ότι η ένωση στο δεξί μέλος της ισότητας (4.3) είναι ισχυρά κατασκευάσιμη, αρκεί να δείξουμε ότι για  $q \in J$ , η τομή

$$I_n(S_q) \cap \left( \bigcup_{j \in (J \setminus \{q\}) \cup \{0\}} I_n(S_j) \right)$$

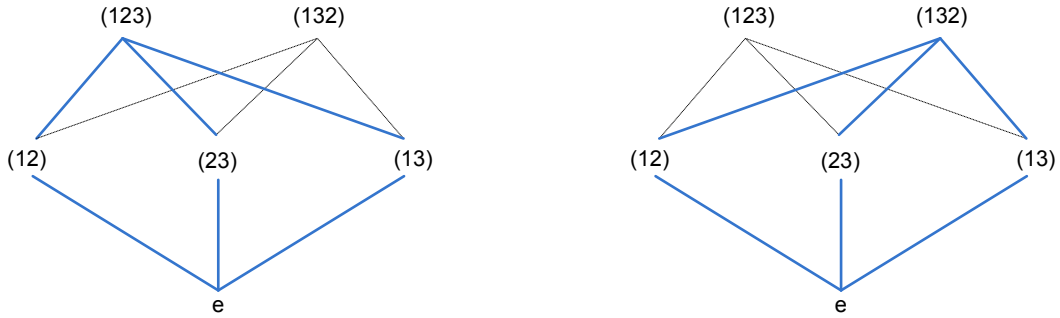
είναι ισχυρά κατασκευάσιμη τάξης  $n - 3$ . Ισχυριζόμαστε ότι αυτή η τομή είναι ίση με το ιδεώδες  $I_n(S)$ , όπου  $S = (\sigma, \emptyset, J \setminus \{q\}, \{q\})$ . Πράγματι, ο ένας εγκλεισμός έπεται από το γεγονός ότι  $I_n(S) \subseteq I_n(S_q) \cap I_n(S_0)$ . Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, παρατηρούμε ότι σε κάθε μετάθεση του  $S_n(S_q)$ , ο αριθμός  $q$  εμφανίζεται σε έναν κύκλο που περιέχει τα  $1, 2, \dots, r$  και κανένα στοιχείο του  $J \setminus \{q\}$  και ότι για όλα τα  $j \in (J \setminus \{q\}) \cup \{0\}$ , σε κάθε μετάθεση της  $S_n(S_j)$ , το  $q$  εμφανίζεται σε έναν κύκλο που δεν περιέχει κανένα από τα  $1, 2, \dots, r$ . Τέλος, παρατηρούμε ότι το ιδεώδες  $I_n(S)$  έχει την επιθυμητή τάξη  $n - 3$  και είναι ισχυρά κατασκευάσιμο από την επαγωγική υπόθεση στο  $n - k$ . Αυτό ολοκληρώνει την επαγωγή καθώς και την απόδειξη της πρότασης.  $\square$

Όταν  $k = 0$  και η ακολουθία  $\sigma$  έχει μήκος ένα (Παράδειγμα 4.2), το ιδεώδες  $I_n(R)$  ταυτίζεται με την  $\text{Abs}(S_n)$ . Άρα, από την Πρόταση 4.2 έπεται ότι η διάταξη  $\text{Abs}(S_n)$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμη. Από την Πρόταση 2.3 και το Πόρισμα 2.1 έχουμε ότι η  $\text{Abs}(S_n)$  είναι ομοιοτικά Cohen-Macaulay.  $\square$

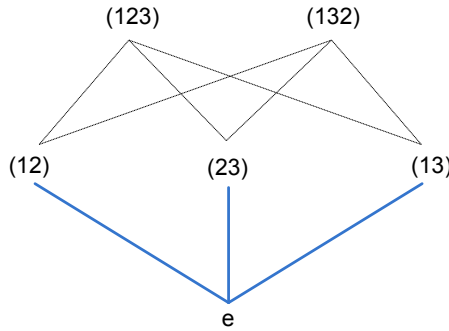
**Παράδειγμα 4.3.** Θεωρούμε τη διάταξη  $\text{Abs}(S_3)$ . Τα Σχήματα 4.3 και 4.4 απεικονίζουν αντίστοιχα τα ιδεώδη  $I_1 = \langle (123) \rangle$ ,  $I_2 = \langle (132) \rangle$  και την τομή  $I_1 \cap I_2$ . Προφανώς  $\text{Abs}(S_3) = I_1 \cup I_2$  και τα  $I_1, I_2, I_1 \cap I_2$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμα.

**Δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος 1.** Θα χρησιμοποιήσουμε το νηματικό Θεώρημα του Quillen (Θεώρημα 8). Έστω  $\{\hat{0}, \hat{1}\}$  μια αλυσίδα με δύο στοιχεία,  $\hat{0} < \hat{1}$ , και  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Θεωρούμε τη συνάρτηση προβολής  $\pi_i : \text{Abs}(S_n) \rightarrow \text{Abs}(S_n)$  της Παραγράφου 2.3.4 και ορίζουμε την απεικόνιση

$$f_i : \text{Abs}(S_n) \rightarrow \text{Abs}(S_{n-1}) \times \{\hat{0}, \hat{1}\}$$



Σχήμα 4.3: Τα ιδεώδη  $I_1, I_2$



Σχήμα 4.4: Το ιδεώδες  $I_1 \cap I_2$

με

$$f_i(w) = \begin{cases} (\pi_i(w), \hat{0}), & \text{αν } w(i) = i, \\ (\pi_i(w), \hat{1}), & \text{αν } w(i) \neq i \end{cases}$$

για  $w \in \text{Abs}(S_n)$ . Πρώτα ελέγχουμε ότι η  $f_i$  είναι επιμορφισμός διατάξεων που διατηρεί την τάξη. Πράγματι, από τον ορισμό της η  $f_i$  είναι φανερό ότι διατηρεί την τάξη. Έστω  $u, v \in \text{Abs}(S_n)$  με  $u \preceq v$ . Το Λήμμα 2.2 (ii) δίνει ότι  $\pi_i(u) \preceq \pi_i(v)$ . Αν  $u(i) \neq i$ , τότε έχουμε και ότι  $v(i) \neq i$  και συνεπώς  $f_i(u) = (\pi_i(u), \hat{1}) \leq (\pi_i(v), \hat{1}) = f_i(v)$ . Αν  $u(i) = i$ , τότε  $f_i(u) = (\pi_i(u), \hat{0})$  και άρα  $f_i(u) \leq f_i(v)$ . Επομένως η  $f_i$  είναι ομομορφισμός διατάξεων. Επιπλέον, αν  $w \in \pi_i(P_n)$ , τότε  $f_i^{-1}(\{(w, \hat{0})\}) = \{w\}$  και άρα κάθε μετάθεση που προκύπτει από την  $w$  τοποθετώντας το στοιχείο  $i$  σε ένα κύκλο της  $w$  βρίσκεται στο  $f_i^{-1}(\{(w, \hat{1})\})$ . Συνεπώς  $f_i^{-1}(\{q\}) \neq \emptyset$  για κάθε  $q \in \pi_i(P_n) \times \{\hat{0}, \hat{1}\}$ , που σημαίνει ότι η  $f_i$  είναι επί.

Για απλοποίηση του συμβολισμού, δοσμένης μιας συνάρτησης  $f : P \rightarrow Q$ , θα συμβολίζουμε με  $f^{-1}(q)$  την αντίστροφη εικόνα  $f^{-1}(\{q\})$  του μονοσυνόλου  $\{q\}$  του  $Q$ . Επίσης, για υποσύνολα  $U$  και  $V$  της  $S_n$  γράφουμε  $U \cdot V = \{uv : u \in U, v \in V\}$ . Θα χρειαστούμε τα επόμενα λήμματα.

**Λήμμα 4.2.** Για κάθε  $q \in S_{n-1} \times \{\hat{0}, \hat{1}\}$  έχουμε  $f_n^{-1}(\langle q \rangle) = \langle f_n^{-1}(q) \rangle$ .

