ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Εαρινό Εξάμηνο 2007
Ασκήσεις #1

1. Σχεδιάστε το διάγραμμα Hasse του συνδέσμου των πλευρών της (τρισδιάστατης) τετραγωνικής πυραμίδας.

2. Έστω πολύτοπα $P \subset \mathbb{R}^N$ και $Q \subset \mathbb{R}^M$ διάστασης d και r, αντίστοιχα, και έστω το ευθύ γινόμενο

$$P \times Q \ = \ \{(x, y) \in \mathbb{R}^{N+M} : \, x \in P, \, y \in Q\}.$$

(α) Δείξτε ότι το $P \times Q$ είναι πολύτοπο στον $\mathbb{R}^{N+M}$ διάστασης $d+r$ και ότι οι πλευρές του $P \times Q$ είναι ακριβώς τα σύνολα της μορφής $F \times G$, όπου F είναι πλευρά του P και G είναι πλευρά του Q.

(β) Δείξτε ότι αν υπάρχει πολύτοπο διάστασης $d-1$ με n κορυφές και m έδρες, τότε υπάρχει επίσης πολύτοπο διάστασης d με $2n$ κορυφές και $m+2$ έδρες. Δείξτε επίσης ότι για κάθε ακέραιο $d \geq 2$ υπάρχει απλό πολύτοπο διάστασης d με $2d$ κορυφές και $d+2$ έδρες.

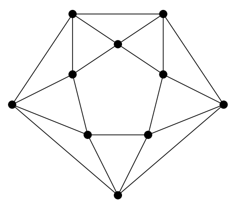
3. Υπολογίστε το πλήθος των πλευρών του d-διάστατου κύβου

$$C_d \ = \ \{(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \, -1 \leq x_j \leq 1, \, 1 \leq j \leq d\}.$$

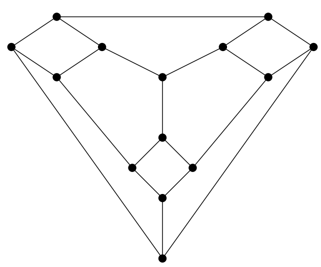
Πόσες από τις πλευρές αυτές έχουν διάσταση i για $-1 \leq i \leq d$;

4. Δείξτε ότι τα μονόπλοκα είναι τα μόνα πολύτοπα διάστασης $d \geq 3$ που είναι ταυτόχρονα απλά και μονοπλεκτικά.

5. Εξετάστε αν τα παρακάτω γραφήματα (α) και (β) είναι ισόμορφα με το γράφημα ενός τρισδιάστατου και τετραδιάστατου, αντίστοιχα, κυρτού πολυτόπου.



(b)



(a)

Υπόδειξη για το (β): Πόσες έδρες μπορεί να έχει ένα τέτοιο πολύτοπο;

Έως Τετάρτη, 7 Νοεμβρίου

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Εαρινό Εξάμηνο 2007
Ασκήσεις #2

6. Υπάρχει πολύτοπο P διάστασης $d \geq 3$ τέτοιο ώστε κάθε πλευρά του P διάστασης 2 να έχει τουλάχιστον έξι κορυφές;

7. Έστω Q πολύτοπο διάστασης $d-1$ στον $\mathbb{R}^d$.

(α) Αν $P = \mathrm{conv}(Q \cup \{p\})$, όπου $p \in \mathbb{R}^d \setminus \mathrm{aff}(Q)$, υπολογίστε το f-διάνυσμα του P από το f-διάνυσμα του Q (το πολύτοπο P είναι η *πυραμίδα* πάνω στο Q με κορυφή το σημείο p).

(β) Έστω $R = \mathrm{conv}(Q \cup I)$, όπου I είναι ευθύγραμμο τμήμα στον $\mathbb{R}^d$ τέτοιο ώστε το $\mathrm{relint}(Q) \cap \mathrm{relint}(I)$ να έχει ακριβώς ένα στοιχείο. Υπολογίστε το f-διάνυσμα του R από το f-διάνυσμα του Q (το πολύτοπο R είναι η *διπυραμίδα* πάνω στο Q με κορυφές τα άκρα του I).

8. Βρείτε το μέγιστο δυνατό πλήθος κορυφών ενός πολυτόπου διάστασης d με $2d$ έδρες, για $d = 3$ και $d = 4$. *Υπόδειξη*: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το Θεώρημα του Άνω Φράγματος.

9. Έστω το d-διάστατο πολύτοπο

$$C_d^\Delta \ = \ \mathrm{conv}\left(\{\pm e_1, \pm e_2, \ldots, \pm e_d\}\right) \ \subset \ \mathbb{R}^d.$$

(α) Δείξτε ότι το πολύτοπο C_d^Δ είναι μονοπλεκτικό.

(β) Έστω $V = \{x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots, y_d\}$ και K το αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα στο σύνολο κορυφών V για το οποίο για $F \subseteq V$ ισχύει $F \in K$ αν και μόνο αν δεν υπάρχει δείκτης $1 \leq i \leq d$ με $\{x_i, y_i\} \subseteq F$. Δείξτε ότι το συνοριακό σύμπλεγμα του C_d^Δ είναι γεωμετρική υλοποίηση του K.