*Απόδειξη.* Το αποτέλεσμα είναι τετριμμένο αν  $q = (u, \hat{0}) \in S_{n-1} \times \{\hat{0}, \hat{1}\}$ , επομένως υποθέτουμε ότι  $q = (u, \hat{1})$ . Αφού  $f_n$  είναι μορφισμός διατάξεων, έχουμε ότι  $\langle f_n^{-1}(q) \rangle \subseteq f_n^{-1}(\langle q \rangle)$ . Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, θεωρούμε ένα στοιχείο  $w \in f_n^{-1}(\langle q \rangle)$  και παρατηρούμε ότι  $f_n(w) \leq q$ , άρα  $\pi_n(w) \preceq u$ . Από το Λήμμα 2.3 υπάρχει ένα στοιχείο  $v \in S_n$  που καλύπτει το  $u$  και ικανοποιεί  $\pi_n(v) = u$  και  $w \preceq v$ . Έχουμε τότε ότι  $v \in f_n^{-1}(q)$  και άρα  $w \in \langle f_n^{-1}(q) \rangle$ . Αυτό αποδεικνύει ότι  $f_n^{-1}(\langle q \rangle) \subseteq \langle f_n^{-1}(q) \rangle$ .  $\square$

**Λήμμα 4.3.** Για κάθε  $u \in S_{n-1}$ , το διατακτικό ιδεώδες

$$M(u) = \langle v \in S_n : \pi_n(v) = u \rangle$$

της  $\text{Abs}(S_n)$  είναι ομοτοπικά Cohen-Macaulay τάξης  $\ell_{\mathcal{T}}(u) + 1$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $u = u_1 u_2 \cdots u_l$ , γραμμένο ως γινόμενο ξένων κύκλων της  $S_{n-1}$ . Τότε

$$M(u) = \bigcup_{i=1}^l C(u_i) \cdot \langle u_1 \cdots \hat{u}_i \cdots u_l \rangle,$$

όπου  $u_1 \cdots \hat{u}_i \cdots u_l$  συμβολίζει τη μετάθεση που προκύπτει από το  $u$  διαγράφοντας τον κύκλο  $u_i$  και το  $C(u_i)$  συμβολίζει το διατακτικό ιδεώδες της  $\text{Abs}(S_n)$  που παράγεται από τους κύκλους  $v$  της  $S_n$  που καλύπτουν το  $u_i$  και ικανοποιούν  $\pi_n(v) = u_i$ . Το Λήμμα 4.4, το οποίο αποδεικνύεται στο τέλος αυτής της παραγράφου, δίνει ότι το  $C(u_i)$  είναι ομοτοπικά Cohen-Macaulay τάξης  $\ell_{\mathcal{T}}(u_i) + 1$  για κάθε  $i$ . Καθένα από τα ιδεώδη  $C(u_i) \cdot \langle u_1 \cdots \hat{u}_i \cdots u_l \rangle$  είναι ισόμορφα με ένα ευθύ γινόμενο ομοτοπικά Cohen-Macaulay διατάξεων και άρα είναι ομοτοπικά Cohen-Macaulay, από το Λήμμα 2.7 (i). Συγκεκριμένα, οι τάξεις τους είναι ίσες με  $\ell_{\mathcal{T}}(u) + 1$ . Επιπλέον, η τομή οποιωνδήποτε δύο ή περισσότερων από τα ιδεώδη  $C(u_i) \cdot \langle u_1 \cdots \hat{u}_i \cdots u_l \rangle$  είναι ίση με  $\langle u \rangle$ , η οποία είναι ομοτοπικά Cohen-Macaulay τάξης  $\ell_{\mathcal{T}}(u)$ . Επομένως το συμπέρασμα έπεται από το Λήμμα 2.7 (ii).  $\square$

Επιστρέφουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 1. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο  $n$ . Το αποτέλεσμα είναι τετριμμένο για  $n \leq 2$ . Υποθέτουμε ότι η διάταξη  $\text{Abs}(S_{n-1})$  είναι ομοτοπικά Cohen-Macaulay. Τότε είναι ομοτοπικά Cohen-Macaulay και το ευθύ γινόμενο  $\text{Abs}(S_{n-1}) \times \{\hat{0}, \hat{1}\}$ , από το Λήμμα 2.7 (i). Θεωρούμε την απεικόνιση

$$f_n : \text{Abs}(S_n) \rightarrow \text{Abs}(S_{n-1}) \times \{\hat{0}, \hat{1}\}.$$

Από το Θεώρημα 8 και το Λήμμα 4.2, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε  $q \in S_{n-1} \times \{\hat{0}, \hat{1}\}$ , το διατακτικό ιδεώδες  $\langle f_n^{-1}(q) \rangle$  της  $\text{Abs}(S_n)$  είναι ομοτοπικά Cohen-Macaulay. Αυτό ισχύει αν  $q = (u, \hat{0})$  για κάποιο  $u \in S_{n-1}$ , αφού τότε  $\langle f_n^{-1}(q) \rangle = \langle u \rangle$  και κάθε διάστημα στην  $\text{Abs}(S_n)$  είναι αποφλοιώσιμο. Υποθέτουμε ότι  $q = (u, \hat{1})$ . Τότε  $\langle f_n^{-1}(q) \rangle = M(u)$ , το οποίο είναι ομοτοπικά Cohen-Macaulay από το Λήμμα 4.3. Αυτό ολοκληρώνει την επαγωγή και την απόδειξη του Θεωρήματος.  $\square$

**Λήμμα 4.4.** Το διατακτικό ιδεώδες της  $\text{Abs}(S_n)$  που παράγεται από όλους τους κύκλους  $u \in S_n$  για τους οποίους  $\pi_n(u) = (1\ 2 \cdots n - 1)$  είναι ομοτοπικά Cohen-Macaulay τάξης  $n - 1$ .

**Παρατήρηση 4.3.** Έστω  $u_1, u_2, \dots, u_m \in S_n$  στοιχεία με απόλυτο μήκος  $k$  και έστω  $v \in S_n$  ένας κύκλος με απόλυτο μήκος  $r$ , ο οποίος είναι ξένος με τον  $u_i$  για κάθε  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Υποθέτουμε ότι η ένωση  $\bigcup_{i=1}^m [e, u_i]$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμη τάξης  $k$ . Τότε το

$$\bigcup_{i=1}^m [e, vu_i] \cong \bigcup_{i=1}^m ([e, v] \times [e, u_i]) = [e, v] \times \bigcup_{i=1}^m [e, u_i]$$

είναι ισχυρά κατασκευάσιμο τάξης  $k + r$ , από το Λήμμα 2.6.

**Λήμμα 4.5.** Για  $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ , θεωρούμε το στοιχείο

$$u_i = (1\ i + 1 \ \dots \ n - 1)(2\ 3 \ \dots \ i\ n) \in S_n.$$

Η ένωση  $\bigcup_{i=1}^m [e, u_i]$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμη τάξης  $n - 2$  για κάθε  $1 \leq m \leq n - 1$ .

*Απόδειξη.* Συμβολίζουμε με  $I(n, m)$  την ένωση του ισχυρισμού του λήμματος και προχωρούμε με επαγωγή στα  $n$  και  $m$ , σε αυτήν τη σειρά. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $n \geq 3$  και  $m \geq 2$ , αφού διαφορετικά το αποτέλεσμα είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα ισχύει για θετικούς ακέραιους μικρότερους του  $n$ . Θα δείξουμε ότι ισχύει και για το  $n$ . Απο επαγωγή στο  $m$ , αρκεί να δείξουμε ότι το  $[e, u_m] \cap I(n, m - 1)$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμο τάξης  $n - 3$ . Πράγματι, έχουμε ότι  $[e, u_m] \cap I(n, m - 1) = \bigcup_{i=1}^{m-1} [e, u_m] \cap [e, u_i]$  και

$$[e, u_m] \cap [e, u_i] = [e, (1\ m + 1\ m + 2 \ \dots \ n - 1)(2\ 3 \ \dots \ i\ n)(i + 1\ i + 2 \ \dots \ m)].$$

Αφού ο κύκλος  $(1\ m + 1\ m + 2 \ \dots \ n - 1)$  εμφανίζεται στην κυκλική παράσταση κάθε μεγιστικού στοιχείου του  $[e, u_m] \cap I(n, m - 1)$ , το συμπέρασμα έπεται από την Παρατήρηση 4.3 και την επαγωγή στο  $n$ .  $\square$

**Παράδειγμα 4.4.** Αν  $n = 6$  και  $m = 3$ , τότε το  $I(n, m)$  είναι το διατακτικό ιδεώδες της  $\text{Abs}(S_n)$  που παράγεται από τα στοιχεία  $u_1 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)(6)$ ,  $u_2 = (1\ 3\ 4\ 5)(2\ 6)$  και  $u_3 = (1\ 4\ 5)(2\ 3\ 6)$ . Η τομή

$$[e, u_3] \cap ([e, u_1] \cup [e, u_2]) = [e, (1\ 4\ 5)(2\ 3)(6)] \cup [e, (1\ 4\ 5)(3)(2\ 6)]$$

είναι ισχυρά κατασκευάσιμη τάξης 3 και άρα το  $I(n, m)$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμο τάξης 4.

**Λήμμα 4.6.** Για  $i \in \{1, 2, \dots, n - 2\}$ , θεωρούμε το στοιχείο

$$v_i = (1\ n\ i + 2 \ \dots \ n - 1)(2\ 3 \ \dots \ i + 1) \in S_n.$$

Η ένωση  $\bigcup_{i=1}^m [e, v_i]$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμη τάξης  $n - 2$  για κάθε  $1 \leq m \leq n - 2$ .

*Απόδειξη.* Η απόδειξη είναι όμοια με αυτή του Λήμματος 4.5 και παραλείπεται.  $\square$

**Λήμμα 4.7.** Έστω  $u_1, u_2, \dots, u_{n-1} \in S_n$  και  $v_1, v_2, \dots, v_{n-2} \in S_n$ , ορισμένα όπως στα Λήμματα 4.5 και 4.6, αντίστοιχα. Αν  $I_n = \bigcup_{i=1}^{n-1} [e, u_i]$  και  $I'_n = \bigcup_{i=1}^{n-2} [e, v_i]$ , τότε το ιδεώδες  $I_n \cap I'_n$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμο τάξης  $n - 3$ .

*Απόδειξη.* Προχωρούμε με επαγωγή στο  $n$ . Για  $n = 3$  το συμπέρασμα είναι τετριμμένο, επομένως υποθέτουμε ότι  $n \geq 4$ . Για  $i, j \in \{2, 3, \dots, n - 1\}$  θέτουμε

$$z_{ij} = (1j + 1 \cdots n - 1)(23 \cdots i)(n)(i + 1 \cdots j)$$

και

$$w_{ij} = (1i + 1 \cdots n - 1)(23 \cdots j)(j + 1 \cdots in).$$

Παρατηρούμε ότι

$$[e, u_i] \cap [e, v_j] = \begin{cases} z_{ij}, & \text{αν } i < j, \\ w_{ij}, & \text{αν } i \geq j, \end{cases}$$

Έστω  $M_i$  το διατακτικό ιδεώδες της  $\text{Abs}(S_n)$  που παράγεται από τα  $w_{ij}$  για  $2 \leq j \leq i - 1$ . Αφού  $z_{ij} \preceq w_{ij}$  για όλα τα  $i, j \in \{2, 3, \dots, n - 1\}$  με  $i \neq j$ , έχουμε ότι  $I_n \cap I'_n = \bigcup_{i=2}^{n-1} M_i$ . Καθένα από τα ιδεώδη  $M_i$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμο τάξης  $n - 3$ , από την Παρατήρηση 4.3 και το Λήμμα 4.6. Δείχνουμε με επαγωγή στο  $k$  ότι το  $\bigcup_{i=2}^k M_i$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμο τάξης  $n - 3$  για κάθε  $k \leq n - 1$ . Υποθέτουμε ότι ισχύει για θετικούς ακέραιους μικρότερους του  $k$ . Αρκεί να δείξουμε ότι το  $M_k \cap \left( \bigcup_{i=2}^{k-1} M_i \right)$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμο τάξης  $n - 4$ . Για  $i \leq k - 1$  έχουμε

$$M_k \cap M_i = \langle v(23 \cdots j)(j + 1 \cdots in)(i + 1 \cdots k) : j = 2, 3, \dots, i - 1 \rangle,$$

όπου  $v = (1k + 1 \cdots n - 1)$ . Η Παρατήρηση 4.3 και το Λήμμα 4.6 δίνουν ότι το  $M_k \cap M_i$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμη διάταξη τάξης  $n - 3$ . Αφού το  $v$  εμφανίζεται στην κυκλική παράσταση κάθε μεγιστικού στοιχείου του  $M_k \cap \left( \bigcup_{i=2}^{k-1} M_i \right)$ , έπεται από την Παρατήρηση 4.3 και την επαγωγή στο  $n$  ότι το  $M_k \cap \left( \bigcup_{i=2}^{k-1} M_i \right)$  είναι επίσης ισχυρά κατασκευάσιμο τάξης  $n - 3$ . Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος.  $\square$

*Απόδειξη Λήμματος 4.4.* Συμβολίζουμε με  $C_n$  το διατακτικό ιδεώδες στον ισχυρισμό του λήμματος. Θα δείξουμε ότι το  $C_n$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμο τάξης  $n - 1$  με επαγωγή στο  $n$ . Το συμπέρασμα είναι άμεσο για  $n \leq 3$ , επομένως υποθέτουμε ότι  $n \geq 4$ . Έχουμε ότι  $C_n = \bigcup_{i=1}^{n-1} [e, w_i]$ , όπου  $w_1 = (12 \cdots n - 1n)$ ,  $w_2 = (12 \cdots nn - 1)$ ,  $\dots$ ,  $w_{n-1} = (1n2 \cdots n - 1)$ . Από την επαγωγή και την Παρατήρηση 4.3, αρκεί να δείξουμε ότι το  $[e, w_{n-1}] \cap \left( \bigcup_{i=1}^{n-2} [e, w_i] \right)$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμο τάξης  $n - 2$ . Παρατηρούμε ότι για  $1 \leq i \leq n - 2$  η τομή  $[e, w_{n-1}] \cap [e, w_i]$  είναι ίση με το ιδεώδες που παράγεται από το  $(12 \cdots n - 1)$  και τα στοιχεία

$$u_{n-i} = (1n - i + 1 \cdots n - 1)(2 \cdots n - in),$$

$$v_{n-i-1} = (1nn - i + 1 \cdots n - 1)(2 \cdots n - i)$$

που ορίστηκαν στα Λήμματα 4.5 και 4.6, αντίστοιχα. Άρα

$$[e, w_{n-1}] \cap \left( \bigcup_{i=1}^{n-2} [e, w_i] \right) = I_n \cup I'_n$$

και το συμπέρασμα έπεται από τα Λήμματα 4.5, 4.6 και 4.7.  $\square$

#### 4.2.2 Το ιδεώδες $\mathcal{J}_n$ της $\text{Abs}(B_n)$

Υπενθυμίζουμε ότι με  $\mathcal{J}_n$  συμβολίζουμε το διατακτικό ιδεώδες της  $\text{Abs}(B_n)$  που παράγεται από τα στοιχεία Coxeter της  $B_n$ . Σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύουμε το Θεώρημα 3. Αφού όλα τα μεγιστικά στοιχεία της απόλυτης διάταξης στη συμμετρική ομάδα είναι στοιχεία Coxeter, το Θεώρημα 3 μπορεί να θεωρηθεί ως ένα  $B_n$ -ανάλογο του Θεωρήματος 1. Όπως και στην περίπτωση της συμμετρικής ομάδας, για το Θεώρημα 1 έχουμε δύο αποδείξεις. Η πρώτη βασίζεται αποκλειστικά στην έννοια του ισχυρά κατασκευάσιμου ιδεώδους, ενώ η δεύτερη χρησιμοποιεί το νηματικό θεώρημα για διατάξεις του Quillen (Θεώρημα 8). Όλες οι αποδείξεις είναι παράλληλες με αυτές των αντίστοιχων αποδείξεων της προηγούμενης παραγράφου.

**Θεώρημα 3.** Η διάταξη  $\mathcal{J}_n$  είναι ομοτοπικά Cohen-Macaulay για κάθε  $n \geq 2$ .

**Πρώτη απόδειξη του Θεωρήματος 3.** Ορίζουμε την επόμενη σχέση ισοδυναμίας μεταξύ των ζευγαρωμένων και ισορροπημένων κύκλων της  $B_n$ .

**Ορισμός 4.1.** Για κύκλους  $u, v$  της  $B_n$  θέτουμε  $u \sim v$  όταν:

- οι  $u, v$  είναι κύκλοι της ίδιας μορφής (δηλαδή και οι δύο ζευγαρωμένοι ή και οι δύο ισορροπημένοι)
- ισχύει  $|u(i)| = |v(i)|$  για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Η σχέση  $\sim$  είναι σχέση ισοδυναμίας. Συμβολίζουμε με  $\bar{u}$  την κλάση ισοδυναμίας της  $u$ . Επιπλέον, αν  $u_1, u_2, \dots, u_k$  είναι ξένοι ανά δύο κύκλοι της  $B_n$ , θέτουμε

$$\bar{u}_1 \bar{u}_2 \cdots \bar{u}_k = \{v_1 \cdots v_k, v_i \in \bar{u}_i, i = 1, 2, \dots, k\} \subseteq B_n.$$

Για παράδειγμα,

$$\overline{((1, 2, 3))} = \{((1, 2, 3)), ((1, -2, 3)), ((1, 2, -3)), ((1, -2, -3))\},$$

$$\overline{[1, 2, 3]} = \{[1, 2, 3], [1, -2, 3], [1, 2, -3], [1, -2, -3]\} \text{ και}$$

$$\overline{((1, 2))} \overline{[3, 4]} = \{((1, 2))[3, 4], ((1, -2))[3, 4], ((1, 2))[3, -4], ((1, -2))[3, -4]\}.$$

Για το υπόλοιπο αυτής της παραγράφου χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό. Έστω  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  μια ακολουθία διακεκριμένων θετικών ακεραίων, με  $a_i \leq n$  για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$ . Στην ακολουθία  $\alpha$  αντιστοιχούμε τους

κύκλους  $[\alpha] = [a_1, a_2, \dots, a_k]$  και  $\langle\langle\alpha\rangle\rangle = \langle\langle(a_1, a_2, \dots, a_k)\rangle\rangle$  της  $B_n$  και τον κύκλο  $(\alpha) = (a_1 a_2 \dots a_k)$  της  $S_n$ . Για να απλοποιήσουμε το συμβολισμό, γράφουμε  $a_i \in \alpha$ , αν το  $a_i$  είναι ένα στοιχείο της ακολουθίας  $\alpha$ . Τέλος, παρατηρούμε ότι για κάθε κύκλο  $u$  της  $B_n$  (αντίστοιχα, της  $S_n$ ) υπάρχει ακολουθία  $\alpha$  όπως παραπάνω, τέτοια ώστε  $u \in \overline{[\alpha]}$  ή  $u \in \overline{\langle\langle\alpha\rangle\rangle}$  (αντίστοιχα,  $u \in \overline{(\alpha)}$ ).