10. Έστω P μονοπλεκτικό πολύτοπο διάστασης d. Αν το P είναι k-γειτονικό για κάποιο ακέραιο $k > \lfloor d/2 \rfloor$, δείξτε ότι το P είναι μονόπλοκο.

Έως Τετάρτη, 28 Νοεμβρίου

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Εαρινό Εξάμηνο 2007
Ασκήσεις #3

11. Για ακεραίους $1 \leq d \leq n$, έστω μονόπλοκο P διάστασης $n-1$ και έστω Δ το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα των πλευρών του P διάστασης μικρότερης του d. Δείξτε ότι το σύμπλεγμα Δ είναι αποφλοιώσιμο και υπολογίστε την ανηγμένη χαρακτηριστική Euler του Δ.

12. Έστω ακέραιος $d \geq 1$. Βρείτε όλα τα αγνά μονοπλεκτικά συμπλέγματα Δ διάστασης d για τα οποία κάθε ολική διατάξη των εδρών του Δ είναι αποφλοίωση του Δ.

13. Δείξτε ότι κάθε πεπερασμένο αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα διάστασης $d-1$ έχει γεωμετρική υλοποίηση στο χώρο $\mathbb{R}^{2d-1}$. *Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε την καμπύλη

$$\gamma(t) = (t, t^2, \ldots, t^{2d-1})$$

στο χώρο $\mathbb{R}^{2d-1}$.

14. Υπολογίστε το h-διάνυσμα του d-διάστατου κύβου.

15. Έστω P η κυρτή θήκη του συνόλου των μεταθέσεων του $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ στο χώρο $\mathbb{R}^n$.

(α) Δείξτε ότι το σύνολο P είναι απλό πολύτοπο διάστασης $n-1$.

(β) Δείξτε ότι για $1 \leq i \leq n$, το $f_{n-i}(P)$ είναι ίσο με το πλήθος των ακολουθιών $(S_1, S_2, \ldots, S_i)$, όπου τα S_j είναι ξένα ανά δύο, μη κενά υποσύνολα του $[n]$ η ένωση των οποίων είναι ίση με $[n]$.

(γ) Δείξτε ότι για $0 \leq i \leq n-1$, το $h_i(P)$ είναι ίσο με το πλήθος των μεταθέσεων w του $[n]$ που έχουν i καθόδους, δηλαδή ότι

$$h_i(P) \;=\; \#\{w \in S_n : \mathrm{des}(w) = i\},$$

όπου για τη μετάθεση $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ του $[n]$ ορίζουμε $\mathrm{des}(w) = \#\{j \in [n-1] : w_j > w_{j+1}\}$.

Έως Τετάρτη, 19 Δεκεμβρίου

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Εαρινό Εξάμηνο 2007
Ασκήσεις #4

16. Έστω ακέραιοι $0 \leq i \leq d$. Βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του $f_i(P)$ αν το P είναι κυρτό πολύτοπο διάστασης d.

17. Έστω $e_1, e_2, \ldots, e_d$ η ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^d$ και $Z \subseteq \mathbb{R}^d$ το ζωνότοπο που ορίζεται ως το άθροισμα Minkowski των ευθυγράμμων τμημάτων $[-e_i, e_i]$ για $1 \leq i \leq d$ και $[e_i - e_j, e_j - e_i]$ και $[-e_i - e_j, e_i + e_j]$ για $1 \leq i < j \leq d$.

(α) Είναι το Z απλό πολύτοπο;

(β) Πόσες κορυφές έχει το Z;

18. Έστω $\mathcal{A}$ παράταγμα $n \geq d$ υπερεπιπέδων στον $\mathbb{R}^d$ σε γενική θέση, δηλαδή οποιαδήποτε d από τα υπερεπίπεδα της $\mathcal{A}$ τέμνονται σε ακριβώς ένα σημείο και οποιαδήποτε $d+1$ έχουν κενή τομή. Δείξτε ότι το πλήθος των περιοχών της $\mathcal{A}$ είναι ίσο με

$$\sum_{i=0}^{d} \binom{n}{i}.$$

19. Ένα πολύτοπο $P \subset \mathbb{R}^d$ έχει κεντρική συμμετρία αν $x \in P \Rightarrow -x \in P$. Αποφανθείτε αν ισχύει η εξής πρόταση: Κάθε πολύτοπο διάστασης d με κεντρική συμμετρία έχει τουλάχιστον 3^d μη κενές πλευρές.

20. Πόσοι συνδυαστικοί τύποι ισομορφισμού τρισδιάστατων ζωνότοπων με πέντε ζώνες (δηλαδή πέντε γραμμικά ανεξάρτητους γεννήτορες) υπάρχουν; *Υπόδειξη:* Θεωρήστε τους αντίστοιχους σχηματισμούς σημείων στο επίπεδο.

Έως Τετάρτη, 9 Ιανουαρίου