**Παρατήρηση 4.4.** (i) Θεωρούμε τις μεταθέσεις  $u, v \in S_n$  με  $u = (u_1)(u_2) \dots (u_k)$  και  $v = (v_1)(v_2) \dots (v_l)$  γραμμένες ως γινόμενο ξένων κύκλων, όπου  $u_i, v_j, i = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, l$  είναι ακολουθίες όπως παραπάνω. Τότε η τομή

$$\overline{\langle\langle(u_1)\rangle\rangle} \overline{\langle\langle(u_2)\rangle\rangle} \dots \overline{\langle\langle(u_k)\rangle\rangle} \cap \overline{\langle\langle(v_1)\rangle\rangle} \overline{\langle\langle(v_2)\rangle\rangle} \dots \overline{\langle\langle(v_l)\rangle\rangle} \subset B_n$$

είναι ίση με το μερικώς διατεταγμένο υποσύνολο

$$\{w \in \overline{\langle\langle(w_1)\rangle\rangle} \dots \overline{\langle\langle(w_m)\rangle\rangle} : (w_1) \dots (w_m) \in \langle u \rangle \cap \langle v \rangle\}$$

της  $\text{Abs}(B_n)$ .

(ii) Έστω  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  μια ακολουθία όπως παραπάνω. Η κλάση ισοδυναμίας  $\overline{[\alpha]} \subset B_n$  της  $[\alpha]$  συμπεριφέρεται όπως ο κύκλος  $(\alpha)$  της  $S_n$  με την εξής έννοια: αν το  $x \in \text{Abs}(B_n)$  καλύπτεται από κάποιο  $v \in \overline{[\alpha]}$ , τότε ή  $x \in \overline{\langle\langle\alpha\rangle\rangle}$  ή  $x \in \overline{[\gamma]} \overline{\langle\langle\delta\rangle\rangle}$ , όπου  $(\gamma)(\delta)$  καλύπτεται από το  $(\alpha)$  στη διάταξη  $\text{Abs}(S_n)$ . Πιο συγκεκριμένα, αν συμβολίσουμε με  $S$  το σύνολο των μεταθέσεων της  $S_n$  που καλύπτονται από τον κύκλο  $(\alpha)$  και, όμοια, με  $B$  το σύνολο των μεταθέσεων της  $B_n$  που καλύπτονται από στοιχεία της κλάσης  $\overline{[\alpha]}$ , τότε  $B = T_0 \cup T_1 \cup T_2$ , όπου:

$$T_0 = \overline{\langle\langle\alpha\rangle\rangle},$$

$$T_1 = \{x \in \overline{[\gamma]} \overline{\langle\langle\delta\rangle\rangle} : (\gamma)(\delta) \in S \text{ και } \alpha_1 \in \gamma\},$$

$$T_2 = \{x \in \overline{\langle\langle\gamma\rangle\rangle} \overline{[\delta]} : [\gamma](\delta) \in T_1\}.$$

Παρατηρούμε ότι για  $i, j = 0, 1, 2$  με  $i \neq j$  έχουμε

$$T_i \cap T_j = \{x \in \overline{\langle\langle\beta\rangle\rangle} \overline{\langle\langle\gamma\rangle\rangle} : (\beta)(\gamma) \in S\}.$$

(iii) Έστω  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ ,  $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_k)$  δύο ακολουθίες όπως παραπάνω, τέτοιες ώστε  $\overline{[\alpha]} \neq \overline{[\beta]}$ , και έστω  $S$  το υποσύνολο της  $S_n$  που αποτελείται από τα μεγιστικά στοιχεία του ιδεώδους  $\langle\langle\alpha\rangle\rangle \cap \langle\langle\beta\rangle\rangle$ . Υποθέτουμε επιπλέον ότι κάθε στοιχείο του  $S$  έχει απόλυτο μήκος ίσο με  $k - 1$ . Τότε, ως συνέπεια του (ii), το σύνολο των μεγιστικών στοιχείων του  $\overline{\langle\langle\alpha\rangle\rangle} \cap \overline{\langle\langle\beta\rangle\rangle}$  γράφεται ως  $T_1 \cup T_2$ , όπου:

$$T_1 = \{x \in \overline{[\gamma]} \overline{\langle\langle\delta\rangle\rangle} : (\gamma)(\delta) \in S \text{ και } \alpha_1 \in \gamma\},$$

$$T_2 = \{x \in \overline{\langle\langle\gamma\rangle\rangle} \overline{[\delta]} : [\gamma](\delta) \in T_1\}.$$

Επιπλέον έχουμε

$$T_1 \cap T_2 = \{x \in \overline{(\overline{(\gamma)})} \overline{(\overline{(\delta)})} : (\gamma)(\delta) \in S\}.$$

Για παράδειγμα, αν  $\alpha = (1, 2, 3)$  και  $\beta = (1, 3, 2)$ , τότε το σύνολο των μεγιστικών στοιχείων της τομής  $\langle \overline{[\alpha]} \rangle \cap \langle \overline{[\beta]} \rangle = \langle \overline{[1, 2, 3]} \rangle \cap \langle \overline{[1, 3, 2]} \rangle$  είναι ίσο με το σύνολο

$$\{[1] \overline{((2, 3))}, \overline{[1, 2]} \overline{((3))}, \overline{[1, 3]} \overline{((2))}\} \cup \{((1)) \overline{[2, 3]}, \overline{((1, 2))} [3], \overline{((1, 3))} [2]\}.$$

Ωστόσο, αυτό δεν ισχύει αν περιοριστούμε στους αντιπροσώπους της κλάσης. Για παράδειγμα, αν  $u = [1, 2, 3]$  και  $v = [1, 3, 2]$  τότε η μετάθεση  $[1] \overline{((2, 3))}$  είναι ένα μεγιστικό στοιχείο της τομής  $\langle u \rangle \cap \langle v \rangle$ , ενώ η μετάθεση  $((1)) \overline{[2, 3]}$  δεν είναι.

Η παρατήρηση αυτή οδηγεί σε έναν πιο γενικό ισχυρισμό: Έστω  $A$  ένα υποσύνολο της  $S_n$  που αποτελείται από μεταθέσεις που έχουν απόλυτο μήκος ίσο με  $n - k$  (δηλαδή μεταθέσεις της  $S_n$  που έχουν ακριβώς  $k$  κύκλους στην κυκλική τους παράσταση). Στο διατακτικό ιδεώδες  $\langle A \rangle$  της  $\text{Abs}(S_n)$ , τάξης  $n - k$ , αντιστοιχούμε το διατακτικό ιδεώδες  $\overline{\langle A \rangle}$  της  $\text{Abs}(B_n)$ , τάξης  $n - k + 1$  το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$\overline{\langle A \rangle} := \langle x \in \overline{[\alpha_1]} \overline{((\alpha_2))} \overline{((\alpha_3))} \cdots \overline{((\alpha_k))} : (\alpha_1)(\alpha_2)(\alpha_3) \cdots (\alpha_k) \in A \rangle.$$

Υποθέτουμε ότι οι κύκλοι  $(\alpha_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , είναι ξένοι και είναι διατεταγμένοι ολικά έτσι ώστε ο κύκλος  $(\alpha_i)$  να προηγείται του κύκλου  $(\alpha_j)$  αν και μόνο αν ο κύκλος  $(\alpha_i)$  περιέχει έναν ακέραιο ο οποίος είναι μικρότερος από κάθε ακέραιο του  $(\alpha_j)$ . Τότε το ιδεώδες  $\overline{\langle A \rangle}$  είναι ίσο με την ένωση  $\bigcup_{i=1}^k \langle A^i \rangle$ , όπου

$$A^i = \langle x \in \overline{((\alpha_1))} \cdots \overline{((\alpha_{i-1}))} \overline{[\alpha_i]} \overline{((\alpha_{i+1}))} \cdots \overline{((\alpha_k))} : (\alpha_1) \cdots (\alpha_k) \in A \rangle.$$

Επιπλέον, η τομή οποιωνδήποτε δύο ή περισσότερων από τα ιδεώδη  $\langle A^i \rangle$  είναι ίση με  $\langle x \in \overline{((\alpha_1))} \cdots \overline{((\alpha_k))} : (\alpha_1) \cdots (\alpha_k) \in A \rangle$ . Τέλος, αν  $\langle A_1 \rangle, \langle A_2 \rangle$  είναι ιδεώδη της  $\text{Abs}(S_n)$  που παράγονται από τις μεταθέσεις της  $S_n$  με ίσο απόλυτο μήκος, τότε είναι προφανές ότι  $\langle A_1 \rangle \cup \langle A_2 \rangle = \langle A_1 \cup A_2 \rangle$  και το δεύτερο μέρος της Παρατήρησης 4.4 δίνει ότι  $\overline{\langle A_1 \rangle} \cap \overline{\langle A_2 \rangle} = \overline{\langle A_1 \rangle \cap \langle A_2 \rangle}$ .

**Πόρισμα 4.1.** Το διατακτικό ιδεώδες της  $\text{Abs}(B_n)$  που παράγεται από το σύνολο όλων των ζευγαρωμένων  $n$ -κύκλων της  $B_n$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμο τάξης  $n - 1$ .

*Απόδειξη.* Αυτό έπεται άμεσα από την Παρατήρηση 4.4 (i), το Λήμμα 4.8 (το οποίο αποδεικνύεται στο τέλος αυτής της παραγράφου) και την Πρόταση 4.2.  $\square$

Επιστρέφουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 3. Θα δείξουμε ότι το διατακτικό ιδεώδες της  $\text{Abs}(B_n)$  που παράγεται από τα στοιχεία Coxeter της  $B_n$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμο. Η Παρατήρηση 4.4 (iii) μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου. Ως συνέπεια, η απόδειξη του Θεωρήματος 3 προκύπτει με μερικές τροποποιήσεις από την πρώτη απόδειξη του Θεωρήματος 1.

**Πρόταση 4.3.** Το διατακτικό ιδεώδες  $\mathcal{J}_n$  της  $\text{Abs}(B_n)$  που παράγεται από το σύνολο των στοιχείων Coxeter της  $B_n$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμο για κάθε  $n \geq 1$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $R = (\sigma, \tau_0, \dots, \tau_k), S_n(R)$  και  $m \in \mathbb{N}$  όπως ορίστηκαν στην πρώτη απόδειξη του Θεωρήματος 1. Έστω επίσης  $J_n(R)$  το διατακτικό ιδεώδες της  $\text{Abs}(S_n)$  που παράγεται από το σύνολο  $S_n(R)$ . Προφανώς το  $J_n(R)$  είναι διαβαθμισμένο τάξης  $n - k - 1$ . Υπενθυμίζουμε την Παρατήρηση 4.4 (iii) και θεωρούμε το αντίστοιχο ιδεώδες  $\overline{J_n(R)} = \overline{\langle S_n(R) \rangle}$  της  $\text{Abs}(B_n)$ , το οποίο είναι διαβαθμισμένο τάξης  $n - k$ . Για παράδειγμα, έστω  $n = 5$  και  $S((1, 2), \emptyset, \{3, 4\})$ . Τότε

$$S_4(R) = \{(125)(34), (12)(345), (12)(354)\}$$

και

$$\overline{J_4(R)} = \overline{\langle [1, 2, 5]((3, 4)), ((1, 2, 5))[3, 4], [1, 2]((3, 4, 5)), ((1, 2))[3, 4, 5], [1, 2]((3, 5, 4)), ((1, 2))[3, 5, 4] \rangle}.$$

Για να αποδείξουμε την Πρόταση 4.3, αρκεί να δείξουμε ότι το  $\overline{J_n(R)}$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμο. Πράγματι, για  $k = 0$  έχουμε  $\sigma = (1), S = (\sigma, \emptyset)$  και ότι το ιδεώδες  $\overline{J_n(S)}$  ταυτίζεται με το  $J_n$ . Προχωρούμε με επαγωγή στα  $n, n - k$  και  $m$ , με αυτή τη σειρά, για να δείξουμε ότι για κάθε  $R$  το διατακτικό ιδεώδες  $\overline{J_n(R)}$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμο.

Έστω  $n \geq 3$  (διαφορετικά το συμπέρασμα είναι προφανές) και ότι  $k \geq 1$ . Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό της Παρατήρησης 4.4 (iii) γράφουμε το  $\overline{J_n(R)}$  ως την ένωση  $\bigcup_{i=0}^k J_n^i(R)$ . Αν  $m = 0$ , τότε έχουμε τους ισομορφισμούς διατάξεων:

$$J_n^0(R) \cong \overline{J_r(S)} \times A_{r_1} \times \cdots \times A_{r_k}$$

και

$$J_n^i(R) \cong J'_r(S) \times A_{r_1} \times \cdots \times A_{r_{i-1}} \times B_{r_i} \times A_{r_{i+1}} \times \cdots \times A_{r_k},$$

όπου  $S = (\sigma, \tau_0)$ ,  $r$  είναι το πλήθος των στοιχείων του συνόλου  $\{1, 2, \dots, n\}$  που εμφανίζονται στο  $S$  και για  $i \geq 1$ :

- το  $r_i$  είναι ο πληθάρθμος του  $\tau_i$  για  $1 \leq i \leq k$ ,
- $A_{r_i} = \overline{\langle (x) \rangle} : (x)$  είναι στοιχείο Coxeter του  $S_{r_i}$ ,
- $B_{r_i} = \overline{\langle [x] \rangle} : (x)$  είναι στοιχείο Coxeter του  $S_{r_i}$ ,
- $J'_r(S) = \overline{\langle (x) \rangle} : (x) \in J_r(S)$ .

Από το Πρόταση 4.1 έχουμε ότι το ιδεώδες  $A_{r_i}$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμο, για κάθε  $i = 0, 1, \dots, k$ . Επίσης, από επαγωγή στο  $n$ , τα μερικώς διατεταγμένα σύνολα  $J_n^0(R)$  και  $B_{r_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  είναι επίσης ισχυρά κατασκευάσιμα. Παρατηρούμε ότι το ίδιο ισχύει για το ιδεώδες  $J'_r(S)$ . Τέλος, η τομή οποιωνδήποτε δύο ή περισσότερων από τα ιδεώδη  $J_n^i(R)$  είναι ισόμορφη με το γινόμενο  $J'_r(S) \times A_{r_1} \times \cdots \times A_{r_k}$ , το οποίο λόγω του Λήμματος 2.7 είναι επίσης ισχυρά κατασκευάσιμο. Αν  $m \geq 1$ , τότε έχουμε

$$\overline{J_n(R)} = \bigcup_{i=0}^k \overline{J_n(R_i)},$$

όπου το  $R_i$  προκύπτει από το  $R$  τοποθετώντας ένα στοιχείο  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  που δεν εμφανίζεται στο  $R$ , στο σύνολο  $\tau_i$ . Κάθε ιδεώδες  $\overline{J_n(R_i)}$  έχει τάξη  $n - k$  και είναι ισχυρά κατασκευάσιμο από την επαγωγή στο  $m$ . Επιπλέον, η τομή οποιωνδήποτε δύο ή περισσότερων από αυτά τα ιδεώδη είναι ίση με  $\overline{J_n(R)}$ , όπου  $S = (\sigma, \tau_0, \dots, \tau_k, \{j\})$ . Αφού  $\overline{J_n(R)}$  έχει τάξη  $n - k - 1$ , είναι ισχυρά κατασκευάσιμο από την επαγωγή στο  $n - k$ . Έπεται από το Λήμμα 2.7 ότι το  $\overline{J_n(R)}$  είναι επίσης ισχυρά κατασκευάσιμο.

Τέλος, υποθέτουμε ότι  $k = 0$ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $\sigma = (1, 2, \dots, r)$  για κάποιο  $1 \leq r \leq n$ . Αν  $m = 0$ , έτσι ώστε  $r = n$ , τότε  $\overline{J_n(T)} = \langle [1, 2, \dots, n] \rangle$ , το οποίο είναι ισχυρά κατασκευάσιμο από το Λήμμα 4.9 το οποίο αποδεικνύεται στο τέλος αυτής της παραγράφου. Υποθέτουμε ότι  $m \geq 1$ , έτσι ώστε  $r \leq n - 1$ . Για  $r + 1 \leq j \leq n$  θέτουμε  $R_j = (\sigma_j, \emptyset)$ , όπου  $\sigma_j = (1, \dots, r, j)$  προκύπτει από το  $\sigma$  επισυνάπτοντας το  $j$  στο τέλος. Κάθε ιδεώδες  $\overline{J_n(R_j)}$  έχει τάξη  $n$  και είναι ισχυρά κατασκευάσιμο από επαγωγή στο  $m$ . Επιπλέον, έχουμε

$$\overline{J_n(R)} = \bigcup_{j=r+1}^n \overline{J_n(R_j)}.$$

Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι η τομή οποιωνδήποτε δύο ή περισσότερων από τα ιδεώδη  $\overline{J_n(R_j)}$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμα τάξης  $n - 1$ . Έστω  $J$  ένα υποσύνολο του  $\{r + 1, \dots, n\}$  με τουλάχιστον δύο στοιχεία. Από την πρώτη απόδειξη του Θεωρήματος 1 και το τρίτο μέρος της Παρατήρησης 4.4 έπεται ότι

$$\bigcap_{j \in J} \overline{J_n(R_j)} = \overline{J_n(S_0)} \cup \left( \bigcup_{j \in J} \overline{J_n(S_j)} \right), \quad (4.3)$$

όπου  $S_0 = (\sigma, \emptyset, J)$  και  $S_j = (\sigma_j, \emptyset, J \setminus \{j\})$  για  $j \in J$ .

Παρατηρούμε τώρα ότι τα ιδεώδη  $\overline{J_n(S_j)}$  για  $j \in J \cup \{0\}$  έχουν τάξη  $n - 1$  και είναι ισχυρά κατασκευάσιμα από επαγωγή στο  $m$ . Εφαρμόζοντας επαγωγή στον πληθάρθμο του  $J$ , για να δείξουμε ότι η ένωση στο δεξιό μέλος της ισότητας (4.3) είναι ισχυρά κατασκευάσιμη, αρκεί να δείξουμε ότι για  $q \in J$ , η τομή

$$\overline{J_n(S_q)} \cap \left( \bigcup_{j \in (J \setminus \{q\}) \cup \{0\}} \overline{J_n(S_j)} \right)$$

είναι ισχυρά κατασκευάσιμη τάξης  $n - 2$ . Πάλι, από την πρώτη απόδειξη του Θεωρήματος 1 και το τρίτο μέρος της Παρατήρησης 4.4 έπεται ότι η τομή αυτή είναι ίση με το  $\overline{J_n(S)}$ , όπου  $S = (\sigma, \emptyset, J \setminus \{q\}, \{q\})$ . Τέλος, παρατηρούμε ότι το ιδεώδες  $\overline{J_n(S)}$  έχει την επιθυμητή τάξη  $n - 2$  και είναι ισχυρά κατασκευάσιμο από την επαγωγή στο  $n - k$ . Αυτό ολοκληρώνει την επαγωγή, άρα το ιδεώδες  $\overline{J_n(R)}$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμο για κάθε  $R$  και συνεπώς, το  $\mathcal{J}_n$  είναι επίσης ισχυρά κατασκευάσιμο.  $\square$

**Λήμμα 4.8.** Για κάθε ζευγαρωμένο  $k$ -κύκλο  $u \in B_n$ , το διατακτικό ιδεώδες  $\langle \bar{u} \rangle$  του  $\text{Abs}(B_n)$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμο τάξης  $k - 1$ .

*Απόδειξη.* Αρκεί να δείξουμε τον ισχυρισμό για τον κύκλο  $u_k = ((k, k-1, \dots, 2, 1))$ . Για  $i = 1, 2, \dots, k-1$ , έστω

$$A_i^+ = \{((k, k-1, \dots, i+1, \pm i, \dots, \pm 1))\}$$

το σύνολο των ζευγαρωμένων  $k$ -κύκλων  $u \in B_n$  για τους οποίους  $|u(j)| = j-1$ , για  $j = 2, 3, \dots, i+1$  και  $u(j) = j-1$  για  $j = i+2, i+3, \dots, k$ . Όμοια ορίζουμε το σύνολο

$$A_i^- = \{((k, k-1, \dots, i+2, -(i+1), \pm i, \dots, \pm 1))\}.$$

Παρατηρούμε ότι  $\langle A_i^+ \rangle \cong \langle A_i^- \rangle$  για κάθε  $i \leq k-1$  και  $\langle A_i^+ \rangle \subset \langle A_j^+ \rangle$  για  $i < j$ . Επιπλέον,  $A_{k-1}^+ = \bar{u}_k$ , άρα αρκεί να δείξουμε ότι το  $\langle A_i^+ \rangle$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμο τάξης  $k-1$  για κάθε  $i \leq k-1$ . Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο  $i$ . Αν  $i = 1$ , τότε  $\langle A_1^+ \rangle = \langle ((k, k-1, \dots, 2, \pm 1)) \rangle$ , το οποίο είναι προφανώς ισχυρά κατασκευάσιμο. Υποθέτουμε ότι το ίδιο ισχύει για κάθε  $i < l$ . Παρατηρούμε ότι  $A_l^+ = A_{l-1}^+ \cup A_{l-1}^-$ . Από την επαγωγική υπόθεση, αρκεί να δείξουμε ότι η τομή  $\langle A_{l-1}^+ \rangle \cap \langle A_{l-1}^- \rangle$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμη τάξης  $k-2$ . Αυτή η τομή γράφεται ως  $\bigcup_{i=1}^k \langle (\alpha_i) \cdot (\beta_i) \rangle$ , όπου

$$\alpha_i = (k, k-1, \dots, l+1, \pm(l-i), \pm(l-i-1), \dots, \pm 1) \text{ και}$$

$$\beta_i = (l, \pm(l-1), \dots, \pm(l-i+1)).$$

Χρησιμοποιώντας επαγωγή και το Λήμμα 2.6, εύκολα μπορεί κανείς να δει ότι η παραπάνω ένωση είναι ισχυρά κατασκευάσιμη.  $\square$

**Λήμμα 4.9.** Για κάθε ισορροπημένο  $k$ -κύκλο  $u \in B_n$ , το διατακτικό ιδεώδες  $\langle \bar{u} \rangle$  του  $Abs(B_n)$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμο τάξης  $k$ .

*Απόδειξη.* Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή του Λήμματος 4.8. Έστω  $u_k = [k, k-1, \dots, 2, 1]$ . Για  $i = 1, 2, \dots, k-1$ , έστω

$$A_i^+ = \{[k, k-1, \dots, i+1, \pm i, \dots, \pm 1]\}$$

και

$$A_i^- = \{[k, k-1, \dots, i+2, -(i+1), \pm i, \dots, \pm 1]\}.$$

Όπως προηγουμένως, έχουμε ότι  $\langle A_i^+ \rangle \cong \langle A_i^- \rangle$  για κάθε  $i = 1, 2, \dots, k-1$  και  $\langle A_i^+ \rangle \subset \langle A_j^+ \rangle$  για  $i < j$ . Δείχνουμε με επαγωγή στο  $i$  ότι το  $\langle A_i^+ \rangle$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμο τάξης  $k-1$ , για κάθε  $i \leq k-1$ . Αν  $i = 1$ , τότε  $\langle A_1^+ \rangle = \langle [k, k-1, \dots, 2, \pm 1] \rangle$ , το οποίο είναι αποφλοιώσιμο και άρα ισχυρά κατασκευάσιμο. Υποθέτουμε ότι για κάθε  $i < l$  το ιδεώδες  $\langle A_i^+ \rangle$  είναι κατασκευάσιμο τάξης  $k-1$ . Αφού  $A_l^+ = A_{l-1}^+ \cup A_{l-1}^-$ , αρκεί να δείξουμε ότι η τομή  $\langle A_{l-1}^+ \rangle \cap \langle A_{l-1}^- \rangle$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμη τάξης  $k-2$ . Αυτή η τομή γράφεται ως

$$\bigcup_{i=1}^k \langle [\alpha_i][\beta_i] \rangle \cup \bigcup_{i=1}^k \langle (\alpha_i)[\beta_i] \rangle \cup \langle (\gamma) \rangle,$$

όπου

$$\alpha_i = (k, k-1, \dots, l+1, \pm(l-i), \pm(l-i-1), \dots, \pm 1),$$

$$\beta_i = (l, \pm(l-1), \dots, \pm(l-i+1)) \text{ και}$$

$$\gamma = (k, k-1, \dots, l+1, \pm l, \pm(l-1), \dots, \pm 1).$$

Το συμπέρασμα έπεται από επαγωγή, χρησιμοποιώντας τα Λήμματα 2.6 και 4.8 καθώς και την Παρατήρηση 4.4.  $\square$

**Δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος 5.** Χρησιμοποιούμε το νηματικό θεώρημα του Quillen για μερικές διατάξεις (Θεώρημα 8) και εργαζόμαστε όπως στην αντίστοιχη απόδειξη για την περίπτωση της συμμετρικής ομάδας. Έτσι, όπως στην προηγούμενη παράγραφο, ορίζουμε την απεικόνιση

$$f_i : \mathcal{J}_n \rightarrow \mathcal{J}_{n-1} \times \{\hat{0}, \hat{1}\}$$

με

$$f_i(w) = \begin{cases} (\pi_i(w), \hat{0}), & \text{αν } w(i) = i, \\ (\pi_i(w), \hat{1}), & \text{αν } w(i) \neq i. \end{cases}$$

Η απεικόνιση αυτή είναι επιμορφισμός διατάξεων που διατηρεί την τάξη.

Θα χρειαστούμε τα επόμενα λήμματα.

**Λήμμα 4.10.** Για κάθε  $q \in \mathcal{J}_{n-1} \times \{\hat{0}, \hat{1}\}$  έχουμε  $f_n^{-1}(\langle q \rangle) = \langle f_n^{-1}(q) \rangle$ .

*Απόδειξη.* Η απόδειξη του Λήμματος 4.2 εφαρμόζεται λέξη προς λέξη εδώ αν αντικατασταθεί η  $\text{Abs}(S_{n-1})$  από το ιδεώδες  $\mathcal{J}_{n-1}$ . Οι λεπτομέρειες παραλείπονται.  $\square$

**Λήμμα 4.11.** Για κάθε  $u \in \mathcal{J}_{n-1}$ , το διατακτικό ιδεώδες

$$M(u) = \langle v \in \mathcal{J}_n : \pi_n(v) = u \rangle$$

της  $\text{Abs}(B_n)$  είναι ομοτοπικά Cohen-Macaulay τάξης  $\ell_{\mathcal{T}}(u) + 1$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $u = u_1 u_2 \cdots u_l \in \mathcal{J}_{n-1}$ , γραμμένο ως γινόμενο ξένων κύκλων. Για  $i \in \{1, \dots, l\}$ , συμβολίζουμε με  $C(u_i)$  το διατακτικό ιδεώδες του  $\mathcal{J}_n$  που παράγεται από όλους τους κύκλους  $v \in \mathcal{J}_n$  οι οποίοι μπορούν να προκύψουν τοποθετώντας ή το  $n$  ή το  $-n$  σε οποιαδήποτε θέση στον κύκλο  $u_i$ . Το ιδεώδες  $C(u_i)$  είναι διαβαθμισμένο τάξης  $\ell_{\mathcal{T}}(u_i) + 1$  και ομοτοπικά Cohen-Macaulay, από το Λήμμα 4.12 το οποίο αποδεικνύουμε στο τέλος αυτής της παραγράφου. Έστω  $u_1 \cdots \hat{u}_i \cdots u_l$  η μετάθεση που προκύπτει από την  $u$  διαγράφοντας τον κύκλο  $u_i$ . Υποθέτουμε πρώτα ότι το  $u$  έχει έναν ισορροπημένο κύκλο στην κυκλική της παράσταση. Χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 2.1, βρίσκουμε ότι

$$M(u) = \bigcup_{i=1}^l C(u_i) \cdot \langle u_1 \cdots \hat{u}_i \cdots u_l \rangle.$$

Προφανώς το  $M(u)$  είναι διαβαθμισμένο τάξης  $\ell_{\mathcal{T}}(u) + 1$ . Καθένα από τα ιδεώδη  $C(u_i) \cdot \langle u_1 \cdots \hat{u}_i \cdots u_l \rangle$  είναι ισόμορφο με ένα ευθύ γινόμενο ομοτοπικά Cohen-Macaulay διατάξεων και άρα είναι ομοτοπικά Cohen-Macaulay, από το Λήμμα 2.7 (i). Επιπλέον, η τομή οποιωνδήποτε δύο ή περισσότερων από αυτά τα ιδεώδη είναι ίση με  $\langle u \rangle$ , το οποίο είναι ομοτοπικά Cohen-Macaulay τάξης  $\ell_{\mathcal{T}}(u)$ , από το Θεώρημα 3. Υποθέτουμε τώρα ότι το  $u$  δεν έχει ισορροπημένο κύκλο στην κυκλική του παράσταση. Τότε

$$M(u) = \bigcup_{i=1}^l C(u_i) \cdot \langle u_1 \cdots \hat{u}_i \cdots u_l \rangle \cup \langle u[n] \rangle.$$

Όπως προηγουμένως, το  $M(u)$  είναι διαβαθμισμένο τάξης  $\ell_{\mathcal{T}}(u) + 1$ , καθένα από τα ιδεώδη

$$C(u_i) \langle u_1 \cdots \hat{u}_i \cdots u_l \rangle \text{ και } \langle u[n] \rangle$$

είναι ομοτοπικά Cohen-Macaulay και η τομή οποιωνδήποτε δύο ή περισσότερων από αυτά τα ιδεώδη είναι ίση με  $\langle u \rangle$ . Σε κάθε περίπτωση, το συμπέρασμα έπεται από το Λήμμα 2.7 (ii).  $\square$

Επιστρέφουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 3. Εφαρμόζουμε επαγωγή στο  $n$ . Το αποτέλεσμα είναι προφανές για  $n \leq 2$ . Υποθέτουμε ότι το ιδεώδες  $\mathcal{J}_{n-1}$  είναι ομοτοπικά Cohen-Macaulay. Τότε και το ευθύ γινόμενο  $\mathcal{J}_{n-1} \times \{\hat{0}, \hat{1}\}$  είναι ομοτοπικά Cohen-Macaulay, από το Λήμμα 2.7 (i). Θεωρούμε την απεικόνιση

$$f_n : \mathcal{J}_n \rightarrow \mathcal{J}_{n-1} \times \{\hat{0}, \hat{1}\}.$$

Με χρήση του Θεωρήματος 8 και του Λήμματος 4.10, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε  $q \in \mathcal{J}_{n-1} \times \{\hat{0}, \hat{1}\}$  το διατακτικό ιδεώδες  $\langle f_n^{-1}(q) \rangle$  της  $\text{Abs}(B_n)$  είναι ομοτοπικά Cohen-Macaulay. Αυτό ισχύει στην περίπτωση όπου  $q = (u, \hat{0})$  για κάποιο  $u \in \mathcal{J}_{n-1}$ , αφού τότε  $\langle f_n^{-1}(q) \rangle = \langle u \rangle$  και κάθε διάστημα στην  $\text{Abs}(B_n)$  είναι αποφλοιώσιμο από το Θεώρημα 3. Υποθέτουμε ότι  $q = (u, \hat{1})$ . Τότε  $\langle f_n^{-1}(q) \rangle = M(u)$ , το οποίο είναι ομοτοπικά Cohen-Macaulay από το Λήμμα 4.3. Αυτό ολοκληρώνει την επαγωγή και την απόδειξη του θεωρήματος.  $\square$

**Λήμμα 4.12.** (i) Το διατακτικό ιδεώδες του  $\text{Abs}(B_n)$  που παράγεται από όλους τους κύκλους  $u \in B_n$  για τους οποίους  $\pi_n(u) = ((1, 2, \dots, n-1))$  είναι ομοτοπικά Cohen-Macaulay τάξης  $n-1$ .

(ii) Το διατακτικό ιδεώδες του  $\text{Abs}(B_n)$  που παράγεται από όλους τους κύκλους  $u \in B_n$  για τους οποίους  $\pi_n(u) = [1, 2, \dots, n-1]$  είναι ομοτοπικά Cohen-Macaulay τάξης  $n$ .

Το μέρος (i) του Λήμματος 4.12 είναι ισοδύναμο με το Λήμμα 4.4. Η απόδειξη του δεύτερου μέρους είναι ανάλογη με αυτήν του Λήμματος 4.4, με τις επόμενες τροποποιήσεις στους ισχυρισμούς των λημμάτων και στις αποδείξεις τους.

**Παρατήρηση 4.5.** Έστω  $u_1, u_2, \dots, u_m \in B_n$  στοιχεία με απόλυτο μήκος  $k$  τα οποία είναι γινόμενα ξένων ζευγαρωμένων κύκλων και έστω  $v \in B_n$  ένας κύκλος με απόλυτο μήκος  $r$ , ο οποίος είναι ξένος με τον  $u_i$  για κάθε  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Υποθέτουμε ότι η ένωση  $\bigcup_{i=1}^m [e, u_i]$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμη τάξης  $k$ . Τότε το

$$\bigcup_{i=1}^m [e, vu_i] \cong \bigcup_{i=1}^m ([e, v] \times [e, u_i]) = [e, v] \times \bigcup_{i=1}^m [e, u_i]$$

είναι ισχυρά κατασκευάσιμο τάξης  $k + r$ , από το Λήμμα 2.6.

**Λήμμα 4.13.** Για  $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$  θεωρούμε τα στοιχεία

$$u_i = [1, i + 1, \dots, n - 1]((2, 3, \dots, i, n)) \in B_n.$$

Η ένωση  $\bigcup_{i=1}^m [e, u_i]$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμη τάξης  $n - 1$  για κάθε  $1 \leq m \leq n - 1$ .

*Απόδειξη.* Η απόδειξη είναι όμοια με αυτή του Λήμματος 4.5. □

**Παράδειγμα 4.5.** Έστω  $I(n, m)$  η ένωση στον ισχυρισμό του Λήμματος 4.13. Αν  $n = 6$  και  $m = 3$ , τότε το  $I(n, m)$  είναι το διατακτικό ιδεώδες του  $\text{Abs}(B_n)$  που παράγεται από τα στοιχεία  $u_1 = [1, 2, 3, 4, 5]((6))$ ,  $u_2 = [1, 3, 4, 5]((2, 6))$  και  $u_3 = [1, 4, 5]((2, 3, 6))$ . Έχουμε

$$[e, u_3] \cap ([e, u_1] \cup [e, u_2]) = [e, [1, 4, 5]((2, 3))((6))] \cup [e, [1, 4, 5]((3))((2, 6))].$$

Αυτή η ένωση είναι ισχυρά κατασκευάσιμη τάξης 4, οπότε το  $I(n, m)$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμο τάξης 5.

**Λήμμα 4.14.** Για  $i \in \{1, 2, \dots, n - 2\}$  θεωρούμε τα στοιχεία

$$v_i = [1, n, i + 2, \dots, n - 1]((2, 3, \dots, i + 1)) \in B_n.$$

Η ένωση  $\bigcup_{i=1}^m [e, v_i]$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμη τάξης  $n - 1$  για κάθε  $1 \leq m \leq n - 2$ .

*Απόδειξη.* Η απόδειξη είναι όμοια με αυτή του Λήμματος 4.6. □

**Λήμμα 4.15.** Έστω  $u_1, u_2, \dots, u_{n-1} \in B_n$  και  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \in B_n$ , ορισμένα όπως στα Λήμματα 4.13 και 4.14, αντίστοιχα. Αν  $I_n = \bigcup_{i=1}^{n-1} [e, u_i]$  και  $I'_n = \bigcup_{i=1}^{n-2} [e, v_i]$ , τότε το  $I_n \cap I'_n$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμο τάξης  $n - 2$ .

*Απόδειξη.* Προχωρούμε με επαγωγή στο  $n$ . Για  $n = 3$  το συμπέρασμα είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι  $n \geq 4$ . Έστω  $M_i$  το διατακτικό ιδεώδες του  $\text{Abs}(B_n)$  που παράγεται από τα στοιχεία  $w_{ij}$  για  $j \in \{2, 3, \dots, i - 1\}$ , όπου

$$w_{ij} = [1, i + 1, \dots, n - 1]((2, 3, \dots, j))((j + 1, \dots, i, n)).$$

Παρατηρούμε ότι  $I_n \cap I'_n = \bigcup_{i=2}^{n-1} M_i$ . Καθένα από τα ιδεώδη  $M_i$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμο τάξης  $n - 2$ , από την Παρατήρηση 4.5 και το Λήμμα 4.14. Όπως στην απόδειξη του Λήμματος 4.7, μπορεί κανείς να δείξει με επαγωγή στο  $k$  ότι η ένωση  $\bigcup_{i=2}^k M_i$  είναι ισχυρά κατασκευάσιμη για κάθε  $k \leq n - 1$ . □

### 4.2.3 Η διάταξη $\mathbf{Abs}(D_n)$

Στην Παρατήρηση 4.1 είδαμε ότι το διάστημα  $I = [e, [1][2][3][4]]$  της  $\mathbf{Abs}(D_n)$  δεν είναι Cohen-Macaulay πάνω σε κανένα σώμα. Αυτό σημαίνει ότι ούτε η διάταξη  $\mathbf{Abs}(D_n)$  είναι Cohen-Macaulay για  $n \geq 4$  (δες [43, Πρόρισμα 3.1.9]).

# Βιβλιογραφία

- [1] D. Armstrong, *Braid groups, clusters and free probability: an outline from the AIM Workshop, January 2005*, available at <http://www.aimath.org/WWN/braidgroups/>.
- [2] D. Armstrong, *Generalized noncrossing partitions and combinatorics of Coxeter groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **209**, 2009.
- [3] C.A. Athanasiadis, T. Brady and C. Watt, *Shellability of noncrossing partition lattices*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 939–949.
- [4] C.A. Athanasiadis and M. Kallipoliti, *The absolute order on the symmetric group, constructible partially ordered sets and Cohen-Macaulay complexes*, J. Combin. Theory Series A **115** (2008), 1286–1295.
- [5] C.A. Athanasiadis and V. Reiner, *Noncrossing partitions for the group  $D_n$* , SIAM Journal on Discrete Mathematics **18** (2004), 397–417.
- [6] D. Bessis, *The dual braid monoid*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **36** (2003), 647–683.
- [7] P. Biane, *Parking functions of types A and B*, Electron. J. Combin. **9** (2002), Note 7, 5pp (electronic).
- [8] A. Björner, *Shellable and Cohen-Macaulay partially ordered sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **260** (1980), 159–183.
- [9] A. Björner, *Orderings of Coxeter groups*, in *Combinatorics and Algebra, Boulder 1983* (C. Greene, ed.), Contemp. Math. **34**, Amer. Math. Society, Providence, RI, 1984, pp. 175–195
- [10] A. Björner, *Topological methods*, in *Handbook of combinatorics* (R.L. Graham, M. Grötschel and L. Lovász, eds.), North Holland, Amsterdam, 1995, pp. 1819–1872.
- [11] A. Björner and F. Brenti, *Combinatorics of Coxeter groups*, Graduate Texts in Mathematics **231**, Springer-Verlag, New York, 2005.

- [12] A. Björner and M. Wachs, *On lexicographically shellable posets*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 323–341.
- [13] A. Björner, M. Wachs and V. Welker, *On sequentially Cohen-Macaulay complexes and posets*, Israel J. Math. **169** (2009), 295–316.
- [14] A. Björner, M. Wachs and V. Welker, *Poset fiber theorems*, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), 1877–1899.
- [15] N. Bourbaki, *Elements of the history of mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [16] T. Brady, *A partial order on the symmetric group and new  $K(\pi, 1)$ 's for the braid groups*, Adv. Math. **161** (2001), 20–40.
- [17] T. Brady and C. Watt,  *$K(\pi, 1)$ 's for Artin groups of finite type*, in *Proceedings of the Conference on Geometric and Combinatorial group theory, Part I (Haifa 2000)*, Geom. Dedicata **94** (2002), 225–250.
- [18] T. Brady and C. Watt, *Non-crossing partition lattices in finite real reflection groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), 1983–2005.
- [19] R.W. Carter, *Conjugacy classes in the Weyl group*, Compositio Math. **25** (1972), 1–59.
- [20] H.S.M. Coxeter, *Regular polytopes*, third edition, Dover Publications, Inc., New York, 1973.
- [21] H.S.M. Coxeter, *The complete enumeration of finite groups of the form  $R_i^2 = (R_i R_j)^{k_{ij}} = 1$* , J. London Math. Soc. **10** (1935), 21–25.
- [22] P. Diaconis and R.L. Graham, *Spearman's footrule as a measure of disarray*, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B **39** (1977), 262–268.
- [23] P.H. Edelman, *Zeta polynomials and the Möbius function*, European J. Comb. **1** (1980), 335–340.
- [24] S. Fomin and N. Reading, *Root systems and generalized associahedra*, in *Geometric Combinatorics* (E. Miller, V. Reiner and B. Sturmfels, eds.), IAS/Park City Mathematics Series **13**, pp. 63–131, Amer. Math. Society, Providence, RI, 2007.
- [25] I.P. Goulden, A. Nica and I. Oancea, *Enumerative properties of  $NC^B(p, q)$* , preprint, 2007, arXiv: 0708.2212, Ann. Comb. (to appear).
- [26] M. Hochster, *Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials, and polytopes*, Ann. of Math. **96** (1972), 318–337.

- [27] J.E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **29**, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1990.
- [28] M. Kallipoliti, *The absolute order on the hyperoctahedral group*, preprint, March 2010, 26 pages, arXiv:1002.0440v2
- [29] C. Krattenthaler, *Non-crossing partitions on an annulus*, in preparation.
- [30] C. Krattenthaler and T.W. Müller, *Decomposition numbers for finite Coxeter groups and generalized non-crossing partitions*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), 2723–2787.
- [31] G. Kreweras, *Sur les partitions non croisées d'un cycle*, Discrete Math. **1** (1972), 333–350.
- [32] J. Matousek, *Using the Borsuk-Ulam Theorem*, Univesritext, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2003.
- [33] J.R. Munkres *Topological results in combinatorics*, Michigan Math. J. **31** (1984), 113–128.
- [34] A. Nica and I. Oancea, *Posets of annular noncrossing partitions of types B and D*, Discrete Math. **309** (2009), 1443–1466.
- [35] D. Quillen, *Homotopy properties of the poset of non-trivial p-subgroups of a group*, Adv. Math. **28** (1978), 101–128.
- [36] V. Reiner, *Non-crossing partitions for classical reflection groups* Discrete Math. **177** (1997), 195–222.
- [37] G.A. Reisner, *Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings* Adv. Math. **21** (1976), 30–49.
- [38] R.P. Stanley, *Cohen-Macaulay rings and constructible polytopes*, Bull. Amer. Math. Soc. **81** (1975), 133–135.
- [39] R.P. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, Progress in Mathematics **41**, Birkhäuser, Boston, first edition, 1983; second edition, 1996.
- [40] R.P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, vol. 1, Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 1986; second printing, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **49**, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [41] R.P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, vol. 2, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **62**, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [42] T. Tits, *Groupes et géométries de Coxeter*, IHES, 1961.

- [43] M. Wachs, *Poset Topology: Tools and Applications*, in *Geometric Combinatorics* (E. Miller, V. Reiner and B. Sturmfels, eds.), IAS/Park City Mathematics Series **13**, pp. 497–615, Amer. Math. Society, Providence, RI, 2007.
- [44] G.M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, *Grad. Texts in Math.* **152**, Springer-Verlag, New York 1995.